

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
АКАДЕМИЯ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А. И. ГЕРЦЕНА

ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ И ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Материалы научной конференции
ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2015
13–17 апреля 2015 г.

LXVIII

Санкт-Петербург
Издательство РГПУ им. А. И. Герцена
2015

ББК 22.1.431
Н 47

*Печатается по решению
Оргкомитета конференции*

Редакционная коллегия: д. ф. -м. н., профессор **Зайцев В. Ф.**
д. ф. -м. н., профессор **Будаев В. Д.**
д. ф. -м. н., профессор **Флегонтов А. В.**

Рецензенты: д. ф. -м. н., профессор **Ханин С. Д.**
д. ф. -м. н., профессор **Широков Н. А.**

Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2015. Материалы научной конференции, 13–17 апреля 2015 г. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – 240 с.

ISBN 978–5–8064–2095–5

Материалы 68-ой научной конференции “Герценовские чтения”, проходившей при кафедре математического анализа и кафедре информационных систем и программного обеспечения РГПУ им. А. И. Герцена 13–17 апреля 2015 г. Представленные статьи подготовлены по наиболее содержательным докладам пяти основных секций: “Современные проблемы теории дифференциальных уравнений”, “Современные проблемы теории функций и функционального анализа”, “Актуальные проблемы математического образования”, “Актуальные информационные системы и технологии моделирования” и “Некоторые проблемы геометрии и топологии”.

Результаты работ рекомендуется использовать при чтении спецкурсов, а также как материал для научной работы аспирантов, магистрантов, студентов старших курсов математических факультетов.

ББК 22.1.431

ISBN 978–5–8064–2095–5

© Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2015
© Коллектив авторов, 2015

История и современность

УДК 929

СВЕТЛОЙ ПАМЯТИ ВИКТОРА СОЛОМОНОВИЧА ВИДЕНСКОГО 17.05.1922 — 03.02.2015

Будаев В. Д., Якубсон М. Я.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: michaeljackubson@mail.ru



В. С. Виденский

3 февраля 2015 года на 93 году жизни ушёл из жизни профессор кафедры математического анализа, почётный профессор РГПУ им. А. И. Герцена Виктор Соломонович Виденский. Виктор Соломонович работал в нашем университете (до 1991 года – институте) 47 лет (с 1967 года, включая текущий 2014–2015 учебный год).

Подробные научные биографии Виктора Соломоновича приведены в статье [1] и сборнике [2]. Наряду с официальными сведениями авторы используют и некоторые воспоминания Виктора Соломоновича, которые мы слышали в разное время на его выступлениях перед студентами и в разговорах с коллегами.

Виктор Соломонович родился в 1922 г. в Бердичеве. В 1929 году их семья переехала в Винницу. В этом городе прошли школьные годы Виктора Соломоновича. По его словам, интерес к математике пробудила книга академика Хинчина “Три жемчужины теории чисел” [3]. В 1940 году В. С. Виденский поступил

на матмех Киевского Университета. Первый курс он зачислял в июне 1941. Во время экзамена по алгебре была объявлена воздушная тревога, и преподаватель предложил студентам спуститься в бомбоубежище, но они гордо отказались.

По состоянию здоровья Виктор Соломонович не был призван в армию и эвакуировался в Ташкент. Там он учился в Московском автодорожном институте (МАДИ), и вместе с ним в 1943 году переехал в Москву, однако целью его был мехмат МГУ. В декабре 1943 В. С. Виденский стал вольнослушателем мехмата, параллельно продолжая учиться в МАДИ, так как там давали продовольственные карточки. Только в 1945 г. ему удалось перевестись в Университет, который Виктор Соломонович закончил в 1947 г. Большую помощь при переводе оказал академик А. Н. Колмогоров [19]¹.

Жить тогдашним студентам было трудно, они реально голодали. Однако страсть, с которой они занимались математикой, помогала справиться с трудностями жизни. Об этом Виктор Соломонович всегда вспоминал, когда в 90-е годы и позже слышал разговоры о том, что “в наше трудное время” не до математики, преподавания и прочих высоких материй. Матмех Московского Университета в военные и первые послевоенные годы был удивительным местом по научному и интеллектуальному уровню. Там преподавали П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, С. Н. Бернштейн, А. Я. Хинчин, А. Г. Курош, И. М. Гельфанд, А. О. Гельфонд, Н. К. Бари [20] и другие великие. Не меньше, чем лекции и семинары, давали студентам свободные разговоры о математике в коридоре старого здания МГУ. Виктор Соломонович был аспирантом А. О. Гельфонда, ещё в аспирантуре он стал работать в Математическом институте им. В. А. Стеклова под руководством академика С. Н. Бернштейна.

Научные интересы В. С. Виденского определились еще в студенческие годы. Он занимался конструктивной теорией функций. Его работы посвящены приближению функций различных классов с помощью “более простых” функций: многочленов, тригонометрических многочленов и т. д. С этим кругом вопросов связаны задачи об оценках производных алгебраических и тригонометрических многочленов, рациональных дробей и других функций. Другая крупная тема в научном творчестве В. С. Виденского – теория линейных положительных операторов. Напомним, что положительным называют оператор, переводящий положительные элементы некоторого упорядоченного пространства в положительные. Пример – многочлены Бернштейна, которым Виктор Соломонович посвятил книгу [11]. Более подробно о научных работах Виктора Соломоновича см. [1], мы же приводим в библиографии те его работы, которые он сам в своё время назвал наиболее значимыми [4–13].

После окончания МГУ Виктор Соломонович работал вместе со своим учителем Сергеем Натановичем Бернштейном. Огромную роль сыграл Виктор Соломонович в работе над подготовкой собрания сочинений С. Н. Бернштейна [15]. Биографии учителя Виктор Соломонович посвятил замечательную статью [16].

В 1962 году В. С. Виденский переехал в Ленинград, в 1967 возглавил кафедру математического анализа ЛГПИ им. А. И. Герцена, кафедрой он заведовал до 1978 года, а в должности профессора этой кафедры работал до самой

¹Это – последняя публикация Виктора Соломоновича.

смерти.

Наряду с математикой Виктор Соломонович много занимался историей науки. У него были аспиранты по истории математики, он состоял в Комиссии по истории математики Санкт-Петербургского Математического общества. Одно из последних выступлений Виктора Соломоновича состоялось на семинаре по истории математики Санкт-Петербургского Математического общества. Виктор Соломонович излагал свою версию того, как С. Н. Бернштейн открыл полиномы, названные его именем. Этой теме посвящена статья [17], видеозапись выступления на семинаре доступна по адресу [18].

Замечательны были открытые лекции Виктора Соломоновича по истории математики. Нам посчастливилось слушать его рассказы про Эйлера, Паскаля, Чебышёва, Маркова. Вот несколько запомнившихся фрагментов.

Говоря об Эйлере, Виктор Соломонович опровергал иногда встречающееся мнение, что обозначение знаменитого числа e Эйлер ввёл в свою честь. Он всегда считал, что такого не могло быть, это несовместимо с личностью Эйлера, скромного и достойного человека. Оказалось, что в работах Эйлера число обозначено через c – константа, так что e – типографская опечатка.

Говоря о книге “Дело академика Лузина” [14], посвященной травле выдающегося математика и педагога Н. Н. Лузина, в которой приняли более или менее активное участие его ученики, великие советские математики, Виктор Соломонович рассказывал о том, как учился у них через 10 лет после печальных событий дела Лузина. Он подчеркивал, что эти крупнейшие математики заботливо и бережно относились к студентам. По его мнению, этим они искупали и искупили свою вину.

Есть теория, что все люди на Земле знакомы друг с другом через цепочку длиной не больше, чем в 5–6 рукопожатий. Те, кто был знаком с Виктором Соломоновичем, находятся на расстоянии в 2 рукопожатия от Колмогорова, Александрова, Гельфонда, Бернштейна, в 3 рукопожатия от Гильберта, в 4 рукопожатия от Вейерштрасса.

Общение с Виктором Соломоновичем Виденским, выдающимся хранителем традиций нашей науки и образования, было редким счастьем для всех, кто его знал.

Вечная память.

Литература

- [1] Жук В. В., Малозёмов В. Н., Натансон Г. И., Хавин В. П. Виктор Соломонович Виденский (к восьмидесятилетию со дня рождения) // УМН 2002. Т. 57, вып. 5. – С. 182–186. [М.: АГАР, 1999. – 332 с.]
- [2] Будаев В. Д., Вернер А. Л., Евсеев А. Е. и др. Выдающиеся математики–герценовцы. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2005. – 169 с.
- [3] Хинчин А. Я. Три жемчужины теории чисел. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 72 с. [М.: “МЦНМО”, 2008. – 400 с.]
- [4] Виденский В. С. О неравенствах относительно производных многочлена // ДАН СССР 1949. Т. 67, № 5. – С. 777–780.

- [5] Виденский В. С. Экстремальные оценки производной тригонометрического полинома на отрезке, меньшем, чем период // ДАН СССР 1960. Т. 130, № 1. – С. 13–16.
- [6] Виденский В. С. Применение теории целых функций к построению и исследованию N -функций, дополнительных к заданным N -функциям // ДАН СССР 1958. Т. 121, № 2. – С. 202–205.
- [7] Виденский В. С. Качественные вопросы теории наилучшего приближения функций комплексного переменного // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Сб. статей под ред. А. И. Маркушевича. – М., 1960. – С. 258–272.
- [8] Виденский В. С. Экстремальные оценки производных полинома на отрезке // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Сб. статей под ред. В. И. Смирнова. – М., 1961. – С. 98–106.
- [9] Виденский В. С. Взвешенные приближения и полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля // УМН 1962. – Т. 17, № 5(107) – С. 211–217.
- [10] Виденский В. С. Линейные положительные операторы конечного ранга. – Л.: ЛГПИ, 1985. – 68 с.
- [11] Виденский В. С. Многочлены Бернштейна. – Л.: ЛГПИ, 1990. – 63 с.
- [12] Videnskii V. S. New topic concerning approximation by positive linear operators // Proc. international conf. “Open problems in approximation theory”. – Bulgaria, 1993. – P. 205–212.
- [13] Videnskii V. S. On some classes of q -parametric positive linear operators // Operator theory: Advances and Applications 2005. V. 158. – Basel: Birkhauser Verlag – P. 213–222.
- [14] Демидов С. С., Левшин Б. В. (отв. ред.) Дело академика Николая Николаевича Лузина. – СПб: РХГИ, 1999.
- [15] Бернштейн С. Н. Собрание сочинений, т. 1–2. – М.: АН СССР, 1952–54.
- [16] Виденский В. С. Академик Сергей Натанович Бернштейн (к 120-летию со дня рождения) // Вестник молодых ученых 4’2000. Серия: прикладная математика и механика 2’2000. – С. 2–11.
- [17] Виденский В. С. К столетию открытия полиномов Бернштейна // Избранные главы дискретного гармонического анализа и геометрического моделирования. Часть вторая. Под ред. проф. В. Н. Малозёмова. – СПб.: СПбГУ, 2014. – С. 564–570.
- [18] http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=8291
- [19] Виденский В. С. Академик Андрей Николаевич Колмогоров // Математика в высшем образовании 2014. № 12. – С. 63–66.
- [20] Виденский В. С. “Бэра бери, Бари” (К 100-летию со дня рождения Н. К. Бари) // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 7(42). – М.: Янус-К, 2002. – 378 с.

ЖИЗНЬ ВО ВРЕМЕНА ПЕРЕМЕН. К 92 ГОДОВЩИНЕ ГИБЕЛИ ПРОФЕССОРА РОМАНА ОРЖЕНЦКОГО

Одинец В. П.¹, Щукин Е. И.²

Сыктывкарский государственный университет¹

Сыктывкар

Ярославский государственный педагогический²

университет им. К. Д. Ушинского

Ярославль

e-mail: w.p.odyniec@mail.ru

Odyniec W. P., Shchukin E. I. Life in times of change (to the 92 anniversary of the death of Professor Roman Orzęcki). Some facts on the biography of well-known statistician R. Orzęcki who was assassinated in Poland 92 years ago are considered.

Рассматриваются некоторые факты, касающиеся биографии известного статистика Р. Орженцкого, убитого в Польше 92 года назад.

Известный статистик и экономист Роман Орженцкий (Roman Orzęcki¹: 16(28).02.1863 – 25.05.1923) прожил 60 лет. Он был смертельно ранен 24 мая 1923 года взрывом бомбы, подложенной на лестничной площадке бывшего ректорского дома, на территории Варшавского университета, где в служебной квартире временно жил. Р. Орженцкий только два месяца как прибыл в Польшу из недавно образованного СССР, но уже был избран профессором политэкономии Варшавского университета, а, значит, и заведующим кафедрой, и с середины апреля начал уже читать лекции.

Взрыв в Варшавском университете был очередным в серии взрывов апреля–мая 1923 года: взрывы гремели под зданиями газет в Варшаве и под домом ректора Ягеллонского университета в Кракове. За полгода до описываемых событий (16.12.1922) был застрелен первый избранный Президент Польши Габриэль Нарutowич (Gabriel Narutowicz: 1865–1922) – ранее профессор-гидроинженер Технологического института в Цюрихе.

Мы ещё вернёмся к этим событиям, а пока, хотя бы вкратце, представим биографию Р. Орженцкого.

Его жизнь можно условно разбить на несколько периодов: 1) Одесский (1878–1906); 2) Ярославский (1907–1917); 3) Петроградско-Московский (1918–1920); 4) Киевский (1920–1922); 5) Варшавский (1923).

Если Одесский, Ярославский, Московский и Киевский периоды описаны достаточно подробно (перечислены только важнейшие: [1]–[4]), то о Петербургском (Петроградском) известны лишь фрагменты, а о Варшавском периоде в силу ряда причин вообще умалчивалось. Им и будет посвящено основное внимание.

Роман Орженцкий родился в г. Житомире в 1863 году. В 1878 г. семья Орженцких переехала в Одессу, где Роман стал учиться в третьей гимназии, ко-

¹Польское произношение фамилии: Оженцки – “р” не читается, а буква “ę” – носовая.

торую окончил через год с серебряной медалью. По желанию родителей Роман поступил в Киевский Св. Владимира университет на медицинский факультет. Проучившись три года, он круто меняет профессию и переводится в Новороссийский университет (Одесса) на факультет права. Пять лет учебы, и в 1887 г. он уже кандидат права. С этого года Р. Орженцкий – вначале делопроизводитель, а затем чиновник по разным судебным делам. С 1891 г. начинает читать лекции вначале в коммерческой школе, а затем в школе торгового мореплавания. Свободное время посвящает науке.

В 1895 году выходит его небольшая книжка “Полезность и цена” [5], написанная в духе австрийской экономической школы. Тем не менее, новым было разбиение множества предпочтений (в теории спроса) на два класса: психологического (например, мода) и экономического (цена). Заметим, что модель фон Неймана динамической системы роста экономики [6] 1937 года ещё не предполагала такого разбиения. Оно было сделано существенно позже.

В декабре 1897 г. Р. Орженцкий защищает магистерскую диссертацию в Новороссийском университете “Учение о ценности у классиков и канонистов²”, и тогда же начинает читать лекции по статистике в качестве приват-доцента Новороссийского университета.

Во время революции 1905 г. Р. Орженцкого в мае отстраняют от преподавательской деятельности, но возвращают в университет в ноябре того же года.

Осенью 1906 года Ярославский юридический Демидовский лицей избирает Р. Орженцкого экстраординарным профессором по кафедре политической экономии и финансовой науки. В 1910 г. выходит его знаменитая книга “Сводные признаки”. Именно на основе этой работы 16 (29) декабря 1912 г. Орженцкий защитил докторскую диссертацию “Элементарная теория статистических величин и вычислений” (подробнее см. [7], с. 121) в Петербургском университете, а через полтора года в 1914 г. Орженцкого утвердили ординарным профессором Демидовского лицея.

8–16 июня 1918 г. Орженцкий принимает участие в работе Всероссийского статистического съезда, где было принято решение об организации Методического отдела ЦСУ, который и возглавил Орженцкий. 27 сентября 1918 г. он покидает Ярославль и переезжает в Москву.

В августе 1919 г. он переезжает в Киев, поскольку в июне 1919 г. он был избран академиком Академии наук Украины (АНУ). С 1920 г. он заведует кафедрой теоретической экономии в АНУ, а с 1921 г. по 1922 г. одновременно руководит Социально-экономическим отделом АНУ.

11 декабря 1922 г. он получает разрешение на полугодовую командировку в ЦСУ Украины в Харьков. Едет с женой Г. П. Зелигер и сыном от первого брака Михаилом (р. 1891). Как они попали в Польшу – мы не знаем. Возможно, они ехали через Ригу. Но как бы там ни было, к апрелю 1923 г. Орженцкий избран уже профессором кафедры политэкономии Варшавского университета и начинает чтение лекций.

²Канонисты – ученые, представители науки канонического, или церковного права. Церковное право преподавалось на юридических факультетах университетов наряду с римским правом.

Теперь вернёмся в 1908 год. В обширной статье М. В. Птухи³ ([4], с. 2) упоминается, что с осени 1908 г. Орженцкий еженедельно ездит в Петербург и преподаёт там “политическую экономику и статистику на курсах Раева, Стоюниной и Побединского”.

Начнём с того, что у Марии Николаевны Стоюниной не было курсов, а была частная женская гимназия, основанная в 1881 г. и просуществовавшая до 1918 года. Располагалась гимназия после 1906 г. на Кабинетской ул. (ныне ул. Правды), д. 20. Ни статистики, ни политэкономии там не преподавалось, но был предмет “юриспруденция”, и его действительно мог преподавать Орженцкий. Архив этой гимназии не сохранился.

Высшие женские историко-литературные и юридические курсы Николая Павловича Раева размещались с 1908 г. на Гороховой ул. д. 20. 8 ноября 1908 г. Н. П. Раев ходатайствовал у попечителя округа о приглашении преподавателя статистики Р. М. Орженцкого. В связи с малочисленностью юридического факультета Курсов Раев просил утвердить у попечителя округа увольнение с 1 сентября 1911 г. преподавателей ... Р. М. Орженцкого (среди слушательниц юридического факультета Курсов отметим переведенную в 1910 г. из Киева с юридического факультета Высших женских курсов Анну Ахматову (1889–1966), см. [8]).

В 1906 г. Коммерческие курсы⁴ Михаила Владимировича Побединского (1859–1926) получили статус высшего учебного заведения. Статистика вместо факультатива стала преподаваться на постоянной основе. В числе преподавателей в 1909–1913 годы есть и Р. М. Орженцкий (см. [9]).

К 1914 году относится издание в Санкт-Петербурге учебника по математической статистике Орженцкого. Это была попытка написания популярного пособия для обработки статистических результатов. В этой книге неслучайно много места уделено моде – значению во множестве наблюдений, которое встречается наиболее часто, т. е. мода – это типичность. В частности, Орженцкий даёт простое правило неподчинения набора данных нормальному закону – мультимодальность данного набора [10].

Что касается 1918–1919 гг., то архивных документов о работе Р. М. Орженцкого в должности ординарного профессора Петроградского университета пока не найдено, хотя есть косвенные подтверждения его работы в этой должности.

Переходим к заключительной части нашей статьи. Итак, 24 мая в 21.00 раздался такой взрыв, который был слышен во всей Варшаве. Вышедший за минуту до взрыва из квартиры на лестничную площадку вместе с сыном Орженцкий, почувствовав запах горелого, велел сыну вернуться, а сам стал спускаться. После взрыва лестничная площадка обрушилась. Только ночью под завалами отыскивали Орженцкого. У него были оторваны ноги, и он потерял много крови. Сделанные операции по ампутации ног уже не помогли. В 10.30 утра Орженц-

³Михаил Васильевич Птуха (1884–1961) окончил (1910) юридический факультет Петербургского университета, профессор его Пермского отдела (с 1916), с 1920 г. академик АН Украины по отделению экономики, демографии и статистики, с 1943 г. – член-корреспондент АН СССР.

⁴В 1917 г. Высшие коммерческие курсы М. В. Побединского были по указу Временного правительства преобразованы в Торгово-промышленный институт.

кий скончался. О происшедшем написали все газеты. Была назначена награда за поимку преступников. Собравшееся на срочное заседание правительство чуть не ввело в стране чрезвычайное положение.

Прошло 3 месяца, и в полицию обратился бывший член компартии Польши. На основе его показаний были проведены аресты нескольких человек, двух из которых первоначально осудили на смертную казнь, замененную на пожизненное заключение, а главного подозреваемого, “горбуна”, в 1925 г. выпустили за отсутствием улик. Он через Гданьск в 1926 г. бежал в СССР, где уже в 1938 году был расстрелян [11].

В заключение нам остаётся ещё отметить статью, вышедшую в Италии уже после смерти Орженцкого: “О логических основах статистического метода” [12], которая не фигурирует ни в одном списке его трудов.



Р. М. Орженцкий

Литература

- [1] Роман Михайлович Орженцкий // Статистический Бюллетень Одесского губернского Статистического бюро, 1923. № 5–6. – С. 161–170.
- [2] Завьялов Ф. Н. Орженцкий и его значение в статистике // Высшее образование в России: история, проблемы, перспективы / Под ред. А. М. Селиванова. – Ярославль: Яросл. Гос. ун-т, 1994. Вып. 1. – С. 35–38.
- [3] Диденко О. Н. Р. М. Орженцкий – организатор научного отдела статистической методологии при центральном управлении государственной статистики // Фундаментальные исследования. 2013. № 10. – С. 3215–3218.
- [4] Птуха М. В. Академик Роман Михайлович Орженцкий // Записки Соціально-Економічного Відділу в У.А.Н. – Київ, 1926. Т. 2–3. – С. 1–19.
- [5] Орженцкий Р. Полезность и цена. Политико-экономический очерк. – Одесса, 1895. – 91 с.
- [6] von Neumann J. Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwschen Fixpunktsatzes // Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, 1935–1936. № 8. – Leipzig–Wien, 1937.

- [7] История развития экономики и экономической мысли. Письма М. В. Птухи к В. И. Борткевичу (Предисл. А. Л. Дмитриева) // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2010. Сер. 5, Вып. 4. – С. 119–128.
- [8] ЦГИА СПб, Фонды учебных и воспитательных заведений, фонд высших учебных заведений, Петроградские высшие женские историко-литературные и юридические курсы Раева. Ф. 52, 1906–1922, оп. 1–4.
- [9] ЦГИА СПб, Фонды учебных и воспитательных заведений, фонд высших учебных заведений, Торгово-промышленный институт (Высшие коммерческие курсы М. В. Побединского), Ф. 383, 1897–1921, оп. 1.
- [10] Орженцкий Р. М. Учебник математической статистики. – СПб.: Право, 1914. – IV+165 с.
- [11] Zamach terrorystyczny // Piśmo uczelni UW, 2013, Maj-Czerwiec. № 3 (63) – S. 40–41.
- [12] Orzecki R. Sui fondamenti logici del metodo statistico // Revista Internazionale di Scienze Sociali e Discipline Ausiliarie, 1923. Vol. 97, Fasc. 372 (Dicembre). – P. 356–360.

Современные проблемы теории дифференциальных уравнений

УДК 517.9

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ

Андреев В. К.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярск
e-mail: andr@icm.krasn.ru

Andreev V. K. On the existence conditions of a binary mixtures unidirectional flows. The unidirectional steady flows of a binary mixtures equations are considered. The study is focused on the conditions for the buoyancy force function admits above flows. For the Oberbeck – Boussinesq model the problem is complete solved. Some new exact solutions are found. Comparison with the classical well-known solutions are given.

Keywords: state equation, unidirectional flows, binary mixture, exact solution.

Рассматриваются уравнения однонаправленных стационарных течений бинарных смесей. Условия существования таких течений накладывают ограничения на уравнения состояния смеси и представления решений. В случае модели Обербека – Буссинеска анализ условий совместности проведён полностью. Построены новые точные решения, показывающие их существенное отличие от классических.

Ключевые слова: уравнение состояния, однонаправленное течение, бинарная смесь, точное решение.

1. Основные уравнения и нелинейная модель.

Рассматриваются однонаправленные стационарные течения бинарной смеси в горизонтальном слое, причём сила плавучести нелинейно зависит от температуры $\theta(x, z)$ и концентрации $c(x, z)$. Поскольку поле скоростей имеет вид $\mathbf{u} = (0, 0, w(x))$, то уравнения термодиффузии упрощаются до системы

$$\rho_0^{-1} p_x = -gF(\theta, c), \quad \rho_0^{-1} p_z = \nu w_{xx}; \quad (1.1)$$

$$w\theta_z = \chi(\theta_{xx} + \theta_{zz}); \quad (1.2)$$

$$wc_z = D(c_{xx} + c_{zz}) + D^\theta(\theta_{xx} + \theta_{zz}), \quad (1.3)$$

где $p(x, z)$ — давление; $F(\theta, c) > 0$ — сила плавучести ($\rho = \rho_0 F(\theta, c)$ — уравнение состояния смеси); g — ускорение силы тяжести; $\rho_0 > 0$, $\nu > 0$, $\chi > 0$, $D > 0$, D^θ — постоянные плотность, кинематическая вязкость, температуропроводность, коэффициент диффузии и термодиффузии соответственно.

Условия совместности уравнений (1.1) влечёт представление

$$F(\theta, c) = A(x)z + B(x) \quad (1.4)$$

с произвольными функциями $A(x)$ и $B(x)$. Компоненты скорости вдоль оси z и давление находятся по формулам

$$w(x) = \frac{g}{\nu} \left(C_0 + C_1x + C_2x^2 - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-t)^2 A(t) dt \right), \quad (1.5)$$

$$p(x, z) = \rho_0 \nu w_{xx} z - \rho_0 g \int_0^x B(x) dx + C_3$$

с некоторыми постоянными C_j , $j = 0, 1, 2, 3$.

Для дальнейшего удобно вместо функционального уравнения (1.4) анализировать его дифференциальное следствие

$$\theta_z^2 F_{\theta\theta} + 2\theta_z c_z F_{\theta c} + c_z^2 F_{cc} + \theta_{zz} F_\theta + c_{zz} F_c = 0, \quad (1.6)$$

а затем проверять равенство (1.4).

1. Если $\theta_z = 0$, $c_z = 0$, то $A(x) = 0$ и решение системы (1.1)–(1.3) имеет вид $w = \nu^{-1}g(C_0 + C_1x + C_2x^2)$, $\theta = \alpha x + \beta$, $c = \gamma x + \delta$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — постоянные). Функция $F(\theta, c)$ — произвольная, выполнено условие (1.4) с $A(x) = 0$.

2. При $\theta_z = 0$, $c_z \neq 0$ из уравнения (1.6) находим

$$F(\theta, c) = F_0(\theta) + F_1(\theta) \int_{c_0}^c \exp \left[- \int_{c_0}^{\tau} \alpha_0(\theta, \sigma) d\sigma \right] d\tau; \quad (1.7)$$

$$\int_{c_0}^c \exp \left[- \int_{c_0}^{\tau} \alpha_0(\theta, \sigma) d\sigma \right] d\tau = \alpha_1(x)z + \alpha_2(x) \quad (1.8)$$

с произвольными функциями $F_0(\theta)$, $F_1(\theta)$ и $\alpha_0(\theta, c)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, причём температура по-прежнему линейно зависит от x : $\theta(x) = \alpha x + \beta$. Подстановка выражений (1.7), (1.8) в уравнение (1.4) даёт связи

$$A(x) = F_1(\alpha x + \beta)\alpha_1(x), \quad B(x) = F_0(\alpha x + \beta) + F_1(\alpha x + \beta)\alpha_2(x). \quad (1.9)$$

В частности, если $\alpha_0 = \alpha_0(c)$, то из (1.8) $c = K(u)$, $u = \alpha_1(x)z + \alpha_2(x)$ и уравнение (1.3) даёт соотношения

$$\frac{K_{uu}}{K_u} = \frac{k_4 - 2k_1^2 u}{1 + (k_2 - k_1 u)^2} \quad (1.10)$$

и формулы

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{k_1 x - k_0}, \quad \alpha_2(x) = \frac{k_2 x + k_3}{k_1 x - k_0}, \quad \frac{w(x)}{D} = \frac{k_4 - 2k_1 k_2}{k_1 x - k_0} \quad (1.11)$$

с постоянными $k_0, \dots, k_4$, причём $k_0 \neq 0$, $k_1 \neq 0$, а функция $\alpha_0(c)$ равна K_{uu}/K_u^2 . Наиболее простой вид функции K получается для покоя ($k_4 = 2k_1k_2$, тогда $w(x) \equiv 0$):

$$c = K(u) = K_1 - \frac{K_0}{k_1} \operatorname{arctg}(k_2 - k_1 u), \quad (1.12)$$

K_1, K_0 — постоянные, $\alpha_0(c) = 2k_1K_0^{-1} \operatorname{tg}[K_0^{-1}k_1(K_1 - c)]$. В общем случае из (1.8) $c = K(x, u)$, причём функция K есть решение эллиптического уравнения 2-го порядка с непостоянными коэффициентами и (1.10) есть частный случай этого уравнения.

3. При $\theta_z \neq 0$ уравнение (1.6) эквивалентно следующему:

$$F_{\theta\theta} + 2a_1(\theta, c)F_{\theta c} + a_1^2(\theta, c)F_{cc} + a_2(\theta, c)F_\theta + a_3(\theta, c)F_c,$$

и выполнены соотношения

$$\begin{aligned} c_z &= a_1(\theta, c)\theta_z, & \theta_{zz} &= a_2(\theta, c)\theta_z^2, \\ c_{zz} &= a_3(\theta, c)\theta_z^2 \equiv (a_1a_2 + a_{1\theta} + a_1a_{1c})\theta_z^2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

с пока произвольными функциями $a_1(\theta, c)$, $a_2(\theta, c)$.

Полученное уравнение 2-го порядка на $F(\theta, c)$ является параболическим и имеет общее решение вида

$$F(\theta, c) = F_0(\Phi(\theta, c)) + F_1(\theta, c) \int_{\theta_0}^{\theta} \exp \left[- \int_{\theta_0}^{\tau} a_2(\sigma, c) d\sigma \right] d\tau \quad (1.14)$$

с произвольными F_0 и F_1 , а $\Phi(\theta, c) = L(x)$ есть общий интеграл ОДУ $dc = a_1(\theta, c) d\theta$.

Если $a_1 = a_1(c)$, $a_2 = a_2(\theta)$, то из соотношений (1.13)

$$\begin{aligned} Q(x, z) &= Q(f_1(x)z + f_2(x)) \equiv Q(u), \\ c(x, z) &= Q_1(Q(u) + f_3(x)) \equiv Q_1(v), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где Q и Q_1 определяются неявно с помощью интегралов

$$\begin{aligned} \int_{\theta_0}^{\theta} \exp \left[- \int_{\theta_0}^{\tau} a_2(\sigma) d\sigma \right] d\tau &= f_1(x)z + f_2(x), \\ \int_{c_0}^c \frac{d\tau}{a_1(\tau)} &= Q(x, z) + f_3(x) = Q(u) + f_3(x). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Предположение, что $\theta = Q(u)$, $c = K(u)$, $u = A(x)z + B(x)$ и $F(Q(u), K(u)) \equiv u$ приводит к уравнению на Q , совпадающему с (1.10),

$$\frac{Q_{uu}}{Q_u} = \frac{k_4 - 2k_1^2 u}{1 + (k_2 - k_1 u)^2} \quad (1.17)$$

и формулам

$$A = \frac{1}{k_1x - k_0}, \quad B = \frac{k_2x + k_3}{k_1x - k_0}, \quad \frac{w}{\chi} = \frac{k_4 - 2k_1k_2}{k_1x - k_0} \quad (1.18)$$

с другими постоянными $k_0, \dots, k_4$. Равенства (1.17), (1.18) есть следствия уравнения (1.2). Уравнение (1.3) будет выполнено только при $\chi = D$ (или при $D^0 = 0$, тогда уравнение на функцию Q совпадает с (1.10)). При этом уравнение на K имеет вид

$$K_{uu} + \frac{(2k_1^2u - k_4)K_u}{1 + (k_2 - k_1u)^2} = -\frac{D^0(k_4 - 2k_1k_2)Q_u}{1 + (k_2 - k_1u)^2} \quad (1.19)$$

и вновь для покоя ($k_4 = 2k_1k_2$) функции K и Q определяются формулой (1.12) (для Q вместо K_0 и K_1 будут другие постоянные Q_0, Q_1).

Если сразу предположить, что в (1.8) $\alpha_1(x) = \alpha_{10} = \text{const}$, то вместо (1.10) будет уравнение $K_{uu} = -\delta_1 K_u$, $\delta_1 = \text{const}$, и $K = K_0 - K_1 \exp[-\delta_1(\alpha_{10}z + \alpha_2(x))]$ с постоянными K_0, K_1 . Скорость находится по формуле

$$w(x) = \frac{D}{\alpha_{10}} (\alpha_2'' - \delta_1 \alpha_2'^2 - \delta_1 \alpha_{10}^2). \quad (1.20)$$

Задавая функцию $A(x)$ в (1.9) (или F_1) из первого уравнения (1.5) и (1.20), получим уравнение Риккати на функцию $\alpha_2(x)$.

Точно так же, если в (1.15) (или (1.16)) $f_1(x) = f_{10} = \text{const}$, из уравнения (1.2) найдём представление для температуры $\theta = Q_0 - Q_1 \exp[-\delta(f_{10}z + f_2(x))]$, δ, Q_0, Q_1 — постоянные. Скорость определяется формулой (1.20) с заменой D на χ , α_{10} на f_{10} , $\alpha_2(x)$ на $f_2(x)$. Аналогично, как и выше, функция $f_2(x)$ есть решение уравнения Риккати. Что касается $f_3(x)$, то она в этом случае является линейной: $f_3(x) = f_{30}x + f_{31}$. То же самое относится и к Q_1 : $Q_1 = \delta_2 v + \delta_3$, $\delta_2 = \delta_3 = \text{const}$.

2. Модель Обербека – Буссинеска.

Уравнения термодиффузионного течения (1.1) в этом случае упрощаются ($\bar{p} = \bar{p}(x, z)$, $\theta = \theta(x, z)$, $c = c(x, z)$)

$$\frac{1}{\varrho_0} \bar{p}_x = g\beta_1 \theta + g\beta_2 c, \quad \frac{1}{\varrho_0} \bar{p}_z = \nu w_{xx}, \quad \bar{p} = p + g\varrho_0 x, \quad (2.1)$$

где β_1, β_2 — коэффициенты теплового и концентрационного расширения.

Условие совместности уравнений (2.1) влечёт равенства (см. (1.4))

$$\beta_1 \theta + \beta_2 c = \alpha(x)z + \beta(x), \quad (2.2)$$

$$w''' = \frac{g}{\nu} \alpha(x) \quad (2.3)$$

с пока произвольными функциями $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Пусть

$$P = \frac{D\beta_1}{\beta_2\chi} - \frac{\beta_1}{\beta_2} - \frac{D^0}{\chi}. \quad (2.4)$$

Тогда при $P \neq 0$ из (1.3) следует, что температура есть квадратичная функция переменной z :

$$\theta(x, z) = \frac{1}{P\beta_2} \left[\frac{D\alpha''}{2w(x)} z^2 + \frac{D\beta'' - \alpha(x)w(x)}{w(x)} z + \gamma(x) \right] \quad (2.5)$$

с некоторой функцией $\gamma(x)$. Поле концентраций находится из равенства (2.2).

Вычисление с помощью формулы (2.5) производных θ_z , θ_{xx} , θ_{zz} и их подстановка в уравнение (1.2) приводит к равенствам

$$\alpha'' = (a_0x + a_1)w(x); \quad (2.6)$$

$$D\beta'' = \left[\left(1 + \frac{D}{\chi} \right) \alpha(x) - b_0x - b_1 \right] w(x); \quad (2.7)$$

$$\gamma'' = \left[\frac{D}{\chi} \alpha(x) - b_0x - b_1 \right] \frac{w(x)}{\chi} - D(a_0x + a_1) \quad (2.8)$$

с постоянными a_0 , a_1 , b_0 , b_1 . Кроме того,

$$w^V - \frac{g}{\nu} (a_0x + a_1)w = 0. \quad (2.9)$$

По известной функции $w(x)$ из выражения (2.3) определяется $\alpha(x)$, затем из соотношений (2.7), (2.8) восстанавливаются квадратуры функции $\beta(x)$ и $\gamma(x)$.

Замечание 1. При $a_0 = 0$ уравнение (2.9) легко интегрируется.

Замечание 2. Условие $P = 0$ означает, что

$$D^\theta = \frac{\beta_1}{\beta_2} D \left(1 - \frac{\chi}{D} \right). \quad (2.10)$$

Как правило [2], для жидких смесей отношение $\chi/D \sim 10^2; 10^3$, поэтому в данном случае знак D^θ противоположен знаку β_2 . Коэффициент концентрационного расширения положителен (отрицателен), если c — концентрация лёгкого (тяжёлого) компонента. Значит, термодиффузия в такой смеси будет нормальной ($D^\theta < 0$) при $\beta_2 > 0$ и аномальной ($D^\theta > 0$) при $\beta_2 < 0$.

3. Примеры постановок задач при $P \neq 0$.

Течение в слое с заданной температурой на стенках. Пусть имеется плоский слой толщины l , в котором происходит однонаправленное течение бинарной смеси. Поставим граничные условия для *ключевого* уравнения (2.9). На твёрдых стенках смесь прилипает к ним,

$$w(0) = w(l) = 0. \quad (3.1)$$

Кроме того, задан расход смеси через поперечное сечение слоя в точке $z = 0$, т. е.

$$\int_0^l (1 - \beta(x))w(x) dx = q = \text{const}. \quad (3.2)$$

Дальнейшие условия зависят от постановки задачи для температуры и концентрации. Если на обеих стенках задано распределение температур по законам

$$\theta|_{x=0} = f_0 z^2 + f_1 z + f_2, \quad \theta|_{x=l} = h_0 z^2 + h_1 z + h_2, \quad (3.3)$$

где f_j, h_j ($j = 0, 1, 2$) — заданные постоянные, то

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2P\beta_2}{D} (h_0 - f_0), \quad a_1 = \frac{2P\beta_2}{D} f_0, \\ b_0 &= \frac{1}{l} \left[\frac{D}{\chi} (\alpha(l) - \alpha(0)) + P\beta_2 (f_1 - h_1) \right], \quad b_1 = \frac{D\alpha(0)}{\chi} - P\beta_2 f_1, \\ \gamma(0) &= P\beta_2 f_2, \quad \gamma(l) = P\beta_2 h_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Далее, стенки предполагаются нерастворимыми, поэтому потоки вещества через них отсутствуют:

$$(Dc_x + D^\theta \theta_x)|_{x=0} = 0, \quad (Dc_x + D^\theta \theta_x)|_{x=l} = 0. \quad (3.5)$$

Если

$$P_1 = D^\theta - \frac{\beta_1}{\beta_2} D \neq 0, \quad (3.6)$$

то постоянная a_0 в (3.4) равна нулю, т. е.

$$a_0 = 0 \quad (h_0 \equiv f_0); \quad (3.7)$$

$$\beta'(0) = -\frac{P_1}{D} \gamma'(0), \quad \beta'(l) = -\frac{P_1}{D} \gamma'(l), \quad \alpha'(0) = \alpha'(l) = -\frac{\beta_2 P_1}{\beta_1 D} b_0. \quad (3.8)$$

Обращаясь к уравнению (2.3), из (3.8) и третьей формулы (3.4) найдём ещё два недостающих условия на функцию $w(x)$:

$$w^{\text{IV}}(0) = w^{\text{IV}}(l); \quad (3.9)$$

$$w^{\text{IV}}(0) + \frac{\beta_2 P_1}{\chi \beta_1 l} [w'''(l) - w'''(0)] = \frac{g \beta_2^2 P_1}{\sqrt{D} \beta_1 l} P(h_1 - f_1). \quad (3.10)$$

Пусть в (3.7) имеет место знак равенства: $D^\theta = \beta_1 D / \beta_2$, тогда

$$\alpha'(0) = 0, \quad \alpha'(l) = 0, \quad \beta'(0) = 0, \quad \beta'(l) = 0 \quad (3.11)$$

и выполняются все условия (3.4). В этом случае первые два равенства (3.11) для функции $w(x)$ дают граничные условия

$$w^{\text{IV}}(0) = 0, \quad w^{\text{IV}}(l) = 0. \quad (3.12)$$

Аналогично выводятся и граничные условия для задач:

- течение в слое с заданной температурой нижней стенки и теплоизолированной верхней стенкой;
- течение в слое с двумя теплоизолированными стенками;
- течение в слое с верхней свободной границей.

Литература

- [1] Андреев В. К. Решение Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения. Препринт 1-10. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2010. – 68 с.
- [2] Физические величины. Справочник // Под редакцией И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1234 с.

УДК (531.36+624.07):534.1

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛИ «БАЛКИ ТИМОШЕНКО»

Волосов К. А., Братусь А. С., Волосова Н. К., Волосова А. К.

Московский государственный университет путей сообщения

Москва

e-mail: konstantinvolosov@yandex.ru

Volosov K. A., Bratus' A. S., Volosova N. K., Volosova A. K. The exact solutions of boundary value problems with initial condition of the PDE model of «Timoshenko beam». . There is built a wide class of exact solutions of system PDE model of «Timoshenko beam» theory with boundary and initial conditions with right part. There is use the method of the factorization. The problem is reduced to solving two mixed problems for various inhomogeneous linear hyperbolic equation and Klein–Gordon–Fock equation.

Keywords: Timoshenko beam, exact solutions of problems for PDE.

Дополнена теория модели «балки Тимошенко». Показано, что неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с частными производными (ДНУсЧП) второго порядка точно приводится к последовательности решения двух смешанных задач для неоднородных уравнений: гиперболического и Клейна–Гордона–Фока. Проведена факторизация задачи, показано, что она имеет два масштаба (две базовые скорости, частоты).

Ключевые слова: балка Тимошенко, точные решения уравнений в частных производных.

1. Введение. В цикле работ, перечисленных в библиографии статей [1], [2], приведены многочисленные численные исследования модели «балки Тимошенко» с различными краевыми и начальными условиями и разными функциями $f(x, t)$ стоков – источников. Доступность ЭВМ и относительная простота численных методов толкает исследователей на этот путь. В [7] сообщается, что для решения задачи методом Фурье с достаточной точностью, надо суммировать 32000 членов ряда. В данной работе указан другой **способ** построения решения смешанной задачи с различными краевыми и начальными условиями.

Главные уравнения, описывающие колебания в модели «балки Тимошен-

ко» имеют вид системы [2] (стр. 1538)

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial x^2} + kAG \left[\frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} - \vartheta(x, t) \right] - mr^2 \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial t^2} + P \vartheta(x, t) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ kAG \left[\frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} - \vartheta(x, t) \right] \right\} - m \frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $Z(x, t)$, $\vartheta(x, t)$ – функции отклонения срединной линии и угла поворота сечения соответственно, E – модуль упругости на сжатие, I – момент инерции сечения, k – коэффициент Тимошенко, A – площадь поперечного сечения, G – модуль упругости на сдвиг, m – распределенная плотность, P – сила приложенная к рельсу.

Предполагаем, что обе функции имеют четыре непрерывно – дифференцируемые производные. Отметим, что между размерностями функций $\vartheta(x, t)$ и $Z(x, t)$ справедливо соотношение $[\vartheta(x, t)] = [Z(x, t)]/[M]$. Для системы (1) в цитируемых работах рассматриваются смешанные краевые задачи в разных ситуациях.

2. Расщепление системы (1). Покажем, что смешанные задачи для системы (1) имеют точное решение. Справедлива теорема

Теорема 1. Пусть дана математическая модель «балки Тимошенко» (1). Тогда одна из функций явно выражается через другую

$$Z(x, t) = \frac{1}{kAG} \left\{ -xh_1(t) - h_2(t) + [kAG - P]\Phi(x, t) + mr^2 \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} \right\}, \quad \vartheta(x, t) = \Phi'_x(x, t). \quad (2)$$

Здесь $h_1(t)$, $h_2(t)$ – произвольные непрерывно-дифференцируемые функции.

Для определения функции $\Phi(x, t)$ надо решить задачу с краевыми условиями и с начальными условиями для неоднородного линейного уравнения четвёртого порядка с частными производными

$$m[kAG - P] \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} + kAGP \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} + m^2 r^2 \frac{\partial^4 \Phi(x, t)}{\partial t^4} - m(EI + kAGr^2) \frac{\partial^4 \Phi(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + kAGEI \frac{\partial^4 \Phi(x, t)}{\partial x^4} = F_0(x, t). \quad (3)$$

Здесь $F_0(x, t) = mxh_1''(t) + mh_2''(t) - kAGf(x, t)$.

Доказательство. Заметим, что краевые условия для системы (1) могут быть первого, второго или третьего рода. Продифференцируем первое уравнение по переменной x и выразим вторую переменную $Z''_{xx}(x, t)$. Сделаем замену $\Theta(x, t) = \Phi'_x(x, t)$ и из первого уравнения (1) получим

$$kAG \frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial x^2} + [P - kAG] \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} - mr^2 \frac{\partial^4 \Phi(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \Phi(x, t)}{\partial x^4} = 0. \quad (4)$$

Интегрируем (4) дважды по переменной x и получим (2). Функции $h_1(t)$, $h_2(t)$ возникают при интегрировании. Таким образом, одна из функций в системе (1)

выражена через другую (2). После дифференцирования (2) по переменной t , из второго уравнения (1) следует (3). Отметим, что подобное уравнение получено в [8] в другом случае ■

3. Применение метода факторизации к уравнению (3). Большой вклад в развитие операторных методов внесли В. П. Маслов, М. В. Карасев, В. Г. Данилов [3]. Другие авторы работ [3]–[5] эффективно применяли метод факторизации в различных задачах. Целью процедуры факторизации является представление уравнения (3) в виде $L_1 \circ (L_2 Y(x, t)) = F_i(x, t)$. Конкретные операторы L_i , $i = 1, 2$ и правые части $F_i(x, t)$, в случае модели (1), определены ниже.

Проведем процедуру обезразмеривания уравнения (3). Обозначим через $x = x_0 \chi$, $t = t_0 \tau$ и ψ характерный размер, время и характерное значение функции $\Phi(x, t)$ соответственно. Сделаем замену $\Phi(x, t) = \Theta(x/x_0, t/t_0)/\psi$. Общепринятое обозначение для гиперболического оператора, например, с параметром (скорость волн) μ имеет вид

$$\square_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \quad (5)$$

Оказалось, что существуют два варианта факторизации уравнения (3), которые описаны в теоремах 2, 3.

Из ниже приведенного анализа следует, что существуют два безразмерных параметра

$$a^2 = E t_0^2 / (\rho x_0^2), \quad \mu^2 = k A G (r t_0)^2 / (I \rho x_0^2). \quad (6)$$

Теорема 2. Пусть дано уравнение (3) и параметры (6). Тогда для построения решения уравнения (3) необходимо решить последовательно две стандартные смешанные задачи, а именно: для линейного гиперболического уравнения

$$\begin{aligned} \square_a Y(\chi, \tau) &= F_1(\chi, \tau), \\ F_1(\chi, \tau) &= (a^2 M_0 r^2 (a^2 - \mu^2) \psi) / (EI \mu^2) [-t_0^2 x_0 \chi h_1''(t_0 \tau) / \mu^2 - \\ &\quad - t_0^2 h_2''(t_0 \tau) / \mu^2 + x_0^2 f(x_0 \chi, t_0 \tau)], \end{aligned} \quad (7)$$

и смешанную задачу для уравнения Клейна–Гордона–Фока

$$\square_\mu \Theta(\chi, \tau) - x_0^2 \mu^4 \Theta(\chi, \tau) / (r^2 (a^2 - \mu^2)) = x_0^2 \mu^4 Y(\chi, \tau) / (M_0 r^2 (a^2 - \mu^2)). \quad (8)$$

Здесь $M_0 = \text{const} \neq 0$ ■

Во втором варианте метод факторизации дает следующий результат:

Теорема 3. Пусть дано уравнение (3) и два безразмерных параметра (6). Тогда для построения решения уравнения (3) необходимо решить последовательно две стандартные смешанные задачи, а именно: для уравнения Клейна–Гордона–Фока

$$\begin{aligned} \square_\mu Y(\chi, \tau) - x_0^2 \mu^4 Y(\chi, \tau) / (r^2 (a^2 - \mu^2)) &= F_2(\chi, \tau), \\ F_2(\chi, \tau) &= (\mu^2 c_0 x_0^2 \psi) / (r^2 (a^2 - \mu^2)) [-t_0^2 x_0 \chi h_1''(t_0 \tau) - \\ &\quad - t_0^2 h_2''(t_0 \tau) + x_0^2 \mu^2 f(x_0 \chi, t_0 \tau)], \end{aligned} \quad (9)$$

и смешанную задачу для линейного гиперболического уравнения

$$\square_a \Theta(\chi, \tau) = a^2 r^2 (a^2 - \mu^2) Y(\chi, \tau) / (\mu^2 c_0 EI). \quad (10)$$

Здесь $c_0 = \text{const} \neq 0$ ■

Доказательство теорем 2, 3. Рассмотрим уравнение Клейна–Гордона–Фока для функции $\Theta(\chi, \tau)$ с неопределёнными постоянными коэффициентами c_0 , M_0 , j_0 . Выразим из него вторую производную по переменной τ

$$\frac{\partial^2 \Theta(\chi, \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{1}{j_0} \left[c_0 \frac{\partial^2 \Theta(\chi, \tau)}{\partial \chi^2} - M_0 \Theta(\chi, \tau) + Y(\chi, \tau) \right].$$

Здесь $Y(\chi, \tau)$ – функция, которая определяется из задачи (7) или (9) с соответствующими конкретному случаю начальными условиями. После вычисления вторых и четвёртых производных и подстановки в уравнение, следующее из (3), в первом случае (теоремы 2) получим

$$\begin{aligned} j_0 &= m c_0 P x_0^2 / (k A G t_0^2), & c_0 &= M_0 (k A G r^2 - EI) / (k A G P x_0^2), \\ P &= -k A G EI / (k A G r^2 - EI), & m &= I \rho / r^2. \end{aligned} \quad (11)$$

После введения параметров (6) следуют уравнения (7), (8).

В втором случае (теоремы 3) получим

$$\begin{aligned} j_0 &= m c_0 P (r x_0)^2 / (EI t_0^2), & M_0 &= 0, \\ P &= k A G EI / (k A G r^2 - EI), & m &= I \rho / r^2. \end{aligned} \quad (12)$$

После введения параметров (6) следуют уравнения (9), (10).

Фундаментальные решения и функции Грина для приведенных стандартных задач можно найти в [5], [6]. Далее надо задать конкретные краевые и начальные условия и проводить вычисления интегралов свертки с правой частью и граничными условиями аналитическими и численными методами. Вычисления, при значениях констант относящихся к железнодорожному пути и приведенные в источниках перечисленных в [1], [2], показывают что отношение параметров (скоростей волн и частот) $\mu/a \approx 50$. Коэффициент $a^2 - \mu^2 < 0$, что означает наличие диссипации, (стока) в уравнениях (8), (10). Интересен случай, описанный в теореме 2, когда на первом этапе решается смешанная задача (7) с меньшим параметром a (с меньшей частотой). Тогда вычисление решения первой задачи дает возможность получить огибающую низкочастотных колебаний. Вычисление интегралов свертки второй задачи (8) «набивает» полученную структуру высокочастотными колебаниями и мало меняет кривую огибающей низкочастотных колебаний. Таким образом, объясняется аналогия с амплитудно модулированной структурой, имеющей две базовые частоты, два масштаба [8].

Эти результаты позволят теоретически обосновать построение аппаратного комплекса и его программного обеспечения для возможности определения конкретного участка железнодорожного полотна, где необходимо провести ремонт.

Литература

- [1] Timoshenko S. P. Method of analysis of statical and dynamical stresses in rail // Proc. 2nd Int. Congr. for Appl. Mech. – Zurich, 1927. – P. 407–418.
- [2] Zhu J. Y., Ahmed A. K., Rakheja S., Khajepour A. Development of a vehicle-track model assembly and numerical method for simulation of wheel-rail dynamic interaction due to unsupported sleepers // Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility, 48, Vol. 12. – P. 1535–1552.
- [3] Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A. Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. – Kluwer Academic publishers. Dordrecht–Boston–London, 1995. – 316 p.
- [4] Беркович Л. М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 464 с.
- [5] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. – М.: Международная программа образования, 1996. – 496 с.
- [6] Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Изд. «Физико-математическая литература», 2001. – 575 с.
- [7] Белоцерковский П. М., Пугина Л. В. Качение колеса по рельсу с волнообразным износом // ПММ, 2008, т. 72, вып. 3. – С. 421–430.
- [8] Ерофеев В. И., Лисенкова Е. Е., Семирекова Н. П. Дисперсионные зависимости и самомодуляция изгибных волн в балке Тимошенко // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2006, вып. 4. – С. 27–31.

УДК 517.9

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СИММЕТРИЙНОГО АНАЛИЗА В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Зайцев В. Ф.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: valentin_zaitsev@mail.ru

Zaitsev V. F. The reverse problems of symmetry analysis for mathematical modeling. We consider the reverse problems of symmetry analysis, and discuss nonlocal operators, analogue of Nöther's symmetries and "pseudointegrals" of ordinary differential equations for mathematical modeling.

Рассматриваются обратные задачи симметрийного анализа в проблемах, связанных с построением промежуточных моделей. Обсуждаются нелокальные операторы, аналоги нётеровых симметрий и "псевдоинтегралы" обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Предварительные замечания. Как известно, процесс построения математической модели проходит через несколько стадий, первой из которых является **наблюдение**. В результате наблюдения интересующих нас свойств реального объекта мы формулируем их на языке той отрасли науки, которая изучает эти свойства – строим механическую, физическую, химическую, биологическую или иную **модель** объекта. Такая модель называется **содержательной**. При построении содержательной модели мы принимаем некоторые **гипотезы** (или **постулаты**), из которых следуют определяющие соотношения. При этом несущественное для описания интересующих нас свойств отбрасывается. На основе содержательной модели и принятых определяющих соотношений мы выписываем соответствующие ей уравнения, переводя тем самым модель на формальный математический язык. В качестве определяющих соотношений, например, в физике, используются универсальные физические законы (законы сохранения, симметрии, правила размерности) + феноменологические законы, присущие данной более узкой отрасли науки (типа законов Гука, Фурье, Стефана). На последней стадии мы получаем модельное уравнение (дифференциальное, интегральное или иное), решение которого доставляет нам необходимую информацию об изучаемом объекте. При этом применение алгоритма С. Ли позволяет нам решить **прямую задачу** – найти для заданного уравнения все допускаемые операторы, т. е. симметрии, что в ряде случаев позволяет проинтегрировать модельное уравнение.

Однако нередко прямое следование описанной классической схеме наталкивается на некоторые затруднения и, в конечном итоге, не приводит к успеху. Это связано с тем, что в процессе моделирования необходимо выполнить два противоречащих друг другу условия – с одной стороны, модель должна быть достаточно **простой**, с другой – она должна быть **адекватной**.

При этом весь класс модельных уравнений, построенный на основе одних лишь фундаментальных законов (например, законов сохранения), оказывается слишком широким, а для многочисленных дополнительных определяющих соотношений редко удаётся “выстроить систему приоритетов”, существенно упрощающих модель, но позволяющих сохранить всю необходимую информацию. Поэтому желательно по возможности сузить исходный класс моделей, например, решить **обратную задачу** поиска подкласса уравнений, удовлетворяющего некоторому априорному условию существования симметрии заданного класса. В результате мы не только выделяем перспективный подкласс модельных уравнений, но и описываем множество уравнений некоторого (достаточно общего) типа, порядок которых может быть гарантированно понижен на единицу. Как правило, выделенное множество уравнений является **максимальным** в заданном классе.

Оказалось, что для некоторых классов уравнений и простейших типов симметрий могут быть доказаны достаточно общие утверждения, одно из них сформулировано в виде нижеследующей теоремы.

Теорема 1. Уравнение n -го порядка без “предстаршей” производной

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}) \quad (1)$$

допускает некоторый точечный оператор

$$X = r\partial_x + \left[\left(\frac{n-1}{2}r' + \alpha \right) y + s \right] \partial_y, \quad (2)$$

где $r = r(x)$, $s = s(x)$ – произвольные функции, α – произвольное число, если и только если правая часть уравнения (1) имеет вид

$$F = r^{-\frac{n+1}{2}} E\Phi(u_0, u_1, \dots, u_{n-2}) + L_{n-2}(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}), \quad (3)$$

где Φ – произвольная функция своих аргументов, $E = \exp\left(-\alpha \int r^{-1} dx\right)$, u_i , L_i – линейные неоднородные комбинации переменной y и её производных до порядка i включительно, т. е.

$$u_i = \sum_{k=1}^i f_k(x)y^{(k)} + f_0(x), \quad L_i = \sum_{k=1}^i g_k(x)y^{(k)} + g_0(x),$$

коэффициенты которых полностью определяются функциями r , s и константой α для каждого n ■

Для случаев $n = 2, 3, 4$ подробное доказательство теоремы приведено в [1], впервые эти результаты опубликованы в [2]–[4].

Следствие 1. В любом модельном уравнении (3) нелинейность определяется исключительно выбором функции Φ .

Следствие 2. Все точечные симметрии уравнения (1) имеют вид (2), что позволяет выделить более узкие подклассы функций (3), для которых уравнение (1) допускает алгебру более высокой размерности (регулярный алгоритм указан в [1]).

Указанная теорема очень удобна для приложений – для сравнения приведём более общее утверждение, но только для случая $n = 2$ (при $n > 2$ выражения становятся чрезмерно громоздкими).

Теорема 2. Уравнение 2-го порядка общего вида (разрешённого относительно старшей производной)

$$y'' = F(x, y, y')$$

допускает некоторый точечный оператор, если и только если правая часть уравнения имеет вид

$$F = \frac{1}{\varphi_x \psi_y - \psi_x \varphi_y} \left[(\varphi_x + \varphi_y y')^3 \Phi \left(\psi, \frac{\psi_x + \psi_y y'}{\varphi_x + \varphi_y y'} \right) - \right. \\ \left. - (\varphi_y \psi_{yy} - \psi_y \varphi_{yy})(y')^3 - (\varphi_x \psi_{yy} - \psi_x \varphi_{yy} + 2\varphi_y \psi_{xy} - 2\psi_y \varphi_{xy})(y')^2 - \right. \\ \left. - (\varphi_y \psi_{xx} - \psi_y \varphi_{xx} - 2\varphi_x \psi_{xy} - 2\psi_x \varphi_{xy})y' - (\varphi_x \psi_{xx} - \psi_x \varphi_{xx}) \right], \quad (4)$$

где Φ , $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ – произвольные функции своих аргументов, причём $\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x \neq 0$ ■

Эта теорема легко доказывается с помощью группы эквивалентности, которую в данном случае образует всё множество обратимых точечных преобразований: наиболее общее уравнение 2-го порядка, допускающее группу переносов по x с оператором $X = \partial_x$ – автономное уравнение $y'' = F(y, y')$. Согласно принципу подобия, группа переносов может быть преобразована в произвольную точечную группу подходящим обратимым точечным преобразованием. Таким образом, мы из подкласса автономных уравнений получаем весь класс, определяемый правой частью (4).

Однако легко видеть, насколько формула (4) менее удобна для моделирования, чем формула (1) – в ней три нелинейных только по первой производной слагаемых, не считая того, что все коэффициенты нелинейно зависят от y .

Следует заметить два важных обстоятельства, связанных как со спецификой моделирования, так и со свойствами различных объектов, рассматриваемых в симметричном анализе.

1. К сожалению, при решении многих задач математического моделирования априорная симметрия играет лишь роль некоего “побочного” фактора. В результате рассматриваются, как правило, лишь простейшие группы преобразований плоскости (группы переносов, равномерных и неравномерных растяжений, вращения, проективного преобразования, группы Галилея и Лоренца). Конечно, они следуют из фундаментальных физических законов и теории размерности, но в процессе моделирования мы делаем ряд допущений и упрощений, и модельное уравнение может приобрести ряд дополнительных свойств, “маскируя”, например, законы размерности при переходе к безразмерным переменным.

Эти соображения играют особенно важную роль при построении **промежуточных моделей**. Их применение становится актуальным, если простейшее (например, линейное) приближение даёт совсем уж неадекватный результат, а решения более точных уравнений получить затруднительно даже численными методами из-за наличия подвижных особых точек – точность вычислений становится совершенно неудовлетворительной, либо вообще происходит “срыв” алгоритма. В подобных случаях часто к успеху приводит построение модельного уравнения, “наследующего” качественные свойства решений точного, но, в отличие от него, интегрируемого в замкнутом виде. Очевидно, что при этих условиях на первое место выходит наличие возможно большего количества симметрий, а физическая адекватность уходит на второй план (в некоторых случаях становится чисто символической).

Хорошим примером построения промежуточной модели является обобщённая задача двух неподвижных центров [5], предложенная для вычисления орбиты спутника в нецентральной поле тяготения Земли. На первом этапе вместо текущих координат и скоростей (“быстрые переменные”) вводятся параметры оскулирующей (мгновенной) орбиты – “медленные” переменные. При этом точность вычислений становится вполне приемлемой, но возникает другая проблема – при эволюции орбиты эксцентриситет e проходит через нуль, в результате чего образуется особая точка. И, что ещё хуже, в этой точке аргумент перигея ω становится неопределённым. Требуется построить промежуточную модель, которая сохраняла бы свойства особой точки, но допускала интегрирование в

замкнутой аналитической форме. Это удалось сделать на основе **задачи двух неподвижных центров** – изучалось движение пассивно гравитирующей материальной точки, притягиваемой двумя неподвижными точечными массами по закону Ньютона. Потенциал в этом случае равен

$$U = \frac{fM_1}{r_1} + \frac{fM_2}{r_2}, \quad M_1 + M_2 = M, \quad (5)$$

где f – гравитационная постоянная,

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a_1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a_2)^2},$$

причем

$$a_1 = -\frac{2M_2c}{M_1 + M_2}, \quad a_2 = -\frac{2M_1c}{M_1 + M_2}.$$

Параметры M_1, M_2, c выбираются так, чтобы потенциал (5) возможно менее отличался бы от истинного потенциала Земли. Наиболее адекватные результаты были получены в предположении, что постоянные a_1, a_2, M_1, M_2 – не вещественные, как следует считать из их механического смысла, а комплексные: вообще говоря, конкретный механический смысл, исходя из существа задачи, имеют их суммы – величины $M_1 + M_2 = M$ и $a_1 + a_2 = a$ должны (!) быть вещественны (так называемая обобщённая задача двух неподвижных центров). При этом появляется дополнительный произвол – “мнимые координаты” вводимых параметров, и удаётся добиться того, что главные гармоники (2-я, 3-я и 4-я) потенциала (5) практически совпадают с истинными. Уравнения движения с потенциалом (5) удалось проинтегрировать в эллиптических квадратурах – в сжатых сфероидальных координатах переменные разделились. Заметим, что при интегрировании существенно использовался полный набор “классических первых интегралов” системы уравнений движения.

2. Свойства многих физически значимых решений, например, автомодельных, определяется отнюдь не конкретным видом допускаемого модельным уравнением оператора, а структурой его инвариантов. Так, автомодельные решения $u = \varphi(x, y)$ нелинейных уравнений математической физики порождаются не только оператором неравномерных растяжений

$$X = x \partial_x + ky \partial_y + su \partial_u, \quad (6)$$

но и гораздо более широким классом операторов

$$X = A(x \partial_x + ky \partial_y + su \partial_u), \quad (7)$$

у которых универсальные инварианты совпадают с инвариантами оператора (6). Здесь A может быть произвольной функцией x, y, u и всевозможных производных u , а также нелокальных переменных. Именно на этом основан широко распространённый в настоящее время **метод неклассических симметрий**. Автомодельные решения успешно находятся путём решения определяющего уравнения для оператора (6) на некоторой инвариантной поверхности. Если подставить решения (определяющего уравнения) в точечный оператор, то

оказывается, что оператор (6) не допускается исходным уравнением, а допускаемый оператор имеет вид (7). Найти конкретный допускаемый оператор (7) невозможно, так как нелокальный множитель A удовлетворяет **уравнению в полных частных производных** не менее, чем 2-го порядка, но для приложений он практически не нужен – автомодельные решения уже найдены.

Поэтому круг актуальных обратных задач становится существенно шире, а их постановка – разнообразнее, причём одной из приоритетных целей является максимальное упрощение анзаца – при этом трудоёмкость алгоритма решения существенно снижается.

Все приведенные рассуждения в полной мере справедливы и для первых интегралов. Заметим, что теорема 1 для $n = 2$ независимо и практически одновременно была сформулирована и доказана автором настоящей заметки и профессором Личем с коллегами (Южная Африка) [6], причём Лич исходил именно из существования квадратичного по первой производной первого интеграла.

Теорема 3. Уравнение

$$y'' - F(x, y) = 0. \quad (8)$$

имеет квадратичный первый интеграл, если и только если его правая часть имеет вид

$$F = R^{-3/2}\Psi(z) + \frac{1}{2}R^{-2} \left\{ \left[RR'' - \frac{1}{2}(R')^2 \right] y - R\varphi' + \frac{1}{2}R'\varphi \right\}, \quad (9)$$

где

$$z = R^{-1/2}y + \frac{1}{2} \int \varphi R^{-3/2} dx; \quad (10)$$

Ψ – произвольная функция своего аргумента, R и φ – произвольные функции аргумента x ■

При этом первый интеграл имеет вид

$$R(y')^2 - (R'y - \varphi)y' + \frac{1}{4}R^{-1}(R')^2y^2 - \frac{1}{2}R^{-1}R'\varphi y + \frac{1}{4}R^{-1}\varphi^2 - 2 \int \Psi(z) dz = C_1. \quad (11)$$

Это уравнение легко может быть приведено к уравнению с разделяющимися переменными. Если исходя из (10) вычислить $(z')^2$, то уравнение (11) можно записать в виде

$$R^2(z')^2 - 2 \int \Psi(z) dz = C_1,$$

и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$\int^z \left(2 \int^u \Psi(\tau) d\tau + C_1 \right)^{-1/2} du = \pm \int \frac{dx}{R(x)} + C_2.$$

Таким образом, в данном случае мы не только решили обратную задачу поиска первого интеграла, но и нашли класс **всех** уравнений вида (8), имеющих квадратичный первый интеграл, и доказали, что любое уравнение этого класса интегрируется в квадратурах.

Нетрудно видеть, что правая часть уравнения (9) является частным случаем выражения (3) при $n = 2$, $\alpha = 0$ (при этом $E = 1$). Симметрия становится нётеровой, и первый интеграл “наследует” симметрию исходного уравнения. Оказывается, подобным свойством обладают не только уравнения чётных порядков. Разумеется, теорема Нётер для уравнений нечётных порядков неверна – там невозможно ввести гамильтонову структуру. Но с точки зрения теории дифференциальных уравнений ниоткуда не следует, что не существуют **аналоги нётеровых симметрий** – симметрии (причём не обязательно точечные), “наследуемые” первыми интегралами. И такие симметрии были найдены в результате решения обратных задач, причём некоторые из найденных уравнений оказались уникальными в своих классах. Так, уравнение

$$y''' = (ay^2 + by + c)^{-5/4}, \quad (12)$$

где a, b, c – произвольные константы, является **единственным** уравнением класса $y''' = F(y)$, имеющим квадратичный по старшей производной автономный первый интеграл. При этом, если квадратный трёхчлен представляет собой полный квадрат, автономных первых интегралов будет уже три (к квадратичному добавляются два кубических), из которых два являются независимыми, что позволяет проинтегрировать исходное уравнение (12) в этом случае [7].

Безусловный интерес представляет оригинальный приём поиска первых интегралов на основе “псевдоинтегралов”, представляющих собой нелокальные аналоги первых интегралов – выражение

$$\tilde{P} = \tilde{P}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, N_1, N_2, \dots, N_s)$$

является “псевдоинтегралом” уравнения

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

если

$$D_x(\tilde{P}) = R [y^{(n)} - F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})].$$

Здесь $N_1, N_2, \dots, N_s$ – нелокальные переменные, и от них зависит интегрирующий множитель R .

В качестве примера можно привести уравнение Эмдена–Фаулера $y'' = 2Axy^{-1/2}$, которое имеет три “псевдоинтеграла” [8]

$$\begin{cases} \tilde{P}_1 = e^{-\alpha t}(y' + 2\alpha y^{1/2} + 2\alpha^2 x), \\ \tilde{P}_2 = e^{-\beta t}(y' + 2\beta y^{1/2} + 2\beta^2 x), \\ \tilde{P}_3 = e^{-\gamma t}(y' + 2\gamma y^{1/2} + 2\gamma^2 x), \end{cases} \quad (13)$$

где α, β, γ – три корня кубического уравнения $\rho^3 = A$. Заметим, что в данном случае можно исключить t из трёх “псевдоинтегралов” и получить два настоящих первых интеграла

$$\begin{cases} P_1 = \tilde{P}_1 \tilde{P}_2 \tilde{P}_3 = (y')^3 - 12Axy^{1/2}y' + 8Ay^{3/2} + 8A^2x^3, \\ P_2 = \tilde{P}_1^\beta \tilde{P}_2^{-\alpha} = (y' + 2\alpha y^{1/2} + 2\alpha^2 x)^\beta (y' + 2\beta y^{1/2} + 2\beta^2 x)^{-\alpha}, \end{cases} \quad (14)$$

и исходное уравнение Эмдена–Фаулера интегрируется в квадратурах. Очевидно, максимальное число независимых “псевдоинтегралов” равно $n + \omega$, где n – порядок уравнения, ω – число независимых нелокальных переменных. Это обстоятельство усложняет поиск полной системы “псевдоинтегралов” (хотя к ним, например, приводит почленное интегрирование уравнения, умноженного на произвольный множитель). Зато, как легко видеть, “псевдоинтегралы” (13) линейны по первой производной, чего никак нельзя сказать о первых интегралах (14) – их структуру “угадать” довольно затруднительно. Поэтому подобный подход может оказаться перспективным, по крайней мере – с точки зрения простоты анзаца при построении модельного уравнения.

В заключение заметим, что многие из указанных направлений находятся на первоначальном этапе исследования, и изучение физических аналогий нелокальных переменных, аналогов нётеровых симметрий и “псевдоинтегралов” представляется одной из актуальных задач современного математического моделирования.

Литература

- [1] Зайцев В. Ф., Линчук Л. В. Дифференциальные уравнения (структурная теория), часть III (учебное пособие). – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – 120 с.
- [2] Зайцев В. Ф. Построение точной модели, обладающей некоторой точечной симметрией // Математическое моделирование, Т. 7, №5, 1995. – С. 12–14.
- [3] Аврашков П. П., Зайцев В. Ф. Лиевские симметрии и первые интегралы одного класса дифференциальных уравнений // Межвуз. сб. научных трудов, т. 8. – Орел: ОГТУ, 1996. – С. 44–49.
- [4] Абрамова М. Н., Зайцев В. Ф. Решение обратной задачи группового анализа для одного класса уравнений 4-го порядка // Межвуз. сб. научных трудов, т. 8. – Орел: ОГТУ, 1996. – С. 34–37.
- [5] Демин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. – М.: Наука, 1968. – 352 с.
- [6] Leach P. G. L., Bouquet S., Dewisme A. Symmetries of Hamiltonian one-dimensional systems // Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 28, №6, 1993. – P. 705–712.
- [7] Зайцев В. Ф., Хоанг Нгы Хуан. Аналогии вариационных симметрий ОДУ третьего порядка // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. – 2013. – № 154. – С. 33–41.
- [8] Зайцев В. Ф. Группы Ли–Беклунда, допускаемые нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями // Современный групповой анализ. – М.: МФТИ, 1993. – С. 33–42.

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ВЛОЖЕНИЯ

Зайцев В. Ф., Зайцев О. В.

Российский государственный педагогический

университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: valentin_zaitsev@mail.ru

Zaitsev V. F., Zaitsev O. V. The application of the method of inclusion. We discuss the application of the method of inclusion for construct new generators of discrete groups transformations of ordinary differential equations.

Рассматривается применение метода вложения для построения новых образующих дискретных групп преобразований обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод вложения [1, 2] первоначально был предложен как эффективный инструмент поиска гладкого продолжения дискретных групп преобразований (ДГП) обыкновенных дифференциальных уравнений на сингулярные точки. Однако интуитивно было ясно, что возможности этого метода значительно шире – с его помощью можно строить новые образующие дискретных групп, а следовательно, и новые разрешимые уравнения исследуемых классов.

Известно [1], что класс обобщённых уравнений Эмдена–Фаулера

$$y'' = Ax^n y^m (y')^l, \quad (1)$$

элемент которого мы будем обозначать вектором существенных параметров (n, m, l) , допускает ДГП $\mathfrak{D}_3$, которую можно задать двумя образующими:

$$\mathfrak{r} : x = u, \quad y = t, \quad (n, m, l) \longrightarrow (m, n, 3 - l),$$

$$\mathfrak{g} : x = u^{\frac{1}{n+1}}, \quad y = (u')^{-\frac{1}{m}}, \quad (n, m, l) \longrightarrow \left(\frac{1}{1-l}, -\frac{n}{n+1}, \frac{2m+1}{m} \right).$$

Образующая $\mathfrak{r}$ определена всюду, а образующая $\mathfrak{g}$ имеет сингулярные точки $n = -1$, $m = -1$, $l = 1$, $l = 2$, в которых на графе ДГП $\mathfrak{D}_3$ некоторые преобразованные уравнения не имеют смысла (преобразованные параметры m и n обращаются в бесконечность). Отметим также, что на подклассе $(n, m, 0)$ класса (1) определена частная образующая

$$\mathfrak{s} : x = 1/t, \quad y = u/t, \quad (n, m, 0) \longrightarrow (-n - m - 3, m, 0).$$

Гладкое продолжение этой группы на указанные сингулярные точки (тривиально разрешимые сингулярные точки $m = 0$ и $n = 0$ мы здесь не рассматриваем) легко построить, вложив класс (1) в класс

$$y'' = f(x)g(y)h(y'), \quad (2)$$

с вектором существенных функций-параметров $(f(x), g(y), h(y'))$, роль которых выполняют в классе (1) степенные функции. Этот класс также допускает ДГП с аналогичными образующими, но в отличие от класса (1), образующая $\mathfrak{g}$ определена всюду, что и позволяет построить гладкие продолжения – для этого достаточно пополнить класс (1) “предельными элементами”. Их можно найти, вычислив действие образующей $\mathfrak{g}$ в классе (2) на элемент $(x^n, y^m, (y')^l)$ в сингулярных точках класса (1).

Следует заметить, что указанный алгоритм эффективен лишь в случае, когда сужение образующей ДГП, допускаемой классом (2), совпадает с образующей ДГП, допускаемой классом $(1) \subset (2)$ и имеющей сингулярные точки.

Для построения расширений ДГП требование “наследования” дискретных симметрий более широким классом уравнений не столь критично. Однако при этом не гарантируется нетривиальный результат.

Кроме класса (2) класс обобщённых уравнений Эмдена–Фаулера (1) вкладывается и в 4-параметрический класс

$$y'' = Ax^n y^m (y')^l (xy' - y)^k, \quad (3)$$

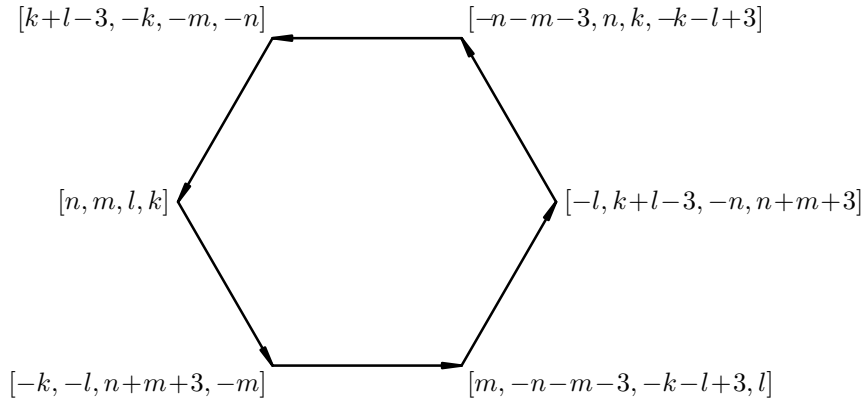
элемент которого мы будем обозначать символом $[n, m, l, k]$. На этом классе замкнуты образующие $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$, но не замкнута образующая $\mathfrak{g}$. Зато можно ввести дополнительную образующую $\mathfrak{l}$ с помощью касательного пробразования Лежандра [3], [4]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r} : x = u, \quad y = t, \quad [n, m, l, k] &\longrightarrow [m, n, 3-l-k, k], \\ \mathfrak{s} : x = 1/t, \quad y = u/t, \quad [n, m, l, k] &\longrightarrow [-n-m-3, m, k, l], \\ \mathfrak{l} : x = u', \quad y = tu' - u, \quad [n, m, l, k] &\longrightarrow [-l, -k, -n, -m]. \end{aligned}$$

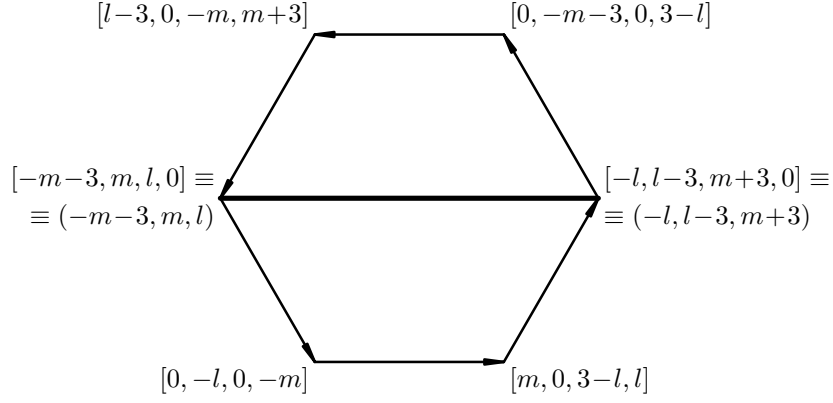
Структура ДГП становится очевидной, если перейти к минимальному коду группы и ввести новую образующую $\mathfrak{h} = \mathfrak{s}\mathfrak{l}$:

$$\mathfrak{h} : x = (u')^{-1}, \quad y = \frac{tu' - u}{u'}, \quad [n, m, l, k] \longrightarrow [-k, -l, n+m+3, -m].$$

Тогда $\mathfrak{h}^6 = E$, и мы получаем группу диэдра $\mathfrak{D}_6$ 12-го порядка (на рисунке показана только образующая $\mathfrak{h}$, задающая группу $\mathfrak{C}_6$).



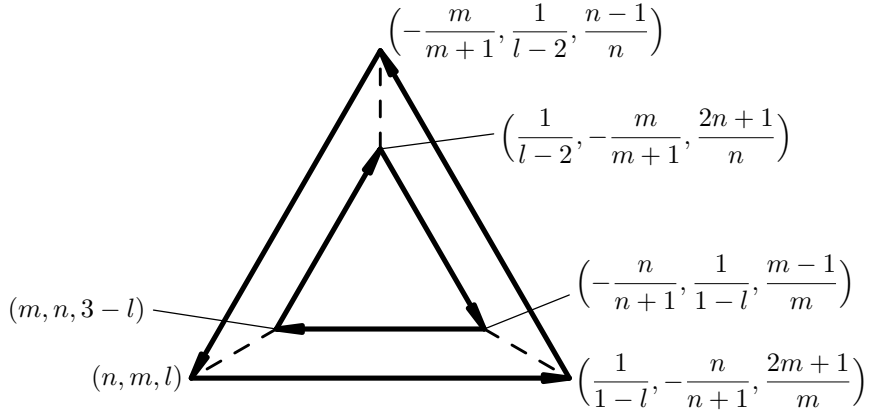
Очевидно, при $k = 0$ и $m + n + 3 = 0$ в графе ДГП появляются две вершины, соответствующие обобщённым уравнениям Эмдена–Фаулера



и преобразование $\mathfrak{h}^3 \equiv \mathfrak{c}$ определяет новую частную образующую на классе (1)

$$\mathfrak{c} : x = (u')^{-1}, \quad y = \frac{tu' - u}{u'}, \quad (-n-m-3, m, l) \longrightarrow (-l, l-3, m+3).$$

Поэтому все уравнения такого вида допускают ДГП $\mathfrak{D}_6$ 12-го порядка, а не группу $\mathfrak{D}_3$ 6-го порядка, а для поиска новых интегрируемых случаев достаточно выписать все разрешимые уравнения $(-n-m-3, m, l)$, например, из справочника [5] и “размножить” их по известной группе $\mathfrak{D}_3$.



За исключением инвариантного семейства $\left(n, -n-3, \frac{3n+4}{2n+3}\right)$ и случая вырождения $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ их оказывается три (с точностью до преобразования годографа $\mathfrak{r}$):

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{4}{5}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{11}{7}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{17}{10}\right),$$

решения которых помещены в справочник [5] под номерами 2.5.2.76, 2.5.2.27 и 2.5.2.49 соответственно. Каждое из них порождает 6 новых интегрируемых случаев обобщённого уравнения Эмдена–Фаулера, т. е. всего новых уравнений оказывается 18. Полная классификация разрешимых уравнений классов (1), (3) приведена в [3], [4].

Заметим, что каждая пара связанных преобразованием $\mathfrak{r}$ уравнений (1) сводится к уравнению Абеля второго рода

$$yy' - y = sx + \sigma A(\alpha A^2 x^{-1/2} + \beta A + \gamma x^{1/2}), \quad (4)$$

где A – произвольный параметр, s , α , β , γ и σ зависят от конкретных параметров обобщённого уравнения Эмдена–Фаулера n , m , l . Таким образом, указанное “размножение” уравнений (1) приводит и к 9 новым интегрируемым уравнениям Абеля 2-го рода (4).

Литература

- [1] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 464 с.
- [2] Зайцев В. Ф., Линчук Л. В., Флегонтов А. В. Дифференциальные уравнения (структурная теория), часть IV (учебное пособие). – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – 120 с.
- [3] Зайцев О. В. О дискретных симметриях и новых разрешимых случаях в классе полиномиальных дифференциальных уравнений // Наука XXI века: новый подход. Материалы IX молодежной международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных. – СПб.: науч.-изд. центр «Открытие», 2014. – С. 8–16.
- [4] Зайцев О. В., Хакимова З. Н. Классификация новых разрешимых случаев в классе полиномиальных дифференциальных уравнений // Актуальные вопросы современной науки № 3. – СПб.: науч.-изд. центр «Открытие», 2014. – С. 3–11.
- [5] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 560 с.

УДК 517.9

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ «НЬЮТОНОВСКАЯ КОСМОЛОГИЯ»

Клебанов И. И.^{1,2}, Старцун О. В.¹, Иванов С. А.²

Челябинский государственный педагогический университет¹

Южно-уральский государственный университет²

Челябинск

e-mail: klebanov.igor2010@yandex.ru

Klebanov I. I., Startsun O. V., Ivanov S. A. Group analyse of model «Newtonian cosmology». Symmetry group of the system equations of ideal nonrelativistic self-gravitating fluid with zero pressure is calculated. Submodel invariant under the subgroup of rotations $SO(3)$ is built and symmetry group of the factorsystem is calculated. Private analytical invariant solution of the factorsystem is obtained.

Рассчитана группа симметрии системы уравнений гидродинамики идеальной самогравитирующей нерелятивистской жидкости с нулевым давлением. Построена подмодель, инвариантная относительно подгруппы вращений $SO(3)$ и вычислена допускаемая факторсистемой алгебра Ли. Построено частное аналитическое решение факторсистемы.

Модель «Ньютоновская космология» является базисной при изучении крупномасштабной структуры Вселенной [1, 2] и представляет собой систему уравнений гидродинамики идеальной самогравитирующей нерелятивистской жидкости с нулевым давлением, плотностью ρ , скоростью $\vec{v}$ и гравитационным потенциалом Φ [2]

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} + \operatorname{grad} \Phi = 0, \\ \Delta \Phi = 4\pi\gamma\rho. \end{cases} \quad (1)$$

Первое уравнение есть уравнение непрерывности, второе – уравнение Эйлера, третье – уравнение Пуассона, Δ – оператор Лапласа, γ – гравитационная постоянная. В настоящее время хорошо изучены различные приближённые решения системы (1), из которых наиболее известной является модель «блинов» Зельдовича [1, 3]. Цель нашей работы состоит в систематическом исследовании системы уравнений (1) методами группового анализа, что позволит получить новые точные аналитические решения, выходящие за рамки теории возмущений, а также полезные для тестирования численных методов.

Расчёт симметрий, допускаемых системой (1), проведенный по стандартному алгоритму Ли–Овсянникова [4], показывает, что система допускает бесконечномерную алгебру Ли с генератором

$$\hat{X} = \xi^{(x)} \partial_x + \xi^{(y)} \partial_y + \xi^{(z)} \partial_z + \xi^{(t)} \partial_t + \eta^{(p)} \partial_p + \eta^{(\Phi)} \partial_\Phi + \eta^{(u)} \partial_u + \eta^{(v)} \partial_v + \eta^{(\omega)} \partial_\omega,$$

где x, y, z – декартовы координаты, t – время, u, v, ω – компоненты скорости, ξ и η – компоненты касательного векторного поля, ∂ – оператор дифференцирования по соответствующей переменной,

$$\xi^{(x)} = F_1(t) + (C_1 - C_4)x + C_2y + C_{10}, \quad (2)$$

$$\xi^{(y)} = F_2(t) + (C_1 - C_4)y - C_2x + C_6z + C_7, \quad (3)$$

$$\xi^{(z)} = F_3(t) + (C_1 - C_4)z + C_8t - C_3x - C_6y + C_9, \quad (4)$$

$$\xi^{(t)} = -C_4t + C_5, \quad (5)$$

$$\eta^{(p)} = 2C_4\rho, \quad (6)$$

$$\eta^{(\Phi)} = 2C_1\Phi - F_{1tt}y + F_4(t) + F_{3tt}z, \quad (7)$$

$$\eta^{(u)} = C_1u + C_2v + C_3\omega + F_{1t}, \quad (8)$$

$$\eta^{(v)} = C_1v - C_2u + C_6\omega + F_{2t}, \quad (9)$$

$$\eta^{(\omega)} = C_1\omega - C_3u - C_6v + F_{3t} + C_8, \quad (10)$$

$F_i(t)$ – произвольные функции, C_k – произвольные константы.

Бесконечномерная алгебра (2) содержит 13-мерную подалгебру с генераторами трансляций

$$\hat{X}_1 = \partial_x, \quad \hat{X}_2 = \partial_y, \quad \hat{X}_3 = \partial_z, \quad \hat{X}_4 = \partial_t, \quad \hat{X}_5 = \partial_\Phi;$$

преобразований Галилея

$$\hat{X}_6 = t \partial_x + \partial_u, \quad \hat{X}_7 = t \partial_y + \partial_v, \quad \hat{X}_8 = t \partial_z + \partial_\omega;$$

вращений

$$\begin{aligned} \hat{X}_9 &= y \partial_z - z \partial_y + v \partial_\omega - \omega \partial_v, & \hat{X}_{10} &= z \partial_x - x \partial_z + \omega \partial_u - u \partial_\omega, \\ & & \hat{X}_{11} &= x \partial_y - y \partial_x + u \partial_v - v \partial_u; \end{aligned}$$

и растяжений

$$\begin{aligned} \hat{X}_{12} &= 2\Phi \partial_\Phi + u \partial_u + v \partial_v + \omega \partial_\omega + x \partial_x + y \partial_y + z \partial_z, \\ \hat{X}_{13} &= -2\rho \partial_\rho + x \partial_x + y \partial_y + z \partial_z + t \partial_t. \end{aligned}$$

«Богатый» набор симметрий, допускаемый системой (1), дает возможность реализовать для Ньютоновской космологии программу ПОДМОДЕЛИ, подобную программе Л. В. Овсянникова в области газодинамики [5]. Система (1) при этом играет роль «большой модели». В качестве первого шага необходимо вычислить оптимальную систему подалгебр для 13-мерной алгебры $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_{13}$, что является предметом отдельного исследования. В настоящей заметке мы сосредоточимся на подмодели, инвариантной относительно группы вращений $SO(3)$ с генераторами $(\hat{X}_9, \hat{X}_{10}, \hat{X}_{11})$. Инвариантами группы $SO(3)$ являются

$$\Phi, \rho, t, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{u^2 + v^2 + \omega^2} \equiv U, \quad s = \vec{r}\vec{v}.$$

Ввиду того, что $\vec{v} = \vec{r}/r$ [6], инвариантное решение следует искать в виде

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}}{r} U(t, r), \quad \rho = \rho(t, r), \quad \Phi = \Phi(t, r). \quad (11)$$

Подставляя (3) в (1), получим факторсистему

$$\begin{cases} U_t + UU_r + \Phi_r = 0, \\ \rho_t + U\rho_r + \rho \left(\frac{2U}{r} + U_r \right) = 0, \\ \frac{2\Phi_r}{r} + \Phi_{rr} = \rho, \end{cases} \quad (12)$$

(единицы измерения выбраны таким образом, что $4\pi\gamma \equiv 1$).

Факторсистема (4) допускает трёхмерную алгебру

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = 2\Phi \partial_\Phi + U \partial_U + r \partial_r, \\ \hat{X}_2 = -2\rho \partial_\rho + r \partial_r + t \partial_t, \\ \hat{X}_3 = \partial_t, \end{cases} \quad (13)$$

и бесконечномерную алгебру с генератором $\hat{X}_\infty = F_1(t)\partial_\Phi$, где $F_1(t)$ – произвольная функция времени t .

В качестве примера рассмотрим решение, инвариантное относительно генератора $\hat{X}_1$. Инвариантами являются U/r , Φ/r^2 , ρ , t . Решение ищем в виде $U = rf_1(t)$, $\Phi = r^2 f_2(t)$, $\rho = \rho(t)$. Факторсистема представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений ($f' \equiv df/dt$):

$$\begin{cases} f_1' + f_1^2 + 2f_2 = 0, \\ \rho' + 3f_1\rho = 0, \\ \rho = 6f_2. \end{cases} \quad (14)$$

Исключая ρ и f_2 , приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции f_1

$$f_1'' + 5f_1 f_1' + 3f_1^3 = 0, \quad (15)$$

которое допускает, в свою очередь, двумерную алгебру Ли с генераторами ∂_t и $t\partial_t - f_1\partial_{f_1}$. Следуя алгоритму Ли [7], переходим к каноническим переменным $u = t - \frac{1}{f_1}$ и $\tau = \frac{1}{f_1}$.

В канонических переменных уравнение (7) допускает решение в замкнутой аналитической форме

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = F(\tau), \\ \int \frac{dF}{3F^3 + 14F^2 + 21F - 10} = \ln|\tau| + C. \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом, рассмотренная подмодель является точно решаемой. Анализ физического смысла полученного решения выходит за рамки настоящей заметки.

Литература

- [1] Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Шандарин С. Ф. Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания // УФН, **182** (2012). – С. 233–261.
- [2] Вайнберг С. Космология. – М: УРСС, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 608 с.
- [3] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Строение и эволюция Вселенной. – М: Наука, 1975. – 732 с.
- [4] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М: Наука, 1978. – 400 с.
- [5] Овсянников Л. В. Программа «Подмодели». Газовая динамика // ПММ, **58**, вып. 4, 1994. – С. 30–55.
- [6] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 336 с.
- [7] Ибрагимов Н. Х. Практический курс дифференциальных уравнений. – Нижний Новгород: Изд. Нижегородского госуниверситета, 2007. – 421 с.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ФЛАТТЕР ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН ПО УТОЧНЁННОЙ ТЕОРИИ ТИМОШЕНКО С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

Кучаров О. Р.

Ташкентский институт ирригации и мелиорации

Ташкент

e-mail: olimjon_kucharov@mail.ru

Kucharov O. R. Nonlinear flutter of viscoelastic plates under Timoshenko's theory. The given work is devoted mathematical modelling of a problem about nonlinear flutter of viscoelastic plates under Timoshenko's theory. Influences of viscoelastic properties of a material, geometrical and mechanical parameters of a plate for critical speed of flutter are investigated.

Keywords: flutter, mathematical modeling, viscoelasticity, integro-differential equations.

В данной работе рассматривается математическое моделирование задачи о нелинейном флаттере вязкоупругих пластин на основе теории Тимошенко. Исследовано влияние вязкоупругих свойств материала, геометрических и механических параметров пластины на критическую скорость флаттера.

Ключевые слова: флаттер, математическое моделирование, вязкоупругость, интегро-дифференциальные уравнения.

Разработка и применение композиционных материалов в настоящее время является одним из приоритетных направлений научно-технического прогресса, что позволяет не только существенно улучшать эксплуатационные характеристики инженерных конструкций, но и в ряде случаев создавать конструкции, нереализуемые в рамках традиционных материалов. При этом достаточно сложными являются процедура расчёта и проектирование конструкций из композиционных материалов, требующих учёта их реальных свойств. Поэтому разработка эффективных методов и алгоритмов решения нелинейных задач об устойчивости тонкостенных конструкций из композиционных материалов на сегодняшний день является наиболее актуальной проблемой. К таким задачам относятся задачи аэродинамики, в частности, задачи о флаттере тонкостенных конструкций.

Имеется значительное число публикаций, посвященных решению задач расчёта тонкостенных конструкций с учётом наследственных свойств [1–3]. По исследованию нелинейных задач аэродинамики можно указать лишь отдельные работы [4–7]. В них задачи рассматривались в геометрически нелинейной постановке на основе гипотез Бергера и Кирхгофа–Лява.

При исследовании задач наследственной теории наряду с гипотезами Бергера и Кирхгофа–Лява получили распространение модели Тимошенко, Миндлина и Уфлянда, Рейсснера и Амбарцумяна, согласно которым в процессах, происходящих в тонкостенных конструкциях, необходимо учитывать и поперечные сдвиги. В связи с этим возникает необходимость определения пре-

дела применимости различных гипотез при решении динамических задач в геометрически нелинейной постановке.

Настоящая работа посвящена математическому моделированию нелинейных задач о флаттере вязкоупругих пластин по уточненной теории Тимошенко.

Рассмотрим тонкостенную конструкцию типа пластины с вязкоупругими наследственными свойствами материала, со сторонами a и b , обтекаемой с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью V , которая направлена параллельно оси Ox .

Математическая модель данной задачи на основе уточнённой теории Тимошенко в геометрически нелинейной постановке, учитывающую деформацию сдвига и инерцию вращения, имеет вид [8].

Пусть пластина шарнирно оперта по всем краям. Удовлетворяя граничным условиям задачи, выберем выражения для функций $w = w(x, y, t)$, $\psi_x = \psi_x(x, y, t)$, $\psi_y = \psi_y(x, y, t)$ на основе многочленной аппроксимации.

Выполняя процедуру Бубнова–Галеркина, при этом введя безразмерные величины, относительно безразмерных неизвестных $w_{kl} = w_{kl}(t)$, $\psi_{xkl} = \psi_{xkl}(t)$ и $\psi_{ykl} = \psi_{ykl}(t)$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что аналогичным образом можно получить разрешающее уравнение рассматриваемой задачи с учётом распространения упругих волн.

Интегрирование полученной системы проводилось численным методом [9]. При этом в качестве ядра релаксации использовалось слабо сингулярное ядро Колтунова–Ржаницына с тремя реологическими параметрами (A , β и α) вида [3]

$$R(t) = Ae^{-\beta t}t^{\alpha-1}, \quad (0 < \alpha < 1). \quad (1)$$

В работе при расчётах используются значения реологических параметров A , β , α стеклопластика КАСТ-В с различным направлением волокон: КАСТ-В 0° – $\alpha = 0,1$; $\beta = 0,001$; $A = 0,0099$; КАСТ-В 90° – $\alpha = 0,1$; $\beta = 0,00166$; $A = 0,0104$; КАСТ-В 45° – $\alpha = 0,1$; $\beta = 0,00166$; $A = 0,0208$.

В качестве критерия определения критической скорости V_{cr} потока газа выбирается верхний точный предел множества скоростей $\{V\}$, при котором обеспечивается сходимость разложения Бубнова–Галеркина для всех $t \geq 0$, т. е. выполняется условие

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y) < 1.$$

При скоростях, когда $V > V_{cr}$, колебательное движение происходит с интенсивно нарастающими амплитудами и может привести конструкцию к разрушению, а в случае, когда $V < V_{cr}$, амплитуда колебаний затухает. Отметим, что при $V > V_{cr}$ разложение Бубнова–Галеркина расходится.

Далее, приведены результаты расчета вязкоупругой пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа при $V < V_{cr}$ (рис. 1–3). Здесь в качестве исходных данных приняты следующие: $\lambda = 3$, $\delta = 133$, $M_E = 4.71$, $M_P = 0.003$, $V = 800$ м/с.

На рис. 1 представлено зависимость функций w от времени срединной точки упругой ($A = 0$ – кривая 1) и вязкоупругой пластины ($A = 0.0099$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.001$ (материал КАСТ-В 0°) – кривая 2; $A = 0.0208$, $\alpha = 0.1$,

$\beta = 0.0166$ (материал КАСТ-В 45°) – кривая 3). Как видно из этого рисунка, учёт наследственных свойств материала приводит к затуханию колебательного процесса. При этом, хотя решения упругой и вязкоупругих задач в начальный период времени мало отличаются друг от друга, с течением времени наследственные свойства материала оказывают существенное влияние.

На рис. 2 показано изменение прогиба w по длине пластины при $t = 33$. Согласно рисунку, учёт наследственных свойств показывает уменьшение значений максимальных прогибов.

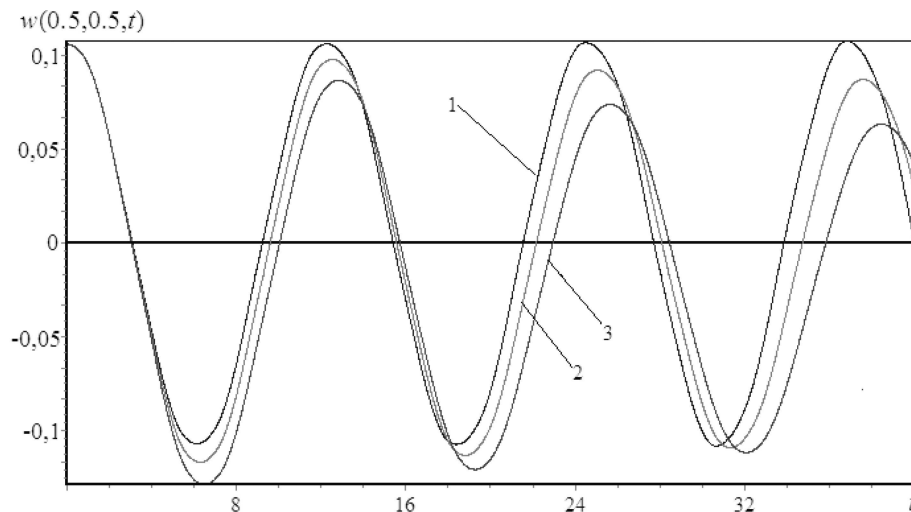


Рис. 1. Зависимость функции w от времени:
 $A = 0$ (1); КАСТ-В 0° (2); КАСТ-В 45° (3).

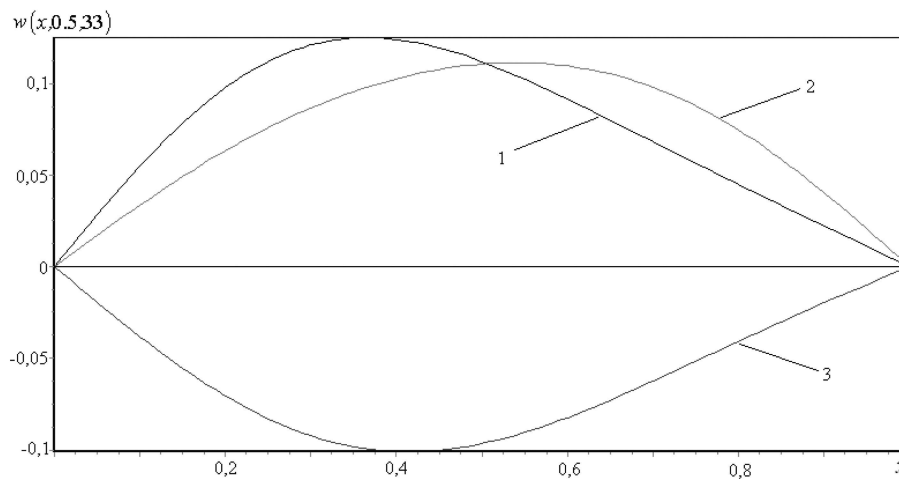


Рис. 2. Сравнение форм колебаний при $t = 33$:
 $A = 0$ (1); КАСТ-В 0° (2); КАСТ-В 45° (3).

Помимо прогибов и перемещений пластины представляют интерес напряжения, моменты и перерезывающие силы. На рис. 3 представлена зависимость

напряжения σ_x от времени срединной точки пластины без учета ($A = 0$ – кривая 1) и с учётом наследственных свойств материала ($A = 0.0099$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.001$ – кривая 2; $A = 0.0208$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.0166$ – кривая 3). Как видно из рисунков, характер изменения этой функции аналогичен функции w .

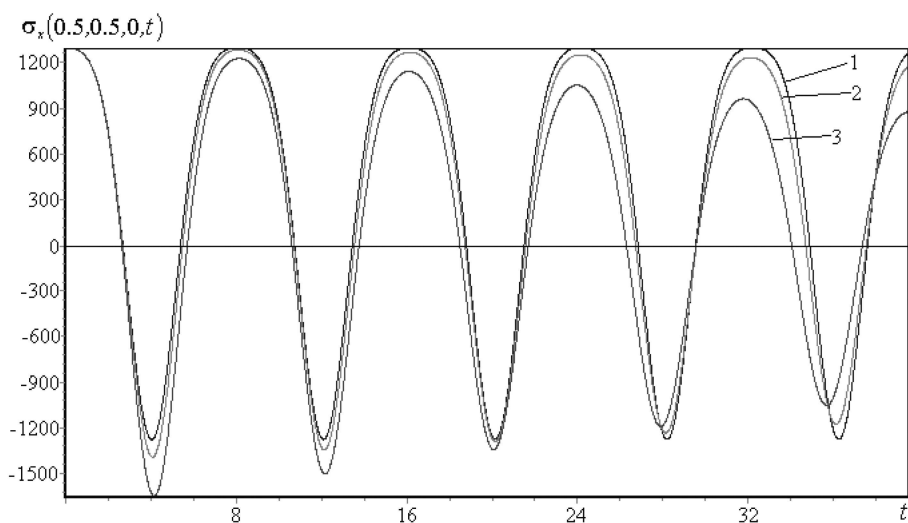


Рис. 3. Зависимость функции σ_x от времени [кг/см²]:
 $A = 0$ (1); КАСТ-В 0° (2); КАСТ-В 45° (3).

Исследование форм изменения напряжений σ_x , σ_y , изгибающих моментов M_x , M_y , перерезывающих сил Q_x и Q_y , усилий N_x и N_y по длине тонкостенной конструкции при $t = 33$ показывает, что амплитуда колебаний усилий и моментов в количественном плане существенно отличается, тогда как качественная картина носит одинаковый характер.

Литература

- [1] Богданович А. Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. – Рига: Зинатне, 1987. – 296 с.
- [2] Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
- [3] Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 276 с.
- [4] Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 340 с.
- [5] Доуэлл Е. Панельный флаттер. Обзор исследований аэроупругой устойчивости пластинок и оболочек // Ракетная техника и космонавтика. – 1970. – №3. – С. 3–24.
- [6] Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // Прикладная математика и механика. – Москва, 1956. – №6 (20). – С. 733–755.
- [7] Мовчан А. А. Об устойчивости панели, движущейся в газа // ПММ, №2 (21), 1957. – С. 231–243.

- [8] Кучаров О. Р. Разработка моделей и методов решения нелинейных задач аэродинамики, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями // Узб. журнал “Проблемы информатики и энергетики”. – Ташкент, 2010. – №4. – С. 12–16.
- [9] Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // ПММ, №5 (51), 1981. – С. 867–871.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХЧАСТИЧНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

Лагодинский В. М.

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения
Санкт-Петербург

Lagodinskiy V. M. The bondary problem for twoparticules relativistic Schrödinger equation. The bondary problem for twoparticules relativistic Schrödinger equation with potential as deep rectangular well is formulated and solved.

Сформулирована и решена краевая задача для двухчастичного релятивистского уравнения Шрёдингера с потенциалом вида глубокой прямоугольной ямы.

В релятивистской квантовой механике, основанной на теории дифференциальных уравнений бесконечного порядка [1], процесс столкновения двух частиц описывается стационарным двухчастичным релятивистским уравнением Шрёдингера. Считая для простоты пространство одномерным, в системе центра импульсов это уравнение можно записать в виде:

$$\left(\varepsilon - \sqrt{m_1^2 - \frac{d^2}{dx^2}} - \sqrt{m_2^2 - \frac{d^2}{dx^2}} \right) \psi(x) + U(x)\psi(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где m_1, m_2, M — положительные числа (m_1, m_2 — массы сталкивающихся частиц, считаем, что $m_1 \leq m_2$, ε — энергия физической системы, $U(x)$ — потенциальная энергия взаимодействия. Используется система единиц, в которой скорость света c и постоянная Планка $\hbar$ равны единице. Определение функции $f(D_x)$ дифференциального оператора D_x , соответствующей функции комплексного переменного $f(z)$, которую будем называть символом оператора $f(D_x)$, дано в работе [1]. Согласно этому определению, если функция $u(x)$ бесконечно дифференцируема в точке $x = x_0$, причём множество предельных точек последовательности

$$\{\gamma_n(x_0)\}_{n=0}^\infty = \left\{ |(D_x u)(x_0)|^{1/n} \exp\left(i \frac{\varphi_n}{n}\right) \right\},$$

где $\varphi_n = \arg(D_x^n u)(x_0)$, является ограниченным подмножеством области голоморфности функции $f(z)$, то функция $(f(D_x)u)(x)$ определена в точке x_0

аналитическим продолжением:

$$(f(D_x)u)(x_0) = \text{Anc}_\alpha(f(\alpha, D_x)u)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha_{p-1})^i}{i!} \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{p-1} - \alpha_{p-2})^k}{k!} \dots \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^l}{l!} f^{(i+k+\dots+l)}(0)(D_x^{i+k+\dots+l}u)(x_0), \quad (2)$$

Множество функций, удовлетворяющих этому условию на промежутке (a, b) (возможно и бесконечном), обозначим через $G_f(a, b)$. Таким образом, если

$$f(z) = \sqrt{m^2 - z^2},$$

$f(0) = m$, разрезы — по промежуткам вещественной оси (m, ∞) , $(-\infty, -m)$, $D_x = \partial_x = d/dx$, а $u(x) = e^{ipx}$, $\forall x \in (a, b)$, $p \in \mathbb{R}$, то

$$(f(\partial_x)u)(x) = \sqrt{m^2 - \partial_x^2} e^{ipx} = \sqrt{m^2 + p^2} e^{ipx}, \quad \forall x \in (a, b). \quad (3)$$

Если $p = i\chi$, $\chi \in \mathbb{R}$, $|\chi| < m$, то

$$(f(\partial_x)u)(x) = \sqrt{m^2 - \partial_x^2} e^{\chi x} = \sqrt{m^2 - \chi^2} e^{\chi x}, \quad \forall x \in (a, b),$$

но функция $u(x) = \exp(\chi x)$ при вещественном χ , если $|\chi| \geq m$, не принадлежит области определения оператора $f(\partial_x)$.

С помощью аналогичной процедуры аналитического продолжения по параметру можно определить и оператор $g(\partial_x)$ с символом $g(z) = (m^2 - z^2)^{-1/2}$:

$$g(\partial_x) = (m^2 - \partial_x^2)^{-1/2}.$$

Если функция $u(x) \in G_g(a, b)$, то на (a, b) определена функция

$$\varphi(x) = (g(\partial_x)u)(x) = (m^2 - \partial_x^2)^{-1/2}u(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Отметим, что эта функция на (a, b) определена однозначно, она удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\sqrt{m^2 - \partial_x^2} \varphi(x) = u(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Если $u(x) \in G_g(a, b)$, то

$$\sqrt{m^2 - \partial_x^2} u(x) = (m^2 - \partial_x^2) \frac{1}{\sqrt{m^2 - \partial_x^2}} u(x) = \\ = m^2 \frac{1}{\sqrt{m^2 - \partial_x^2}} u(x) - \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\sqrt{m^2 - \partial_x^2}} u(x), \quad \forall x \in (a, b), \quad (4)$$

Рассмотрим сначала уравнение

$$\left(\varepsilon - \sqrt{m_1^2 - \partial_x^2} - \sqrt{m_2^2 - \partial_x^2} \right) \psi(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b), \quad (5)$$

Пусть $\psi(x) = Ae^{\chi x}$, $A \in \mathbb{C}$, $\chi \in \mathbb{C}$. Подставив в (5), получим характеристическое уравнение:

$$\varepsilon - \sqrt{m_1^2 - \chi^2} - \sqrt{m_2^2 - \chi^2} = 0. \quad (6)$$

Это уравнение имеет два решения:

$$\chi = \pm(2\varepsilon)^{-1} \sqrt{4m_1^2 m_2^2 - (\varepsilon^2 - m_1^2 - m_2^2)^2}. \quad (7)$$

Можно показать, что для того, чтобы эти решения не принадлежали разрезам, с которыми определяются операторы $(m_i^2 - \partial_x^2)^{-1/2}$, $i = 1, 2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$$\varepsilon > |m_1^2 - m_2^2|^{1/2}.$$

Будем теперь рассматривать уравнение (1) на промежутке $(-b, b)$ с функцией $U(x)$ вида

$$U(x) = \begin{cases} U_0 > 0, & \forall x \in [-a, a], \\ 0, & \forall x \notin [-a, a], \end{cases} \quad (8)$$

где $a > 0$. Для общности будем считать что $U_0 > m_1 + m_2$. Необходимо поставить граничные условия в точках $x = \pm b$ и $x = \pm a$. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать, что эти условия могут быть выбраны такими, что спектр задачи будет вещественным и ограниченным снизу, а решения, соответствующие разным значениям ε , ортогональны друг другу.

В соответствии с (8) решение уравнения (1) должно принадлежать $G_f((-\infty, -a) \cup (-a, a) \cup (a, \infty))$ и удовлетворять уравнениям:

$$\left(\varepsilon - \sqrt{m_1^2 - \partial_x^2} - \sqrt{m_2^2 - \partial_x^2} \right) \psi(x) = 0, \quad \forall x \notin [-a, a], \quad (9)$$

$$\left(\varepsilon - \sqrt{m_1^2 - \partial_x^2} - \sqrt{m_2^2 - \partial_x^2} \right) \psi(x) + U_0 \psi(x) = 0, \quad \forall x \in [-a, a]. \quad (10)$$

Пусть $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Если $\varepsilon > |m_1^2 - m_2^2|^{1/2}$, то оба уравнения имеют нетривиальные решения. Если, к тому же, $\varepsilon > m_1 + m_2$, то эти решения имеют вид:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ipx} + Be^{-ipx}, & \forall x < -a, \\ Ce^{iqx} + De^{-iqx}, & \forall x \in (-a, a), \\ Ee^{ipx} + Fe^{-ipx}, & \forall x > a, \end{cases} \quad (11)$$

где p и q удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\sqrt{m_1^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 + p^2} = \varepsilon, \quad \sqrt{m_1^2 + q^2} + \sqrt{m_2^2 + q^2} = \varepsilon + U_0, \quad (12)$$

т.е.

$$\begin{aligned} p &= (2\varepsilon)^{-1} \sqrt{(\varepsilon^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}, \\ q &= [2(\varepsilon + U_0)]^{-1} \sqrt{[(\varepsilon + U_0)^2 - m_1^2 - m_2^2]^2 - 4m_1^2 m_2^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

$p, q \in \mathbb{R}$. Если же $|m_1^2 - m_2^2|^{1/2} < \varepsilon < m_1 + m_2$, но $\varepsilon > m_1 + m_2 - U_0$, то решение можно записать в виде:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}, & \forall x < -a, \\ Ce^{iqx} + De^{-iqx}, & \forall x \in (-a, a), \\ Ee^{\kappa x} + Fe^{-\kappa x}, & \forall x > a, \end{cases} \quad (14)$$

где $\kappa \in \mathbb{R}$ определяется формулой (7).

Пусть теперь $\varepsilon < |m_1^2 - m_2^2|^{1/2}$, тогда уравнение (9) имеет только тривиальное решение $\psi(x) = 0$, $\forall x \notin (-a, a)$, но так как $U_0 > m_1 + m_2$, то при этом возможно $\varepsilon > m_1 + m_2 - U_0$, и тогда

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \forall x \notin (-a, a) \\ Ce^{iqx} + De^{-iqx}, & \forall x \in (-a, a). \end{cases} \quad (15)$$

Легко проверить, что эта функция удовлетворяет также уравнениям:

$$\sqrt{m_i^2 - \partial_x^2} \psi(x) = \varepsilon_i \psi(x), \quad \forall x \notin (-a, a), \quad i = 1, 2,$$

поэтому

$$\psi(x) = \varepsilon_i \frac{1}{\sqrt{m_i^2 - \partial_x^2}} \psi(x), \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

и

$$\varepsilon_2 = \sqrt{m_1^2 - m_2^2 + \varepsilon_1^2}, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = (2\varepsilon)^{-1}(\varepsilon^2 - m_i^2 + m_{2-i}^2), \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

Теперь выясним, какие граничные условия следует поставить в точках $x = \pm b$ и $x = \pm a$, чтобы достичь возможно более полной аналогии с задачей Штурма-Лиувилля [2]. Сначала рассмотрим диапазон энергий $\varepsilon < |m_1^2 - m_2^2|^{1/2}$. При этих значениях ε уравнение (9) имеет только тривиальное решение:

$$\psi(x) = 0, \quad \forall x \notin (-a, a).$$

Если, к тому же, $\varepsilon < |m_1^2 - m_2^2|^{1/2} - U_0$, только тривиальное решение имеет и уравнение (10). Пусть теперь $|m_1^2 - m_2^2|^{1/2} > \varepsilon > -U_0$, тогда уравнение (9) имеет только тривиальное решение, а уравнение (10) имеет и нетривиальные решения вида:

$$\psi(x) = A \exp(\lambda x) + B \exp(-\lambda x), \quad \forall x \in [-a, a], \quad (18)$$

где $A, B \in \mathbb{C}$,

$$\lambda = [2(\varepsilon + U_0)]^{-1} \sqrt{4m_1^2 m_2^2 - [(\varepsilon + U_0)^2 - m_1^2 - m_2^2]^2}.$$

Из условия непрерывности решения следуют граничные условия:

$$\psi(\pm a) = 0. \quad (19)$$

Функция (18) удовлетворяет им лишь при $A = B = 0$. Тем самым доказана ограниченность снизу спектра нашей краевой задачи, т. е. здесь отсутствует главная трудность теории, основанной на уравнениях Дирака и Клейна-Гордона [3].

Пусть теперь $|m_1^2 - m_2^2|^{1/2} > \varepsilon > m_1 + m_2 - U_0$, тогда уравнение (9) имеет по-прежнему только тривиальное решение, а уравнение (10) имеет чётные и нечётные решения:

$$\psi_n^0(x) = A \cos \frac{(2n-1)\pi}{2a} x, \quad \psi_n^1(x) = B \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad \forall x \in [-a, a], \quad (20)$$

где $A, B \in \mathbb{C}$, значение q определяется второй из формул (13). Используя условия (19), получим:

$$\varepsilon_n^0 = \sqrt{m_1^2 + [(2n-1)\pi]^2/(2a)^2} + \sqrt{m_2^2 + [(2n-1)\pi]^2/(2a)^2} - U_0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (21)$$

$$\varepsilon_n^1 = \sqrt{m_1^2 + (n\pi/a)^2} + \sqrt{m_2^2 + (n\pi/a)^2} - U_0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (22)$$

где N — наибольшее натуральное число n , для которого выполняются неравенства $\varepsilon_n^0 < |m_1^2 - m_2^2|^{1/2}$ и $\varepsilon_n^1 < |m_1^2 - m_2^2|^{1/2}$. Значения ε (21) и (22) составляют часть точечного спектра нашей краевой задачи. Все эти значения вещественны, а решения (20), соответствующие различным значениям ε из этого набора, ортогональны между собой. Они являются собственными функциями нашей краевой задачи.

Если $\varepsilon > 0$, то и уравнение (9), и уравнение (10) имеют нетривиальные решения. Для определения граничных условий в этом диапазоне энергий выведем аналог тождества Лагранжа для уравнения (1). Пусть $\psi_1(x)$ — решение уравнения (1) с $\varepsilon = \omega > |m_1^2 - m_2^2|^{1/2}$, а $\psi_2(x)$ — решение уравнения (1) с $\varepsilon = \nu > |m_1^2 - m_2^2|^{1/2}$:

$$\left(\omega - \sqrt{m_1^2 - \partial_x^2} - \sqrt{m_2^2 - \partial_x^2} \right) \psi_1(x) + U(x)\psi_1(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

$$\left(\nu - \sqrt{m_1^2 - \partial_x^2} - \sqrt{m_2^2 - \partial_x^2} \right) \psi_2(x) + U(x)\psi_2(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (24)$$

Умножим обе части уравнения (23) на $\psi_2(x)$, а обе части уравнения (24) на $\psi_1(x)$ и вычтем второе получившееся уравнение из первого:

$$\begin{aligned} (\omega - \nu)\psi_2(x)\psi_1(x) &= \psi_2(x) \left(\sqrt{m_1^2 - \partial_x^2} + \sqrt{m_2^2 - \partial_x^2} \right) \psi_1(x) - \\ &\quad - \psi_1(x) \left(\sqrt{m_1^2 - \partial_x^2} + \sqrt{m_2^2 - \partial_x^2} \right) \psi_2(x). \end{aligned} \quad (25)$$

В соответствии с (16) и (17) равенство (25) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} (\omega - \nu) \left\{ \psi_2(x)\psi_1(x) + \sum_{i=1,2} K_i [m_i^2 (H_i^{-1}\psi_2)(x)(H_i^{-1}\psi_1)(x) + \right. \\ \left. + (V_i^*\psi_2)(x)(V_i\psi_1)(x)] \right\} = i \frac{d}{dx} \sum_{i=1,2} [\psi_2(x)(V_i\psi_1)(x) - \psi_1(x)(V_i\psi_2)(x)], \end{aligned} \quad (26)$$

где $\psi'_i(x) \equiv \frac{d\psi_i}{dx}(x)$, $K_i = m_i^2(2\omega\nu)^{-1}(\omega\nu + m_i^2 - m_{2-i}^2)$, $H_i^{-1} = (m_i^2 - \partial_x^2)^{-1/2}$,
 $V_i = -i(m_i^2 - \partial_x^2)^{-1/2}\partial_x$, $i = 1, 2$.

Отсюда видно, что функция

$$\begin{aligned} i \sum_{i=1,2} [\psi_2(x)(V_i\psi_1)(x) - \psi_1(x)(V_i\psi_2)(x)] = \\ = \sum_{i=1,2} [\psi_2(x)(m_i^2 - \partial_x^2)^{-1/2}\psi'_1(x) - \psi_1(x)(m_i^2 - \partial_x^2)^{-1/2}\psi'_2(x)] \end{aligned}$$

играет роль вронскиана уравнения (1), а равенство (25) аналогично тождеству Лагранжа [4]. Проинтегрировав (26) по отрезку $[-b, b]$, получим:

$$\begin{aligned} (\omega - \nu) \int_{-b}^b \left\{ \psi_2(x)\psi_1(x) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1,2} K_i [m_i^2 (H_i^{-1}\psi_2)(x)(H_i^{-1}\psi_1)(x) + (V_i^*\psi_2)(x)(V_i\psi_1)(x)] \right\} dx = \\ = i \sum_{i=1,2} [\psi_2(b)(V_i\psi_1)(b) - \psi_1(b)(V_i\psi_2)(b) - \psi_2(-b)(V_i\psi_1)(-b) + \psi_1(-b)(V_i\psi_2)(-b)]. \end{aligned} \quad (27)$$

Это равенство у нас играет роль формулы Грина [4].

Таким образом, равенство

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b \left\{ \psi_2(x)\psi_1(x) + \sum_{i=1,2} K_i [m_i^2 (H_i^{-1}\psi_2)(x)(H_i^{-1}\psi_1)(x) + \right. \\ \left. + (V_i^*\psi_2)(x)(V_i\psi_1)(x)] \right\} dx = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

справедливо при $\omega \neq \nu$, если в точках $x = \pm b$ поставлены граничные условия вида:

$$\begin{aligned} A_1\psi(b) + B_1 \sum_{i=1,2} \left[(m_i^2 - \partial_x^2)^{-1/2} \frac{d\psi}{dx} \right] (b) = 0, \\ A_2\psi(-b) + B_2 \sum_{i=1,2} (m_i^2 - \partial_x^2)^{-1/2} \psi'(-b) = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — вещественные постоянные, а в точках $x = \pm a$ — условиям непрерывности:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} [\psi(\pm a + \delta) - \psi(\pm a - \delta)] = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1,2} \left[(m_i^2 - \partial_x^2)^{-1/2} \frac{d\psi}{dx} \right] \Big|_{\pm a - \delta}^{\pm a + \delta} = 0. \quad (30)$$

Легко видеть, что эти граничные условия вполне аналогичны граничным условиям задачи Штурма–Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка. Поэтому они определяют вторую часть точечного спектра нашей задачи с соответствующим набором собственных функций. Эти собственные функции, принадлежащие разным собственным значениям, ортогональны между собой в смысле скалярного произведения

$$S(\psi_1, \psi_2) = \int_{-b}^b \left\{ \psi_2^*(x) \psi_1(x) + \sum_{i=1,2} K_i [m_i^2 (H_i^{-1} \psi_2^*)(x) (H_i^{-1} \psi_1)(x) + (V_i^* \psi_2^*)(x) (V_i \psi_1)(x)] \right\} dx, \quad (31)$$

где интеграл можно считать интегралом Римана [1], а собственные значения вещественны.

Не доказана пока лишь ортогональность собственных функций, принадлежащих разным частям спектра. Нетрудно показать, что эта ортогональность в смысле скалярного произведения (31) имеет место, если в точках $x = \pm b$ выбрать граничные условия

$$\psi(b) = \psi(-b) = 0. \quad (32)$$

Именно эти условия и будем считать поставленными. Найдем собственные функции нашей задачи, соответствующие диапазону энергий $m_1 + m_2 > \varepsilon > |m_1^2 - m_2^2|^{1/2}$. На промежутке (a, b) и чётные, и нечётные решения имеют вид:

$$\psi^{0,1}(x) = A_{0,1} e^{-\kappa(x-a)} + B_{0,1} e^{\kappa(x-a)}, \quad \forall x \in (a, b), \quad (33)$$

где κ определяется формулой (7).

Используя условия (32), получим:

$$B_{0,1} = -A_{0,1} e^{-2\kappa(b-a)}. \quad (34)$$

На промежутке $(-a, a)$ чётные и нечётные собственные функции соответственно имеют вид:

$$\psi^0(x) = C_0 \cos qx, \quad \psi^1(x) = C_1 \sin qx, \quad \forall x \in (-a, a). \quad (35)$$

где q определяется второй из формул (13). Условия (32) приводят к системам уравнений

$$A_0 e^{-\kappa(b-a)} = B_0 \cos qb, \quad A_0 \sum_{i=1,2} \frac{\kappa}{\sqrt{m_i^2 - \kappa^2}} e^{-\kappa(b-a)} = C_0 \sum_{i=1,2} \frac{q}{\sqrt{m_i^2 + q^2}} \sin qb \quad (36)$$

для чётных решений и

$$A_1 e^{-\kappa(b-a)} = C_1 \sin qb, \quad A_1 \sum_{i=1,2} \frac{\kappa}{\sqrt{m_i^2 - \kappa^2}} e^{-\kappa(b-a)} = -C_1 \sum_{i=1,2} \frac{q}{\sqrt{m_i^2 + q^2}} \cos qb \quad (37)$$

для нечётных. Обозначим:

$$S_x = \sum_{i=1,2} \frac{\kappa}{\sqrt{m_i^2 - \kappa^2}}, \quad S_q = \sum_{i=1,2} \frac{q}{\sqrt{m_i^2 + q^2}},$$

тогда уравнения, определяющие спектр нашей задачи для чётных и нечётных решений имеют соответственно вид:

$$\operatorname{tg} qb = \frac{S_x}{S_q}, \quad \operatorname{tg} qb = -\frac{S_q}{S_x}.$$

И q , и κ — функции энергии ε , т. е. это уравнения относительно ε . Нетрудно видеть, что правые части этих уравнений монотонно убывают при возрастании ε от $\varepsilon = |m_1^2 - m_2^2|^{1/2}$ до $\varepsilon = m_1 + m_2$: первого уравнения — от положительного значения до нуля, а второго — от отрицательного значения до $-\infty$. Очевидно, на каждый промежуток изменения ε от $[m_1^2 + (n\pi)^2]^{1/2} + [m_2^2 + (n\pi)^2]^{1/2}$ до $[m_1^2 + (n+1)^2\pi^2]^{1/2} + [m_2^2 + (n+1)^2\pi^2]^{1/2}$ приходится один корень первого из этих уравнений и один корень второго. Эти корни могут быть найдены численно. Они составляют ещё одно подмножество точечного спектра нашей задачи: $\varepsilon_n^{0,1}$, $n = N+1, n = N+2, \dots, K$, где K — максимальное n , при котором $\varepsilon_n^{0,1} < m_1 + m_2$.

Пусть теперь $\varepsilon > m_1 + m_2$. На промежутке (a, b) чётное и нечётное решения имеют вид соответственно:

$$\psi^0(x) = A^0 \cos[p(x-a) + \varphi_0], \quad \psi^1(x) = A^1 \sin[p(x-a) + \varphi_1],$$

где p определяется первой из формул (13), а на промежутке $(-a, a)$:

$$\psi^0(x) = B^0 \cos qx, \quad \psi^1(x) = B^1 \sin qx,$$

где q определяется второй из формул (13). Используя условия (32), получим для чётных и нечётных решений соответственно:

$$p_n^0 = \frac{(2n-1)\pi}{2(b-a)} \quad p_n^1 = \frac{n\pi}{b-a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда находим собственные значения из этого диапазона:

$$\varepsilon_{K+n}^{0,1} = \sqrt{m_1^2 + (p_n^{0,1})^2} + \sqrt{m_2^2 + (p_n^{0,1})^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (38)$$

А теперь используем условия (32):

$$\begin{aligned} A_n^0 \cos \varphi_n^0 &= B_n^0 \cos q_n^0 a, \\ A_n^0 \sin \varphi_n^0 \sum_{i=1,2} \frac{p_n^0}{\sqrt{m_i^2 + (p_n^0)^2}} &= B_n^0 \sin q_n^0 a \sum_{i=1,2} \frac{q_n^0}{\sqrt{m_i^2 + (q_n^0)^2}}, \end{aligned} \quad (39)$$

и для нечётных:

$$A_n^1 \sin \varphi_n^1 = B_n^1 \sin q_n^1 a, \quad A_n^1 \cos \varphi_n^1 \sum_{i=1,2} \frac{p_n^1}{\sqrt{m_i^2 + (p_n^1)^2}} = B_n^1 \sum_{i=1,2} \frac{q_n^1}{\sqrt{m_i^2 + (q_n^1)^2}}, \quad (40)$$

где $q_n^{0,1}$ определяется второй из формул (13) при $\varepsilon = \varepsilon_n^{0,1}$. Отсюда получаем значения для сдвигов фазы:

$$\varphi_n^0 = \operatorname{arccctg} \left[\operatorname{ctg} q_n^0 a \sum_{i=1,2} \frac{p_n^0}{\sqrt{m_i^2 + (p_n^0)^2}} \left(\sum_{i=1,2} \frac{q_n^0}{\sqrt{m_i^2 + (q_n^0)^2}} \right)^{-1} \right],$$

для чётных решений и

$$\varphi_n^1 = \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} q_n^1 a \sum_{i=1,2} \frac{p_n^1}{\sqrt{m_i^2 + (p_n^1)^2}} \left(\sum_{i=1,2} \frac{q_n^1}{\sqrt{m_i^2 + (q_n^1)^2}} \right)^{-1} \right].$$

Коэффициенты B_n^0 и B_n^1 определяются через коэффициенты A_n^0 и A_n^1 с помощью равенств (39) и (40) соответственно.

Итак, поставленная краевая задача имеет только точечный вещественный спектр, ограниченный снизу и неограниченный сверху. Каждое спектральное значение однократно. Собственные решения задачи, соответствующие различным спектральным значениям, ортогональны друг другу.

Литература

- [1] Лагодинский В. М. Голоморфные функции дифференциальных операторов и дифференциальные уравнения бесконечного порядка. Дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. — СПб: 2005.
- [2] Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию (самосопряжённые обыкновенные дифференциальные операторы). — М.: Наука, 1970.
- [3] Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория, ч. 1. — М.: Наука, 1968.
- [4] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений (E. A. Coddington, N. Levinson. Theory of ordinary differential equations). — М.: Изд. ЛКИ, 2010.

ПОИСК ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ И АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ СИММЕТРИИ

Линчук Л. В.¹, Зайцев В. Ф.²

Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет¹

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена²

Санкт-Петербург

e-mail: lidiya_linchuk@mail.ru¹

e-mail: valentin_zaitsev@mail.ru²

Linchuk L. V., Zaitsev V. F. Search for the first integrals and alternative symmetry. We consider the method of alternative generalized operators. We search for the first integrals of Lienard equation.

Рассматривается метод альтернативных обобщённых операторов для поиска первых интегралов на примере уравнения Льеара.

Поиск первых интегралов (законов сохранения) для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) не менее актуален, чем поиск симметрий (операторов, допускаемых ОДУ), так как позволяет понизить порядок уравнения и получить дополнительную информацию о множестве решений. В каком-то смысле знание первого интеграла даже более информативно: мы получаем уравнение меньшего порядка относительно **исходных** переменных и явную зависимость от одной из произвольных констант. Известно два метода поиска первых интегралов – алгоритм, основанный на определении первого интеграла (прямой метод), и алгоритм, использующий операторы Эйлера высших порядков – операторы, сопряжённые инфинитезимальным операторам теории С. Ли. По существу, оба эти метода равноценны (второй несколько более формализован, но и более громоздок, см., например, [1]). И оба они требуют какого-то изначального предположения – анзаца, например, задания структуры зависимости первого интеграла от старшей производной (без анзаца оба метода неэффективны). Заметим впрочем, что анзац требуется и для алгоритмов группового анализа – классический метод С. Ли основан на **точечных** операторах, что само по себе является анзацем, причём достаточно жёстким. Поэтому часто успех в решении задачи определяется удачным выбором исходного предположения. Это обстоятельство стимулирует поиск других методов, которые при схожих анзацах могут дать иные результаты. Один из этих методов прямо следует из 2-ой теоремы о факторизации [2] и применения альтернативных симметрий.

Рассмотрим класс уравнений Льеара

$$y'' + f(y)y' + g(y) = 0. \quad (1)$$

Уравнения этого вида являются модельными в задачах теории нелинейных колебаний. Очевидно, в силу автономности уравнение (1) допускает оператор

$X_1 = \partial_x$. Понижение порядка $y' = p(y)$ приводит к уравнению Абеля

$$pp' + f(y)p + g(y) = 0, \quad (2)$$

решить которое в аналитическом виде можно лишь для очень небольшого количества пар (f, g) . Поэтому для решения практических задач (будь то задачи Коши или краевые) дополнительная информация, например, знание первого интеграла исходного уравнения, может быть весьма существенной. В ряде случаев к успеху приводит применение метода альтернативных обобщённых операторов, анонсированный в работе [3].

1. Будем искать допускаемые уравнением (1) альтернативные обобщённые операторы вида

$$X = \partial_x + \frac{a(y)}{y'} \partial_y + \frac{b(y)}{y'} \partial_{y'}.$$

Нетривиальным решением определяющего уравнения будет подкласс уравнений¹

$$y'' + F_y y' = \frac{A}{F}, \quad (3)$$

где $A = \text{const}$, $F = F(y)$, и неклассические симметрии вида

$$X_2 = \partial_x + \frac{F}{y'} \partial_y + \frac{(A - F^2 F_y)}{y'} \partial_{y'}.$$

Соответствующая факторсистема имеет вид

$$\begin{cases} t = y' - A \int \frac{dy}{F^2} + F, \\ u = \left(y' + F + \frac{A}{2} \right) \int \frac{dy}{F^2} - \int \frac{dy}{F} + x, \\ u' = \frac{t}{A}. \end{cases}$$

Решение внешнего уравнения факторсистемы

$$u = \frac{t^2}{2A} + C$$

даёт нам первый интеграл уравнения (3)

$$I = (y')^2 + 2Fy' + F^2 - 2A \int \frac{dy}{F} - 2Ax. \quad (4)$$

Порождаемое первым интегралом (4) уравнение первого порядка

$$(y')^2 + 2Fy' + F^2 - 2A \int \frac{dy}{F} - 2Ax = C \quad (5)$$

¹Заметим, что даже в частном случае $F(y) = \alpha y^k$ для соответствующего уравнения Абеля (2) найдены решения в замкнутом виде лишь для $k = 1/2, 2/3, 1$.

имеет решение

$$x + \frac{C}{2A} = - \int \frac{dy}{F(y)}, \quad (6)$$

которое **не является (!)** однопараметрическим семейством решений уравнения (3) – на интегральной кривой (6) интегрирующий множитель уравнения (3)

$$R = 2(y' + F(y))$$

обращается в нуль. Применение метода введения параметра к уравнению (5) приводит к уравнению Абеля (2), соответствующему уравнению (3), и к решению (6), которое является **особым**.

2. Теперь будем искать допускаемые уравнением (1) альтернативные обобщённые операторы вида

$$X = \partial_x + \frac{a(y)}{(y')^2} \partial_y + \frac{b(y)}{(y')^2} \partial_{y'}.$$

Нетривиальным решением определяющего уравнения будет подкласс уравнений

$$y'' \pm \frac{y'}{(Ay + B)^{3/4}} + \frac{24}{A(Ay + B)^{1/2}} = 0, \quad (7)$$

где $A, B = \text{const}$ и неклассические симметрии вида

$$X = \partial_x \pm \frac{512(Ay + B)^{3/4}}{A^3(y')^2} \partial_y - \frac{2048}{A^3(y')^2} \partial_{y'}.$$

Соответствующая факторсистема имеет вид

$$\begin{cases} t = y' \pm \frac{16}{A}(Ay + B)^{1/4}, \\ u = x \mp \frac{A^2}{128}(Ay + B)^{1/4}(y')^2 - \frac{A}{8}(Ay + B)^{1/2}y' \mp \frac{2}{3}(Ay + B)^{3/4}, \\ u' + \frac{A^3}{1536}t^2 = 0. \end{cases}$$

Решение внешнего уравнения факторсистемы

$$u + \frac{A^3}{4608}t^3 = C$$

дает нам первый интеграл уравнения (7)

$$I = (y')^3 \pm \frac{12}{A}(Ay + B)^{1/4}(y')^2 + \frac{192}{A^2}(Ay + B)^{1/2}y' \pm \frac{1024}{A^3}(Ay + B)^{3/4} + \frac{4608}{A^3}x. \quad (8)$$

Приведенные примеры показывают, насколько метод альтернативных симметрий расширяет возможности симметричного анализа, особенно учитывая тот факт, что первые интегралы уравнения Льева практически не известны в математической практике и отсутствуют в справочниках (см, например, [4], где этому уравнению посвящён отдельный параграф).

Безусловно, интегралы (4) и (8) могут быть получены и классическим прямым методом. Но если квадратичный первый интеграл (4) находится в результате сравнительно простой процедуры, то поиск кубического первого интеграла для уравнений второго порядка в общем случае приводит к нелинейному уравнению в частных производных 2-го порядка, для которого проблематично найти даже некоторое частное решение (существенное различие трудоёмкости алгоритма прямого метода при степенных анзацах структуры первого интеграла достаточно типично).

Литература

- [1] Bluman G. W., Anco S. C. Symmetry and Integration Methods for Differential Equations // Applied Mathematical Sciences. – Springer, 2002. – Vol. 154. – 419 p.
- [2] Зайцев В. Ф. Формальные операторы и теоремы о факторизации обыкновенных дифференциальных уравнений // “Симметрия и дифференциальные уравнения”, Труды III Международной конференции. – Красноярск, 2002. – С. 101–105.
- [3] Линчук Л. В. Альтернативные обобщённые симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка // “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования”, материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2010” (12–17 апреля 2010 г.). – СПб: Издательство БАН, 2010. – С. 46–53.
- [4] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

УДК 517.9

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Ляхов Д. А.¹, Гердт В. П.²

Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова, Минск, Беларусь¹

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия²

e-mail: lyakhovda@hmti.ac.by¹

e-mail: gerdt@jinr.ru²

Lyakhov D. A., Gerdt V. P. Linearization of ordinary differential equations: an algorithmic approach. A constructive approach to the linearization problem for ordinary differential equations of arbitrary order by means of point transformations is suggested. The approach is based on differential Thomas decomposition and provides a fully algorithmic test of linearizability.

Предложен конструктивный подход к линеаризации точечными преобразованиями полиномиально-нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) произволь-

ного порядка, разрешенных относительно старшей производной, посредством точечных преобразований. Предложенный подход основан на дифференциальной декомпозиции Томаса и обеспечивает полностью алгоритмичный тест линейизуемости.

ОДУ первого порядка, разрешенные относительно производной, всегда можно линейаризовать подходящим точечным преобразованием. Тем не менее, в этом случае процедура линейаризации является неэффективной и найти линейаризующее преобразование так же сложно, как и решить исходное уравнение. Ситуация меняется для ОДУ 2-го порядка. Среди них кандидатами на линейаризацию могут быть только уравнения следующего вида:

$$y'' + F_3(x, y)(y')^3 + F_2(x, y)(y')^2 + F_1(x, y)y' + F(x, y) = 0. \quad (1)$$

Софус Ли [1] разработал следующий критерий линейаризации уравнения (1): для того, чтобы уравнение (1) было линейаризуемо точечными преобразованиями необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{aligned} (F_3)_{xx} - 2(F_2)_{xy} + (F_1)_{yy} &= (3F_1F_3 - F_2^2)_x - 3(FF_3)_y - 3F_3F_y + F_2(F_1)_y, \\ F_{yy} - 2(F_1)_{xy} + (F_2)_{xx} &= 3(FF_3)_x + (F_1^2 - 3FF_2)_y + 3F(F_3)_x - F_1(F_2)_x. \end{aligned}$$

Подобный критерий линейаризации был разработан и для ОДУ 3 и 4-го порядков [2, 3]. В результате выполнения точечного преобразования

$$u = f(x, y), \quad t = g(x, y), \quad J = f_x g_y - f_y g_x \neq 0$$

в линейном ОДУ n -го порядка (общий вид которого задается теоремой Лагерра):

$$u^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-3} A_i(t)u^{(i)}(t) = 0,$$

в новых переменных мы получаем рациональную функцию вида:

$$y^{(n)}(x) + \frac{P(y^{(n-1)}, \dots, y')}{J(g_x + g_y y')^{n-2}} = 0, \quad (2)$$

где коэффициенты полинома P – дифференциальные полиномы от f, g . Формула (2) задаёт вид уравнения – кандидата на линейаризацию.

Зададимся теперь вопросом: может ли заданное уравнение рационального вида, разрешённое относительно старшей производной

$$y^{(n)}(x) + \frac{M(y^{(n-1)}, \dots, y')}{N(y^{(n-1)}, \dots, y')} = 0$$

быть линейаризовано точечными преобразованиями? Другими словами, существуют ли функции f, g такие, что выполняется равенство

$$\frac{P(y^{(n-1)}, \dots, y')}{J(g_x + g_y y')^{n-2}} = \frac{M(y^{(n-1)}, \dots, y')}{N(y^{(n-1)}, \dots, y')}$$

рациональных функций от $(y^{(n-1)}, \dots, y')$. Последнее эквивалентно равенству нулю полинома от $(y^{(n-1)}, \dots, y')$:

$$P(y^{(n-1)}, \dots, y')N(y^{(n-1)}, \dots, y') - M(y^{(n-1)}, \dots, y')J(g_x + g_y y')^{(n-2)} = 0.$$

Так как равенство нулю полинома означает равенство нулю всех его коэффициентов, задача сводится к решению переопределенной системе нелинейных уравнений в частных производных. К ней необходимо добавить условие, что функции $A_i(t)$ в новых координатах зависят только от t :

$$(A_i(x, y))_x g_y - (A_i(x, y))_y g_x = 0.$$

Вопрос совместности этой системы эквивалентен линейризуемости и может быть эффективно решён с помощью декомпозиции Томаса [4]. При этом неизвестными функциями являются f, g, A_i от переменных (x, y) .

Пример 1 [3].

$$2x^2 y y^{IV} + x^2 y^2 + 8x^2 y' y''' + 16x y y''' + 6x^2 (y'')^2 + 48x y' y'' + 24y y'' + 24(y')^2 = 0.$$

Применение декомпозиции Томаса [4] разбивает пространство решений этого уравнения на два непересекающихся подпространства, определяемых инволютивными системами уравнений. Рассмотрим первую из этих систем, включающую в себя 10 уравнений:

$$\begin{aligned} y f_y(x, y) - 2f(x, y) - 2f_{xxx}(x, y) &= 0, & f_{xxy} &= 0, & x^2 f_{xy} - 2f_y &= 0, \\ x f_{xy} - 2f_y &= 0, & y f_{yy} - f_y &= 0, & A_0(x, y)(g_x(x, y))^4 - 1 &= 0, \\ g_y(x, y) &= 0, & (A_0(x, y))_x &= 0, & (A_0(x, y))_y &= 0, & A_1(x, y) &= 0, \end{aligned}$$

и два неравенства:

$$A_0(x, y) \neq 0, \quad f_y(x, y) \neq 0.$$

Уравнения, являющиеся одночленными и двучленными, легко решаются последовательно, что приводит к известному результату:

$$A_0(x, y) = 1, \quad A_1(x, y) = 0, \quad f(x, y) = x^2 y^2, \quad g(x, y) = x.$$

Пример 2 [3]. Рассмотрим еще одно ОДУ 4-го порядка

$$y^{IV}(x) + H(x, y)y''(x) + y'(x)^2 = 0.$$

и выясним может ли оно быть линейризовано точечными преобразованиями для какой-либо функции $H(x, y)$. Для этого в список неизвестных функций добавим $H(x, y)$. Декомпозиция Томаса выдает пустое множество. Это означает, что система не совместна ни при каких $H(x, y)$!

Предлагаемый тест линейризации прост и удобен на практике. Он полностью алгоритмичным образом отвечает на вопрос: может ли быть линейризовано ОДУ точечными преобразованиями или нет. Система для нахождения линейризирующего преобразования представляет из себя, как правило, одночленные и двучленные уравнения, что позволяет эффективно решать её развитыми

эвристическими методами, встроенными в современные системы компьютерной алгебры.

Для уравнений высокого порядка их линеаризуемость является исключительным случаем и её проверка может потребовать большого объёма символьных алгебраических преобразований. По этой причине имеет смысл отсеять очевидно непригодные случаи. Например, у линеаризующихся ОДУ алгебра точечных симметрий должна иметь размерность не меньше, чем у линейных, т. е. как минимум на единицу больше, чем порядок уравнения. Размерность алгебры точечных симметрий может быть найдена алгоритмически, без решения определяющих уравнений [5].

Пример 3.

$$y^{(15)}(x) + y'(x)^{15} - 10yy^{(10)}(x) = 0.$$

Алгебра Ли его точечных симметрий одномерна. Следовательно, такое уравнение не может быть линеаризовано точечными преобразованиями. Примечательно, что в случае ОДУ второго порядка линеаризуемость уравнения эквивалентна тому факту, что размерность алгебры симметрий максимальна и равна 8 [6]. Для ОДУ высших порядков сам факт линеаризуемости может быть обнаружен, анализируя абстрактную алгебру Ли точечных симметрий уравнения, которая также может быть найдена, не решая определяющие уравнения [7].

Замечание. Помимо коэффициентов полиномиального вида, предложенный подход может срабатывать и в некоторых случаях, когда коэффициенты ОДУ включают элементарные функции от независимой переменной, а также специальные функции, которые задаются с помощью алгебраического дифференциального уравнения. Также он может быть без существенных проблем обобщён на случай систем ОДУ [8, 9].

Литература

- [1] Ibragimov N. H. Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations. – New York: Wiley, 1999.
- [2] Ibragimov N. H., Meleshko S. V. Linearization of third-order ordinary differential equations by point and contact transformations // Journal of Mathematical Analysis and Applications 308.1 (2005). – P. 266–289.
- [3] Ibragimov N. H., Meleshko S. V., Suksern S. Linearization of fourth-order ordinary differential equations by point transformations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 41.23 (2008). – P. 235206.
- [4] Bachler T., Gerdt V., Lange–Hegermann M., Robertz D. (2012). Algorithmic Thomas decomposition of algebraic and differential systems // Journal of Symbolic Computation, 47(10). – P. 1233–1266.
- [5] Schwarz F. An algorithm for determining the size of symmetry groups // Computing 49, №2 (1992). – P. 95–115.
- [6] Ибрагимов Н. Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. Математика и кибернетика № 7. – М.: Знание, 1991.

- [7] Reid G. J. Finding abstract Lie symmetry algebras of differential equations without integrating determining equations // European Journal of Applied Mathematics. – 1991. – Т. 2. – № 04. – P. 319–340.
- [8] Bagderina Y. Y. Linearization criteria for a system of two second-order ordinary differential equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2010. – Т. 43. – № 46. – P. 465201.
- [9] Suksern S., Sakdadech N. Criteria for System of Three Second-Order Ordinary Differential Equations to Be Reduced to a Linear System via Restricted Class of Point Transformation // Applied Mathematics. – 2014. – Т. 5. – P. 553.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНДУЦИРОВАННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Маламанов С. Ю.

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Санкт-Петербург

e-mail: stevmal@mail.ru

Malamanov S. Yu. Modeling induced magnetic field in a moving conductive liquids. In this paper the conductive fluid and the annulus, which is allocated inside a narrow channel in the form of a helix. The system is in an external magnetic field. Moving fluid through the channel causes a change in the characteristics of the magnetic field.

В работе рассматривается проводящая жидкость в кольцевом зазоре, внутри которой выделен узкий канал в форме винтовой линии. Система находится во внешнем магнитном поле. Движущаяся по каналу жидкость вызывает изменение характеристик магнитного поля.

В работе рассматривается проводящая жидкость, находящаяся между двумя коаксиальными цилиндрами. Внутри жидкости выделен узкий канал в форме винтовой линии, по которому она движется – имеет место своего рода трубка тока (рис. 1).

Приложено внешнее магнитное поле – $\mathbf{B}_0$. Решение осуществляется с помощью уравнений магнитной гидродинамики, реализованных в программном комплексе ANSYS. Здесь уместно заметить, что вектор магнитной индукции определяется из системы уравнений Максвелла. Однако при изучении взаимодействия электромагнитных полей и полей скорости удобно использовать уравнение переноса для вектора $\mathbf{B}$ в форме [1]):

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{B} = \nabla \left(\frac{1}{\mu \sigma} \nabla \mathbf{B} \right) + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{u}, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}$ – скорость, μ – магнитная проницаемость, σ – электрическая проводимость жидкости. Кроме того, для расширения возможностей численного моделирования, индукция магнитного поля представляется в виде $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$.

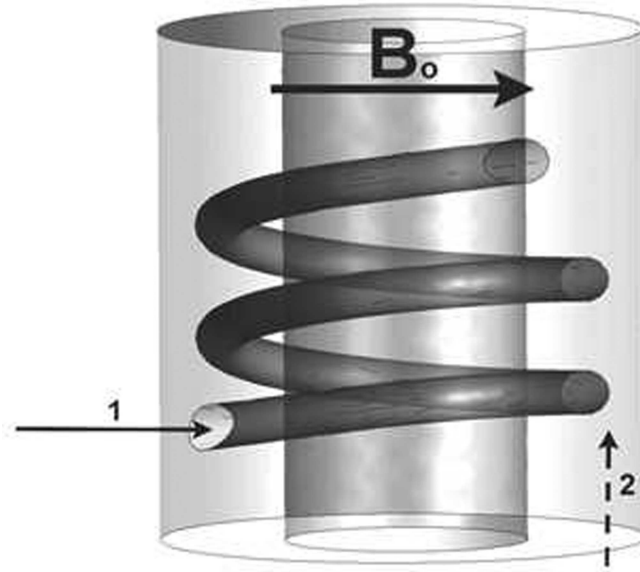


Рис. 1.

Здесь $\mathbf{b}$ – индуцируемое магнитное поле. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{b} = \nabla \left(\frac{1}{\mu \sigma} \nabla \mathbf{b} \right) + ((\mathbf{B}_0 + \mathbf{b}) \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{B}_0. \quad (2)$$

Именно в такой форме уравнение переноса вектора магнитной индукции используется в вычислительном комплексе. Вначале рассчитывается изменение индукции магнитного поля, вызванное движением жидкости поступающей в канал в направлении стрелки 1. Остальная масса жидкости неподвижна. После этого, производится аналогичный расчёт, но жидкость поступает в направлении стрелки 2, а в канале – покоится. Сравниваются результаты расчётов в этих двух случаях. При этом оказалось, что если скорости поступления жидкости одинаковы, то профили индуцированной (вертикальной) компоненты магнитного поля подобны. Если же в обоих случаях задаётся один и тот же расход, то профили – **совпадают**. Это хорошо видно на графике, приведенном на рис. 2.

По оси X отложена приведенная величина вертикальной компоненты магнитного поля, а по оси Y – высота цилиндра. Учитывая наличие нескольких очевидных симметрий, можно ожидать существования ряда практически важных решений рассматриваемой задачи на основе группового анализа.

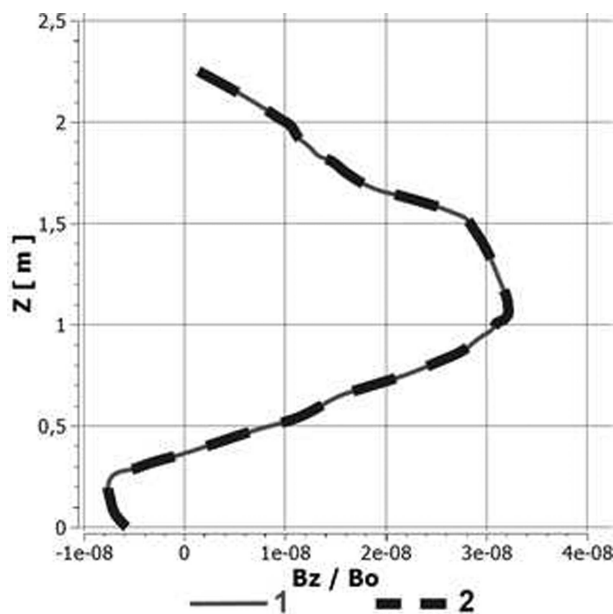


Рис. 2.

Литература

- [1] Новожилов В. В., Павловский В. А. Установившиеся турбулентные течения несжимаемой жидкости. – СПб: СПбГУ, 2013. – 483 с.

УДК 532.516

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Родионов А. А.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Красноярск

e-mail: aarod@icm.krasn.ru

Rodionov A. A. Some exact solutions of hydrostatic model. The group properties of the hydrostatic model equations of a layer motion an ideal fluid in correlation to a function, which defines the free surface and the thickness of the fluid layer under the free boundary, are researched. Examples are given of several exact solutions in Cartesian and cylindrical coordinates. They determine the free surface and the pressure on this surface.

Keywords: ideal fluid, hydrostatic model, group analysis, exact solutions.

Исследованы групповые свойства уравнений гидростатической модели движения слоя идеальной жидкости относительно функции, определяющей свободную поверхность и толщину слоя жидкости под свободной границей. Даны примеры нескольких точных решений в

декартовых и цилиндрических координатах. Они определяют свободную поверхность и давление на этой поверхности.

Ключевые слова: идеальная жидкость, гидростатическая модель, групповой анализ, точные решения.

Часто при изучении процессов в океанологии делается предположение, что давление в жидкости линейно зависит от глубины [1]

$$p(x, y, z, t) = -gz + q(x, y, t). \quad (1)$$

Здесь $g = \text{const} > 0$ — ускорение силы тяжести в направлении оси z , $q(x, y, t)$ — новая функция. В этом случае уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости примут вид

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + ww_z + q_x &= 0, & v_t + uv_x + vv_y + wv_z + q_y &= 0, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z &= 0, & u_x + v_y + w_z &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $z = \eta(x, y, t)$ — уравнение свободной границы жидкости, на которой выполнены динамическое и кинематическое условия:

$$p(x, y, \eta(x, y, t), t) = p_a(x, y, t), \quad (3)$$

$$\eta_t + u(x, y, \eta(x, y, t), t)\eta_x + v(x, y, \eta(x, y, t), t)\eta_y = w(x, y, \eta(x, y, t), t), \quad (4)$$

где $p_a(x, y, t)$ — атмосферное давление.

Из выражения (1) с учетом условия (3) на свободной поверхности находим

$$p_a(x, y, t) = -g\eta(x, y, t) + q(x, y, t). \quad (5)$$

Равенство (5) однозначно определяет свободную поверхность через функцию $q(x, y, t)$, которая находится из системы (2).

Используя групповой анализ дифференциальных уравнений [2], доказано, что алгебра Ли для системы уравнений (2) образована операторами

$$\begin{aligned} &\partial_t, \quad \partial_z, \quad t\partial_z + \partial_w, \quad t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \\ &x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v + 2q\partial_q, \quad y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \\ &f_1(t)\partial_x + f_1'\partial_u - xf_1''\partial_q, \quad f_2(t)\partial_y + f_2'\partial_v - yf_2''\partial_q, \quad f_3(t)\partial_q. \end{aligned} \quad (6)$$

Первый оператор отвечает за перенос по времени t , второй и третий — за перенос и преобразование Галилея вдоль оси z , четвертый и пятый — за преобразования растяжения, шестой — за вращение в плоскости (x, y) . Последние три оператора содержат произвольные функции $f_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, зависящие от времени, и определяют бесконечномерную часть алгебры Ли допустимых операторов.

Подобная задача группового анализа была проведена для уравнений в приближении длинных волн в работе [3]. Уравнения модели рассматривались в модифицированных переменных, учитывающих глубину слоя жидкости, а давление на свободной поверхности считалось постоянным.

В цилиндрических координатах (r, θ, z) уравнения (2) имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{u}_t + \bar{u} \bar{u}_r + \frac{\bar{v}}{r} \bar{u}_\theta + \bar{w} \bar{u}_z - \frac{\bar{v}^2}{r} + q_r = 0, \quad \bar{v}_t + \bar{u} \bar{v}_r + \frac{\bar{v}}{r} \bar{v}_\theta + \bar{w} \bar{v}_z + \frac{\bar{u} \bar{v}}{r} + \frac{1}{r} q_\theta = 0, \\ \bar{w}_t + \bar{u} \bar{w}_r + \frac{\bar{v}}{r} \bar{w}_\theta + \bar{w} \bar{w}_z = 0, \quad \bar{u}_r + \frac{1}{r} \bar{v}_\theta + \bar{w}_z + \frac{1}{r} \bar{u} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ — компоненты радиальной, азимутальной и осевой скорости, зависящие от (r, θ, z, t) , функция q из выражения (3) зависит от (r, θ, t) . Операторы (6) в цилиндрических координатах переписываются так:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 = r \frac{\partial}{\partial r} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{v}} + 2q \frac{\partial}{\partial q}, \quad \bar{X}_2 = r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} + t \frac{\partial}{\partial t}, \\ \bar{X}_3 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \bar{X}_4 = t \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}}, \quad \bar{X}_5 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \bar{X}_6 = \frac{\partial}{\partial t}, \\ \bar{X}_7(f_1) = f_1(t) \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - f_1(t) \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(-f_1(t) \frac{\sin \theta}{r} \bar{v} + f_1'(t) \cos \theta \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \\ + \left(f_1(t) \frac{\sin \theta}{r} \bar{u} - f_1'(t) \sin \theta \right) \frac{\partial}{\partial \bar{v}} - f_1''(t) r \cos \theta \frac{\partial}{\partial q}, \\ \bar{X}_8(f_2) = f_2(t) \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + f_2(t) \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(f_2(t) \frac{\cos \theta}{r} \bar{v} + f_2'(t) \sin \theta \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \\ + \left(-f_2(t) \frac{\cos \theta}{r} \bar{u} + f_2'(t) \cos \theta \right) \frac{\partial}{\partial \bar{v}} - f_2''(t) r \sin \theta \frac{\partial}{\partial q}, \quad \bar{X}_9 = h(t) \frac{\partial}{\partial q}. \end{aligned} \quad (8)$$

При описании приближенной модели движения жидкости, когда $z \rightarrow \epsilon z$, $w \rightarrow \epsilon w$, в пределе при $\epsilon \rightarrow 0$ из (2) получаем уравнения

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + wu_z + q_x = 0, \quad v_t + uv_x + vv_y + wv_z + q_y = 0, \\ u_x + v_y + w_z = 0, \quad q_z = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычисления показывают, что алгебра Ли операторов модели (9) такова:

$$\begin{aligned} Y_1 = \partial_t, \quad Y_2 = y \partial_x - x \partial_y + v \partial_u - u \partial_v, \quad Y_3 = -t \partial_t + u \partial_u + v \partial_v + w \partial_w + 2q \partial_q, \\ Y_4 = z \partial_z + w \partial_w, \quad Y_5 = f(x, y, t) \partial_z + (f'_x u + f'_y v + f'_t) \partial_w, \\ Y_6 = f_1(t) \partial_x + f'_1 \partial_u - x f''_1 \partial_q, \quad Y_7 = f_2(t) \partial_y + f'_2 \partial_v - y f''_2 \partial_q, \\ Y_8 = 2h(t) \partial_t + h'(x \partial_x + y \partial_y - 2z \partial_z) + (-h' u + h'' x) \partial_u + (-h' v + h'' y) \partial_v - \\ - (4h' w + 2h'' z) \partial_w - \left(2h' q + \frac{x^2 + y^2}{2} h''' \right) \partial_q, \quad Y_9 = \varphi(t) \partial_q, \end{aligned} \quad (10)$$

где $f(x, y, t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $h(t)$ — произвольные функции.

Пример 1. Найдём решение системы (7) на операторах $\langle \bar{X}_4 = t \partial_z + \partial_{\bar{w}}, \bar{X}_3 = \partial_\theta \rangle$ из базиса (8). Инвариантами операторов являются $\{r, t, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} - z/t, q\}$, поэтому инвариантное решение следует искать в виде

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, q) = \left(U(r, t), V(r, t), \frac{z}{t} + W(r, t), q(r, t) \right).$$

Система уравнений (7) преобразуется в фактор-систему

$$\begin{aligned} U_t + UU_r - \frac{1}{r}V^2 + q_r &= 0, & V_t + UV_r + \frac{1}{r}UV &= 0, \\ W_t + UW_r + \frac{1}{t}W &= 0, & U_r + \frac{1}{t} + \frac{1}{r}U &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (11) интегрируются, начиная с последнего уравнения,

$$\begin{aligned} U &= -\frac{r}{2t} + \frac{\varphi(t)}{r}, & V &= \frac{1}{r}F(\lambda), & W &= \frac{1}{t}G(\lambda), \\ q &= \int \left(-U_t - UU_r + \frac{1}{r}V^2 \right) dr + \psi(t) = -\frac{3r^2}{8t^2} - \varphi'(t) \ln r - \\ &\quad - \frac{\varphi^2(t)}{2r^2} + \int \frac{1}{r^2}F^2(\lambda) dr + \psi(t), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ — произвольные функции своего аргумента, $\lambda = tr^2 - 2 \int t \varphi(t) dt$.

Кинематическое условие (4) в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \bar{v} \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \bar{w} = 0. \quad (13)$$

Из равенства (5) в цилиндрических координатах находим

$$p_a(r, \theta, t) = q(r, \theta, t) - g\eta(r, \theta, t). \quad (14)$$

Предположим, что $\eta = \eta(r, t)$, $\partial \eta / \partial \theta = 0$.

Подставим (12) в (13), получим решение: $\eta(r, t) = tH(\lambda) - G(\lambda)$ с произвольной функцией $H(\lambda)$. Из (14) находим внешнее давление на свободной поверхности

$$\begin{aligned} p_a(r, t) &= q(r, t) - g\eta(r, t) = \\ &= -\frac{3r^2}{8t^2} - \varphi'(t) \ln r - \frac{\varphi^2(t)}{2r^2} + \int \frac{1}{r^2}F^2(\lambda) dr + \psi(t) - g(tH(\lambda) - G(\lambda)). \end{aligned}$$

Пример 2. Решение системы (9) ищем на операторах $\langle \partial_t, \partial_y, f(x)\partial_z + f'(x)u\partial_w + \partial_x \rangle$ из (10), $f(x) \neq 0$. Инвариантами операторов являются $\{u, v, q, z - h(x), w - h'(x)u\}$, где $h(x) = \int f(x) dx$. Инвариантное стационарное решение ищем в виде

$$(u, v, w, q) = (U(\lambda), V(\lambda), h'(x)U(\lambda) + W(\lambda), Q(\lambda)), \quad \lambda = z - h(x).$$

В результате имеем фактор-систему

$$U'W = 0, \quad V'W = 0, \quad W' = 0, \quad Q' = 0,$$

из которой получаем два решения

$$u = U_0 \neq 0, \quad v = V_0, \quad w = W_0 \neq 0, \quad q = Q_0; \quad (15)$$

$$u = U(\lambda), \quad v = V(\lambda), \quad w = 0, \quad q = Q_0, \quad \lambda = z - h(x), \quad (16)$$

где U_0, V_0, W_0, Q_0 — постоянные.

Уравнение свободной поверхности $z = \eta(x, y, t)$ определяется из кинематического условия (4). Для решения (15)

$$\eta(x, y, t) = h(x) + \frac{W_0}{U_0}x + \frac{1}{U_0}F(x - U_0t, y - V_0t), \quad U_0 \neq 0, \quad W_0 \neq 0$$

с произвольной функцией F . Для решения (16) функция $\eta(x, y, t)$ определяется из выражения

$$\Phi\left(x - tU(\eta - h(x)), y - tV(\eta - h(x)), \eta - h(x)\right) = 0$$

с произвольными функциями Φ, U, V своих аргументов.

Пример 3. Решение уравнений (7) ищем на двух операторах $\langle \bar{X}_3 = \partial_\theta, \bar{X}_1 = r\partial_r + \bar{u}\partial_{\bar{u}} + \bar{v}\partial_{\bar{v}} + 2q\partial_q \rangle$ из базиса (8). Инвариантами операторов являются $\{z, t, \bar{u}/r, \bar{v}/r, \bar{w}, q/r^2\}$. Инвариантное решение будем искать в виде

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, q) = (rU(z, t), rV(z, t), W(z, t), -r^2Q(t)). \quad (17)$$

Подстановка в уравнения (7) дает фактор-систему

$$\begin{aligned} U_t + U^2 + WU_z - V^2 - 2Q &= 0, \quad V_t + WV_z + 2UV = 0, \\ W_t + WW_z &= 0, \quad 2U + W_z = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из третьего уравнения системы (18) находим неявное представление решения $W = \Phi(z - tW)$ с произвольной функцией $\Phi(\mu)$, $\mu = z - tW$. Оставшиеся уравнения системы (18) определяют функции

$$U = -\frac{1}{2}W_z, \quad V = \frac{R}{W_z}, \quad Q = -\frac{1}{4}W_{zt} + \frac{1}{8}(W_z)^2 - \frac{1}{4}WW_{zz} - \left(\frac{R}{W_z}\right)^2, \quad (19)$$

где $R = R(W)$ — произвольная функция. Второе уравнение в (18) выполняется в силу выполнения третьего уравнения системы.

Предположим, что функция $\Phi(\mu) = \alpha\mu + \beta$ — линейная, $\alpha, \beta = \text{const}$. Тогда из (19)

$$\begin{aligned} W &= \frac{\alpha z + \beta}{1 + \alpha t}, \quad U = -\frac{\alpha}{2(1 + \alpha t)}, \quad V = \frac{R_0(1 + \alpha t)}{\alpha}, \\ Q &= \frac{1}{8} \left[\frac{3\alpha^2}{(1 + \alpha t)^2} - \frac{4R_0^2(1 + \alpha t)^2}{\alpha^2} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $\alpha > 0$, также учтено, что функция Q зависит только от t , поэтому $R = R_0 = \text{const}$. Тем самым, определено точное решение $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, q)$ уравнений (7).

Кинематическое условие (13) в цилиндрических координатах в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{r\alpha}{2(1+\alpha t)} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{rR_0(1+\alpha t)}{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \frac{\alpha z + \beta}{1+\alpha t}.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\eta(r, \theta, t) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1+\alpha t}{\alpha} F\left(r\sqrt{1+\alpha t}, \quad \theta - \frac{2rR_0(1+\alpha t)^2}{3\alpha^2}\right),$$

описывающая свободную поверхность жидкости $z = \eta(r, \theta, t)$. Функция F зависит от двух аргументов и является произвольной. Внешнее давление на свободной поверхности определяется из формулы (14): $p_a(r, \theta, t) = q(r, t) - g\eta(r, \theta, t)$ или

$$p_a = -\frac{r^2}{8} \left[\frac{3\alpha^2}{(1+\alpha t)^2} - \frac{4R_0^2(1+\alpha t)^2}{\alpha^2} \right] - g \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1+\alpha t}{\alpha} F\left(r\sqrt{1+\alpha t}, \quad \theta - \frac{2rR_0(1+\alpha t)^2}{3\alpha^2}\right) \right],$$

Если $\alpha = 0$, то $W = \beta = \text{const}$. В этом случае решением уравнений (7) будут функции

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{v} = rV_0, \quad \bar{w} = \beta, \quad q = \frac{r^4}{2}V_0^2,$$

$V_0 = \text{const}$. Из кинематических условий (13) находим функцию свободной поверхности $\eta = \beta t + F(r, \theta - V_0 t)$ с произвольной функцией F , а из (14) определяем внешнее давление на свободной поверхности

$$p_a(r, \theta, t) = q(r, t) - g\eta(r, \theta, t) = \frac{r^4}{2}V_0^2 - g(\beta t + F(r, \theta - V_0 t)).$$

Для системы уравнений (18) введём лагранжевы координаты $(z, t) \rightarrow (\zeta, t)$ так, что

$$\frac{dz}{dt} = W(z, t), \quad z|_{t=0} = \zeta.$$

Обозначим:

$$W = W(z(\zeta, t), t) = \overset{\circ}{W}(\zeta, t); \quad V = V(z(\zeta, t), t) = \overset{\circ}{V}(\zeta, t); \\ U = U(z(\zeta, t), t) = \overset{\circ}{U}(\zeta, t).$$

Из третьего уравнения системы (18) следует, что $\overset{\circ}{W}(\zeta, t) = W_0(\zeta)$, где W_0 — значение $\overset{\circ}{W}$ при $t = 0$. Тогда $z = W_0 t + \zeta$, $z_\zeta = 1 + tW'_0$. Из вычислений получаем, что $W_z = W'_0/(1 + tW'_0)$. Находим

$$\overset{\circ}{U} = \frac{W'_0}{2(1 + tW'_0)}, \quad \overset{\circ}{V} = (1 + tW'_0)V_0(\zeta), \quad \overset{\circ}{W} = W_0(\zeta),$$

$$\overset{\circ}{Q} = \overset{\circ}{U}_t + \overset{\circ}{U}^2 - \overset{\circ}{V}^2 = \frac{3}{4} \frac{W'_0}{(1 + tW'_0)^2} - V_0^2(\zeta),$$

где $V_0(\zeta)$ — значение $\overset{\circ}{V}(\zeta, t)$ при $t = 0$. Поскольку $\overset{\circ}{Q} = \overset{\circ}{Q}(t)$ не зависит от ζ , то $W'_0 = \alpha = \text{const}$, $V_0 = R_0/\alpha = \text{const}$, тогда

$$\overset{\circ}{Q}(t) = \frac{3\alpha}{8(1 + \alpha t)^2} - \frac{R_0^2(1 + \alpha t)^2}{2\alpha^2}, \quad \overset{\circ}{V} = \frac{R_0(1 + \alpha t)}{\alpha}, \quad \overset{\circ}{U} = -\frac{\alpha}{2(1 + \alpha t)}, \quad \overset{\circ}{W} = \alpha\zeta + \beta, \quad (21)$$

где $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$. Решение (21) в лагранжевых координатах совпадает с решением (20) в эйлеровых координатах. Решение (21) показывает, что система уравнений (18) не имеет других решений, кроме (20).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 14-01-00067.

Литература

- [1] Боуден К. Ф. Физическая океанография прибрежных вод. — М.: Мир, 1988. — 324 с. (Bowden K. F. Physical oceanography of coastal waters. Ellis Horwood Limited Publishers. — New York: Halsted Press, 1983. — 324 p.)
- [2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
- [3] Чесноков А. А. Симметрии и точные решения уравнений мелкой воды на пространственном сдвиговом потоке // ПМТФ, 2008. — Т. 49, № 5. — С. 41–54.

АССОЦИИРОВАННЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Светлаков А. Н.

Российский государственный педагогический

университет им. А. И. Герцена

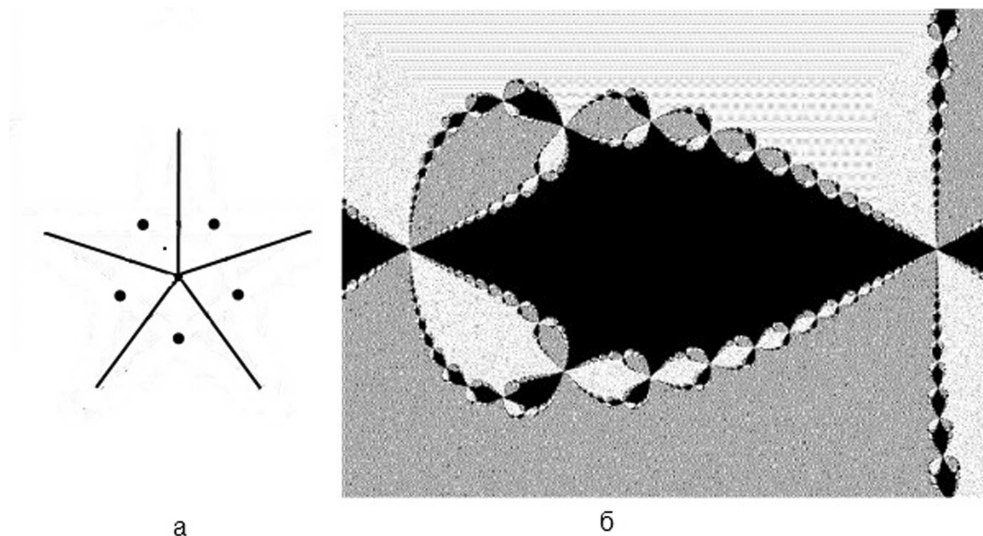
Санкт-Петербург

e-mail: asas70@rambler.ru

Svetlakov A. N. The associated fractal sets of ordinary differential equations. In the article the procedure of generation of associated fractal sets of ordinary differential equations by means of operational calculus is discussed.

С помощью операционного исчисления предлагается процедура порождения ассоциированных фрактальных множеств для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Следуя универсальной синергетической фрактальной парадигме, утверждающей, что мир фрактален от атома до вселенной, можно предположить, что со всеми основными математическими понятиями должны ассоциироваться фрактальные множества. Первый пример такой ассоциации для дифференциальных уравнений даёт аттрактор Э. Лоренца [1]. Аттрактор Лоренца был найден в численных экспериментах Э. Лоренца, исследовавшего поведение траекторий системы трёх нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений при специальных значениях параметров. Используя интегральные преобразования вкупе с методом касательных Ньютона для комплексного случая можно указать класс обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих ассоциированные фракталы, которые называют ньютоновыми притягивающими множествами. Вид этих множеств (рисунок взят из работы [2]) приводится на рис. б. Как известно, операционное исчисление, основанное на прямом и обратном преобразовании Лапласа, ставит в соответствие обыкновенному дифференциальному уравнению алгебраическое уравнение с комплексной переменной. Решая это уравнение методом Ньютона, мы разбиваем комплексную плоскость на ряд областей, связанных с притяжением начального условия к определённому корню. На рис. а приводится такое разбиение для простого алгебраического уравнения пятой степени.



Если начальная точка метода Ньютона равноудалена от каких-либо двух корней, то она в процессе итераций совершает хаотические движения по границе областей притяжения. Оказывается, границы указанных областей для большинства уравнений степени больше второй устроены довольно сложно, и являются фракталами см. рис. б. Производя обратное преобразование Лапласа для алгебраических уравнений с подобными притягивающими множествами, мы получим класс обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих ассоциированные фракталы. Привести примеры ассоциированных комплексных уравнений и фрактальных множеств легче всего для линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью характеристического уравнения. Для уравнений, представленных на рисунке (третьего и пятого порядков), это будут соответствующие уравнения третьей и пятой степени.

Литература

- [1] Lorenz E., Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci., 1963, vol. 20, p. 130; в рус. пер., в кн.: Странные аттракторы. – М., 1981. – С. 88.
- [2] Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. – Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
- [3] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
- [4] Светлаков А. Н., Васильев А. И. О парадигмах синергетики и искусственного интеллекта // Международный конгресс по интеллектуальным системам и информационным технологиям AIS-IT'09. Труды конгресса, Т. 2. – М.: Физматлит, 2008. – С. 326–327.

СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА

Стогний В. И.¹, Копась И. Н.¹, Коваленко С. С.²

Национальный технический университет Украины «КПИ»¹

Киев, Украина

Полтавский национальный технический университет им. Юрия Кондратюка²

Полтава, Украина

e-mail: valeriy_stogniy@mail.ru, innak@inet.ua, kovalenko@imath.kiev.ua

Stogniy V. I., Kopas I. N., Kovalenko S. S. Symmetry analysis of one class of two-dimensional Fokker–Planck–Kolmogorov equations. In this paper, a class of (2+1)-dimensional linear ultra-parabolic Fokker–Planck–Kolmogorov equations is considered by using the methods of symmetry analysis of differential equations. The classification of the symmetry properties of equations from the class is performed by using the well-known Lie–Ovsiannikov algorithm. Three examples of differential equations satisfying the conditions of extension of the “trivial” algebra of invariance are considered.

В этой статье, используя методы симметричного анализа дифференциальных уравнений, рассматривается один класс (2+1)-мерных линейных ультрапараболических уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова. Классификация симметричных свойств уравнений из изучаемого класса проводится с помощью хорошо известного метода Ли–Овсянникова. Рассмотрено три примера уравнений, которые удовлетворяют условиям расширения “тривиальной” алгебры инвариантности.

1. Постановка задачи. В этой статье, используя методы группового анализа дифференциальных уравнений, исследуется такой класс (2+1)-мерных линейных ультрапараболических дифференциальных уравнений второго порядка:

$$u_t = u_{xx} - (A(x)u)_x - (xu)_y, \quad (1)$$

где $u = u(t, x, y)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $A(x)$ – произвольная гладкая функция переменной x в некоторой области пространства $\mathbb{R}$.

Уравнения из класса (1) являются частными случаями двумерного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} [A_i(t, x)u] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [B_{ij}(t, x)u], \quad (2)$$

где $u = u(t, x)$, $x = (x_1, x_2)$; функции $A_i(t, x)$ и $B_{ij}(t, x)$ ($i, j = 1, 2$) определяют коэффициенты сноса и диффузии уравнения (2) соответственно как вектор

$$\mathbf{A}(t, x) = (A_1(t, x), A_2(t, x)),$$

и матрицу

$$\mathbf{B}(t, x) = \|B_{ij}(t, x)\|_{i,j=1}^2.$$

Легко увидеть, что коэффициенты сноса и диффузии уравнения (1) имеют такой вид:

$$\mathbf{A}(t, x, y) = (A(x), x), \quad \mathbf{B}(t, x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что класс уравнений (1) содержит ряд известных линейных ультрапараболических дифференциальных уравнений второго порядка. Так, в случае $A(x) \equiv 0$ уравнение (1) имеет такой вид:

$$u_t = u_{xx} - xu_y. \quad (3)$$

Это уравнение было предложено А. Н. Колмогоровым в 1933 г. [1] (см. также [2]) для описания броуновского движения частицы. Отметим также, что в последнее время это уравнение нашло широкие применения в некоторых вопросах финансовой математики [3].

В случае $A(x) = -x$ уравнение (1) является свободным уравнением Крамера [4, 5]:

$$u_t = (xu + u_x)_x - xu_y. \quad (4)$$

Также, в этом случае, исследуемое уравнение (1) будет частным случаем уравнения цветного шума [5]

$$u_t = (xu + u_x)_x - ((h(y) + xg(y))u)_y$$

при $h(y) = 0$ и $g(y) = 1$.

Исследование симметричных свойств дифференциальных уравнений вида (1) было инициировано в работе [6], где для свободного уравнения Крамера (4) было найдено максимальную алгебру инвариантности (МАИ). Точные инвариантные решения этого уравнения были найдены в работе [7]. Групповые свойства уравнения (3) исследовались в работах [8, 9].

Таким образом, с точки зрения теоретико-групповых методов были исследованы лишь некоторые уравнения из класса (1), в то время как исчерпывающий анализ симметричных свойств дифференциальных уравнений из этого класса не был проведен.

2. Групповая классификация класса дифференциальных уравнений (1). Цель данной статьи – исследовать групповые свойства дифференциальных уравнений из класса (1). Поскольку этот класс содержит функциональный параметр $A(x)$, то уместно поставить задачу групповой классификации в классе уравнений (1), которая может быть сформулирована так: найти ядро $A^{\ker}$ МАИ дифференциальных уравнений из класса (1), т. е. МАИ уравнения (1) в случае произвольной функции $A(x)$, и указать все спецификации функционального параметра $A(x)$ при которых уравнения вида (1) имеют нетривиальные симметричные свойства.

Отметим, что сформулированная задача относится к прямым задачам групповой классификации в классах дифференциальных уравнений (см., например, [10, 11]).

Результат групповой классификации класса дифференциальных уравнений (1) дают теоремы 1 и 2.

Теорема 1. Ядром $A^{\ker}$ МАИ дифференциальных уравнений из класса (1) является трёхмерная алгебра Ли, которая генерируется такими базисными операторами:

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = u\partial_u.$$

Следствие. Дифференциальное уравнение (1) с произвольной фиксированной функцией $A(x)$ допускает в качестве алгебры инвариантности бесконечномерную алгебру Ли с таким набором базисных операторов:

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = u\partial_u, \quad X_\infty = \beta(t, x, y)\partial_u,$$

где $\beta = \beta(t, x, y)$ – произвольное гладкое решение соответствующего уравнения (1).

В дальнейшем алгебру Ли вида $A^{\ker} \oplus_s \langle \beta(t, x, y)\partial_u \rangle$ мы будем называть “тривиальной” алгеброй Ли и обозначать A^{tr} . Здесь символом $\oplus_s$ мы обозначили полупрямую сумму двух алгебр Ли. Если уравнение (1) допускает в качестве МАИ алгебру A^{tr} , то мы будем говорить, что такое уравнение обладает тривиальными симметричными свойствами.

Теорема 2. Дифференциальное уравнение (1) допускает нетривиальные симметричные свойства тогда и только тогда, когда функция $A(x)$, выбранная с точностью до трансляций по переменной x : $x \rightarrow x + x_0$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, удовлетворяет одному из таких двух уравнений:

$$\frac{dA}{dx} + \frac{1}{2}A^2 = \frac{k_2}{x^2} + k_1x + k_0, \quad k_2 \neq 0, \quad (5)$$

$$\frac{dA}{dx} + \frac{1}{2}A^2 = m_2x^2 + m_1x + m_0, \quad (6)$$

где k_i, m_i ($i = 0, 1, 2$) – произвольные действительные постоянные.

Отметим, что уравнения (5) и (6) суть уравнения Риккати, общее решение которых не удастся построить в квадратурах, хотя для некоторых конкретных значений постоянных k_i и m_i решения соответствующих уравнений известны [12]. Здесь мы не ставим за цель проанализировать все возможные варианты, а остановимся лишь на некоторых типичных примерах.

Пример 1. $k_0 = k_1 = 0, k_2 = -1/2$.

В этом случае уравнение (5) имеет такое частное решение:

$$A(x) = \frac{2}{x \ln x} + \frac{1}{x}. \quad (7)$$

Уравнение (1) с функцией $A(x)$, которая имеет вид (7) допускает в качестве МАИ бесконечномерную алгебру Ли с таким набором базисных операторов:

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = u\partial_u, \\ X_4 = 2t\partial_t + x\partial_x + 3y\partial_y + \frac{1}{\ln x}u\partial_u, \quad X_\infty = \beta(t, x, y)\partial_u,$$

где $\beta = \beta(t, x, y)$ – произвольное гладкое решение соответствующего уравнения (1).

Таким образом, в этом случае расширение симметричных свойств по сравнению с алгеброй A^{tr} происходит за счёт одного оператора X_4 .

Пример 2. $m_0 = -1$, $m_1 = 0$, $m_2 = 1/2$.

В этом случае частным решением уравнения (6) есть функция $A(x) = -x$, т. е. уравнение (1) является свободным уравнением Крамерса (4). Его МАИ была вычислена в работе [6] и генерируется такими операторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = u\partial_u, \\ X_4 &= 2\partial_x + 2t\partial_y - (x+y)u\partial_u, \quad X_5 = e^{-t}(\partial_x - \partial_y), \\ X_6 &= e^t(\partial_x + \partial_y - xu\partial_u), \quad X_\infty = \beta(t, x, y)\partial_u, \end{aligned}$$

где $\beta = \beta(t, x, y)$ – произвольное гладкое решение уравнения (4).

Легко увидеть, что конечномерная часть МАИ свободного уравнения Крамерса является шестимерной и расширяется по сравнению с алгеброй A^{ker} за счет операторов X_4 , X_5 и X_6 .

Пример 3. $m_0 = m_1 = m_2 = 0$.

Общим решением соответствующего уравнения (6) являются такие функции:

$$A_1(x) = 0, \quad A_2(x) = \frac{2}{x+c},$$

где c – произвольная постоянная интегрирования.

Случай функции $A_1(x) = 0$ приводит к уравнению (3), МАИ которого была вычислена в работе [9] и генерируется такими операторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = u\partial_u, \quad X_4 = \partial_x + t\partial_y, \\ X_5 &= 2t\partial_t + x\partial_x + 3y\partial_y, \quad X_6 = 2t\partial_x + t^2\partial_y - xu\partial_u, \\ X_7 &= t^2\partial_t + (tx + 3y)\partial_x + 3ty\partial_y - (x^2 + 2t)u\partial_u, \\ X_8 &= 3t^2\partial_x + t^3\partial_y + 3(y - tx)u\partial_u, \quad X_\infty = \beta(t, x, y)\partial_u, \end{aligned}$$

где $\beta = \beta(t, x, y)$ – произвольное гладкое решение уравнения (3).

В случае функции $A_2(x) = 2/x$ (здесь для простоты полагаем $c = 0$, что не умаляет общности рассуждений) МАИ соответствующего уравнения (1) генерируется такими операторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = u\partial_u, \quad X_4 = \partial_x + t\partial_y + \frac{1}{x}u\partial_u, \\ X_5 &= 2t\partial_t + x\partial_x + 3y\partial_y, \quad X_6 = 2t\partial_x + t^2\partial_y - \left(x - \frac{2t}{x}\right)u\partial_u, \\ X_7 &= t^2\partial_t + (tx + 3y)\partial_x + 3ty\partial_y - \left(x^2 + t - \frac{3y}{x}\right)u\partial_u, \\ X_8 &= 3t^2\partial_x + t^3\partial_y + 3\left(y - tx + \frac{t^2}{x}\right)u\partial_u, \quad X_\infty = \beta(t, x, y)\partial_u, \end{aligned}$$

где $\beta = \beta(t, x, y)$ – произвольное гладкое решение соответствующего уравнения (1).

Видим, что как и в случае функции $A_1(x) = 0$, так и в случае $A_2(x) = 2/x$, соответствующие уравнения вида (1) имеют наиболее широкие среди рассмотренных примеров симметричные свойства, а именно, конечномерные части соответствующих МАИ этих уравнений являются восьмимерными.

Замечание. Одинаковая размерность конечномерных частей МАИ уравнений (1) с $A(x) = 0$ и $A(x) = 2/x$ наводит на мысль, что эти уравнения могут быть преобразованы друг в друга при помощи некоторого точечного преобразования переменных. Действительно, прямой проверкой легко показать, что с помощью замены переменных

$$t \rightarrow t, \quad x \rightarrow x, \quad y \rightarrow y, \quad u \rightarrow \frac{1}{x} u \quad (8)$$

уравнение (1) с $A(x) = 2/x$ сводится к уравнению (3), т. е. к уравнению (1) с $A(x) = 0$.

Литература

- [1] Kolmogoroff A. Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse // Math. Ann. 1933. Vol. 108. № 1. – P. 149–160.
- [2] Kolmogoroff A. Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownischen Bewegung) // Ann. of Math., II. Ser. 1934. Vol. 35. № 1. – P. 116–117.
- [3] Barucci E., Polidoro S., Vespi V. Some results on partial differential equations and Asian options // Math. Models Methods Appl. Sci. 2001. Vol. 11. – P. 475–497.
- [4] Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. – М., 1986. – 528 с. (C.W. Gardiner. Handbook of stochastic methods: for physics, chemistry and natural sciences (Springer series in synergetics).)
- [5] Risken H. The Fokker–Planck equation. – Berlin. 1989. – 472 p.
- [6] Shtelen W. M., Stogny V. I. Symmetry properties of one- and two-dimensional Fokker–Planck equations // J. Phys. A: Math. Gen. 1989. Vol. 22. – P. 539–543.
- [7] Saied E. A. On the similarity solutions for the free Kramer equation. I // Appl. Math. Comp. 1996. Vol 74. – P. 59–63.
- [8] Lanconelli E., Polidoro S. On a class of hypoelliptic evolution operators // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. 1994. Vol. 52. № 1. – P. 29–63.
- [9] Лагно В. И., Стогний В. И. Симметрия и разделение переменных для уравнения Колмогорова // Материалы научной конференции “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2008.” – СПб., 2008. – С. 79–83.
- [10] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
- [11] Лагно В. И., Спичак С. В., Стогний В. И. Симметричный анализ уравнений эволюционного типа. – Москва–Ижевск, 2004. – 392 с.
- [12] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Филатов О. П.

Самарский государственный университет

Самара

e-mail: filatov_oleg@samaradom.ru

Filatov O. P. Integro-differential problem of parabolic type. The theorem of existence and uniqueness solution of the first boundary value problem for integro-differential equation parabolic type is formulated. The problem is associated with the measurement of the level of an incompressible fluid tank.

Keywords: Integro-differential problem, parabolic type, existence and uniqueness, measurement of the level of an incompressible fluid tank.

Приводится теорема существования и единственности решения первой краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения параболического типа. Задача связана с измерением уровня несжимаемой жидкости в баке.

Ключевые слова: интегро-дифференциальная задача, параболический тип, существование и единственность решения, измерение уровня жидкости в баке.

Рассмотрим первую краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = f(t; u), \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad u|_{\partial G} = 0 \quad (1)$$

для интегро-дифференциального уравнения в цилиндре $G_T = G \times [0, T]$. Здесь $G = \{x = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$ — круг радиуса $R > 0$, ν — коэффициент кинематической вязкости несжимаемой жидкости,

$$f(t; u) = g(t) \left(1 - \frac{h(t)}{l(t; u)} \right), \quad l(t; u) = l_0 - \frac{1}{\pi R^2} \int_0^t \int_G u(x, \tau) dx d\tau,$$

l_0 — положительная постоянная. Действительные функции $g(t)$ и $h(t)$ зависят от времени $t \in [0, T_0]$ и в приложении имеют смысл соответственно ускорения свободного падения и уровня жидкости в баке. Искомая функция $u(t, x)$ — скорость несжимаемой жидкости в цилиндрической трубке радиуса $R > 0$, которая связана с баком по закону сообщающихся сосудов, $l(t; u)$ — уровень жидкости в трубке. Заметим, что основное уравнение задачи (1) — уравнение Навье–Стокса для несжимаемой жидкости при условии, что вектор скорости жидкости в трубке имеет две нулевые координаты, а третья координата, равная $u(t, x)$, зависит от t и от положения частицы жидкости в поперечном сечении трубки [1], при этом проекция градиента давления жидкости на ось симметрии трубки равна $\rho h(t)/l(t; u)$, где ρ — плотность жидкости [1].

Вопрос: как связаны уровни $h(t)$ и $l(t; u)$? Определение обобщённого решения задачи (1) следует схеме, принятой для линейных задач [2], [3]. Функция

$u \in W_2^{1,0}(G_T)$, $u|_{\partial G} = 0$ называется обобщённым решением задачи (1), если $l(t; u) > 0 \forall t \in [0, T]$ и для любой пробной функции $\eta \in W_2^1(\Gamma_T)$, $\eta|_{t=T} = 0$, $\eta|_{\partial G} = 0$ выполняется равенство

$$-\int_{G_T} u \eta_t dx dt + \nu \int_{G_T} \langle \nabla u, \nabla \eta \rangle dx dt = \int_G \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_{G_T} f(t; u) \eta_t dx dt,$$

где

$$\langle \nabla u, \nabla \eta \rangle = \sum_{j=1}^m u_{x_j} \eta_{x_j}, \quad m = 2.$$

Теорема. Пусть измеримые функции f и g ограничены и постоянная $l_0 > 0$. Тогда для любой начальной функции $\varphi \in L_2(G)$ существует число $T_* \in (0, T_0]$ такое, что для любого $T \in (0, T_*)$ существует единственное обобщённое решение $u \in W_2^{1,0}(G_T)$ задачи (1), а при любом $T > T_*$ не существует решения в цилиндре G_T .

Приводятся результаты численного решения задачи (1) для практически важного случая линейного по времени t изменения уровня жидкости $h(t)$ и $h(0) = l_0$, $\varphi = 0$. Оказывается, что уровень жидкости в трубке колеблется относительно уровня жидкости в баке с затуханием амплитуды колебаний.

Литература

- [1] Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике. – СПб.: СПбГУ, 2005. – 304 с.
- [2] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. – М: Наука, 1973. – 408 с.
- [3] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М: Наука, 1976. – 392 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКОУПРУГИХ ТРУБОПРОВОДОВ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

Худаяров Б. А., Тураев Ф. Ж., Камолов Э. Р.
Ташкентский институт ирригации и мелиорации
Ташкент
e-mail: bakht-flpo@yandex.ru

Khudayarov B. A., Turaev F. Zh., Kamolov E. R. Simulation of nonlinear dynamics of viscoelastic pipeline with the flowing fluid. On the example of a viscoelastic shell considered problems of nonlinear dynamics pipelines flowing liquid. With the help of the Bubnov–Galerkin mathematical model of the problem is reduced to the study of a system of ordinary integro-differential equations solved by numerical method based on quadrature formulas.

Keywords: mathematical modeling, viscoelasticity, integro-differential equations, algorithm, pipeline.

На примере вязкоупругой оболочки рассмотрены задачи нелинейной динамики трубопроводов с протекающей жидкостью. С помощью метода Бубнова–Галеркина математическая модель задачи сведена к исследованию системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений, решаемых численным методом, основанным на использовании квадратурных формул.

Ключевые слова: математическое моделирование, вязкоупругость, интегро-дифференциальные уравнения, алгоритм, трубопровод.

Рассматривается трубопровод в условиях постоянного внутреннего рабочего давления p_0 и продольной сжимающей силы F . Трубопровод представлен в виде замкнутой цилиндрической оболочки с радиусом средней линии поперечного сечения R , разделённый на участки длиной L кольцами жесткости. Материал считается изотропным с плотностью $\rho = \text{const}$, модулем упругости E и коэффициентом Пуассона μ .

Оболочка рассматривается в системе цилиндрических координат $\xi = x/R$, где x – продольная координата, отсчитывается по оси трубы, θ – полярный угол в плоскости поперечного сечения. Компоненты перемещений произвольной точки срединной поверхности по направлению координат ξ и θ по внешней нормали к срединной поверхности, отнесенные к радиусу поперечного сечения трубы R , обозначаются u , v и w .

Исходное уравнение движения оболочки в усилиях, полученное на основании указанных допущений, имеет вид [1–3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\tau \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{R_2}{R_1} T_1 \right) - \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(R_2 \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) + R \frac{\partial X_1}{\partial \theta} - R \frac{\partial X_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (R_2 X_3) = 0. \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения: (X_1, X_2, X_3) – составляющие сил инерции материала оболочки с учётом внутреннего радиального давления:

$$\begin{aligned} X_1 &= -Rh\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & X_2 &= -Rh\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ X_3 &= -\rho\Phi_{mn} \left(R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + \mu_{bj} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Rh\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Усилия и деформации связаны между собой отношениями:

$$\begin{aligned} M_1 &= \mu D (1 - R_*) \aleph_2, & M_2 &= D (1 - R_*) \aleph_2, & T_1 &= Eh (1 - R_*) \varepsilon_1, \\ \varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1 &= 0, & H_1 &= H_2 = H = (1 - \mu) D (1 - R_*) \tau, \\ S_1 = S_2 = S &= \frac{Eh (1 - R_*)}{2 (1 + \mu) \omega_*}. \end{aligned} \quad (3)$$

Задача решается в перемещениях с использованием соотношений вязкоупругости (3) и следующих зависимостей между деформациями и перемещениями, записанными с учётом допущений полубезмоментной теории оболочек:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w &= 0, & \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \theta} &= 0, & \vartheta_2 &= \frac{\partial w}{\partial \theta} - v, & \aleph_1 &= -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, & \aleph_2 &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta}, \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \xi}, & \tau &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi}, & \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta} \right), & \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

где ϑ_2 – угол поворота касательной к срединной линии поперечного сечения оболочки в результате деформации контура поперечного сечения, R_1, R_2 – радиусы кривизны оболочки в деформируемом состоянии в продольном и поперечном направлениях.

После преобразований уравнения (1) с использованием соотношений (2), (3), (4) разрешающее уравнение движения в перемещениях запишется в виде:

$$\begin{aligned} E (1 - R_*) \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{h^2}{12R^2(1 - \mu^2)} \left[\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \vartheta_2}{\partial \xi \partial \theta^2} + \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta^2} + \vartheta_2 \right) \right] \right\} - \\ - \mu_{bj} \frac{R}{h} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} + R^2 \rho \left[\frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial t^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} \right] + \\ + \frac{R}{h} \rho \Phi_{mn} \left(R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая граничные условия шарнирного опирания на концах оболочки: при $\xi = 0$ и $\xi = \frac{L}{R}$, $v = w = 0$; $\vartheta_2 = 0$, $M_1 = T_1 = 0$, и условия периодичности функций перемещения и угла ϑ_2 по θ , а также зависимости функций от времени t , представим $w(\xi, \theta, t)$ в виде:

$$w = \sum_m \sum_n b_{mn} f_n(\xi) \varphi(t) \cos m\theta, \quad (6)$$

где $\varphi(t)$ – функция времени t , $b_{mn} = \text{const}$, m, n – волновые числа, определяющие формы колебаний оболочки в окружном и продольном направлениях, аппроксимирующая функция продольной координаты $f_n(\xi)$ подбирается исходя из граничных условий на краях оболочки.

Остальные компоненты перемещения и угол поворота определяются из соотношений (4):

$$\begin{aligned} u &= - \sum_m \sum_n \frac{1}{m^2} b_{mn} f'_n(\xi) \varphi(t) \cos m\theta, \\ v &= - \sum_m \sum_n \frac{1}{m} b_{mn} f_n(\xi) \varphi(t) \sin m\theta, \\ \vartheta_2 &= - \sum_m \sum_n \frac{m^2 - 1}{m} b_{mn} f_n(\xi) \varphi(t) \cos m\theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Полагая свободные колебания гармоническими, представим функцию времени $\varphi(t)$ в виде:

$$\varphi(t) = \sin \omega_{mn} t, \quad (8)$$

где ω_{mn} – круговая частота свободных колебаний оболочки по формам, определяемым значениями волновых чисел $m, n = 1, 2, \dots$.

При помощи метода Бубнова–Галеркина, основанного на многочленной аппроксимации перемещений, задача сведена к исследованию системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ), где независимой переменной является время. Решение ИДУ находится численным методом, основанным на использовании квадратурных формул.

Таким образом, разработана методика и программы, которые могут быть использованы при проектировании и экспериментальной отработке конструкций трубопроводов различного назначения. Применение предлагаемой методики позволит повысить уровень обоснованности конструкторских решений и тем самым безопасность разрабатываемых систем.

Литература

- [1] Соколов В. Г., Ефимов А. А. Колебания и устойчивость магистральных газопроводов при подводной прокладке // Вестник гражданских инженеров. – 2007. – №1. – СПб.: СПбГАСУ. – С. 36–41.
- [2] Ефимов А. А. Свободные колебания подводных нефтепроводов // Известия ВУЗов. Нефть и газ. – 2008. – №1. – С. 49–56.
- [3] Соколов В. Г. Свободные колебания нефтепровода с учетом потока жидкости и продольной силы // Промышленное и гражданское строительство. – 2007. – №7. – С. 32–33.

Современные проблемы теории функций и функционального анализа

УДК 517.51

О НЕУЛУЧШАЕМОСТИ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ РАЗНЫХ МЕТРИК В СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Бимендина А. У.

Карагандинский государственный
университет им. Е. А. Букетова

Караганда

e-mail: bimend@mail.ru

Bimendina A. U. About unimprovability of theorem of embedding in the symmetric Lorentz spaces. In this work a sufficient condition of embedding of different metrics in Lorentz spaces is considered and its unimprovability on the principle of extreme function of many variables on the strong metric parameter is found.

В данной работе рассматривается достаточное условие вложения разных метрик для пространств Лоренца и установлено её неулучшаемость по принципу крайней функции многих переменных по сильному метрическому параметру.

Пусть $\{\varphi_{k_i}^{(i)}(x_i)\}_{k_i=0}^{+\infty}$, $x_i \in G_i = [0, 1]$, $i = \overline{1, n}$ – мультипликативные системы Прайса [1].

Будем говорить, что функция $f(\bar{x})$ принадлежит пространству Лоренца $L_{p\theta}[0, 1]^n$, если

$$\|f\|_{L_{p\theta}[0, 1]^n} = \left\{ \int_0^1 t^{\frac{\theta}{p}-1} [f^*(t)]^\theta dt \right\}^{1/\theta} < +\infty, \text{ при } 1 \leq p < +\infty, 1 \leq \theta < +\infty$$

и

$$\|f\|_{L_{p\theta}[0, 1]^n} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) < +\infty, \text{ при } 1 \leq p < +\infty, \theta = +\infty,$$

где $f^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$, $\bar{x} \in [0, 1]^n$ [2].

Пусть $T_{k_\vee, \dots, k_\vee}(\bar{x}) = \sum_{m_1=0}^{k_\vee-1} \dots \sum_{m_n=0}^{k_\vee-1} b_{m_1, \dots, m_n} \prod_{i=1}^n \varphi_{m_i}^{(i)}(\bar{x}_i)$ – линейный агрегат по кратной мультипликативной системе Прайса.

Лемма 1 [3]. Пусть $1 < p < q < r \leq +\infty$, $1 < \theta$, $\tau < +\infty$ и задана последовательность $\{\mu(l)\}_{l=0}^{+\infty}$, удовлетворяющая условию

$$\mu(0) = 1, \quad \frac{\mu(l+1)}{\mu(l)} \geq \alpha > 1 \quad \forall l \in \mathbb{Z}^+, \quad (1)$$

и $\psi(\bar{x}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \psi_l(\bar{x})$ в смысле $L([0, 1]^n)$, где $\psi_l(\bar{x}) \in L_{p\tau}([0, 1]^n) \cap L_{q\tau}([0, 1]^n)$. Тогда справедливо

$$\|\psi\|_{L_{q\tau}([0, 1]^n)} \leq c_{\tau qp} \left\{ \sum_{l=0}^{+\infty} \left[\mu(l)^{\tau(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{q})} \|\psi_l\|_{L_{p\theta}([0, 1]^n)}^{\tau} + \mu(l)^{\tau(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|\psi_l\|_{L_{p\theta}([0, 1]^n)}^{\tau} \right] \right\}^{1/\tau},$$

где константа $c_{\tau qp} > 0$ зависит только от указанных параметров.

Лемма 2 [3]. Пусть $1 < p < +\infty$, $1 < \theta < +\infty$ и $\{l_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – последовательность натуральных чисел такая, что $\frac{l_{k+1}}{l_k} \geq \alpha > 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы неравенства

$$c'_{p\theta} l_{k+1}^{1-\frac{1}{p}} \leq \left\| \sum_{v=l_k}^{l_{k+1}-1} \varphi_v \right\|_{p\theta} \leq c_{p\theta} l_{k+1}^{1-\frac{1}{p}},$$

где константы $c'_{p\theta} > 0, c_{p\theta} > 0$ зависят только от указанных параметров.

Теорема 1 [3]. Пусть $1 < p < q \leq +\infty$, $1 \leq \theta$, $\tau \leq +\infty$. Тогда для любого полинома Прайса $T_{v_1, v_2, \dots, v_n}(\bar{x}) = \sum_{k_1=0}^{v_1-1} \dots \sum_{k_n=0}^{v_n-1} a_{k_1, k_2, \dots, k_n} \prod_{i=1}^n \varphi_{k_i}(x_i)$ имеет место неравенство

$$\|T_{v_1, v_2, \dots, v_n}\|_{L_{q\tau}([0, 1]^n)} \leq D_{pq\theta\tau} \prod_{i=1}^n v_i^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|T_{v_1, v_2, \dots, v_n}\|_{L_{p\theta}([0, 1]^n)},$$

где константа $D_{pq\theta\tau} > 0$ зависит только от указанных параметров.

Обозначим $\Delta_{1, \dots, 1}(f; \bar{x}) = T_{1, \dots, 1}(\bar{x})$, $\Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f; \bar{x}) = T_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(\bar{x}) - T_{s_{k-1}^{(1)}, \dots, s_{k-1}^{(n)}}(\bar{x})$.

Теорема 2 [3]. Пусть $1 < p < q < +\infty$, $1 < \theta$, $\tau < +\infty$, $\{s_k^{(i)}\}_{k=1}^{+\infty}$ – возрастающие последовательности натуральных чисел таких, что $s_0^{(i)} = 1$, $\frac{s_{k+1}^{(i)}}{s_k^{(i)}} \geq \alpha > 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, n}$, и пусть для функции $f \in L_{p\theta}([0, 1]^n)$ в смысле сходимости пространства $L_{p\theta}([0, 1]^n)$ справедливо представление

$$f(\bar{x}) = T_{1, \dots, 1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[T_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(\bar{x}) - T_{s_{k-1}^{(1)}, \dots, s_{k-1}^{(n)}}(\bar{x}) \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f; \bar{x}).$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_{p\theta}([0, 1]^n)} \geq c'_{p\theta\tau qn} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\theta(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \left\| \Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f) \right\|_{L_{q\tau}([0, 1]^n)}^{\theta} \right\}^{1/\theta},$$

где константа $c'_{p\theta\tau qn} > 0$ зависит только от указанных параметров.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $1 < p < +\infty$, $1 < \theta$, $\tau < +\infty$, $f \in L_{p\theta}([0, 1]^n)$ и $\{s_k^{(i)}\}_{k=1}^{+\infty}$ – возрастающие последовательности натуральных чисел такие, что $s_0^{(i)} = 1$, $\frac{s_{k+1}^{(i)}}{s_k^{(i)}} \geq \alpha > 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, n}$.

1°. Если при некотором $q : p < q < +\infty$ и $\tau : 1 < \tau < +\infty$ ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left\| \Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f) \right\|_{L_{p\theta}([0,1]^n)}^\tau$$

сходится, то $f \in L_{q\tau}([0,1]^n)$.

2°. Утверждение пункта 1° данной теоремы неулучшаемо в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_{p\theta}([0,1]^n)$ для которой ряд

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left\| \Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f_0) \right\|_{L_{p\theta}([0,1]^n)}^\tau$$

расходится, и при этом $f_0 \notin L_{q\tau}([0,1]^n)$, но для любого сколь угодно малого положительного $\varepsilon : p < q - \varepsilon$ функция $f_0 \in L_{q-\varepsilon, \tau}([0,1]^n)$.

Доказательство. Пусть $b_k = \prod_{i=1}^n s_k^{(i)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+$. Тогда $\{b_k\}_{k=0}^{+\infty}$ удовлетворяет условию (1) из леммы 1.

К разложению $f(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f; \bar{x})$, применяя лемму 1, при $r = +\infty$ получим:

$$\begin{aligned} & \|f\|_{L_{q\tau}([0,1]^n)}^\tau \leq \\ & \leq c_{\tau qp} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \left[b_k^{-\frac{\tau}{q}} \left\| \Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f) \right\|_{L_{\infty, \theta}([0,1]^n)}^\tau + b_k^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left\| \Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f) \right\|_{L_{p\theta}([0,1]^n)}^\tau \right] \right\}. \end{aligned}$$

С помощью неравенства разных метрик С. М. Никольского (теорема 1)

$$\left\| \Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f) \right\|_{L_{+\infty, \theta}([0,1]^n)} \leq D_p \prod_{i=1}^n s_k^{(i)1/p} \left\| \Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f) \right\|_{L_{p\theta}([0,1]^n)},$$

имеем:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{q\tau}([0,1]^n)} & \leq c_{\tau qp} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \left[b_k^{-\frac{\tau}{q}} \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\frac{\tau}{p}} \left\| \Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f) \right\|_{L_{p\theta}([0,1]^n)}^\tau + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + b_k^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left\| \Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f) \right\|_{L_{p\theta}([0,1]^n)}^\tau \right] \right\}^{1/\tau} \leq \\ & \leq c'_{\tau qp} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left\| \Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f) \right\|_{L_{p\theta}([0,1]^n)}^\tau \right\}^{1/\tau}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^n s_k^{(i)(\frac{1}{q}-1)} \sum_{\nu_1=s_{k-1}^{(1)}}^{s_k^{(1)}-1} \dots \sum_{\nu_n=s_{k-1}^{(n)}}^{s_k^{(n)}-1} \prod_{i=1}^n \varphi_{\nu_i}^{(i)}(x_i).$$

С помощью леммы 2 получим

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=L}^{M-1} \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\left(\frac{1}{q}-1\right)} \sum_{v_1=s_{k-1}^{(1)}}^{s_k^{(1)}-1} \dots \sum_{v_n=s_{k-1}^{(n)}}^{s_k^{(n)}-1} \prod_{i=1}^n \varphi_{v_i} \right\|_{L_{p\theta}([0,1]^n)} \leq \\ & \leq c_{q\theta} \sum_{v=L}^{M-1} \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\left(\frac{1}{q}-1\right)} \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\left(1-\frac{1}{p}\right)} = c_{q\theta} \sum_{v=L}^{M-1} \prod_{i=1}^n s_k^{-(i)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $(L \text{ и } M) \rightarrow +\infty$, потому что $1 < p < q < +\infty$.

Отсюда следует, что $\exists f_0 \in L_{p\theta}([0,1]^n)$, $1 < p < q < +\infty$, $1 < \theta < +\infty$ и

$$\exists f_0(\bar{x}) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\left(\frac{1}{q}-1\right)} \sum_{v_1=s_{k-1}^{(1)}}^{s_k^{(1)}-1} \dots \sum_{v_n=s_{k-1}^{(n)}}^{s_k^{(n)}-1} \prod_{i=1}^n \varphi_{v_i}^{(i)}(x_i)$$

в смысле $L_{p\theta}([0,1]^n)$. В силу леммы 2 имеет место

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^{+\infty} \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\tau\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left\| \Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f_0) \right\|_{L_{p\theta}([0,1]^n)}^\tau \geq \\ & \geq \sum_{v=0}^M \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\tau\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left\| \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\left(\frac{1}{q}-1\right)} \sum_{v_1=s_{k-1}^{(1)}}^{s_k^{(1)}-1} \dots \sum_{v_n=s_{k-1}^{(n)}}^{s_k^{(n)}-1} \prod_{i=1}^n \varphi_{v_i} \right\|_{L_{p\theta}([0,1]^n)}^\tau \geq \\ & \geq c'_{q\theta} \sum_{v=0}^M \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\tau\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} s_k^{(i)\tau\left(\frac{1}{q}-1\right)} s_k^{(i)\tau\left(1-\frac{1}{p}\right)} = c'_{q\theta} \sum_{k=0}^M 1 \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

при $M \rightarrow +\infty$, т. е. ряд, стоящий в левой стороне данного неравенства, расходится. Далее, согласно теореме 2 получим

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=1}^M \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\left(\frac{1}{q}-1\right)} \sum_{v_1=s_{k-1}^{(1)}}^{s_k^{(1)}-1} \dots \sum_{v_n=s_{k-1}^{(n)}}^{s_k^{(n)}-1} \prod_{i=1}^n \varphi_{v_i}^{(i)} \right\|_{L_{q\tau}([0,1]^n)} \geq \\ & \geq c_{p\tau q} \left\{ \sum_{k=1}^M \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\tau\left(\frac{1}{2q}-\frac{1}{q}\right)} \left\| \Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f_0) \right\|_{L_{2q,\tau}([0,1]^n)}^\tau \right\}^{1/\tau} \geq \\ & \geq c_{qp\theta} \left\{ \sum_{k=0}^M \prod_{i=1}^n s_k^{-(i)\frac{\tau}{2q}} s_k^{(i)\tau\left(\frac{1}{q}-1\right)} s_k^{(i)\tau\left(1-\frac{1}{2q}\right)} \right\}^{1/\tau} = c_{qp\theta} \left\{ \sum_{k=0}^M 1 \right\}^{1/\theta} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

при $M \rightarrow +\infty$. Это означает, что $f_0 \notin L_{q\tau}([0,1]^n)$, где $1 < p < q < +\infty$, $1 < \tau < +\infty$.

Пусть произвольное положительное число такое, что $\varepsilon > 0 : 1 < p <$

$< q - \varepsilon < q < +\infty$, $1 < \theta$, $\tau < +\infty$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^M \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\tau\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q-\varepsilon}\right)} \left\| \Delta_{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n)}}(f_0) \right\|_{L_{p\theta}([0,1]^n)}^\tau &\leq \\ &\leq c_{q\theta} \sum_{\nu=0}^M \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\left[\frac{\tau}{p}-\frac{\tau}{q-\varepsilon}+\frac{\tau}{q}-\tau\right]} \prod_{i=1}^n s_k^{(i)\tau\left(1-\frac{1}{p}\right)} = c_{q\theta} \sum_{\nu=0}^M \prod_{i=1}^n s_k^{-(i)\tau\left[\frac{1}{q-\varepsilon}-\frac{1}{q}\right]} < +\infty \end{aligned}$$

при $M \rightarrow +\infty$. Отсюда следует, что $f_0 \in L_{q-\varepsilon, \tau}([0, 1]^n)$, где $1 < p < q - \varepsilon < q < +\infty$, $1 < \tau < +\infty$ ■

Литература

- [1] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. – М., 1987. – 300 с.
- [2] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на Евклидовых пространствах. – М., 1974. – 212 с.
- [3] Бимендина А. У., Смаилов Е. С. О неуплучшаемых условиях вложения разных метрик на пространствах Лоренца // Вестник КазНУ сер.: мат., мех., инф. 2009, № 5(62). – С. 33–42.

АБСОЛЮТ $(\Gamma(K, \pi), \tau)$ КОМПАКТА K

Колдунов А. В.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург

Koldunov A. V. The absolute $(\Gamma(K, \pi), \tau)$ of a compact space K . In the report the construction of the absolute $(\Gamma(K, \pi), \tau)$ is presented and some of its properties are studied.

В сообщении вводится конструкция абсолюта $(\Gamma(K, \pi), \tau)$ и рассматриваются некоторые его свойства.

1. Решётка Z и идеал I . Пусть K – произвольный компакт и пусть S экстремально несвязный компакт, т. е. в векторной решётке $C(S)$ всех непрерывных функций на S любое порядково ограниченное множество M имеет наименьшую верхнюю границу (обозначаемую в тексте через $\sup M$).

Пусть $\pi : C(K) \rightarrow C(S)$. Будем считать, что для отображения π выполнены следующие условия: 1) если $|x| \leq |y|$, то $|\pi(x)| \leq |\pi(y)|$; 2) если $x, y \geq 0$, то $|\pi(x \vee y)| \leq |\pi(x)| + |\pi(y)|$; 3) если $\pi(x) = 0$, то $x = 0$. Для открытого $G \subset K$ обозначим $\text{in}(G) = \sup \{|\pi(x)| : |x| \leq 1, \text{cl cz}(x) \subset G\}$.

Лемма 1. Пусть G_1, G_2 открыты в K . Тогда $\text{in}(G_1 \cup G_2) \leq \text{in}(G_1) + \text{in}(G_2)$.

Доказательство. Пусть $x \in C(K)$, причём $|x| \leq 1$ и $F = \text{cl cz}(x) \subset G_1 \cup G_2$. Проверим, что $|\pi(x)| \leq \text{in}(G_1) + \text{in}(G_2)$. Замкнутое $F_1 = F \setminus G_2$ содержится в G_1 . Выберем $y_1 \in C(K)$ со свойствами: $0 \leq y_1 \leq 1$, $\text{cl cz}(y_1) \subset G_1$, $y_1 \equiv 1$ на открытом $W \supset F_1$. Аналогично, замкнутое $F_2 = F \setminus W \subset G_2$; строим $y_2 \in C(K)$ со свойствами: $0 \leq y_2 \leq 1$, $\text{cl cz}(y_2) \subset G_2$, $y_2 \equiv 1$ на F_2 . Тогда $y_1 \vee y_2 \equiv 1$ на F . Поэтому $|x| \leq y_1 \vee y_2$, Это даёт $|\pi(x)| \leq |\pi(y_1 \vee y_2)| \leq |\pi(y_1)| + |\pi(y_2)| \leq \text{in}(G_1) + \text{in}(G_2)$.

Пусть Δ является семейством всех таких возрастающих последовательностей $a = (F_n)$ замкнутых в K множеств F_n , что $\text{in}(K \setminus F_n) \downarrow 0$. Для $a = (F_n)$ полагаем $E(a) = \bigcup (F_n : n \in N)$. Наконец, пусть $I = \{H \subset K : H \subset K \setminus E(a) \text{ для некоторого } a \in \Delta\}$.

Лемма 2. Для элементов семейства Δ выполнены следующие свойства: 1) если $a = (F_n) \in \Delta$ и $b = (P_n) \in \Delta$, то $a \cap b = (F_n \cap P_n) \in \Delta$; 2) если $a \in \Delta$, то $K \setminus E(a) \in I$; 3) множество $E(a)$ плотно в K .

Пусть Z является семейством всех таких множеств H в K , что для каждого из них найдётся $a(H) = (F_n) \in \Delta$ с условием: $H \cap F_n$ компактно для любого $n \in N$. Заметим, что если $a \in \Delta$, то $E(a) \in Z$ и $K \setminus Z(a) \in I$. Кроме того, для Z выполнены свойства из леммы 3.

Лемма 3. 1) Семейство Z является решёткой множеств в K ; 2) I является идеалом в Z ; 3) если $H_1 \in Z$, $H_2 \in I$, то $H_1 \setminus H_2 \in Z$.

2. Компакт $\Gamma = \Gamma(K, \pi)$. Фильтр A в решётке Z называется I -фильтром, если A не содержит множеств из I . Если I -фильтр A нельзя погрузить в другой I -фильтр, то A называется I -ультрафильтром в Z . Обозначим через $\Gamma(K, \pi)$ семейство всех I -ультрафильтров в Z .

Для $H \in Z$ полагаем $[H] = (A \in \Gamma : H \in A)$. Непосредственно проверяется, что $[H_1 \cup H_2] = [H_1] \cup [H_2]$ и $[H_1 \cap H_2] = [H_1] \cap [H_2]$. Это позволяет ввести в Γ топологию, приняв семейство $\{[H] : H \in Z\}$ за базу замкнутых множеств в Γ . Тогда любая центрированная система замкнутых множеств в Γ имеет непустое пересечение. Таким образом, для того, чтобы Γ был компактом, ему достаточно быть хаусдорфовым.

В дальнейшем будем использовать следующее семейство функций $\mathcal{D}(K, \pi) = \{f : E(a) \rightarrow R, 0 \leq f \leq 1, f|_{F_n} \in C(F_n), \text{ где } a = (F_n) \in \Delta\}$.

Лемма 4. Пусть $a = (F_n) \in \Delta$ и пусть для двух непересекающихся множеств $H_1, H_2 \subset E(a)$ множества $H_1 \cap F_n$ и $H_2 \cap F_n$ компактны ($n \in N$). Тогда существует $f \in \mathcal{D}(K, \pi)$, для которого $f(H_1) = 0$, $f(H_2) = 1$.

Доказательство. Функция f строится по индукции: сначала на F_1 ; затем она продолжается с F_1 на F_2 с сохранением требуемых свойств и так далее.

Пусть для $n \in N$ построена $f_n \in C(F_n)$ со свойствами: $f_n(F_n \cap H_1) = 0$, $f_n(F_n \cap H_2) = 1$, $0 \leq f \leq 1$, $f_n \equiv f_k$ на F_k при $k \leq n$. Тогда компакт $P = F_n \cup (F_{n+1} \cap H_1) \cup (F_{n+1} \cap H_2)$ содержится в F_{n+1} . Зададим $g \in C(P)$ следующим образом: $g \equiv f_n$ на F_n , $g \equiv 0$ на $F_{n+1} \cap H_1$ и $g \equiv 1$ на $F_{n+1} \cap H_2$, $0 \leq g \leq 1$. Тогда g может быть непрерывно продолжена с P на F_{n+1} до $f_{n+1} \in C(F_{n+1})$.

Предложение 1. Γ является компактом.

Доказательство. Пусть $A_1, A_2 \in \Gamma$. Найдутся $H_i \in A_i$ с условием: $H_1 \cap H_2 \in I$. По лемме 3 $Q_i = H_i \setminus (H_1 \cap H_2) \in Z$. Тогда $Q_i \in A_i$ ($i = 1, 2$).

Рассмотрим $a(Q_1) = F_n \in \Delta$ и $a(Q_2) = P_n \in \Delta$. Тогда $Q_1 \cap F_n$, $Q_2 \cap P_n$ компактны для любого $n \in N$. Пусть $b = a(Q_1) \cap a(Q_2) = (F_n \cap P_n) \in \Delta$. По лемме 4 существует $f \in \mathcal{D}(K, \pi)$ со свойством: $f(Q_1) \equiv 0$, $f(Q_2) \equiv 1$.

Обозначим $S_1 = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}, 1\right]\right) \in Z$, $S_2 = f^{-1}\left(\left[0, \frac{2}{3}\right]\right) \in Z$. Тогда $S_1 \cup S_2 = E(b)$ и $[S_1] \cup [S_2] = \Gamma$. Тогда открытые $W_i = \Gamma \setminus [S_i]$ ($i = 1, 2$) не пересекаются. Поэтому остаётся проверить, что $A_i \in W_i$. Имеем $Q_i \in A_i$, $Q_1 \subset f^{-1}(0)$, $Q_2 \subset f^{-1}(1)$ и $f^{-1}(0), f^{-1}(1) \in Z$. Поэтому $f^{-1}(0) \in A_1$, $f^{-1}(1) \in A_2$. Это означает, что $S_1 \bar{\in} A_1$ и $S_2 \bar{\in} A_2$.

3. Каноническое отображение $\tau : \Gamma \rightarrow K$. Для $A \in \Gamma$ полагаем $\tau(A) = \bigcap (\text{cl } H : H \in A)$, которое состоит из одной точки. Таким образом, задано отображение $\tau : \Gamma \rightarrow K$.

Предложение 2. Отображение τ является непрерывным и сюръективным, причём для $a = (F_n) \in \Delta$ множество $r(a) = \bigcup [F_n]$ плотно в Γ .

Пару (Γ, τ) будем называть абсолютом исходного компакта K , порождённого отображением τ .

Предложение 3. Пусть $f \in \mathcal{D}(K, \pi)$, т. е. $f : E(a) \rightarrow R$ для некоторого $a = (F_n) \in \Delta$. Тогда сужение $f\tau$ на множестве $r(a)$ может быть непрерывно продолжено до $s(f) \in C(\Gamma)$, где $r(a) = \bigcup [F_n]$.

Доказательство. Будем считать, что $|f| \leq 1$. Фиксируем $m \in N$. Для целого q , такого что $|q| \leq m$, обозначим $H(m, q) = f^{-1}\left(\left[\frac{q}{m}, \frac{q+1}{m}\right]\right) \in Z$. Тогда $\bigcup ([H(m, q)] : |q| \leq m) = \Gamma$. Кроме того, $[H(m, q_1)] \cap [H(m, q_2)] = \emptyset$ при $|q_1 - q_2| \geq 3$.

Пусть $A \in \Gamma$. Найдём такое целое p , что $|p| \leq m$, $A \in [H(m, p)]$ и $A \bar{\in} [H(m, p)]$ при $q \leq p - 1$. Тогда $A \bar{\in} [H(m, q)]$ при $q \geq p + 3$. Поэтому $A \in W = \Gamma \setminus \bigcup ([H(m, q)] : q \leq p - 1, q \geq p + 3)$; т. е. открытое $W \subset \bigcup ([H(m, q)] : q = p, p + 1, p + 2)$. Докажем, что $\frac{p}{m} \leq f\tau \leq \frac{p+3}{m}$ на $P = W \cap \bigcup ([F_n] : n \in N) = W \cap r(a)$.

Пусть $A_1 \in P$. Найдём $n \in N$, для которого $A_1 \in [F_n]$. Тогда $A_1 \in [F_n \cap H(m, q)]$ для $q = p, p + 1, p + 2$ и $\tau(A_1) \in F_n \cap f^{-1}\left[\frac{q}{m}, \frac{q+1}{m}\right]$. Тем более $\tau(A_1) \in F_n \cap f^{-1}\left[\frac{p}{m}, \frac{p+3}{m}\right]$. Таким образом, $\frac{p}{m} \leq f\tau \leq \frac{p+3}{m}$ на P . Это означает, что $\frac{p}{m} \leq f\tau \leq \frac{p+3}{m}$ на $r(a)$ и для элемента $A \in \Gamma$ нашлась окрестность W , на которой сужение $f\tau|_{r(a)}$ принимает значения от $\frac{p}{m}$ до $\frac{p+3}{m}$. Это доказывает возможность непрерывного продолжения $f\tau|_{r(a)}$ на элемент $A \in \Gamma$.

Замечание. Предложение 3 показывает возможность описывать непрерывные функции на абсолюте (Γ, τ) с помощью разрывных функций на исходном пространстве K .

К ВОПРОСУ О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ПО ЭКСПОНЕНТЕ

Коробкова М. Б.
Санкт-Петербург

Korobkova M. B. To the question of differentiation exponentially. An investigation of the existence of a Cartesian basis for Chebyshev subspaces led to the consideration of the derivatives on the Chebyshev systems. Classical derivatives as the derivatives on the same monotonous function $f(x) = x$ are the derivatives on the Chebyshev system (Markov) $x^k : k!$. The article discusses derivatives system $e^{kx} : k!$. These derivatives are linked with classical ones by recurrent formula. This formula is given.

Исследование вопроса о существовании декартового базиса чебышевского подпространства привело к рассмотрению производных по системам Чебышева. Классические производные как производные от производной по одной и той же монотонной функции $f(x) = x$ суть производные по системе Чебышева (Маркова) $x^k : k!$. В статье рассматриваются производные по системе $e^{kx} : k!$. Указана рекуррентная формула, представляющая последние через классические производные.

Исследование вопроса о существовании декартового базиса в линейном подпространстве, порождённом системой Чебышева (С. Н. Бернштейн, В. С. Виденский, см. [1]–[7] в [1]) и построение обобщений многочленов Бернштейна (Е. Л. Рабкин, см. [31] в [1]) вывели на задачу о дифференцировании по системе Чебышева.

Впервые неявно производные по системам функций появляются у Поля и Сеге (см. [30] в [1]).

При построении декартового базиса по системе Рутмана (см. [33] в [1]) В. С. Виденский рассматривал систему Чебышева дифференцируемую относительно данной последовательности функций (см. [6] в [1]), позже это понятие использовал Е. Л. Рабкин (см. [31] в [1]).

Отправным положением, на основании которого формируется дифференцирование по системам Чебышева, является тот факт, что классические производные как производные от производной по одной и той же монотонной функции $f(x) = x$, записанные через повторные пределы отношения определителей или изучаемые через формулу Тейлора, суть производные по системе Чебышева, составляющей определители в первом случае и порождающей эту формулу Тейлора во втором.

Это новое понятие может быть, в частности, использовано в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если

$$\Phi = (1, e^x, e^{2x}, e^{3x}),$$

то

$$y''' + (3e^x - 3)y'' + (2 - 3e^x + 3e^{2x})y' + e^{3x}y = 0$$

можно изучать в виде

$$y_\Phi''' + y_\Phi'' + \frac{1}{2}y_\Phi' + \frac{1}{6}y_\Phi = 0.$$

Представляет интерес и рассмотренный в этой статье результат: представление производных по экспоненте через классические производные.

Для системы функций

$$\Phi = \left(1, e^x, \frac{1}{2}e^{2x}, \frac{1}{3!}e^{3x}, \dots, \frac{1}{n!}e^{nx}\right)$$

имеем аналог классической системы дифференциального исчисления по функции $x \mapsto e^x$ (см. [1]).

Таблица производных для основных элементарных функций получается из классической таблицы умножением на e^{-x} , так как

$$f'_\Phi(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{e^t - e^x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot \frac{1}{\frac{e^t - e^x}{t - x}} = f'(x)e^{-x}.$$

Известны формулы (см. [1])

$$f_\Phi^{(n)}(x) = (W^2(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}) : W(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-2})W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) \left(f_\Phi^{(n-1)}\right)'(x), \quad (1)$$

$$f_\Phi^{(n)}(x) = (W(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, f) : W(\varphi_0, \dots, \varphi_n))(x), \quad (2)$$

где $\varphi_k(x) = \frac{1}{k!}e^{kx}$, $k = 0, \dots, n$ и $W(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ – определитель Вронского функций $\varphi_0, \dots, \varphi_n$.

Из (1) находим

$$f_\Phi^{(n)}(x) = e^{-x} \left(f_\Phi^{(n-1)}\right)'(x), \quad (3)$$

так как

$$W\left(1, e^x, \frac{1}{2}e^{2x}, \dots, \frac{1}{n!}e^{nx}\right) = e^{xn(n+1)/2} \quad (4)$$

(прямое вычисление).

Из (3) последовательно находим

$$\begin{aligned} f'_\Phi(x) &= e^{-x} f'(x), \\ f''_\Phi(x) &= e^{-2x} (-f' + f'')(x), \\ f'''_\Phi(x) &= e^{-3x} (2f' - 3f'' + f''')(x), \\ f_\Phi^{\text{IV}}(x) &= e^{-4x} (-6f' + 11f'' - 6f''' + f^{\text{IV}})(x), \\ f_\Phi^{\text{V}}(x) &= e^{-5x} (24f' - 50f'' + 35f''' - 10f^{\text{IV}} + f^{\text{V}})(x), \\ &\dots \\ f_\Phi^{(n)}(x) &= e^{-nx} (K_{n1}f' + K_{n2}f'' + \dots + K_{nn-1}f^{(n-1)} + f^{(n)})(x), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$K_{n1} = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad K_{ni} = -(n-1)K_{n-1i} + K_{n-1i-1}, \quad K_{nn} = 1 \quad (6)$$

по анализу формул (5).

Итак, имеем треугольник чисел

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & -1 & & 1 & \\ & & 2 & & -3 & & 1 \\ & -6 & & 11 & & -6 & & 1 \\ 24 & & -50 & & 35 & & -10 & & 1 \end{array}$$

с предполагаемой рекуррентной формулой (6).

Формула (2) даёт возможность найти прямое вычисление K_{ni} при любом n и подтвердить (6).

Вычислим $f_{\Phi}^{(n)}(x)$ по формуле (2). Для лучшего просмотра выкладки, вычисления проведём при $n = 6$.

$$f_{\Phi}^{\text{VI}}(x) = W(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_5, f) : W(\varphi_0, \dots, \varphi_6),$$

$$W(\varphi_0, \dots, \varphi_6) = e^{21x}$$

(см. здесь (4)).

$$f_{\Phi}^{\text{VI}}(x) = \frac{e^{-21x+15x}}{2!3!4!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 & 4^5 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 & 5^4 & 5^5 \\ f'(x) & f''(x) & f'''(x) & f^{\text{IV}}(x) & f^{\text{V}}(x) & f^{\text{VI}}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{e^{-6x}}{2!3!4!} \left(-f'(x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 \\ 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 & 4^5 \\ 5 & 5^2 & 5^3 & 5^4 & 5^5 \end{vmatrix} + f''(x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 \\ 1 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 \\ 1 & 4^2 & 4^3 & 4^4 & 4^5 \\ 1 & 5^2 & 5^3 & 5^4 & 5^5 \end{vmatrix} - \right.$$

$$- f'''(x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 \\ 1 & 3 & 3^3 & 3^4 & 3^5 \\ 1 & 4 & 4^3 & 4^4 & 4^5 \\ 1 & 5 & 5^3 & 5^4 & 5^5 \end{vmatrix} + f^{\text{IV}}(x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^4 & 2^5 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^4 & 3^5 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^4 & 4^5 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^4 & 5^5 \end{vmatrix} -$$

$$\left. - f^{\text{V}}(x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^5 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & 3^5 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 & 4^5 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 & 5^5 \end{vmatrix} + f^{\text{VI}}(x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 & 5^4 \end{vmatrix} \right).$$

Полученные определители вычисляем по методу, предложенному в [2] (№ 246).

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 & x_1^4 & x_1^5 \\ 1 & x_2 & x_2^3 & x_2^4 & x_2^5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_5 & x_5^3 & x_5^4 & x_5^5 \end{vmatrix} = [x_i^5 - (x_1 + \dots + x_5)x_i^4 + (x_1x_2 + \dots + x_4x_5)x_i^3 -$$

$$- (x_1x_2x_3 + \dots + x_3x_4x_5)x_i^2 + (x_1x_2x_3x_4 + \dots + x_2x_3x_4x_5)x_i - x_1x_2x_3x_4x_5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_i^5 = (x_1 + \dots + x_5)x_i^4 - \dots + x_1x_2x_3x_4x_5] =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 & x_1^4 & (x_1x_2x_3 + \dots + x_3x_4x_5)x_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_5 & x_5^3 & x_5^4 & (x_1x_2x_3 + \dots + x_3x_4x_5)x_5^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_1x_2x_3 + \dots + x_3x_4x_5) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 \\ 1 & 3 & 3^3 & 3^4 & 3^5 \\ 1 & 4 & 4^3 & 4^4 & 4^5 \\ 1 & 5 & 5^3 & 5^4 & 5^5 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 5 + \\ + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5) 4! 3! 2! = 225 \cdot 4! 3! 2!.$$

Мы нашли, что $K_{63} = 225$.

В этой выкладке просматривается элегантный способ отыскания K_{ij} .

Например, K_{62} [отсутствует второй столбец, $n = 6$, $s = 2$, $n - s = 4$] = $+(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 + \dots + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = 274$.

Итак, K_{ns} – сумма произведений элементов всех сочетаний из $n - 1$ по s множества $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ со знаком $(-1)^{n+i}$.

$$s \neq 1, \quad s \neq n, \quad K_{n1} = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad K_{nn} = 1.$$

Нетрудно убедиться в справедливости (6).

Действительно, K_{ni} – сумма C_{n-1}^{n-i} слагаемых, K_{n-1i} – сумма C_{n-2}^{n-1-i} слагаемых, K_{n-1i-1} – сумма C_{n-2}^{n-i} слагаемых, но $C_{n-2}^{n-1-i} + C_{n-2}^{n-i} = C_{n-1}^{n-i}$.

В качестве приложения вышеизложенного рассмотрим ОДУ

$$b_0 e^{nx} y_{\Phi}^{(n)} + b_1 e^{(n-1)x} y_{\Phi}^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} e^x y_{\Phi}' + b_n y = h(x),$$

где $\Phi = \left(1, e^x, \frac{1}{2}e^{2x}, \frac{1}{3!}e^{3x}, \dots, \frac{1}{n!}e^{nx}\right)$. Оно сводится к

$$b_0 (K_{n1} y' + \dots + K_{nn} y^{(n)}) + b_1 (K_{n-11} y' + \dots + K_{n-1n-1} y^{(n-1)}) + \\ + \dots + b_{n-1} y' + b_n y = h(x).$$

Литература

- [1] Коробкова М. Б. Декартов базис чебышёвского подпространства в $C_{[a,b]}$ и дифференцирование по системе Чебышёва и Маркова в $C_{[a,b]}$. Часть первая. – СПб.: Изд-во ГТУ, 1997 г.
- [2] Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1966.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ РЕШЁТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Ловягин Ю. Н.
Санкт-Петербург
e-mail: lovyagin@fromru.com

Lovyagin Yu. N. On some questions in the theory of lattice-ordered Abelian groups. We consider issues related to the immersion Archimedean lattice-ordered Abelian groups in the appropriate Boolean valued universe of set theory.

Рассматриваются вопросы, связанные с погружением архимедовых решёточно упорядоченных абелевых групп в подходящий булевозначный универсум теории множеств.

В настоящей заметке показано применение идей теории векторных решёток — K -пространств (K -линеалов) [1] и их булевозначного анализа [2] к решёточно упорядоченным группам. Мы для простоты изложения ограничиваемся случаем коммутативных групп. Усложняя терминологию и доказательства полученные результаты могут быть перенесены на случай коммутативных полугрупп. Некоторые результаты сохраняются и для случая полурешёточного порядка. Отметим, что теория упорядоченных групп, в том числе и некоммутативных, систематически изложена в [3]. Мы в основном используем терминологию из приведенных работ.

1. Порядковые компоненты решёточно упорядоченных абелевых групп.

Определение 1.1. Решёточно упорядоченная абелева группа (мы будем использовать сокращение к.р.у.г.) — это множество с G операцией, записанной аддитивно, и бинарным отношением $\leq$, такое, что выполнены свойства:

- (i) $g_1 + g_2 = g_2 + g_1$ для любых $g_1, g_2 \in G$;
- (ii) существует нейтральный элемент $0 \in G$ такой, что для любого $g \in G$ $g + 0 = g$;
- (iii) $g_1 + (g_2 + g_3) = (g_1 + g_2) + g_3$ для любых $g_1, g_2, g_3 \in G$;
- (iv) для каждого $g \in G$ существует (единственный) элемент $g' \in G$ такой, что $g + g' = 0$; вместо g' пишут $-g$;
- (v) для каждого $g \in G$ $g \leq g$;
- (vi) для любых $g_1, g_2 \in G$ из $g_1 \leq g_2$ и $g_2 \leq g_1$ следует $g_1 = g_2$;
- (vii) для любых $g_1, g_2, g_3 \in G$ из $g_1 \leq g_2$ и $g_2 \leq g_3$ следует $g_1 \leq g_3$;
- (viii) если для $g_1, g_2 \in G$ и $g_1 \leq g_2$, то для любого $g \in G$ $g_1 + g \leq g_2 + g$;
- (ix) для любых $g_1, g_2 \in G$ существует $g_1 \vee g_2$ — наименьший элемент, больший как g_1 , так и g_2 ;

- (х) для любых $g_1, g_2 \in G$ существует $g_1 \wedge g_2$ — наибольший элемент, меньший как g_1 , так и g_2 .

Для $g \in G$ обозначим $g_+ = g \vee 0$, $g_- = -g \vee 0$, $|g| = g_+ + g_-$.

Определение 1.2. Два элемента $g_1, g_2 \in G$ называются *дизъюнктивными*, если $|g_1| \wedge |g_2| = 0$, в обозначениях $g_1 d g_2$. *Дизъюнктивным дополнением* множества $E \subset G$ называется множество $E^d = \{g \in G : \forall e \in E e d g\}$.

Определение 1.3. Компонентой к.р.у.г. G называется множество $E \subset G$ такое, что $E^{dd} = E$.

Точно так же, как и в [1], гл. III, IV доказывается следующее утверждение о компонентах к.р.у.г.

Теорема 1.1. Множество $\mathbb{H}(G)$ всех компонент к.р.у.г. G является полной булевой алгеброй, в которой

$$E_1 \leq E_2 \text{ тогда и только тогда, когда } E_1 \subset E_2;$$

$$E_1 \wedge E_2 = E_1 \cap E_2, \quad E_1 \vee E_2 = (E_1 \cup E_2)^{dd}, \quad E^c = E^d.$$

Рассмотрим функцию in_G , определённую правилом

$$\text{in}_G(g) = \omega_g^\lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq \lambda, \\ \{g\}^{dd}, & \text{если } x \geq \lambda. \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{E}$ — К-пространство разложений единицы булевой алгебры $\mathbb{H}(G)$ ([1]). Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2. in_G является решёточным и алгебраическим мономорфизмом.

Доказательство приведённых утверждений проводится практически дословно как и доказательство соответствующих фактов в [1], гл. III, IV. ■

2. Булевозначные интерпретации к.р.у.г.

Пусть $\mathfrak{B}$ — полная булева алгебра, $\mathbf{V}^{\mathfrak{B}}$ — соответствующий отделимый булевозначный универсум теории множеств [2]. Поскольку всякая теорема теории множеств истинна внутри $\mathbf{V}^{\mathfrak{B}}$, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть G — архимедова к.р.у.г.. Тогда $\mathbf{V}^{\mathfrak{B}} \models \langle G^\wedge \text{ — архимедова к.р.у.г.} \rangle$.

Здесь $G^\wedge$ — стандартное имя G в булевозначном универсуме, получающееся рекурсией по рангу множества:

$$\emptyset^\wedge = \emptyset, \quad \text{dom } x^\wedge = \{y^\wedge : y \in x\}, \quad x^\wedge(y^\wedge) = 1.$$

Доказательство получается применением принципа переноса к теоретико-множественным формулам, выражающим соответствующие свойства. ■

Верно и обратное (в некотором смысле) утверждение.

Теорема 2.2. Если $\mathfrak{G}$ — архимедова к.р.у.г. внутри $\mathbf{V}^{\mathfrak{B}}$, то структура $\mathfrak{G} \downarrow = \{x \in \mathbf{V}^{\mathfrak{B}} : \mathbf{V}^{\mathfrak{B}} \models x \in \mathfrak{G}\}$ с алгебраическими операциями и порядком, определёнными правилами:

$$x + y = z \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{V}^{\mathfrak{B}} \models x + y = z,$$

$$y = -x \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{V}^{\mathfrak{B}} \models y = -x,$$

$$\begin{aligned}
x = 0 & \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{V}^{\mathfrak{B}} \models x = 0, \\
x \vee y = z & \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{V}^{\mathfrak{B}} \models x \vee y = z, \\
x \wedge y = z & \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{V}^{\mathfrak{B}} \models x \wedge y = z, \\
x \leq y & \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{V}^{\mathfrak{B}} \models x \leq y,
\end{aligned}$$

является архимедовой к.р.у.г.

Доказательство получается «расшифровкой» истинностных оценок теоретико-множественных формул, выражающих соответствующие свойства внутри $\mathbf{V}^{\mathfrak{B}}$. ■

Доказательство следующих утверждений можно найти в [2].

Теорема 2.3. Пусть G — архимедова к.р.у.г., $g, g_n \in G$ и $g_n \xrightarrow{(o)} g$. Тогда $\mathbf{V}^{\mathfrak{B}} \models g_n \xrightarrow{(o)} g$. ■

Теорема 2.4. Если $\mathfrak{G} \in \mathbf{V}^{\mathfrak{B}}$ и $\mathbf{V}^{\mathfrak{B}} \models x_n \xrightarrow{(o)} x$, то в структуре $\mathfrak{G} \downarrow$ $x_n \xrightarrow{(o)} x$. ■

Определение 2.1. Булевозначной метрикой на множестве A называется функция $\rho : A \times A \rightarrow \mathfrak{B}$ со свойствами:

- $\rho(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$;
- $\rho(a, b) = \rho(b, a)$;
- $\rho(a, b) \leq \rho(a, c) \vee \rho(c, b)$

для любых $a, b, c \in A$.

Теорема 2.5. На множестве $\mathfrak{G} \downarrow$ определена метрика ρ со значениями в булевой алгебре $\mathfrak{B}$ такая, что

для любого разбиения единицы $b_{\xi} \in \mathfrak{B}$ и множества $x_{\xi} \in \mathfrak{G} \downarrow$ существует элемент $x \in \mathfrak{G} \downarrow$ такой, что $\rho(x, x_{\xi}) \wedge b_{\xi} = 0$ для любого ξ . ■

Определение 2.2. Пространство с булевозначной метрикой $\langle A, \rho \rangle$ называется *циклическим*, если для любого разбиения единицы $b_{\xi} \in \mathfrak{B}$ и $x_{\xi} \in \mathfrak{G} \downarrow$ существует элемент $x \in \mathfrak{G} \downarrow$ такой, что $\rho(x, x_{\xi}) \wedge b_{\xi} = 0$ для любого ξ .

При этом если G — архимедова к.р.у.г., то она является как подгруппой, так и подрешёткой $G^{\wedge} \downarrow$. Более того, $G^{\wedge} \downarrow$ является наименьшей циклической архимедовой к.р.у.г. в смысле коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
G & \longrightarrow & G^{\wedge} \downarrow \\
& \searrow & \downarrow \\
& & G'
\end{array}$$

для единственной вертикальной стрелки.

Определение 2.3. Описанные выше расширения алгебраических структур называются их *циклическими оболочками*.

3. Естественная циклическая оболочка архимедовой к.р.у.г.

В этом параграфе мы опираемся на теорему Е. И. Гордона [4].

Теорема 3.1. Пусть $\mathfrak{B}$ — полная булева алгебра, $\mathbf{V}^{\mathfrak{B}}$ — соответствующий отделимый универсум теории множеств, $\mathfrak{A} \in \mathbf{V}^{\mathfrak{B}}$ — такой элемент, что $\mathbf{V}^{\mathfrak{B}} \models \langle \mathfrak{A} \text{ — поле вещественных чисел} \rangle$. Тогда структура $\mathfrak{A} \downarrow$ с алгебраическими операциями и порядком, определенными правилами:

$$\begin{aligned} x + y = z & \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{V}^{\mathfrak{B}} \models x + y = z, \\ y = \alpha x & \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{V}^{\mathfrak{B}} \models y = \alpha \wedge x, \\ x = 0 & \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{V}^{\mathfrak{B}} \models x = 0^{\wedge}, \\ x \leq y & \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{V}^{\mathfrak{B}} \models x \leq y \end{aligned}$$

является расширенным К-пространством с базой $\mathfrak{B}$. ■

Применим теорему Е. И. Гордона к случаю $\mathfrak{B} = \mathbb{H}(G)$, где G — архимедова к.р.у.г. Тогда, так как расширенные К-пространства с изоморфными базами изоморфны, К-пространство разложений единицы $\mathfrak{B}$ изоморфно $\mathfrak{A} \downarrow$.

Определение 3.1. Так как в рассматриваемом случае булева алгебра $\mathfrak{B}$ естественным образом связана с G , соответствующую циклическую оболочку будем называть *естественной*.

Свяжем с архимедовой к.р.у.г. еще несколько ее «пополнений».

Определение 3.2. *Порядковым пополнением* архимедовой к.р.у.г. G будем называть наименьшую условно полную к.р.у.г. $G^{(p)}$ вместе с решёточным и алгебраическим мономорфизмом $G \rightarrow G^{(p)}$.

В силу того, что внутри $\mathbf{V}^{\mathfrak{B}}$ истинны все теоремы теории множеств, существует элемент $(G^{\wedge})^{(p)} \in \mathbf{V}^{\mathfrak{B}}$, являющийся порядковым пополнением $G^{\wedge}$.

Теорема 3.2. Если $\mathfrak{G}$ — условно полная к.р.у.г. внутри $\mathbf{V}^{\mathfrak{B}}$ ($\mathfrak{B}$ — произвольная полная булева алгебра, не обязательно являющаяся базой какой-либо к.р.у.г.), то структура $\mathfrak{G} \downarrow$ с естественным образом определенными операциями и порядком (см. теоремы 2.2 и 3.1) является условно полной к.р.у.г.

Доказательство дословно повторяет соответствующее рассуждение из [4]. ■

Таким образом, с каждой архимедовой к.р.у.г. G связано несколько условно полных и циклических расширений, показанных на диаграмме. Здесь предполагается, что $\mathfrak{B} = \mathbb{H}(G)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & (G^{\wedge})^{(p)} \downarrow & & \\ & \nearrow & \uparrow & & \\ G & \longrightarrow & G^{\wedge} \downarrow & \longrightarrow & (G^{\wedge} \downarrow)^{(p)} \\ & \searrow & & & \\ & & G^{(p)} & \longrightarrow & (G^{(p)})^{\wedge} \downarrow \end{array}$$

При этом группа $(G^{\wedge})^{(p)} \downarrow$ является естественной циклической условно полной к.р.у.г., вместе с решёточным и алгебраическим мономорфизмом $G \rightarrow (G^{\wedge})^{(p)} \downarrow$.

Определение 3.3. Построенную выше условно полную к.р.у.г. $(G^{\wedge})^{(p)} \downarrow$ будем называть *естественным циклическим пополнением* группы G .

Отметим важный результат.

Теорема 3.3. При сделанных в настоящем параграфе предположениях, если $\overline{G}$ — естественно циклически полная к.р.у.г., то $G^{\wedge} \downarrow$ алгебраически и решёточно изоморфна G . ■

Возвращаясь к множеству вещественных чисел внутри $\mathbf{V}^{\mathbb{H}(G)}$, получаем, что in_G есть мономорфное вложение архимедовой к.р.у.г. в ее *максимальное расширение* — расширенное К-пространство $\mathfrak{R} \downarrow$. Следовательно, все расширения и пополнения будучи погруженными в $\mathbf{V}^{\mathbb{H}(G)}$ «превращается» в подгруппу аддитивной группы вещественных чисел. С другой стороны, всякая аддитивная подгруппа $\mathfrak{G}$ множества вещественных чисел внутри $\mathbf{V}^{\mathbb{H}(G)}$ порождает циклическую архимедову к.р.у.г.. Отсюда получается, что с точностью до циклического пополнения архимедовы к.р.у.г. являются спуск-структурами подгрупп множества вещественных чисел.

4. Метрические пополнения к.р.у.г.

Рассмотрим функцию $d : G \rightarrow \mathfrak{R} \downarrow$, где $\mathfrak{R}$ — множество вещественных чисел внутри $\mathbf{V}^{\mathbb{H}(G)}$, определенную правилом $d(g) = |g|$. Легко понять, что функция d обладает свойствами:

- $d(g) = 0$ тогда и только тогда, когда $g = 0$;
- $d(-g) = d(g)$;
- $d(g_1 + g_2) \leq d(g_1) + d(g_2)$;

Такие функции, а также метрики со значениями в расширенном К-пространстве исследовались в [5]. В частности, там доказана следующая теорема о существовании метрического пополнения.

Теорема 4.1. Пусть метризирующее К-пространство X полно относительно некоторой сходимости σ . Определим в К-метрическом пространстве $\langle X, \rho, K \rangle$ $\rho\sigma$ -сходимость последовательности $x_n \in X$ к элементу $x \in X$ условием: $x_n \xrightarrow{(\rho\sigma)} x$ тогда и только тогда, когда $\rho(x_n, x) \xrightarrow{\sigma} 0$.

Для существования $\rho\sigma$ -пополнения пространства X необходимо и достаточно, чтобы сходимость σ удовлетворяла условию: для любой последовательности $k_{nm} \in K$ такой, что при всех m $k_{nm} \xrightarrow{\sigma} k_n$, $k_n \xrightarrow{\sigma} k$ существует последовательность n_m такая, что $k_{n_m m} \xrightarrow{\sigma} k$. ■

Условие, являющееся критерием существования пополнения, называется *принципом диагонали*.

Ясно, что в применении к нашему случаю принцип диагонали следует постулировать в исходной к.р.у.г.. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2. Для существования пополнения к.р.у.г. G по ее естественной К-значной метрике необходимо и достаточно, чтобы (o) -сходимость в G удовлетворяла принципу диагонали. ■

Отметим, что наличие метрики со значениями в $\mathfrak{R} \downarrow$ автоматически влечет существование метрики со значениями в базе метризирующего К-пространства. В нашем случае — это база самой группы G . Соответствующая булевозначная метрика определяется правилом $\rho(g_1, g_2) = (d(g_1 - g_2))^{dd}$. В силу того, что (o) -сходимость в К-пространстве и его базе совпадают, существование пополнения по К-значной метрике равносильно существованию пополнения по булевозначной метрике. Анализ доказательства теоремы 4.2 и ее обобщений показывает, что эти пополнения совпадают.

Однако, пополнение по метрики со значениями в K -пространстве не обязано обладать свойством цикличности. В [5] исследован вопрос о *циклическом пополнении* K -метрических пространств. Оно получается путем погружения группы G в универсум $V^{\mathbb{H}(G)}$, в котором $G^{\wedge}$ является метрическим пространством. Рассматривая его пополнение внутри $V^{\mathbb{H}(G)}$, получаем спуск-структуру, которая и дает циклическое, метрически полное K -метрическое (соответственно булевозначно метризованное) пространство. В данном случае принцип диагонали не играет существенной роли. Но, в случае его наличия существуют два пополнения $G^{(\rho)}$ и G^{suc} , для которых имеется метрический и решеточный мономорфизм $G^{(\rho)} \longrightarrow G^{suc}$.

Литература

- [1] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Принскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. — 546 с.
- [2] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1990. — 314 с.
- [3] Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. – М.: Наука, 1984. — 320 с.
- [4] Гордон Е. И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K -пространства // ДАН СССР. — 1977. – Т. 237, № 4. — С. 773–775.
- [5] Ловягин Ю. Н. О пространствах с абстрактной метрикой: дисс. на соиск. уч. степ. к. ф.-м. н. – СПб: РГПУ им. А. И. Герцена. — 1996. — 55 с.

ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ ОЦЕНКИ СНИЗУ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПРОЕКЦИОННОЙ КОНСТАНТЫ $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$

Локоть В. В., Мартынов О. М.

Мурманский государственный гуманитарный университет

Мурманск

e-mail: olegmartynov@yandex.ru

Lokot' V. V., Martynov O. M. About more precise definition of lower bound for relative projection constant $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$. In this paper lower bound for the relative projection constant $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$, which gives the best lower bound for the projection constant $\lambda(n-5, n)$, to be more exact.

В данной статье уточняется оценка снизу для относительной проекционной константы $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$, которая является хорошей оценкой снизу (в смысле близости к точному значению) для константы $\lambda(n-5, n)$.

Пусть $X = l_1^{(n)}$ – n -мерное линейное нормированное пространство эле-

ментов $x = (x_i)_1^n$ с нормой

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Пусть так же $f = (f_i)_1^n \neq 0$, $g = (g_i)_1^n \neq 0$, $h = (h_i)_1^n \neq 0$, $t = (t_i)_1^n \neq 0$, $y = (y_i)_1^n \neq 0$ – линейные функционалы, определенные в $l_1^{(n)}$,

$$f^{-1}(0) = \left\{ x \in l_1^{(n)} \mid f(x) = \sum_{i=1}^n f_i x_i = 0 \right\},$$

$$g^{-1}(0) = \left\{ x \in l_1^{(n)} \mid g(x) = \sum_{i=1}^n g_i x_i = 0 \right\},$$

$$h^{-1}(0) = \left\{ x \in l_1^{(n)} \mid h(x) = \sum_{i=1}^n h_i x_i = 0 \right\},$$

$$t^{-1}(0) = \left\{ x \in l_1^{(n)} \mid t(x) = \sum_{i=1}^n t_i x_i = 0 \right\},$$

$$y^{-1}(0) = \left\{ x \in l_1^{(n)} \mid y(x) = \sum_{i=1}^n y_i x_i = 0 \right\}$$

– гиперплоскости в $l_1^{(n)}$.

В случае линейной независимости функционалов f, g, h, t и y пространство $Y_{n-5} = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0) \cap t^{-1}(0) \cap y^{-1}(0)$ является подпространством пространства $l_1^{(n)}$ коразмерности 5.

Проекция $l_1^{(n)}$ на Y_{n-5} имеет вид [1]

$$\pi_{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta} x = x - \alpha f(x) - \beta g(x) - \gamma h(x) - \zeta t(x) - \eta y(x)$$

при условиях

$$\begin{aligned} f(\alpha) = g(\beta) = h(\gamma) = t(\zeta) = y(\eta) = 1; \quad f(\beta) = f(\gamma) = f(\zeta) = f(\eta) = g(\alpha) = \\ = g(\gamma) = g(\zeta) = g(\eta) = h(\alpha) = h(\beta) = h(\zeta) = h(\eta) = \\ = t(\alpha) = t(\beta) = t(\gamma) = t(\eta) = y(\alpha) = y(\beta) = y(\gamma) = y(\zeta) = 0. \end{aligned}$$

Норма проекции на подпространство Y_{n-5} в пространстве $l_1^{(n)}$ вычисляется по формуле

$$\|\pi\| = \max_{1 \leq j \leq n} M_j, \quad \text{где} \quad M_j = \sum_{i=1}^n |\delta_{ij} - \alpha_i f_j - \beta_i g_j - \gamma_i h_j - \zeta_i t_j - \eta_i y_j|.$$

Найдём оценку снизу константы $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$ для некоторых классов подпространств таких, что $n = (2^k - 1)m$ и $k = 5$.

Функционалы f, g, h, t и y определим следующим образом:

$$f = (1, r, r, r, r, 0, r, r, r, 0, 0, r, 0, r, r, 0, r, r, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0),$$

$$\begin{aligned}
g &= (1, r, r, r, 0, r, r, r, 0, 0, r, 0, r, r, r, 0, 0, 0, r, 0, 0, r, 0, 1, 0, 0, 0), \\
h &= (1, r, r, 0, r, r, r, 0, 0, r, 0, r, r, r, 0, r, 0, 0, 0, r, 0, 0, r, 0, 0, 0, 1, 0, 0), \\
t &= (1, r, 0, r, r, r, 0, 0, r, r, r, 0, r, r, r, 0, 0, 0, r, 0, 0, r, 0, 0, 0, 0, 1, 0), \\
y &= (1, 0, r, r, r, r, 0, r, r, r, r, 0, 0, 0, r, 0, r, r, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1).
\end{aligned} \tag{1}$$

(здесь цифры 1, 0 и символ r означают последовательности из m единиц, нулей и букв r соответственно; $m > 2$).

Введём обозначения

$$\begin{aligned}
A_k &= \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} \alpha_i, & B_k &= \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} \beta_i, & C_k &= \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} \gamma_i, & D_k &= \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} \zeta_i, \\
E_k &= \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} \eta_i, & M_k^* &= \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} M_i & (k &= 1, \dots, 31).
\end{aligned}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма. Пусть $\pi_{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta}^{(0)}$ – оператор проектирования с минимальной нормой пространства $l_1^{(n)}$, $n = 31m$, $m \in N$, $m > 2$ на подпространство $Y_{n-5} = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0) \cap t^{-1}(0) \cap y^{-1}(0)$, где функционалы f, g, h, t и y имеют вид (1). Тогда для нормы оператора $\pi_{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta}^{(0)}$ имеют место пять групп оценок снизу. Приведём по одной из каждой группы (остальные оценки в каждой группе аналогичны):

1. $m \|\pi_{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta}^{(0)}\| \geq M_1^* \geq 6m - (4m + 2)(A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + E_1) -$
 $-(4r - 1)m \sum_{i=2}^6 (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) -$
 $-(3r - 1)m \sum_{i=7}^{16} (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) -$
 $-(2r - 1)m \sum_{i=17}^{26} (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i);$
2. $m \|\pi_{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta}^{(0)}\| \geq M_2^* \geq (4r + 1)m - 2mr(A_1 + B_1 + C_1 + D_1) +$
 $+ ((m - 2)r - 4mr^2)(A_2 + B_2 + C_2 + D_2) +$
 $+ (mr - 2mr^2) \left(\sum_{i=3-6, 17, 20, 21, 24-26} (A_i + B_i + C_i + D_i) \right) +$
 $+ (mr - 3mr^2) \sum_{i=7, 13-15} (A_i + B_i + C_i + D_i) -$
 $- mr^2 \sum_{i=8-12, 16} (A_i + B_i + C_i + D_i) - mr \left(\sum_{i=18, 19, 22, 23} (A_i + B_i + C_i + D_i) \right);$
3. $m \|\pi_{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta}^{(0)}\| \geq M_7^* \geq (3r + 1)m + (mr - 2mr^2) \left(\sum_{i=2, 3, 17, 20, 25} (A_i + B_i + C_i) \right) -$

$$\begin{aligned}
& - (mr - 2mr^2)(A_{19} + B_{19} + C_{19}) + ((m - 2)r - 3mr^2)(A_7 + B_7 + C_7) + \\
& + (mr - mr^2) \left(\sum_{i=8,12-16} (A_i + B_i + C_i) \right) - (mr - mr^2) \sum_{i=9}^{11} (A_i + B_i + C_i); \\
4. \quad m \|\pi_{\alpha,\beta,\gamma,\zeta,\eta}^{(0)}\| \geq M_{17}^* \geq (2r + 1)m + 2mr(A_1 + B_1) + (3mr^2 - mr)(A_{10} + B_{10}) + \\
& + ((m - 2)r - 2mr^2)(A_{17} + B_{17}) + mr \left(\sum_{i=2-4,18,20-22,25,26} (A_i + B_i) \right) + \\
& + (2mr^2 - mr) \left(\sum_{i=5,6,19,23,24} (A_i + B_i) \right) + mr^2 \left(\sum_{i=9,11-14,16} (A_i + B_i) \right) + \\
& + (mr - mr^2) \left(\sum_{i=7,8,15} (A_i + B_i) \right); \\
5. \quad m \|\pi_{\alpha,\beta,\gamma,\zeta,\eta}^{(0)}\| \geq M_{27}^* \geq 2m - 2 + (4m + 2)A_1 + (m + 2r(m + 1)) \sum_{i=2}^5 A_i + \\
& + (4mr - m)A_6 + (m + (m + 2)r) \left(\sum_{i=7-9,12,14,15} A_i \right) + \\
& + (3mr - m) \left(\sum_{i=10,11,13,16} A_i \right) + (m + 2r) \left(\sum_{i=17,18,20,21} A_i \right) + \\
& + (2mr - m) \left(\sum_{i=19,22-26} A_i \right).
\end{aligned}$$

Итак, мы имеем пять групп оценок. В первой группе – одно неравенство, во второй – пять неравенств, в третьей – десять неравенств, в четвертой – десять неравенств и в пятой – пять неравенств.

При доказательстве леммы используются условия, сформулированные в работах [3, 4].

Теорема. Пусть $\pi_{\alpha,\beta,\gamma,\zeta,\eta}^{(0)}$ – оператор проектирования с минимальной нормой пространства $l_1^{(n)}$, $n = 31m$, $m \in N$, $m > 2$ на подпространство $Y_{n-5} = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0) \cap t^{-1}(0) \cap y^{-1}(0)$, где функционалы f, g, h, t и y имеют вид (1). Тогда

$$\lambda(Y_{n-5}, l_1^{(n)}) \geq \frac{(60r^2 - 31r + 35)m^3 + (-84r^2 + 165r - 50)m^2 - 182mr + 20r}{(60r^2 - 71r + 35)m^3 + (-84r^2 + 145r - 50)m^2 - 62mr}.$$

Доказательство. Сложим неравенства, сформулированные в лемме, почленно, предварительно умножив обе части неравенств первой и пятой групп на

$$a = \frac{2r(5m^2r - 3m^2 - 7mr + 5m - 1)}{m + r - mr},$$

неравенств второй и четвертой групп – на $b = m - 2$ и неравенств третьей группы – на $c = 2m - 2$. Получим

$$(6ma + 15mb + 10mc) \|\pi_{\alpha,\beta,\gamma,\zeta,\eta}^{(0)}\| \geq (16m - 10)a + (40r + 15)mb + 10(3r + 1)mc,$$

откуда

$$\|\pi_{\alpha,\beta,\gamma,\zeta,\eta}^{(0)}\| \geq \frac{(60r^2 - 31r + 35)m^3 + (-84r^2 + 165r - 50)m^2 - 182mr + 20r}{(60r^2 - 71r + 35)m^3 + (-84r^2 + 145r - 50)m^2 - 62mr}.$$

Теорема доказана ■

Замечание. Абсолютной проекционной константой порядков k, n называется число $\lambda(k, n) = \sup \{\lambda(Y_k, X_n) \mid Y_k \subset X_n\}$, где $\dim Y_k = k$, $\dim X_n = n$, $k \leq n$ [5].

В работе [2] получена следующая оценка сверху

$$\lambda(k, n) \leq \psi(k, n) = \sqrt{k} \left(\frac{\sqrt{k}}{n} + \frac{\sqrt{(n-1)(n-k)}}{n} \right). \quad (2)$$

Найденная оценка снизу константы $\lambda(Y_{n-5}, l_1^{(n)})$ является хорошей оценкой снизу для константы $\lambda(n-5, n)$ (в смысле близости к точному значению этой константы). Покажем это. Воспользуемся неравенством

$$\lambda(Y_{n-5}, l_1^{(n)}) \leq \lambda(n-5, n) = \sup \{\lambda(Y_{n-5}, X_n) \mid Y_{n-5} \subset X_n\} \leq \psi(n-5, n),$$

где $\psi(n-5, n)$ определяется с помощью формулы (неравенство (2)):

$$\psi(k, n) = \frac{k + \sqrt{k(n-1)(n-k)}}{n}.$$

Обозначим значение полученной оценки снизу константы $\lambda(Y_{n-5}, l_1^{(n)})$ через $\varphi(31m-5, 31m)$.

Кроме того,

$$\psi(31m-5, 31m) = \frac{31m-5 + \sqrt{5(31m-5)(31m-1)}}{31m}.$$

Найдём

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\psi(31m-5, 31m) - \varphi(31m-5, 31m)) = 1 + \sqrt{5} - \frac{60r^2 - 31r + 35}{60r^2 - 71r + 35}.$$

Значение этого предела будет наименьшим, если $F(r) = \frac{60r^2 - 31r + 35}{60r^2 - 71r + 35}$ примет наибольшее значение. Функция $F(r)$ имеет наибольшее значение при $r = \sqrt{\frac{7}{12}}$. Это значение $\approx 2,936904$. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\psi(31m-5, 31m) - \varphi(31m-5, 31m)) \approx 0,3.$$

В работе [3] аналогичный предел $\approx 0,57$.

Литература

- [1] Blatter J., Cheney E. W., Minimal projections on hyperplanes in sequence spaces // Ann. math. pura et appl., 101 (1974). – P. 215–227.
- [2] König H. P., Lewis D. R., Lin P.-K. Finite dimensional projections // Stud. math. (PRL), 1983, 75, №3. – P. 341–358.
- [3] Локоть В. В., Мартынов О. М., Тарасенко Е. А. Об относительной проекционной константе $\lambda(Y_{n-5}, l_1^{(n)})$ // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. LXVII Герценовские чтения – 2014. – Санкт-Петербург: РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – С. 130–135.
- [4] Локоть В. В., Мартынов О. М. Проекционные константы. – Мурманск: МГГУ, 2013. – 302 с.
- [5] Одинец В. П., Якубсон М. Я. Проекторы и базисы в нормированных пространствах. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 152 с.

НЕРАВЕНСТВО ПУАНКАРЕ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ И. А. КИПРИЯНОВА

Ляхов Л. Н., Райхельгауз Л. Б.

Воронежский государственный университет

email: levnlya@mail.ru, jikol_85@mail.ru

Lyakhov L.N., Raikhelgauz L.B. weighted estimate the function by its derivative. In this paper we consider an analogue of similar Poincare's inequality for integral norms with power weight.

Keywords: Poincare's inequality, weight functional class.

В работе рассматривается аналог неравенства Пуанкаре, для интегральных норм, снабженных степенным весом.

Ключевые слова: Неравенство Пуанкаре, весовой функциональный класс.

Неравенство Пуанкаре хорошо известно (см. монографии [1]–[2]) и применяется в теории функций и краевых задачах дифференциальных уравнений. Относительно простая схема его доказательства не может быть перенесена на классы функций с весовой интегральной нормой. Но для исследования сингулярных дифференциальных уравнений в весовых функциональных классах необходимо подобное неравенство.

Классическое неравенство Пуанкаре для функции $u \in W_2^1(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}_n$ имеет вид

$$\int_{\Omega} u^2(t) dt \leq C \left[\left(\int_{\Omega} u(t) dt \right)^2 + \int_{\Omega} (u'(t))^2 dt \right], \quad (1)$$

где C – константа, зависящая только от ограниченной области Ω . Для функции одной переменной это следующее неравенство, которое запишем с уточнённой

константой

$$\int_a^b u^2(t) dt \leq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b u(t) dt \right)^2 + \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (u'(t))^2 dt. \quad (2)$$

Пусть N и n – натуральные числа, $1 \leq n \leq N$. Введем обозначения

$$x = (x', x'') \in \mathbb{R}_N^+ = \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}, \quad \mathbb{R}_n^+ = \{x' \in \mathbb{R}_n : x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}.$$

Будем полагать, что Ω_N^+ – ограниченная область в $\mathbb{R}_N^+$, прилегающая к каждой гиперплоскости $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, $1 \leq n \leq N$. Её границу, принадлежащую гиперплоскости $x_i = 0$, обозначим через Γ^0 . Пусть Ω^- – зеркальное отражение области Ω^+ относительно каждой из указанных гиперплоскостей $x_i = 0$. Чётность рассматриваемых функций позволяет их считать заданными в $\mathbb{R}_N$, носители которых принадлежат области $\Omega_N = \Omega_N^+ \cup \Omega_N^-$. Таким образом, в части евклидова пространства $\mathbb{R}_N^+$ носитель соответствующей функции представляет собой частично замкнутое множество $\Omega_N^+ \cup \Gamma^0$.

Весовое пространство Лебега $L_p^\gamma(\Omega_N^+)$ определяется как множество функций, определенных на $\Omega_N^+ \cup \Gamma^0 \subseteq \overline{R_N^+}$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\Omega^+)} = \left[\int_{\mathbb{R}_N^+} |f(x)|^p (x')^\gamma dx \right]^{1/p}, \quad (x')^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}, \quad \gamma_i > 0.$$

Известно [2], что это пространство банахово.

Введем пространство

$$W_2^{1,\gamma}(R_1^+) = \left\{ u : u \in L_2^\gamma, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2^\gamma, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Докажем следующий весовой вариант неравенства (2) для функции одной переменной

$$\int_a^b u^2(t) t^\gamma dt \leq C \left[\left(\int_a^b |u(t)| t^\gamma dt \right)^2 + \int_a^b (u'(t))^2 t^\gamma dt \right], \quad (3)$$

полагая $u \in W_2^{1,\gamma}(R_1^+)$. Отметим, что для неотрицательной функции $u(x)$ и для значений $a \geq 1$ это неравенство достаточно просто вытекает из (2). Действительно,

$$\int_a^b u^2(t) t^\gamma dt \leq b^\gamma \int_a^b u^2(t) dt \leq b^\gamma \left[\frac{1}{b-a} \left(\int_a^b u(t) dt \right)^2 + \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (u'(t))^2 dt \right].$$

Здесь, если функция $u(t)$ не отрицательна на отрезке интегрирования, то очевидно (так как $t \geq 1$) выполнение неравенства

$$\left(\int_a^b u(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b u(t) t^\gamma dt \right)^2 \quad (4)$$

и тогда мы получаем

$$\int_a^b u^2(t) t^\gamma dt \leq b^\gamma \left[\frac{1}{b-a} \left(\int_a^b u(t) t^\gamma dt \right)^2 + \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (u'(t))^2 t^\gamma dt \right]. \quad (5)$$

Теперь неравенство (3) вытекает отсюда для функций не знако-постоянных на отрезке $[a, b]$. Однако неравенство (5) справедливо и для функций не знако-постоянных на отрезке интегрирования.

Приведем доказательство (5), когда $1 < a$.

Пусть $\gamma = [\gamma] + \{\gamma\}$, $[\gamma] = m - 1$, $\{\gamma\} = \alpha$ и $m \geq 2$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b u^2(t) t^\gamma dt &= \int_a^b u^2(t) t^{[\gamma] + \{\gamma\}} dt = \int_a^b u^2(t) t^{m-1} t^\alpha dt \leq b^\alpha \int_a^b u^2(t) t^{m-1} dt = \\ &= \frac{b^\alpha}{|S_1^+(m)|} \int_{S_1^+(m)} dS \int_a^b u^2(t) t^{m-1} dt = \frac{b^\alpha}{|S_1^+(m)|} \int_{\{a < |x| < b\}^+} u^2(|x|) dx, \end{aligned}$$

где $|S_1^+(m)|$ — площадь части единичной сферы $S_1^+(m) = \{|x| = 1\}$, определенную неравенствами $x_1 > 0, \dots, x_m > 0$, в евклидовом пространстве R_m и, соответственно,

$$\{a < |x| < b\}^+ = \{a < |x| < b, x_1 > 0, \dots, x_m > 0\} = \Omega^+$$

— соответствующая часть шарового кольца.

Теперь можем воспользоваться известным неравенством Пуанкаре (1). Тогда, обозначив через ∇f градиент функции $f(|x|)$, $t = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots, x_n^2}$ и $\theta_i = x_i/t$, получим

$$\begin{aligned} \int_1^b u^2(t) t^\gamma dt &\leq \frac{C(\Omega^+) b^\alpha}{|S_1^+(m)|} \left(\left(\int_{\Omega^+} u(|x|) dx \right)^2 + \int_{\Omega^+} |\nabla u(|x|)|^2 dx \right) = \\ &= \frac{C(\Omega^+) b^\alpha}{|S_1^+(m)|} \left(\left(\int_{\Omega^+} u(|x|) dx \right)^2 + \int_{\Omega^+} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u(|x|)}{\partial x_i} \right)^2 dx \right) = \\ &= \frac{C(\Omega^+) b^\alpha}{|S_1^+(m)|} \left(\left(\int_{\Omega^+} u(|x|) dx \right)^2 + \int_{\Omega^+} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_i} \right)^2 dx \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\frac{\partial t}{\partial x_i} = \frac{x_i}{|x|} = \theta_i$, получим неравенство

$$\int_1^b u^2(t) t^\gamma dt \leq \frac{C(\Omega^+) b^\alpha}{|S_1(m)|} \left(\left(\int_{\Omega^+} u(|x|) dx \right)^2 + \int_{\Omega^+} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^m \theta_i^2 \right) dx \right).$$

Так как

$$(\theta_1 + \dots + \theta_m)^2 \leq m(\theta_1^2 + \dots + \theta_m^2) = m,$$

то

$$\int_a^b u^2(t) t^\gamma dt \leq \frac{m C(\Omega^+) b^\alpha}{|S_1^+(m)|} \left(\left(\int_{\Omega^+} u(|x|) dx \right)^2 + \int_{\Omega^+} \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t} \Big|_{t=|x|} \right)^2 dx \right).$$

Сферическое преобразование координат в правой части этого неравенства приводит нас к неравенству

$$\int_a^b u^2(t) t^\gamma dt \leq m C(\Omega^+) b^\alpha \left(\left(\int_a^b u(t) t^{m-1} dt \right)^2 + \int_a^b (u'(t))^2 t^{m-1} dt \right).$$

Остается учесть, что для всех α : $\alpha \geq 1$ и $t \geq 1$ выполнено неравенство $1 < t^\alpha$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_a^b u^2(t) t^\gamma dt &\leq m C b^\alpha \left(\left(\int_a^b u(t) t^{m-1} t^\alpha dt \right)^2 + \int_a^b (u'(t))^2 t^{m-1} t^\alpha dt \right) = \\ &= m C b^\alpha \left(\left(\int_a^b u(t) t^\gamma dt \right)^2 + \int_a^b (u'(t))^2 t^\gamma dt \right). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили неравенство (5) и в случае, когда подынтегральная функция не является знако-постоянной на отрезке интегрирования $[a, b]$, а $a \geq 1$.

Сформулируем полученный результат.

Теорема. Пусть $u \in W_2^{1,\gamma}(a, b)$, $\gamma = [\gamma] + \gamma$, $[\gamma] > 1$, $[a, b] \in \overline{\mathbb{R}_1^+}$. Если $[a, b] \in [1, \infty)$, то

$$\int_a^b u^2(t) t^\gamma dt \leq C(\gamma, a, b) \left(\left(\int_a^b u(t) t^\gamma dt \right)^2 + \int_a^b (u'(t))^2 t^\gamma dt \right).$$

Если $[a, b] \in (0, 1]$, то

$$\int_a^b u^2(t) t^\gamma dt \leq C(\gamma, a, b) \left(\left(\int_a^b |u(t)| t^\gamma dt \right)^2 + \int_a^b (u'(t))^2 t^\gamma dt \right). \quad (6)$$

Если $a < 1$, $b > 1$, то

$$\int_a^b u^2(t) t^\gamma dt \leq C(\gamma, a, b) \left(\left(\int_a^1 u(t) t^\gamma dt \right)^2 + \left(\int_1^b |u(t)| t^\gamma dt \right)^2 + \int_a^b (u'(t))^2 t^\gamma dt \right). \quad (7)$$

Первое неравенство уже доказано. Неравенство (6) вытекает из первого путем растяжения-сжатия координатной оси (т. е. надо ввести функцию $f(t) = u(\ell t)$, где ℓ таково, что числа $a_1 = \ell a$ и $b_1 = \ell b$ больше 1, для которой неравенство (5) уже справедливо и сделать соответствующие преобразования координат). Отметим так же, что из (5), (6) вытекает неравенство (7).

Литература

- [1] Киприянов И. А. Преобразование Фурье–Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // Тр. МИРАН. – 1967. – Т.89. – С. 130–213.
- [2] Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. – М.: Наука, 1997. – 199 с.
- [3] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – С. 408.
- [4] Масленникова В. Н. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Издательство РУДН, 1997. – С. 447.

ПРЕДЫСТОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ: ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТУР И КУБАТУР ОТ АНТИЧНОСТИ ДО СЕРЕДИНЫ XVII ВЕКА

Рукшин С. Е., Семенова К. К.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: vliuser@gmail.com

Rukshin S. E., Semenova K. K. The prehistory of integral calculus: computation the quadratures and cubatures from antiquity to the mid-17th century. The article is devoted to pre-history of the integral calculus and the calculation of areas and volumes. The problem under consideration is method for finding the quadrature and cubature from the time of Eudoxus and Archimedes to the mid-17th century.

Статья посвящена предыстории интегрального исчисления. Предметом рассмотрения являются различные методы нахождения площадей и объёмов тел со времен Евдокса и Архимеда до середины 17 столетия.

Предыстория интегрального исчисления восходит к античному периоду развития математики, когда инфинитезимальные методы применялись для вычисления площадей (квадратур), объёмов (кубатур) и центров тяжести. Впервые задачи такого рода были решены ещё математиками Древней Греции, когда не было ни общего понятия интеграла, ни единого алгоритма вычисления квадратур и кубатур. Попытки учёных античности, Среднего и Ближнего Востока в IX–XV веках, несмотря на некоторые продвижения, так и не привели к новым важным результатам. Лишь в XVI и XVII веках в связи с развитием

естественных наук перед математиками Европы встал ряд новых задач, которые привели к появлению общих приёмов интегрирования при решении задач геометрии и механики, сводившихся к вычислениям площадей и объёмов. Заключительным открытием этого периода стало установление взаимно обратной связи между операциями дифференцирования и интегрирования. Этот момент обычно и считают созданием современного математического анализа. Однако, у истоков анализа стояла именно фигура Архимеда, в работах которого не только появились методы, по сути сводившиеся к вычислению пределов интегральных сумм, но и связь задач на нахождение экстремальных значений и задач о касательных.

Итак, как же зарождалось современное интегрирование? Кто приложил усилия к открытию и разработке его основ? Что привело к возникновению и оформлению интеграла?

Истоки идеи. Ключевой фигурой в зарождении идей анализа был Евдокс, отрывки из биографии которого нам известны по трудам античного историка философии Диогена Лаэртца, согласно которому Евдокс, сын Эсхина, родился в Книде, на юго-западе Малой Азии. По «Хронологии» Аполлодора, известного греческого ученого 2 в. до н. э., «расцвет» Евдокса относится примерно к 386 году, откуда следует, что родился он около 400 года. Прожил Евдокс 53 года и скончался высокочтимым законодателем в своем родном городе Книде. Источники наших сведений о математическом творчестве Евдокса очень скудны. Собственные работы Евдокса до нас не дошли, и его научные достижения известны по вторичным источникам: основные результаты V, VI и XII книг «Начал» Евклида, по всей видимости, являются обработкой сочинений Евдокса. Прежде всего, Евдокс положил конец пифагорейскому кризису основ математики, вызванному открытием несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. Это противоречило основам пифагорейской философии (частью которой была математика!), согласно которым все законы мироздания описываются соотношениями натуральных чисел. Развивая достижения Архита и Теэтета в области теории пропорций, он построил общую теорию отношений, ставшую античным прообразом сечений Дедекинда, т. е. аксиоматическим определением понятия вещественного числа. Понятие величины по Евдоксу охватывало и целые числа, и непрерывные величины – отрезки, площади и объёмы. Оно вводилось с помощью аксиом, определяющих отношения равенства и неравенства.

На основе этой теории отношений Евдоксом и был создан «метод исчерпывания», явившийся первым вариантом учения о пределах. Такое название он получил в XVII веке. Этот метод применялся древними при доказательстве теорем, связанных с вычислением площадей, объёмов и других величин. В основе этого метода лежит следующее положение: если от какой-либо величины отнять половину или более, затем ту же операцию проделать с остатком, и так поступать дальше и дальше, то через конечное число действий можно прийти до такой величины, которая будет меньше любого наперед заданного числа. Это утверждение (или равносильное ему) мы сейчас называем аксиомой Архимеда.

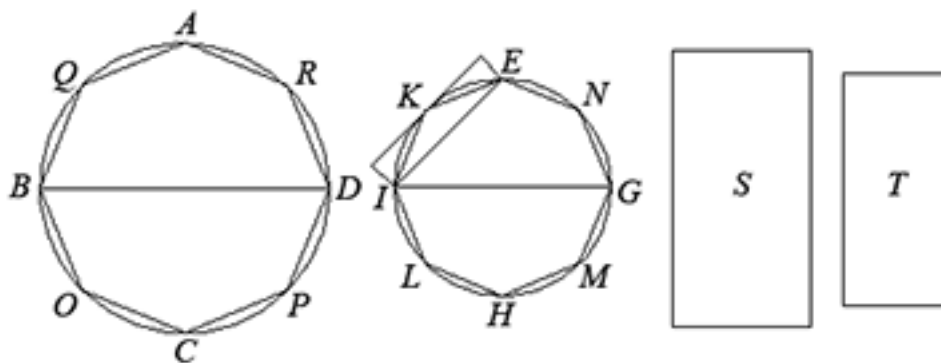
С помощью этого метода Евдокс доказал следующие теоремы:

- «Площади двух кругов относятся, как квадраты их диаметров»;
- «Объём пирамиды равен $1/3$ объёма призмы, имеющей с пирамидой те же основание и высоту»;

– «Объём конуса равен $1/3$ объёма цилиндра, имеющего с конусом те же основание и высоту».

Чтобы продемонстрировать метод исчерпывания, рассмотрим теорему, изложенную в «Началах» Евклида.

Предложение 2. Круги будут друг к другу как квадраты на диаметрах.



«Пусть будут круги $ABCD$, $EIHG$, диаметры же их [пусть будут] BD , IG ; я утверждаю, что будет как круг $ABCD$ к кругу $EIHG$, так и квадрат на BD к квадрату на IG .

Действительно, если не будет, что как круг $ABCD$ к $EIHG$, так и квадрат на BD к квадрату на IG , то будет, что как квадрат на BD к квадрату на IG , так и круг $ABCD$ или к меньшей круга $EIHG$ площади, или к большей. Пусть сперва будет меньшей T . И в круг $EIHG$ впишем квадрат $EIHG$; вот вписанный квадрат будет больше, чем половина круга $EIHG$, поскольку ведь если мы проведем через точки E , I , H , G касательные к кругу [прямые], то половиной описанного около круга квадрата будет квадрат $EIHG$, круг же будет меньше описываемого квадрата, так что вписанный квадрат $EIHG$ будет больше половины круга $EIHG$. Разделим обводы EI , IH , HG , GE пополам в точках K , L , M , N и соединим EK , KI , IL , LH , HM , MG , GN , NE ; значит, и каждый из треугольников EKI , ILH , HMG , GNE будет больше, чем половина [описанного] около него сегмента круга, поскольку, ведь если мы через точки K , L , M , N проведем касательные к кругу и дополним параллелограммы на прямых EI , IH , HG , GF , то каждый из треугольников EKI , ILH , HMG , GNE будет половиной [соответствующего] ему параллелограмма, но сегмент около него будет меньше параллелограмма, так что каждый из треугольников EKI , ILH , HMG , GNE будет больше, чем половина [описанного] около него сегмента круга. Вот, разделяя получающиеся [в этом процессе] дуги пополам, соединяя прямые и делая так все время, получим в остатке некоторые отрезочки круга, которые [взятые вместе] будут меньше того избытка, на который круг $EIHG$ превосходит площадь T . Действительно, было доказано в первой теореме десятой книги, что если, положивши две неравные величины, мы будем от большей отнимать больше чем половину и от остатка больше чем половину, и делать это постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше, чем данная меньшая величина. Пусть теперь так и останется, и пусть [построенные] на EK , KI , IL , LH , HM , MG , GN , NE сегменты круга $EIHG$, [вместе взятые], будут меньше того избытка, на который круг $EIHG$

превосходит площадь T . Значит, остаток – многоугольник $EKILHMG$ – будет больше площади T . Впишем и в круг $ABCD$ подобный многоугольнику $EKILHMG$ многоугольник $AQBOCPDR$; значит, будет, что как квадрат на BD к квадрату на IG , так круг $ABCD$ к площади T ; и значит, как круг $ABCD$ к площади T , так и многоугольник $AQBOCPDR$ к многоугольнику $EKILHMG$; значит, переставляя (предложение 16 книги V), как круг $ABCD$ к многоугольнику в нём, так и площадь T к многоугольнику $EKILHMG$. Круг же $ABCD$ больше многоугольника в нём; значит, и площадь T больше многоугольника $EKILHMG$. Но [она также] и меньше; это же невозможно. Значит, не будет, что как квадрат на BD к квадрату на IG , так и круг $ABCD$ к некоторой меньшей круга $EIHG$ площади. Подобно же вот докажем, что не [будет и] как квадрат на IG к квадрату на BD , так и круг $EIHG$ в некоторой меньшей круга $ABCD$ площади.

Действительно, если возможно, то пусть будет к большей [площади] S . Обращая, значит (предложение 7 книги V, следствие) [будет], что как квадрат на IG к квадрату на DB , так и площадь S к кругу $ABCD$. Но как площадь S к кругу $ABCD$, так и круг $EIHG$ к некоторой меньшей круга $ABCD$ площади (см. лемму); и значит, как квадрат на IG к квадрату на BD , так и круг $EIHG$ к некоторой меньшей круга $ABCD$ площади; это же, как было доказано, невозможно. Значит, не будет, что как квадрат на BD к квадрату на IG , так и круг $ABCD$ к некоторой большей круга $EIHG$ площади. Доказано же, что и не к меньшей; значит, будет, что как квадрат на BD к квадрату на IG , так и круг $ABCD$ к кругу $EIHG$.

Итак, круги будут друг к другу, как квадраты на диаметрах (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)».

В дошедших до нас греческих источниках метод исчерпывания применяется Евклидом в его «Началах», Архимедом – в ряде произведений, Паппом – в его «Математическом собрании». Рассматривается он и некоторыми комментаторами Евклида и Архимеда. Однако он еще не был полноценным методом математического анализа. Скорее, он был логической конструкцией, с помощью которой мы доказывали известные результаты, приводя к противоречию предположения, что площадь или объём больше либо меньше нужной нам величины. Метод исчерпывания Евдокса лег в основу интегральных методов Древней Греции.

Рождение идеи. Величайший ученый эпохи эллинизма Архимед родился около 287–286 г. до н. э. в Сиракузах и там же прожил почти всю свою жизнь. Хотя об Архимеде пишут почти все древние историки, наши сведения о нем весьма скудны и основаны на биографии римского полководца Марцелла в «Сравнительных жизнеописаниях» Плутарха. До нас дошли письма Архимеда к Досифею – пять математических трактатов, из которых каждый посвящен определенному кругу проблем: «Квадратура параболы», «О шаре и цилиндре», «О коноидах и сфероидах», «О спиралях». В них Архимед вплотную подошел к созданию интегрального исчисления. Если в первом письме при решении задачи об определении площади параболического сегмента, отсечённого прямой, Архимед ещё пользуется методом исчерпывания Евдокса, то в последующих письмах он разрабатывает совершенно новый мощный аппарат вычисления площадей и объёмов с помощью нахождения пределов интегральных сумм.

Как уже говорилось, Евдокс получал искомое значение площади (поверхности, объёма), приходя к противоречию с противными предположениями за счёт увеличения количества членов ряда величин, сумма которых имела своим пределом нужное нам значение. При этом общая схема метода еще не была сформулирована, и рассуждения должны были повторяться заново для каждого конкретного случая. В отличие от Евдокса, Архимед заключал подлежащую определению величину между двумя интегральными суммами, разность которых могла быть сделана меньше любой наперед заданной величины. Искомая величина находилась при этом как общий предел обеих сумм при безграничном увеличении числа слагаемых, что эквивалентно задаче о вычислении определенного интеграла, а введенные Архимедом верхние и нижние интегральные суммы мы теперь называем суммами Римана и Дарбу.

Этим же методом Архимед решал и более трудные задачи – определения длин дуг и площадей ряда кривых поверхностей. В каждой из рассмотренных задач речь шла об одном и том же математическом понятии – понятии определенного интеграла, хотя у Архимеда ещё не было средств, чтобы дать общее определение: не хватало понятия функции и удобных алгебраических обозначений.

Теперь в качестве примера рассмотрим решение задачи вычисления объёма эллипсоида вращения (сфероида).



Итак, представим эллипсоид вращения с полуосями $OB = b$ и $AO = a$, так что ABC – половина его. Разделим высоту OB на n равных частей и построим описанную v_n и вписанную u_n фигуры, состоящие из цилиндров высоты $h = OB/n$. Разность $v_n - u_n$ может быть сделана как угодно малой, т. е. $v_n - u_n < \varepsilon$.

Необходимо найти объёмы v_n и u_n . При отыскании их применим современную символику. Выберем систему координат так, как указано на рисунке.

В сечении эллипсоида плоскостью Oxy получим эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Объёмы цилиндров, образующих v_n , будут $\pi h x_0^2, \pi h x_1^2, \pi h x_2^2, \dots, \pi h x_{n-1}^2$. Из уравнения эллипса найдем величины $x_0^2, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n-1}^2$:

$$\begin{aligned} x_0^2 &= a^2(b^2 - 0 \cdot h^2)/b^2, \\ x_1^2 &= a^2(b^2 - h^2)/b^2, \\ x_2^2 &= a^2(b^2 - 2h^2)/b^2, \\ &\dots \\ x_{n-1}^2 &= a^2(b^2 - (n-1)h^2)/b^2. \end{aligned}$$

Получим объём описанного тела

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \pi h x_k^2 = \frac{\pi a^2 h}{b^2} \left[nb^2 - \sum_{k=0}^{n-1} (kh)^2 \right].$$

Далее Архимед применил геометрические оценки вида

$$\frac{n^3 h^2}{3} < \sum_{k=1}^n (kh)^2 h < \frac{(n+1)^3 h^2}{3},$$

данные им в сочинении «О спиралях»:

$$v_n > \pi a^2 h (nb^2 - n^3 h^2 / 3) / b^2 = \pi a^2 b (1 - 1/3) = 2\pi a^2 b / 3, v_n > 2\pi a^2 b / 3.$$

Аналогично можно доказать, что $u_n > 2\pi a^2 b / 3$.

В своих рассуждениях Архимед вместо объёмов элементарных цилиндров пользуется отношениями их к объёму цилиндра $AA'C'C$. Руководствуясь неравенством $v_n - u_n < \varepsilon$ и полученными оценками, Архимед доказывает, что объём половины сфероида равен удвоенному объёму конуса с теми же основанием и высотой, которые имеет сегмент, т. е. будет $2\pi a^2 b / 3$. Справедливость равенства $V = Z = 2\pi a^2 b / 3$ он доказывает от противного. Объём тела, полученного при вращении эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ вокруг оси Ox , будет $v = 4\pi a^2 b / 3$.

Стоит отметить, что во всех задачах Архимеда в первую очередь интересовали не методы, а результаты – например, что поверхность шара в четыре раза больше, чем площадь его большого круга, или что объём шара равен $2/3$ объёма описанного около него цилиндра. Последним результатом он особенно гордился. На его надгробной плите был изображен шар, вписанный в цилиндр.

Нельзя не упомянуть остроумный эвристический приём, который Архимед разработал для наведения на правильный результат при вычислении объёмов и площадей по методу исчерпывания. Ещё в первом письме Досифею («О квадратуре параболы») площадь параболического сегмента определяется не только методом исчерпывания Евдокса, но также «механическим» методом. Этот метод основан на механическом «правиле рычага» и на том предположении, что все фигуры состоят из параллельных отрезков, а все тела – из параллельных плоских сечений. Механические методы, используемые Архимедом, представляют собой обход интегрирования, когда бывает можно выразить одни интегралы через другие, уже известные.

С помощью этого метода он установил объёмы шара и шарового сегмента, эллипсоида вращения, параболоида вращения, нашёл центры тяжести различных фигур и тел; рассмотрел задачу о нахождении объёма «цилиндрического копыта» – тела, полученного при пересечении цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания, и «монастырского свода» – части пространства, отсекаемого двумя равными цилиндрами с перпендикулярными осями. Соответствующие интегралы до сих пор украшают многие задачки по математическому анализу.

Развитие. К сожалению, исследования Архимеда не получили существенного развития в древности, но некоторые новые результаты были получены Паппом Александрийским примерно в III–IV веке нашей эры. Он является учёным значительно меньшего масштаба, чем Архимед, и известен более

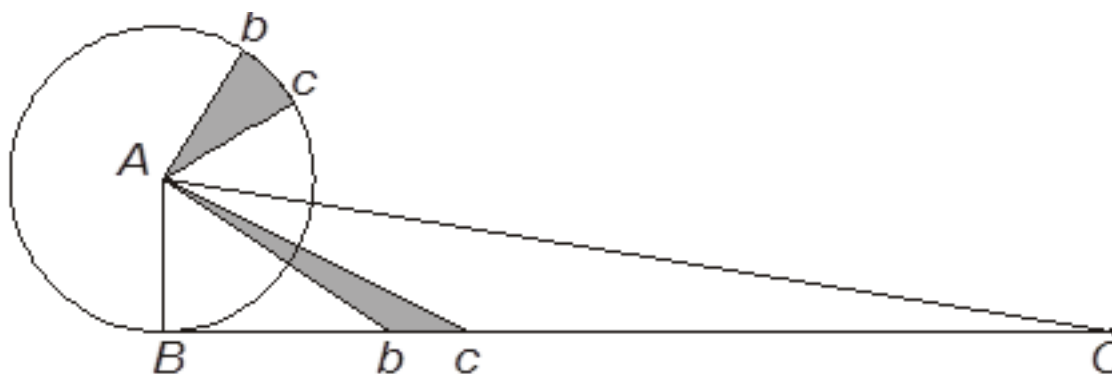
как комментатор, благодаря которому мы многое знаем о древнегреческой математике. Он нашел около пятнадцати известных ранее и новых квадратур и кубатур, ввёл спираль на сфере и нашел некоторые связанные с ней площади. Основным достижением Паппа считалась высказанная им теорема: «Объём тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг лежащей в её плоскости и не пересекающей фигуру оси, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описанной её центром тяжести».

С её помощью легко найти, скажем, объём тора, образованного вращением круга радиуса r вокруг оси, находящейся на расстоянии R от центра этого круга. Долгое время до открытия работ Паппа этот результат называли теоремой Гюльдена (1577–1643) по имени голландского математика, переоткрывшего её. Впрочем, существует мнение, что эта теорема принадлежит не Паппу, а восходит к Архимеду, однако большинство историков математики признают авторство Паппа. Цейтен писал, что «при наличии того геометрического представления, которое применяли уже во времена Архимеда к интегрированиям, необходимым для определения центров тяжести, теорема эта как бы носилась в воздухе, но Паппу всё же принадлежит заслуга общей её формулировки». Сейчас эту теорему часто называют теоремой Архимеда–Паппа–Гюльдена. После Паппа подробно комментировал Архимеда живший в VI в. Евтокий.

Об исследованиях квадратур и кубатур в странах Западной Европы до XVI столетия почти ничего неизвестно. Очень мало сведений о квадратурах и кубатурах и в странах арабской культуры, хотя известно, что эти вопросы там изучались. В IX веке арабские математики овладели методом исчерпывания по «Началам» Евклида, а позже – и по сочинениям Архимеда, и применили его для доказательства известных ранее результатов и нахождения новых. Наиболее значительными в истории интегрального исчисления были работы Сабита ибн Корры о квадратуре параболы и кубатуре параболоида. Сабит ибн Корра (863–901) в «Книге об измерении конического сечения, называемого параболой» видоизменил метод Архимеда и вычислил площадь параболического сегмента, разделив основание его на неравные части. В другой работе ибн Корра вычислял кубатуры тел, полученных вращением частей параболы вокруг ее диаметра. Квадратура параболы была выполнена с помощью метода исчерпывания внуком ибн Корры ибн Синаном (908–946). Последователь ибн Корры ибн ал-Хайсам (965–1039) вычислил объём так называемой «параболической сферы».

Новые шаги. Увы, до работ Ферма происходило лишь незначительное движение вперёд в развитии созданных Архимедом методов. В самом начале XVII века сначала на основе традиций Архимеда, а затем с некоторыми отклонениями от них начинается самостоятельная разработка европейскими учеными инфинитезимальных проблем. Первым из этих ученых стал И. Кеплер, который жил в период становления научного мировоззрения нового времени. Оно основывалось на наблюдении явлений природы, на эксперименте и на математической обработке получаемых при этом фактов. В основном характер нового мировоззрения определяли две науки – астрономия и механика. Прогресс этих наук был связан с разработкой такого математического метода, который давал бы возможность решать задачи измерения длин кривых, криволинейных площадей и объёмов тел в достаточно общем виде.

В работе «Новая стереометрия винных бочек» (1615 год) Кеплер принимает метод исчерпывания, которым пользовался изначально Архимед, но отбрасывает заключительный этап приведения к противоречию. В этой же работе для сравнения площадей и фигур или объёмов тел Кеплер использует и другой метод, основанный на разбиении этих фигур и тел на очень большое число очень маленьких частей, будущих «бесконечно малых». Так, согласно Кеплеру, площадь круга равна половине произведения радиуса на длину окружности потому, что круг можно считать составленным из очень большого числа очень маленьких секторов Abc , а каждый из этих секторов можно заменить равнобедренным треугольником с основанием, равным длине дуги сектора. Каждый такой треугольник, в свою очередь, равновелик соответствующему неравнобедренному треугольнику Abc (с теми же основанием и высотой), которые в сумме составляют большой прямоугольный треугольник ABC с катетами AB и BC , равными соответственно радиусу круга и длине окружности.



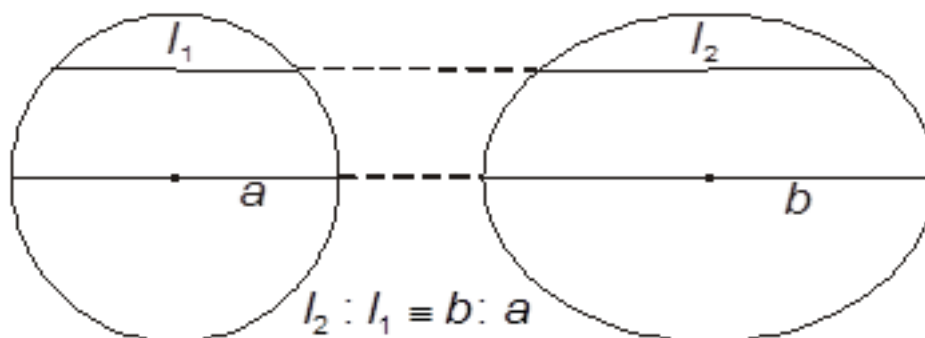
Критики так и не увидели новизны его методологии, составившей значительный шаг в становлении интегральных методов.

Следующим шагом стал метод неделимых, восходящий к механическому приему, применявшемуся ещё Архимедом. В XVII веке этот прием получил дальнейшее развитие в работах Б. Кавальери, Э. Торричелли и Ж. Роберваля. В основе метода неделимых лежат два предположения:

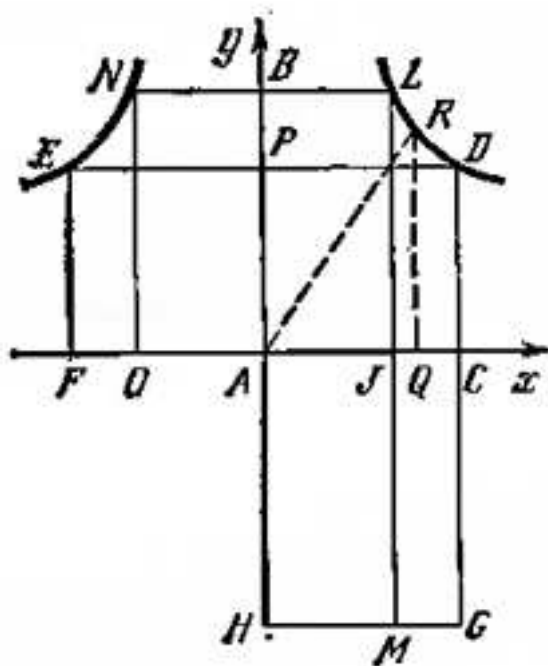
- фигуры и тела состоят из неделимых; фигуры состоят из неделимых параллельных отрезков или из других одномерных подобных друг другу частей, а тела состоят из параллельных неделимых кусков плоскостей или из других двумерных подобных друг другу частей;

- площади двух фигур (объёмы двух тел) относятся друг к другу как все неделимые одной фигуры (тела) ко всем неделимым другой фигуры (тела). В частности, если соответствующие неделимые находятся друг к другу в одном и том же отношении, то в этом же отношении находятся и площади фигур (объёмы тел). Рассмотрим характерный пример.

Площадь эллипса с полуосями a и b относится к площади круга радиуса a как b к a потому, что таково отношение их соответствующих «неделимых».



Этим методом Кавальери нашел объём пирамиды с квадратным основанием, а Роберваль вычислил квадратуру циклоиды. Торричелли существенно изменил метод неделимых: наряду с прямолинейными неделимыми он применял для плоских фигур дуги кривых, а для тел ввёл искривленные поверхности. Он вычислил площадь круга, привёл несколько способов квадратур сегментов параболы и определил объём бесконечно длинного гиперболического тела. Это был первый пример неограниченного тела конечного объёма, которое он назвал «острым гиперболоидом». Полученный результат изложен в мемуаре «Об остром гиперболическом теле» (1641), опубликованном в «Геометрических трудах» (1644). Приведем решение этой задачи.



При вращении фигуры, ограниченной гиперболой $xy = a^2$, ординатой CD и осью Ox , вокруг асимптоты Oy получается тело $FENBLDC$. В качестве неделимых Торричелли воспользовался кривыми поверхностями. Он представил, что тело составлено из цилиндрических поверхностей с образующими вида IL – ординатами гиперболы. Площадь каждой такой поверхности будет $2\pi xy = 2\pi a^2$. Торричелли поставил ей в соответствие равную площадь круга с диаметром MI в цилиндре $AHGC$, основание которого имеет диаметр $AH = a2\sqrt{2}$, а высота $AC = x_0$. Равенство площадей неделимых тела $FENBLDC$ и цилиндра $AHGC$ означает равенство объёмов тела и цилиндра.

Таким образом вычислен интеграл

$$\int_0^{x_0} 2\pi xy \, dx = \int_0^{x_0} 2\pi a^2 \, dx = 2\pi a^2 x_0.$$

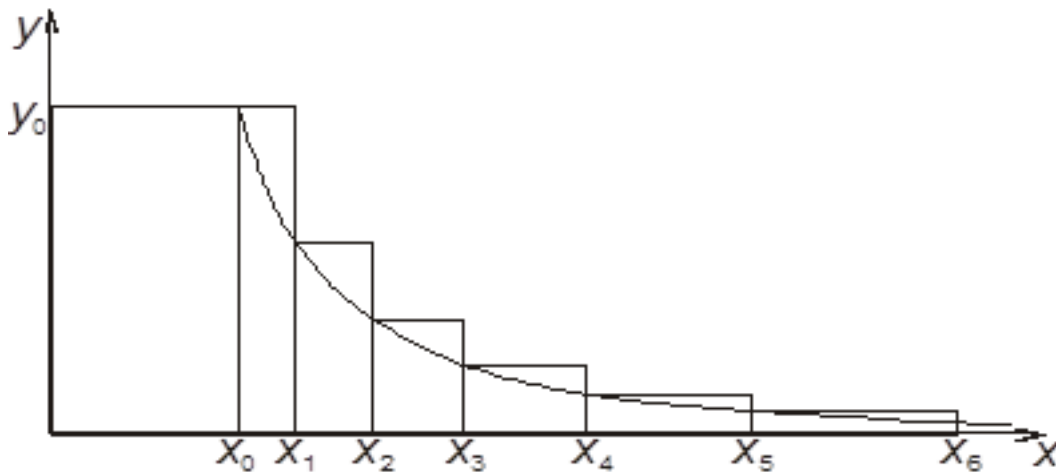
Заметим, что «острым гиперболическим телом» Торричелли назвал не тело *FENBLDC*, а тело *ENLD*. Его объём будет $\pi a^2 x_0$. По современным понятиям, вычислен несобственный интеграл

$$\pi \int_{y_0}^{\infty} x^2 \, dy = \pi a^4 \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \pi a^4 \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_{y_0}^{\infty} = \frac{\pi a^4}{y_0} = \frac{\pi a^4 x_0}{a^2} = \pi a^2 x_0.$$

Торричелли исследовал и общий случай гипербол $x^m y^n = k$ и установил, когда у тела вращения будет конечный объём, т. е. условия существования несобственного интеграла.

Заключительные штрихи в геометрический метод неделимых внес Валлис, который дополнил его неполной индукцией и методом пределов.

Следующим существенным шагом стал интегральный метод Ферма. Пьер Ферма родился в 1601 году в Бомон-де-Ломань, в мещанской семье. Окончил юридический факультет университета в Тулузе, а с 1631 года стал советником парламента в этом городе. Несмотря на то, что всё свое свободное время он посвящал математике, при жизни Ферма издано всего одно его сочинение – «О сравнении кривых линий с прямыми». Однако его достижения были известны из обширной переписки, а некоторые результаты Ферма помещали в свои книги его друзья. Ферма заметно продвинул технику составления интегральных сумм. Ему удалось перейти от квадратур кривых $y = x^n$, где n – целое положительное число, к квадратурам кривых $y = x^q$, где q – положительное или отрицательное рациональное число ($q \neq 1$).



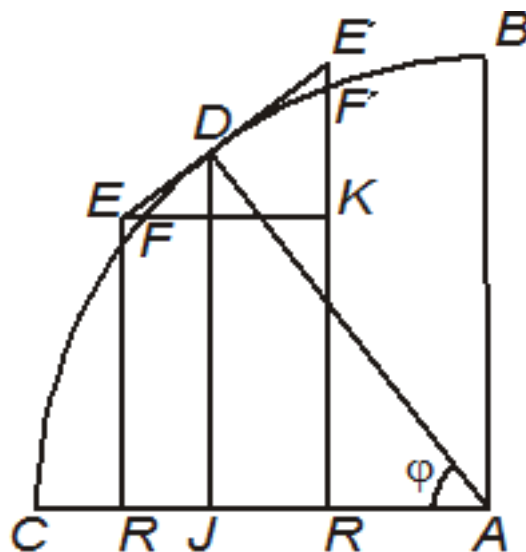
Так, например, при вычислении квадратуры кривой $y = x^{-2}$, Ферма выбирает точки $x_1, x_2, \dots$ разбиения промежутка интегрирования $[x_0; +\infty)$, следующими друг за другом в геометрической прогрессии:

$$x_1 = \lambda x_0, \quad x_2 = \lambda x_1 = \lambda^2 x_0, \quad \dots, \quad x_n = \lambda x_{n-1} = \lambda^n x_0, \quad \dots,$$

где λ – «чуть больше 1», и строит затем ступенчатую фигуру.

Ферма сумел изложить более общий метод, применимый не только к квадратурам и кубатурам, но и к спрямлению кривых. Его метод отличался от методов Кеплера и Кавальери тем, что Ферма составлял интегральные суммы, чего у Кеплера и Кавальери не было. Кроме того, в отличие от неделимых Кавальери, полосы, на которые разбивал фигуру Ферма, имели ненулевую ширину. При этом Ферма пользовался системой координат, которую он ввел ещё до Декарта! В отличие от Кеплера, который пользовался бесконечно малыми и решал геометрическую задачу геометрически, он сводил её к алгебраической, к сумме конечной или бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Наш следующий герой, Блез Паскаль, для нахождения площади подграфика синуса и косинуса, нахождения площади поверхности шара и некоторых других тел вращения применял метод характеристического треугольника, идея которого восходит к дифференциальным методам Архимеда. Блез Паскаль родился 19 июня 1623 года в городе Клермон-Ферран, в дворянской семье. В 1631 году его семья переселилась в Париж. Уже в детстве он отличался необыкновенными способностями, еще мальчиком Блез начал посещать вместе с отцом ученый собрания. В «Трактате о синусе четверти круга» Паскаль ввёл характеристический треугольник следующим образом.



Выберем на дуге BD произвольную точку D и проведём через неё касательную к дуге. Отложим от точки D равные дуги DF и DF' и через концы их проведем перпендикуляры ER и ER' к AC . Построим треугольник EKE' . Соединим точки A и D , а также проведем $DI \perp AC$. Треугольники ADI и EKE' подобны. Отсюда

$$\frac{AD}{DI} = \frac{E'E}{ER} = \frac{E'E}{RR'}.$$

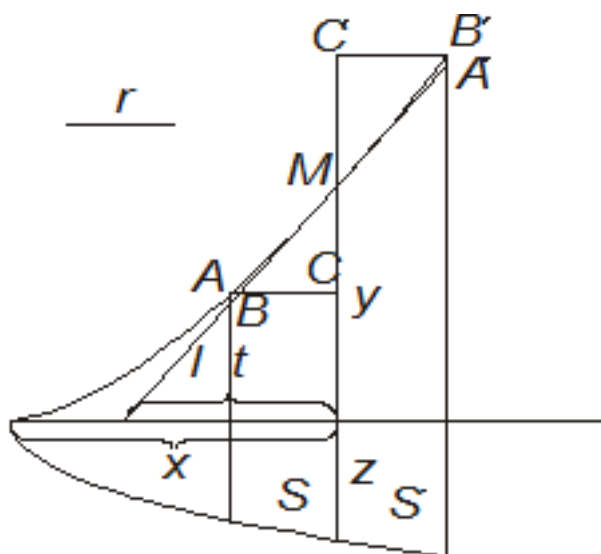
Основываясь на полученном равенстве, Паскаль доказал теорему: «Сумма синусов равна отрезку основания между крайними синусами, умноженному на радиус». Иначе говоря, Паскаль вычислил интеграл от $\sin \varphi d\varphi$ по промежутку от φ_1 до φ_2 . «Трактат о синусе четверти круга» оказал значительное влияние на Лейбница, который по совету Гюйгенса ознакомился с ним в

1673 г. Лейбниц заметил, что характеристический треугольник применим к любым кривым.

Основным открытием в инфинитезимальных методах до Ньютона и Лейбница следует считать установление взаимозависимости операций дифференцирования и интегрирования как связи между задачами на квадратуры и задачами на касательные. Эта связь в механической и геометрической форме также была обнаружена в работах Э. Торичелли, П. Менголи и Дж. Грегори. Наиболее существенным был вклад учителя Ньютона Исаака Барроу, родившегося в октябре 1630 г. в Лондоне. Мать Исаака умерла, когда ему было четыре года, и начальное воспитание и образование он получил в картезианском монастыре. Успехами он не блистал и обладал буйным характером. Его способности проявились лишь когда его в 15-летнем возрасте перевели в Кембридж и он поступил в Тринити-колледж. В качестве примера приведём теорему Барроу, устанавливающую связь между квадратурами подграфиков одних кривых с построением касательных к другим кривым.

Даны две кривые $y(x)$ и $z(x)$, связанные условием $y(x) \cdot r = S(x)$, где $S(x)$ – площадь подграфика кривой $z(x)$. Тогда подкасательная t касательной l к кривой $y(x)$ в точке $M(x; y)$ определяется из условия:

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{t}$$



«Открытия Барроу заключали цепь предварительных работ, предшествовавших открытию исчисления бесконечно малых. Содержавшееся в его работах возобновление и развитие механических идей Галилея и Торричелли, его сопоставление взаимно обратных инфинитезимальных задач, несомненно, оказали столь же направляющее влияние на Ньютона, как метод неделимых Кавальери и вычисления с бесконечно малыми величинами Паскаля на Лейбница» [Вилейтнер. История математики от Декарта до середины XIX столетия, с. 115–116]. Именно ему было суждено завершить разработку круга идей, заложенных Архимедом в фундамент будущего математического анализа.

О ПОВЕДЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ПРИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЗАПИСИ НА СТАНДАРТНОМ ОТРЕЗКЕ

Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”

Москва

e-mail: ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B. On the behavior of coefficients of Bernstein polynomials. Questions on the coefficients of Bernstein polynomials are discussed.

Обсуждаются вопросы, связанные с поведением коэффициентов полиномов Бернштейна при явной алгебраической записи на стандартном отрезке.

Теория полиномов Бернштейна изложена в [1], [2]. Обычно рассматривают стандартный отрезок $[0, 1]$. Для функции $f \in C[0, 1]$ полиномы Бернштейна вводят формулой

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Поскольку $B_n(f, x)$ есть полином степени $\leq n$, и $B_n(f, 0) = f(0)$, то

$$B_n(f, x) = f(0) + \sum_{m=1}^n a_{n,m}(f) x^m, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Вопрос о поведении коэффициентов $a_{n,m}(f)$ редко обсуждается в литературе. До недавнего времени было, как кажется, одно исключение — ранняя работа Вигерта [3]. В этой незаурядной и чуть ли не первой работе, целиком посвящённой изучению полиномов (1), сделан, среди прочего, ряд интересных наблюдений, связанных с формулой (2) и теорией конечных разностей. Вигерт показал, что

$$a_{n,m}(f) = C_n^m \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j f\left(\frac{m-j}{n}\right) = C_n^m \Delta_{1/n}^m f(0), \quad (3)$$

где

$$\Delta_{1/n}^m f(0) = \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j f\left(\frac{m-j}{n}\right) \quad (4)$$

— конечная разность порядка m с шагом $1/n$, взятая в точке $x = 0$ (см. также [1, с. 12–13], [2, с. 47]). Для функции $f \in C^m[0, m/n]$ имеем представление

$$a_{n,m}(f) = C_n^m \Delta_{1/n}^m f(0) = \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{n^m} \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}, \quad (5)$$

где ξ — точка из $[0, m/n]$, зависящая от f , n , m .

Учитывая, что разность (4) вычисляется на соответствующем отрезке $[0, m/n]$, устанавливаем *принцип локализации*: если $f, g \in C[0, 1]$ и $f(x) \equiv g(x)$ при $0 \leq x \leq \delta$ с некоторым $\delta \in (0, 1)$, то

$$a_{n,m}(f) = a_{n,m}(g), \quad n \geq \lceil 1/\delta \rceil, \quad m = 1, \dots, \lfloor \delta n \rfloor.$$

Здесь $\lfloor h \rfloor$, $\lceil h \rceil$ — *пол* и *потолок* числа $h \in \mathbb{R}$ по терминологии [4, гл. 3]. Так, если $f(x) = cx + d$ при $0 \leq x \leq 1/2$, то

$$B_n(f, x) = cx + d + \sum_{m=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^n a_{n,m}(f) x^m, \quad n \geq 2.$$

Смысл принципа локализации понятен: если зафиксировать степень x^m , то при больших номерах $n \in \mathbb{N}$ значения коэффициентов $a_{n,m}(f)$ определяются поведением $f(x)$ лишь в малой окрестности точки $x = 0$. Более того, из (5) следуют предельные соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,m}(f) = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

верные для любой функции $f \in C[0, 1]$, бесконечно дифференцируемой в окрестности нуля. На практике это выглядит следующим образом. При увеличении номера n полиномы (2) формируют в своей начальной части полином, приближающийся к тейлоровскому, и такая часть постепенно расширяется. Но старшие коэффициенты полиномов (2) могут ещё сильно отличаться от тейлоровских — на них существенное влияние оказывают значения $f(x)$ в удаленных от нуля точках x . В итоге вся совокупность коэффициентов ведет себя достаточно сложно. Точнее говоря, бывает всякое. Обсудим некоторые характерные возможности, начав с “регулярного” случая.

Если функция $f(z)$ аналитична в окрестности отрезка $[0, 1]$, то верно представление

$$C_n^m \Delta_{1/n}^m f(0) = \frac{(1 - \frac{1}{n}) \dots (1 - \frac{m-1}{n})}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z(z - \frac{1}{n}) \dots (z - \frac{m}{n})}, \quad (7)$$

где Γ — контур в области аналитичности, охватывающий отрезок $[0, 1]$. При $m = 1$ множитель перед интегралом надо заменить просто на $1/(2\pi i)$. Как заметил Вигерт [3], представление (7) обеспечивает оценки

$$|a_{n,m}(f)| \leq \frac{ML}{2\pi} \left(\frac{1}{d}\right)^{m+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m = 1, \dots, n, \quad (8)$$

равномерные по номеру n . Здесь M — максимум величины $|f(z)|$ на контуре Γ , через L обозначена длина контура Γ , а через d — расстояние от Γ до $[0, 1]$. Оценки (8) легко получить также, применив теорему Коши к представлению (5).

Если $f(z)$ — целая функция, то из (8) следует возможность для любого $q \in (0, 1)$ подобрать значение $D = D(f, q) > 0$ так, чтобы

$$|a_{n,m}(f)| \leq Dq^m, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Последнее означает, что $a_{n,m}(f) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно по номеру $n \geq m$, т. е. при очень больших степенях в алгебраической записи (2) будут заведомо очень малые коэффициенты.

Покажем, что общий принцип (9) допускает уточнения в некоторых естественных классах целых функций, если прямо использовать представление (5) и подходящие неравенства для производных. Допустим, например, что $f(z)$ из класса Бернштейна целых функций экспоненциального типа $\leq \sigma$, ограниченных на вещественной оси. Тогда для производных действуют оценки

$$|f^{(m)}(x)| \leq M\sigma^m, \quad x \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad M \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Применим эти оценки в (5) и получим

$$|a_{n,m}(f)| \leq M \frac{\sigma^m}{m!}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Точность соотношений (10) демонстрирует пример $f(z) = Me^{i\sigma z}$. Как легко проверить, в этом случае

$$B_n(f, x) = M \sum_{m=0}^n C_n^m (e^{i\sigma/n} - 1)^m x^m, \quad n \in \mathbb{N},$$

и, значит, при $n \rightarrow \infty$ имеем соотношения

$$|a_{n,m}(f)| \sim M \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!} \frac{\sigma^m}{n^m} \rightarrow M \frac{\sigma^m}{m!}, \quad m \in \mathbb{N},$$

что полностью подтверждает (10) (и согласуется с (6)).

Интересно рассмотреть более общий класс целых функций, подчинённых условию

$$|f(z)| \leq A e^{\sigma|z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (11)$$

с фиксированными $A > 0$, $\sigma > 0$. В этом классе для производных можно установить оценки

$$\frac{|f^{(m)}(z)|}{m!} \leq A \left(\frac{\sigma e}{m} \right)^m e^{\sigma|z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Оценки (12) неулучшаемы в том смысле, что функции (простые полиномы!)

$$f_m(z) = A \left(\frac{\sigma e}{m} \right)^m z^m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

удовлетворяют (11) при всех $m \in \mathbb{N}$, а при $z = 0$ дают равенства

$$\frac{|f_m^{(m)}(0)|}{m!} = A \left(\frac{\sigma e}{m} \right)^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Применим оценки (12) в (5) и получим

$$|a_{n,m}(f)| \leq A e^{m\sigma/n} \left(\frac{\sigma e}{m} \right)^m, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Точность (14) при $n \rightarrow \infty$ подтверждается теми же примерами (13). Несколько огрубляя ситуацию, имеем оценки

$$|a_{n,m}(f)| \leq A e^\sigma \left(\frac{\sigma e}{m} \right)^m, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m = 1, \dots, n, \quad (15)$$

равномерные по номеру $n \in \mathbb{N}$.

Установленные соотношения (10), (15) показывают, что для регулярных гладких функций с “хорошим” поведением на комплексной плоскости гарантирована малость всех коэффициентов полиномов (2) при достаточно больших степенях x^m , и граница малости чётко обозначена.

Принципиально иной оказывается ситуация для функций, гладкость которых нарушается, даже если это происходит на некотором удалении от начала координат. Тогда при возрастании номера $n \in \mathbb{N}$ в явной записи полиномов Бернштейна могут появляться огромные коэффициенты с экспоненциальным ростом при $n \rightarrow \infty$.

Этот неожиданный эффект обнаружен в [5] (см. также [6]) при систематическом исследовании полиномов Бернштейна для симметричного модуля

$$f(x) = |2x - 1|, \quad x \in [0, 1]. \quad (16)$$

Один из результатов [5] можно сформулировать так. Для произвольной функции $f \in C[0, 1]$ возьмём полиномы Бернштейна в записи (2) и обозначим

$$\mu_n(f) = \max_{1 \leq m \leq n} |a_{n,m}(f)|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

Тогда для функции (16) имеем соотношение

$$\mu_n(f) \sim \frac{8\chi_n}{9\pi} \frac{2^{3n/2}}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (18)$$

где $\chi_n = \sqrt{8}$, если n — чётное, и $\chi_n = 1$, если n — нечётное. Множитель χ_n возникает из-за свойства склеивания $B_{2m}(f, x) = B_{2m+1}(f, x)$, характерного для функции (16) (см. [5], [6]). Поэтому экспоненциальная асимптотика (18) по-разному сочетается с номером n в “чётном” и “нечётном” случаях.

Более точные оценки, данные в [5], показывают, например, что полином $B_{100}(f, x)$ для функции (16) содержит в своем составе максимальный коэффициент $a_{100,75}(f)$, выраженный натуральным числом из сорока двух цифр (в десятичной записи). Это подтверждает и компьютерный расчёт, согласно которому

$$a_{100,75}(f) = 114\,898\,522\,957\,882\,451\,791\,573\,202\,118\,965\,202\,115\,392.$$

Соседние коэффициенты меньше, но не намного. Ясно, что симметричный модуль — всего лишь простейший пример, и ситуация с огромными коэффициентами должна быть типичной для негладких функций.

Обратим внимание на основание $q \equiv 2^{3/2} = \sqrt{8} \approx 2.8284$ показательной функции в асимптотике (18). Возникает естественный вопрос: можно ли увеличить это значение, заменив модуль (16) на другую функцию родственного характера?

Недавно нам удалось установить следующий результат, который показывает, что для липшицевых функций рост коэффициентов $a_{n,m}(f)$, если и может превышать (18), то не слишком сильно.

Теорема. Пусть функция $f \in C[0, 1]$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in [0, 1], \quad (19)$$

с константой $L > 0$. Тогда величина $\mu_n(f)$, определенная по правилу (17) для коэффициентов $a_{n,m}(f)$ из формулы (3), удовлетворяет оценке

$$\mu_n(f) \leq \frac{3L}{4\sqrt{\pi}} \frac{3^n}{n\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (20)$$

При этом для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся функция $f_n(x)$, подчинённая ограничению (19), такая, что

$$\mu_n(f_n) \geq \frac{2\sqrt{2}}{9} L \frac{3^n}{n\sqrt{n}} \blacksquare \quad (21)$$

Приведем схему доказательства. Формулу Вигерта (3) следует преобразовать к виду

$$a_{n,m}(f) = C_n^m \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j C_{m-1}^j \left[f\left(\frac{m-j}{n}\right) - f\left(\frac{m-1-j}{n}\right) \right],$$

верному при $n \in \mathbb{N}$, $m = 1, \dots, n$. Оценивая затем $|a_{n,m}(f)|$, имеем соотношения

$$\mu_n(f) = \max_{1 \leq m \leq n} |a_{n,m}(f)| \leq \frac{L}{n} \eta_n, \quad \eta_n \equiv \max_{1 \leq m \leq n} (2^{m-1} C_n^m), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Для величин η_n нам удалось установить неравенства

$$\frac{2\sqrt{2}}{9} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \leq \eta_n \leq \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \frac{3^n}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

Верхнее из них, применённое в (22), дает оценку (20). Для проверки (21) зафиксируем номер $n \in \mathbb{N}$ и выберем значение $p = p(n) \in \{1, \dots, n\}$ так, чтобы

$$2^{p-1} C_n^p = \eta_n \equiv \max_{1 \leq m \leq n} (2^{m-1} C_n^m) \geq \frac{2\sqrt{2}}{9} \frac{3^n}{\sqrt{n}},$$

согласно нижнему неравенству (23). Возьмём теперь кусочно линейную функцию $f_n(x)$, график которой — ломаная с вершинами

$$f_n\left(\frac{k}{p}\right) = \frac{(-1)^k L}{2p}, \quad k = 0, 1, \dots, p.$$

Непосредственно проверяется условие Липшица (19), а затем с помощью (3) находятся значения

$$|a_{n,p}(f_n)| = \frac{L}{p} 2^{p-1} C_n^p \geq \frac{2\sqrt{2} L}{9} \frac{3^n}{n\sqrt{n}}.$$

Поскольку $\mu_n(f_n) \geq |a_{n,p}(f_n)|$, то для выбранного $n \in \mathbb{N}$ получаем заявленное соотношение (21).

В связи с теоремой отметим также пример $f(x) = |3x - 1|$. Наши расчёты показывают, что здесь

$$a_{3m,2m}(f) = \frac{(-1)^{m-1}}{m} 2 C_{3m}^{2m} C_{2m-2}^{m-1}, \quad m \in \mathbb{N},$$

с асимптотикой

$$|a_{3m,2m}(f)| \sim \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \frac{3^{3m}}{m^2}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$\mu_n(f) \geq \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{3^n}{n^2} \quad (24)$$

при достаточно больших $n = 3m$ (с учётом того, что $1/4 > 2/9$). Рост (24) подтверждает сущностный характер оценки (20) и, конечно, несколько превышает рост, гарантированный асимптотикой (18) для симметричного модуля (16). Возникает интересная задача: строго показать, что именно модуль, смещённый в точку $1/3$, даст наибольшие коэффициенты при $n \rightarrow \infty$ для полиномов Бернштейна $B_n(f, x)$ в записи (2) среди всех прочих модулей $f(x) = |qx - p|$ с рациональными изломами $p/q \in (0, 1)$. Особо подчеркнём, что при “малых” n действуют свои закономерности, и, например,

$$\mu_{28}(f_1) = 13\,404\,319\,500 < \mu_{28}(f_2) = 30\,708\,077\,400$$

для функций $f_1(x) = |3x - 1|$ и $f_2(x) = |4x - 1|$.

Затронутая тема представляет и практический интерес. Проблема огромных коэффициентов влечет, в частности, *эффект неустойчивости*, характерный для полиномов Бернштейна в записи (2) (см. [6]); некоторые возникающие здесь аспекты обсуждаются в [7] с точки зрения компьютерной математики. Отметим, наконец, что изучение явной алгебраической записи полиномов Бернштейна тесно привязано к выбранному отрезку. Так, замена стандартного отрезка $[0, 1]$ на симметричный отрезок $[-1, 1]$ порождает другие закономерности, и картина качественно меняется.

Авторы признательны участникам семинара С. А. Теляковского за обсуждение и поддержку наших исследований, в частности, А. Ю. Попову за совет использовать полиномы (13) при проверке точности оценок (12) и С. В. Конягину за замечание об оценке конечных разностей, подсказавшее идею доказательства сформулированной теоремы. Особая благодарность Д. Г. Цветкович за ряд компьютерных расчётов, подтвердивших наши теоретические положения.

Литература

- [1] Lorentz G. G. Bernstein polynomials. – Toronto, 1953. – x+130 p.
- [2] Виденский В. С. Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. – Л.: ЛГПИ, 1990. – 64 с.
- [3] Wigert S. Réflexions sur le polynome d'approximation

$$\sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \varphi\left(\frac{v}{n}\right) x^v (1-x)^{n-v}$$

// Ark. för matematik, astronomi och fysik. 1927. Bd. 20. Häfte 2. – S. 1–15.

- [4] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основания информатики. 2-е изд., испр. – М.: Мир; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 703 с. (Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O. Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science.)
- [5] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник ЧелГУ. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15. № 26. – С. 6–40.
- [6] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. – С. 126–175.
- [7] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Полиномы Бернштейна и компьютерная математика // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 15. Материалы XV Международной научной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2014. – С. 205–208.

УДК 517.518.82

ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ПРИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЗАПИСИ НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”
Московский педагогический государственный университет
Москва
e-mail: ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, petrosova05@mail.ru

Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Petrosova M. A. The explicit algebraic representation of Bernstein polynomials on the symmetric interval. The explicit form for the coefficients of Bernstein polynomials on the symmetric interval is given.

Приведены явные выражения для коэффициентов полиномов Бернштейна на симметричном отрезке $[-1, 1]$.

Классическая теория полиномов Бернштейна на стандартном отрезке $[0, 1]$ подробно изложена в [1], [2]. Выражения для коэффициентов полиномов Бернштейна при явной алгебраической записи на $[0, 1]$ получены в работе Вигерта [3]. Там же отмечены некоторые факты, связанные с упомянутыми коэффициентами. Интерес к проблематике возродился в связи с недавними исследованиями [4]–[7].

При переходе к другому отрезку традиционное определение полиномов Бернштейна через первичные полиномы выглядит привычным образом, но явная алгебраическая запись по степеням независимой переменной может претерпеть серьёзные изменения. Особый интерес представляет случай симметричного отрезка $[-1, 1]$, который будет рассмотрен в настоящем сообщении.

На $[-1, 1]$ полиномы Бернштейна для функции $f \in C[-1, 1]$ определяются формулой

$$B_n(f, x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Некоторые факты, связанные с полиномами (1), отмечены в [8]. Обсудим более подробно вопрос об алгебраической записи полиномов $B_n(f, x)$ по степеням x . Справедлив следующий результат.

Теорема 1. Для полиномов (1) верно представление

$$B_n(f, x) = \sum_{m=0}^n a_{n,m}(f) x^m, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

где

$$a_{n,m}(f) = \frac{1}{2^n} C_n^m \sum_{k=0}^n D_{n,m}^k f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) \quad (3)$$

со значениями

$$D_{n,m}^k = \sum_j (-1)^j C_m^j C_{n-m}^{k-j} \blacksquare \quad (4)$$

Доказательство теоремы основано на технических подсчётах при раскрытии биномов, входящих в определение полиномов (1). При этом полезно перейти к эквивалентной записи

$$B_n(f, x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) C_n^k (1-x)^k (1+x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

с отсчётом точек от правой, а не от левой границы отрезка $[-1, 1]$. Такой порядок позволяет получить более удобные выражения для коэффициентов $D_{n,m}^k$. Индекс j в формуле (4) подчинён естественным ограничениям:

$$j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq j \leq m, \quad 0 \leq k - j \leq n - m.$$

Можно также просто принять в (4) стандартное правило

$$C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!} = 0, \quad q \in \{\dots, -2, -1\} \cup \{p+1, p+2, \dots\},$$

верное при неотрицательных целых p .

Формулы (3), (4) содержат богатую комбинаторную информацию. Так, систематически вычисляя коэффициенты $D_{n,m}^k$ с фиксированным m и переменными n, k , можно заметить, что возникают своеобразные “трапеции Паскаля”, построенные по определенным начальным и боковым условиям. При $m = 0$ получаем в точности биномиальные коэффициенты:

$$D_{n,0}^k = C_n^k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

При остальных m справедлив следующий результат.

Теорема 2. При каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ числа $D_{n,m}^k$, определённые формулой (4), подчинены соотношениям

$$D_{m,m}^k = (-1)^k C_m^k, \quad k \in \{0, 1, \dots, m\}, \quad (5)$$

$$D_{n,m}^0 = 1, \quad D_{n,m}^n = (-1)^m, \quad n \in \{m, m+1, \dots\}, \quad (6)$$

$$D_{n,m}^{k-1} + D_{n,m}^k = D_{n+1,m}^k, \quad n \in \{m, m+1, \dots\}, \quad k \in \{1, \dots, n\} \quad \blacksquare \quad (7)$$

Проверка соотношений (5)–(7) проходит по определению (4) с учётом стандартных свойств биномиальных коэффициентов. Соотношения (5), (6) суть начальное и краевые условия, определяющие соответствующую “трапецию Паскаля”. Соотношение (7) естественно называть *правилом Паскаля*, действующим внутри трапеции при переходе от строки к строке.

Например, при $m = 2$ для чисел $D_{n,2}^k$, $n = 2, 3, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$, получаем трапецию

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & & 1 & & -2 & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & -1 & & -1 & & 1 & \\ & & & & & & 1 & & 0 & & -2 & & 0 & & 1 & \\ & & & & & & & 1 & & 1 & & -2 & & -2 & & 1 & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & & 2 & & -1 & & -4 & & -1 & & 2 & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 & & 3 & & 1 & & -5 & & -5 & & 1 & & 3 & & 1 & \\ 1 & \end{array}$$

и так далее. Отсюда легко находить выражения для коэффициентов $a_{n,2}(f)$ в полиномах (2) при степени x^2 . Так,

$$a_{2,2}(f) = \frac{1}{4}(f(1) - 2f(0) + f(-1)),$$

$$a_{3,2}(f) = \frac{3}{8} \left(f(1) - f\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(-\frac{1}{3}\right) + f(-1) \right),$$

$$a_{4,2}(f) = \frac{6}{16}(f(1) - 2f(0) + f(-1)),$$

$$a_{5,2}(f) = \frac{10}{32} \left(f(1) + f\left(\frac{3}{5}\right) - 2f\left(\frac{1}{5}\right) - 2f\left(-\frac{1}{5}\right) + f\left(-\frac{3}{5}\right) + f(-1) \right),$$

$$a_{6,2}(f) = \frac{15}{64} \left(f(1) + 2f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right) - 4f(0) - f\left(-\frac{1}{3}\right) + 2f\left(-\frac{2}{3}\right) + f(-1) \right)$$

и так далее. Хорошо видно принципиальное отличие от случая стандартного отрезка $[0, 1]$. Коэффициенты $a_{n,m}(f)$ на $[-1, 1]$ обладают “нелокальным” характером: их вычисление “размазывается” по всему отрезку. Так, значения $f(1)$ и $f(-1)$ входят в запись каждого коэффициента, и изменение функции f на любой из границ (т. е. на большом удалении от точки $x = 0$) приводит к мгновенному изменению всех коэффициентов $a_{n,m}(f)$.

На наш взгляд, дальнейший анализ формул, приведенных в теоремах 1, 2, представляет несомненный интерес. Было бы полезно развить соответствующую теорию и сопоставить результаты с результатами работ [3]–[7] для стандартного отрезка $[0, 1]$.

Литература

- [1] Lorentz G. G. Bernstein polynomials. – Toronto, 1953. – x+130 p.
- [2] Виденский В. С. Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. – Л.: ЛГПИ, 1990. – 64 с.
- [3] Wigert S. Réflexions sur le polynome d’approximation

$$\sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \varphi\left(\frac{v}{n}\right) x^v (1-x)^{n-v}$$

// Ark. för matematik, astronomi och fysik. 1927. Bd. 20. Häfte 2. – S. 1–15.

- [4] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник ЧелГУ. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15. № 26. – С. 6–40.
- [5] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО–А, 2014. – С. 126–175.
- [6] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Полиномы Бернштейна и компьютерная математика // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 15. Материалы XV Международной научной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2014. – С. 205–208.
- [7] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке // См. настоящий сборник, с. 115.
- [8] Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Случай симметричного отрезка в теории классических полиномов Бернштейна // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 15. Материалы XV Международной научной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2014. – С. 184–186.

ВЕСОВЫЕ ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ В-УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Шишкина Э. Л.

Воронежский государственный университет

Воронеж

e-mail: ilina_dico@mail.ru

Shishkina E. L. Weighted generalized functions and fundamental solution of the B-ultrahyperbolic equation. In this paper We obtain formulas for weight distributions corresponding quadratic forms with complex coefficients and the fundamental solution of the B-ultrahyperbolic equation.

В работе получены формулы для весовых обобщённых функций, отвечающие квадратичным формам с комплексными коэффициентами и фундаментальное решение В-ультрагиперболического уравнения.

Пусть $\mathbb{R}_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_n^+ = \{x \in \mathbb{R}_n, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$, $|x| = r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел γ_i , $i = 1, \dots, n$, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$.

Многомерный оператор Пуассона имеет вид (см. [1], стр. 24)

$$\mathcal{P}_x^\gamma f(x) = C(\gamma) \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f(x_1 \cos \alpha_1, \dots, x_n \cos \alpha_n) \prod_{j=1}^n \sin^{\gamma_j-1} \alpha_j d\alpha_j. \quad (1)$$

Пусть K_{ev} — множество финитных бесконечно дифференцируемая функций $\varphi(x)$, $x \in \overline{\mathbb{R}}_n^+$ таких что $\varphi_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Следуя [2], стр. 332, рассмотрим пространство всех квадратичных форм с комплексными коэффициентами g_{rs} , $r = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, n$ вида $\mathcal{A}(x) = \sum_{r,s=1}^n g_{rs} x_r x_s = A_1 + iA_2$, где A_1, A_2 — квадратичные формы с вещественными коэффициентами. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Определим однозначную функцию

$$\mathcal{A}^\lambda(x) = e^{\lambda(\ln |A| + i \arg A(x))}, \quad 0 < \arg A(x) < \pi. \quad (2)$$

Функция (2) является аналитической функцией от λ . Сопоставим функции $\mathcal{A}^\lambda(x)$ обобщённую весовую функцию

$$(\mathcal{A}^\lambda, \varphi)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_n^+} \mathcal{A}^\lambda(x) \varphi(x) x^\gamma dx, \quad x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}, \quad \varphi(x) \in K_{ev}.$$

В силу единственности аналитического продолжения обобщённая весовая функция $\mathcal{A}^\lambda$ однозначно определяется своими значениями на множестве квадратичных форм вида $\mathcal{A} = iA_2$, где $A_2 = \sum_{r,s=1}^n a_{rs} x_r x_s$ — положительно определённая

квадратичная форма. Поэтому достаточно рассмотреть обобщённую функцию $(\mathcal{A}^\lambda, \varphi)_\gamma = e^{i\pi\lambda/2} \int_{\mathbb{R}_n^+} A_2^\lambda(x) \varphi(x) x^\gamma dx$.

Для того чтобы привести квадратичную форму A_2 к каноническому виду применим к обобщённой весовой функции $\mathcal{A}^\lambda$ оператор Пуассона (1) и перейдём к переменным $z_{2i-1} = x_i \sin \varphi_i$, $z_{2i} = x_i \cos \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$, получим

$$\mathcal{P}^\gamma(\mathcal{A}^\lambda, \varphi)_\gamma = e^{i\pi\lambda/2} \int_{\mathbb{R}_{2n}^+} A_2^\lambda(z'') \varphi(z'') (z')^{\gamma-1} dz, \quad (3)$$

здесь $z' = (z_1, z_3, \dots, z_{2n-1})$, $z'' = (z_2, z_4, \dots, z_{2n})$, $(z')^{\gamma-1} = \prod_{i=1}^n z_{2i-1}^{\gamma_i-1}$. В (3)

произведем замену $z_{2r} = \sum_{s=1}^n \tau_{rs} y_{2s}$, $r, s = 1, \dots, n$, приводящую A_2 к каноническому виду $R = z_2^2 + z_4^2 + \dots + z_{2n}^2$, Якобиан этой замены равен $\sqrt{(-i)^n |g|}$. Положив $\tilde{\varphi}(z'') = \varphi \left(\sum_{s=1}^n \tau_{2s} z_{2s}, \dots, \sum_{s=1}^n \tau_{2n} z_{2s} \right)$, будем иметь

$$\mathcal{P}^\gamma(\mathcal{A}^\lambda, \varphi)_\gamma = \frac{e^{i\pi\lambda/2}}{\sqrt{(-i)^n |g|}} \int_{\mathbb{R}_{2n}^+} R^\lambda \tilde{\varphi}(z'') (z')^{\gamma-1} dz = \frac{e^{i\pi\lambda/2}}{\sqrt{(-i)^n |g|}} \mathcal{P}^\gamma \int_{\mathbb{R}_n^+} r^{2\lambda} \tilde{\varphi}(x) x^\gamma dx.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор, обратный к оператору Пуассона (см. [3]), получим

$$(\mathcal{A}^\lambda, \varphi)_\gamma = \frac{e^{i\pi\lambda/2}}{\sqrt{(-i)^n |g|}} \int_{\mathbb{R}_n^+} r^{2\lambda} \psi(x) x^\gamma dx, \quad \psi \in K_{ev}.$$

Функционал $(r^\lambda, \varphi)_\gamma$ рассмотрен в работе [4]. Известно, что в точках $\lambda = -\frac{n+|\gamma|+2p}{2}$, $p = 0, 1, 2, \dots$ весовой функционал r^λ имеет простые полюсы. Тогда, функционал $\mathcal{A}^\lambda$ также имеет простые полюсы в точках $\lambda = -\frac{n+|\gamma|+2p}{2}$, $p = 0, 1, 2, \dots$ и

$$\operatorname{res}_{\lambda = -\frac{n+|\gamma|}{2}} [(\mathcal{A}^\lambda, \varphi)_\gamma] = \frac{e^{i\pi\lambda/2} |S_n^+|_\gamma}{\sqrt{(-i)^n |g|}} \delta_\gamma(x), \quad (4)$$

где $\delta_\gamma(x)$ – весовая дельта-функция (см. [1], стр. 117).

Пусть теперь через $\mathcal{A}(x)$ обозначается квадратичная форма в диагональном виде:

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{k=1}^n g_k x_k^2.$$

Введём дифференциальный оператор

$$\mathcal{B}_\gamma(\partial) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{g_k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma_k}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right).$$

Применяя оператор $\mathcal{B}_\gamma(\partial)$ к $\mathcal{A}^{\lambda+1}(x)$ k раз, получим

$$\mathcal{A}^\lambda(x) = \frac{1}{4^k(\lambda+1)\dots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\dots\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}+k-1\right)}\mathcal{B}_\gamma^k(\partial)\mathcal{A}^{\lambda+k}(x).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k} \mathcal{A}^\lambda(x) &= \\ &= \frac{1}{4^k(\lambda+1)\dots(\lambda+k)\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\dots\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}+k-1\right)} \Big|_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k} \times \\ &\quad \times \operatorname{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}} \mathcal{B}_\gamma^k(\partial)\mathcal{A}^{\lambda+k}(x), \end{aligned}$$

откуда применяя формулу (4), получим

$$\operatorname{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k} \mathcal{A}^\lambda(x) = \frac{e^{i\frac{\pi\lambda}{2}}|S_n^+|_\gamma}{4^k k! \sqrt{(-i)^n |g|} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2} + k\right)} \mathcal{B}_\gamma^k(\partial) \delta_\gamma(x). \quad (5)$$

Формула (5) получена для квадратичной формы $\mathcal{A}$, принадлежащей мнимой оси и продолжается аналитически на всю верхнюю полуплоскость. Коэффициенты оператора $\mathcal{B}_\gamma$ аналитически выражаются через коэффициенты квадратичной формы $\mathcal{A}$, а именно они равны $\frac{1}{g_k}$, поэтому аналитическое продолжение оператора $\mathcal{B}_\gamma$ известно.

Формула (5) позволяет найти фундаментальное решение уравнения $\square_{\gamma',\gamma''}^k = f(x)$, где $x \in \mathbb{R}_n^+$, $n = p + q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_p)$, $\gamma'_1 > 0, \dots, \gamma'_p > 0$, $\gamma'' = (\gamma''_1, \dots, \gamma''_q)$, $\gamma''_1 > 0, \dots, \gamma''_q > 0$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\square_{\gamma',\gamma''} = B_{\gamma'_1} + \dots + B_{\gamma'_p} - B_{\gamma''_1} - \dots - B_{\gamma''_q}, \quad B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Фундаментальным решением уравнения $\square_{\gamma',\gamma''}^k = f(x)$ будем называть обобщенную весовую функцию E , такую что $\square_{\gamma',\gamma''}^k E = \delta_\gamma(x)$ и будем искать его в виде $E = f(P)$, где $P = P(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$.

Введем обозначения (см. [2], стр. 311):

$$P_+^\lambda = \begin{cases} [P(x)]^\lambda, & P(x) > 0; \\ 0, & P(x) \leq 0, \end{cases} \quad P_-^\lambda = \begin{cases} 0, & P(x) \geq 0; \\ |P(x)|^\lambda, & P(x) < 0 \end{cases}$$

и

$$(P \pm i0)^\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (P \pm i\varepsilon)^\lambda = \begin{cases} [P(t, x)]^\lambda, & P(t, x) > 0; \\ e^{\pm \lambda \pi i} |P(t, x)|^\lambda, & P(t, x) < 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$(P \pm i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\pm \lambda \pi i} P_-^\lambda.$$

Теорема. За исключением случая когда $n + |\gamma| = 2, 4, 6, \dots$ и $k \geq \frac{n+|\gamma|}{2}$, каждая из функций $(P + i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}$ и $(P - i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}$ являются, с точностью до постоянного множителя, фундаментальными решениями уравнения

$\square_{\gamma', \gamma''}^k = f(x)$. Если же $n + |\gamma| = 2, 4, 6, \dots$ и $k \geq \frac{n+|\gamma|}{2}$, то функция $(P + i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k} = (P - i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}$ является решением однородного уравнения $\square_{\gamma', \gamma''}^k = 0$.

Заметим, что фундаментальные решения для уравнения $\square_{\gamma', \gamma''}^k = f(x)$, выраженные через функции P_+^λ и P_-^λ получены другим способом в [5].

Литература

- [1] Ляхов Л. Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. – Липецк: ЛГПУ, 2007. – 232 с.
- [2] Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщённые функции и действия над ними: Учеб. пособие. – М: ГИФМЛ, 1958, – 440 с.
- [3] Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН, т. VI, в. 2 (42), 1951. – С. 102–143.
- [4] Шишкина Э. Л. Обобщённая весовая функция r^λ // Вестник ВГУ, серия физика, математика, № 1, 2006. – С. 215–221.
- [5] Saglam A., Yildirim H. and Sarikaya M. Z. On The Product of The Ultra-Hyperbolic Bessel Operator Related to The Elastic Waves // Selcuk Journal of Appl. Math., Vol. 10. No. 1, 2009. – P. 85–93.

Актуальные проблемы математического образования

УДК 511.2

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Агафонцев В. В.

Псковский государственный университет

Псков

e-mail: fon-valery-ag@yandex.ru

Agafontsev V. V. Number systems in the research of Diophantine equations. In this article proposes an approach to the research of Diophantine equations, whose members can be of varying degrees, but not less than two ($n \geq 2$). This approach is based on the use of positional number systems with an arbitrary founding.

В данной статье предложен подход к исследованию диофантовых равенств, члены которых могут быть различных степеней, не меньших двух ($n \geq 2$). Этот подход основан на использовании позиционных систем счисления с произвольным основанием.

При изучении математики, начиная с общеобразовательной средней школы, значительное место уделяется системам счисления. Известно, что в основе построения технической базы современных информационных технологий лежит двоичная система счисления. Её используют в устройствах хранения и обработки информации, построенных на базе физических элементов с двумя устойчивыми состояниями. В этом случае одному состоянию элемента ставят в соответствие **0**, другому состоянию ставят в соответствие **1**. Следует отметить, что элементы с двумя устойчивыми состояниями являются наиболее простыми в части их технической реализации. Недостаток двоичной системы счисления состоит в длинной записи чисел, поэтому в программной составляющей информационных технологий широко используют системы счисления с основанием, близким к основанию привычной для нас десятичной системы счисления. В качестве такого основания обычно выбирают основание, являющиеся степенью числа **2**, поэтому используют восьмеричную, шестнадцатеричную и т. д. системы счисления. В этом случае записи чисел становятся короче и можно быстро перейти к двоичной системе счисления и наоборот. В принципе для записи различных количественных соотношений могут использоваться системы счисления с *произвольным* целочисленным основанием.

Рассмотрим применение позиционных систем счисления с произвольным основанием при исследовании диофантовых равенств вида:

$$A^x + B^y = C^z,$$

где $A, B, C, x, y, z \in N$; $x, y, z \geq 2$.

Лемма. Необходимое и достаточное условие выполнения равенства

$$A^x + B^y = C^z, \quad (1)$$

в котором $A, B, C, x, y, z \in N$; $x, y, z \geq 2$; $(A, B, C) = 1$, представимо триадой равенств:

$$\begin{aligned} A^x &= a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \dots + a_1 \cdot C + a_0, \\ B^y &= b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \dots + b_1 \cdot C + b_0, \\ C &= a_i + b_i + 1 = a_0 + b_0, \end{aligned}$$

где $i \in [1; z-1]$; $a_i, b_i, a_0, b_0 \in N$, причём $a_i, b_i, a_0, b_0 \leq C-1$; $a_0, b_0 \neq 0$.

Доказательство. Запишем правую и левую части (1) в C -ричной позиционной системе счисления; получим:

$$(A^x)_C + (B^y)_C = (10 \dots 0)_C, \quad (2)$$

где число нулей в правой части выражения (2) равно z .

Из выражения (2) следует: C -ричная запись каждого из чисел A^x и B^y должна содержать не более, чем z C -ричных разрядов, поэтому числа A^x и B^y представимы так:

$$(A^x)_C = (a_{z-1}a_{z-2} \dots a_1a_0)_C, \quad (3)$$

$$(B^y)_C = (b_{z-1}b_{z-2} \dots b_1b_0)_C. \quad (4)$$

Здесь $a_i, b_i \in N$, $i \in [0; z-1]$; $a_i, b_i \leq C-1$.

Исходя из (3) и (4) и учитывая позиционность C -ричной системы счисления, числа A^x и B^y представимы следующим образом:

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \dots + a_1 \cdot C + a_0, \quad (5)$$

$$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \dots + b_1 \cdot C + b_0. \quad (6)$$

По условию $(A, B, C) = 1$, следовательно, $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$.

Подставим в (1) выражения для A^x и B^y из (5) и (6); учтём тождество

$$C^z = (C-1) \cdot C^{z-1} + (C-1) \cdot C^{z-2} + \dots + (C-1) \cdot C + C.$$

Получим:

$$\begin{aligned} (a_{z-1} + b_{z-1}) \cdot C^{z-1} + (a_{z-2} + b_{z-2}) \cdot C^{z-2} + \dots + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = \\ = (C-1) \cdot C^{z-1} + (C-1) \cdot C^{z-2} + \dots + (C-1) \cdot C + C. \end{aligned} \quad (7)$$

Очевидно, что равенство (7) выполнимо при

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \quad \text{где } i \in [1; z-1].$$

Таким образом, необходимое условие выполнения равенства (1) складывается из выполнения трёх равенств:

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \dots + a_1 \cdot C + a_0, \quad (8)$$

$$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \dots + b_1 \cdot C + b_0, \quad (9)$$

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \quad \text{где } i \in [1; z-1]. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что выполнение равенств (8), (9), (10) является не только необходимым, но и **достаточным** условием выполнения равенства (1). Действительно, если предположить, что вся триада равенств выполняется и сложить левые и правые части (8) и (9) соответственно, а также учесть (10), то получим равенство (1). Лемма доказана ■

Приведём примеры, показывающие справедливость леммы для двух случаев:

1) когда $x = y = z = 2$;

2) когда $x \neq y$; $x, y > 2$; $z = 2$.

Для первого случая необходимое и достаточное условие выполнения равенства (1) в соответствии с (8), (9), (10) запишется так:

$$\begin{aligned} A^2 &= a_1 \cdot C + a_0, \\ B^2 &= b_1 \cdot C + b_0, \\ C &= a_1 + b_1 + 1 = a_0 + b_0. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что этому условию удовлетворяют пифагоровы тройки чисел, например: (8, 15, 17), (20, 21, 29) и другие. Так, для тройки (8, 15, 17), в которой $8^2 + 15^2 = 17^2$:

$$\begin{aligned} A^2 &= 8^2 = 3 \cdot 17 + 13; a_1 = 3, a_0 = 13, \\ B^2 &= 15^2 = 13 \cdot 17 + 4; b_1 = 13, b_0 = 4, \\ C &= 3 + 13 + 1 = 13 + 4 = 17. \end{aligned}$$

Для тройки (20, 21, 29), в которой $20^2 + 21^2 = 29^2$:

$$\begin{aligned} A^2 &= 20^2 = 13 \cdot 29 + 23; a_1 = 13, a_0 = 23, \\ B^2 &= 21^2 = 15 \cdot 29 + 6; b_1 = 15, b_0 = 6, \\ C &= 13 + 15 + 1 = 23 + 6 = 29. \end{aligned}$$

Для второго случая (когда $x \neq y$; $x, y > 2$; $z = 2$) необходимое и достаточное условие выполнения равенства (1) в соответствии с (8), (9), (10) запишется так:

$$\begin{aligned} A^x &= a_1 \cdot C + a_0, \\ B^y &= b_1 \cdot C + b_0, \\ C &= a_1 + b_1 + 1 = a_0 + b_0. \end{aligned}$$

Этому условию удовлетворяют, например, тройки чисел (2, 1, 3) и (6, 5, 29). Так, для тройки (2, 1, 3), в которой $2^3 + 1^k = 3^2$, где k – любое натуральное число:

$$\begin{aligned} A^x &= 2^3 = 2 \cdot 3 + 2; a_1 = 2, a_0 = 2, \\ B^y &= 1^k = 0 \cdot 3 + 1; b_1 = 0, b_0 = 1, \\ C &= 2 + 0 + 1 = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Для тройки (6, 5, 29), в которой $6^3 + 5^4 = 29^2$:

$$\begin{aligned} A^x &= 6^3 = 7 \cdot 29 + 13; a_1 = 7, a_0 = 13, \\ B^y &= 5^4 = 21 \cdot 29 + 16; b_1 = 21, b_0 = 16, \\ C &= 7 + 21 + 1 = 13 + 16 = 29. \end{aligned}$$

Последние два примера позволяют сделать важный эмпирический вывод: при $z = 2$ существуют такие тройки натуральных взаимно простых чисел A, B, C , с которыми при $x, y > 2$ выполняется равенство

$$A^x + B^y = C^2.$$

Теорема 1. Равенство

$$A^x + B^y = C^z, \quad (11)$$

где $A, B, C, x, y, z \in N$, выполнимое при $x, y > 2, z = 2$ и $(A, B, C) = 1$, **выполнимо** при $x, y, z > 2$ и **составных** натуральных числах A^*, B^*, C^* .

Доказательство. Умножим левую и правую часть (11) на число $C^{x \cdot y \cdot z}$. При $z = 2$ получим:

$$(A \cdot C^{2 \cdot y})^x + (B \cdot C^{2 \cdot x})^y = (C^2)^{1+x \cdot y}. \quad (12)$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A^* &= A \cdot C^{2 \cdot y}; \\ B^* &= B \cdot C^{2 \cdot x}; \\ C^* &= C^2; \\ z &= 1 + x \cdot y. \end{aligned} \quad (13)$$

С учётом этих обозначений равенство (12) запишется так:

$$(A^*)^x + (B^*)^y = (C^*)^z. \quad (14)$$

По условию $x, y > 2$, следовательно, исходя из (13) $z > 2$.

Равенство (14) соответствует заключению теоремы 1, так как $x, y, z > 2$ и числа A^*, B^*, C^* являются **составными** натуральными числами. Теорема 1 доказана ■

Приведём пример, показывающий истинность теоремы 1. В лемме в качестве примера рассматривалась тройка чисел $(6, 5, 29)$, для которых выполняется равенство $6^3 + 5^4 = 29^2$. Осуществляя процедуры в соответствии с (12), получим:

$$(6 \cdot 29^8)^3 + (5 \cdot 29^6)^4 = 29^{26}.$$

Очевидно, это очень большие **составные** натуральные числа, в которых $x, y, z > 2$.

Теорема 2. Равенство

$$A^x + B^y = C^z, \quad (15)$$

где $A, B, C, x, y, z \in N$, **невыполнимо** при $x, y, z > 2$ и $(A, B, C) = 1$.

Доказательство. Предположим обратное, т. е. пусть равенство (15) выполняется при $x, y, z > 2$ и $(A, B, C) = 1$. Тогда по лемме должно выполняться необходимое и достаточное условие, которое в соответствии с (8), (9), (10) в этом случае примет следующий вид:

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \dots + a_3 \cdot C^3 + a_2 \cdot C^2 + a_1 \cdot C + a_0, \quad (16)$$

$$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \dots + b_3 \cdot C^3 + b_2 \cdot C^2 + b_1 \cdot C + b_0, \quad (17)$$

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \quad (18)$$

где $i \in [1; z-1]$; $a_i, b_i, a_0, b_0 \in N$, причём $a_i, b_i, a_0, b_0 \leq C-1$; $a_0, b_0 \neq 0$.

В соответствии с (16), (17) левая часть равенства (15) представится так:

$$A^x + B^y = (a_{z-1} + b_{z-1}) \cdot C^{z-1} + (a_{z-2} + b_{z-2}) \cdot C^{z-2} + \dots \\ \dots + (a_3 + b_3) \cdot C^3 + (a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0. \quad (19)$$

Исходя из тождества

$$(C-1) \cdot C^{z-1} + (C-1) \cdot C^{z-2} + \dots \\ \dots + (C-1) \cdot C^3 + (C-1) \cdot C^2 + (C-1) \cdot C + C = C^z,$$

в соответствии с (18) можно записать:

$$(a_{z-1} + b_{z-1}) \cdot C^{z-1} + (a_{z-2} + b_{z-2}) \cdot C^{z-2} + \dots \\ \dots + (a_3 + b_3) \cdot C^3 + (a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^z. \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении (18) должно выполняться и такое равенство:

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^3. \quad (21)$$

Покажем **невыполнимость равенства** (21), левая часть которого входит в равенство (20). С этой целью докажем, что для **любых** ненулевых целых чисел X, Y, Z равенство вида

$$X^3 + Y^3 = Z^3 \quad (22)$$

не выполняется, т. е. для **любых** ненулевых целых чисел X, Y, Z **выполняется** неравенство

$$X^3 + Y^3 \neq Z^3. \quad (23)$$

Действительно, предположим обратное, а именно, допустим, что существует хотя бы одна тройка ненулевых целых чисел n, m, p , для которых выполняется равенство

$$n^3 + m^3 = p^3. \quad (24)$$

Это означает, что уравнение Ферма вида

$$x^3 + y^3 = z^3$$

в таком случае имеет хотя бы одно ненулевое целочисленное решение, в котором $x = n, y = m, z = p$. Но такого быть не может, так как Л. Эйлером для этого уравнения доказано (с уточнением Г. Эдвардса и Ю. Мачиса) отсутствие ненулевых целочисленных решений. В подтверждение такого доказательства сошлёмся на книги [1, §3], [2, гл. 2, пп. 2.1, 2.2] и статью [3]. Следовательно, равенство (22) выполняться не может, а для **любых** ненулевых целых чисел X, Y, Z выполняется неравенство (23).

В соответствии с вытекающим из леммы необходимым и достаточным условием выполнения гипотетического равенства (22) при $(X, Y, Z) = 1$ целые числа X^3, Y^3, Z должны удовлетворять таким равенствам:

$$X^3 = x_2 \cdot Z^2 + x_1 \cdot Z + x_0, \quad (25)$$

$$Y^3 = y_2 \cdot Z^2 + y_1 \cdot Z + y_0, \quad (26)$$

$$Z = x_2 + y_2 + 1 = x_1 + y_1 + 1 = x_0 + y_0, \quad (27)$$

где $x_j, y_j \in N$, $j = 0, 1, 2$, причём $x_j, y_j \leq Z - 1$ и $x_0, y_0 \neq 0$.

Если бы существовали ненулевые целые числа $(X, Y, Z) = 1$, удовлетворяющие гипотетическому равенству (22), то выполнились бы равенства (25), (26), (27). И наоборот: если бы выполнялись равенства (25), (26), (27), то выполнялось бы и гипотетическое равенство (22). Но, исходя из доказательства Л. Эйлера, для **любых** ненулевых целых чисел X, Y, Z равенство (22) не выполняется, то есть не существует ненулевых целых чисел X, Y, Z , с которыми выполнилось бы равенство (22). Это означает, что не существует и таких чисел $x_j, y_j \in N$, $j = 0, 1, 2$, которыми должны представляться ненулевые целые числа X, Y, Z в силу необходимого и достаточного условия выполнения гипотетического равенства (22). Таким образом, для гипотетического равенства (22) **не выполняются все три равенства** (25), (26), (27). Невыполнение равенства (27) означает, что для гипотетического равенства (22) не существует такого ненулевого целого числа Z , для которого выполнились бы такие равенства:

$$Z = x_2 + y_2 + 1;$$

$$Z = x_1 + y_1;$$

$$Z = x_0 + y_0,$$

где $x_j, y_j \in N$, $j = 0, 1, 2$, причём $x_j, y_j \leq Z - 1$ и $x_0, y_0 \neq 0$. Следовательно, для **любого ненулевого целого числа Z гипотетического равенства (22) будет справедливо следующее неравенство:**

$$Z^3 = (Z - 1) \cdot Z^2 + (Z - 1) \cdot Z + Z \neq (x_2 + y_2) \cdot Z^2 + (x_1 + y_1) \cdot Z + x_0 + y_0. \quad (28)$$

Так как неравенство (28) справедливо для **любых** $Z, x_j, y_j \in N$, $j = 0, 1, 2$, то оно будет справедливо и для $x_j = a_j$, $y_j = b_j$, $Z = C$. После подстановки в (28) получим:

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 \neq C^3. \quad (29)$$

Сравним выражения (21) и (29). **Локальное противоречие!** Выражение (21) следует из предположения выполнимости трёхчленного степенного диофантова равенства (15) с показателями степени $x, y, z > 2$ или, что равнозначно, $x, y, z \geq 3$. Выражение (29) следует из невыполнимости **любых** трёхчленных степенных диофантовых равенств с показателями степени $x = y = z = 3$, что следует из **факта** отсутствия ненулевых целочисленных решений для уравнения Ферма третьей степени. Из полученного локального противоречия следует невыполнимость равенств (20), (19) и, следовательно, гипотетического равенства (15). Действительно, прибавим к левой и правой части неравенства (29) следующий многочлен:

$$(a_{z-1} + b_{z-1}) \cdot C^{z-1} + (a_{z-2} + b_{z-2}) \cdot C^{z-2} + \dots + (a_3 + b_3) \cdot C^3. \quad (30)$$

Получим:

$$\begin{aligned} & (a_{z-1} + b_{z-1}) \cdot C^{z-1} + (a_{z-2} + b_{z-2}) \cdot C^{z-2} + \dots \\ & \dots + (a_3 + b_3) \cdot C^3 + (a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 \neq \\ & \neq (a_{z-1} + b_{z-1}) \cdot C^{z-1} + (a_{z-2} + b_{z-2}) \cdot C^{z-2} + \dots + (a_3 + b_3) \cdot C^3 + C^3. \end{aligned} \quad (31)$$

Левая часть выражения (31), исходя из (19), равна $A^x + B^y$; правая часть выражения (31) с учётом соотношений (18) будет равна:

$$\begin{aligned} & (a_{z-1} + b_{z-1}) \cdot C^{z-1} + (a_{z-2} + b_{z-2}) \cdot C^{z-2} + \dots + (a_3 + b_3) \cdot C^3 + C^3 = \\ & = (C - 1) \cdot C^{z-1} + (C - 1) \cdot C^{z-2} + \dots + (C - 1) \cdot C^3 + C^3 = C^z. \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, из выражений (19), (32) и (31) следует, что $A^x + B^y \neq C^z$. Т. е. получили противоречие нашему исходному предположению. Это означает, что равенство

$$A^x + B^y = C^z,$$

где $A, B, C, x, y, z \in N$, **невыполнимо** при $x, y, z > 2$ и $(A, B, C) = 1$. Теорема 2 доказана ■

Утверждение. Равенство

$$A^x + B^y = C^z,$$

где $A, B, C, x, y, z \in N$; $x, y, z > 2$, **выполнимо только** при **составных** числах A, B, C .

Действительно, сопоставим теоремы 1 и 2.

Теоремой 1 доказано: равенство

$$A^x + B^y = C^z,$$

где $A, B, C, x, y, z \in N$, выполнимое при $x, y > 2, z = 2$ и $(A, B, C) = 1$, **выполнимо при** $x, y, z > 2$ и **составных** натуральных числах A^*, B^*, C^* .

Теоремой 2 доказано: равенство

$$A^x + B^y = C^z,$$

где $A, B, C, x, y, z \in N$, **невыполнимо** при $x, y, z > 2$ и $(A, B, C) = 1$.

Из сопоставления теорем 1 и 2 в части их условия и заключения следует истинность данного утверждения, т. е. истинность того, что равенство

$$A^x + B^y = C^z,$$

где $A, B, C, x, y, z \in N$; $x, y, z > 2$, **выполнимо только** при **составных** числах A, B, C .

Литература

- [1] Постников М. М. Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел. – М.: “Наука”. – 1978. – 128 с.

- [2] Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. – М.: “Мир”. – 1980. – 484 с.
- [3] Мачис Ю. Ю. О предполагаемом доказательстве Эйлера // Математические заметки. 2007. – Т. 82 №3. – С. 395–400.

УДК 378.016

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ ХИМИКОВ В ГОРНО-АЛТАЙСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Кайгородов Е. В.
Горно-Алтайский государственный университет
Горно-Алтайск
e-mail: gazetaintegral@gmail.com

Kaigorodov E. V. On the mathematical preparation of chemists at the Gorno-Altaisk State University. The article discusses the features of mathematics preparation of chemistry students at the Faculty of Natural Sciences and Geography at the Gorno-Altaisk State University. We provide an outline of the main branches of mathematics to be taught to students training in various areas of chemistry. Examples are given of mathematical objects that are used in presenting special chemical disciplines; we construct mathematical models of a number of chemical processes. Finally, the distribution of mathematical subjects per semester is presented.

В статье рассматриваются особенности математической подготовки студентов-химиков на естественно-географическом факультете Горно-Алтайского государственного университета. Предлагается схема изложения основных разделов математики для студентов химических направлений подготовки. Приводятся примеры математических объектов, которые используются в специальных химических дисциплинах; строятся математические модели некоторых химических процессов. Дается распределение математических дисциплин по семестрам.

Работа о выяснении связи преподавания математики с химическими дисциплинами в Горно-Алтайском государственном университете началась в 1975 г. по инициативе доцентов кафедры математики Г. И. Иванова и Т. А. Ивановой. В результате этой работы удалось выяснить некоторые особенности математического курса, читаемого на направлении подготовки «Химия» естественно-географического факультета, о которых и пойдет речь далее.

В настоящее время математически грамотным считается тот химик, который достаточно хорошо понимает математическую ситуацию изучаемого явления. Именно это понимание лежит в основе математического моделирования. В современных условиях, когда есть возможность использовать такое мощное средство, как компьютер, особенно сильной является потребность в умении строить математические модели изучаемого процесса. Нынешний специалист, если он пользуется математикой, должен не только знать основные математические методы, но и уметь грамотно осуществлять математическое моделирование

поставленной задачи и, применив, в случае надобности, компьютер, решить её. В связи с этим он должен ещё владеть одним из языков программирования.

Стало быть, одной из важных задач математического образования студента-химика на сегодняшний день является привитие ему навыков построения математических моделей при изучении прикладных вопросов. Это трудная задача. Она требует, во-первых, хорошего знания основ математики и её методов и, во-вторых, умения *«переводить» прикладную задачу на математический язык*. Однако если первое требование достаточно полно предусмотрено программой высшей школы и выполняется на достаточно высоком уровне, то второе в процессе преподавания чаще всего игнорируется. *Понимать же математическую ситуацию явления — это тоже знание, которое необходимо накапливать в процессе учёбы, начиная уже с младших курсов*. Этой цели служат прежде всего учебные прикладные задачи, которые имеются, правда в незначительном количестве, почти в каждом задачнике по математике. К этим задачам следует подходить дифференцированно, не следует брать первую попавшуюся задачу, а выбирать те из них, которые в той или иной степени соответствуют специализации студентов. Такие задачи удовлетворяют профессиональным интересам студентов и вырабатывают те навыки построения математических моделей, которые им понадобятся уже на старших курсах при решении более сложных задач. Возьмем, например, книгу [1]. Она предназначена для специалистов, занимающихся автоматизацией химических производств, и полезна для студентов старших курсов и аспирантов. Однако её можно читать лишь после того, когда уже приобретены определенные знания математического моделирования.

Несмотря на всю важность таких задач, при их рассмотрении следует соблюдать меру и не подменять изучение математики решением прикладных задач. Такая позиция была бы вредной математическому образованию. Однако пренебрежение ими приводит к формализму в преподавании [2].

Рассмотрим более подробно некоторые особенности преподавания математики на направлении подготовки «Химия» Горно-Алтайского государственного университета.

А. На четырехсеместровый курс математики отведено по плану 792 ч, из которых 120 ч лекций. Учитывая сильную потребность кафедры химии и МПХ в некоторых математических вопросах, преподавание математики на факультете с 2014 года ведется с некоторыми изменениями, а именно: изложение курса начинается с матричного исчисления и систем линейных алгебраических уравнений. Затем идут векторы, системы координат; после этого излагается аналитическая геометрия в векторной форме. Такое построение курса, на наш взгляд, дает экономию во времени и способствует более прочному усвоению темы «Векторы». Здесь же мы знакомим студентов с понятиями базиса, ортонормированного, правого и левого базисов. Эта часть курса читается с такой ориентацией, чтобы подготовить студентов к изучению крайне необходимых им тем: «Линейные пространства», «Основы тензорного исчисления» и «Основы теории групп», которые придется изучать самостоятельно. Другими словами, линейная алгебра и аналитическая геометрия излагаются примерно так, как это предлагается в учебном пособии [3]. На эту часть курса отводится по плану 20 ч лекций и 56 ч практических занятий.

Б. При изучении курса математики наряду с обычными примерами и задачами рассматриваются задачи прикладного характера, где демонстрируются способы построения математических моделей, соответствующих этим задачам. Одни из них рассматриваются на лекциях, другие — на практических занятиях. Можно также рассматривать их на консультациях.

Приведем в качестве примеров три задачи, относящиеся к темам «Исследование функций», «Определенный интеграл» и «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

1. *Нахождение максимальной скорости окисления окиси азота.* Пусть газовая смесь состоит из кислорода и окиси азота. Требуется установить, при какой концентрации кислорода окись азота будет окисляться с максимальной скоростью. Сделаем предположение, что реакция окисления практически необратима. В этом случае установлено, что скорость реакции выражается формулой

$$v = kx^2y, \quad (1)$$

где x — концентрация окиси азота; y — концентрация кислорода; $k > 0$ — константа скорости реакции.

Уравнение (1) обычно называют уравнением кинетики. Правая часть (1) зависит от двух переменных. Однако если считать, что в любой момент времени $x + y = 1$ (уравнение материального баланса), то

$$v = k(x^2 - x^3).$$

Взяв производную и приравняв ее нулю, найдём стационарные точки $x_1 = 0$, $x_2 = 2/3$. Исследовав их, получим, что максимальная скорость окисления будет тогда, когда $y = 0,333 \dots$, т. е. когда концентрация кислорода будет равна 33,3%.

Задачи подобного типа и относящиеся к теме «Приложения дифференциального исчисления» можно найти, например, в книге [4].

2. *Задача об инверсии¹ сахара.* Известен закон, что количество сахара, инвертируемого в единицу времени, прямо пропорционально количеству его в растворе. Пусть a — первоначальное количество сахара в растворе и требуется установить, сколько его останется в растворе к моменту времени t_1 . Возьмём произвольный момент времени t и обозначим количество сахара, которое инвертируется к этому времени, через x . Считая, что за время dt реакция протекает равномерно и количество сахара, инвертируемого за это время, равно dx , согласно закону получим

$$dx = k(a - x)dt,$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности, или

$$\frac{dx}{a - x} = k dt.$$

Если при $t = 0$ $x(0) = 0$, а при $t = t_1$ $x(t_1) = x_1$, то можно написать

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{a - x} = k \int_0^{t_1} dt.$$

¹Инверсия — это гидролиз сахарозы, сопровождающийся изменением направления вращения плоскости поляризованного луча света раствором сахара.

Отсюда

$$x_1 = a(1 - e^{-kt_1}).$$

Количество же оставшегося в растворе сахара к моменту времени t_1 будет

$$a - x_1 = ae^{-kt_1}.$$

3. *Определение размера частиц по скорости седиментации² в центрифуге.* Оседание частиц происходит под действием силы тяжести P , которая с учетом на потерю в весе по закону Архимеда равна

$$P = v(\gamma - \gamma_0)g,$$

где v — объём частицы; γ — плотность частицы; γ_0 — плотность среды; g — ускорение силы тяжести.

Оседанию противодействует сила сопротивления среды

$$f = ku,$$

где $k > 0$ — коэффициент трения; u — скорость седиментации.

При стационарном режиме оседания соблюдается равенство

$$f = P$$

или

$$ku = v(\gamma - \gamma_0)g.$$

Чтобы ускорить процесс седиментации, раствор помещают в центрифугу.

В этом случае в последнем уравнении необходимо u заменить на $\frac{dx}{dt}$, где x — расстояние частицы от оси вращения, а ускорение g — на ускорение $\omega^2 x$, где ω — угловая скорость. Таким образом,

$$k \frac{dx}{dt} = v(\gamma - \gamma_0)\omega^2 x.$$

Получили обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Если считать, что $x(0) = x_0$, а $x(t_1) = x_1$, то

$$\ln \frac{x_1}{x_0} = \frac{v(\gamma - \gamma_0)}{k} \omega^2 t_1.$$

Согласно Стоксу, в предположении, что частицы имеют форму шара, $k = 6\pi\eta r$, где η — вязкость среды; r — радиус частицы. Отсюда

$$r = \sqrt{\frac{9\eta \ln \frac{x_1}{x_0}}{2(\gamma - \gamma_0)\omega^2 t_1}}.$$

Много других задач на составление дифференциальных уравнений можно найти, например, в книгах [4], [5], [6] и [7].

²Седиментация — оседание частиц.

В. При изучении обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами рассматриваются, как правило, задачи о колебаниях. В основном акцентируется внимание на том, что математической моделью свободного, затухающего и вынужденного колебаний является дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Это даёт возможность в курсе физики не останавливаться на математической стороне этих задач, а рассматривать более глубоко их специальную сторону.

Уместно привести и другую модель — задачу о диффузии, сопровождающейся химической реакцией. Известно, что моделью для этой задачи вообще является дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных. Если же принять некоторые ограничения, то моделью будет обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и с заданными *краевыми условиями*, т. е. будет иметь место не *начальная задача Коши*, а *краевая*.

Рассмотренные здесь примеры так же, как и многие другие, интересны сами по себе. Но все же главная их ценность в том, что они дают возможность студентам приобретать навыки математического моделирования. Более того, с этими задачами и им подобными студенты встретятся на старших курсах, когда им будут читать такие дисциплины, как «Химическая технология», «Физическая химия», «Строение вещества», «Квантовая механика и квантовая химия», «Физико-химические методы исследования» и др.

Г. Заканчивается курс математики теорией вероятностей и математической статистикой. На эту часть курса отведено по плану 20 ч лекций. Особенности изложения теории вероятностей и математической статистики состоят в следующем. Во-первых, даётся классическое определение вероятности, так как мы считаем, что аксиоматический метод при малом количестве часов является нецелесообразным. Центральная предельная теорема Муавра–Лапласа принимается без доказательства. Во-вторых, чтение лекций обязательно сопровождается рассмотрением по возможности наибольшего числа примеров. В-третьих, строятся модели к следующим задачам: о размещении частиц (случай Больцмана, Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака), о примеси (определяется вероятность того, что k частиц попадет в объём v). В-четвертых, строится эмпирическая функция распределения, производится статистическая оценка основных параметров распределения, т. е. математического ожидания и дисперсии, и, наконец, рассматриваются элементы теории корреляции.

Д. При изучении связи математики с другими курсами, читаемыми студентам-химикам, было замечено одно немаловажное обстоятельство. Суть его в следующем. Почти все математические модели, как правило, содержат параметры и они, естественно, оказывают влияние на ход решения задачи и на окончательный вывод. Поэтому вольно обращаться с ними нельзя, так как в противном случае можно сделать неверный вывод. Рассмотрим один пример.

Моделью последовательных реакций является линейная треугольная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим последовательные реакции из двух веществ с концентрациями x и y соответственно.

Система будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = -x; \quad \frac{dy}{dt} = x - ky,$$

где k — параметр, выражающийся через константы скоростей реакций; $x(0) = 1$; $y(0) = 0$.

Из системы, учитывая начальные условия, находим

$$x = e^{-t}; \quad y = \frac{e^{-t} - e^{-kt}}{k - 1}.$$

Очевидно, полученный результат верен, когда $k \neq 1$. Однако рассматриваемая задача имеет смысл и при $k = 1$. Это как раз соответствует тому условию, когда константы обеих реакций равны между собой. Отсюда следует, что такие задачи необходимо рассматривать в общем курсе математики и обращать внимание студентов на зависимость полученного результата от параметров.

Надо признать, что задач с параметрами в существующих сборниках задач крайне мало, а для тех, которые там приведены, предполагается чаще всего формальное решение. Поэтому данные ответы при некоторых значениях параметров не имеют смысла. Исключением является сборник задач и упражнений [8]. Здесь даётся не только формальное решение уравнений, но и проводится исследование каждого из решений.

Изучение курса математики завершается выполнением индивидуального проекта, что позволяет развить и закрепить навыки в решении прикладных задач, ориентированных на потребности специальных дисциплин, и в использовании персонального компьютера. Работа служит также для проверки знаний студентов по основным разделам математики.

Кафедрой математики и информатики Горно-Алтайского государственного университета ведется интенсивная работа по улучшению связи преподавания математики с химическими дисциплинами. На сегодняшний день установлены широкие научно-исследовательские и учебно-педагогические контакты кафедры математики и информатики с кафедрой химии и МПХ. Совместно была разработана новая рабочая программа по математике, учитывающая изменения в школьной программе и отражающая возросшие требования, предъявляемые к математическому образованию химиков. Согласование рабочих программ и методики изложения различных математических разделов было наиболее плодотворной частью работы.

Отметим, что такие непосредственные контакты, в которых принимали активное и заинтересованное участие профессор Анисимова Н. А., доценты Большух Т. В., Ларина Г. В., Майманова Т. М., оказались весьма полезными — они позволили в ряде случаев лучше скоординировать содержание основных разделов курса и календарные планы их прохождения. Немало усилий потребовал анализ использования математического аппарата, методов обработки результатов эксперимента и математических пакетов прикладных программ в курсовом и выпускном квалификационном проектировании. По этим вопросам тоже приняты определенные рекомендации.

В заключение стоит сказать о колоссальной выгоде взаимного комплексного сотрудничества математиков и химиков в Горно-Алтайском государственном университете: ведь наша общая главная задача — подготовка высококвалифицированных специалистов для Республики Алтай и России, могущих созидать, способных внедрять и использовать передовые технологии, опираясь на современное химическое и прикладное математическое знание.

Литература

- [1] Дудников Е. Г., Балакирев В. С., Кривоумов В. Н., Цирлин А. М. Построение математических моделей химико-технологических объектов. — М.: Химия, 1970. — 311 с.
- [2] Бортник Л. И., Кайгородов Е. В., Раенко Е. А. О некоторых проблемах преподавания математики в высшей школе // Вестник Томского государственного педагогического университета. — 2013. — №4 (132). — С. 19–24.
- [3] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Физматлит, 2009. — 309 с.
- [4] Скатецкий В. Г., Свиридов Д. В., Яшкин В. И. Математические методы в химии. — Минск: ТетраСистемс, 2006. — 368 с.
- [5] Кайгородов Е. В. Дифференциальные уравнения и их некоторые приложения к химии. — Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2014. — 288 с.
- [6] Козко А. И., Кравцев С. В., Малышева Н. Б., Соболева Е. С., Субботин А. В., Фатеева Г. М., Чирский В. Г. Математические методы решения химических задач. — М.: Издательский центр «Академия», 2013. — 368 с.
- [7] Пономарев К. К. Составление дифференциальных уравнений. — Минск: Вышэйшая школа, 1973. — 560 с.
- [8] Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Минск: Вышэйшая школа, 1987. — 320 с.

ИЗУЧЕНИЕ НАУЧНЫХ ОСНОВ СОДЕРЖАНИЯ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ (АЛГЕБРА)

Колдунов А. В.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург

Koldunov A. V. Learning the scientific base of mathematics in school (algebra).
In the report a possible approach to the course from the title is presented.

В сообщении рассматривается один вариант построения педвузовского курса, указанного в заголовке.

В тексте будут использованы следующие сокращения: через НО будет обозначаться учебный курс “Научные основы содержания школьного курса ма-

тематики”; через ФМ – фундаментальные математические курсы в педвузе; а через ШМ – школьный курс математики.

1. ШМ состоит из двух частей: алгебраической (арифметика – алгебра – начала анализа) и геометрической (пропедевтика геометрии – планиметрия – стереометрия). Если учесть, что для алгебраической части арифметика играет роль длительной пропедевтики, то можно заметить, что обе части имеют общее внешнее деление: пропедевтика – основное содержание – материал, стыковочный с вузовскими математическими курсами. Это означает, что в НО эти части должны быть также уравновешены. Но при этом нежелательно терять специфику каждой из этих частей. Поэтому в сообщении будет рассматриваться только алгебраическая составляющая НО.

Курс НО может быть построен по-разному. Но обычно каждый вариант можно отнести либо к случаю движения материала от ФМ к ШМ, когда реалии школьной математики погружаются в контекст ФМ; либо к случаю движения от ШМ к ФН (когда ведётся поиск обоснования ШМ в терминах ФН). К сожалению, часто существенные моменты для ФМ не являются таковыми для ШМ (и наоборот). Тогда в первом случае ШМ рискует быть “раздавленным” самым разумным обзором построений ФМ. Когда же во втором случае ФМ используются, в основном, для ссылок или терминологии, то оказывается, что весьма затруднительно подобраться к содержанию ШМ с чем-либо, кроме официальной учебной программы.

В сообщении будет рассмотрена следующая модификация движения от ФМ к ШМ: в ШМ выделяются крупные сегменты материала, для которых проводится анализ на основе ФМ. Эти сегменты могут выбираться из различных соображений и могут (со временем) меняться. В этом сообщении в качестве сегментов взяты числовые множества и функции.

В рамках НО происходит применение подходов, свойственных ФМ, к материалу ШМ. Поэтому не предполагается, что в НО появится существенно новый для студентов материал. Но при этом было бы желательно привлечь внимание студентов к вопросам, которые теряются на общем фоне ШМ или относятся к “околопрограммным”. В данном случае берутся многочлены третьей степени и нахождение их корней, а также вопросы комбинаторики.

2. Алгебраическая часть ШМ имеет своими исходными объектами множества натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел.

В отличие от ШМ, в случае ФМ числовые множества строятся на основе множеств, бинарных отношений, порядка или метрики. Поэтому бинарные отношения (и соответствия) рассматриваются в первом параграфе, посвящённом способам введения математических понятий. Поскольку в этом параграфе речь должна пойти о множествах, то представляется естественным поместить здесь и вопросы комбинаторики.

Во втором параграфе НО последовательно вводятся числовые множества. Причём это делается конструктивно, т. е. каждый раз на основе алгебраических и порядковых процедур, применяемых к уже построенному числовому множеству (или просто к множествам, как в случае построения натуральных чисел). В этот же параграф целесообразно включить тождественные преобразования числовых выражений и выражений, содержащих переменные. А решение

уравнений и неравенств удобнее поместить в третий параграф НО, где рассматриваются функции, и рассматривать каждый тип уравнений или неравенств в связи с соответствующим типом функций.

3. В третьем параграфе на основе бинарных соответствий вводятся отображения. С помощью обратного бинарного соответствия вводятся обратные отображения, причём это полезнее сделать двумя способами: а) поточечно описав строение обратного отображения; б) задав обратное отображение с помощью двух суперпозиций. Это рассмотрение полезно завершить построением функции корня n -ой степени.

Далее идёт обзор линейных и квадратичных функций, которые по сути являются центром алгебраической части ШМ. В связи с этим полезно рассмотреть графики многочленов третьей степени и нахождение их корней.

Завершить этот параграф следует введением показательных функций на основе определённых свойств. При изложении этого вопроса полезно начать с анализа, т. е. с предположения, что функция с этими свойствами существует, и найти её значения в рациональных точках (как это и делается в школьных учебниках), а затем по монотонности продолжить функцию с рациональных значений на всю вещественную ось.

С помощью обратной функции для показательной функции задаётся логарифмическая функция, и выясняются её характеристические свойства.

4. Высшая школа весьма заинтересована в хороших знаниях первокурсников вопросов из стыковочного материала. Иначе студентам будет трудно выдержать быстрый рост материала, характерный для начала курсов высшей математики. Причём важны их умения и навыки: вузы сами выберут формы и уровень обоснования этих процедур, но предварительная осведомлённость первокурсников в этих вопросах весьма желательна и существенна для успешного усвоения дальнейшего материала.

Для алгебраической части ШМ стыковым материалом являются решение линейных систем 2×2 (в которых возможно убедительно ввести определители) и элементы дифференциального и интегрального исчисления, включаемые в программы и учебники. Введение определителей порядка выше второго и изучение теории пределов достаточно чётко разделяют школьную математику и вузовскую математику.

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ КАЧЕСТВА ОТЕЧЕСТВЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ (1931–2014)

Костенко И. П.

Ростовский государственный университет путей сообщения
(филиал в г. Краснодаре)
e-mail: kost@kubannet.ru

Kostenko I. P. The model of mathematical education quality dynamics (1931–2014). The author introduces the qualitative indicators of the knowledge of secondary graduates in different periods, draws a diagram reflecting the dynamics of the change in these indicators from 1931 to 2009. The article explains the reasons for the sharp drop in the quality from 1956 to 1960, the abrupt drop in 1978 and the present day stagnation. Key words: quality of education, quality graduates, growth factors and falls factors.

Keywords: quality of education, quality graduates, growth factors and falls factors.

Введены показатели качества знаний выпускников школы и сделаны их оценки в разные годы. Построена диаграмма, отражающая динамику изменения этих показателей с 1931 г. по 2009 г. Выявлены факторы, предопределившие непрерывный рост качества образования в период с 1931 г. по 1956 г. Объяснены причины резкого падения качества в период с 1956 г. по 1960 г., обвального падения в 1978 г. и стагнации в настоящее время.

Ключевые слова: качество образования, оценка качества, факторы роста и падения.

«Настоящее есть следствие прошедшего»

Козьма Прутков

На всех математических конференциях сегодня обязательно выделяется секция, посвящённая актуальным проблемам преподавания математики в школе и вузе. На этой секции участники говорят, в основном, о своих “инновациях” (к примеру, о роли шахмат в повышении мотивации школьников к изучению математики и пр.). И очень редко затрагивается наиактуальнейшая проблема ужасающего падения качества знаний современных учащихся. Даже в недавно утверждённой Правительством РФ Концепции развития математического образования в РФ эта проблема подменена проблемой “низкой учебной мотивации школьников и студентов” [1]. В данной статье приводится краткий исторический анализ проблемы качества математического образования, который проливает свет на причины настоящей его деградации. Полный и подробный фактологический анализ проведён в монографии автора [2].

Оценки показателей качества. Главной характеристикой качества математического образования является качество знаний учащихся и, прежде всего, выпускников общеобразовательной школы. Для количественной оценки этого показателя мы используем процент отличных и хороших отметок проверочных работ (экзаменов, тестов) в различных выборках и называем такую оценку кратко *качеством-1*. Процент отличных, хороших и удовлетворительных отметок, который официально называется “процентом успеваемости”, мы называем *качеством-2*. Эти проценты до 1970-х гг. оцениваются приближённо (они

показаны на рис. 1) путём сопоставления разных данных (результаты массовых официальных контрольных работ, тестов, вступительных экзаменов в вузы, международных исследований, экспертные оценки учителей, методистов, преподавателей высшей школы) и учитывая их согласованность между собой.

После реформы, со второй половины 1970-х гг. трудность экзаменационных заданий и требования к отметкам стали резко снижаться. С этого времени мы не можем достоверно оценить введённые показатели. Но можем установить тенденции их изменения, в частности, по решаемости базовых типов заданий.

Поясним две оценки. Наиболее достоверная оценка сделана по результатам глобальной проверки знаний, проведённой методическим Сектором АПН в 1949 г. в 14 областях РСФСР. Сектором проанализированы 14193 работы и результаты отражены в таблице [3, с. 6], из которой мы и вывели оценку качества-1 в 74%, взяв среднее значение процентов хороших и отличных решений разного типа заданий по трём математическим предметам учениками IX–X классов.

Оценка качества-1 2009 г. сделана по выборке первокурсников МАДИ, прошедших контрольное ЕГЭ-тестирование, проведённое преподавателями института [4 (2010, № 2), с. 42]. Этот процент (2,4%) согласуется с результатами ЕГЭ по стране: “доля выпускников с хорошими (более 75) и, тем более, отличными (более 90) баллами ничтожно мала” [там же, с. 57]. Процент МАДИ согласуется с результатами международного тестирования PISA–2009, – “продвинутое математическое мышление и умение проводить рассуждения” обладают 3,6% наших 15-летних школьников [4 (2011, № 3), с. 69].

Общая картина динамики качества знаний за 80 лет показана на рис. 1. Диаграмма представляет, в сущности, вероятностную модель изменения этого качества. Сделаем необходимые пояснения.

Ломанные построены по узловым точкам, соответствующим узловым годам, для которых удалось обоснованно определить оценки показателей качества-1 и 2 (с 1937 г. до 1970 г.) и динамику их изменения (до 1937 г. и после 1970 г.). Ломанные не являются графиками изменения этих показателей, – они совпадают с графиками в узловых точках, а между этими точками представляют линейные приближения хода графиков. Поэтому мы называем эти ломанные тенденциями. Поскольку до 1937 г. и после 1970 г. мы не имеем необходимых оценок качества-1 и 2, ход этой части тенденций показан пунктиром. Из рис. 1 видно, что возможные колебания оценок не влияют на направленность тенденций и, практически, на их скорость.

Начинается диаграмма с 1931 г., поскольку статистических данных для того, чтобы оценить показатели качества знаний выпускников школ 1920-х гг., нет.

Период 1918–1931 гг. это период первой “коренной” реформы школы, “слома” традиций, поиска “инновационных” форм и методов обучения в идеологических рамках мифической “трудовой школы”. Этот “поиск” привёл к полной хаотизации всей системы образования и к падению качества знаний учащихся почти до нуля (как и сегодня).

Этот факт имеет официальное подтверждение: в 1930 г. “Главсоцвос указывал, что: ни с количественной, ни с качественной сторон знания поступающих не соответствуют тем минимальным требованиям, которые к ним предъявляют-

ся. Сплошь и рядом наблюдается отсутствие навыков в обращении с простыми и десятичными дробями, в преобразовании алгебраических формул, в составлении уравнений и решении геометрических задач и т. д.” [5, с. 130].

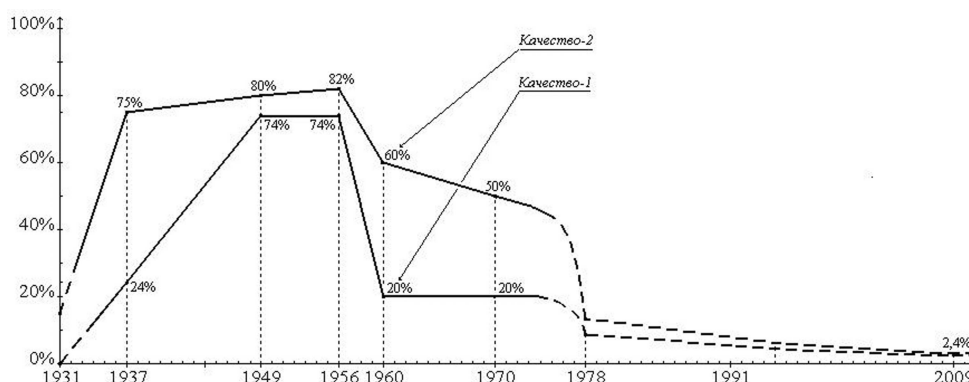


Рис. 1. Тенденции изменения качества математических знаний школьников с 1931 по 2009 г.

1931–1937 гг. – период непрерывного и быстрого роста качества математического образования и качества знаний выпускников школ страны. Он проходил под знаком жёстко поставленной государством перед школой задачи “подготовки для техникумов и для высшей школы вполне грамотных людей, *хорошо владеющих основами наук*”¹ [6, с. 157]. Задача эта была решена в фантастически короткий срок – за 6 лет. И решена не на пути поиска “инноваций”, а на пути возврата к традиции. Были восстановлены организационные формы и методические принципы обучения русской гимназии. Введена предметная система обучения. Систематизированы, облегчены и сделаны стабильными учебные планы и программы. Восстановлен принцип единого стабильного учебника (Киселёв–Рыбкин). Повышена требовательность к оценке знаний учащихся и установлены единые нормы оценки. Поднят престиж учителя и повышена его зарплата до средней по промышленности. Ужесточена ответственность управленцев всех звеньев. Проследить более детально за тем, как решалась эта ключевая государственная задача, можно по Постановлениям ЦК 1931–1936 гг. [6].

В результате грамотной, дружной работы учителей, методистов и управленцев государственная задача поднятия качества образования была к 1937 г. решена. Директор МЭИ И. И. Дудкин: “В текущем году средняя школа дала *значительно* лучше подготовленную молодёжь, чем в 1936 г. Это подтверждается материалами приёмных испытаний” [7 (1937, № 10), с. 41]. Этот вывод делают и другие вузы, не только московские: “В целом подготовка выпускников десятилеток в этом году *несравненно* выше, чем в 1935 и 1936 гг.” [там же, с. 48]. Анализ количественных результатов приёмных испытаний 1937 г. [там же, с. 41, 48; 7 (1936, № 2), с. 13–17] позволяет сделать оценки **качества-2 в 24 %, качества-1 в 75 %**, что и отражено на рис. 1.

¹Здесь и далее мы будем в цитатах и в тексте выделять курсивом ключевые слова и фразы.

1937–1956 гг. – продолжение роста качества. Проф. МГУ П. С. Моденов: “Приёмные испытания (1947 г. – *И. К.*), ... свидетельствуют о положительных сдвигах в подготовке учащихся средней школы по математике за последний год (заметное улучшение только за *один* год! – *И. К.*) Многие из предложенных задач были *блестяще* решены абитуриентами. Это ещё раз свидетельствует о том, что в наши вузы идёт талантливая и в большинстве своём *отлично* подготовленная молодёжь” [4 (1948, № 2), с. 15]. Через 9 лет, в 1956 г. методист П. В. Стратилатов в статье, обобщающей опыт проведения экзаменов 1955 г. в средних школах, заключает: “. . . знания учащихся по математике постоянно повышаются. Это отмечают **в с е** авторы статей и материалы инспекторских обследований работы школ” [4 (1956, № 2), с. 17]. Заметим, – после 1956 г. мы никогда и ни от кого не услышим подобных оценок.

Период 1956–1978 гг. проходит под знаком менее чётко, но не менее жёстко поставленной другой задачи, озвученной профессором А. И. Маркушевичем в докладе на сессии АПН в 1949 г.: “**повысить идейно-теоретический уровень преподавания математики в средней школе**” [4 (1950, № 1), с. 1]. Эта задача *подменила* задачу “улучшения качества обучения” и предопределила обратный процесс выведения из обучения классических принципов методики, разрушения выверенных длительным опытом программ и уничтожения понятных учебников.

Процесс этот незаметно начат в 1949 г., когда в Объяснительную записку к программе было вставлено: “программа по арифметике, не исключая совершенно решение *типовых задач*, отводит им довольно *скромное* место, учитывая, что в дальнейшем типовые задачи более сложных видов учащиеся будут решать *методом составления уравнений*” [4 (1949, № 6), с. 5]. В VI классе в курсе алгебры “рекомендуется, начиная с первой (!) темы «Буквенные обозначения», решать уравнения и задачи на составление уравнений” [там же, с. 6].

Эта “скромная” рекомендация положила начало разрушению классической методики обучения решению задач (сначала типовых арифметических) и блокировке развития мышления учащихся. Через десять лет, к началу 1960-х гг. учителя констатировали, что выпускники школ “*совершенно* не умеют решать арифметических задач, а прибегая к решению их алгебраическим путём, часто допускают ошибки в составлении уравнений” [4 (1964, № 1), с. 58].

В 1956 г. “реформаторами” был сделан второй решающий шаг, – из школы-семилетки выведены учебники Киселёва, а из 10-го класса учебник Рыбкина. И уже в следующем 1957 г. министерская проверка фиксирует заметное падение качества знаний [4 (1958, № 6), с. 91]. Новые малопонятные учащимся учебники, что отмечали все учителя [4 (1957, № 4), с. 41, 42, 47, 57], нарушили главное условие формирования качественных знаний – самостоятельную работу с книгой, *самостоятельное* осмысление знаний.

Одновременно “реформаторы” начали разрушение классической организации урока. Они потребовали от учителей ликвидировать проверку домашней работы учащихся и поставили неразрешимую задачу – чтобы материал урока был усвоен учащимися на самом уроке. В результате, учащиеся перестали выполнять домашние задания, перестали самостоятельно работать дома, что привело к дальнейшему падению качества знаний и ослаблению навыков.

В конце 1950-х гг. в Министерство стали поступать “жалобы вузов на

недостатки знаний поступающих” [8, с. 38]. И к **1960 г. качество-1 упало до 20 %, в 3,5 раза**. Заключение вузовских преподавателей: “хорошо подготовлена лишь пятая часть поступающих в вузы, процентов 40 имеют удовлетворительные знания, остальные не подготовлены” [4 (1961, № 4), с. 15].

Третий шаг – принятие в 1960 г. новой программы, новые принципы которой: изучать десятичные дроби до обыкновенных; разгрузить алгебру от сложных задач и примеров; упразднить отдельный курс тригонометрии; усилить “функциональную направленность курса алгебры”; внедрить высшую математику (производная и её приложения); усилить дедуктивность и логику в геометрии [4 (1959, № 1), с. 41–51].

Результаты этих новаций оценивают вузовские преподаватели: “Основные недочёты в знаниях: *формализм*, слабая *логическая* подготовка, отсутствие необходимых *навыков* в тождественных преобразованиях” [4 (1961, № 4), с. 15].

Десятилетие 1960-х гг. проходит для школы относительно стабильно, что позволяет учителям как-то приспособиться к новым программам и учебникам и, опираясь на привычную классическую методику, сохранять допустимый уровень математических знаний учащихся.

Качество-2 продолжает снижаться и к концу 1960-х гг. опускается до 50 %: в 1969 г. в МГПИ “на письменной работе по математике было отсеяно около половины поступающих” [4 (1971, № 2), с. 61]. Такие же результаты в МГУ и в других, в том числе нестоличных вузах. “Реформаторы” игнорируют результаты “перестройки”² и продолжают настойчивую идеологическую и организационную подготовку задуманной ими ещё в 1930-х гг. реформы.

1970–1978 гг. – реализация реформы-70 (будем так её называть), слом всей методической системы отечественного образования, коренное изменение программ и учебников. **Результат – обвальное падение качества знаний.** Свидетельствует непосредственный участник реформы, академик РАО Ю. М. Колягин:

“Всё встало на свои места при первом выпуске (в 1978 г. – *И. К.*) из средней школы «отреформированной» молодёжи, ... среди учёных-математиков АН СССР и преподавателей вузов началась паника. Было повсеместно отмечено, что математические знания выпускников школ страдают *формализмом*; *навыки* вычислений, элементарных алгебраических преобразований, решения уравнений фактически *отсутствуют*. Абитуриенты оказались практически не подготовленными к изучению математики в вузе” [9, с. 200].

Период 1978–2009 гг. – годы закрепления результатов реформы-70 и сползания качества знаний до нуля. Все эти годы все недостатки, проявившиеся после реформы (формализм, логика, навыки) не исправлялись, а сохранялись и усугублялись. Потому что “реформаторам” удалось под видом “совершенствования” “порочных” программ и “недоброкачественных” учебников (оценки Президиума ОМ АН СССР) удержать все свои основные идеи: “интегрированные” учебные курсы вместо цельных учебных предметов, суррогат

²Именно так называл А. И. Маркушевич и другие “реформаторы” то, что они делали со школой за пятилетие 1956–1960 гг. Любопытна аналогия с пятилетней горбачёвской “перестройкой”.

высшей математики в программах, их запредельная перегруженность, аксиоматика, схоластический формализм и абстрактность изложения в учебниках.

Сравнительный анализ (с 1981 по 1988 гг.) решаемости базовых экзаменационных заданий, проведённый преподавателями МАДИ, показал падение качества-2 почти в два раза [4 (1989, № 2), с. 57]. То же подтверждали другие вузы [там же, с. 42–43]. В 2013 г. результаты ЕГЭ по всей стране дают оценку качества-1 менее 1 % [4 (2013, № 7), с. 33].

Сегодня фиксируется незнание студентами таблицы умножения, площади круга и параллелограмма, неспособность складывать дроби и пр. Разлагаются те крохи знаний, которые раньше имели “двоечники”. Поэтому этот период можно назвать *гниением* нашего образования. К методическим факторам, запущенным реформой–70, добавились социальные и организационные – непрерывная дестабилизация работы учителей и её обесмысливание “процентоманией”, разрушение дисциплины и труда учащихся идеей свободы личности, навязывание школе ложных целей и методов (компьютеризация, информационные технологии, “развивающие” методики обучения, “вариативные” учебники, ЕГЭзация “компетентностный подход” и пр., и пр.), рост бюрократизации и поддержание хаотизации непрерывной сменой установок, требований, форм отчётности, и пр., и пр., и пр.

Реформа–70 отдаляется и отдаляется. И мы забываем, что *обвальная деградация началась с этой реформы, и её идеология – исходная, коренная причина* непрекращающегося вот уже почти 60 лет падения качества математического образования (и школьного, и вузовского). Ложный принцип этой реформы, – повышение научности, а на самом деле, псевдонаучности обучения, – изгнал из учебников педагогику и методику, изгнал Ученика. Он ответствен за деградацию мышления, а значит, и личности учащихся. Именно он привёл учащихся к массовому отворачиванию от учёбы. Он породил государственную ложь (так называемую “процентоманию”), которая заблокировала все возможности исправления ситуации. Он запустил прогрессирующую коррупцию в сфере образования. До сего дня наша школа живёт под тяжким бременем этой реформы. И мало кто помнит и понимает истоки сегодняшних бед. Но *забыв прошлое, не понимая истинных причин и движущих сил, глупо надеяться на будущее.*

Литература

- [1] Концепция развития математического образования в Российской Федерации / Электронный ресурс: <http://www.rg.ru/2013/12/27/matematika-site-dok.html>.
- [2] Костенко И. П. Проблема качества математического образования в свете исторической ретроспективы. Монография. – М., 2013.
- [3] О преподавании математики в V–X классах. – М.: АПН РСФСР, 1949.
- [4] Математика в школе. – 1939, № 4, 6; 1948, № 2; 1950, № 1; 1955, № 2; 1957, №№ 2, 4; 1958, № 6; 1959, №№ 1, 2; 1961, № 4; 1964 № 1; 1989, № 2; 2010, № 2; 2011, № 3; 2013, № 7.
- [5] Милюков П. Н. Очерки по истории русской культуры. Т. 2, ч. 2. – М.: Прогресс, 1994.

- [6] Народное образование в СССР: Общеобразовательная школа: Сб. документов 1917–1973 гг. – М.: Педагогика, 1974.
- [7] Высшая школа. – 1936, № 2; 1937, № 10; 1938, № 4.
- [8] Об очередных задачах преподавания математики в школе // На путях обновления школьного курса математики / Составители: А. И. Маркушевич, Г. Г. Маслова, Р. С. Черкасов. – М.: Просвещение, 1978.
- [9] Колягин Ю. М. Русская школа и математическое образование. – М.: Просвещение, 2001.

УДК 51:001.4

О КЛАССИФИКАЦИИ ТОЧЕК РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

Кузнецов В. О.

Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С. О. Макарова
Санкт-Петербург
e-mail: kvo_kuz@mail.ru

Kuznetsov V. O. On the classification of discontinuity points of function.
Different approaches to the classification of discontinuity points of function in a course of mathematical analysis are considered.

Keywords: point of discontinuity, piecewise continuous function, elementary function, one-sided limit.

Рассматриваются различные подходы к классификации точек разрыва функции в курсе математического анализа.

Ключевые слова: точка разрыва, кусочно непрерывная функция, элементарная функция, односторонний предел.

1°. В большинстве современных учебников по высшей математике точки разрыва функции делят на три категории: разрывы 1-го рода, разрывы 2-го рода и устранимые разрывы. При этом в [1–16] устранимый разрыв считается частным случаем разрыва 1-го рода, а в [17–27] — нет. Это расхождение в классификации точек разрыва функции не заслуживало бы отдельного обсуждения, если бы эта классификация не использовалась в формулировках последующих утверждений. Проанализируем, например, два определения в [17]:

- Точка a называется точкой разрыва 1-го рода, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правое и левое предельные значения¹:

$$f(a - 0) \neq f(a + 0). \quad (*)$$

¹ Здесь и ниже формулировки из обсуждаемых учебников набраны курсивом.

- Функция $y = f(x)$ называется кусочно непрерывной на сегменте $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых имеет разрыв 1-го рода и, кроме того, имеет односторонние предельные значения в точках a и b .

Из этих определений вытекает, что авторы этого учебника предлагают считать, что *функция $y = \operatorname{sign} x$ кусочно непрерывна, а её модуль — функция $y = |\operatorname{sign} x|$ — нет.*

Такая точка зрения на кусочно непрерывные функции представляется крайне противоестественной. Думается, что и сами авторы этого учебника вряд ли согласились бы с таким утверждением. Причина появления столь странного логического следствия в неудачном подходе к классификации точек разрыва. Отметим, что аналогичная несогласованность определений встречается и в других пособиях (см., например, [18]).

К неприятным последствиям привело появление условия (*) и в [26]. При написании этого учебника его авторы решили изменить логически безупречное

Определение [9, стр.109]. *Точкой разрыва первого рода функции $f(x)$ называется такая точка разрыва, в которой функция $f(x)$ имеет левый и правый пределы. Все остальные точки разрыва функции $f(x)$ называются её точками разрыва второго рода.*

В новом учебнике это определение формулируется так:

Определение [26, стр.101]. *Точкой разрыва первого рода функции $f(x)$ называется такая точка разрыва, в которой функция $f(x)$ имеет левый и правый пределы, не равные между собой. Все остальные точки разрыва функции $f(x)$ называются её точками разрыва второго рода.*

Из отредактированного таким образом определения вытекает, что $x = 0$ следует считать точкой разрыва 2-го рода функций $y = |\operatorname{sign} x|$ и $y = x^{-1} \sin x$. Такой же противоестественный вывод пришлось бы сделать и на основании определения точек разрыва в [24, стр. 128]. В обоих случаях авторы учебников, очевидно, не просчитали всех последствий от введения в определение условия (*).

Попытка использовать условие (*) в определении точек разрыва 1-го рода, но избежать появления возникающих при этом противоречий, приводит иногда к не слишком удачным формулировкам. Вот, например, определение в [16]:

Различают точки разрыва: первого рода (когда существуют конечные односторонние пределы функции слева и справа при $x \rightarrow x_0$, не равные друг другу) и второго рода (когда хотя бы один из односторонних пределов слева или справа равен бесконечности или не существует). ...² К точкам разрыва первого рода относятся также точки устранимого разрыва, когда предел функции при $x \rightarrow x_0$ существует, но не равен значению функции в этой точке.

Разрывать определение одного понятия поясняющими примерами — не самое удачное решение. Такое определение плохо воспринимается и запоминается. Кроме того, вторая часть этого определения фактически перечеркивает

² В тексте учебника определения разделены поясняющими примерами.

условие (*), использованное в формулировке первой части определения. Тем самым, составители пособия косвенно признают, что для идентификации точек разрыва 1-го рода это условие не подходит.

С точки зрения автора настоящей статьи логичней и проще считать устранимый разрыв частным случаем разрыва 1-го рода, а условие (*) при определении точки разрыва 1-го рода заменить условием существования конечных односторонних пределов $f(a-0)$ и $f(a+0)$. Указанные выше проблемы при этом исчезают. Например, в [14] это сделано так:

Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0 , то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ разрывна, а точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$ ³.

Точка x_0 разрыва функции $f(x)$ называется точкой разрыва первого рода, если существуют односторонние пределы функции $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ ⁴. Все прочие точки разрыва функции называются её точками разрыва второго рода.

Точка разрыва первого рода, в которой $f(x_0-0) = f(x_0+0)$ называется точкой устранимого разрыва

С небольшими оговорками так же классифицируются точки разрыва функции в [28] и в [29].

Отметим, что в защиту такого подхода говорит и используемая при классификации точек разрыва терминология. В противном случае устранимый разрыв логично было бы именовать разрывом 3-го рода или разрывом 0-го рода. Или полностью убрать числительные из терминологии и говорить об устранимых, конечных, бесконечных и т. д. точках разрыва⁵.

2°. Существуют и другие расхождения в классификации точек разрыва. Так, в некоторых учебниках (см., например, [3, 30, 31]) требуется, чтобы в точке разрыва функция была определена.

К недостаткам такого подхода можно отнести то, что

- Этот подход противоречит изложению этого вопроса, принятому сейчас в большинстве учебников, в том числе и в школьных (см., например, [32]).
- При таком подходе возникает терминологический “вакуум” при описании свойств функций. Например, о поведении функций $y = x^{-1}$, $y = \sin(x^{-1})$, $y = \arctg(x^{-1})$ и $y = x^{-1} \sin x$ в окрестности точки $x = 0$, можно будет лишь сказать, что все эти функции в точке $x = 0$ не определены. Чтобы объяснить разницу в поведении этих функций в окрестности точки $x = 0$ и причину, по которой мы занимаемся исследованием этого поведения, придётся строить громоздкие фразы “об исследовании поведения функции при приближении к изолированным точкам дополнения области определения функции”. Характерно, что даже сторонникам такого подхода не всегда удается удержаться в рамках столь ограничительной терминологии. Например, в [31] на стр. 192 читаем:

³ Автор этой статьи уточнил бы: *Если функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0 , но не является в этой точке непрерывной, то ...*

⁴ И здесь напрашивается уточнение: *... конечные односторонние пределы ...*

⁵ Таковую терминологию можно встретить, например, в [9].

... поскольку функция $\ln |x|$ разрывна в нуле, ...

что противоречит определению точки разрыва, приведенному в этом же учебнике.

- Поскольку при таком подходе у элементарных функций точек разрыва нет (см. также [33]), то у читателя может возникнуть впечатление, что точки разрыва являются редким исключением из правила, которое возможно только в том случае, когда значение функции в какой-либо точке специальным образом “испорчено”. Так, например, поведение функции в точках разрыва разбирается в [30] на примере функций

$$y = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad y = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

По-видимому, из-за наличия указанных недостатков этот подход не получил широкого распространения в учебной литературе, и, кроме трёх указанных выше монографий, автору не удалось найти других учебных пособий, придерживающихся такой классификации точек разрыва.

3°. Необходимость унификации используемой в университетских курсах и учебниках терминологии в настоящее время становится всё более очевидной еще и потому, что все чаще при оценке эффективности работы вузов учитываются результаты тестирования остаточных знаний студентов. Так как тестовые задания часто составляются не теми преподавателями, которые вели занятия в данном конкретном вузе, то результат тестирования зависит не только от уровня знаний студента, но и от того, насколько терминология теста близка к той терминологии, которая использовалась в процессе обучения. А поскольку авторы учебников используют зачастую взаимоисключающие подходы к терминологии, то составить тест, терминология которого не противоречила бы тому или иному учебнику, бывает нелегко. Не всегда при составлении тестов эту проблему удастся обойти и тогда в неприятном положении оказывается обследуемый вуз, его студенты и преподаватели.

Вот несколько примеров тестовых заданий на точки разрыва, которые встретились студентам нашего вуза на сайтах <http://www.nica.ru/> и <http://i-exam.ru/>.

1. Точка $x = 2$ является точкой разрыва функции ...

$$\circ y = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - x - 2} \quad \circ y = \frac{\ln(x - 3)}{x^2 - x - 2} \quad \circ y = \frac{\arcsin x}{x^2 - x - 2} \quad \circ y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x^2 - x - 2}$$

2. Число точек разрыва функции $y = \frac{1}{(x - 1)^2(x + 3)^3}$ равно ...

Как будут отвечать на эти тесты студенты, учившие математический анализ по учебникам [3, 30, 31]? Ведь в соответствии с терминологией, принятой

в этих учебниках, у элементарных функций вообще точек разрыва нет. Вопрос первого теста студентам может показаться провокационным, а на второй — они вправе дать ответ — 0, который вряд ли будет оценен компьютером положительно.

3.

Для функции $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 4}$
точка $x = -2$ является точкой

- разрыва второго рода
- непрерывности
- разрыва первого рода
- устранимого разрыва

и тот же самый вопрос (в другом тесте) для функции

4.

$$\dots f(x) = \frac{5}{4^{\frac{2}{x+2}} - 1} \dots$$

У студентов, обучавшихся по учебникам [15, 18, 27], подобные вопросы могут вызвать вполне законное недоумение, поскольку в этих учебниках нет ни слова о разрывах 2-го рода, а в популярном учебнике Пискунова нет и устранимых разрывов. Отметим, что студентам, обучавшимся по учебникам [1–16], формулировка вопроса, вообще, должна была показаться странной, поскольку устранимые разрывы их учили считать частным случаем разрывов 1-го рода. Действительно, какой ответ они должны были бы дать в случае функции $f(x) = (\sin(x + 2)) / (x + 2)$? Вряд ли правильный с их точки зрения ответ — разрыв 1-го рода — будет зачтён компьютером.

В заключение автор этой статьи хотел бы высказать пожелание, чтобы составители новых учебников по высшей математике и математическому анализу придерживались, по возможности, терминологии, принятой в [28], и поблагодарить доцентов кафедры математики ГУМРФ Войтко И. В. и Гулевича Н. М., обративших внимание автора на рассмотренную в статье терминологическую проблему.

Литература

- [1] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 3-х томах. Т. 1. — М.: Дрофа, 2003. — 704 с.
- [2] Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 13-е изд. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. — 624 с.
- [3] Зорич В. А. Математический анализ. Ч. I. Изд. 4-е — М.: МЦНМО, 2002. — 664 с.
- [4] Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов. — 3-е изд., исправл. — М.: Физматлит, 2001. — 672 с.
- [5] Теляковский С. А. Курс лекций по математическому анализу. 1 сем. — М.: МГУ, 2002. — 160 с.
- [6] Романовский П. И. Общий курс математического анализа в сжатом изложении. — М.: Физматлит, 1962. — 332 с.

- [7] Дороговцев А. Я. Математический анализ. Краткий курс в современном изложении. 2-е изд. — К.: Факт, 2004. — 560 с.
- [8] Бесов О. В. Лекции по математическому анализу. В 2 ч.: Учеб. пособие. Ч. 1. — М.: МФТИ, 2004. — 328 с.
- [9] Бермант А. Ф. Курс математического анализа. Ч. 1. 12-е изд., стер. — М.: Физматлит, 1959. — 466 с.
- [10] Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Высшая школа, 1999. — 695 с.
- [11] Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс, 4-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2006. — 608 с.
- [12] Лунгу К. Н., Макаров Е. В. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 1. — 2-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 216 с.
- [13] Бугров Я. С., Никольский С. М., под ред. Садовничего В. А. Высшая математика. Учеб. для вузов: В 3 т., 6-е изд., Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Дрофа, 2004. — 512 с.
- [14] Баврин И. И., Матросов В. Л. Высшая математика: Учеб. для вузов. — М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2003. — 400 с.
- [15] Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. пособие для вузов: в 2 т. — М.: Интеграл-Пресс, 2006. Т. 1. — 415 с.
- [16] Высшая математика для экономистов: Учеб. для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям; под ред. проф. Н. Ш. Кремера, 3-е изд. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. — 479 с.
- [17] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Ч. 1: Учеб. для вузов. 7-е изд. — М.: Физматлит, 2005. — 648 с.
- [18] Шипачев В. С. Высшая математика: Учеб. для немат. спец. вузов. — 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 1990. — 479 с.
- [19] Яковлев Г. Н. Лекции по математическому анализу. Ч. 1. Учеб. пособие для вузов. — М.: Физматлит, 2001. — 400 с.
- [20] Иванов Г. Е. Лекции по математическому анализу. Ч. 1. Учеб. пособие. — М.: МФТИ, 2000. — 359 с.
- [21] Бутузов В. Ф. и др. Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособие. 5-е изд. — М.: Физматлит, 2002. — 480 с.
- [22] Черненко В. Д. Высшая математика в примерах и задачах: Учеб. пособие для вузов. В 3 т.: Т. 1. — СПб.: Политехника, 2003. — 703 с.
- [23] Красс М. С. Чупрынов Б. П. Математика для экономистов: Учеб. пособие — СПб.: Питер, 2005. — 464 с.
- [24] Балдин К. В., Башлыков В. Н., Рукосуев А. В. Высшая математика: Учеб. — М.: Флинта: НОУ ВПО “МПСи”, 2010. — 360 с.
- [25] Ильин В. А., Куркина А. В. Высшая математика: Учеб. — М.: ООО “ТК Велби”, 2002. — 592 с.
- [26] Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа. Учеб. для вузов. 11-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2005. — 736 с.
- [27] Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике: Учеб. пособие. 5-е изд. — СПб.: Изд-во “Лань”, 2007. — 688 с.
- [28] Математическая энциклопедия. В пяти томах / Гл. ред. И. М. Виноградов. — М.: Советская энциклопедия. Т. 4, 1984. — 608 с.

- [29] Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю. В. Прохоров — М.: Сов. энциклопедия, 1988. — 847 с.
- [30] Райков Д. А. Одномерный математический анализ. — М.: Высшая школа, 1982. — 250 с.
- [31] Камынин Л. И. Курс математического анализа. Т. 1, 2-е изд. — М.: Изд-во МГУ, 2001. — 432 с.
- [32] Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учеб. для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) — 6-е изд. — М.: Мнемозина, 2009. — 424 с.
- [33] Кузнецов В. О. Об элементарных и неэлементарных функциях // “Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр.” Вып. 9. — Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2014. — С.133–137.

УДК 378.147

ОБУЧАЮЩИЕ ПРИЕМЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕСТОВ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Лазарева Е. Г.¹, Устинова И. Г.²

Томский государственный университет¹

Томский политехнический университет²

Томск

e-mail: lazareva@math.tsu.ru

Lazareva E. G., Ustinova I. G. Teaching methods of higher mathematics computer tests. We consider the possibilities of an application of the computer tests for teaching of the higher mathematics to the students. We describe the methods with the help of which the test tasks of different types acquire learning orientation. Five types of the teaching tasks are analyzed.

Keywords: testing, learning test, higher mathematics teaching.

Рассматриваются возможности применения компьютерных тестов для обучения студентов высшей математике. Описаны приемы, с помощью которых тестовые задания различных типов приобретают обучающую направленность. Проанализированы пять типов обучающих заданий.

Ключевые слова: тестирование, обучающий тест, обучение высшей математике.

В настоящее время в России формируется новая система образования, которая ориентирована на вхождение в мировое образовательное пространство. Этот процесс влечёт изменения в технологиях обучения. В современных условиях преподаватель ВУЗа не может (и не должен) уделять достаточно времени для обучения каждого из своих студентов. С другой стороны, студент (особенно первого года обучения) не всегда умеет определять самостоятельно, достаточно ли хорошо он усвоил изучаемый материал и может ли в дальнейшем этот материал свободно применять. Для решения этой проблемы мы предлагаем применять компьютерное тестирование, которое направлено не на контроль знаний и умений обучающегося, а на стимулирование его познавательной деятельности и

разъяснение изучаемого материала. Согласно [1], с помощью тестов проверяется уровень итоговой подготовленности, посредством же применения заданий в тестовой форме этот уровень создаётся. Следует отметить несомненный интерес студентов к компьютерным заданиям в тестовой форме. Интеграция тестирований в учебный процесс способствует формированию навыков самостоятельной работы студентов, ибо обучающийся сам определяет, когда, в какое время и сколько времени он будет работать в электронной среде.

Внедрение в широкую практику информационно-коммуникационных технологий требует изменений в учебном процессе, так как для формирования компетенций у обучающихся необходимо создание учебных ситуаций, которые могут быть реализованы в специальных средах, позволяющих преподавателю задавать вектор процесса обучения, а так же контролировать процесс обучения. Так, на кафедре общей математики Томского государственного университета создан и используется в преподавании комплекс тестов по математическому анализу [2, 3], в котором сделана попытка внедрить обучающие приемы в тестовые задания. Этот комплекс подготовлен в программе “Айрен” [4], созданной и впервые внедренной в учебный процесс ВУЗа в Уральском федеральном университете [5]. Подробности применения комплекса обучающих тестов по математическому анализу приведены в [6]. Статистическая обработка результатов тестирований описана в [7]. Кроме того, в последнее время широко внедряется в практику преподавания дистанционная система MOODLE [8]. Сотрудниками кафедры общей математики подготовлены и внедрены в учебный процесс два электронных курса MOODLE, также включающих в себя компьютерные тесты обучающей направленности: “Математический анализ. Дифференцирование”, “Дифференциальные уравнения. Часть I”. На кафедре высшей математики Томского политехнического университета внедрен электронный курс “Линейная алгебра и аналитическая геометрия”. Таким образом, появляется необходимость анализа обучающих приёмов и методов, используемых в тестовых заданиях по различным разделам высшей математики, независимо от применяемой системы тестирования.

Типы обучающих заданий, реализованные в тестах:

- задания, содержащие модификаторы;
- задания на классификацию и соответствие;
- задания, содержащие графические иллюстрации;
- задания, содержащие теоретический материал;
- задания, содержащие информацию о способе решения задачи.

Очевидно, что некоторые из указанных типов заданий могут и не иметь обучающей направленности. В контрольных и диагностических тестах часто используются задания данных типов. Поэтому стоит подробнее описать именно обучающие приёмы, использованные при создании тестовых заданий.

Обучающие задания с модификаторами (изменяющимися числовыми параметрами) составлены так, чтобы при неоднократном решении похожих заданий студент мог бы выделить ту информацию, которая является определяющей для получения правильного ответа на данное задание. Например:

Выберите из данных функций первообразные для $f(x) = -8 \sin(4x)$:

- 1) $2 \sin(4x)$,
- 2) $-4 \sin^2(2x)$,

- 3) $-4 \cos^2(2x)$,
- 4) $2 \cos(4x)$,
- 5) $4 \sin(2x) \cos(2x)$,
- 6) $-4 \sin(2x) \cos(2x)$,
- 7) среди предложенных вариантов нет верных.

Решая такое задание несколько раз, с разными числовыми параметрами, и получая каждый раз оценку своего ответа, студент приходит к выводу, что первообразная тригонометрической функции может быть записана по-разному, она не единственна и для нахождения всех правильных ответов удобно воспользоваться тригонометрическими тождествами. Задание даст ещё больше “пищи для размышлений” студенту, если ему будут предлагаться функции $f(x)$ различных типов, с несколькими первообразными и похожими на них дистракторами.

Обучающие задания на классификацию и соответствие содержат информацию, способствующую их решению, или служат для отработки новых теоретических понятий. Иначе такие задания превращаются в очень сложные, которые не всегда подходят даже для контроля знаний. Например:

Используя геометрический смысл интеграла, распределите данные интегралы на положительные, отрицательные и равные нулю:

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_1^e \ln^5 x \, dx; & 2) \int_{1/e}^1 \ln^5 x \, dx; & 3) \int_{-1}^1 x^4 e^{-x^2} \, dx; \\
 4) \int_{-1}^1 x^5 e^{-x^2} \, dx; & 5) \int_0^{2\pi} \sin^5 x \, dx; & 6) \int_{\pi}^{2\pi} x \sin^5 x \, dx.
 \end{array}$$

Очевидно, что если убрать упоминание о геометрическом смысле интеграла, то решение этого задания (при неправильном подходе) очень усложнится.

Вопрос на соответствие из темы “Системы линейных уравнений”:

Установите соответствие между термином и его значением.

1. Система линейных уравнений называется несовместной, если она ...
2. Система линейных уравнений называется совместной, если она ...
3. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ...
4. Система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ...
5. Система линейных уравнений называется определённой, если она ...
6. Система линейных уравнений называется неопределённой, если она ...

Предлагаемые ответы:

- 1) имеет множество решений,
- 2) не имеет решений,
- 3) ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен числу неизвестных,
- 4) ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы,
- 5) имеет хотя бы одно решение,
- 6) имеет единственное решение.

При ответе на этот вопрос студент должен разобраться с определениями и критериями, описывающими свойства систем линейных уравнений. В этом заключается ещё одна обучающая технология вопросов на соответствие и классификацию: возможность при ответе на один вопрос сравнить несколько математических понятий, идей, методов или утверждений.

Обучающие задания, содержащие графические иллюстрации, несут в себе визуальную информацию о решаемых задачах, которой, как правило, не хватает ввиду дефицита учебного времени. Например, в задании “Установите соответствие между данными степенными рядами и их кругами сходимости в $\mathbb{C}$ ” для указанных рядов предложены в качестве ответов нарисованные на комплексной плоскости круги, а не их формальное описание.

В задании

“Дан график функции. Каковы свойства этой функции?”

Варианты ответов:

- не инъекция, не сюръекция;
- инъекция, не сюръекция;
- сюръекция, не инъекция;
- биекция.

функция задана только графически, без указания формулы. Это означает для студента, что указанные свойства функции полностью вытекают из её графика. Варианты ответов дают возможность разобраться сразу с тремя новыми понятиями и их комбинациями. Кроме того, это задание с открытым ответом, т. е. испытуемый должен сам вписать правильный ответ: новые термины требуют особого внимания!

Обучающие задания, содержащие теоретический материал, не всегда можно выделить из общей массы тестовых заданий. Но в некоторых заданиях ясно даны ссылки на теорию, что стимулирует её освоение. Например:

Выберите правильное утверждение для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2}{n}$:

- 1) ряд сходится;
- 2) ряд расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости;
- 3) необходимое условие сходимости выполнено, но ряд расходится.

Ясно, что, не зная, что такое “необходимое условие сходимости”, можно лишь угадать ответ. Кроме того, здесь проявляется разница между необходимым условием и критерием сходимости. Такие виды вопросов очень удобны при подготовке студентов к практическому занятию. Предполагается, что студент до занятия разбирает лекционный материал и после этого отвечает на вопросы теста по теории. Как показывает практика, занятия при такой организации учебного процесса вести проще: нет необходимости ещё раз напоминать основные моменты лекционного материала.

Наконец, *задания, содержащие некоторую информацию о способе решения задачи*, которые фактически уже встречались. Приведём пример из теста по аналитической геометрии. Структура вопроса, реализованного в MOODLE, содержит вложенные в текст варианты ответа. Результат ответа – связный текст, содержащий информацию с правильно выбранными из окон [] вариантами.

Приведите уравнение линии $y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$ к каноническому виду. Это уравнение определяет на плоскости 1) параболу 2) эллипс 3) гиперболу 4) окруж-

ность]. [1) Центр; 2) Вершина] этой кривой в точке с координатами, [1) $(-1; 3)$; 2) $(1; -3)$; 3) $(-3; -1)$; 4) $(3; 1)$]. [1) Полуоси 2) Радиус 3) Ветви] этой кривой [1] вниз; 2) вправо; 3) $a = 4$; $b = 1$; 4) влево; 5) $r = 4$; 6) вверх; 7) $a = 4$; $b = 0$; 8) $r = 2$].

Предлагая студентам наши тесты, мы подчеркиваем, что идёт процесс обучения, мы не хотим сразу получить от них правильные ответы на все наши вопросы, мы хотим научить наших студентов разбираться в том материале, который они изучают. Поэтому, например, в задании “Установите соответствие между данными функциями и их разложениями по формуле Маклорена 3-го порядка” добавлена фраза “Используйте стандартные разложения” и выписаны те разложения, которые необходимы для решения данного задания.

Таким образом, обучающие приемы, которые мы предлагаем применять при составлении тестовых заданий, являются комбинацией вариативности заданий, повышения наглядности математической информации, использования теоретических основ изучаемого предмета и указаний на конкретные методы решения. Хотим в заключении подчеркнуть, что содержание и формы тестовых заданий, предлагаемых студентам, не должны быть определены заранее и неизменны. Наша практика применения тестирующих технологий в ВУЗе показала, что обучающие тесты должны иметь авторское содержание, зависеть от изменений не только в программе преподавания, но и в контингенте обучающихся. Поэтому комплексы тестов должны развиваться, видоизменяться, сохраняя определённое направление, в данном случае, обучающее.

Литература

- [1] Аванесов В. С. Применение тестовых форм в e-Learning с проведением дистракторного анализа // Образовательные технологии. 2013. № 3. – С. 125–135.
- [2] Лазарева Е. Г., Устинова И. Г. Комплекс тестов по математическому анализу – I // Тезисы докладов. Всероссийская конференция по математике и механике. – Томск, 2013. – С. 110.
- [3] Путятин Е. Н., Лазарева Е. Г., Устинова И. Г. Комплекс тестов по математическому анализу – II // Тезисы докладов. Всероссийская конференция по математике и механике. – Томск, 2013. – С. 111. URL: http://www.math.tsu.ru/conf2013/MMF_sbornik.pdf
- [4] URL: <http://irenproject.ru/>
- [5] Матвеева Т. А. Формирование математической культуры студентов в условиях информатизации образования // Образование и наука. 2007. № 4 (46), – С. 76–82.
- [6] Лазарева Е. Г., Устинова И. Г., Подстригич А. Г. Использование тестирующих программ в процессе обучения высшей математике // Вестн. Томского гос. пед. ун-та (Tomsk State Pedagogical University Bulletin). 2012. – Вып. 7 (122). – С. 217–222.
- [7] Лазарева Е. Г., Устинова И. Г. Особенности обучающих заданий по математике в тестовой форме // Материалы V Международной конференции “Математика, её приложения и математическое образование” (МПМО‘14). – Улан-Удэ, 2014 г. – С. 192–196.
URL: <http://www.confname.ru/documents/pdf/MAME'V.pdf>

[8] URL: <https://moodle.org/>

УДК 372.851

ИЗУЧЕНИЕ СТУДЕНТАМИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ КАК МОДЕЛЕЙ-ПОЛИАД

Мельников Ю. Б.¹, Мельникова Н. В.²

Уральский государственный экономический университет¹

Уральский федеральный университет²

Екатеринбург

e-mail: UriiMelnikov58@gmail.com

Melnikov Yu. B., Melnikova N. V. Investigation of mathematical objects as model-polyads. We consider method of mathematical education based on investigation of mathematical objects as a some type of system of models.

Рассматривается методика обучения математике, основанная на изучении математических объектов как некоторых систем моделей.

В системном подходе принято, что *с одной стороны*, каждый объект может быть представлен системой моделей, *с другой стороны*, он может рассматриваться как модель или компонент модели других моделей. Под «моделью» здесь мы понимаем систему из двух компонентов [3, 4]: I) модельно-содержательного компонента, т. е. образа, в котором собственно отражены свойства прототипа; II) интерфейсного компонента, обеспечивающего обмен информацией между прототипом и образом.

При этом разные модели могут описывать либо разные аспекты прототипа, либо обеспечивать разные представления одних и тех же особенностей прототипа. Например, внешность человека может быть отражена с помощью портрета (средствами живописи), с помощью скульптуры, словесным описанием. Все они отражают одну особенность прототипа. Применяются также модели, отражающие другие аспекты: состояние здоровья отражается в медицинской карте, уровень и характер профессиональной компетентности в виде дипломов, сертификатов и других документов.

В ситуации, когда существенно разные модели отражают одни и те же особенности прототипа, между ними устанавливаются непосредственные связи. На рис. 1 изображено представление прототипа моделями $\langle I_1, S_1 \rangle$ и $\langle I_2, S_2 \rangle$, где I_1, I_2 — интерфейсные, S_1, S_2 — модельно-содержательные компоненты, и формирование модели-диады [7] $\overbrace{S_1 I_{12} S_2}^{A_1}$, где I_{12} — интерфейсный компонент.

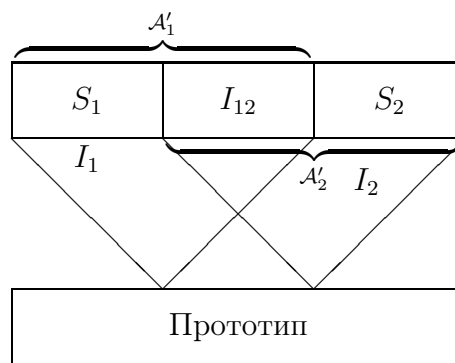


Рис. 1. Иллюстрация к понятию «модель-диада».

Например, векторную алгебру можно представить в виде модели-триады [5].

Векторно-геометрическая модель	Векторно-символическая модель	Координатная модель
	$\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$	$(6; 8) = 2(2; 1) + (2; 6),$
	Другой пример элемента векторно-символической модели:	$\begin{cases} 6 = 2 \cdot 2 + 2, \\ 8 = 2 \cdot 1 + 6 \end{cases}$
	$\vec{a} \perp (\vec{b} - \alpha \vec{a})$	$\begin{cases} c_x = 2a_x + b_x, \\ c_y = 2a_y + b_y \end{cases}$

В виде модели-полиады представлена линейная алгебра [5], значительная часть математического анализа (задание функции, с одной стороны, формулой, с другой стороны, графиком [6]), аналитическая геометрия, теория многочленов (многочлен как алгебраическое выражение и многочлен, как функция) и т. д.

Представление объекта в виде модели-полиады позволяет в рамках одного исследования применять возможности нескольких существенно различных теорий и методов. Примером является доказательство теоремы о существовании для любой симметричной матрицы A такой ортогональной матрицы T , что $T^{-1}AT = T^tAT$ является диагональной матрицей. В этом доказательстве рассматривается, с одной стороны, модель алгебра матриц, в терминах которой сформулирована теорема, с другой стороны, алгебра линейных операторов, интерфейсный компонент I_{12} между которыми основан на теореме о том, что для линейного пространства размерности n с базисом $\mathbf{B}$ функция, каждому линейному оператору ставящая в соответствие матрицу этого оператора в базисе $\mathbf{B}$, является изоморфизмом алгебры линейных операторов на алгебру матриц размерности $n \times n$. В этом доказательстве, на первом этапе рассматривается линейный оператор $\hat{A}$, имеющий в некотором ортонормированном базисе матрицу A . В силу симметричности матрицы A оператор $\hat{A}$ является самосопряженным. Таким образом, осуществлен переход от алгебры матриц к алгебре линейных операторов. Теперь применяем аппарат алгебры матриц: для любого самосопряженного линейного оператора существует ортонормированный

базис $\mathbf{B}$ евклидова пространства, состоящий из собственных векторов оператора $\hat{A}$. После этого осуществим обратный переход: рассмотрим матрицу T перехода из $\mathbf{B}$ в базис $\mathbf{B}$. Вновь вернёмся в алгебру операторов: рассмотрим линейный оператор $\hat{T}$, имеющий в базисе $\mathbf{B}$ матрицу T . Последний оператор переводит ортонормированный базис $\mathbf{B}$ в ортонормированный базис $\mathbf{B}$, следовательно $\hat{T}$ является ортогональным оператором. Следовательно, сопряженный оператор $\hat{T}^*$ совпадает с обратным оператором $\hat{T}^{-1}$, откуда $T^t = T^{-1}$. С одной стороны, в ортонормированном базисе $\mathbf{B}$ матрица A' оператора $\hat{A}$ является диагональной, с другой стороны, согласно теореме об изменении матрицы оператора при переходе в другой базис (которую можно рассматривать как элемент интерфейсного компонента I_{12}) имеет место равенство $A' = T^{-1}AT$, что, как показано выше, в данном случае совпадает с T^tAT .

Использование моделей-диад, моделей-триад и других полиад хорошо иллюстрируется следующей аналогией: по ровной слегка шершавой вертикальной стене даже очень сильный человек не сможет подняться высоко, а вот если рядом находится другая стена, параллельная исходной, он, опираясь на эти стены, может забраться на довольно большую высоту.

Не вдаваясь в детали, отметим, что систему $S_1I_{12}S_2$ (см. рис. 1) мы называем моделью-диадой только в случае, когда модели I_1S_1 и I_2S_2 описывают прототип «одинаково подробно», «с близкой точностью». Корректное описание требует рассмотрение таких понятий как «адекватность модели», «характеристика адекватности», «корректность модели», «достоверность модели» и др., что выходит за рамки данной статьи.

Отметим следующие особенности обучения математике с использованием представления математических объектов в виде моделей-полиад.

Во-первых, при изучении моделей-полиад особое внимание следует уделять умению использовать интерфейсный компонент I_{ij} , см. рис. 1, например, правилу «вектор $\vec{v}$ имеет координаты (p, q) тогда и только тогда $\vec{v} = p\vec{i} + q\vec{j}$ ».

Во-вторых, явное выделение компонент модели-полиады упрощает реализацию всех вариантов отношения к математическим результатам: а) как к единице информации, которую необходимо запомнить и понять; б) как к объекту, с которым мы будем выполнять некоторые действия: преобразовывать, комбинировать с другими объектами, строить модели или искать прототипы и др.; в) как к инструменту деятельности; г) как к цели деятельности. Например, мы постарались реализовать эти варианты при изложении комплексных чисел как модели-квадриады в работе [5]. Компонентами этой модели являются представление комплексных чисел 1) как многочленов $\alpha + i\beta$ с дополнительным отношением $i^2 = -1$; 2) как векторов комплексной плоскости; 3) как матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$; 4) как множество упорядоченных пар $(\alpha; \beta)$.

В-третьих, желательно обращать внимание на то, до какой степени обратима информация, передаваемая с помощью интерфейса I_{ij} , т. е. насколько адекватно она передается в обе стороны. Например, при задании числовой функции¹ в виде модели-диады, компонентами которой являются формула (например, $f(x) = \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — некоторое алгебраическое выражение от x) и

¹Т. е. функции, отображающей $M \rightarrow \mathbb{R}$, где $M \subseteq \mathbb{R}$.

график, представленным в виде реального чертежа (а не абстрактного “множества точек”), следует иметь в виду возможную потерю информации или ее искажение. Например, искажение информации обусловлено: 1) неустранимой погрешностью чертежа, связанной с ненулевой толщиной линий и особенностями фактуры основы, на которой выполнен рисунок; 2) погрешностями чертежа, которые вносят приборы, с помощью которых строится рисунок; 3) приближенным характером численных вычислений значения функции и т. д. При обмене информацией между моделями числовой функции, представленными графиком и формулой, задающей эту функцию, теряется информация 1) о масштабах единичных отрезков на осях координат; 2) о конкретном виде выражения $\Phi(x)$, например, одна и та же функция задается и формулой $y = x^2 - 1$, и формулой $y = (x - 1)(x + 1)$, и формулой $y = (x + 1)(x - 1)$ и т. п.

Как показывают теоретические исследования и практика обучения, обучение математике с выделением компонент моделей-полиад, рассматриваемых в учебном курсе, имеет определенные достоинства. Например, появляется возможность при изучении математики обучать *математическому моделированию*, не отвлекаясь от математического содержания на рассмотрение типовых физических, экономических и других моделей за счёт использования математических объектов не только в качестве образа, “моделирующего объекта” (модели в традиционном понимании), но и в качестве прототипа, “моделируемого объекта”. Как мы отметили выше, благодаря моделям-полиадам удаётся в одном исследовании совмещать возможности существенно разных теорий и методов. Понятие модели-полиады (даже без явной ссылки на термин) позволяет формировать конструктивное представление о таком популярном методе научной и технической деятельности как *отождествление* разных объектов.

Реализация рассматриваемой методической идеи потребовала специального учебно-методического обеспечения (например, [5, 6] и сопутствующих материалов: тестов, домашних заданий) и создания новых методик обучения или адаптации уже известных методик.

Литература

- [1] Богданов А. А. Тектология (Всеобщая организационная наука). В 2-х н.: Кн.1. — М.: Экономика, 1989. — 304 с.
- [2] Щедровицкий Г. П. Принципы и общая схема методологической организации системно-структурных исследований и разработок. — М.: Наука, 1981. — с. 193–227.
- [3] Мельников Б. Н., Мельников Ю. Б. Проблемы методологии исследования геотехногенных структур. — Екатеринбург, УрО РАН, УГТУ, 1998. — 304 с.
- [4] Мельников Ю. Б. Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей. — Екатеринбург: Уральское издательство, 2004. — 384 с.
- [5] Мельников Ю. Б. Алгебра и теория чисел. Изд-е 4-е, испр. и доп. [Электронный ресурс]. — Екатеринбург: Издательство УрГЭУ, 2010 г., 70 уч.-изд. л. [режим доступа свободный]
<http://lib.usue.ru/resource/free/12/MelnikovAlgebra4/index.html>

- [6] Мельников Ю. Б. Элементарная математика [Электронный ресурс] : учеб. пособие. — Екатеринбург : Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2014, 27 уч.-изд. л. <http://lib.usue.ru/resource/free/14/MelnikovAlgebra5/index.html>
- [7] Мельников Ю. Б., Селькова Ю. А. Модели-диады, модели-триады, модели-полиады и их использование в обучении математической деятельности // Инновационные технологии обучения математике в школе и в вузе: Материалы XXX Всероссийского научного семинара преподавателей математики вузов (29–30 сентября 2011 г., г. Елабуга). — Елабуга, 2011.— с. 51–54.

УДК 372.851

ИНТЕРАКТИВНОЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ: УПРАВЛЕНЧЕСКИЙ И ЭКОНОМИЧЕСКИЙ АСПЕКТЫ

Мельников Ю. Б., Ширпужев С. В.

Уральский государственный экономический университет

Екатеринбург

e-mail: UriiMelnikov58@gmail.com

Melnikov Yu. B., Shirpuzhev S. V. Interactive educational and methodical providing: economic and social and psychological aspects. Some moments of economic and social and psychological aspect are considered development and applications of interactive educational and methodical providing course of mathematics.

Рассматриваются некоторые моменты экономического и социально-психологического аспекта разработки и применения интерактивного учебно-методического обеспечения курса математики.

В последние годы электронные средства обучения (в частности, электронные обучающие ресурсы) находят всё более широкое применение. В целом их применение приносит положительный результат, хотя далеко не всегда оправдывает все ожидания преподавателей, разработчиков и администраторов, организующих процесс обучения. Далеко не всегда очевидны преимущества электронных средств обучения по сравнению с традиционными “бумажными” учебниками. Более того, наличие этих преимуществ иногда оспаривается, и не всегда обосновательно. В данной работе мы коснёмся управленческого и экономического аспектов применения электронных средств обучения.

Управленческий аспект включает в себя вопросы управления учебной деятельностью обучаемых, управления инфраструктурой и ресурсами системы обучения, оценки и администрирования процесса обучения и его результатов. Даже беглый обзор всех этих вопросов в рамках небольшой статьи невозможен, например, вопрос признания результатов обучения (самообучения) в электронных системах обучения требует, в частности, учёта и изменения юридических норм и правил. Поэтому ограничимся некоторыми моментами, относящимися к

управлению деятельностью обучаемых и управления инфраструктурой.

Можно сказать, что теория и методика обучения в целом занимается вопросами менеджмента, управления действиями обучаемых и педагога. В частности, учебник должен включать в себя инструменты управления деятельностью обучаемых [1], [4]. Электронные средства обучения предоставляют значительно более мощные и эффективные инструменты управления деятельностью обучаемого, чем традиционные “бумажные” средства обучения. Именно поэтому очень опасно смешение понятий “электронное пособие” (учебник) и “пособие в электронной форме”. Однако реализация потенциала электронных средств обучения требует от разработчика и преподавателя (даже если эти функции выполняет один человек) хорошего (иногда виртуозного) владения соответствующим компьютерными и педагогическими технологиями. Это сочетание наблюдается, в основном, в среде преподавателей информатики, а среди математиков, физиков и преподавателей других дисциплин такое сочетание встречается гораздо реже. Привлечение IT-специалистов является весьма дорогостоящим мероприятием. Один из вариантов решения этой проблемы состоит в привлечении студентов к процессу создания обучающих ресурсов. В Уральском государственном экономическом университете мы сделали это в форме инициативной лаборатории интерактивного учебно-методического обеспечения. В этом случае, как показал наш опыт, можно управлять деятельностью студентов – членов лаборатории – таким образом, что они параллельно с изучением учебного предмета приобретают компетенции в области управления, планирования деятельности, оценки моделей и результатов деятельности, её корректирования и т.п. Эти студенты рассматривают учебный материал не только с позиции студента, но и с позиций педагога и разработчика учебных материалов. Их отношения с педагогом являются значительно более активными, чем у других студентов, что особенно актуально для “младшекурсников”. Их критические замечания, пожелания (иногда даже в форме “мечты”), собственные варианты реализации идей иногда побуждали нас пересмотреть некоторые свои представления и методические установки, приводили к рождению новых идей. Преподаватель – разработчик электронного учебно-методического обеспечения – в определенной степени освобождается от некоторой рутинной деятельности (далеко не том объеме, который требуется), что позволяет генерировать, реализовывать и апробировать различные методические и технические идеи.

Например, в 2014–15 учебном году мы опробовали следующий вариант организации самостоятельной работы студентов. Была разработана система генерирования индивидуальных домашних заданий в тестовой форме, причем автоматическая проверка результатов их выполнения осуществляется с помощью Java-скрипт, встроенных в файл формата pdf. Для этого был использован пакет **acrotex** издательской системы **L^AT_EX**. Файл с результатами выполнения и протоколом автоматической проверки заданий студент сохранял, обновляя исходный файл (эта возможность реализована в Acrobat Reader 11), после чего полученный файл высылается преподавателю по электронной почте, указанной в файле с заданием. Преподаватель просматривает протокол выполнения и проверки заданий и выставляет оценки вручную. При этом в заданиях реализованы различные методические идеи, благодаря чему некоторые из них воспринимаются как “нестандартные”. Такая форма организации самостоятельной работы

студентов, с ручным контролем имеет ряд преимуществ. Во-первых, имеется возможность в одной работе сочетать тесты с автоматическим оцениванием и задания, для которых необходима ручная проверка. Во-вторых, студенты первого курса нередко не решаются обращаться к преподавателю с вопросами или не могут (например, в силу неорганизованности) выбрать время для общения с педагогом. Как показал опыт, в нашем случае студенты, высылая полностью или частично решенное задание, используют эту возможность задать вопрос и получить ответ от преподавателя. В-третьих, использование единого формата pdf и для учебника, и для файла с тестами упрощает организацию гиперссылок, не требует установки дополнительного программного обеспечения, тем более, что **Adobe Reader**, являясь бесплатной программой, уже установлен на многих (видимо, на большинстве) компьютеров. В-пятых, формат pdf позволяет организовать гиперссылки на популярный формат html.

Рассмотрим **экономический аспект** применения электронных средств обучения. Издание в “бумажном исполнении” учебного пособия или учебника сопряжено с расходами на его печать и распространение (в частности, библиотечное обслуживание). Для электронного пособия структура расходов существенно изменяется: во-первых, подготовка полноценного электронного учебника (а не учебника в электронной форме) требует значительно больших усилий и, следовательно, большего расхода разнообразных ресурсов, во-вторых, требуются средства на поддержание и развитие информационной системы (хостинг, информационные сервисы, разработка и изменение дизайна и др.). Однако при правильной организации общий расход ресурсов на разработку, издание и обслуживание электронных обучающих систем в итоге оказывается ниже по сравнению с учебниками и пособиями в традиционной форме. В самом деле, во-первых, следует учесть, что сейчас учебные заведения в любом случае тратят значительные ресурсы на развитие и поддержку сайта вуза и информационных сервисов, и доля расходов собственно на администрирование электронного учебно-методического комплекса не слишком велика. Во-вторых, по сравнению с администрированием электронных учебно-методических ресурсов обслуживание “бумажных” пособий и учебников требует расходов на содержание большой библиотеки, восстановление книг, поврежденных в процессе использования или утраченных по различным причинам, переиздание, связанное с корректировкой содержания. В-третьих, электронные ресурсы значительно проще корректировать и развивать по сравнению с пособиями, учебниками, задачками и др., изданными в бумажной форме, причём внесение изменений не сопровождается перепечатыванием всего тиража. Последний пункт оказывается особенно актуальным в связи с частыми изменениями учебных программ и периодическим переходом ко ФГОС нового поколения. В-четвёртых, при ориентации на преимущественно электронные средства обучения снижаются расходы на издание так называемых “рабочих тетрадей” и других одноразовых продуктов, упрощается подготовка материалов для индивидуального использования, в том числе с указанием ФИО и других необходимых данных конкретного студента. В-пятых, издание литературы в бумажной форме требует либо обращения к сторонним типографиям, либо создания и поддержания собственной типографии. При этом из-за неравномерности её загрузки иногда возникают задержки с изданием необходимой литературы. Последний фактор для литературы в

электронной форме несущественен.

Отметим, что для электронных учебно-методических материалов задача логистики радикально упрощается, поскольку организация доступа потребителя к печатной продукции требует значительных ресурсов библиотеки и/или организации взаимодействия с торговыми сетями. Доступ к электронным ресурсам осуществляется через Интернет или локальную сеть вуза, имеются развитые инструменты регулирования доступа, значительно упрощается задача оперативного корректирования материала и его апробирования до официальной публикации, что положительно сказывается на качестве учебной литературы. Отличительной чертой грамотно сконструированного учебного пособия является использование разнообразных средств управления деятельностью обучающихся. В этом отношении электронный учебник и электронное пособие предоставляет автору значительно большие возможности по сравнению с пособием “в бумажном исполнении” за счёт удобной навигации, упрощения поиска, регулирования предоставления информации (например, постепенное появление частей формулы или других фрагментов текста в соответствии с логикой, выбранной автором), быстрого доступа к материалам из обширной базы и др. В частности, предметный указатель для электронного пособия уже не является обязательным элементом в связи с возможностью контекстного поиска во всем документе. Полноценный электронный обучающий ресурс насыщен гиперссылками для перехода, например от практической части к теоретической, для актуализации необходимых знаний для выполнения учебного задания, для обращения к источникам, в которых подробно освещается использованное в тексте понятие, свойство или другой результат. В печатных пособиях данная возможность реализована по средством списка литературы, соответствующих сносок и предметного указателя. Однако получение необходимого литературного источника в бумажной форме обычно связано, как минимум, с посещением библиотеки, а иногда и с использованием межбиблиотечного абонементов, с соответствующими потерями времени. Значительный расход ресурсов требуется от учебного заведения и от обучающихся для закупки оборудования и его технической поддержки при использовании электронного учебно-методического пособия во время аудиторных занятий и при самостоятельной работе даже в случае использования бесплатного учебно-методического обеспечения (лично мы ориентируемся на издательскую систему LaTeX и Adobe Reader 11): необходим персональный компьютер или ноутбук (иногда можно обойтись планшетом), проектор, экран, системы затемнения (например, жалюзи на окнах), программное обеспечение. Вместе с тем, использование грамотно подготовленного электронного пособия, позволяющего реализовать активные методы обучения, значительно повышает эффективность обучения при одновременном облегчении работы преподавателя и обучаемого, в частности, за счёт освобождения от рутинной непроизводительной деятельности (например, воспроизведении на доске громоздких выкладок и выполнения рисунков вместо работы с учащимися или студентами), быстрого переключения на другой материал, использования различных средств управления деятельностью обучающихся и т. д. Использование электронных учебно-методических пособий, при использовании на подготовительных курсах для абитуриентов и школьников так же может повысить интерес к данному учебному заведению, так как в процессе работы с электронными

учебно-методическими пособиями повышается продуктивность занятий и повышается уровень подготовки за счёт повышения эффективности самоподготовки с использованием разработанных электронных учебно-методических пособий.

Литература

- [1] Беспалько В. П. Теория учебника. — М.: Педагогика, 1988. — 168 с.
- [2] Мельников Ю. Б. Алгебра и теория чисел. Изд-е 4-е, испр. и доп. [Электронный ресурс]. — Издательство УрГЭУ, Екатеринбург, 2010 г., 70 уч.-изд. л. [режим доступа свободный]
<http://lib.usue.ru/resource/free/12/MelnikovAlgebra4/index.html>
- [3] Мельников Ю. Б. Элементарная математика [Электронный ресурс] : учеб. пособие. — Екатеринбург : Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2014, 27 уч.-изд. л.
- [4] Хуторской А. В. Место учебника в дидактической системе [Электронный ресурс]. — Интернет-журнал “Эйдос”. Научные исследования: Учебник в дидактической системе, 2005 [Режим доступа: свободный]
<http://www.eidos.ru/journal/2005/0608.htm>

УДК 378

ЭЛЕКТРОННОЕ ПОРТФОЛИО КАК ИНСТРУМЕНТ ОРГАНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

Сангалова М. Е.
Арзамасский филиал
Нижегородского государственного университета
им. Н. И. Лобачевского
Арзамас
e-mail: smolyanka77@mail.ru

Sangalova M. E. E-portfolio as an instrument for organizing training mathematical logic. This paper describes the experience of using technology portfolio in teaching mathematical logic. Advantages and disadvantages of doing portfolio on paper and electronic storage medium is revealed. Prospects of e-portfolio as a tool for organizing the work of students is presented.

В статье описывается опыт использования технологии портфолио в обучении математической логике. Выявлены плюсы и минусы ведения портфолио на бумажном и электронном носителе. Представлены перспективы электронного портфолио как инструмента организации работы студентов по освоению курса.

На современном этапе развития образовательной среды высшей школы, характеризующемся внедрением компетентностного подхода достаточно остро стоит проблема организации обучения. Она выражается, прежде всего, в поиске новых и адаптации традиционных средств, приемов, методов и технологий

обучения к его целям, отраженным во ФГОС. Актуальным является поиск инструментов, посредством которых возможно организовать интерактивное взаимодействие всех субъектов процесса обучения, обеспечить формирование компетенций студентов и их аутентичную оценку. Достаточно очевидно, что применение современных технологий обучения уже невозможно вне сетевого взаимодействия. Также описанная проблема приобретает особое звучание именно в обучении математическим дисциплинам. Это обусловлено тем, что преподаваемый материал представлен преимущественно определениями, теоремами и их доказательствами, задачами, математическими моделями.

Поэтому задачей данного исследования является выявление возможностей технологии портфолио (в том числе и электронного портфолио) для организации обучения математической логике.

Существуют различные трактовки термина электронное портфолио. Так, например, под ним понимается “эффективное средство сетевого взаимодействия преподавателей, студентов, администраторов, вовлеченных в работу над ним” [1], “форма представления на электронном носителе и процесс организации образцов и продуктов учебно-познавательной деятельности студента, который связывает отдельные аспекты его деятельности в полную картину” [2]. Важные характеристики данного термина раскрыты в следующем определении. Технология портфолио – это система фиксирования, накопления и аутентичного оценивания индивидуальных образовательных результатов студента в определенный период его обучения [3]. Итак, объединяя ключевые моменты рассмотренных трактовок, **электронное портфолио** можно определить как инструмент организации интерактивного обучения посредством сетевого взаимодействия и аутентичного оценивания его результатов. Ниже будут рассмотрены плюсы и минусы ведения портфолио на бумажном и электронном носителе.

С 2012 года обучение математической логике студентов направления подготовки Педагогическое образование профили Математика и Физика (квалификация бакалавр) проводилось в активных методах. Для этого использовались технология развития критического мышления через чтение и письмо [4] и технология портфолио [5]. На первом занятии студентам предлагалось вести учебное портфолио по курсу, обсуждались возможные рубрики и совместно вырабатывались критерии оценки портфолио. Каждый студент формулировал личную цель и задачи изучения математической логики и соответствующую цель ведения портфолио. Работа над портфолио носила проективный и непрерывный характер. После каждого занятия рубрики портфолио пополнялись, корректировались. Вводились новые рубрики, если это было необходимо для студента исходя из поставленных им целей. По завершении прохождения курса студенты представляли к защите портфолио на бумажном носителе. Оно состояло из титульного листа, содержания, рубрик с материалами, отражающим процесс и результаты освоения дисциплины студентом, трансферного листа. Количество рубрик могло варьироваться, обязательными же являлись четыре рубрики: “Теоретический монолог”, “Рабочие материалы”, “Что бы это значило?”, “Размышления о занятии”. В первую из них помещались материалы, авторство которых не принадлежало студенту (раздаточные материалы, тексты лекций и т. п.), во второй размещались работы, выполненные непосредственно студентом или группой студентов (тестовые, контрольные, самостоятельные, твор-

ческие работы), в третьей организовывался глоссарий дисциплины, последняя же рубрика была рефлексивной. Темы других рубрик могли быть самыми различными, например, “Мои достижения”, “Стимулы к учёбе”, “Это интересно”, “Вопросы, оставшиеся без ответа”.

Анализируя накопленный опыт можно отметить следующие достоинства использования технологии портфолио: 1) она обеспечивает организацию активной самостоятельной работы по предмету; 2) является эффективным средством самоорганизации и самооценки студента, обеспечивает планирование работы; 3) по портфолио можно оценивать не только результат, но и процесс освоения курса и развития компетенций обучаемого; 4) позволяет видеть достижения (а не ошибки!) студента через накопление; отслеживать процесс понимания материала. Таким образом, можно выделить основные **функции технологии портфолио**. 1. Функция мотивации. Так как общая цель портфолио – демонстрация прогресса, следовательно, данная технология мотивирует студентов к достижению некоторых результатов. Также у студентов вызывает интерес нетрадиционная для математических дисциплин форма организации обучения. Привлекает возможность самопрезентации, творческий характер работы. Освоение современных педагогических технологий представляет интерес для будущих учителей. 2. Функция планирования. Данная функция проявляется в определении студентом рубрик и их наполнения в зависимости от поставленных личных целей и задач освоения дисциплины. Также студент планирует свою работу в соотношении с выработанными критериями оценки портфолио, т. е. стремится представить материал на выбранном уровне. 3. Функция организации деятельности. Сама структура портфолио способствует организации. Материал каждого занятия перерабатывается для распределения по рубрикам портфолио. Также привлекается и анализируется новый материал из различных источников. 4. Функция коммуникации. Заполнение портфолио побуждает студента самостоятельно анализировать информацию, формулировать выводы, а также взаимодействовать с другими студентами группы и преподавателем. Для защиты портфолио студенты готовят устный доклад о своей работе. 5. Функция оценки. Портфолио позволяет получить как количественную, так и качественную оценку. За счёт датированности всех элементов портфолио позволяет видеть прогресс студента в достижении поставленных им задач по освоению курса. Портфолио может использоваться для самооценки, взаимооценки, оценки преподавателем, администрацией, сторонними экспертами. 6. Функция рефлексии. Эта функция может быть также определена как функция саморазвития. В соответствующей рубрике студенты описывают и анализируют не только свою деятельность на занятиях, но и работу преподавателя, осуществляют оценку понимания материала, своей роли в работе группы.

Однако ведение портфолио на бумажном носителе не лишено недостатков, которые определяют существенные ограничения функций данной технологии – ограничения носителя. Так как портфолио в этом случае представляет собой папку с бумагами, то такими недостатками являются: 1) неудобство хранения и перемещения; 2) для внесения исправлений приходится переписывать, либо заново распечатывать части, подвергшиеся корректировке; 3) возможность механического повреждения или утраты материалов; 4) неизбежные материальные затраты на канцтовары. Понятно, что эти неудобства понижают

мотивацию студентов к работе с портфолио. При проведении текущего контроля и диагностики понимания материала некоторые учащиеся могут забыть портфолио (или часть материалов), поэтому возможно нарушение взаимодействия преподавателя со студентами. Негативную роль указанные факторы играют и при осуществлении консультационной поддержки работы с портфолио.

Стремление нивелировать указанные минусы и расширить спектр возможных форматов представления материала в портфолио приводит к необходимости его ведения на электронном носителе. Здесь портфолио может представлять собой архив с папками, соответствующими рубрикам. Материал может быть как текстовый, так и графический, включать электронные таблицы Excel, диаграммы, графики, презентации PowerPoint, видеоклипы. Возможно и все портфолио организовать как документ формата doc, docx, pdf, rtf и т. п., либо как презентацию PowerPoint. Портфолио хранится на компьютере или внешнем носителе. Для взаимодействия с преподавателем (консультации, диагностика, контроль) студент предоставляет портфолио или его части по электронной почте, что даёт экономию аудиторного времени. К ограничениям носителя в этом случае относятся разнообразные по своей причине отказы оборудования, перебои с электроэнергией.

Ведение портфолио на электронном носителе действительно привело к устранению недостатков, присущих бумажному носителю и в значительной мере позволило устранить указанные ограничения функций портфолио. Возможности студентов при реализации своих познавательных потребностей и потребностей к саморазвитию стали значительно шире. Это выразилось: 1) в расширении диапазона привлекаемых средств представления, анализа и систематизации материала; 2) студентам стало легче вносить изменения в портфолио 3) ввиду использования электронной почты возросла доступность консультационной поддержки. При использовании технологии электронного портфолио студенты более активно работают над сбором и анализом дополнительного материала по предмету, причем двигаются в направлении своих интересов. Также учащиеся самостоятельно находят, либо составляют задачи и решают их. В работах студентов получают свое развитие идеи, прозвучавшие на аудиторных занятиях. Например, упоминалось о связи математической логики с алгеброй, геометрией, информатикой, педагогикой и психологией. В портфолио одного из студентов появилась рубрика “Параллельные миры”, где подробно рассмотрены эти связи, также проведены исследования “Изоморфные модели булевых алгебр”, “Различные методы решения уравнений теории множеств”. Т. е. использование компьютера привело к качественным изменениям и вывело технологию портфолио на новый уровень – уровень информационно-коммуникационной технологии. Однако не удалось полностью решить проблему надежности хранения материалов и мобильности взаимодействия студент–преподаватель. Консультации, например, получали в первую очередь те учащиеся, которые задавали вопросы, активно работали с портфолио. Но сильнее нуждались в них более слабые студенты, которые не могли сформулировать суть своих затруднений.

В настоящее время наиболее перспективной представляется организация работы, при которой студенты создают портфолио в специально отведенном разделе сайта университета. Для этого они записываются на соответствующий электронный курс и получают индивидуальный пароль. Размещение портфолио

на сайте обеспечивает его сохранность вне зависимости от возможных сбоев в работе и повреждений компьютеров и внешних носителей информации. В этом случае использование технологии электронного портфолио как инструмента организации процесса обучения способствует его открытости. Открытость обучения проявляется в следующих направлениях.

1. Доступность. Студент и преподаватель имеют доступ к портфолио в любое время и в любом месте (в пределах доступности сети Internet). Преподаватель может анализировать процесс заполнения рубрик портфолио, и оказывать консультационную поддержку по мере необходимости каждому студенту.

2. Направленность на личность. Электронное портфолио может рассматриваться как личный учебный проект студента, таким образом, оно реализует направленность обучения на личность, её саморазвитие в рамках учебной дисциплины.

3. Информационность. В процессе создания портфолио студенты активно используют различные Internet-ресурсы, причём как для внешнего оформления, так и для внутреннего наполнения рубрик портфолио.

4. Сотрудничество. Изменение характера отношений преподаватель–студент выражается во взаимодействии, совместной плодотворной работе в формате электронного портфолио. Причем полученные результаты являются значимыми не только для студента, но и для преподавателя, могут оцениваться другими студентами, преподавателями и представителями администрации.

5. Гибкость. Электронное портфолио студента динамично, оно постоянно находится в процессе изменения, ставятся новые задачи и цели, появляются новые ориентиры.

Электронное портфолио является информационной технологией, позволяющей осуществлять дистанционное взаимодействие при любой форме обучения (очной, очно-заочной и заочной). Для преподавателя портфолио – это действенный инструмент организации процесса обучения и аутентичного оценивания. Для студента же – это мощный инструмент самообразования, самооценки и саморазвития.

Литература

- [1] Смолянинова О. Г., Иманова О. А. Использование технологии епортфолио в системе подготовки педагогических кадров // Материалы Международной научно-практической конференции “Перспективные инновации в науке, образовании, производстве и и транспорте – 2012”. – Одесса: 2012. Вып. 2. Т. 12. – С. 69-75.
- [2] Петьков В. И., Куликова Е. В. Создание электронного портфолио в качестве инструмента отслеживания формируемых компетенций в обучающих курсах (направление подготовки “Химия”). – Н.Новгород: ННГУ, 2014. – 71 с.
- [3] Mandell A., Michelson E., Keeton M. T. Portfolio Development and Adult Learning: Purposes and Strategies. – Chicago: CAEL, 1990. – 174 p.
- [4] Загашев И. О., Зиар-Бек С. И. Технология развития критического мышления: перспективы для высшего образования. – СПб.: “Скифия”, 2002. – 283 с.

- [5] Сангалова М. Е. Технология портфолио как средство активизации учебной деятельности студентов // В мире научных открытий. – 2013. № 11.7 (47). – С. 242–247.

АДАПТАЦИЯ СТУДЕНТОВ ПЕРВОГО КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА РГПУ им. А. И. ГЕРЦЕНА К ИЗУЧЕНИЮ ПРОФИЛЬНЫХ ДИСЦИПЛИН НА ПРИМЕРЕ ГЕОМЕТРИИ

Ходот Т. Г., Маслова Ю. В.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: yuliapetrova@mail.ru

Hodot T. G., Maslova Yu. V. Adaptation of first-year students mathematical faculty of RGPU of A. I. Herzen to studying of profile disciplines on the example of geometry. We list the main difficulties of learning of profile disciplines for first-year students from the Faculty of Mathematics of Pedagogical University. We give examples of exercises which we use to help students with adaptation to educational process, and the comment on work with them.

Перечисляются основные трудности изучения математики, с которыми сталкиваются нынешние первокурсники математического факультета педагогического университета. Приводятся примеры упражнений, которые мы используем, чтобы помочь студентам в адаптации к учебному процессу, и комментарии по работе с ними.

Подготовка к обучению в вузе школьников и первокурсников традиционно осуществляется через организацию различного рода специальных курсов. Примеров таких курсов можно привести много, в том числе и из практики математического факультета ЛГПИ–РГПУ им. А. И. Герцена. Они могут включать как повторение школьного материала с некоторыми акцентами, необходимыми для дальнейшего обучения в вузе, так и пропедевтику новых понятий будущих разделов математики.

Важно отметить, что в последние годы у первокурсников на объективные трудности изучения математики на новом для них уровне накладываются и другие, являющиеся следствием многих факторов современного состояния школьного образования и общества в целом.

На кафедре геометрии РГПУ ведётся работа по созданию адаптивной методики, которая способствовала бы преодолению возникающих у студентов сложностей при изучении вузовской математики.

На основании накопленного опыта работы из теоретического материала курса “аналитическая геометрия”¹ были выделены следующие ключевые понятия, освоение которых обычно вызывает у студентов наибольшие затруднения:

¹По учебному плану студенты, обучающиеся по направлению Педагогическое образование, изучают в первом семестре аналитическую геометрию.

- взаимно-однозначное соответствие,
- различные системы координат и связи между ними,
- уравнение фигуры: определение и вывод уравнения фигуры, заданной своими геометрическими свойствами,
- координаты вектора, действия с векторами: определения и применение к решению задач,
- теоремы о задании прямой на плоскости и плоскости в пространстве – прямая и обратная,
- равносильность различных определений кривой второго порядка,
- определения поверхностей второго порядка и исследование их формы с помощью сечений плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Также стало очевидно, что многие проблемы напрямую или косвенно связаны с тем, что нынешние первокурсники в большинстве своём не умеют работать с текстом (задачи, теоремы, доказательства, написанного в лекционных тетрадях или изложенного в учебной литературе), а именно:

- при чтении текста, в котором содержатся распространённые предложения с причастными оборотами или придаточными предложениями, многие студенты не умеют установить связи между словами и потому не понимают смысла высказывания;
- даже в недлинном тексте, в котором нет сложных предложений, им бывает трудно выделить главную мысль и установить смысловую и, тем более, логическую связь между частями текста;
- студенты с трудом излагают не только свою мысль, но и мысль, кем-то только что сформулированную, обсуждённую в аудитории и разобранную;
- студенты не могут (не умеют) организовать свою самостоятельную работу.

Проведённое тестирование² первокурсников, поступивших на математический факультет в 2014 году, показало следующие результаты: из 18 возможных баллов

- 13–15 баллов заработало 9% испытуемых;
- 9–12 баллов заработало 33% испытуемых;
- 6–8 баллов заработало 29% испытуемых;
- менее 6 баллов заработало 29% испытуемых.

Таким образом, около 58% учащихся не справились и с половиной заданий.

Для того чтобы помочь студентам в адаптации к учебному процессу, в первом семестре текущего учебного года в программу 1 курса был включён факультатив “Решение геометрических задач” (2 часа в неделю). В рамках этого факультатива мы уделили большое внимание не только решению задач, по своему содержанию и методам решения приближённых к школьным, но и:

- работе с логикой построения математических высказываний;
- взаимосвязи прямых и обратных утверждений;
- чтению и пониманию математического текста, изучаемого на лекциях и практических занятиях.

²Содержание теста приведено в *Приложении*.

Приведём примеры упражнений, которые мы использовали на факультативе, и в некоторых случаях комментарии по работе с ними.

1. Из предложенного списка слов и словосочетаний составьте верное утверждение и верное обратное к нему: “серединный перпендикуляр”, “центр”, “является”, “описанная окружность”, “сторон”, “точка пересечения”, “треугольник”, “около”.

Комментарии. Из них можно составить, как минимум, три верных утверждения: “точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника является центром описанной около треугольника окружности”, “центром описанной около треугольника окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника” и “центр описанной около треугольника окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров его сторон”. Некоторые студенты не могут определить, какое из утверждений: второе или третье – является обратным к первому. При обсуждении решения этой простейшей задачи, подчёркиваем, что изменить порядок слов в предложении – это ещё не значит получить утверждение, обратное к данному. Для ответа на вопрос бывает полезно найти в предложении подлежащее и сказуемое и переформулировать утверждение, используя связки союзов “если . . . , то . . .”.

2. Дан небольшой математический текст (содержащий понятия, изучение которых обычно вызывает затруднения у студентов, их мы перечисляли раньше).

- А. Ответьте на вопросы: О чём этот текст? Какова главная мысль? Сформулирована ли в нём теорема (задача)? Прочитайте её формулировку. Расскажите своими словами, в чём она состоит. Есть ли в тексте её доказательство? Проверьте себя: знаете ли вы определения тех понятий, которые входят в формулировку теоремы. В случае необходимости обратитесь к учебнику или лекционной тетради.
- Б. Разбейте по смыслу текст на части. Объясните принцип своего разбиения. Отметьте, где в предложенном тексте определение, пример, теорема, наводящие соображения, доказательство теоремы и т. п.
- В. Запишите подробно и кратко условие и заключение теоремы. Составьте план доказательства, разбив предложенное в тексте доказательство на части. Запишите этот план, оставив место для подробной записи необходимых рассуждений.
- Г. Попробуйте самостоятельно сформулировать и доказать рассмотренную теорему. Что не получается? Почему? Непонятно или забыли? Вернитесь сначала к логике рассуждений, а затем – к самому рассуждению.
- Д. Сформулируйте и запишите, что именно вызывает затруднение: сами понятия или связи между ними. Работая в группе, найдите ответы на возникшие у вас вопросы.
- Е. Отметьте, что в тексте “я знал раньше”, “я не знал, но понял”, “я не знал и не понял”, “меня удивило”.

Комментарии. Тем, кто разобрался со всеми трудностями прочитанного текста, предлагается к следующему занятию подготовить сообщение по

материалу этого текста, а тем, кто не разобрался с этим текстом, – попытаться его понять, используя другие источники информации и (или) подготовить вопросы к докладчику.

3. Дана формулировка теоремы. Сделайте рисунок к ней. На отдельном листе запишите кратко, что дано и что требуется доказать в данной теореме. Затем поменяйтесь листочками с соседом. На полученном листе по составленной на нём краткой записи к теореме другого варианта сделайте свой рисунок и обменяйтесь обратно. Совпадает ли полученный рисунок с первоначальным? Если нет, то в чём причина? Изображён другой вариант взаимного расположения данных геометрических объектов, возможный в рамках условия теоремы, или изначально были допущены неточности в краткой записи, которые привели к искажению смысла теоремы и, как следствие, неверному рисунку? Внесите, если это необходимо, исправления и дополнения в свою краткую запись.

Комментарии. Для работы с заданиями такого типа мы составляем как минимум два варианта. Часто встречающиеся и наиболее наглядные примеры ошибок разбираем вместе со всеми, подчёркивая важность логически аккуратного, последовательного и полного составления краткого условия теоремы.

4. Даны два определения одного понятия. Являются ли эти определения равносильными? Как проверить их равносильность? Сформулируйте утверждения, которые нужно доказать, и для каждого из них напишите условие и заключение, а затем – кратко: что дано, что нужно доказать. Проведите соответствующие доказательства.
5. Начните составлять свой личный словарь–справочник геометрических терминов с определениями, свойствами, признаками, рисунками и т. п.

Положительными итогами проведения занятий со студентами по нашей методике можно считать результаты сессии: экзамен по аналитической геометрии сдали с первого раза в первом семестре 85% студентов в отличие от прошлых двух лет – 58% и 64% студентов.

Приложение. Тест.

1. Теорема. Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от концов этого отрезка.
 - 1.1. Сделайте рисунок к теореме.
 - 1.2. Запишите, что ДАНО, что требуется ДОКАЗАТЬ.
 - 1.3. Переформулируйте утверждение теоремы, используя связки союзов “Если ..., то ...”
 - 1.4. Заполните пропуски в следующем утверждении, чтобы получилась теорема, обратная данной: “Каждая точка ..., лежит ...”
 - 1.5. Запишите, что ДАНО, что требуется ДОКАЗАТЬ для обратной теоремы.
2. Верны или неверны следующие утверждения? Объясните свой ответ.
 - 2.1. В прямоугольном треугольнике один угол равен разности двух других.
 - 2.2. Наибольший угол треугольника больше суммы двух других.
 - 2.3. Любой треугольник содержит центр описанной около него окружности.
 - 2.4. Любой треугольник можно вписать в окружность.

- 2.5. Любой треугольник имеет угол, не меньший, чем 60 градусов.
- 2.6. В некотором треугольнике сумма двух сторон не меньше третьей стороны.
- 2.7. В некотором треугольнике совпадают центры вписанной и описанной окружностей.
- 2.8. В некотором треугольнике есть две оси симметрии.
- 2.9. Существует треугольник, в котором перпендикулярны две медианы.
- 2.10. Существует треугольник, в котором перпендикулярны две биссектрисы.
- 2.11. Существует треугольник, в котором перпендикулярны две высоты.
- 2.12. Треугольник ABC не является равнобедренным, если его углы A и B не равны.
- 2.13. Треугольник ABC не является равнобедренным, если его периметр 5, $AB = 1$, $BC = 2$.

Литература

- [1] Рыжик В. И., Геометрия. Диагностические тесты. 7–9 классы. – М.: Просвещение, 2014.

ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПЕРВОКУРСНИКОВ

Ходот Т. Г., Маслова Ю. В.

Российский государственный педагогический

университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: yuliapetrova@mail.ru

Hodot T. G., Maslova Yu. V. Organization of independent work first-year students. We offer variant of the organization of independent work of first-year students and we give examples of tasks.

Предлагается вариант организации самостоятельной работы первокурсников. Приводятся примеры заданий.

Организация самостоятельной работы студентов всегда была особенно трудной частью работы преподавателя. К известным ранее проблемам добавляются теперь:

- изменение учебного плана, в том числе, и в сторону резкого уменьшения учебных часов;
- более низкий, чем 5–10 лет тому назад, уровень общей и математической подготовки студентов;
- материальные затруднения студентов и, следовательно, необходимость им работать в вечернее время;
- отсутствие у студентов навыков самоорганизации

и многие другие.

Активно обучать самостоятельной работе первокурсников мы начинаем во втором семестре. Сначала проводим вводную беседу с разъяснением целей и содержания самостоятельной работы, затем даём (пока общее для всех) задание на две недели. Как правило, оно составлено в виде цикла и содержит 14 задач: первые семь – задачи так называемой элементарной геометрии или задачи по программе второго семестра, вторые семь – задачи по теоретическому материалу, взятому из учебника геометрии для школы или педвузов. В течение первой недели студенты индивидуально или коллективно выполняют задание, формулируя при этом те вопросы, на которые никто в группе не может ответить. По необходимости в конце первой недели работы над циклом мы проводим консультацию. В конце второй недели студенты сдают на проверку свои тетради с выполненным заданием и пишут проверочную работу, в которую включаются 2 задачи: одна – на доказательство из первой части цикла, вторая – на работу с математическим текстом, аналогичная тем, что были во второй части цикла. Затем студентам выдается следующий цикл задач снова на две недели и т. д. Работа проводится три месяца: февраль, март, апрель. В случае необходимости иногда приходится уменьшать количество циклов.

Приведём примеры заданий, взятых из разных циклов для самостоятельной работы первокурсников.

Решите следующие планиметрические задачи.

- Найдите геометрическое место таких точек, что касательные к данной окружности, проведенные из них, имеют данную длину.
- Найдите множество середин хорд данной окружности: а) имеющих данную длину; б) проходящих через данную точку.
- Найдите множество оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на все прямые, проходящие через другую данную точку.
- Отрезок AB постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла C . Найдите множество а) середин отрезков AB , б) центров тяжести треугольников ABC .
- На прямой даны три точки A , B , C так, что точка B лежит между A и C . Найдите множество точек пересечения равных окружностей, проходящих соответственно через A , B и B , C .
- Две окружности, касающиеся данной прямой в точках A и B , касаются друг друга в точке M . Найдите геометрическое место точек M .

Для каждой из следующих стереометрических задач сформулируйте гипотезу, напишите формулировки утверждений, которые нужно доказать для проверки этой гипотезы, и их краткую запись (Дано: ..., доказать: ...).

- На рёбрах данного трёхгранного угла расположены точки A , B , C соответственно. Найдите множество центров тяжести треугольников ABC , если а) точки A и B закреплены; б) точка B закреплена.
- Найдите множество точек, одинаково удалённых от трёх данных попарно взаимно перпендикулярных плоскостей (прямых), проходящих через одну точку.

- Найдите множество середин всевозможных отрезков, концы каждого из которых лежат на двух данных скрещивающихся прямых соответственно.
- Найдите множество точек пространства, равноудалённых от трёх данных прямых, которые: а) попарно параллельные; б) все проходят через одну точку и не лежат в одной плоскости.

Найдите в учебниках Геометрия 7–9 и Геометрия 10–11 (Л. С. Атанасян и др.) семь теорем: три из планиметрии, четыре из стереометрии, которые доказываются методом от противного. Для каждой из семи теорем выполните следующие задания.

1. Запишите кратко, что дано и что требуется доказать в теореме.
2. Сделайте рисунок к теореме.
3. Выпишите фрагмент доказательства, где предполагается противоположное тому, что утверждается теоремой.
4. Сформулируйте утверждение, с которым в конце доказательства было получено противоречие.
5. Выпишите неверный вывод, который был получен в результате неверного предположения.

Выполните задания по учебнику Геометрия, часть 1 (А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор, С. А. Франгулов).

- Прочтите §3 п. 2. Сколько утверждений в тексте авторам кажутся очевидными? Сформулируйте эти утверждения и каждый раз выпишите, что дано и что требуется доказать.
- Законспектируйте текст §3 п. 3 (укажите тему, основные результаты, план изложения).
- Подробно изложите §3 п. 4 (постановка задачи, формулировка результата, краткое условие, подробное доказательство).

Организованная таким образом (спланированная и контролируемая) самостоятельная работа позволяет студентам в рамках отведённых учебных часов изучить в течение семестра все разделы программы, не сокращая учебного материала. Но в настоящее время, не имея на эту деятельность официальных часов в нагрузке, осуществить подобное возможно только благодаря личной инициативе преподавателей.

Литература

- [1] Атанасян Л. С. и др. Геометрия: Учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2013.
- [2] Атанасян Л. С. и др. Геометрия: Учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений, М.: Просвещение, 2013.
- [3] Вернер А. Л., Кантор Б. Е., Франгулов, С. А. Геометрия. Ч. 1. Учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов. – СПб.: Специальная Литература, 1997.
- [4] Ходот Т. Г., Захарченко И. Д., Михайлова А. Б. Задачи по геометрии: Учебное пособие. – СПб.: Специальная Литература, 1997.

КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ОБУЧЕНИИ ТЕОРИИ ИГР

Якубсон М. Я.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: michaeljackubson@mail.ru

Yakubson M. Ya. Key problems in teaching game theory. Key problems illustrating the basic concepts, methods and results of game theory course are considered in this work.

В работе рассмотрены ключевые задачи, позволяющие проиллюстрировать основные понятия, методы и результаты курса теории игр.

В течение ряда лет автору приходилось преподавать теорию игр как на факультете математики, так и на других факультетах РГПУ им. А. И. Герцена. Теория игр может излагаться как в виде отдельной дисциплины, так и в составе таких дисциплин, как “Методы оптимизации” и “Исследование операций”.

Интерес к этой дисциплине вызван тем, что постановка задач выглядит занимательно и понятно, а их научный анализ связан с достаточно глубокими разделами математики. При отборе материала большое место уделяется разбору *ключевых задач*, позволяющих проиллюстрировать разнообразные аспекты теории. Решение этих задач по возможности доводится до конкретной выигрышной стратегии. Перечислим основные изучаемые темы.

1. Матричные (антагонистические) игры
 - (a) Чистые стратегии. Доминирование. Максиминная и минимаксная стратегия.
 - (b) Смешанные стратегии. Теорема фон Неймана.
 - (c) Игры малых размерностей: 2×2 , $n \times 2$, $2 \times n$.
 - (d) Игра $m \times n$. Сведение к задаче линейного программирования.
 - (e) Игры с природой. Принятие решений в условиях неопределенности.
2. Неантагонистические игры. Равновесие по Нэшу и оптимальность по Парето.
3. Кооперативные игры. С-ядро.
4. Простые кооперативные игры. Индексы Шепли и Банзафа.

Рассмотрим теперь некоторые ключевые задачи, которые иллюстрируют приведенный материал. В пункте 1а) рассматривается одна из “задач полковника Блотто” [1].

Задача 1. У полководца A 4 оловянных солдатика, у полководца B – 3. Задача A – прорваться через один из двух перевалов – северный или южный, задача B – не допустить этого. Каждый полководец заранее распределяет свои

войска между перевалами, маневр во время боя невозможен. При столкновении на каждом перевале побеждает тот, у кого больше солдат, при равенстве побеждает защищающаяся сторона. Каковы оптимальные стратегии каждого полководца?

Задача иллюстрирует понятие *доминирования*. Она интересна тем, что большинству решающих, которые обдумывают стратегию защиты, сначала хочется разделить войска пополам, чтобы равномерно прикрыть все направления. В то же время анализ показывает, что эта стратегия заведомо проигрышная. В результате исключения доминируемых стратегий оказывается, что стороны имеют равные шансы. Задача также мотивирует введение смешанных стратегий.

Центральное место в пункте 1b) занимает основная теорема теории матричных игр – *теорема фон Неймана* о существовании точки равновесия. Доказывать её в этот момент нецелесообразно, теорема будет доказана позже путем сведения игры к паре двойственных *задач линейного программирования* (ЗЛП). Здесь хорошо показать, как много результатов можно вывести из чистой теоремы существования. Именно следствия из основной теоремы помогают решить с помощью несложной техники, доступной даже студентам гуманитарных факультетов, любую матричную игру из пункта 1с).

В пункте 1d) мы показываем, что задача нахождения оптимальных стратегий двух противников в матричной игре равносильна паре двойственных ЗЛП. Изучение линейного программирования как такового не входит в курс теории игр. Студенты специальности “Прикладная математика” изучали решение ЗЛП графическим и симплекс-методом до теории игр. Если студенты не изучали этого материала ранее, с ним можно кратко ознакомить. Из теоремы двойственности линейного программирования и очевидной разрешимости ЗЛП на максимум следует и теорема фон Неймана. Используя программное обеспечение, позволяющее решать ЗЛП (в простейшем случае Excel), мы можем практически решить любую матричную игру, что создает у студентов впечатление завершенности этого фрагмента теории.

Игры с природой, изучаемые в пункте 1e), имеют только формальное сходство с антагонистическими матричными играми. Поскольку природу не имеет смысла обманывать, здесь мы ищем способ выбрать наилучшую из чистых стратегий. Существование различных критериев: Байеса, Лапласа, Вальда, Севиджа, Гурвица – говорит о том, что однозначных рекомендаций для выбора нет, поскольку сам критерий оптимальности не общепринят. Приведем задачу, хорошо иллюстрирующую данную проблематику [2].

Задача 2. *В приморском городе решено открыть яхт-клуб. Сколько следует купить яхт из расчета 1 яхта на 5 человек, если предполагаемое число членов клуба колеблется от 10 до 25 человек. Годовой абонемент стоит 100 у.д.е., цена яхты 170 у.д.е., аренда помещения и хранение яхт стоит 730 у.д.е. в год.*

Различные критерии приводят к различным ответам, однако для каждого из ответов можно придумать обстоятельства и характер лица, принимающего решения, которые приводят его именно к этому ответу.

В пункте 2 при изучении неантагонистических игр двух лиц (*биматричных игр*) рассматриваются два различных принципа оптимальности: *равновесие*

по Нэшу и оптимальность по Парето. Следующая игра, известная как “дилемма заключенного”, иллюстрирует разницу между этими принципами.

Задача 3. *Полиция арестовала двух бандитов, которые справедливо подозреваются в убийстве, однако прямых улик против них нет. Арестованных посадили в одиночные камеры, так что они не могут общаться друг с другом. У каждого из них есть две стратегии: сознаться или нет. Если оба бандита сознаются, они получают по 7 лет тюрьмы. Если сознается только один и дает показания на другого, сознавшегося освобождают, а второй получает максимальный срок 10 лет. Наконец, если оба держатся до конца, то садятся на 3 года за хранение незарегистрированного оружия.*

Ситуация, когда оба игрока не сознаются, парето-оптимальна – не существует никакой другой ситуации, лучшей, чем эта для обоих игроков. Однако эта ситуация неравновесна по Нэшу – каждому из игроков по отдельности выгодно уйти из этой ситуации и сознаться. В результате на практике реализуется равновесная ситуация, когда оба сознаются. Эта ситуация значительно менее выгодна для обоих игроков, однако они оказываются в ней, не доверяя друг другу.

Другая классическая игра “семейный спор” иллюстрирует ситуацию борьбы за лидерство.

Задача 4. *Муж и жена независимо друг от друга выбирают одно из двух вечерних развлечений: балет или футбол. Если они оба выбирают балет, жена выигрывает 4, а муж 1 условную единицу. Если выбирают футбол, наоборот, муж выигрывает 4, а жена 1. Наконец, если у них разный выбор, вечер испорчен и они остаются дома.*

Здесь ситуации с выигрышами (4,1) и (1,4) равновесны по Нэшу и парето-оптимальны, однако одна из них выгодна первому игроку, а другая второму. Таким образом, тот игрок, который в нарушение условий открыто заявит о своем выборе, окажется в предпочтительном положении.

Эта задача иллюстрирует также и проблему равновесия по Нэшу в *независимых смешанных стратегиях*. Доказано (Нэшем), что такое равновесие всегда существует. В данной задаче ситуация равновесия в смешанных стратегиях приводит к выигрышу $4/5$ для каждого игрока. Эта ситуация не является оптимальной по Парето, более того, каждый игрок при этом получает меньше, чем при равновесной ситуации, выгодной его партнеру. Таким образом, практическая ценность ситуации равновесия в смешанных стратегиях не очень велика.

Данная игра иллюстрирует также понятие равновесия в *совместных смешанных стратегиях*. Если допустить соглашение между игроками, они могут договориться проводить время на балете и футболе по очереди, что приводит к среднему выигрышу каждого игрока $5/2$. Эта же ситуация получается при решении задачи о переговорах, соответствующей *арбитражной схеме Нэша* [1].

В теории кооперативных игр (пункт 3) изучается, в частности, проблема справедливого *дележа* некоторой суммы между участниками игры, которые могут образовывать между собой *коалиции*. В качестве решения такой игры рассматривается множество недоминируемых дележей – *С-ядро* игры. Это понятие иллюстрируется следующей игрой “джаз-оркестр” [1].

Задача 5. *Три музыканта – певец, пианист и ударник – за совместное выступление зарабатывают 100 у.д.е. Дуэт певца и пианиста зарабатывает*

80, ударник и пианист 65, певец и ударник 50. Наконец, один певец может заработать 20, а один пианист – 30 у.е. Ударник в одиночку не зарабатывает ничего. Как справедливо разделить 100 у.е. между музыкантами?

С-ядро данной задачи – пространственный треугольник с вершинами (35, 45, 20), (35, 50, 15), (30, 50, 20) (координаты – это, соответственно, доходы певца, пианиста и ударника). Задача показывает, что достаточно общие требования позволяют определить доход каждого из музыкантов с точностью до 5 у.е. Любой элемент С-ядра может рассматриваться как решение этой задачи.

Наряду с С-ядром используются и другие подходы к решению кооперативных игр. В пункте 4 изучаются индексы Шепли и Банзафа, дающие, в частности, ответ на вопрос о степени влияния отдельных партий или лиц на принятие решений [3]. Эти индексы известны как “индексы власти”. В большинстве случаев индексы Шепли и Банзафа согласованы между собой, тем интереснее следующая задача.

Задача 5. *В некотором государстве закон принимается, если получает большинство в обеих палатах парламента и согласие президента. Пусть верхняя палата состоит из трёх, а нижняя из пяти членов. Найти индексы Шепли и Банзафа для президента и обеих палат.*

Оказывается, что картина, описываемая разными индексами, отличается не только количественно, но и качественно. Индексы Шепли для президента, верхней и нижней палат равны соответственно 0, 38; 0, 32; 0, 30, а индексы Банзафа 0, 23; 0, 34; 0, 43! Это различие заслуживает серьезного размышления.

Автор благодарен профессору В. В. Орлову за полезное обсуждение темы.

Литература

- [1] Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр. – М.: Высшая школа, 1998. – 300 с.
- [2] Аркин П. А., Межевич К. Г. Исследование операций. – СПб.: СПбГТИ, 2008. – 334 с.
- [3] Кулаковская Т. Е., Наумова Н. И. Некоторые методы нестатистического анализа социологических и экспертных данных // Математические методы в социально-экономических исследованиях. – СПб.: Петрополис, 1996. – С. 79–99.

Актуальные информационные системы и технологии моделирования

УДК 025.4.03

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ТЕХНОЛОГИИ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ФАКТОВ ИЗ ТЕКСТОВЫХ ДАННЫХ

Богатырев М. Ю.

Тульский государственный университет

Тула

e-mail: okkambo@mail.ru

Bogatyrev M. Y. Algebraic Models in the Technology of Facts Extraction from Textual Data. Novel technology of facts extraction from textual data is proposed. It uses models and methods of Formal Concept Analysis. Symmetries of formal concepts are analyzed and possible ways of its decomposition is estimated.

Предлагается технология извлечения фактов из текстовых данных, использующая модели и методы анализа формальных понятий. Анализируются симметрии формальных контекстов, применяемых в технологии. Оценивается возможность декомпозиции формальных контекстов.

Задача извлечения фактов из текстов естественного языка востребована во многих приложениях: в системах информационного поиска, системах автоматического перевода, системах поддержки принятия решений, вопросно – ответных системах и им подобных. Актуальность решений данной задачи обусловлена развитием сети Интернет, где в настоящее время лавинно нарастает объём текстовых данных.

Центральной проблемой, определяющей каждое предлагаемое решение задачи извлечения фактов из текстов, является определение понятия “факт”. Это понятие трудно формализовать, поскольку одна и та же информация, извлеченная из текста, например, дата, может считаться или не считаться фактом в зависимости от внешних условий. Эти внешние условия составляют *контекст запроса*, направляемого в систему извлечения фактов. Логично ожидать, что результаты выполнения такого запроса должны соответствовать его контексту. Данное заключение, а также анализ существующих в настоящее время моделей фактов, используемых в соответствующих технологиях их извлечения, приводит к определению факта в виде *отношения на множестве слов*. Под такое, достаточно общее определение, подпадают все известные определения фактов в виде *ключевых слов, словосочетаний, семантических сетей и фреймов* [1].

В данной работе рассматривается технология извлечения фактов из текстов, в которой модели в виде отношений применяются как на элементарном уровне отдельного предложения текста, так и на уровне макроскопической модели, объединяющей множество возможных фактов, извлекаемых из текста. В технологии реализуются следующие принципы.

1. Извлечение фактов в информационной технологии выполняется не на тексте, а с использованием соответствующей ему семантической модели. Дан-

ный принцип замены текста семантической моделью является общепризнанным и конструктивно используется во многих приложениях [1].

2. Всякий факт имеет смысловое содержание – *семантику*. Эта семантика задается бинарным отношением принадлежности на двух множествах: множестве объектов и множестве принадлежащих им атрибутов. Данное отношение образует *формальный контекст*, рассмотренный ниже. Достаточность для моделирования фактов бинарного отношения на множествах, интерпретируемых как объекты и атрибуты, принимается априорно, исходя из имеющегося опыта работы существующих систем извлечения фактов [4].

Реализация указанных принципов приводит к применению концептуальных графов [2] в качестве первой, элементарной семантической модели, а модель макро-уровня строится в виде решетки понятий, порождаемой формальным контекстом [3].

Формальные контексты и решётки понятий принадлежат математическому аппарату, применяемому в направлении анализа данных, известном как анализ формальных понятий (АФП) [3]. Применение концептуальных графов для построения формальных контекстов позволяет применить аппарат АФП к тестовым данным и, в частности, к задаче извлечения фактов. Данный подход является новым и обеспечивает новое качество решений задачи извлечения фактов из текстов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 15-07-05507.

1. Основные положения АФП. Формальный контекст представляет собой тройку $\mathbf{K} = (X, Y, I)$, в которой X – множество из m объектов, Y – множество из n принадлежащих им атрибутов, I – отношение принадлежности $I \subseteq X \times Y$. Множества X, Y частично упорядочены некоторыми отношениями, α и β , соответственно: $X = (X, \alpha)$, $Y = (Y, \beta)$.

Связи между объектами и атрибутами определяются следующим образом. Для подмножеств $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$ объектов и атрибутов задаются отображения (в частности, функции) $A' : A \rightarrow B$ и $B' : B \rightarrow A$ со следующими свойствами: $A' := \{y \in Y \mid \forall x \in A \langle x, y \rangle \in I\}$ $B' := \{x \in X \mid \forall y \in B \langle x, y \rangle \in I\}$. Пара множеств (A, B) , таких, что, $A' = B$, $B' = A$ называется *формальным понятием* контекста $\mathbf{K}$.

Множества A и B замкнуты в силу композиции отображений: $A'' = A$, $B'' = B$. Множество A образует *объём* формального понятия (A, B) , а множество B – его *содержание*. Отношения частичного порядка α , β на множествах на множествах X и Y индуцируют отношение частичного порядка $\leq$ на множестве понятий. В матрице контекста понятия (A, B) задаются максимальными по вложению подматрицами со всеми ненулевыми элементами. Понятия – подстроки и понятия – подстолбцы также допустимы.

Если для понятий (A_1, B_1) и (A_2, B_2) $A_1 \subseteq A_2$, что эквивалентно $B_2 \subseteq B_1$, то $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$. В этом случае логично считать понятие (A_1, B_1) менее общим, чем понятие (A_2, B_2) .

Формальный контекст имеет представление в виде матрицы инцидентности отношения I , в которой ненулевые элементы обозначают факт принадлежности атрибута $y \in Y$ объекту $x \in X$. Данная $[m \times n]$ матрица является либо бинарной $[0, 1]$ -матрицей, либо матрицей, ненулевые элементы которой

задаются числами, выбор которых зависит от содержания задачи, в которой применяется формальный контекст.

Основная теорема АФП [1]. Частично упорядоченное по вложению объёмов множество формальных понятий контекста K образует математический объект – *решётку*, которая называется *решётка понятий*.

Задача построения решетки понятий на больших контекстах (порядок матрицы контекста 10^3) может оказаться нетривиальной и потребовать значительных ресурсов, что породило направление исследований алгоритмов построения решёток понятий [3].

Решётка понятий, построенная на формальном контексте, является инструментом представления и извлечения знаний из данных контекста. Решетка понятий позволяет выявить связи между понятиями как визуально (в виде так называемых *диаграмм Хассе*), так и аналитически в виде множества импликаций, допускаемых решёткой. В роли знаний выступают понятия, организованные иерархично. При этом граф решётки понятий не является деревом. Это позволяет представлять знания, выражающиеся понятиями, характеризующимися меньшей и большей общностью, меньшими и большими объёмом и содержанием. Инструментом извлечения знаний на решётках понятий являются методы Data Mining [7], использующие модели в виде *импликаций*, *функциональных зависимостей* и *ассоциативных правил*.

2. АФП на текстах естественного языка. Задачи анализа текстовых данных, объединённые термином Text Mining [1], являются как раз той областью, где применение АФП выглядит *формально* вполне естественно: термины “контекст”, “понятие”, как известно, относятся, прежде всего, к текстам. Тем не менее, применение АФП на текстовых данных до сих пор остаётся мало исследованной областью [8]. Главной проблемой здесь является построение формальных контекстов на текстах естественного языка. Для этого необходимо извлекать из текста объекты и их атрибуты, что требует семантического анализа текста. Вариант решения данной проблемы предложен в [9], где для построения отношений “объект – атрибут” на текстах применяются концептуальные графы [2] – разновидность семантических сетевых моделей. Концептуальный граф представляет собой двудольный направленный граф, состоящий из двух типов узлов: *концептов* и *концептуальных отношений*. Так фраза “зеленый лист” представляется в виде концептов и отношений следующим образом: [лист] $\longrightarrow$ (атрибут) $\longrightarrow$ [зеленый]. Концепты [лист] и [зеленый] – это слова из обрабатываемого текста, а отношение (атрибут) генерируется алгоритмом построения концептуальных графов путем морфологического анализа текста и далее по результатам анализа ищется подходящее отношение из набора известных из лингвистики *семантических ролей* [10]. Концептуальный граф служит моделью фактов в разнообразной интерпретации. Фактом может быть отдельное слово – концепт графа, концептуальное отношение в графе или граф целиком.

Отметим две важных особенности.

1. Применение концептуальных графов позволяет выбирать в качестве отношений принадлежности “объект – атрибут” не только собственно отношение “атрибут”, но также другие отношения, например “генитив”, “модификатор” и т. п. В самом деле, отношение “объект – атрибут” в формальном контексте

имеет смысл принадлежности одних объектов другим и может быть выражено семантическими ролями, раскрывающими варианты такой принадлежности.

2. Некоторые перестановки слов в обрабатываемом тексте могут не менять получаемый на нем концептуальный граф и далее оставлять формальный контекст инвариантным относительно таких перестановок. Например, фразы “зеленый лист” и “лист зеленый” различаются скорее эмоциональным, чем смысловым оттенком, и с точки зрения решаемой на тексте задачи могут считаться семантически эквивалентными.

Указанные особенности применения концептуальных графов определяют особенности построенных с их помощью формальных контекстов. Множества X, Y в контексте $\mathbf{K} = (X, Y, I)$ частично упорядочены, но в случае формирования этих множеств из концептов концептуальных графов допустимы перестановки элементов множеств X, Y , не меняющие смысла контекста. Данное свойство позволяет определить так называемый *семантический* тип симметрии формальных контекстов. Инвариантность смысла текста относительно перестановок слов влечет симметрии в формальном контексте.

3. Симметрии в формальных контекстах. Матрица формального контекста $\mathbf{K}$ обладает симметрией, если выполняется условие коммутации

$$T(g)\mathbf{K} = \mathbf{K}S(g), \quad (1)$$

в котором матрицы $T(g)$ и $S(g)$ образуют представления некоторой группы G с элементами $g \in G$, которую назовём **группой симметрии формального контекста**.

Определение (1) является универсальным определением симметрии матриц. Прежде всего, с его помощью диагностируется *визуальная симметрия* в матрицах $\mathbf{K}$, когда в ней имеются повторяющиеся элементы.

Специфический вид симметрии – семантическая симметрия, описанная выше, существует на контекстах, строящихся на текстах естественного языка. В этом случае допустимые перестановки слов в тексте влекут перестановки строк и столбцов в формальном контексте, которые меняют структуру матрицы $\mathbf{K}$, но сохраняют понятия, содержащиеся в контексте. Обозначим через $\mathfrak{S}(\mathbf{K})$ множество всех понятий, содержащихся в формальном контексте $\mathbf{K}$. Тогда условие семантической симметрии запишется в виде:

$$\mathfrak{S}(T(g)\mathbf{K}) = \mathfrak{S}(\mathbf{K}S(g)). \quad (2)$$

Здесь оператор $\mathfrak{S}$ реализуется посредством алгоритма построения решеток понятий на заданном формальном контексте. В результате условие (2) задаёт равенство (эквивалентность) решёток.

Исследование симметрий выполняется, как правило, с целью декомпозиции симметричных объектов – в данном случае, формальных контекстов, обладающих свойством инвариантности. Оба типа инвариантности, задаваемые условиями (1) и (2), приводят нас к множествам допустимых перестановок, задаваемых матрицами $T(g)$ и $S(g)$, являющимися представлениями некоторой группы G . Отсюда следует необходимость идентификации (построения) группы G симметрии формального контекста.

При построении группы симметрии возможны два варианта: 1) матрицы $T(g)$ и $S(g)$ известны; 2) матрицы $T(g)$ и $S(g)$ необходимо построить. Первый вариант характерен для семантической симметрии, когда известны перестановки слов, порождающих формальный контекст. Второй вариант следует рассматривать как общий случай при анализе визуальной симметрии. Традиционно визуальная симметрия описывается точечными группами, за которыми стоят геометрические операции отражения, вращения и их комбинации. Но поскольку матрица $\mathbf{K}$ – это $[0, 1]$ -матрица, в ней всегда существует множество перестановок её элементов, сохраняющих структуру (внешний вид) матрицы, не связанных с геометрическими операциями. В результате имеем задачу нахождения представления группы, заданного перестановками, и удовлетворяющего условию (1). Данная задача решается методами вычислительной теории групп [11], большинство из которых имеет комбинаторную природу.

Существует общий подход к декомпозиции матриц, удовлетворяющих условиям симметрии (1), основанный на их факторизации. Пример изложения данного подхода можно найти в работе [12]. Поскольку нас интересуют формальные контексты, построенные на текстовых данных, наличие известных матриц представлений группы симметрии упрощает задачу, но в то же время требует конкретизации общего метода [12].

4. Реализация моделей. Рассмотренные модели применяются в пилотном проекте системы извлечения фактов следующим образом.

1. На предложениях обрабатываемых текстов строится множество концептуальных графов. Это множество строится методом [9] с применением стандартного морфологического анализатора и решения задачи разметки семантических ролей.

2. На множестве концептуальных графов решается задача их агрегирования. Агрегирование необходимо для исключения избыточной размерности концептуальных моделей, не связанной с полезной информацией. В качестве метода агрегирования применяется кластеризация множества концептуальных графов.

3. На агрегированном множестве концептуальных графов строится формальный контекст. Исследуются симметрии формального контекста и выполняется его декомпозиция методом [12].

4. На формальном контексте выделяются формальные понятия и строятся решётка понятий. Решётка понятий объединяет формальные понятия контекста в иерархическую структуру, обладающую свойствами математических решёток. Имея решётку понятий, можно выявлять связи между понятиями по принципу “общее – частное”. Каждое понятие “узел решётки” интерпретируется как множество потенциальных фактов определенного уровня (тематики), которое связано с другими фактами.

Пункты 1–4 предлагаемого метода предназначены для подготовки данных, которые используются системой извлечения фактов, реализующей данный метод в виде информационной технологии. Извлечение фактов из текстов выполняется с использованием специального фактографического интерфейса к решетке понятий и программной оболочки, позволяющей управлять диалогом пользователя с системой.

В настоящее время имеются программные решения для всех пунктов дан-

ного метода без анализа симметрий. Вычислительная сложность метода, с учётом затрат на построение концептуальных графов, оценивается как $O(n^3)$, где n – количество слов в тексте. Блочной-диагональной декомпозиция контекста в п. 3 позволяет заменить исходный контекст множеством независимых контекстов меньшей размерности и обрабатывать их отдельно. С учетом того, что для построения всех контекстов используется одно и то же множество концептуальных графов, уменьшение вычислительной сложности в этом случае оценивается минимум на порядок, т. е. до $O(n^2)$.

Литература

- [1] Kao A., Poteet S. Natural Language Processing and Text Mining. – London: Springer–Verlag, 2007.
- [2] Sowa J. F. Conceptual Structures: Information Processing in Mind and Machine. – London: Addison–Wesley, 1984.
- [3] Ganter B., Stumme G., Wille R. Formal Concept Analysis: Foundations and Applications. Lecture Notes in Artificial Intelligence, №3626. – Berlin: Springer–Verlag, 2003.
- [4] Ермаков А. Е. Извлечение знаний из текста и их обработка: состояние и перспективы // Информационные технологии, 2009, № 7. – С. 50–55.
- [5] Биркгоф Г. Теория решёток. – М., 1984. – 567 с.
- [6] Kuznetsov S. O., Obiedkov S.A. Comparing Performance of Algorithms for Generating Concept Lattices // Journal of Experimental and Theoretical Artificial Intelligence, Vol. 14. №2–3, 2002. – P 189–216.
- [7] Барсегян А. А., Куприянов М. С., Степаненко В. В., Холод И.И. Технологии анализа данных: Data Mining, Visual Mining, Text Mining, OLAP. – СПб., 2008. – 384 с.
- [8] Priss U. Linguistic Applications of Formal Concept Analysis // Ganter; Stumme; Wille (eds.), Formal Concept Analysis, Foundations and Applications. – Springer–Verlag, 2005. – P. 149–160.
- [9] Bogatyrev M., Kolosoff A. Using Conceptual Graphs for Text Mining in Technical Support Services. Pattern Recognition and Machine Intelligence. Lecture Notes in Computer Science, 2011, Vol. 6744/2011. – Heidelberg: Springer–Verlag, 2011. – P. 466–471.
- [10] Gildea D., Jurafsky D. Automatic labeling of semantic roles // Computational Linguistics, 2002, Vol. 28. – P. 245–288.
- [11] Holt D. F., Eick B., O’Brien E. A. Handbook of computational group theory. – Boca Raton: Chapman&Hall/CRC Press, 2005.
- [12] Egner S., Puschel M. Symmetry-based matrix factorization // Journal of Symbolic Computation, Vol. 37, 2004. – P. 157–186.

АДА ЛАВЛЕЙС И ЕЁ ПРОГРАММА ПО НАХОЖДЕНИЮ ЧИСЕЛ БЕРНУЛЛИ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЕ БЭББИДЖА

Гайфулина Д. А., Хакимова Э. Р.
Оренбургский государственный университет
Оренбург
e-mail: elvirochka1995@mail.ru

Gaifulina D. A., Khakimova E. R. Ada Lovelace and her programm for finding Bernoulli numbers on the Babbage's Analytical Engine. We consider the biography of the first programmer Ada Lovelace, Bernoulli numbers and an algorithm to calculate them. We explored the mechanism of work of this programm on the Babbage's Analytical Engine. We established the influence of Ada's work on the development of modern computer technology. Perspective developed an elective course for high school sfudents in he discipline Computer Science and Engineering in order to deepen the study of the history of mathematical programming.

Исследована биография первого программиста, Ады Лавлейс. Изучено понятие чисел Бернулли и алгоритм их вычисления. Рассмотрена первая программа, разработанная Адой Лавлейс, для вычисления чисел Бернулли. Исследован механизм работы этой программы на вычислительной машине, разработанной Чарльзом Бэббиджом. Установлено влияние работы Ады Лавлейс на развитие нынешней вычислительной техники. В перспективе разработка элективного курса для учащихся старших классов по дисциплине “Информатика и вычислительная техника”, с целью углубленного изучения истории математического программирования.

Августа Ада Байрон, в замужестве Лавлейс, математик с поэтичным псевдонимом “Леди цифр”. Она оставила след в истории математики тем, что описала вычислительную машину, разработанной Чарльзом Бэббиджем, и написала для этой машины первую в мире программу. Таким образом, Ада Лавлейс считается первым в мире программистом [10].

Родилась Ада 10 декабря 1815 года в Лондоне в семье Джорджа Гордона Байрона, который видел ее всего лишь раз, так как спустя месяц, после рождения девочки, он подписал заявление о разводе и навсегда уехал из Англии. Свой энтузиазм в математике девочка переняла у матери Анны Изабеллы Байрон, которую именовали “Королевой Параллелограммов” [7].

Анна Изабелла Байрон наняла для дочери лучших учителей, среди которых был известный шотландский математик Огастес де Морган и его жена Мэри Сомервиль, переводшая с французского языка “Трактат о небесной механике” Лапласа. Мэри явилась кумиром для Ады Лавлейс.

Когда Аде исполнилось семнадцать лет, она начала выезжать в свет. В это же время она впервые услышала от Мэри Сомервиль имя Чарльза Бэббиджа выдающегося английского математика, который в это время занимал должность профессора на кафедре математики Кэмбриджского университета. 5 июня 1833 года, Ада и Бэббидж впервые встретились на научно-технической выставке [7].

Бэббидж родился в 1791 году в семье банкира, и уже студентом он работал над вычислением функций. С 1822 Чарльз Бэббидж работал над постройкой разностной машины, задуманной для вычисления математических таблиц [6, с. 87]. В 1823 году была выплачена первая субсидия на постройку своеобразного первого компьютера “Большой разностной машины Бэббиджа” (Difference Engine), однако в 1833 году ее финансирование было прекращено из-за сложности конструкции [7].

Несмотря на неудачу с разностной машиной, Бэббидж в 1834 году задумался о создании машины, которая бы позволяла решать весь класс вычислительных задач. Новую вычислительную машину Бэббидж назвал Аналитической – Analytical Engine [10].

“Шесть месяцев я разрабатывал проект машины более совершенной, чем первая. Я сам поражен вычислительной мощностью, которой она будет обладать!”, пишет Чарльз Бэббидж [3, с. 192].

Основными частями Аналитической машины являлись: “склад” – устройство для хранения чисел; “мельница” или “фабрика” – арифметическое устройство; “кантора” – устройство управления; устройства ввода и вывода. Каждое из колес регистров могло останавливаться в одном из десяти положений и запоминать десятичный знак [12]. Для ввода данных в память и управлением работой, задумывалось использовать перфокарты, которые впервые начали использоваться в ткацких станках Жаккарда в 1808 году. Жозеф Мари Жаккар (1752–1834 гг.) – изобретатель станка для выработки крупноузорчатых тканей, яркого примера машины с программным управлением [5, с. 45].

Аналитическая машина претворяла в жизнь два механизма с перфокартами – один посылал операции “мельнице”, второй же управлял переносом данных со “склада” на “фабрику”. Результат машина отдавала обратно на “склад” [6, с. 87]. Так же в Аналитической машине была возможность организации условий и циклов, для которых механизм переноса последнего разряда мог принудить механизм воспроизвести действие либо пропустить его [6, с. 88].

Аналитическая машина была описана в статье Луиджи Фредерико Менабреа, которую Бэббидж попросил графиню Лавлейс перевести на английский и сопроводить текст комментариями. В одном из приложений в 1843 г. Ада и описала свою программу, о которой она написала Бэббиджу: “Я хочу ввести пример в одно из примечаний: вычисление чисел Бернулли в качестве примера вычисления машиной неопределенной функции без предварительного решения ...” [12].

Графиня Лавлейс помогла Бэббиджу служила источником вдохновения изобретателя, но даже дара и обаяния девушки оказалось недостаточно, для решения основной проблемы создания аналитической машины – ее просто невозможно было сконструировать. Машина должна была быть не меньше железнодорожного локомотива, а любая нестабильность крошечной детали привела бы машину в “бешенство” [9, с. 36]. Аналитическая машина так и не была сооружена, и ее наследие – это ворох чертежей, а также небольшая часть арифметического устройства и печатающее устройство, собранное сыном Бэббиджа [12].

Несмотря на это, написанная Адой программа по вычислению чисел Бернулли признана первой программой, реализованной для воспроизведения на вы-

числительной машине. Обратимся теперь к этой программе и её представлению на машине Бэббиджа.

Чтобы осмыслить работу программы нужно разобраться в таком понятии как “Числа Бернулли”, открытые швейцарским математиком и механиком Якобом Бернулли (1759–1789 гг.) [3, с. 193]. Числа Бернулли – это ряд рациональных чисел $B_0, B_1, \dots, B_n$, полученный путем суммы последовательных чисел возведенных в одну и ту же степень [4, с. 398]:

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k. \quad (1)$$

С помощью разложения бинома Ньютона:

$$(a + b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \dots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + b^k, \quad (2)$$

где $(a, b$ – произвольно взятые числа) напомним тождество:

$$(a - 1)^{k+1} - a^{k+1} = -C_{k+1}^1 a^k + C_{k+1}^2 a^{k-1} + \dots + (-1)^k C_{k+1}^k a + (-1)^{k+1}. \quad (3)$$

Предположим, что $a = 1, 2, \dots, n$, сложим результаты слева и справа и получим:

$$-n^{k+1} = -C_{k+1}^1 S_k(n) + C_{k+1}^2 S_{k-1}(n) + \dots + (-1)^k C_{k+1}^k S_1(n) + (-1)^{k+1} S_0(n). \quad (4)$$

Отсюда вытекает рекуррентное соотношение:

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} [n^{k+1} + C_{k+1}^2 S_{k-1}(n) + \dots + (-1)^k C_{k+1}^k S_1(n) + (-1)^{k+1} S_0(n)], \quad (5)$$

где $S_k(n), S_{k-1}(n), S_1(n), S_0(n)$ – суммы последовательных чисел, возведенных в $k, k-1, 1, 0$ степени соответственно; n – количество последовательных чисел.

Так можем получить сумму $S_k(n)$, если знаем все предыдущие суммы.

Чтобы окончательно разобраться, что же такое числа Бернулли, найдем несколько сумм:

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n, \\ S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n, \\ S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2. \end{aligned}$$

Чтобы получить саму формулу вычисления чисел Бернулли, воспользуемся найденным рекуррентным соотношением и разделим его на n :

$$B_k = \frac{1}{k+1} [C_{k+1}^2 B_{k-1} + \dots + (-1)^k C_{k+1}^k B_1 + (-1)^k B_0]. \quad (6)$$

При вычислениях чисел Бернулли Ада Лавлейс использует формулу, представленную в виде:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \left(\frac{2n}{2} \right) + B_3 \left(\frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) + \dots + \\ + \dots + B_5 \left(\frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot (2n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \right) + \dots + B_{2n-1} = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

которую также можно записать в общей форме:

$$A_0 + A_1 B_1 + A_3 B_3 + A_5 B_5 + \dots + B_{2n-1} = 0, \quad (8)$$

где A_1, A_3 и т. д. являются функциями n , которые, соответственно, относятся к $B_1, B_3, \dots$ и т. д. [1].

Каждое слагаемое после $(n+1)$ -го равно нулю, а $(n+1)$ -е слагаемое всегда $B_{2n-1} \cdot \frac{1}{1} = B_{2n-1}$. Это позволяет находить значения любого n -го числа Бернулли B_{2n-1} , с учётом знания всех предыдущих.

Для вычисления каждого последующего числа Бернулли необходимо руководствоваться не сложной последовательностью вычислений:

1-я серия: Пусть $n = 1$, и вычислить (7) для этого значения. Результат – B_1 .

2-я серия: Пусть $n = 2$. Вычислить (7) для этого значения n , подставляя только что полученное значение B_1 . В результате – B_3 .

3-я серия: Пусть $n = 3$. Вычислить (7) для этого значения n , подставляя полученные значения B_1, B_3 . В результате B_5 . И так далее, до некоторой степени.

К Заметкам Ады прилагаются диаграммы и таблицы, содержащие данные для вычисления B_7 (B_1, B_3, B_5 являются предположительно заданными). Рассмотрим подробнее одну из этих схем, которая демонстрирует вычисление B_{2n-1} (в данном случае $n = 4$) [1].

В этом случае в качестве исходных необходимо шесть численных данных: 1, 2, $n(=4)$, B_1, B_3, B_5 . Для $n = 5$ потребуется дополнительная величина B_7 , для $n = 6$ – B_9 и т. д. Таким образом, фактическое количество необходимых данных всегда будет $n + 2$.

Карты Операции 1–6 подготовят $-\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$. Карта 1 умножает два на n , и три карты Переменных, получающих результат (обозначаются V_4, V_5, V_6), дают результат $2n$. При Операции 6, положительная величина становится отрицательной путем вычитания из столбца, содержащего только нули. Если мы будем рассчитывать для $n = 1$, в операции 6 будет завершено вычисление B_1 .

Карты 8–10 производят вычисление $-\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \left(\frac{2n}{2}\right)$. Карта 12 выполняет ту же роль, что и Карта 7 в предыдущем разделе; и, если бы n было равно двум, Операция 11 завершила бы вычисление B_3 .

Карты 13–20 считают A_3 с тремя коэффициентами, поскольку A_{2n-1} всегда состоит из $(2n-1)$ -го коэффициента: Карты 13–16 высчитывают второй из этих коэффициентов, а затем умножают его на первый; Карты 17–20 вычисляют третий коэффициент, а затем умножают на произведение двух предыдущих коэффициентов [1].

Карта 23 имеет роль Карт 7 и 12, так как, если n было бы равно 3, 21-ая и 22-я операции завершили бы подсчёт B_5 . В нашем случае с B_7 , подсчёт будет продолжаться еще этап. Чтобы вычислить A_7 надо точно повторить группы Операций 13–20, а затем, чтобы завершить вычисление B_7 – Операции 21 и 22.

Таким образом, каждая единица, прибавляющаяся к n в B_{2n-1} , влечёт за собой дополнительные повторения Операций 13–23 для вычисления B_{2n-1} . Остается только подать значения на V_{13} и V_{24} , уменьшить V_6, V_7, V_{13} до нуля, и прибавить единицу к V_3 , чтобы двигатель был готов начать вычисления B_9 , в Операциях 24 и 25 [1].

Таким образом, мы видим, что, когда $n = 1$, используются девять карт Операций; $n = 2$ – четырнадцать; при $n > 2$ – двадцать пять, которых достаточно для вычисления всех чисел от B_1 до B_{2n-1} включительно. В соответствии с необходимостью в трёх дополнительных карт каждой Операции для, расчёт B_1 потребует двадцать семь карт Переменных; B_3 – сорок две таких карты; B_5 – семьдесят пять карт; и за каждые последующие после B_5 – тридцать три дополнительных карт Переменных. Те же семьдесят пять карт Переменных повторяются для вычисления каждого последующего числа, как и тридцать три карты Переменных Операций 13–23 в расчете любого одного Числа. Таким образом, существует цикл в цикле карт Переменных [1].

Можно выразить операцию для вычисления чисел Бернулли следующим образом:

$$(1 \dots 7), (8 \dots 12), \sum (+1)^{n-1} (13 \dots 23), (24, 25) \dots B_{2n-1} = n\text{-ое} \dots; (n = n).$$

К сожалению, идеи графини Лавлейс увидели свет только с наступлением эры вычислительной техники. Сама Ада скончалась от рака 27 ноября 1852 года и была похоронена в фамильном склепе Байронов [10].

В прошлые десятилетия время многие разработки Лавлейс и Бэббиджа проверяли на современном уровне. В 1991 году английские ученые по чертежам Чарльза Бэббиджа построили механическую вычислительную машину. В 1978 году в Дубне в вычислительную машину БЭСМ-6 была введена программа Ады Лавлейс на языке программирования “Фортан”. При её проверке была найдена всего одна ошибка, но программа требовала меньшего количества перфокарт.

В 1975 году Министерством обороны США была предложена идея о создании универсального языка программирования, который был назван в честь графини Лавлейс – язык “Ада” [7].

В честь Ады Лавлейс отмечается два праздника: день 7 октября проводится в честь популяризации научной карьеры среди женщин, и неофициальный праздник “День программиста” отмечается несколько раз в году, и две даты связаны с именем Ады: это 10 декабря – её день рождения и 17 октября – день написания первой программы [8].

Ада изрекла одну из идей, которая перевернула развитие вычислительной техники в целом: “Суть и предназначение машины изменятся от того, какую информацию мы в нее вложим. Машина сможет писать музыку, рисовать картины и покажет науке такие пути, которые мы никогда и нигде не видели” [10]. Этим утверждением она предвидела развитие вычислительной техники в иных направлениях – не только для вычислений, но и для других задач.

Литература

- [1] Menabrea L. F., Lovelace A. A. Sketch of The Analytical Engine Invented by Charles Babbage. – Bibliothèque Universelle de Genève. – October, 1842. – № 82.
- [2] Абрамович В. С. Числа Бернулли // Журнал “Квант”. – 1974. – № 6. – 10–14 с.
- [3] Белл Э. Т. Творцы математики. Предшественники современной математики. Пособие для учителей. – М., 1979. – 256 с.

- [4] Брокгауз Ф. А. Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона. Жаккард, Жозеф-Мари [в 86 т.] Т. 1А. – СПб.: Питер, 1891.
- [5] Брокгауз Ф. А. Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона. Бернуллиевы числа [в 86 т.] Т. 3. – СПб.: Питер, 1894.
- [6] Гутер Р. С. От абака до компьютера. – М.: Знание, 1981. – 137 с.
- [7] Казак В. М. Великие женщины-математики, ObjectWatch, Inc. 2012 – [Электронный ресурс] – URL: <http://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2012/03/10/velikie-zhenshchiny-matematiki> (дата обращения 16.10.2014)
- [8] Лебешева М. А. Язык Ады Байрон, ObjectWatch, Inc. 2012 – [Электронный ресурс] – URL: http://detonline.com/assets/files/journal/10/imen_10.pdf (дата обращения 25.10.2014)
- [9] Майстров Л. Е., Эдлин И. С. Ч. Бэббедж и его разностная машина // Наука и техника (Вопросы истории и теории). – Л., 1973. – № 8. – 33–36 с.
- [10] Травников Ю. А. Ада Лавлейс: Полет на крыльях математики, ObjectWatch, Inc. 2002 – [Электронный ресурс] – URL: <http://bibliofond.ru/view.aspx?id=445204> (дата обращения 27.10.2014)
- [11] Черняк Л. А. Чарльз Бэббидж – изобретатель и ... политэконом // Computerworld Россия, 2001. – № 17.

МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ ЗАДАЧИ В ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ ОСНОВАМ ОБЪЕКТНО- ОРИЕНТИРОВАННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Комарова С. М.
Псковский государственный университет
Псков

Komarova S. M. Interdisciplinary tasks in teaching students the basics of object-oriented programming. In the article the author developed a method of using interdisciplinary tasks in teaching students the basics of object-oriented programming. The method is based on the principles of competence-based approach, the interdisciplinary connections of academic disciplines, didactic principle “from simple to complex” classification-based interdisciplinary mathematical and computer modeling, developed by the author.

Keywords: modeling, interdisciplinary tasks, object-oriented programming, teaching students.

В статье представлена разработанная автором методика использования межпредметных задач в обучении студентов основам объектно-ориентированного программирования. Методика построена на принципах компетентностного подхода, межпредметных связей учебных дисциплин, дидактическом принципе «от простого к сложному» на основе классификации межпредметных задач математического и компьютерного моделирования, разработанной автором.

Ключевые слова: моделирование, межпредметные задачи, объектно-ориентированное программирование, обучение студентов.

В процессе обучения студентов направления 050100 «Педагогическое образование» профиль «Информатика и информационные технологии в образовании» одним из ведущих и продолжительных по времени (обычно несколько семестров) является изучение основ современного программирования в рамках различных дисциплин: «Алгоритмы и методы программирования», «Объектно-ориентированное программирование» (ООП) и т. д. Исходя из требований Федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) [1] выпускники данного направления и профиля должны быть готовы разрабатывать и применять математические модели процессов и объектов, современные математические методы и информационные технологии (ИТ) для решения профессиональных задач, кроме того, процесс обучения должен быть построен на принципах межпредметных связей учебных дисциплин. Одной из форм реализации данных связей является использование компьютерного моделирования (И. П. Лебедева, Н. В. Макарова, Н. А. Бурмистрова и др.). На наш взгляд, очень близким к процессу моделирования является процесс объектно-ориентированного программирования. Например, их методологии включают ключевое понятие «объект», которое имеет сходное описание (см. табл. 1).

Таблица 1. «Объект» в моделировании и в ООП

Моделирование	ООП
Объект	Экземпляр класса(объект)
Свойства объекта	Поля класса
Поведение объекта	Методы класса

ООП рассматривает окружающий мир в совокупности взаимодействующих объектов. Мы считаем, что в содержание обучения студентов дисциплине «Объектно-ориентированное программирование» целесообразно включить исследование математических моделей, представляя различные математические объекты, известные студентам, в виде классов объектов. Включение исследования математических моделей в содержание дисциплины «Объектно-ориентированное программирование», позволит студентам наглядно «увидеть» сущность изучаемого математического объекта в процессе описания соответствующего этому объекту класса, его свойств и поведения. Полученные знания и умения будущие специалисты смогут применять в своей профессиональной деятельности: при обучении школьников информатике в рамках изучения темы «Моделирование», «Основы (объектно-ориентированного) программирования» и др. Программы в среде ООП, которые рассматриваются на занятиях, способствуют формированию у студентов культуры программирования (структура кода, интерфейс, использование оптимальных алгоритмов решения и т. д.), что дает студентам предпосылки профессиональной деятельности в области программирования.

Рассмотрим содержание лабораторных работ по дисциплине «Объектно-ориентированное программирование», ориентированное на использование межпредметных задач математического и компьютерного моделирования.

Темы лабораторных работ:

1. Создание объекта «Натуральное число».
2. Создание объекта «Треугольник».
3. Создание объекта «Рациональное число».

Целью первой работы является создание приложения в среде программирования Delphi, которое позволяет выводить некоторые характеристики объекта «Натуральное число» (см. рис. 1). Достоинством данного подхода к обучению является то, что студенты исследуют некоторую математическую модель и при этом изучают основы ООП: создание и описание классов, возможности визуальных стандартных компонентов (Label, Button, RadioGroup и т. д.) для отображения необходимых характеристик и т. д.

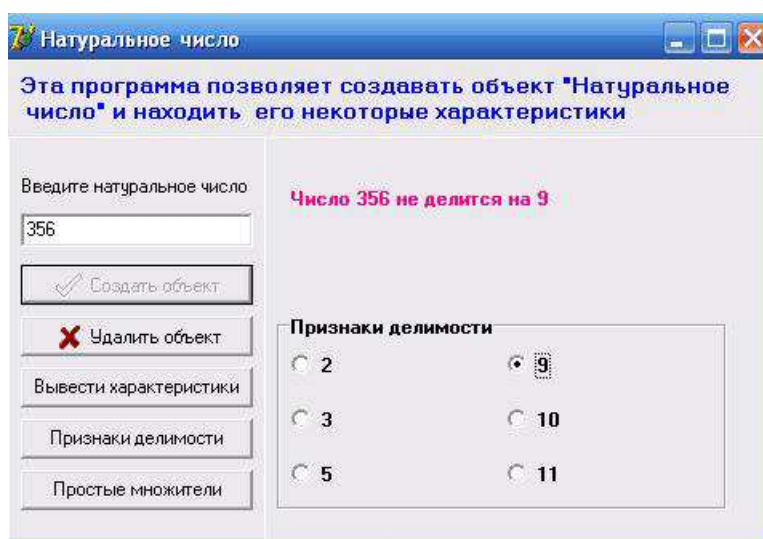


Рис. 1. Приложение «Натуральное число»

Представленная задача предлагается первой для решения и предполагает следующую совместную деятельность преподавателя и студентов:

1) математическое описание объекта «Натуральное число»: определение, свойства (чётное, нечётное, простое, составное), выделение основных действий, которые могут совершаться над объектом (алгоритм проверки делимости (признаки) на 2, 3, 5, и др.), алгоритм разложения на простые множители.

2) построение компьютерной модели объекта: создание формы для визуального отображения результата исследования, описание класса «натуральное число», определение полей класса и методов:

TNumber=class (TObject) // класс натуральное число

Fchislo: word; // поле число

Fprost: boolean; // поле признак простого числа

Fchetn:boolean; // поле признак чётности

function Inp(b: string): boolean; // метод «ввод»

function Prost(a: TNumber): boolean; // метод «является ли число про-

стым»

function Chetn(a: TNumber): boolean; // метод «является ли число чётным»

end;

создание программного кода, тестирование полученного приложения.

3) в качестве самостоятельной работы студентам необходимо дополнить код программы признаками делимости на 4, 7, исходя из определения признака делимости:

- число делится на 4 только тогда, когда две его последние цифры – нули или составляют число, которое делится на 4.
- число делится на 7 тогда и только тогда, когда модуль алгебраической суммы чисел, образующих нечётные группы по три цифры (начиная с единиц), взятых со знаком «+», и чётных со знаком «-» делится на 7.

Данная задача относится к классу простейших задач в соответствии с разработанной автором классификацией [2]: студенты знают описание математической модели, алгоритм исследования ее характеристик, программный код, исполняемый файл. В результате решения этой задачи у студентов формируется способность решать похожие задачи, например, дополнить объект характеристиками: включить признаки делимости на 4 и на 7, дополнить программный код для возможности работы с двумя объектами «Натуральное число» и их исследования, например, нахождение НОД и НОК, простых чисел в диапазоне между этими числами. В результате у студентов получается следующее приложение (рис. 2).

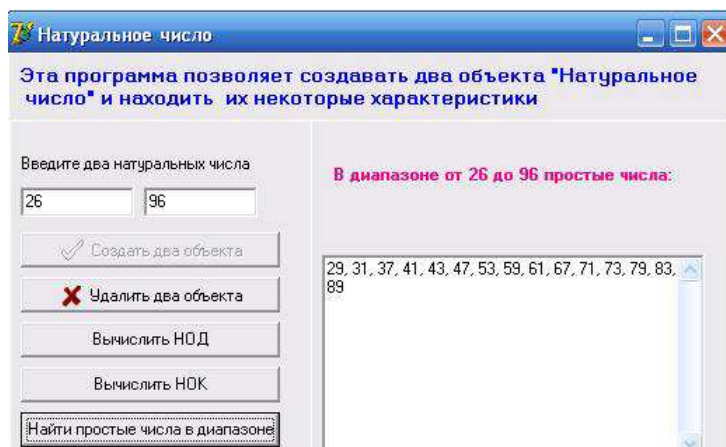


Рис. 2. Приложение “Два объекта «Натуральное число»”

Вторая лабораторная работа “Создание объекта «Треугольник»” относится к классу более сложных задач [2]. Студентам необходимо создать объект «Треугольник» и провести его исследование: определить вид треугольника (равнобедренный, равносторонний, прямоугольный, прямоугольный равнобедренный, общего вида), найти периметр, площадь, выяснить, принадлежит ли заданная точка области треугольника. Преподаватель предлагает описание математической модели: способ задания треугольника по координатам его вершин,

условие, при котором точка принадлежит области треугольника, треугольник равносторонний, равнобедренный, прямоугольный и т. д., формулы для вычисления периметра и площади, а так же демонстрирует пример работы готового приложения. Студенты совместно с преподавателем описывают класс «Треугольник»:

```

type
  arr=array [1..3, 1..2] of string; // массив, хранящий координаты после
ввода
  point=record // тип данных «точка»
    x, y: real;
  end;
  Ttri = class (TObject) // класс «треугольник»
    Ftochki: array [1..3] of point; // поле «координаты точек»
    Fab: real; // поле «длина стороны АВ»
    Fbc: real; // поле «длина стороны ВС»
    Fca: real; // поле «длина стороны СА»
    function Inp(s:arr):boolean; // метод «ввод значений в поля»
    procedure side; // метод «длина стороны»
    function Perimetr : real; // метод «периметр»
    function Square :real; // метод «площадь»
    function TochIn (D:point): boolean; // метод «положение точки»
    function vid:string; // метод «вид треугольника»
  end;

```

Программный код студенты создают самостоятельно, в том числе описывают методы. При решении данной задачи используются различные методы обучения [3]: алгоритмический, репродуктивный, частично-поисковый. В результате выполнения задания у студентов развивается способность к алгоритмическому мышлению, составлять алгоритм решения задачи по известным условиям, создавать программный код по известному алгоритму, разрабатывать интерфейс приложения по аналогии с показанным преподавателем.

Третья задача предполагает самостоятельное решение студентами. Преподаватель формулирует условие на естественном языке: создайте приложение для работы с объектом «Рациональное число» с интерфейсом для ввода двух рациональных чисел и вывода результата арифметических действий, произведенных над ними [4]. Это задание наиболее сложное (по классификации [2]). Для его решения используются поисковый, эвристический методы [3]. В результате выполнения задания у студентов формируется готовность формализовать и исследовать математическую модель средствами среды ООП.

Разнообразие математических объектов позволяет наполнить содержание обучения дисциплине «Объектно-ориентированное программирование» классами задач межпредметного характера различного уровня сложности. Преподаватель имеет возможность отобрать классы задач в зависимости от уровня математической подготовки студентов и в области программирования. Отбор задач и последовательность их представления студентам должна удовлетворять дидактическому принципу «от простого к сложному» и способствовать формированию познавательного интереса, творческого подхода, профессиональной

направленности образования. Межпредметные задачи способствуют систематизации и закреплению математических знаний студентов и овладению приемами объектно-ориентированного программирования.

Литература

- [1] Федеральные государственные образовательные стандарты высшего профессионального образования по направлениям подготовки бакалавриата [официальный сайт Минобрнауки РФ].
URL: <http://минобрнауки.рф/документы/924> (дата обращения: 20.01.2015)
- [2] Комарова С. М. О классификации межпредметных учебных задач по компьютерному моделированию // Материалы X международной ежегодной научной Интернет-конференции «Новые образовательные стратегии в современном информационном пространстве» 2014 г. URL: http://fit-herzen-conf.ru/statii/208_komarova.php (дата обращения 20.01.2015)
- [3] Педагогика. Учебное пособие для студентов педагогических вузов и педагогических колледжей / Под ред. П. И. Пидкасистого. – М: Педагогическое общество России, 1998. – 640 с.
- [4] Андрианова А. А., Исмагилов Л. Н., Мухтарова Т. М. Практикум по курсу «Объектно-ориентированное программирование» на языке C#. Учебное пособие. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2012. – 112 с.

УДК 004.94

РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НИЗКОЧАСТОТНЫХ УСТРОЙСТВАХ МАГНИТОТЕРАПИИ

Кудрин Б. К.

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: bogdan.kudrin@gmail.com

Kudrin B. K. On implementation of algorithms of modelling and visualization of electromagnetic field in low-frequency magnetotherapy devices. The implementation of algorithms for 3D modeling of electromagnetic field for a class of low-frequency magnetotherapy devices is described. The algorithms are based on a mathematical model of the calculation of magnetic field for inductivity coil. Both direct calculation and different interpolation methods are implemented. According to the results of numerical experiments and the configuration of base units the most appropriate method of interpolation is selected. For visualization of the data Paraview application is used. To calculate the values of the electromagnetic field by a scalar experimental data (field on a straight line segment) quadratic Lagrange interpolation is used. The software system allows the physician to choose different methods of the field modeling, and the analysis of intensity distribution in obtained images helps to estimate the effectiveness of such procedures.

В работе описана реализация алгоритмов моделирования в 3D электромагнитного поля для определенного класса низкочастотных устройств магнитотерапии. Вычисления проводятся по математической модели, реализованы алгоритмы непосредственного вычисления и с использованием различных интерполяционных методов. По результатам численных экспериментов в зависимости от конфигурации базовых узлов выбирается наиболее подходящий метод интерполяции. Для визуализации полученных данных используется пакет Paraview. Для вычисления значений электромагнитного поля по скалярным экспериментальным данным (поля на отрезке прямой линии) используется квадратичная интерполяция Лагранжа. Программная система позволяет врачу выбирать различные методы моделирования поля, а анализ полученных изображений распределения интенсивности помогает оценить эффективность таких процедур¹.

1. Введение. В рамках сотрудничества с Техническим Университетом Софии была поставлена задача разработать приложение для моделирования и визуализации магнитного поля, генерируемого устройством магнитотерапии, представляющим из себя кровать и подвижную каретку, на которой определенным образом расположены 6 катушек индуктивности. В результате было разработано приложение на языке программирования Java, реализующее алгоритм вычисления значений электромагнитного поля, создаваемого несколькими несоосными катушками [1, 3–5]. Для того, чтобы уменьшить длительное время работы данного алгоритма, были разработаны и реализованы два алгоритма трёхмерной интерполяции, сократившие время вычислений без существенной потери точности [2, 6].

Следующим этапом работы стала разработка приложения для получения интерполированных данных по экспериментальным значениям, полученным в результате измерений поля в заданной области [7, 8].

В данной работе описано приложение, соединяющее задачи вычисления и визуализации низкочастотного магнитного поля как по модельным, так и по экспериментальным данным. Приложение позволяет моделировать различные распределения поля при изменении параметров катушек, а сопоставление результатов визуализации с исследованием эффективности процедуры позволяет врачу выбирать наиболее подходящие в каждом случае режимы.

2. Вычисления по модели. Первая часть разработанного приложения позволяет задать параметры катушек и их расположение и выполнить непосредственное вычисление по алгоритму. В результате работы формируется выходной в формате .vtk, который дальше может быть использован для визуализации.

Координаты катушек задаются в глобальной системе, но непосредственные вычисления выполняются в локальной цилиндрической системе координат катушки, поэтому требуется переход между системами координат. В качестве вспомогательной используется локальная декартова система координат.

Алгоритм непосредственного вычисления является ресурсоёмким, так как в каждой точке области считается суперпозиция значений для каждого контура каждой катушки, а также требуются частые преобразования координат.

¹Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 13–01–00782.

В целях оптимизации времени вычисления были разработаны и реализованы алгоритмы интерполяции, позволяющие уменьшить число базовых точек сетки.

3. Трёхмерная интерполяция. Было реализовано два алгоритма интерполяции: трёхмерная линейная интерполяция и одномерная квадратичная интерполяция Лагранжа.

А. Трёхмерная линейная интерполяция. 1. Для заданной точки выбирается 8 узлов базовой сетки (ближайшие соседи) – это будут узлы интерполяции. 2. Выбирается одна из координатных функций векторного поля электромагнитной индукции, для которой будет производиться интерполяция. 3. Строится интерполяционный многочлен от трёх переменных, интерполирующий выбранную координатную функцию векторного поля электромагнитной индукции. 4. Вычисляется значение данного многочлена в исследуемой точке.

Б. Одномерная квадратичная интерполяция (применима, если точка лежит в центре куба, образованного соседними узлами базовой сетки). 1. Для заданной точки выбирается 3 узла базовой сетки (точки базовой сетки, лежащие на одной диагонали) – это будут узлы интерполяции. 2. Выбирается одна из координатных функций векторного поля электромагнитной индукции, для которой будет производиться интерполяция. 3. Строится интерполяционный многочлен 2-ой степени от одной переменной, интерполирующий выбранную координатную функцию векторного поля электромагнитной индукции. 4. Вычисляется значение данного многочлена в исследуемой точке.

Данные алгоритмы легли в основу второй части разработанного приложения для врачей-магнитотерапевтов. В случае, если детализация распределения поля не удовлетворяет врача, он может уменьшить шаг сетки в несколько раз и получить распределение поля для более мелкой сетки, значения в которой будут рассчитаны посредством интерполяции.

Интерполяция показала существенный прирост скорости вычислений по сравнению с алгоритмом непосредственного вычисления: трёхмерная линейная интерполяция показала прирост скорости вычисления в 6 раз, одномерная квадратичная – в 10 раз.

Анализ погрешности проводился следующим образом: вычислялись нормы (максимум модуля) каждого из полученных трёхмерных массивов: полученного непосредственным вычислением (В) и с помощью интерполяции (L and S), а потом считался коэффициент интерполяции L/V and S/V . Погрешность составила не более 8% для линейной интерполяции, и 12% для квадратичной.

4. Вычисления по экспериментальным данным. Следующим этапом разработки программного комплекса стала разработка и реализация алгоритма одномерной интерполяции экспериментальных данных, полученных в результате измерений около магнитотерапевтических аппаратов.

Задача заключалась в следующем: в результате измерений у врача-магнитотерапевта есть три скалярные величины – на краях отрезка и в середине; требуется получить распределение поля на всем отрезке. Следует отметить, что величины для интерполяции являются скалярными – это обусловлено техническими характеристиками прибора, используемого для измерений.

Для получения распределения поля была выбрана одномерная интерпо-

ляция Лагранжа. На исследуемом отрезке вводится сетка, и для каждого узла этой сетки вычисляется интерполированное значение. Результат интерполяции врач может наблюдать наглядно с помощью цветовой диаграммы распределения поля на отрезке, построенной на основании результатов интерполяции. Также он может выбрать конкретную точку для интерполяции с помощью ползунка, расположенного непосредственно над диаграммой.

В качестве средства визуализации был выбран свободно распространяемый (BSD license) пакет научной визуализации ParaView. Выбор в пользу данного пакета и визуализации данных из файла был сделан из-за слишком большой трудоёмкости самостоятельной визуализации. Также ParaView обладает широким спектром специфических возможностей, таких, как построение силовых линий для трёхмерного массива векторов.

5. Заключение. Разработано и реализовано комплексное приложение, реализующее вычисление и визуализацию низкочастотного магнитного поля генерируемого несоосными катушками индуктивности. Приложение позволяет врачу выбирать различные методы моделирования поля, как по основной модели, так и с использованием интерполяционных методов. Для визуализации используется пакет Paraview. Наряду с врачебными методами оценки эффективности магнитотерапевтических процедур анализ полученных изображений распределения интенсивности поля дает врачу дополнительную информацию.

Литература

- [1] Кудрин Б. Компьютерное моделирование электромагнитного поля нескольких несоосных катушек индуктивности // Материалы научной конференции Герценовские чтения–2013. – СПб, 2013. – С. 246–249.
- [2] Кудрин Б. Интерполяция электромагнитного поля в устройствах магнитотерапии // Материалы научной конференции Герценовские чтения–2014. – СПб, 2014. – С. 210–212.
- [3] N. Ampilova, D. Dimitrov, B. Kudrin. Mathematical modeling of low frequency magnetic field in systems for magnetotherapy // Proc. 8 Int. Conf. CEMA13, 17–19 Oct. 2013. – Sofia, Bulgaria. – P. 48–51.
- [4] B. Kudrin, A. Dimitrov. An algorithm for visualization of low-frequency magnetic signals in systems for magnetotherapy // Proc. 8 Int. Conf. CEMA13, 17–19 Oct. 2013. – Sofia, Bulgaria. – P. 31–35.
- [5] B. Kudrin, A. Dimitrov. Computer visualization of low frequency magnetic signals in systems for magnetotherapy with variable parameters // Proc. 8 Int. Conf. CEMA13, 17–19 Oct. 2013. – Sofia, Bulgaria. – P. 36–39.
- [6] B. Kudrin, I. Soloviev. On interpolation methods of low frequency magnetic field in systems for magnetotherapy // Proc. 9 Int. Conf. CEMA14, 16–18 Oct. 2014. – Sofia, Bulgaria. – P. 154–157.
- [7] B. Kudrin, V. Nikolov, D. Dimitrov. On the mathematical model of interpolation of low frequency magnetic field using experimental data // Proc. 9 Int. Conf. CEMA14, 16–18 Oct. 2014. – Sofia, Bulgaria. – P. 80–84.

- [8] B. Kudrin, V. Nikolov, D. Dimitrov. Algorithms of interpolation and visualization of low frequency magnetic field by using experimental data. Proc. 9 Int. Conf. CEMA14. 16–18 Oct. 2014. – Sofia, Bulgaria. – P. 43–45.

ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ВО ВСТРАИВАЕМЫХ СИСТЕМАХ НА ПРИМЕРЕ СПЕКТРОСКОПИИ

Никольский Б. Б., Фомин В. В.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: v_v_fomin@mail.ru

Nikolskyi B. B., Fomin V. V. Prospects for the use of neural networks in embedded systems, for example, spectroscopy. This article discusses the possibility of using neural networks in modern embedded systems based on microcontrollers, as well as the benefits, limitations and possible drawbacks of using this technology in spectroscopy.

В данной статье рассматривается возможность применения нейронных сетей в современных встраиваемых системах на базе микроконтроллеров, а также получаемые преимущества, ограничения и возможные недостатки применения данной технологии в спектроскопии.

Встраиваемая система (embeddedsystem) – это специализированный компьютер (микропроцессорная система управления), характерной чертой которой является то, что данная система входит в состав устройства, которым она управляет и неотделимо от него. Как правило, аппаратно такие системы основываются на однокристальных ЭВМ (System-on-a-Chip), и управляются специализированным программным обеспечением (ПО).

Современные микроконтроллеры фактически являются однокристальными ЭВМ, которые обладают достаточно высокой производительностью и богатым набором периферийных устройств. Мощность микроконтроллеров позволяет не только получать и регистрировать информацию с каких-либо устройств и датчиков, но и обрабатывать её с применением ресурсоёмких аналитических алгоритмов и моделей [1], в том числе и используя искусственные нейронные сети (ИНС) [2], исключив необходимость использования ПЭВМ в качестве платформы для обработки данных.

Для демонстрации потенциала применения ИНС рассмотрим один из примеров использования встроенной системы в электронном анализаторе спектра (например, анализатор гамма-спектра), а также возможность применения нейронных сетей, для оптимизации используемого в данном примере алгоритма.

Гамма-спектроскопия – разновидность электромагнитной спектроскопии, позволяющей определить не только наличие источника или источников излучения, но также и его типов на основе анализа спектра, полученного анализатором

гамма-излучения.

В состав спектрометра входят:

1. Счётчик импульсов гамма излучения (газоразрядный счётчик Гейгера–Мюллера или сцинтилляционный счетчик).
2. Фотоэлектронный умножитель (ФЭУ).
3. Анализатор (блок обработки электрических импульсов).

Сцинтилляционный счётчик – это регистрирующий прибор, основанный на сцинтилляторах – веществах, способных излучать свет при поглощении ионизирующего излучения (в данной ситуации гамма-квантов).

ФЭУ – электровакуумный прибор, который преобразует световые фотоны, излучаемые сцинтиллятором, в электрические импульсы с переменной амплитудой.

Анализатор – блок обработки электрических импульсов, поступающих с ФЭУ, регистрирует входящий сигнал, производит его анализ, а также выдаёт управляющие сигналы для ФЭУ.

Рассмотрим алгоритм работы спектрометра. Попавшие в детектор гамма-кванты, генерируют световую вспышку в детекторе. ФЭУ регистрирует вспышку и преобразует её в электрический импульс. За определённый, очень короткий промежуток времени происходит накопление полученных импульсов. Полученные импульсы характеризуются длительностью и амплитудой (энергией), а также интенсивностью (количеством полученных импульсов за текущий временной промежуток). Различные источники гамма-излучения можно характеризовать перечисленными выше параметрами (амплитуда и длительность). Сопоставив зарегистрированные данные с образцовыми данными различных источников излучения, мы можем определить, гамма-кванты какого именно типа источника зарегистрированы прибором.

На практике данный алгоритм имеет ряд существенных технических ограничений.

1. Первое ограничение заключается в том, что ФЭУ – это электровакуумный прибор, имеющий непостоянные характеристики. Управление ФЭУ осуществляется подачей высокого напряжения (700–1000 В) на управляющий электроприбора. В зависимости от величины данного напряжения изменяется амплитуда выходного сигнала. Таким образом, для получения точных значений амплитуды сигнала необходимо проводить калибровку ФЭУ используя образцовый источник гамма-излучения, для которого заранее известно значение амплитуды регистрируемого сигнала.
2. Второе ограничение – отклонение параметров ФЭУ из-за внешних факторов (например, температуры). Чтобы избежать «плавания» результатов измерения применяются различные методики стабилизации параметров ФЭУ. Например, использование эталонного источника световых импульсов, имеющего заранее известные параметры (длину волны и частоту излучения), которые в свою очередь не подвержены отклонению по каким-либо внешним факторам. Это позволяет установить контрольные значения регулировочных параметров для ФЭУ в момент его калибровки и корректировать отклонения в работе прибора.

Данные методы позволяют получить спектр гамма-излучения в широком энергетическом диапазоне. Однако, остаётся несколько нерешённых проблем:

1. Процесс калибровки детектирующего блока прибора включает в себя несколько фаз (накопление естественного фона, термостабилизацию и т. д.) и занимает достаточно продолжительное время.
2. Описанный выше алгоритм не уберегает от возможности как ложного срабатывания, так и несрабатывания.

Одним из вариантов решения этих проблем – это применение нейронных сетей в алгоритме детектирования, что сразу даёт несколько полезных для нас преимуществ:

1. Получение результата при заранее неизвестной зависимости между входными и выходными параметрами (позволит скорректировать ложные срабатывания).
2. Легкость распараллеливания алгоритма при решении задачи (позволит увеличить скорость обработки информации).

Существуют различные топологии нейронных сетей, каждая из которых имеет свои сильные и слабые стороны для решения определённых задач. Для оптимизации описанного алгоритма можно использовать нейронную сеть, основанную на многослойном перцептроне [2].

Преимущества данной сети заключаются в следующем:

1. Множество входных узлов, образующие входной слой (Блок обработки электрических импульсов получает сигнал с ФЭУ посредством многоканального АЦП).
2. Одного или более скрытых слоёв (слои, не включающие входной и выходной слой) вычислительных нейронов.
3. Возможность решения задач, для которых неизвестно алгоритмическое решение (при наличии репрезентативного набора примеров с известными решениями (предотвращение ложных срабатываний)).
4. Данный тип нейронной сети хорошо изучен и применяется на практике, что позволяет применить его в приведённом в статье алгоритме.

Недостатки применения нейронных сетей:

1. Высокая вычислительная ресурсоёмкость, несмотря на высокую производительность современных микроконтроллеров, нейронные сети все равно остаются очень ресурсоемким методом обработки данных.
2. Возможность ошибочной работы при неправильном обучении. Качество работы нейронной сети сильно зависит от того, как именно был проведён процесс её обучения. При неполном, а тем более неправильном обучении результаты работы алгоритма с применением такой нейронной сети могут быть непредсказуемы.

3. Сложность качественной программной реализации. Для качественной работы алгоритма с применением нейронной сети требуется высокая квалификация программиста, реализующего данный алгоритм.

Таким образом, искусственные нейронные сети позволяют нам улучшить характеристики уже имеющегося прибора, не затрагивая его аппаратной части. Современные микропроцессорные системы обладают достаточно большим количеством встроенных инструментов для регистрации детектируемых параметров, а в совокупности с высокой производительностью позволяет реализовать алгоритмы для расчёта и вычисления требуемого результата с применением нейронных сетей в ограниченных временных рамках.

Литература

- [1] Флегонтов А. В., Фомин В. В., Лаптев В. В. Смена парадигмы в области новых технологий интеллектуального анализа данных // Информатизация образования и науки, № 3 (15), 2012. – С. 3–12.
- [2] Флегонтов А. В., Фомин В. В., Смирнов Е. М. Многопоточное обучение нейронных сетей методом обратного распространения ошибки // Труды XXI Всероссийской научно-методической конференции Телематика'2014, 23–26 июня 2014 г. – СПб: Университет ИТМО. – С. 225–226.

УДК 517.956+004.942

КВАЗИЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Подорога А. В., Тихонов И. В.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Москва

e-mail: anastasiapodoroga@gmail.com, ivtikh@mail.ru

Podoroga A. V., Tikhonov I. V. Quasilinear equation of road traffic and computer simulation. The quasilinear equation of road traffic is discussed. We consider a number of mathematical effects associated with Nagel–Schreckenberg model and conduct numerical check with computer simulation modeling.

Рассматривается квазилинейное уравнение дорожного движения. Обсуждается ряд математических эффектов, связанных с моделью Нагеля–Шрекенберга. Проводится численное сопоставление с результатами компьютерного моделирования.

Как известно [1], при моделировании процессов дорожного движения используют различные подходы. В частности, *макроскопический подход* трактует поток автомобилей как специфический поток сплошной среды. Основными характеристиками являются координата x вдоль дорожного полотна, время t ,

плотность потока $\rho(x, t)$ и, наконец, сам поток $q(x, t)$, выражающий усредненное число автомобилей, проходящих через точку x в момент времени t . Ключевое предположение макроскопической модели связано с наличием *фундаментальной диаграммы* $q = Q(\rho)$, определяющей зависимость величины потока q от плотности ρ . Непрерывная, выпуклая вверх функция $Q(\rho)$ удовлетворяет условиям: $Q(0) = 0$, $Q(\rho_{\max}) = 0$ и $Q(\rho) > 0$ при $0 < \rho < \rho_{\max}$. Значение $\rho = 0$ означает отсутствие автомобилей, а значение $\rho = \rho_{\max}$ соответствует максимальной плотности потока, когда движение полностью останавливается (“транспортный коллапс”).

Основное уравнение дорожного движения имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \quad \rho = \rho(x, t). \quad (1)$$

Рассмотрим уравнение (1) вместе с условием Коши

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x). \quad (2)$$

Для содержательного исследования задачи (1), (2) требуется знать конкретный вид фундаментальной диаграммы $Q(\rho)$. Специалисты используют ряд конкурирующих моделей (см. [1]). Важные соображения, связанные с практически наблюдениями и компьютерными расчётами, указывают на предпочтительность модели *Нагеля–Шрекенберга* [2], согласно которой

$$Q(\rho) = \begin{cases} k_1 \rho, & 0 \leq \rho \leq \rho^*, \\ k_2 (\rho_{\max} - \rho), & \rho^* \leq \rho \leq \rho_{\max}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь ρ^* — фиксированное значение из интервала $(0, \rho_{\max})$, а коэффициенты $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ определены формулами

$$k_1 = \frac{q_{\max}}{\rho^*}, \quad k_2 = \frac{q_{\max}}{\rho_{\max} - \rho^*}.$$

Типичный вид такой диаграммы представлен на рис. 1. Значение плотности $\rho = \rho^*$ отвечает переходу от свободного движения при $0 < \rho < \rho^*$ к затрудненному движению при $\rho^* < \rho < \rho_{\max}$. Согласно модели Нагеля–Шрекенберга на участках $0 < \rho < \rho^*$ и $\rho^* < \rho < \rho_{\max}$ поток изменяется линейно. Максимальное значение потока $q_{\max}$ достигается на критическом значении ρ^* в том смысле, что $Q(\rho^*) = q_{\max}$ и $Q(\rho) < q_{\max}$ при $\rho \neq \rho^*$.

Проанализируем главные математические особенности, присущие модели Нагеля–Шрекенберга. Рассмотрим уравнение (1) с фундаментальной диаграммой (3) как квазилинейное уравнение первого порядка, согласно теории [3], [4]. Поскольку функция $Q(\rho)$ не является гладкой на отрезке $[0, \rho_{\max}]$, удобно сразу перейти к обобщённым решениям.

Определение. *Обобщённым решением* уравнения (1) называется интегрируемая функция $\rho(x, t)$ переменных $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$, такая, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x, t) dx = Q(\rho(\alpha, t)) - Q(\rho(\beta, t)) \quad (4)$$

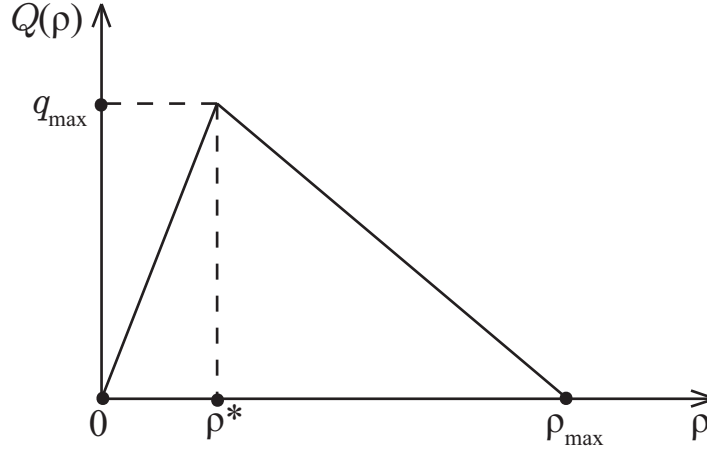


Рис. 1. Фундаментальная диаграмма для модели Нагеля–Шрекенберга.

при почти всех $t \in [0, T]$ и почти всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Типичные обобщённые решения задачи Коши (1), (2) допускают простое описание:

1. если $\rho_0(x) \leq \rho^*$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $\rho(x, t) = \rho_0(x - k_1 t)$;
2. если $\rho_0(x) \geq \rho^*$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $\rho(x, t) = \rho_0(x + k_2 t)$;
3. если $\rho_0(x) > \rho^*$ при $x < a$ и $\rho_0(x) < \rho^*$ при $x > a$, то

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_0(x + k_2 t), & x \leq a - k_2 t, \\ \rho^*, & a - k_2 t \leq x \leq a + k_1 t, \\ \rho_0(x - k_1 t), & x \geq a + k_1 t; \end{cases}$$

4. если $\rho_0(x) < \rho^*$ при $x < a$ и $\rho_0(x) > \rho^*$ при $x > a$, то

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_0(x + k_2 t), & x > \psi(t), \\ \rho_0(x - k_1 t), & x < \psi(t), \end{cases}$$

где движение границы разрыва $\psi(t)$ определяется условием Гюгонио

$$\psi'(t) = \frac{Q(\rho_0(\psi(t) + k_2 t)) - Q(\rho_0(\psi(t) - k_1 t))}{\rho_0(\psi(t) + k_2 t) - \rho_0(\psi(t) - k_1 t)} \quad (5)$$

с начальным условием $\psi(0) = a$.

В более сложных случаях применяется комбинация перечисленных правил.

Особо подчеркнем, что в задаче Коши (1), (2) возможно нарушение единственности решения. Так, при выборе $\rho_0(x) \equiv \rho^*$, $x \in \mathbb{R}$, помимо канонического решения $\rho(x, t) \equiv \rho^*$, возникает множество других обобщённых решений, например,

$$\rho(x, t) = \rho(x, t; \gamma) = \begin{cases} \rho^*, & x < -k_2 t, \\ \rho_{\max} - \gamma(\rho_{\max} - \rho^*), & -k_2 t < x < 0, \\ \gamma \rho^*, & 0 < x < k_1 t, \\ \rho^*, & x > k_1 t, \end{cases}$$

с произвольным значением $\gamma \in [0, 1)$. Требование (4) здесь выполняется. Наличие подобных решений допускает физическую интерпретацию: при переходной плотности $\rho(x, t) \equiv \rho^*$ поток крайне неустойчив к любым возмущениям, и при малейших воздействиях в нём будут возникать расходящиеся волны пониженной и повышенной плотностей.

Типичной является задача о движении затора для плотности

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_1, & x < \psi(t), \\ \rho_2, & x > \psi(t), \end{cases} \quad (6)$$

с постоянными значениями ρ_1, ρ_2 , такими, что $0 < \rho_1 < \rho^* < \rho_2 < \rho_{\max}$. Условие Гюгонио (5) дает выражение

$$\psi(t) = \psi(0) + \frac{k_2(\rho_{\max} - \rho_2) - k_1\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} t.$$

В частности, при выполнении пропорции

$$\frac{\rho_1}{\rho^*} = \frac{\rho_{\max} - \rho_2}{\rho_{\max} - \rho^*} \quad (7)$$

возникает “неподвижная” пробка, у которой $\psi'(t) \equiv 0$. Пользуясь рис. 1, пропорцию (7) легко истолковать геометрически, а её практический смысл состоит в равенстве потоков $Q(\rho_1)$ и $Q(\rho_2)$ на стыке двух плотностей в модели (3).

Из сказанного ясно, что модель Нагеля–Шрекенберга представляет математический интерес и может обсуждаться как некая идеализация для транспортных задач. Возникает вопрос о её практическом подтверждении. В работе [2] модель (3) получена с помощью теории клеточных автоматов. Там же в [2] приведены результаты наблюдений за реальными транспортными потоками, согласованные с теоретическими оценками.

Нам удалось подтвердить основные выводы работы [2], основываясь на иных принципах. Некоторое время назад на кафедре математической физики факультета ВМК МГУ была разработана компьютерная программа “Cars”, использующая идею имитационного моделирования. Программа предназначена для изучения однополосного дорожного движения. Каждый автомобиль трактуется как индивидуальный объект, движущийся по стандартному алгоритму. Алгоритм оперирует с данными, доступными “обычному” водителю. Управляющим параметром является ускорение автомобиля. Все величины, используемые

в программе — дистанции, скорости, ускорения разгона и торможения — соответствуют значениям, возникающим на практике. Программа “Cars” написана на языке C#, имеет удобный интерфейс (с визуализацией) и может быть реализована на персональном компьютере. В результате появилась возможность проводить масштабные численные эксперименты с сотнями автомобилей и снимать большие объёмы цифровой информации для разных конфигураций транспортных средств на однополосной дороге.

После первичной обработки полученных данных выяснилось, что программа “Cars” с высокой точностью реализует модель Нагеля–Шрекенберга. Так, при определенной настройке параметров программы возникает фундаментальная диаграмма (3) с приближенными значениями

$$\rho_{\max} = 0.5, \quad \rho^* = 0.04268, \quad \frac{\rho^*}{\rho_{\max}} = 0.08536, \quad q_{\max} = 0.1756 \frac{\text{авто}}{\text{сек}}. \quad (8)$$

Был проведен ряд численных экспериментов по проверке основных математических эффектов, связанных с моделью Нагеля–Шрекенберга. В частности, на характерных режимах (6) удалось добиться возникновения устойчивых неподвижных пробок, согласованных с теоретическим соотношением (7). Например, компьютерная модель, настроенная под данные (8), сохраняет неподвижную пробку для плотностей

$$\rho_1 = 0.0245 \quad \text{при} \quad x < a, \quad \rho_2 = 0.25 \quad \text{при} \quad x > a. \quad (9)$$

Если же использовать теоретическую модель (3) с теми же данными (8), то формула (7) для значения $\rho_2 = 0.25$ дает значение $\rho_1 = 0,0233$. Хорошее соответствие с (9) очевидно.

Литература

- [1] Гасников А. В. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие, изд. 2-е, испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2013. – 427 с.
- [2] Nagel K., Schreckenberg M. A cellular automaton model for freeway traffic // Journal de Physique I France. 1992. Vol. 2, № 12. – P. 2221–2229.
- [3] Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А. Уравнения с частными производными первого порядка (учебное пособие). – М.: Мех-мат МГУ, 1999. – 96 с.
- [4] Лакс П. Д. Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. – М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010. – 296 с. (Lax P. D. Hyperbolic Partial Differential Equations. – AMS, 2006.)

К ВОПРОСУ ОБ АВТОМАТИЗАЦИИ ПОДДЕРЖКИ ИННОВАЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ НА БАЗЕ СИСТЕМ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Попов С. М.¹, Флегонтов А. В.²

Чукотский филиал Северо-Восточного
федерального университета им. М. К. Аммосова¹
Анадырь

e-mail: smpopov@rambler.ru

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена²
Санкт-Петербург

e-mail: aflegontoff@herzen.spb.ru

Popov S. M., Flegontov A. V. To the question about automation support innovative solutions based on distance learning systems. Discusses issues automated support of innovative solutions based on systems of distance learning within development projects.

Рассматриваются вопросы автоматизированной поддержки инновационных решений на базе систем дистанционного обучения в рамках разрабатываемых проектов.

Развитие прикладных направлений исследований в области автоматизации работы кафедр в научно-образовательном центре “Информационные технологии и системы моделирования” РГПУ им. А. И. Герцена [1–4], а также совместные с Чукотским филиалом Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова участие в сетевом проекте “Смарт Университет на Чукотке” послужило основой для проведения анализа современных инновационных решений на базе систем дистанционного обучения.

Применяемая основная образовательная парадигма основана на широком использовании интерактивных форм обучения на новейшей ИКТ-платформе с возможностью доступа к образовательному контенту в любое время и любом месте.

При этом достигается и цель сетевого проекта, а именно – создание высокотехнологичной информационной образовательной среды для подготовки специалистов с высшим образованием в ИКТ-сфере с использованием перспективных ИКТ-средств и новейших технологий обучения.

Анализ современной работы кафедры (см., например, работу [5]) показывает, что необходимо учитывать и применять следующие ИТ инновации:

- новые педагогические дистанционные технологии проведения лабораторных занятий с учетом особенностей используемого в этом случае дистанционного асинхронного режима обучения;

- разработанное достаточное количество имитационных моделей реальных процессов, например химических, биологических, транспортных, социальных и т. д. (можно предположить, что ПО виртуальной лабораторной работы будет похоже на используемые в компьютерных играх программы-симуляторы конкретной предметной области);

- дополнительное программное средство, которое на основе ГОС, ФГОС,

учебных планов и заданного распределения компетенций генерировало бы постоянную составляющую УМК, а переменную составляющую (собственно содержание дисциплины) разрешало бы вводить, например, с клавиатуры;

– дополнительные средства (помимо стандартных офисных приложений) для автоматизации процессов работы кафедры: 1) для обучения студентов (например – Office Live Meeting, Office Sharepoint Server, MS Live@edu, Windows Live Manager); 2) для подготовки к занятиям (например – Office Visio); 3) для контроля успеваемости студентов (например – Test Master);

– ИТ для бизнес-процессов кафедры. Помимо стандартных офисных приложений, характерно, например, добавления систем Moodle, eLibrary, а также хранилище ресурсов на базе систем дистанционного обучения AContent, ATutor [6];

– автоматизированная защита лабораторных работ;

– новые ПП, которые можно использовать для ДО, например – Adobe Acrobat Connect Pro, Elluminate, Dimdim, Open Meeting, MS Office Live Meeting или Lync.

Рассматриваются также вопросы эффективного использования средств доставки контента до конечного пользователя и их особенности в условиях широкополосных и узкополосных информационных каналов связи.

Литература

- [1] Фомин В. В., Флегонтов А. В., Лаптев В. В. Смена парадигмы в области новых технологий интеллектуального анализа данных // Информатизация образования и науки, № 3 (15), 2012. – С. 3–12.
- [2] Лаптев В. В., Флегонтов А. В., Фомин В. В. Организация облачного ресурса интеллектуального анализа данных // Информатизация образования и науки, № 1 (25), 2015. – С. 100–115.
- [3] Просенкова Ю. Б., Флегонтов А. В. Автогенерация тестовых заданий // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2014. Материалы научной конференции, 14–18 апреля 2014. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – С. 227–230.
- [4] Флегонтов А. В. Информационные и высокие технологии: стратегии, тренды, применения в работе кафедр // Информационные системы и технологии – 2014. Сборник научно-технических статей № 3 – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – С. 5–16.
- [5] Информационные технологии в работе кафедры: монография. Под общ. ред. А. Г. Степанова. – СПб.: ГУАП, 2014. – 276 с.
- [6] Баранова Е. В., Симонова И. В. Технологии организации учебного материала для систем электронного обучения в реализации образовательных программ высшей школы: Учебно-методическое пособие для преподавателей. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – 59 с.

КЛИЕНТ-СЕРВЕРНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ СИСТЕМЫ ТЕСТИРОВАНИЯ ЗНАНИЙ С ФУНКЦИЕЙ АВТОГЕНЕРАЦИИ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ И ИНФОРМАЦИОННАЯ БАЗА, ОБЕСПЕЧИВАЮЩАЯ ОБМЕН ДАННЫМИ МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ СИСТЕМЫ

Просенкова Ю. Б., Флегонтов А. В.
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: julia969@mail.ru, aflegontoff@herzen.spb.ru

Prosenkova Yu. B., Flegontov A. V. The client-server organization of the system of knowledge testing with function of autogeneration tasks and information base, which provide the data exchange by components of the system. The client-server organization of the system of knowledge testing, which provide the forming of tests using the algorithm of autogeneration tasks from the arbitrary educational text materials is represented in the article. The functional realizing at the teachers and students workplaces are described. The data base with which the interaction of the components of the system realized is elaborated. The tasks of the system administrator are described.

В данной статье описана клиент-серверная организация работы системы тестирования знаний, обеспечивающей составление тестов с использованием алгоритма автогенерации заданий из произвольных текстовых учебных материалов. Представлен функционал реализуемый на рабочих местах преподавателя и обучающихся. Приведена разработанная информационная база, с которой осуществляется взаимодействие компонентов системы тестирования. Описаны задачи администратора системы.

В рамках проводимых научно-образовательным центром “Информационные технологии и системы моделирования” РГПУ им. А. И. Герцена прикладных и научных исследований по автоматизации аналитической поддержки принятия экспертных решений, одним из приоритетных направлений работ было определено развитие методов и технологий на основе алгоритмов обработки текстов [1, 2]. В соответствии с выделенным направлением был создан алгоритм автогенерации тестовых заданий из текстовых данных и по нему на языке высокого уровня была разработана программа [3].

В данный момент работа над программой направлена на расширение пользовательских возможностей и на увеличение быстродействия программы, использующей алгоритм автогенерации тестовых заданий, по средствам расширения локальной программы до крупной информационной системы тестирования знаний. Обозначенная система состоит из следующих компонентов:

- 1) автоматизированное рабочее место преподавателя,
- 2) автоматизированное рабочее место обучающегося,
- 3) база данных,
- 4) рабочее место администратора системы.

Целью настоящей статьи является описание функционала рабочих мест

преподавателя и обучающихся, описание структуры разработанной базы данных, с которой происходит взаимодействие в ходе работы системы тестирования знаний, а так же выделение задач, необходимых для настройки системы и поддержания ее постоянной работоспособности.

В ходе работы системы предполагается постоянный обмен данными между её компонентами. Примерная схема такого обмена данными представлена на рис. 1, на котором компоненты системы выделены в отдельные сущности и с помощью обозначений описаны взаимодействия по обмену данными между этими сущностями и цели данных взаимодействий.



Рис. 1. Схема обмена данными между компонентами системы.

Далее последовательно будет рассмотрен каждый компонент системы тестирования знаний. Будут описаны функции рассматриваемого компонента системы, а так же при необходимости его структура.

1. База данных. В ходе работы над созданием системы средствами PostgreSQL была разработана база данных, обеспечивающая хранение данных, необходимых для полного функционирования разрабатываемой системы тестирования знаний [4]. Структурная схема базы данных, с указанием типов полей и идентификаторов, приведена на рис. 2.

Как видно из рисунка, разработанная база данных включает в себя следующие схемы данных:

1. Учебные материалы и тестовые задания. В данной схеме организовано хранение учебных материалов в произвольном формате хранения документов, допустимом для обработки алгоритмом автогенерации тестовых заданий [5]. Так же хранятся тестовые задания, полученные по учебным материалам с использованием алгоритма автогенерации или с помощью ручного ввода заданий.

2. Занятия по дисциплинам и преподаватели занятий. В этой схеме хранится информация о преподавателях и об учебных планах по которым данные преподаватели проводят занятия. Так же хранится информация о том, какие группы обучающихся проходят обучение по имеющимся планам и какими учебными материалами они пользуются для обучения.

3. Учебные группы, учащиеся и их результаты обучения. В данной схеме организовано хранение данных о группах обучающихся и о результатах выполнения тестовых заданий по дисциплинам каждым из обучающихся в группе, при этом учитывается посещаемость занятий обучающимися.

4. Сетевая конфигурация системы. В этой схеме хранится информация о компьютерах, входящих в информационную сеть, и о ролях этих компьютеров в разрабатываемой системе тестирования знаний.

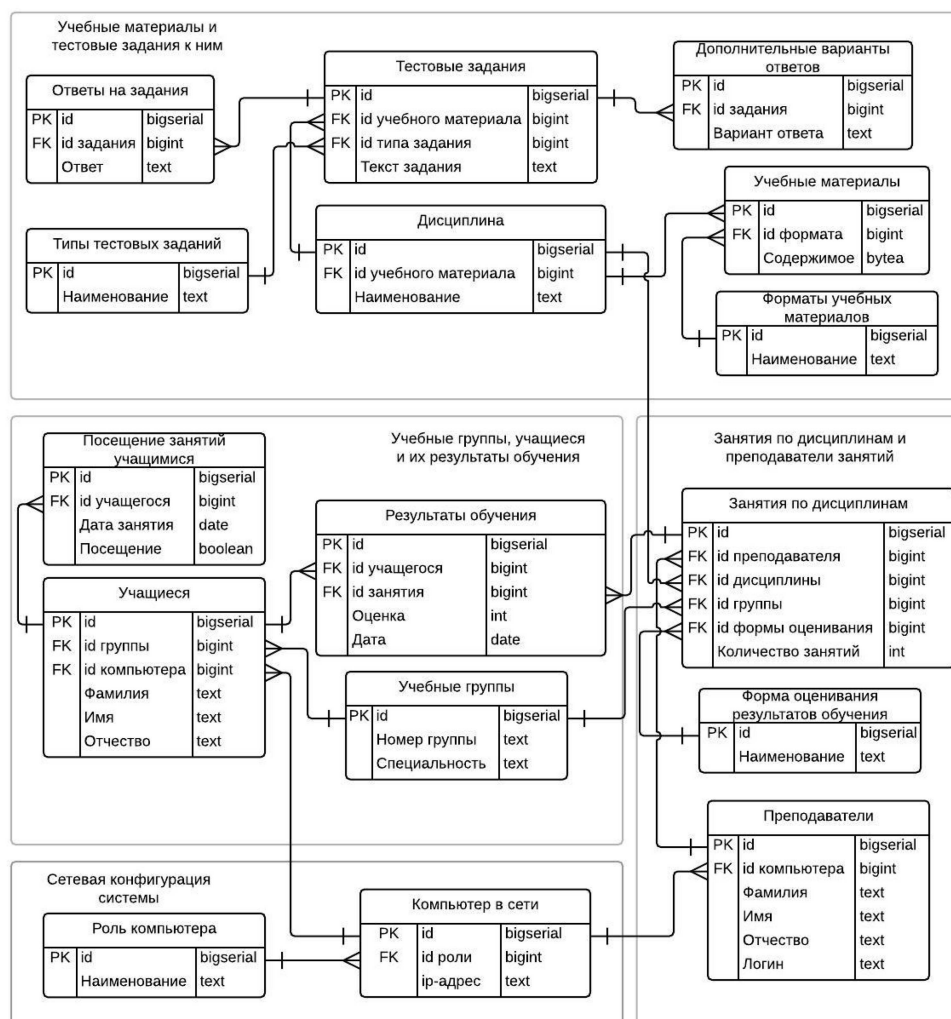


Рис. 2. Структурная схема базы данных, обеспечивающей обмен данными между компонентами системы.

2. Рабочее место администратора системы. Администратор системы обеспечивает целостность базы данных, в том числе настраивает права доступа к базе данных, создает резервные копии базы данных и откаты к предыдущим версиям базы, при нарушениях ее целостности. Администратор так же обеспечивает своевременное обновление данных о конфигурации информационной сети и пользователях системы, настраивает возможность соединения с базой данных рабочих мест, выделенных для преподавателей.

3. Автоматизированное рабочее место обучающегося. Автоматизированное рабочее место обучающегося предназначено для отображения учебных материалов и тестовых заданий с полями ввода или выбора ответов. Учебные материалы и тестовые задания приходят с автоматизированного рабочего

места преподавателя. Так же обеспечивается отправка уведомлений о прочтении учебных материалов и результатах выполнения тестирования обратно.

4. Автоматизированное рабочее место преподавателя. Преподаватель отвечает за поддержание системы в актуальном состоянии: загрузка учебных материалов в базу данных, автогенерация тестовых заданий с загруженных материалов и ручной ввод дополнительных заданий в базу данных, распределение компьютеров между обучающимися в группе, ведение статистики о результатах выполнения тестовых заданий и о посещаемости занятий обучающимися, занесение в базу данных актуальных учебных планов по дисциплинам для групп обучающихся и другое. Взаимодействие преподавателя с базой данных происходит по средствам разрабатываемого интерфейса системы. Основная часть функционала, такого как например ведение статистики о выполнении тестовых заданий, производится в автоматическом режиме программными средствами.

Рассылка по автоматизированным рабочим местам обучающихся учебных материалов и тестовых заданий, а также получение от них результатов выполнения заданий и уведомлений о прочтении учебных материалов обеспечивается клиент-серверной организацией работы системы тестирования знаний. Непосредственное взаимодействие между автоматизированным рабочим местом преподавателя и обучающегося так же происходит по средствам разрабатываемого интерфейса системы.

Для автоматизированного рабочего места преподавателя предполагается составление тестовых заданий для обучающихся по следующим схемам:

1) программное составление заданий: по загруженному учебному материалу при помощи алгоритма автогенерации тестовых заданий составляется база вопросов и ответов, для обучающихся программно создаются тесты из произвольно выбранных вопросов из базы;

2) Ручное составление вопросов для заданий: у преподавателя всегда имеется возможности внести в базу данных собственные задания для тестирования с указанием того, к какому учебному материалу они относятся;

3) Ручное составление заданий: преподаватель может сам выбирать вопросы из базы данных и составлять на их основе тестовые задания.

Преобразование локальной программы автогенерации тестовых заданий в представленную информационную систему позволяет увеличить быстродействие работы с алгоритмом за счёт использования базы данных. Если в исходном варианте программы было необходимо для составления тестовых заданий каждый раз применять разработанный алгоритм автогенерации заданий из текста, то внедрение базы данных позволяет использовать алгоритм единожды, а затем получать уже составленные ранее задания по необходимому учебному материалу из базы. Также создание сложной информационной системы позволяет существенно увеличить функциональные возможности программы и обеспечить удобство пользования программой. Клиент-серверная организация системы тестирования знаний позволяет вести дистанционное обучение.

Вышеописанная система позволяет производить полный цикл автоматизированного обучения по произвольным дисциплинам: ознакомление обучающихся с учебными материалами по дисциплинам и контроль усваиваемых знаний. Уникальностью данной системы является внедрение в нее алгоритма авто-

генерации тестовых заданий с произвольных текстовых учебных материалов, представленных в широком диапазоне форматов документов. Очевидно, что разрабатываемая система позволяет существенно облегчить работу преподавателя, а также повысить эффективность учебного процесса.

В дальнейшем предполагается расширение возможностей алгоритма автогенерации тестовых заданий. На данный момент алгоритм позволяет генерировать тестовые задания с выбором одного правильного ответа из предложенных вариантов из текстовых материалов с определенной структурой составления, не содержащих формул. В дальнейшем работа будет направлена на увеличение типов генерируемых заданий и на создание алгоритмов по работе с произвольными учебными материалами: с произвольной структурой и с наличием формул и изображений.

Литература

- [1] Фомин В. В., Флегонтов А. В., Лаптев В. В. Смена парадигмы в области новых технологий интеллектуального анализа данных // Информатизация образования и науки, № 3 (15). 2012. – С. 3–12.
- [2] Флегонтов А. В. Направления совершенствования программного инструментария интеллектуального анализа данных // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2012. Материалы научной конференции, 16–21 апреля 2012. – СПб.: БАН, 2012. – С. 246–249.
- [3] Просенкова Ю. Б., Флегонтов А. В. Автогенерация тестовых заданий // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2014. Материалы научной конференции, 14–18 апреля 2014. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – С. 227–230.
- [4] PostgreSQL.Ru.Net [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://postgresql.ru.net/>
- [5] Просенкова Ю. Б. Получение текстовых данных из наиболее распространенных форматов хранения документов // Информационные системы и технологии – 2014. Сборник научно-технических статей № 3 – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – С. 71–76.

ПРИМЕНЕНИЕ РАСХОЖДЕНИЯ РЕНЬИ К АНАЛИЗУ И КЛАССИФИКАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Сергеев В. Д.

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: vlad.sergeev.spbgu@gmail.com

Sergeev V. D. An application of Renyi divergence to image analysis and classification. In the paper a method of image analysis and classification based on calculation of α -divergence (or Renyi divergence) is considered. For each image a discrete distribution of measure and finite sequence of its direct multifractal transformations are calculated. When comparing two images alpha-divergence is calculated between both initial distributions and their renormalizations. The obtained divergence vector is considered as similarity/difference characteristic of image structures. Numerical experiments were performed for α values 1 (Kullback–Leibler divergence), $1/2$, $1/4$, 2.

В работе рассмотрен метод анализа и классификации изображений, основанный на вычислении α -расхождений (или расхождений Реньи). С каждым изображением связывается дискретное распределение меры и конечная последовательность её прямых мультифрактальных преобразований. Для двух сравниваемых изображений вычисляются альфа-расхождения между полученными наборами мер. Полученный вектор расхождений рассматривается как характеристика сходства–различия структур изображений. Численные эксперименты проведены для четырёх значений α : 1 (расхождение Кульбака–Лейблера), $1/2$, $1/4$, 2.

1. Введение. В задачах анализа и классификации цифровых изображений часто применяются методы, основанные на вычислении различных энтропийных характеристик. Так, многие авторы для описания свойств изображений применяют те или иные варианты энтропии Реньи [1, 4, 6]. В данной работе для решения указанной задачи мы используем метод, основанный на вычислении альфа-расхождений (или расхождений Реньи) [4, 5]. Указанный метод опирается на получение статистических характеристик двух сравниваемых изображений в виде дискретного распределения меры и конечной последовательности её прямых мультифрактальных преобразований с последующим вычислением расхождения Реньи между полученными наборами мер. Таким образом, мы характеризуем исходное изображение с помощью не только базовой меры, но также и набором её модификаций.

Распределение меры определяется здесь по заданному разбиению изображения на ячейки, при этом мера ячейки определяется как отношение сумм интенсивностей составляющих её пикселей к сумме интенсивностей пикселей всего изображения. Под интенсивностью понимается яркость полутонного изображения или значение одной из заданных компонент из пространств HSV или RGB.

Проведенные нами численные эксперименты для различных значений параметра альфа показывают, что для изображений близкой структуры скорость роста вектора полученных расхождений незначительна, в то время как для

существенно различных изображений она достаточно велика. Таким образом, вектор расхождений Реньи для начального распределения меры и её последовательных прямых мультифрактальных преобразований можно рассматривать как релевантную характеристику сходства–различия структур цифровых изображений.

2. Основные понятия. В данной работе мы рассматриваем задачу получения характеристик цифровых изображений (текстур), позволяющих выявлять различия между изображениями, априори принадлежащими различным классам, а также между группами таких изображений. Мы характеризуем изображение с помощью некоторой вероятностной меры, определяемой по величине интенсивности пикселей, составляющих изображение. Естественной характеристикой изображения является энтропия этого распределения. В то же время можно отметить, что величина энтропии не зависит от порядка компонент вектора распределения вероятностей. Поэтому у изображений с различной структурой значения энтропии могут оказаться одинаковыми. Также отметим, что изображения с различными структурами могут иметь близкие фрактальные характеристики. Отсюда следует, что, как правило, одной числовой характеристики бывает недостаточно для сравнения изображений более предпочтительными оказываются методы, позволяющие получить характеристики изображений в виде набора чисел (вектора). Такие вектора позволяют находить достаточно тонкие различия в структуре изображений.

Рассмотрим метод сравнения изображений, основанный на вычислении величины расхождения Реньи (или α -расхождения). Метод состоит в том, что с каждым изображением связывается некоторая дискретная мера, полученная вычислением вектора распределения интенсивностей пикселей изображения, и конечная последовательность прямых мультифрактальных преобразований начального распределения (количество таких преобразований определяется из эмпирических соображений). Для двух сравниваемых изображений вычисляется вектор α -расхождений между полученными наборами мер, который рассматривается как характеристика сходства–различия структур изображений. Для данных распределений $p = (p_i)$ и $q = (q_i)$, характеризующих два сравниваемых изображения, расхождения Реньи при переменном параметре $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ рассчитываются с помощью формулы [5]:

$$D_\alpha(p, q) = \frac{1}{\alpha - 1} \ln \sum_1^n p_i^\alpha q_i^{1-\alpha}.$$

Расхождение принимает неотрицательные значения и является неубывающей функцией α .

В частном случае при $\alpha = 1$ это преобразование определяется по формуле:

$$D_1(p, q) = \sum_1^n p_i \ln \frac{p_i}{q_i}$$

и называется расхождением Кульбака–Лейблера [5].

Для данного распределения $p = (p_i)$ прямое мультифрактальное преобразование исходного распределения определяется формулой:

$$f_k(p, q) = \frac{p_i^k}{\sum_i p_i^k},$$

где k – произвольное вещественное число [2]. Это преобразование фактически оказывается перенормировкой исходной меры.

Прямое мультифрактальное преобразование действует на множестве дискретных вероятностных мер, соответствующих исследуемым изображениям. Известно [2], что эти преобразования образуют группу, относительно которой множество мер распадается на непересекающиеся классы транзитивности. Каждый такой класс содержит некоторую начальную меру, соответствующую заданному изображению, и её последующие преобразования. Фактически, полученный класс мер определенным образом характеризует выбранное изображение.

3. Выбор меры. Исследуемое изображение разбивается на K ячеек (окон) одинакового размера $N \times N$, пересекающихся по границе. Размер ячейки выбирается в зависимости от типа изображения и от решаемой задачи: более мелкая ячейка соответствует более точному представлению изображения и наоборот. В то же время отметим, что при уменьшении размера окна растет длина вектора распределения.

Каждому изображению сопоставляется характеризующее его распределение $p = (p_i)$. Мера (нормированная) i -й ячейки p_i определяется как отношение суммы интенсивностей пикселей данной ячейки к сумме интенсивностей пикселей всего изображения. При таком определении распределение естественным образом зависит от размера окна.

На рис. 2 проиллюстрирована зависимость значений расхождений Кульбака–Лейблера от размера окна для двух полутоновых изображений из одного класса биомедицинских препаратов: почек без патологий. Размер изображения 3000×2000 пикселей.

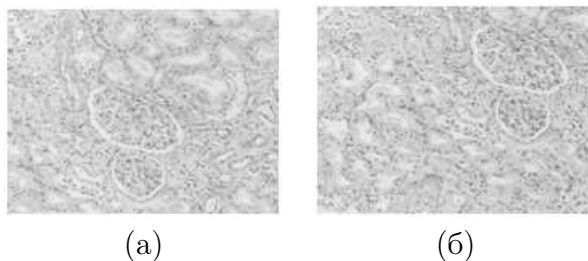


Рис. 1. Полутоновые изображения почек без патологий (а, б).

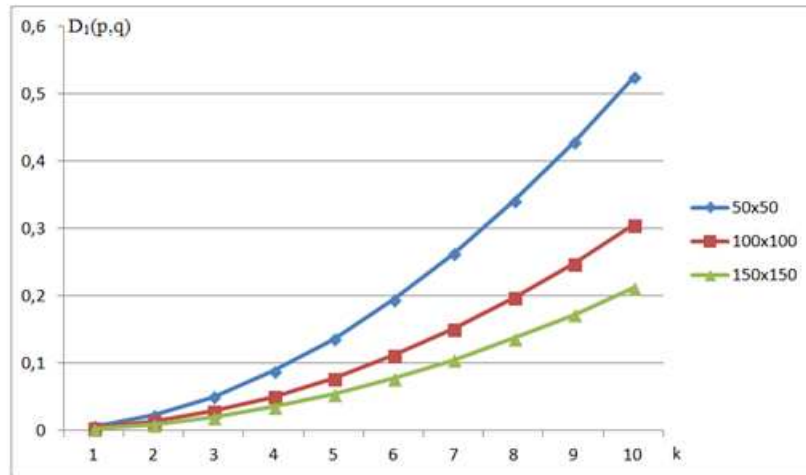


Рис. 2. График значений расхождения в зависимости от размера окна разбиения.

4. Численные эксперименты. Для экспериментов выбирались текстуры из альбома Бродатца [7], а также изображения биомедицинских препаратов печени (здоровой и больной) и почек (здоровых и больных). В качестве α рассматривались значения $1/2$, $1/4$, 1 , 2 . Далее приводятся результаты в основном для $\alpha = 1$ (расхождение Кульбака–Лейблера).

4.1. Текстуры Бродатца. Для проверки работы алгоритма и исследования его применимости мы рассматривали несколько классов текстур из базы данных Бродатца размером 640×640 , как полутоновые изображения, так и цветные. Размер окна разбиения выбирался исходя из размеров изображения, а именно, 50×50 пикселей. Ниже приведены примеры текстур, которые использовались при тестировании метода.

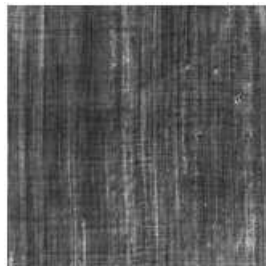


Рис. 3. Номер текстуры D78. Рис. 4. Номер текстуры D79.

Выбранные для иллюстрации изображения D78 и D79 приведены к полутоновой палитре и имеют визуально близкую структуру. Обозначим распределения их мер, соответственно, $p = (p_i)$ и $q = (q_i)$.

Ниже в графическом виде приведены экспериментальные данные расчетов векторов расхождений Кульбака–Лейблера заданных изображений в полутоновом цветовом режиме.

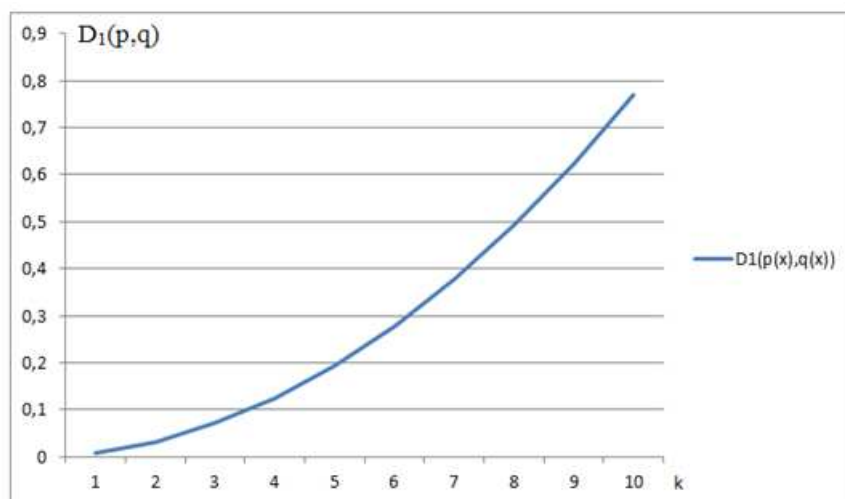


Рис. 5. График сравнения текстур Бродатца
Рис. 3 и Рис. 4 в пространстве HSV.

Приводимый график показывают относительно невысокую скорость роста вектора расхождений сравниваемых изображений, что говорит об их близости. С другой стороны, хорошо видно, что реализуемый нами метод сравнения позволяет выявить достаточно тонкие структурные различия изображений.

Для выявления структурных различий цветных изображений далее мы рассчитываем вектора расхождений в пространствах RGB и HSV по каждой компоненте.

4.2. Биомедицинские препараты. В качестве опытных образцов мы используем 2 класса изображений биомедицинских препаратов: изображения патологии печени и изображения патологии почек, которые были предварительно классифицированы экспертом-медиком. Сравнение проводится внутри каждого класса в различных сочетаниях: здоровый–больной, здоровый–здоровый, причем в двух цветовых пространствах RGB и HSV. Изображения имеют размер 3000×2000 пикселей, окно разбиения было выбрано 100×100 пикселей.

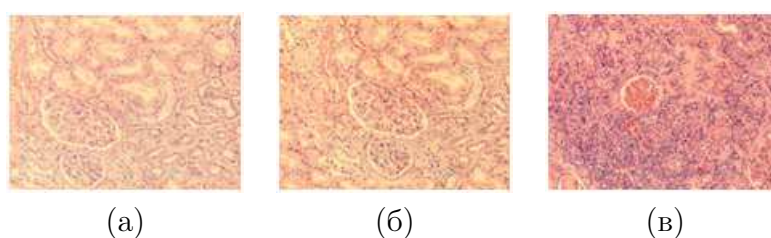


Рис. 6. Изображения нормальных почек (а, б)
и почек больного хроническим пиелонефритом (в).

Далее приводится график расхождений Кульбака–Лейблера между изображениями из одного класса и из разных в цветовом пространстве RGB. Данный график наглядно показывает различие значений расхождений Кульбака–Лейблера по компоненте Red для изображений из одного класса (Рис. 6а и

Рис. 6б), обозначается $D1(p(x),q(x))$, и изображений из разных классов (Рис. 6а и Рис. 6в), обозначается $D1(p(x),t(x))$. Совершенно аналогично выглядят графики расхождения Кульбака–Лейблера и по другим двум компонентам палитры.

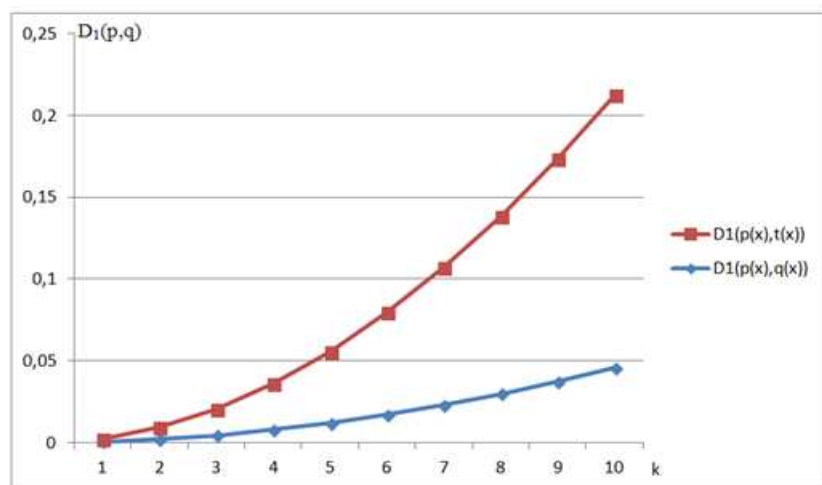


Рис. 7. График, показывающий разницу значений расхождений по компоненте Red.

Таким образом мы видим, что значения расхождений, рассчитанных по каждой из компонент пространства RGB между изображениями из разных классов, растёт быстрее, чем значения расхождений между изображениями из одного класса, рассчитанных по той же компоненте.

5. Расхождение Реньи для $\alpha \neq 1$. Для иллюстрации поведения расхождения Реньи для $\alpha \neq 1$ в качестве опытных образцов для исследования мы рассматриваем изображения биомедицинских препаратов, а именно, изображения патологии почек.

Сравнение проводится внутри каждого класса в различных сочетаниях: здоровый — больной, здоровый — здоровый при α , равных 1/2, 1/4, 1, 2 соответственно. В наших экспериментах рассматривались изображения как полутоновые размером 3000×2000 , так и цветные. Мы приводим здесь результаты для полутоновых изображений. Размер окна разбиения выбирался исходя из размеров изображения: 100×100 пикселей.

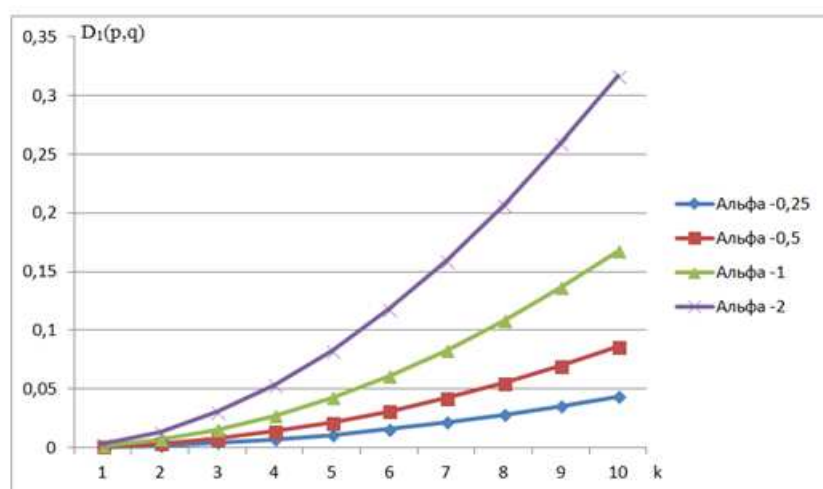


Рис. 8. График значений расхождений Реньи при различных α при сравнении изображений из одного класса.

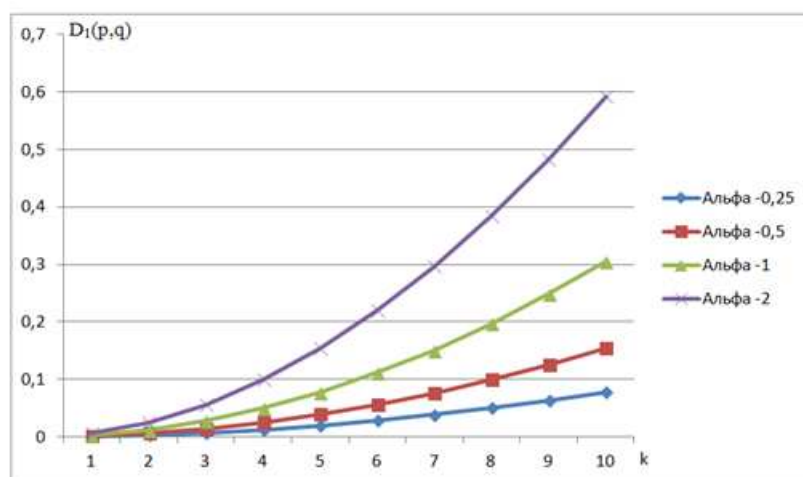


Рис. 9. График значений расхождений Реньи при различных α при сравнении изображений из разных классов.

Оба графика демонстрируют монотонную зависимость изменения величины расхождения Реньи от α . Также мы видим, что скорость роста значений расхождений по каждому графику значительно отличается для представителей одного класса и разных классов.

6. Благодарности. Авторы приносят благодарность коллективу патолого-анатомического отделения Мариинской больницы С.-Петербурга за предоставленные образцы биомедицинских препаратов.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 13–01–00782.

Литература

- [1] Башкиров А. Г. Энтропия Реньи как статистическая энтропия для сложных систем // ТМФ, 149:2 (2006). – С. 299–317.

- [2] Встовский Г. В. Элементы Информационной физики. – М.: МГИУ, 2002.
- [3] Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.
- [4] Ampilova N., Soloviev I. On Application of Entropy Characteristics to Texture Analysis, WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine, ISSN / E-ISSN: 1109-9518 / 2224-2902, Volume 11, 2014, Art. 25, pp. 194–202.
- [5] Alfred O. Hero, Bing Ma, Olivier Michel, John Gorman. Alpha-Divergence for Classification, Indexing and Retrieval. Communications and Signal Processing Laboratory Technical Report CSPL-328, 2001, pp. 3–16.
- [6] Jizba P., Arimitsu T. The world according to Renyi: Thermodynamics of multifractal systems // Annals of Physics (Elsevier), 312, 2004, pp. 17–59.
- [7] <http://multibandtexture.recherche.usherbrooke.ca/originalbrodatz.html>

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ В ОРГАНИЗАЦИИ ДОСТУПА И ХРАНЕНИЯ ДОКУМЕНТОВ В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ДОКУМЕНТООБОРОТА

Шакиров Т. Р., Фомин В. В.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: shakirovtimur1990@gmail.com

Shakirov T. R., Fomin V. V. One solution to access and store documents in the control systems document management. The article describes the model of open network managment framework documents, including: the organization of forms of storage, access rights, visibility restrictions, etc.

В статье описана модель открытой сетевой структуры управления документами, в том числе: организации форм хранения, прав доступа, ограничений видимости и т. д.

Оптимизация документооборота – одна из насущных проблем средних и больших организаций. Чем крупнее организация, тем сложнее устроены документопотоки внутри неё, а их поддержка требует регулярных затрат. Часто одним из результатов этих затрат является интеграция программного продукта, задача которого – отображение и редактирование актуального состояния бумаг, движущихся внутри компании, – такая программа называется системой электронного документооборота. Существует много систем подобного рода (например, «1С: Документооборот», «DocFactor», «Germes», «Jahia», «Эффект-Офис» и т. д.), которые успешно справляются со своими задачами [1, 2]. Тем не менее, бывают ситуации, когда предприятие отказывается от имеющихся решений и заказывает полноценную реализацию своей системы. Интеграция стороннего продукта обходится значительно дороже: требуется оплата лицензии, профессионального сопровождения и поддержки. Уход вендора с рынка означает конец поддержки данного продукта, что крайне рискованно для многих видов деятельности.

Предлагаем решение по организации управления документами, разработанное и реализованное в рамках системы электронного документооборота в одном из международных коммерческих банков.

Основным объектом управления при разработке системы был выбран *документ*. Документ вводится в оборот *пользователем* – таким образом, каждый документ имеет ссылку на человека, его создавшего. Организация документопотоков основана на двух других элементах – *тип документа* и *папка*.

Папки – это всевозможные точки маршрута документов (конечные или промежуточные). Одна папка может содержать любое количество документов и дочерних папок. Администраторы системы создают папки, причем «смысл» получаемой древовидной структуры «выбирается» (создаётся) самими администраторами через набор приписываемых папкам свойств. Тип документа используется для задания маршрута. Каждому созданному документу пользователь обязательно назначает тип (справочник всех типов настраивается). Так же, как и местоположение документа (т. е. папка), тип данного документа может быть изменен в любой момент. Каждый тип документа связан с одной или несколькими папками (и наоборот). При этом документ можно переместить только в те папки, которые связаны с его типом.

Чтобы добавить в систему ограничение на видимость того или иного документа (ограничение доступа к данным) – в целях внутренней политики безопасности, администраторам предоставляется возможность настраивать доступ к папкам и документам определенных типов. При большом числе пользователей их можно собирать в *группы*, а доступ к папкам и типам документа настраивать не для отдельных пользователей, а для целых групп. Права доступа разделены на разрешенные действия: «просмотр» и «просмотр и редактирование».

У документов, папок, пользователей и т. п. могут быть и иные атрибуты, которые зависят от конкретной реализации и целей компании, использующей систему.

Каждый пользователь добавляет документы в систему, загружая уже имеющиеся на его компьютере файлы. Следующие задачи были поставлены для улучшения сценария работы с системой:

1. Создание новых документов («на лету») с помощью самой системы – для документов, не имеющих на данный момент электронной версии (но хранящихся у пользователя в бумажном виде).
2. Единый просмотр всех документов из клиентского приложения независимо от формата.

Для оцифровки документов пользователь использует сканер (альтернативный вариант – цифровая камера). Система может работать с оцифровывающим устройством через TWAIN либо SANE – открытые программные протоколы взаимодействия с устройствами захвата изображения. Система дополнена функциями перевода некоторых популярных форматов в графический (в частности, конвертация из PDF с помощью Ghostscript – с учетом того, что многие программные редакторы часто поддерживают экспорт в PDF, но редко дают возможность вывода редактируемых файлов в графику).

Что касается выбора графического формата, то выбор был сделан в пользу формата **TIFF**. Этот формат находит огромное применение в полиграфии, сканировании и распознавании текста благодаря большой глубине цвета и несколькими вариантами сжатия (в том числе «без потерь»), полезной особенностью TIFF является поддержка формата *страниц*.

Как только документ создан, он попадает во временное хранилище. Временное хранилище – это особая папка, в которой пользователь видит только те документы, которые он сам создал и которые не были отправлены в другие папки. Когда пользователь отправляет документ в оборот (в любую другую папку системы), документ удаляется из хранилища и становится доступен другим пользователям в соответствии с правами их доступа. Пока документ находится во временном хранилище, его можно редактировать и удалять из системы без обладания дополнительными правами на эти действия.

Предложенная структура и сопутствующие ей функции могут быть усложнены, сохранив при этом свою основу, а именно: документы, их движения по документопотокам, а также пользователей с заданными правами доступа.

В качестве дальнейших улучшений могут выступать: работа с цифровыми подписями, хранение документов в дата-центрах, синхронизация информации о документах с другими системами организации, облачные сервисы по работе с документами, распознавание текста с помощью стороннего ПО (ABBYY Recognition Server) и т. д.

Литература

- [1] Пахомов Е. В. Сравнительная оценка потребительского качества программных средств автоматизации делопроизводства: дис. канд. эк. наук: 08.00.13: защищена 16.12.02. – Ростов-на-Дону, 2002.
- [2] Козлова И. В., Коршунов И. С. Система электронного документооборота DocFactor: сферы применения в стройиндустрии и сравнительный анализ // Строительные материалы, № 2, 2007. – С. 8–10.

Некоторые проблемы геометрии и топологии

УДК 519.1

ХОРДОВЫЕ ОСНАЩЕНИЯ ОСТОВОВ ГРАФА

Белоусова М. И.

Российский государственный педагогический
университет имени А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: marinabd0@mail.ru

Belousowa M. I. Chord framings of the graph spanning trees. The Maslova–Nezhinskij definition of a graph fixed spanning tree framing by pair of chords is generalized up to a definition of n -chord framing ($n \geq 2$) for a graph fixed spanning tree. Connections between n -chord and $(n - 1)$ -chord framings are studied.

Для графов с фиксированным остовом определение Масловой–Нежинского оснащения остова графа парами хорд обобщено до определения n -хордового оснащения остова графа ($n \geq 2$). Изучены связи между n -хордовыми и $(n - 1)$ -хордовыми оснащениями.

Язык этой работы топологический. В частности, под *графом* мы будем понимать клеточное пространство размерности не более единицы, под *подграфом* – клеточное подпространство графа, под *циклом* – подграф графа, гомеоморфный окружности.

Граф называется *лесом*, если он не содержит циклов. Подграф графа называется *лесом* этого графа, если он является лесом. Лес графа называется *остовом*, если он содержит все вершины графа. Хорошо известно, что в любом графе остов существует (и, как правило, не единственный).

Предположим, что задан граф. Выберем какой-нибудь остов этого графа. Рёбра графа, принадлежащие этому остову, называются *ветвями*, не принадлежащие – *хордами*. Рассмотрим какой-нибудь цикл этого графа. Ясно, что он содержит хотя бы одну хорду (ветвей он может не содержать). Цикл графа называется *элементарным*, если он содержит в точности одну хорду. Хорошо известно, что каждая хорда содержится в элементарном цикле, и этот цикл единственный.

Предположим, что задан граф, число вершин которого конечно, и фиксирован какой-нибудь его остов. Обозначим количество ветвей графа через b и занумеруем их числами $1, 2, \dots, b$. Рассмотрим множество всех хорд этого графа. Для любого натурального числа n обозначим через C_n совокупность n -элементных подмножеств этого множества; мы положим также $C_{-1} = \emptyset$ и $C_0 = \emptyset$. Назовём n -хордовым оснащением фиксированного остова отображение

$$\varphi : \{1, 2, \dots, b\} \rightarrow C_n,$$

обладающее для каждого натурального числа $k \leq b$ следующим свойством. Пусть

$$\varphi(k) = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}.$$

Рассмотрим элементарные циклы, хордами которых являются рёбра $c_1, c_2, \dots, c_n$. Наше свойство состоит в том, что пересечение всех этих циклов содержит ветвь, имеющую номер k , и не содержит ветвей, имеющих номера, большие чем k .

Заметим, хотя это нам ниже не понадобится, что отображение φ инъективно, и что граф, не имеющий ветвей, имеет n -хордовое оснащение для любого целого числа $n \geq -1$.

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема. Дан граф, число вершин которого конечно, и n – натуральное число, большее двух. Остов графа имеет n -хордовое оснащение тогда и только тогда, когда он имеет $(n-1)$ -хордовое оснащение и каждая его ветвь содержится не менее, чем в n попарно различных элементарных циклах.

Следствие. Дан граф, число вершин которого конечно. Для любого натурального числа $n \geq 3$ остов графа имеет n -хордовое оснащение тогда и только тогда, когда он имеет 2-хордовое оснащение и каждая его ветвь содержится не менее, чем в n попарно различных элементарных циклах.

Доказательство теоремы. Предположим сначала, что задано n -хордовое оснащение

$$\varphi : \{1, 2, \dots, b\} \rightarrow C_n$$

некоторого остова. Тогда искомое $(n-1)$ -хордовое оснащение

$$\varphi' : \{1, 2, \dots, b\} \rightarrow C_{n-1}$$

можно задать следующим правилом. Пусть k – натуральное число, не превосходящее числа b , и пусть

$$\varphi(k) = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}.$$

Рассмотрим три элементарных цикла, содержащих хорды c_{n-2}, c_{n-1} и c_n соответственно. Согласно теореме из параграфа 2 работы [1] пересечение этих (трёх) циклов равно пересечению каких-то двух из них. Пусть i и j – номера хорд, соответствующих этим циклам (так что $n-2 \leq i \neq j \leq n$). Мы полагаем

$$\varphi'(k) = \{c_1, c_2, \dots, c_{n-3}, c_i, c_j\}.$$

Что отображение φ' определено корректно и является $(n-1)$ -хордовым оснащением – очевидно.

Предположим теперь, что задано $(n-1)$ -хордовое оснащение

$$\psi : \{1, 2, \dots, b\} \rightarrow C_{n-1}$$

некоторого остова. Тогда искомое n -хордовое оснащение

$$\psi' : \{1, 2, \dots, b\} \rightarrow C_n$$

можно задать следующим правилом. Пусть k – натуральное число, не превосходящее числа b , и пусть

$$\psi(k) = \{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}\}.$$

Согласно нашему предположению, существует хорда c , отличная от c_i (при $1 \leq i \leq n-1$). Мы полагаем

$$\psi'(k) = \{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c\}.$$

Что отображение ψ' определено корректно и является n -хордовым оснащением – очевидно ■

Заметим, что часть “тогда” теоремы верна ещё и при $n = 0, 1$, и неверна при $n = 2$. Первое очевидно, второе ясно из рис. 1 (на рисунке выбранный нами остов графа состоит из рёбер, занумерованных числами $1, \dots, 5$, и 2-хордовое оснащение этого остова задано правилом: $1 \mapsto \{\text{II}, \text{III}\}$, $2 \mapsto \{\text{II}, \text{IV}\}$, $3 \mapsto \{\text{I}, \text{III}\}$, $4 \mapsto \{\text{I}, \text{IV}\}$, $5 \mapsto \{\text{III}, \text{IV}\}$). Заметим также, что часть “только тогда” теоремы верна ещё и при $n = 0, 2$, и неверна при $n = 1$. Первое очевидно, второе ясно из рис. 2.

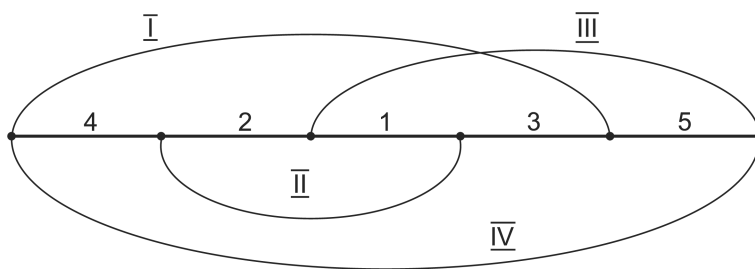


Рис. 1.

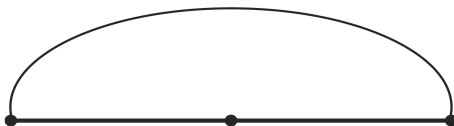


Рис. 2.

Литература

- [1] Маслова Ю. В., Нежинский В. М. Оснащение максимальных деревьев парами хорд // Зап. научн. сем. ПОМИ 415 (2013), С. 91–102.
- [2] Нежинский В. М., Маслова Ю. В. Зацепления вершинно оснащённых графов // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. Вып. 2 (2012), С. 57–60.

ПОЛИНОМ ДЖОНСА ПРОИЗВЕДЕНИЯ УАЙТХЕДА УЗЛОВ

Нестерёнок В. В.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: nesterenok@bk.ru

Nesterenok V. V. Jones polynomial of the Whitehead product of knots. The formula expressing Jones polynomial of Whitehead product of two knots in terms of Jones polynomials of the doubling of the multiplied knots is announced.

Keywords: knot, Jones polynomial, Whitehead product.

Анонсирована формула, выражающая полином Джонса произведения Уайтхеда двух узлов через полиномы Джонса зацеплений, полученных удвоениями перемножаемых узлов.

Ключевые слова: узел, полином Джонса, произведение Уайтхеда.

1. Цель работы. В [1] содержится конструкция, которая любому узлу ставит в соответствие двухкомпонентное зацепление, получаемое из узла присоединением “параллельной” компоненты, коэффициент зацепления которой с исходным узлом равен нулю. В [2] содержится (предложенное В. М. Нежинским) определение операции перемножения (= произведения Уайтхеда) двух узлов. Главная цель этой работы – установить связь между этими конструкциями.

2. Множества Λ и K . Зацеплением называется гладкое компактное ориентированное подмногообразие евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, каждая компонента которого диффеоморфна окружности. Если подмногообразие связно, то зацепление называется также **узлом**.

Зацепления L_0 и L_1 называются **изотопными**, если существует гладкое ориентированное подмногообразие W пространства $\mathbb{R}^3 \times I$ такое, что:

1. $\partial W = W \cap (\mathbb{R}^3 \times \partial I)$;
2. $W \cap (\mathbb{R}^3 \times 0) = L_0 \times 0$ и $W \cap (\mathbb{R}^3 \times 1) = (-L_1) \times 1$, где знак минус обозначает смену ориентации;
3. $W \cap (\mathbb{R}^3 \times t)$ есть зацепление в $\mathbb{R}^3 \times t$ для любого $t \in I$.

Через Λ мы будем обозначать множество изотопических классов всех зацеплений, через K – множество всех узлов; ясно, что $K \subset \Lambda$.

3. Отображения ω и μ . Определим отображение

$$\omega : K \rightarrow \Lambda$$

следующим образом. Пусть $\alpha \in K$ и K – какой-нибудь представитель класса α . Рассмотрим какую-нибудь трубчатую окрестность узла K . Сдвинем послойно узел K в край этой трубчатой окрестности таким образом, чтобы коэффициент зацепления узла K со сдвинутым подмногообразием был равен нулю. Заменим

ориентацию сдвинутого подмногообразия на противоположную и обозначим полученное *ориентированное* подмногообразие через K' . Ясно, что (K, K') – зацепление. Класс этого зацепления и есть $\omega(\alpha)$.

Что это определение корректно – очевидно.

Определим отображение

$$\mu : \mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$$

следующим образом. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. В классе α выберем узел K_1 такой, что: узел K_1 содержится в полупространстве $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0\}$; пересечение узла K_1 с плоскостью $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ (снабжённой стандартной ориентацией) есть отрезок $0 \times [-1, 1] \times 0 \subset 0 \times \mathbb{R} \times 0 \subset \mathbb{R}^3$. В классе β выберем узел K_2 такой, что: узел K_2 содержится в полупространстве $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$; пересечение узла K_2 с плоскостью $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ есть отрезок $0 \times 0 \times [-1, 1] \subset 0 \times 0 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$. Рассмотрим ленточку, ось которой совпадает с узлом K_1 и, коэффициент зацепления краёв которой равен нулю, и ленточку, ось которой совпадает с узлом K_2 , коэффициент зацепления краёв которой равен нулю и которая пересекается с первой ленточкой по квадрату $0 \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. Рассмотрим поверхность, являющуюся объединением этих ленточек, снабдим её ориентацией, совпадающей со стандартной ориентацией квадрата $0 \times [-1, 1] \times [-1, 1]$, и сгладим у полученной поверхности углы. Ясно, что край полученной поверхности является узлом. Класс этого узла и есть $\mu(\alpha, \beta)$.

Стандартная проверка показывает, что это определение корректно.

4. Формулировка основной теоремы. Пусть

$$P : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}[q^{-1/2}, q^{1/2}]$$

отображение, которое изотопическому классу зацепления ставит в соответствие его полином Джонса (по поводу определения полинома Джонса см., например, в [3]).

Теорема. Для любых элементов $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ имеет место равенство

$$P(\mu(\alpha, \beta)) = \frac{1}{q^{-1} + 1 + q} \left((-q^{-1/2} - q^{1/2}) (P(\omega(\alpha)) + P(\omega(\beta))) - P(\omega(\alpha))P(\omega(\beta)) - 1 \right).$$

Литература

- [1] Milnor, J. Isotopy of Links, Lefschetz symposium // Princeton Mathematical Series, 12: 280–306, 1957.
- [2] Посысаева А. О. Перемножение одномерных зацеплений. – Дипломная работа, РГПУ им. А. И. Герцена, 2007.
- [3] Jones, V. F. R. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebra // Bull. Amer. Math. Soc., 12: 103–111, 1987.

EqWorld

Мир математических уравнений

<http://eqworld.ipmnet.ru>

Редактор: А. Д. Полянин



Уравнения занимают центральное место в современной математике и являются основой для математического моделирования многочисленных явлений и процессов в науке и технике.

Веб-сайт EqWorld содержит обширную информацию о решениях различных классов обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), дифференциальных уравнений с частными производными (УрЧП), интегральных уравнений, функциональных уравнений и других математических уравнений. Описаны также некоторые методы решения уравнений, приведены интересные статьи, даны ссылки на математические справочники и монографии, указаны адреса научных веб-сайтов, издательств, журналов и др. Сайт постоянно пополняется новыми уравнениями, точными решениями и другой полезной информацией.

Веб-сайт EqWorld предназначен для широкого круга ученых, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов в различных областях математики, механики, физики и инженерных наук и является бесплатным для его пользователей.

- Точные решения
- Методы решения
- Вспомогательные разделы
- Программы
- Образование
- Об этом сайте
- Для авторов
- Информация

СОДЕРЖАНИЕ

История и современность

Будаев В. Д., Якубсон М. Я. Светлой памяти Виктора Соломоновича Виденского 17.05.1922 – 03.02.2015.....	3
Одинец В. П., Щукин Е. И. Жизнь во времена перемен. К 92 годовщине гибели профессора Романа Орженцкого.....	7

Современные проблемы теории дифференциальных уравнений

Андреев В. К. Об условиях существования однонаправленных течений бинарных смесей.....	12
Волосов К. А., Братусь А. С., Волосова Н. К., Волосова А. К. Точные решения смешанных задач для модели «балки Тимошенко».....	18
Зайцев В. Ф. Обратные задачи симметричного анализа в математическом моделировании.....	22
Зайцев В. Ф., Зайцев О. В. Об одном применении метода вложения....	30
Клебанов И. И., Старцун О. В., Иванов С. А. Групповой анализ модели «Ньютоновская космология».....	33
Кучаров О. Р. Нелинейный флаттер вязкоупругих пластин по уточнённой теории Тимошенко с протекающей жидкостью.....	37
Лагодинский В. М. Краевая задача для двухчастичного релятивистского уравнения Шрёдингера.....	41
Линчук Л. В., Зайцев В. Ф. Поиск первых интегралов и альтернативные симметрии.....	50
Ляхов Д. А., Гердт В. П. Линеаризация обыкновенных дифференциальных уравнений: алгоритмический подход.....	53
Маламанов С. Ю. Моделирование индуцированного магнитного поля в движущейся проводящей жидкости.....	57
Родионов А. А. Некоторые точные решения гидростатической модели....	59
Светлаков А. Н. Ассоциированные фрактальные множества обыкновенных дифференциальных уравнений.....	66
Стогний В. И., Копась И. Н., Коваленко С. С. Симметричный анализ одного класса двумерных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова....	68
Филатов О. П. Интегро-дифференциальная задача параболического типа	73
Худаяров Б. А., Тураев Ф. Ж., Камолов Э. Р. Моделирование нелинейной динамики вязкоупругих трубопроводов с протекающей жидкостью	75

Современные проблемы теории функций и функционального анализа

Бимендина А. У. О неуллучшаемости теоремы вложения разных метрик в симметрических пространствах Лоренца.....	78
Колдунов А. В. Абсолют $(\Gamma(K, \pi), \tau)$ компакта K	82
Коробкова М. Б. К вопросу о дифференцировании по экспоненте.....	85

Ловягин Ю. Н. О некоторых вопросах теории решёточно упорядоченных абелевых групп	89
Локоть В. В., Мартынов О. М. Об одном уточнении оценки снизу относительной проекционной константы $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$	94
Ляхов Л. Н., Райхельгауз Л. Б. Неравенство Пуанкаре для весовых функциональных классов И. А. Киприянова	99
Рукшин С. Е., Семенова К. К. Предыстория интегрального исчисления: вычисление квадратур и кубатур от античности до середины XVII века .	103
Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке.....	115
Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Явные выражения для коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на симметричном отрезке.....	121
Шишкина Э. Л. Весовые обобщённые функции и фундаментальное решение В-ультрагиперболического уравнения	125

Актуальные проблемы математического образования

Агафонцев В. В. Системы счисления в исследовании диофантовых уравнений.....	129
Кайгородов Е. В. О математической подготовке химиков в Горно-Алтайском государственном университете	136
Колдунов А. В. Изучение научных основ содержания школьного курса математики (алгебра).....	142
Костенко И. П. Модель динамики качества отечественного математического образования (1931–2014)	145
Кузнецов В. О. О классификации точек разрыва функции.....	151
Лазарева Е. Г., Устинова И. Г. Обучающие приёмы компьютерных тестов по высшей математике.....	157
Мельников Ю. Б., Мельникова Н. В. Изучение студентами математических объектов как моделей-полиад.....	162
Мельников Ю. Б., Ширпужев С. В. Интерактивное учебно-методическое обеспечение: управленческий и экономический аспекты	166
Сангалова М. Е. Электронное портфолио как инструмент организации обучения математической логике	170
Ходот Т. Г., Маслова Ю. В. Адаптация студентов первого курса математического факультета РГПУ им. А. И. Герцена к изучению профильных дисциплин на примере геометрии.....	175
Ходот Т. Г., Маслова Ю. В. Организация самостоятельной работы первокурсников.....	179
Якубсон М. Я. Ключевые задачи в обучении теории игр	182

Актуальные информационные системы и технологии моделирования

Богатырев М. Ю. Алгебраические модели в технологии извлечения фактов из текстовых данных	186
Гайфулина Д. А., Хакимова Э. Р. Ада Лавлейс и её программа по нахождению чисел Бернулли на вычислительной машине Бэббиджа	192
Комарова С. М. Межпредметные задачи в обучении студентов основам объектно-ориентированного программирования	197
Кудрин Б. К. Реализация алгоритмов моделирования и визуализации электромагнитного поля в низкочастотных устройствах магнитотерапии	202
Никольский Б. Б., Фомин В. В. Перспективы использования нейронных сетей во встраиваемых системах на примере спектроскопии	206
Подорога А. В., Тихонов И. В. Квазилинейное уравнение дорожного движения и компьютерное моделирование	209
Попов С. М., Флегонтов А. В. К вопросу об автоматизации поддержки инновационных решений на базе систем дистанционного обучения	214
Просенкова Ю. Б., Флегонтов А. В. Клиент-серверная организация работы системы тестирования знаний с функцией автогенерации тестовых заданий и информационная база, обеспечивающая обмен данными между компонентами системы	216
Сергеев В. Д. Применение расхождения Реньи к анализу и классификации изображений	221
Шакиров Т. Р., Фомин В. В. Об одном решении в организации доступа и хранения документов в системе управления документооборота	228

Некоторые проблемы геометрии и топологии

Белоусова М. И. Хордовые оснащения остовов графа	231
Нестерёнок В. В. Полином Джонса произведения Уайтхеда узлов	234
EqWorld	236
Содержание	237

НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Материалы научной конференции
ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2015
13–17 апреля 2015 г.

Печатается с готового оригинал-макета, предоставленного авторами

Подписано в печать 26.03.2015. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 15,0 уч. изд. л. 15,0 усл. печ. л.
Тираж 100 экз. Заказ № 570

Издательство РГПУ им. А. И. Герцена
191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48

Типография РГПУ. 191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48