А.А. Ашимов, Ю.В. Боровский, Б.Т. Султанов,
Ж.М. Адилов, Д.А. Новиков, Р.А. Алшанов,
Ас.А. Ашимов

МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ НАЦИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ

Москва
Физматлит
2011

ББК 65.23
А 98
УДК 519.36

АШИМОВ А. А., БОРОВСКИЙ Ю. В., СУЛТАНОВ Б. Т., АДИЛОВ Ж. М., НОВИКОВ Д. А., АЛШАНОВ Р. А., АШИМОВ Ас. А. Макроэкономический анализ и параметрическое регулирование национальной экономики.—М.: Издательство Физико-математической литературы, 2011.—324 с.—ISBN 978-5-94052-212-6.

Представлены результаты разработки и развития теории параметрического регулирования статического равновесия и эволюции национальной экономики. Показана эффективность ее применения на базе ряда математических моделей, соответственно описывающих статическое равновесие на макроэкономических рынках, открытую экономику маленькой страны, конъюнктурные циклы и процессы экономического роста. Также описаны результаты макроэкономического анализа национального хозяйства на базе соответствующих математических моделей рыночной экономики страны.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, интересующихся проблемами управления в социально-экономических системах и прикладной теорией управления.

Научное издание

АШИМОВ Абдыкаппар Ашимович, БОРОВСКИЙ Юрий Вячеславович, СУЛТАНОВ Бахыт Турлыханович, АДИЛОВ Жексенбек Макеевич, НОВИКОВ Дмитрий Александрович, АЛШАНОВ Рахман Алшанович, АШИМОВ Аскар Абдыкаппарович

МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ НАЦИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ

Редактор *Г.М. Красникова*
Компьютерная графика *М.Н. Грицук*
Компьютерная верстка *Г.М. Красникова*

ИД № 01389 от 30.03.2000
Гигиеническое заключение № 77.99.10.953.Д.005466.07.03 от 25.07.2003

Подписано в печать 08.09.2008. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 20,25. Уч.-изд. л. 22,275. Тираж 500 экз.

Издательство Физико-математической литературы
123182 Москва, ул. Щукинская, д. 12, к. 1

Отпечатано с готовых диапозитивов
ГП «Облиздат»
248640 Калуга, пл. Старый торг, 5

Заказ №

ISBN 978-5-94052-212-6

© Коллектив авторов, 2011
© Физматлит, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 7

Глава 1. **Элементы теории параметрического регулирования развития рыночной экономики** 11

1.1. Состав теории параметрического регулирования развития рыночной экономики 11

1.2. Методы исследования устойчивости и структурной устойчивости математических моделей экономической системы страны 13

1.2.1. Разработка методов оценок показателей устойчивости математических моделей. 1.2.2. Разработка методов оценки слабой структурной устойчивости дискретной динамической системы (полукаскада) на базе подхода Робинсона

1.3. Методы синтеза и выбора (в среде заданного конечного набора алгоритмов) оптимальных законов параметрического регулирования развития экономической системы страны, условия существования решения соответствующих задач вариационного исчисления и условия влияния на них неуправляемых параметров 21

1.3.1. Исследование условий существования решения задачи вариационного исчисления по синтезу и выбору оптимальных законов параметрического регулирования непрерывной детерминированной динамической системы. 1.3.2. Исследование условий существования решения задач вариационного исчисления по синтезу и выбору оптимальных законов параметрического регулирования дискретной детерминированной динамической системы. 1.3.3. Исследование условий существования решения задач вариационного исчисления по синтезу и выбору оптимальных законов параметрического регулирования на базе дискретной стохастической динамической системы. 1.3.4. Исследование влияний изменения неуправляемых параметров (параметрических возмущений) на результаты решения задач вариационного исчисления по синтезу и выбору оптимальных законов параметрического регулирования

1.4. Алгоритм применения теории параметрического регулирования и правила взаимодействия лиц, принимающих решения по выработке и осуществлению эффективной государственной экономической политики на базе информационной системы поддержки принятия решений 36

1.4.1. Алгоритм применения теории параметрического регулирования. 1.4.2. Правила взаимодействия лиц, принимающих решения по выработке и осуществлению эффективной государственной экономической политики на базе информационной системы поддержки принятия решений

1.5. Примеры применения теории параметрического регулирования 50

1.5.1. Математическая модель неоклассической теории оптимального роста. 1.5.2. Односекторная модель экономического роста Солоу. 1.5.3. Модель оценки затрат на оборону Ричардсона. 1.5.4. Математическая модель экономической системы страны с учетом влияния доли государственных расходов и ставки процента по государственным займам на экономический рост. 1.5.5. Математическая модель экономической системы страны с учетом влияния международной торговли и валютных обменов на экономический рост. 1.5.6. Математическая модель глобальной экономики Форрестера. 1.5.7. Монетарная модель Турновского. 1.5.8. Эндогенная модель Джонса

Приложение А. Доказательства утверждений, приведенных в главе 1 130

Глава 2. **Методы макроэкономического анализа и параметрическое регулирование статического равновесия в национальной экономике** 142

2.1. Макроэкономический анализ состояния национальной экономики на базе моделей *IS*, *LM*, *IS-LM*, общеэкономического равновесия Кейнса, исследование влияний экономических инструментов на условия равновесия и параметрическое регулирование статического равновесия национальной экономики на основе модели Кейнса 143

2.1.1. Построение модели *IS* и исследование влияний экономических инструментов. 2.1.2. Макрооценка равновесных условий на рынке денег. 2.1.3. Макрооценка совместного состояния равновесия на рынках благ, денег и исследование влияний экономических инструментов. 2.1.4. Макрооценка состояния равновесия на базе модели общеэкономического равновесия Кейнса и исследование влияний экономических инструментов. 2.1.5. Параметрическое регулирование статического равновесия национальной экономики на основе модели Кейнса

2.2. Макроэкономический анализ и параметрическое регулирование статического равновесия национальной экономики на базе модели маленькой открытой страны 154

2.2.1. Построение модели открытой экономики маленькой страны и оценка равновесных условий. 2.2.2. Влияние экономических инструментов на равновесные состояния и состояние платежного баланса. 2.2.3. Параметрическое регулирование статического равновесия открытой экономики на основе модели маленькой страны

Глава 3. **Параметрическое регулирование циклической динамики экономических систем** 167

3.1. Математическая модель цикла Кондратьева 167

3.1.1. Описание модели. 3.1.2. Оценка грубости модели цикла Кондратьева без параметрического регулирования. 3.1.3. Параметрическое регулирование эволюции экономической системы на базе модели цикла Кондратьева. 3.1.4. Оценка структурной устойчивости математической модели цикла Кондратьева с параметрическим регулированием. 3.1.5. Исследование зависимости оптимального значения критерия K от параметра для задачи вариационного исчисления на базе математической модели цикла Кондратьева

3.2. Математическая модель Гудвина конъюнктурных колебаний растущей экономики 174

3.2.1. Описание модели. 3.2.2. Исследование структурной устойчивости математической модели Гудвина без параметрического регулирования. 3.2.3. Задача выбора оптимальных законов параметрического регулирования на базе математической модели Гудвина. 3.2.4. Исследование структурной устойчивости математической модели Гудвина с параметрическим регулированием. 3.2.5. Исследование зависимости оптимального закона параметрического регулирования от значений неуправляемого параметра математической модели Гудвина

Глава 4. **Макроэкономический анализ и параметрическое регулирование экономического роста национального хозяйства на базе вычислимых моделей общего равновесия** 185

4.1. Макроэкономический анализ и параметрическое регулирование эволюции национальной экономики на базе вычислимой модели общего равновесия отраслей экономики 187

4.1.1. Описание модели, параметрическая идентификация и ретроспективный прогноз. 4.1.2. Макроэкономический анализ на базе вычислимой модели общего равновесия отраслей экономики. 4.1.3. Нахождение оптимальных законов параметрического регулирования на базе CGE-модели секторов экономики

4.2. Регулирование эволюции национальной экономики на базе вычислимой модели общего равновесия с сектором знаний 249

4.2.1. Описание модели, параметрическая идентификации и ретроспективный прогноз. 4.2.2. Оценка положений макроэкономической теории на базе вычислимой модели общего равновесия с сектором знаний. 4.2.3. Нахождение оптимальных законов параметрического регулирования на базе CGE-модели с сектором знаний

4.3. Регулирование эволюции национальной экономики на базе вычислимой модели общего равновесия с теневым сектором 283

4.3.1. Описание модели, параметрическая идентификации и ретроспективный прогноз. 4.3.2. Нахождение оптимальных значений регулируемых параметров на базе CGE-модели с теневым сектором

Заключение 317

Список литературы 319

Сведения об авторах 324

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость макроэкономического анализа и осуществления дискреционной экономической политики остро обозначены последним мировым кризисом 2007–2009 гг. Важным направлением макроэкономического анализа и оценки эффективной государственной политики в сфере регулирования эволюции национальной экономики является использование математических моделей национального хозяйства [73, 33].

Настоящая книга является развитым вариантом книги «Макроэкономический анализ и экономическая политика на базе параметрического регулирования». В ней представлена развитая версия теории параметрического регулирования, дополнительно включающая: новый метод параметрической идентификации; разделы: методы оценки устойчивости детерминированных математических моделей и теории параметрического регулирования для вычислимых моделей общего равновесия с аддитивным шумом.

Книга также включает новые результаты применения теории параметрического регулирования на базе вычислимых моделей общего равновесия с аддитивным шумом и макроэкономического анализа национальной экономики на базе вычислимых моделей общего равновесия.

Материалы данной книги в определенной мере дают возможность оценить версии рекомендаций по стабилизационной, антициклической экономической политике и выбору государственной политики в сфере экономического роста.

Первая глава посвящена изложению теории параметрического регулирования. В главе приведены:

— состав элементов теории параметрического регулирования;

— методы исследования устойчивости детерминированных математических моделей. Методы исследования структурной устойчивости математических моделей экономической системы страны;

— постановки задач вариационного исчисления по выбору оптимальных наборов законов параметрического регулирования для непрерывной и дискретной динамических систем. В указанных задачах вариационного исчисления целевые функционалы выражают некоторые (глобальные, промежуточные или тактические)

цели экономического развития. Фазовые ограничения и ограничения в разрешенной форме представлены математическими моделями экономических систем. Рассматриваемые задачи вариационного исчисления по выбору оптимальных законов параметрического регулирования в среде заданного конечного набора алгоритмов и в среде заданного множества их значений отличаются от рассмотренных ранее в теории экстремальных задач [19] и характеризуются меньшей трудоемкостью в применении. Также рассматривается задача вариационного исчисления по выбору оптимальных законов параметрического регулирования в среде заданного множества их значений на базе вычислимой модели общего равновесия с аддитивным шумом;

— теорема о существовании решения задачи вариационного исчисления по выбору оптимального набора законов параметрического регулирования в среде заданного конечного набора алгоритмов для непрерывной и дискретной динамических систем;

— теорема о существовании решения задачи вариационного исчисления по выбору оптимального набора законов параметрического регулирования в среде заданного множества их значений на базе вычислимой модели общего равновесия с аддитивным шумом;

— определение точки бифуркации экстремалей задачи вариационного исчисления по выбору оптимального набора законов параметрического регулирования в среде заданного конечного набора алгоритмов;

— теорема о достаточных условиях существования бифуркационных точек.

Изложенные результаты отличаются от таких известных результатов по исследованию параметрических возмущений задач вариационного исчисления, как [19], где параметрическое возмущение используется для получения достаточных условий экстремума путем построения соответствующих S-функций и использования принципа снятия ограничений, или [41], где ставится вопрос об условиях устойчивости решений задач вариационного исчисления (проблема Улама). Исследование этой проблемы сводится к нахождению условий регулярности, при которых у целевого функционала возмущенной задачи есть точка минимума, близкая к точке минимума функционала невозмущенной задачи. Также в [14] доказана теорема об условиях существования точки бифуркации для задачи вариационного исчисления, функционал которой рассматривается на пространстве Соболева $\overset{0}{W}{}_p^m(\Omega)$ $(2 \leqslant \leqslant p < \infty)$ и зависит от скалярного параметра $\lambda \in [0, 1]$.

Далее в главе приведены алгоритм применения теории параметрического регулирования и примеры ее применения на базе ряда математических моделей экономических систем.

Во второй главе приведены эконометрические оценки функций, полученные на основе статистических данных национальной экономики республики Казахстан и характеризующие состояние национального хозяйства. Описаны математические модели IS, LM, IS-LM общеэкономического равновесия Кейнса (построенные на базе эконометрических функций), также описана модель открытой экономики малой страны. Приведены результаты исследования влияний экономических инструментов на равновесные решения в рамках вышеуказанных математических моделей экономического равновесия национального хозяйства.

На основе факта зависимости решения системы алгебраических уравнений от ее коэффициентов предложен подход параметрического регулирования статического равновесия национальной экономики, который сводится к оценке оптимальных значений экономических инструментов в виде результатов решения соответствующей задачи математического программирования. В рамках предложенного подхода на базе математических моделей общего экономического равновесия Кейнса и модели открытой экономики малой страны сформулированы и решены задачи оценки оптимальных значений экономических инструментов в смысле некоторых критериев. Описаны результаты исследования зависимостей оптимальных значений критериев от набора неуправляемых экономических параметров, заданных в соответствующих областях.

Третья глава посвящена развитию теории конъюнктурных циклов. В главе приводятся результаты исследования структурной устойчивости математических моделей цикла Кондратьева и Гудвина и решения задач параметрического регулирования на базе указанных математических моделей.

В четвертой главе приводятся результаты параметрического регулирования экономического роста на базе вычислимых моделей общего равновесия. В главе описывается предложенный алгоритм параметрической идентификации модели, учитывающий особенности макроэкономических моделей большой размерности и позволяющий находить глобальный экстремум функции большого числа (более тысячи) переменных. В алгоритме используются две целевые функции (два критерия идентификации — основной и дополнительный), что позволяет добиваться вывода значений идентифицируемых параметров из окрестностей точек локальных (и

неглобальных) экстремумов, сохраняя при этом условия согласованного движения к глобальному экстремуму.

В главе также описываются результаты макроэкономического анализа показателей экономических агентов и национальной экономики за ретроспективные и среднесрочные перспективные периоды на уровнях вычислимых моделей общего равновесия отраслей экономики. Также приведены данные исследований эластичности эндогенных переменных, источников экономического роста и положений макроэкономической теории о конъюнктурных циклах на базе вычислимых моделей секторов экономики и с сектором знаний.

В главе приведены постановки и решения задач параметрического регулирования экономического роста на базе вычислимых моделей: с сектором знаний, отраслей экономики и с теневым сектором.

Авторы выражают благодарность Н.Ю. Боровскому, Д.Т. Айдарханову, Д.К. Суйсинбаеву, Б.Т. Мерекешеву, Н.Т. Сайлаубекову, Ж.Т. Дильдебаевой за помощь при проведении вычислительных экспериментов.

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ

1.1. Состав теории параметрического регулирования развития рыночной экономики

Важным направлением оценки эффективной государственной политики в сфере экономического роста является использование математических моделей национального хозяйства [73].

Многие динамические системы, в том числе экономические системы стран [33, 30], после некоторых преобразований могут быть представлены системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \alpha), \tag{1.1.1}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.1.2}$$

Здесь t — время, $t \in [t_0, t_0 + T]$, $T > 0$ — фиксированное число; $x = x(t) \in R^m$ — функция состояния системы (1.1.1), (1.1.2); $x_0 \in R^m$ — начальное состояние системы, детерминированный вектор; $u = u(t) \in R^q$ — вектор управляемых параметров, предполагается, что функции $u(t)$ и их производные равномерно ограничены; $\alpha \in A \subset R^s$ — вектор неуправляемых параметров, A — открытое связное множество.

Для существования и единственности решения системы (1.1.1), (1.1.2) будем предполагать, что вектор-функция f удовлетворяют условию Липшица и следующим линейным ограничениям на ее степень роста:

$$|f(x, u, \alpha)| \leqslant c(1 + |x|),$$

где c — некоторая положительная константа.

Как известно, решение (эволюция) рассматриваемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений зависит как от вектора начальных значений x_0, так от значений векторов управля-

емых (u) и неуправляемых (α) параметров. Поэтому результат эволюции (развития) нелинейной динамической системы при заданном векторе начальных значений x_0 определяется значениями векторов как управляемых, так и неуправляемых параметров.

Также известно [3], что чтобы судить по решениям системы (1.1.1) об описываемом ею объекте, эта система должна обладать свойством неизменяемости качественной картины траекторий при малых в некотором смысле возмущениях правой части системы (1.1.1). Другими словами, система (1.1.1) должна обладать свойством грубости, или структурной устойчивости.

На основании вышесказанного в [7, 53–55, 8] предложена теория параметрического регулирования развития рыночной экономики, состоящая из следующих компонентов:

1. Методы формирования набора (библиотеки) макроэкономических математических моделей. Эти методы ориентированы на описание различных конкретных социально-экономических ситуаций с учетом условий экологической безопасности.

2. Методы оценки показателей устойчивости и условий грубости (структурной устойчивости) математических моделей экономической системы страны из библиотеки без параметрического регулирования. При этом проверяются условия принадлежности рассматриваемых математических моделей к классу систем Морса–Смейла, или к Ω-грубым системам, или к системам равномерной грубости, или к классу $У$-систем, или к классу систем со слабой структурной устойчивостью.

3. Методы контролирования или подавления негрубости (структурной неустойчивости) математических моделей экономической системы. Выбор (синтез) алгоритмов контролирования или подавления структурной неустойчивости соответствующей математической модели экономической системы страны.

4. Методы выбора и синтеза законов параметрического регулирования развития рыночной экономики на базе математических моделей экономической системы страны.

5. Методы оценки показателей устойчивости и условий грубости (структурной устойчивости), математических моделей экономической системы страны из библиотеки с параметрическим регулированием. При этом проверяются условия принадлежности рассматриваемых математических моделей с параметрическим регулированием к классу систем Морса–Смейла, или к Ω-грубым системам, или к системам равномерной грубости, или к классу $У$-систем, или к классу систем со слабой структурной устойчивостью.

6. Методы уточнения ограничений на параметрическое регулирование развития рыночной экономики в случае структурной неустойчивости математических моделей экономической системы страны с параметрическим регулированием. Уточнение ограничений на параметрическое регулирование развития рыночной экономики.

7. Методы исследования влияний изменения неуправляемых параметров (параметрических возмущений) на результаты решения задач вариационного исчисления синтезу и выбору (в среде заданного конечного набора алгоритмов) законов параметрического регулирования. Исследование бифуркаций экстремалей задач вариационного исчисления по выбору оптимальных законов параметрического регулирования.

8. Разработка рекомендаций по выработке и осуществлению эффективной государственной экономической политики на базе теории параметрического регулирования развития рыночной экономики с учетом конкретных социально-экономических ситуаций.

1.2. Метод исследования устойчивости и структурной устойчивости математических моделей экономической системы страны

1.2.1. Разработка методов оценок показателей устойчивости математических моделей. Согласно определению Орлова [31], математической моделью экономической системы в общем виде будем называть некоторую функцию вида $y = f(p)$:

$$f\colon A \to B, \tag{1.2.1}$$

переводящую значения исходных (экзогенных) данных $p \in A$ в решения (значения эндогенных переменных) $y \in B$.

После построения математической модели некоторого реального явления или процесса f и определения с помощью известных наблюдаемых данных или решения задачи параметрической идентификации фактического значения точки p встает вопрос об адекватности исследуемой модели. Одним из условий адекватности модели является условие устойчивости модели относительно допустимых отклонений исходных данных [31]. В случае такой устойчивости малым изменениям исходных данных модели соответствуют малые изменения ее решения. В указанной монографии [31] вводятся определения основных показателей устойчивости (эти определения приведены ниже), однако в ней отсутствуют алгоритмы расчета рассматриваемых показателей устойчивости математической модели.

Ниже приводятся разработанные алгоритмы оценок показателей устойчивости математической модели, характеризующие устойчивость решений математической модели по отношению к изменениям исходных данных. Все параметры и переменные модели при этом предварительно приводятся к безразмерному виду.

Пусть $X = (X^1, X^2, \ldots, X^k)$ — некоторый вектор значений экзогенных параметров модели для промежутка времени $t \in \in \{0, \ldots, T\}$. Соответствующий вектор базовых значений для указанного промежутка времени обозначим через $X_0 = (X_0^1, X_0^2, \ldots \ldots, X_0^k)$. В качестве вектора X для динамических моделей рассматривается вектор значений параметров и начальных значений переменных для дифференциальных (или разностных) уравнений. В качестве вектора X для эконометрических моделей используется вектор наблюдаемых статистических данных, используемых для нахождения коэффициентов уравнений модели.

Пусть $p = (p^1, p^2, \ldots, p^k)$ — вектор нормированных входных данных математической модели (здесь $p^i = x^i/x_0^i,\ i = 1, \ldots, k$), вектор $p_0 = (1, 1, \ldots, 1)$.

Пусть A — пространство векторов нормированных входных данных, состоящее из всех допустимых наборов p, $A \subset R^k$ — метрическое пространство с евклидовой метрикой, определяемой пространством R^k, $p_0 \in A$.

Пусть $Y = Y(p) = (Y^1, Y^2, \ldots, Y^n)$ — выбранный вектор значений эндогенных переменных для некоторого выбранного промежутка (или момента) времени, найденный для выбранных значений p. В качестве вектора Y для динамических моделей рассматривается вектор значений некоторого выбранного набора эндогенных переменных модели для указанного промежутка (или момента) времени. В качестве вектора Y для эконометрических моделей используется вектор значений коэффициентов уравнений модели или вектор значений некоторого выбранного набора эндогенных переменных модели для указанного промежутка (или момента) времени. В частности, при $p = p_0$ обозначим через $Y_0 = Y(p_0) = (Y_0^1, Y_0^2, \ldots, Y_0^n)$.

Нормированный вектор значений эндогенных переменных для момента времени T_1 обозначим через

$$y = y(p) = \left(\frac{Y^1}{Y_0^1}, \frac{Y^2}{Y_0^2}, \ldots, \frac{Y^n}{Y_0^n}\right);$$

$y_0 = y(p_0) = (1, 1, \ldots, 1)$.

Пусть $B \subset R^n$ — область, содержащая возможные выходные значения y для $p \in A$, снабженная евклидовой метрикой простран-

ства R^n, $y_0 \in B$. Исследуемая модель определяет отображение f множества A в множество B.

Для выбранных точки $p \in A$ и числа $\alpha > 0$ обозначим через $U_\alpha(p)$ пересечение окрестности точки p радиуса α с множеством A:

$$U_\alpha(p) = \{x_1 \in A\colon\ \rho(p_1, p) \leqslant \alpha\}.$$

Здесь и далее ρ — евклидово расстояние между двумя точками эвклидова пространства.

Для некоторого подмножества $B_1 \subset B$ через $d(B_1)$ обозначим диаметр множества B_1, т. е.

$$d(B_1) = \sup\left(\rho(y_1, y_2)\colon\ y_1, y_2 \in B_1\right).$$

Определение 1.2.1. *Показателем устойчивости* эконометрической модели в точке $X \in A$ для значения $\alpha > 0$ называется число

$$\beta(p, \alpha) = d(f(U_\alpha(p))). \tag{1.2.2}$$

Алгоритм 1.2.1 оценки показателя устойчивости $\beta(p, \alpha)$ модели методом Монте-Карло состоит в следующем.

1. Выбираются наборы входных параметров (X) и выходных переменных (Y), для которых рассчитываются соответствующие нормированные величины.

2. Определяется вектор нормированных входных данных $p = (p^1, p^2, \ldots, p^k)$, число $\alpha > 0$ и множество $U_\alpha(p)$.

3. Генерируется набор из достаточно большого числа M псевдослучайных точек $(p_1, p_2, \ldots, p_M)$, равномерно распределенных в $U_\alpha(p)$.

Для этого с помощью датчика равномерно распределенных псевдослучайных чисел последовательно генерируются координаты p_j^i $(i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, M)$ точки p_j, принадлежащие числовым промежуткам $[p^i - \alpha,\ p^i + \alpha]$ покрывающим $U_\alpha(p)$, в случае выполнения неравенства $\sum\limits_{i=1}^{k} (p_j^i - p^i)^2 \leqslant \alpha^2$ (т. е. $x_j \in U_\alpha(p)$) эта точка добавляется к создаваемому набору.

4. Для каждой точки p_j набора с помощью просчета модели определяется точка $y_j = f(p_j),\ j = 1, \ldots, M$.

5. Вычисляется значение

$$\beta = \max\left(\rho(y_i, y_j)\colon\ i, j = 1, \ldots, M\right).$$

6. Останов.

При $\alpha = 0{,}01$ найденное число $\beta/2$ характеризует, на сколько процентов (максимально) изменятся значения выходных переменных модели при изменении входных данных на 1%.

Определение 1.2.2. *Абсолютным показателем устойчивости* модели в точке $x \in A$ называется число

$$\beta(x) = \inf_{0<\alpha\leqslant\alpha_0} \beta(p, \alpha). \tag{1.2.3}$$

Здесь α_0 — максимальное допустимое относительное отклонение значений входных данных модели.

Алгоритм 1.2.2 оценки абсолютного показателя устойчивости $\beta(p)$ эконометрической модели состоит в следующем.

Для выбранного значения α_0 и чисел $j = 0, 1, 2, \ldots$ последовательно, с помощью алгоритма 1.2.1, находятся числа $\beta_j = \beta(p, \alpha_0/2^j)$ и оценивается число

$$\beta(p) = \inf_{j=0,1,2,\ldots} \beta_j.$$

Если число $\beta(p)$ окажется меньше некоторого наперед заданного малого числа ε (т. е. $\beta(p)$ считается приблизительно равным нулю), то отображение f, задаваемое исследуемой моделью оценивается в точке p как непрерывно зависящее от входных значений.

Определение 1.2.3. *Максимальным абсолютным показателем устойчивости* модели в области A называется число

$$\gamma = \sup_{p\in A} \beta(p). \tag{1.2.4}$$

Алгоритм 1.2.3 оценки максимального абсолютного показателя устойчивости γ модели методом Монте-Карло состоит в следующем.

1. Генерируется набор из достаточно большого числа M псевдослучайных точек $(p_1, p_2, \ldots, p_M)$, равномерно распределенных в A.

2. Для каждой точки p_j набора и для выбранного $\alpha_0 > 0$ с помощью алгоритма 1.2.2 находятся числа $\beta(p_j)$, $j = 1, \ldots, M$.

3. Определяется число

$$\gamma = \max_{j=1,\ldots,M} \beta(p_j).$$

4. Останов.

Если число γ окажется меньше некоторого наперед заданного малого числа ε (т. е. γ считается приблизительно равным нулю), то отображение f, задаваемое исследуемой моделью, оценивается на множестве A как непрерывно зависящее от входных значений.

Разработанные алгоритмы применялись для оценок эконометрической модели взаимосвязи макроэкономических показателей и CGE-модели отраслей экономики.

Для CGE-модели отраслей экономики в качестве множества A использовалось множество возможных значений исходных статистических данных, используемых при параметрической идентификации коэффициентов и начальных значений разностных уравнений этой модели, а в качестве множества B — результаты расчета модели для определенных значений времени, следующих за периодом параметрической идентификации этой модели.

1.2.2. Разработка методов оценки слабой структурной устойчивости дискретной динамической системы (полукаскада) на базе подхода Робинсона. Методы исследования грубости (структурной устойчивости) математической модели экономической системы страны базируется на:

— фундаментальных результатах теории динамических систем на плоскости;

— методах проверки условий принадлежности математических моделей к определенным классам структурно устойчивых систем (Морса–Смейла, Ω-грубым системам, $У$-системам, системам со слабой структурной устойчивостью).

В настоящее время теория параметрического регулирования развития рыночной экономики располагает рядом теорем о структурной устойчивости конкретных математических моделей (модель неоклассической теории оптимального роста, модели экономической системы страны с учетом влияния доли государственных расходов и ставки процента по государственным займам на экономический рост; модели экономической системы страны с учетом влияния международной торговли и валютных обменов на экономический рост и др.), сформулированных и доказанных на базе указанных выше фундаментальных результатов.

Наряду с аналитическими возможностями исследования структурной устойчивости конкретных математических моделей (без параметрического регулирования и с параметрическим регулированием) на базе указанных результатов теории динамических систем можно рассмотреть подходы исследования структурной устойчивости математических моделей национального хозяйства с помощью вычислительных экспериментов.

Ниже излагается возможность построения одного вычислительного алгоритма оценки структурной устойчивости рассматриваемых математических моделей экономической системы страны

на базе следующей теоремы (теорема A) Робинсона [67] о слабой структурной устойчивости.

Теорема A. *Пусть N' — некоторое многообразие и N — компактное подмножество в N' такое, что замыкание внутренности N есть N. Пусть некоторое векторное поле задано в окрестности множества N в N', это поле определяет C^1 — поток f в этой окрестности. Обозначим через $R(f, N)$ цепочно-рекуррентное множество потока f на N.*

Пусть $R(f, N)$ содержится внутри N. Пусть оно имеет гиперболическую структуру, кроме того, поток f на $R(f, N)$ удовлетворяет также условиям трансверсальности устойчивого и неустойчивого многообразий. Тогда поток f на N слабо структурно устойчив. В частности, если $R(f, N)$ — пустое множество, то поток f слабо структурно устойчив на N. Аналогичный результат справедлив и для дискретной динамической системы (каскада), задаваемого гомеоморфизмом (с образом) $f\colon N \to N'$.

Поэтому оценка слабой структурной устойчивости потока (или каскада) f с помощью вычислительных алгоритмов на основе теоремы A может быть проведена путем численной оценки цепочно-рекуррентного множества $R(f, N)$ для некоторой компактной области N фазового пространства исследуемой динамической системы.

На основе алгоритма построения символического образа [32] ниже предлагается алгоритм локализации цепно-рекуррентного множества для компактного подмножества фазового пространства динамической системы, описываемой системой обыкновенных дифференциальных (или разностных) и алгебраических уравнений. Для компьютерного моделирования цепно-рекуррентного множества использовался ориентированный граф (символический образ), являющийся дискретизацией отображения сдвига по траекториям, определяемого этой динамической системой.

Пусть ищется оценка цепно-рекуррентного множества $R(f, N)$ некоторой динамической системы в компактном множестве N ее фазового пространства. Для конкретной математической модели экономической системы в качестве компакта N можно взять, например, параллелепипед ее фазового пространства, включающий в себя все возможные траектории эволюции экономической системы для рассматриваемого промежутка времени.

Описание алгоритма локализации цепно-рекуррентного множества состоит в следующем.

1. Определяется отображение f, определенное в N и задаваемое сдвигом по траекториям динамической системы для фиксированного промежутка времени.

2. Строится разбиение C компакта N на ячейки N_i. Задается ориентированный граф G, вершины которого соответствуют ячейкам, а ребра, соединяющие ячейки N_i с N_j соответствуют условиям пересечения образа одной ячейки $f(N_i)$ с другой ячейкой N_j.

3. В графе G находятся все возвратные вершины (вершины принадлежащие циклам). Если множество таких вершин пустое, то $R(f, N)$ — пустое и процесс его локализации завершается. Делается вывод о слабой структурной устойчивости динамической системы.

4. Ячейки, соответствующие возвратным вершинам графа G, разбиваются на ячейки меньшего размера, и по ним строится новый ориентированный граф G (см. п. 2 алгоритма).

5. Переход к п. 3.

Пункты 3–5 повторяются до тех пор, пока диаметры ячеек разбиения не станут меньше некоторого наперед заданного числа ε.

Последний набор ячеек и является оценкой цепно-рекуррентного множества $R(f, N)$.

Разработанный метод оценки цепно-рекуррентного множества для компактного подмножества фазового пространства динамической системы позволяет, в случае пустоты найденного цепно-рекуррентного множества $R(f, N)$, сделать вывод о слабой структурной устойчивости динамической системы.

В случае если исследуемая дискретная динамическая система, априори, является полукаскадом f, применению теоремы Робинсона A для оценки ее слабой структурной устойчивости должна предшествовать проверка обратимости отображения f, заданного на N (поскольку в этом случае полукаскад, задаваемый f будет являться каскадом).

Приведем численный алгоритм оценки обратимости дифференцируемого отображения $f\colon\ N \to N'$, где в качестве N используется некоторая замкнутая окрестность дискретной траектории $\{f^t(x_0),\ t = 0, \ldots, T\}$ в фазовом пространстве динамической системы. Будем считать, что N содержит внутри себя непрерывную линию L, последовательно соединяющую точки $\{f^t(x_0), t = = 0, \ldots, T\}$. В качестве такой линии можно взять, например, кусочно-линейную линию с узлами в точках указанной дискретной траектории полукаскада.

Проверку обратимости отображения $f\colon N \to N'$ можно осуществить в следующие два этапа.

1. Проверка обратимости ограничения отображения $f\colon N \to N'$ на линию L: $f\colon L \to f(L)$. Эта проверка сводится к установлению факта отсутствия точек самопересечения у линии $f(L)$, т. е. $(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$, $x_1, x_2 \in L$. Отсутствие точек самопересечения $f(L)$ можно установить, например, проверив монотонность ограничения отображения f на L по какой-либо координате фазового пространства полукаскада f.

Пусть выбраны достаточно большой набор точек вида $x_i = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n) \in L$, $y_i = f(x_i)$, $y_i = (y_i^1, y_i^2, \ldots, y_i^n)$ и номер координаты этих точек (j). Если для всех чисел x_i^j, $i = 1, \ldots, n$, при $x_{i_1}^j < x_{i_2}^j$ выполняется неравенство $y_{i_1}^j < y_{i_2}^j$ (или при $x_{i_1}^j < x_{i_2}^j$ выполняется неравенство $y_{i_1}^j > y_{i_2}^j$), то отображение $f\colon L \to f(L)$ оценивается как обратимое.

2. Проверка обратимости отображения f в окрестностях точек линии L (локальная обратимость). На основании теоремы об обратной функции такую проверку можно провести следующим образом. Для достаточно большого количества выбранных точек $x \in L$ с помощью разностных производных оцениваются Якобианы отображения f: $J(x) = \det\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}(x)\right)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Здесь i, j — координаты векторов, n — размерность фазового пространства динамической системы. Если все найденные оценки Якобианов отличны от нуля и имеют одинаковые знаки, то можно сделать вывод о том, что $J(x) \neq 0$ для всех $x \in L$ и, следовательно, об обратимости отображения f в некоторой окрестности каждой точки $x \in L$.

Укрупненный алгоритм оценки слабой структурной устойчивости дискретной динамической системы (полукаскада, задаваемого отображением f) с фазовым пространством $N' \in R^n$, определяемой непрерывно дифференцируемым отображением f можно записать следующим образом.

1. Нахождение дискретной траектории $\{f^t(x_0),\ t = 0, \ldots, T\}$ и линии L, в замкнутой окрестности N которой необходимо оценить слабую структурную устойчивость динамической системы.

2. Оценка обратимости отображения f окрестности линии L с использованием приведенного выше алгоритма.

3. Оценка (локализация) цепно-рекуррентного множества $R(f, N)$. При этом, в силу очевидного включения $R(f, N_1) \subseteq \subseteq R(f, N_2)$ при $N_1 \subset N_2 \subset N'$, в качестве компакта N можно ис-

пользовать любой параллелепипед, лежащий в N' и содержащий внутри себя L.

4. В случае, если $R(f, N) = \varnothing$, делается вывод о слабой структурной устойчивости исследуемой динамической системы в N.

Этот укрупненный алгоритм применим и для оценки слабой структурной устойчивости непрерывной динамической системы (потока f), если в качестве линии L использовать траекторию $L = \{f^t(x_0),\, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ динамической системы и пропустить п. 2 укрупненного алгоритма. При этом в качестве отображения f в п. 3 можно использовать отображение f^t для некоторого фиксированного t $(t > 0)$.

1.3. Методы синтеза и выбора (в среде заданного конечного набора алгоритмов) оптимальных законов параметрического регулирования развития экономической системы страны, условия существования решения соответствующих задач вариационного исчисления и условия влияния на них неуправляемых параметров

1.3.1. Исследование условий существования решения задачи вариационного исчисления по синтезу и выбору оптимальных законов параметрического регулирования непрерывной детерминированной динамической системы

Постановки задач вариационного исчисления по синтезу и выбору оптимальных законов параметрического регулирования непрерывной детерминированной динамической системы. Вернемся к рассмотрению нелинейной динамической системы вида (1.1.1):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \lambda),$$

с начальным условием (1.1.2):

$$x(t_0) = x_0.$$

Зададим критерий оптимальности, подлежащий максимизации:

$$K = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} F[x(t)]\, dt, \tag{1.3.1}$$

где функция $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

Имеются фазовые ограничения на систему:

$$x(t) \in X(t), \quad t \in (t_0, t_0 + T]. \tag{1.3.2}$$

В рассматриваемых далее задачах предполагаются также следующие ограничения на управление:

$$u(t) \in U(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \tag{1.3.3}$$

Здесь $X(t) \subset R^m$, $U(t) \subset R^q$ — компактные множества с непустыми внутренностями, множества $X = \bigcup\limits_{t\in(t_0,t_0+T]} X(t)$ и $U = \bigcup\limits_{t\in[t_0,t_0+T)} U(t)$ ограничены.

Сформулируем следующую вариационную задачу, называемую задачей вариационного исчисления по синтезу оптимального закона параметрического регулирования непрерывной детерминированной динамической системы.

Задача 1.3.1. При известном векторе неуправляемых параметров λ найти закон параметрического регулирования u, удовлетворяющей условию (1.3.3), чтобы соответствующее ему решение динамической системы (1.1.1), (1.1.2) удовлетворяло условию (1.3.2) и доставляло максимум функционалу (1.3.1).

Во второй задаче вновь рассматривается управляемая непрерывная динамическая система, описываемая уравнениями (1.1.1), (1.1.2) при наличии фазовых ограничений (1.3.2). Однако в отличие от предшествующего случая управление выбирается из набора заданных законов регулирования:

$$u_j(t) = G_j(v, x(t)), \quad t \in (t_0, t_0 + T], \quad j = 1, \ldots, r, \tag{1.3.4}$$

где $v = (v^1, \ldots, v^l)$ — вектор настраиваемых коэффициентов (управляющих параметров) закона регулирования. Будем предполагать, что вектор-функция $G_j(v, x)$ удовлетворяет условию Липшица и линейным ограничениям на степень роста:

$$|G_j(v, x)| \leqslant c(1 + |x|), \tag{1.3.5}$$

где c — некоторая положительная константа.

На эти настраиваемые коэффициенты налагаются ограничения

$$v \in V, \tag{1.3.6}$$

где V — некоторое компактное подмножество пространства R^l. Кроме того, предполагается, что управляющие параметры v должны быть такими, чтобы соответствующий закон регулирования (1.3.5) удовлетворял условию (1.3.3), т. е. выполнялось бы включение

$$G_j(v, x_j(t)) \in U(t), \quad t \in (t_0, t_0 + T], \tag{1.3.7}$$

где $x_j(t)$ — решение задачи (1.1.1), (1.1.2) при выбранных значениях v, λ и j-м законе параметрического регулирования.

Рассматриваются критерии оптимальности

$$K_j = K_j(v, \lambda) = \int_{t_0}^{t_0+T} F[x_j(t)]\, dt. \tag{1.3.8}$$

Ставится следующая экстремальная задача, называемая задачей вариационного исчисления по выбору (в среде заданного конечного набора алгоритмов) оптимального закона параметрического регулирования непрерывной детерминированной динамической системы.

Задача 1.3.2. При известном векторе неуправляемых параметров $\lambda \in \Lambda$ для каждого из r законов регулирования (1.3.4) найти такой вектор настраиваемых коэффициентов v, чтобы соответствующее ему решение $x = x_j$ задачи (1.1.1), (1.1.2) с законом регулирования $u = u_j$, определяемого по формуле (1.3.4), удовлетворяло условиям (1.3.2), (1.3.6), (1.3.7) и доставляло максимум функционалу (1.3.8) с последующим выбором наилучшего из найденных оптимальных законов регулирования, т. е. такого, которому соответствует наибольшее значение критерия оптимальности.

Условия существования решения задачи вариационного исчисления по синтезу оптимального закона параметрического регулирования непрерывной детерминированной динамической системы. Вернемся к исследованию задачи 1.3.1.

Будем рассматривать законы параметческого регулирования $u = u(t) = (u^1(t), \ldots, u^q(t))$, принадлежащие подмножеству W пространства Соболева $[H^1(0,T)]^q$ вектор-функций, удовлетворяющих соотношениям

$$u(t) \in U(t), \quad |\dot{u}(t)| \leqslant c, \quad t \in (0,T). \tag{1.3.9}$$

Здесь $U(t)$ — определенные выше компактные множества в R^q, а c — некоторая положительная константа.

Множеством допустимых управлений W_{ad} назовем совокупность таких законов регулирования $u \in W$, для которых существует решение системы (1.1.1), (1.1.2), удовлетворяющее включению (1.3.2).

Задача 1.3.1 состоит в отыскании такого допустимого закона регулирования $u(t)$, которое максимизирует на множестве W_{ad} функционал (1.3.1).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3.1. *При сделанных выше предположениях задача* 1.3.1 *разрешима, если множество* W_{ad} *допустимых управлений не пусто.*

Доказательство приведено в приложении А.

Условия существовании решения задачи вариационного исчисления по выбору (в среде заданного конечного набора алгоритмов) оптимального закона параметрического регулирования непрерывной детерминированной динамической системы. Рассмотрим задачу 1.3.2 вариационного исчисления по выбору в среде заданного конечного набора алгоритмов оптимальных законов параметрического регулирования на базе непрерывной динамической системы (1.1.1) с начальными условиями (1.1.2).

Для j-го закона регулирования (1.3.4) система (1.1.1) описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), G_j(v, x(t)), \lambda) \tag{1.3.10}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.3.11}$$

Здесь функция f удовлетворяет ограничениям, определенным в начале § 1.1, а функции G_j растут по модулю не быстрее линейных функций и удовлетворяют условию Липшица. На вектор настраиваемых коэффициентов налагается ограничение (1.3.6): $v \in V$.

Поскольку после переобозначения уравнение (1.3.10) может быть сведено к уравнению (1.1.1) с теми же функциональными свойствами, можно заключить, что решение рассматриваемой системы, понимаемое в том же смысле, что и выше, существует и единственно. Поскольку оно определяется конкретными значениями номера закона регулирования j и настраиваемого коэффициента v, в дальнейшем мы будем использовать для него обозначение $x = x_j^v(t)$.

Для любых $j = 1, \ldots, r$ определяется множество допустимых значений настраиваемого коэффициента V_{ad}^j, состоящее из таких значений v, удовлетворяющих условию (1.3.6), для которых соответствующее решение задачи (1.3.10), (1.3.11) удовлетворяет включениям

$$G_j(v, x_j^v(t)) \in U(t), \quad t \in (t_0, t_0 + T], \tag{1.3.12}$$

$$x_j^v(t) \in X(t), \quad t \in (t_0, t_0 + T]. \tag{1.3.13}$$

Задача 1.3.2 состоит в выборе наилучшего из законов регулирования, т. е. такого номера закона j, при котором максимум функционала (1.3.8) K_j на множестве V_{ad}^j окажется наибольшим.

Теорема 1.3.2. *При сделанных выше предположениях и в случае непустоты множеств V_{ad}^j задача* 1.3.2 *разрешима.*

Доказательство приведено в приложении А.

1.3.2. Исследование условий существования решения задач вариационного исчисления по синтезу и выбору оптимальных законов параметрического регулирования дискретной детерминированной динамической системы

Постановки задач вариационного исчисления по синтезу и выбору оптимальных законов параметрического регулирования дискретной детерминированной динамической системы. Рассматривается дискретная стохастическая управляемая система

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), \lambda), \quad t = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.3.14}$$

$$x(0) = x_0, \tag{1.3.15}$$

где t — время, принимающее неотрицательные целочисленные значения, n — фиксированное натуральное число; $x = x(t) \in \in R^m$ — функция состояния системы (1.3.14), (1.3.15), вектор-функция дискретного аргумента; $x_0 \in R^m$ — начальное состояние системы, детерминированный вектор; $u = u(t) \in R^q$ — вектор управляемых параметров, вектор-функция дискретного аргумента; $\lambda \in \Lambda \subset R^s$ — вектор неуправляемых параметров, Λ — открытое связное множество; f — заданная вектор-функция своих аргументов.

Задается критерий оптимальности, подлежащий максимизации:

$$K = \sum_{t=1}^{n} F_t(x(t)). \tag{1.3.16}$$

Здесь $F_t(x)$ — известные функции.

Имеются фазовые ограничения на систему:

$$x(t) \in X(t), \quad t = 1, \ldots, n. \tag{1.3.17}$$

В рассматриваемых далее задачах предполагаются также следующие ограничения на управление:

$$u(t) \in U(t), \quad t = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.3.18}$$

Здесь $X(t) \subset R^m$, $U(t) \subset R^q$ — компактные множества с непустыми внутренностями.

Сформулируем следующую вариационную задачу, называемую задачей вариационного исчисления по синтезу оптимального закона параметрического регулирования дискретной детерминированной динамической системы.

Задача 1.3.3. При известном векторе неуправляемых параметров λ найти закон параметрического регулирования u, удовлетворяющий условию (1.3.18), чтобы соответствующее ему решение динамической системы (1.3.14), (1.3.15) удовлетворяло условию (1.3.17) и доставляло максимум функционалу (1.3.16).

В следующей задаче вновь рассматривается управляемая дискретная детерминированная динамическая система, описываемая уравнениями (1.3.14), (1.3.15) при наличии фазовых ограничений (1.3.17). При этом управление выбирается из семейства заданных законов регулирования:

$$u_j(t) = G_j(v, x(t)), \quad t = 0, 1, \ldots, n-1, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{1.3.19}$$

Здесь G_j — вектор-функция своих аргументов, удовлетворяющая условию Липшица, $v = (v^1, \ldots, v^l)$ — вектор настраиваемых коэффициентов закона регулирования G_j.

На эти коэффициенты налагаются следующие ограничения:

$$v \in V, \tag{1.3.20}$$

где V — некоторое компактное подмножество пространства R^l. Кроме того, предполагается, что параметры закона управления должны быть такими, чтобы выполнялось включение

$$G_j(v, x_j^v(t)) \in U(t), \quad t = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.3.21}$$

Здесь $x_j^v(t)$ — решение задачи (1.3.14), (1.3.15) при выбранных значениях v, α и j-м законе параметрического регулирования.

Рассматриваются критерии оптимальности

$$K_j = K_j(v, \lambda) = \sum_{t=1}^{n} F_t(x_j^v(t)). \tag{1.3.22}$$

Сформулируем следующую задачу, называемую задачей вариационного исчисления по выбору (в среде заданного конечного набора алгоритмов) оптимального закона параметрического регулирования дискретной детерминированной динамической системы.

Задача 1.3.4. При известном векторе неуправляемых параметров $\lambda \in \Lambda$ найти для каждого из r законов регулирования из набора (1.3.19) такой вектор управляющих параметров v, чтобы соответствующее ему решение $x = x_j$ задачи (1.3.14), (1.3.15) с этим законом регулирования удовлетворяло условиям (1.3.17), (1.3.20), (1.3.21) и доставляло максимум функционалу (1.3.22).

Условия существования решения задачи вариационного исчисления по синтезу оптимального закона параметрического регулирования дискретной детерминированной динамической системы. Множеством допустимых управлений W_{ad} назовем совокупность таких законов регулирования u, удовлетворяющих (1.3.18), для которых решение системы (1.3.14), (1.3.15) удовлетворяет включению (1.3.17).

Задача 1.3.3 состоит в отыскании такого допустимого закона регулирования u, которое максимизирует на множестве W_{ad} функционал (1.3.16).

Справедливо следующее утверждение, являющееся естественным развитием классической теоремы Вейерштрасса существования экстремума непрерывной функции на отрезке.

Теорема 1.3.3. *Пусть в задаче* 1.3.3 *вектор-функция f непрерывна по совокупности аргументов, множества $X(t)$, $U(t)$ замкнуты и ограничены для всех определенных t, функция $F_t(x)$ непрерывна. Тогда, если множество W_{ad} допустимых управлений не пусто, то задача* 1.3.3 *имеет решение.*

Доказательство приведено в приложении А.

Условия существовании решения задачи вариационного исчисления по выбору (в среде заданного конечного набора алгоритмов) оптимального закона параметрического регулирования дискретной детерминированной динамической системы. Рассмотрим теперь сформулированную выше задачу 1.3.4.

Обозначим через x_j^v решение системы (1.3.14), (1.3.15) для выбранного j-го закона параметрического регулирования (1.3.19), его настраиваемого коэффициента v и параметра λ:

$$x_j^v(t+1) = f(x_j^v(t), G_j(v, x_j^v(t)), \lambda), \quad t = 0, 1, \ldots, n-1, \quad (1.3.23)$$

$$x_j^v(t_0) = x_0. \quad (1.3.24)$$

Как и в теореме 1.3.2, определим множество допустимых значений V_{ad}^j, состоящее из таких значений v, удовлетворяющих ус-

ловию (1.3.20), для которых соответствующее решение задачи (1.3.23), (1.3.24) удовлетворяет включениям

$$G_j(v, x_j^v(t)) \in U(t), \quad t = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.3.25}$$

$$x_j^v(t) \in X(t), \quad t = 1, \ldots, n. \tag{1.3.26}$$

Теорема 1.3.4. *Предположим, что в задаче* 1.3.4 *функции* f, G_j *и* F_t *непрерывны по совокупности аргументов. Тогда в случае непустоты множества* V_{ad}^j *задача* 1.3.4 *разрешима.*

1.3.3. Исследование условий существования решения задач вариационного исчисления по синтезу и выбору оптимальных законов параметрического регулирования на базе дискретной стохастической динамической системы

Постановки задач вариационного исчисления по синтезу и выбору оптимальных законов параметрического регулирования дискретной стохастической динамической системы. Рассматривается дискретная стохастическая управляемая система вида

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), \alpha) + \xi(t), \quad t = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.3.27}$$

$$x(0) = x_0. \tag{1.3.28}$$

Здесь $x = x(t) \in R^m$ — функция состояния системы (1.3.27), (1.3.28), случайная вектор-функция дискретного аргумента (векторный случайный процесс); x_0 — начальное состояние системы, детерминированный вектор; $u = u(t) \in R^q$ — вектор управляемых параметров, вектор-функция дискретного аргумента; $\lambda \in R^s$ — вектор неуправляемых параметров, $\lambda \in \Lambda$, $\Lambda \subset R^s$ — заданное множество; $\xi = \xi(t) = (\xi^1(t), \ldots, \xi^m(t))$ — известный векторный случайный процесс, выражающий помехи (в качестве такового может выступать, например, гауссовский шум); f — известная вектор-функция своих аргументов.

Задается критерий оптимальности, подлежащий максимизации, который для данной задачи имеет вид

$$K = \mathrm{E}\left(\sum_{t=1}^{n} F_t(x(t))\right). \tag{1.3.29}$$

Здесь F_t — известные функции, E — математическое ожидание.

Имеются фазовые ограничения на систему:

$$\mathrm{E}[x(t)] \in X(t), \quad t = 1, \ldots, n, \tag{1.3.30}$$

где $X(t)$ — заданное множество.

В рассматриваемых далее задачах сохраняются определенные ранее ограничения на управление:

$$u(t) \in U(t), \quad t = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.3.31}$$

где $U(t) \subset R^q$ — заданное множество.

Сформулируем следующую вариационную задачу, называемую задачей вариационного исчисления по синтезу оптимального закона параметрического регулирования дискретной стохастической динамической системы.

Задача 1.3.5. При известном векторе неуправляемых параметров α найти закон параметрического регулирования u, удовлетворяющий условию (1.3.31), чтобы соответствующее ему решение динамической системы (1.3.27), (1.3.28) удовлетворяло условию (1.3.30) и доставляло максимум функционалу (1.3.29).

Во второй задаче параметрического регулирования дискретной динамической системы вновь рассматривается управляемая дискретная динамическая система с заданным аддитивным шумом, описываемая уравнениями (1.3.27), (1.3.28) при наличии фазовых ограничений (1.3.30). В этой задаче, как и в предыдущих задачах 1.3.2, 1.3.4, управление выбирается из семейства заданных законов регулирования:

$$\begin{gathered} u_j(t) = G_j(v, x(t)), \\ t = 0, 1, \ldots, n-1, \quad j = 1, \ldots, r, \end{gathered} \tag{1.3.32}$$

где G_j — известная вектор-функция своих аргументов, $v = (v^1, \ldots, v^l)$ — вектор параметров закона регулирования G_j.

На настраиваемые коэффициенты налагаются ограничения

$$v \in V, \tag{1.3.33}$$

где V — компактное пространства R^l. Кроме того, предполагается, что параметры закона управления должны быть такими, чтобы соответствующий закон регулирования (1.3.37) удовлетворял условию (1.3.36), т. е. выполнялось бы включение

$$\mathrm{E}[G_j(v, x_j^v(t))] \in U(t), \quad t = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.3.34}$$

Здесь x_j^v — решение задачи (1.3.32), (1.3.33) при выбранных значениях коэффициента v, неуправляемого параметра λ и j-м законе параметрического регулирования.

Рассматриваются критерии оптимальности

$$K_j = K_j(v, \lambda) = \mathrm{E}\left(\sum_{t=1}^{n} F_t(x_j^v(t))\right). \qquad (1.3.35)$$

Сформулируем следующую вариационную задачу, называемую задачей вариационного исчисления по выбору оптимального закона параметрического регулирования дискретной стохастической динамической системы.

Задача 1.3.6. При известном векторе неуправляемых параметров $\lambda \in \Lambda$ найти для каждого из r законов регулирования такой вектор настраиваемых коэффициентов v, чтобы соответствующее ему решение $x = x_j$ задачи (1.3.27), (1.3.28) с законом регулирования $u = u_j$, определяемого по формуле (1.3.32), удовлетворяло условиям (1.3.33), (1.3.34) и доставляло максимум функционалу (1.3.35) с последующим выбором наилучшего из найденных оптимальных законов регулирования, т. е. такого, которому соответствует наибольшее значение критерия оптимальности.

Условия существования решения задачи вариационного исчисления по синтезу оптимального закона параметрического регулирования дискретной стохастической динамической системы. Вернемся к исследованию разрешимости задачи 1.3.5. Определим множество допустимых управлений U_{ad} для исследуемой системы в виде совокупности таких законов регулирования $u(t)$, удовлетворяющих ограничению (1.3.31), для которых математическое ожидание $\mathrm{E}[x(t)]$ соответствующего решения стохастической системы удовлетворяет включению (1.3.30).

Теорема 1.3.5. *Пусть в задаче* 1.3.5 *при* $\lambda \in \Lambda$ *для любого* $t = 1, \ldots, n$ *случайные величины* $\xi(t)$ *являются абсолютно непрерывными и обладают нулевыми математическими ожиданиями, множества* $X(t)$, $U(t)$ *замкнуты и ограничены для всех* t, *функция* f *удовлетворяет условию Липшица, а функции* F_t *непрерывны по Липшицу. Функции* f *(для* $u \in U$ *и* $\lambda \in \Lambda$*) и* F_t *по модулю не превосходят некоторых линейных функций относительно* $|x|$. *Тогда, если множество допустимых управлений* U_{ad} *не пусто, то задача* 1.3.5 *разрешима.*

Доказательство приведено в приложении А.

Условия существовании решения задачи вариационного исчисления по выбору оптимального закона параметрического регулирования дискретной стохастической динамической системы. Рассмотрим теперь сформулированную выше задачу 1.3.6.

Обозначим через x_j^v решение системы (1.3.27), (1.3.28) для выбранного j-го закона параметрического регулирования (1.3.19), его настраиваемого коэффициента v и параметра α:

$$x_j^v(t+1) = f(x_j^v(t), G_j(v, x_j^v(t)), \lambda) + \xi(t), \quad t = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.3.36}$$

$$x_j^v(0) = x_0. \tag{1.3.37}$$

Для рассматриваемой задачи определим множество допустимых значений настраиваемых коэффициентов V_{ad}^j как множество, состоящее из таких значений $v \in V$, удовлетворяющих условию (1.3.33), для которых соответствующее решение задачи (1.3.27), (1.3.28) удовлетворяет включениям

$$\mathrm{E}[G_j(v, x_j^v(t))] \in U(t), \quad t = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.3.38}$$

$$\mathrm{E}[x_j^v(t)] \in X(t), \quad t = 1, \ldots n. \tag{1.3.39}$$

Задачу 1.3.6 будем называть нетривиальной, если соответствующее ей множество V_{ad}^j не пусто и содержит некоторое открытое множество для каждого $j = 1, \ldots, r$.

Теорема 1.3.6. *Пусть в задаче* 1.3.6 $\lambda \in \Lambda$, *множества* $U(t)$, $X(t)$, V *компактны, функции* f, G_f, F_t *удовлетворяют условию Липшица. Эти функции удовлетворяют также следующим ограничениям на рост: функции* $|f(x, G_j(v, x), \lambda)|$, $|F_t(x)|$ *не превосходят линейных относительно* $|x|$ *функций равномерно по* $v \in V$. *Случайная величина* $\xi(t)$ *является абсолютно непрерывной и имеет нулевое математическое ожидание. Тогда в случае непустоты множеств* V_{ad}^j *задача* 1.3.6 *имеет решение.*

Доказательство приведено в приложении А.

1.3.4. Исследование влияний изменения неуправляемых параметров (параметрических возмущений) на результаты решения задач вариационного исчисления по синтезу и выбору оптимальных законов параметрического регулирования. Ниже приводятся результаты исследования влияний изменения неуправляемых па-

раметров и точек бифуркации при параметрических возмущениях задач вариационного исчисления по синтезу и выбору (в среде заданного конечного набора алгоритмов) законов параметрического регулирования. Ограничения этих задач представлены фазовыми ограничениями и ограничениями в разрешенной форме.

Функционалы или фазовые ограничения, ограничения в разрешенной форме рассматриваемых задач часто зависят от значений векторного параметра. Исследования таких задач требуют, прежде всего, нахождения достаточных условий непрерывности оптимальных значений критериев оптимальности, рассматриваемых как функции от неуправляемых параметров.

При решении задач выбора (в среде заданного конечного набора алгоритмов) законов параметрического регулирования требуется определение бифуркационной точки, условий ее существования и анализа бифуркационного значения параметра. При параметрическом регулировании механизмов рыночной экономики нахождение экстремали соответствующей задачи и ее вид может зависеть от значений некоторых неуправляемых параметров и определение бифуркационного значения имеет практический смысл.

Исследование непрерывной зависимости оптимальных значений критериев задач вариационного исчисления по синтезу и выбору оптимальных законов параметрического регулирования от значений неуправляемых параметров. Следующие определение и лемма имеют вспомогательный характер для доказательства непрерывной зависимости оптимальных значений критерия сформулированных выше задач вариационного исчисления по синтезу оптимальных законов параметрического регулирования от значений неуправляемых параметров.

Определение 1.3.1. Пусть для семейства подмножеств $\{U_a\}$ некоторого множества U банахова пространства с параметром a из некоторого подмножества A евклидова пространства определено семейство функций $K_a(u),\ a \in A,\ u \in U_a$. Семейство $\{U_a\}$ назовем *K-непрерывным на множестве A*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при выполнении неравенства $|a - b| \leqslant \delta,\ a, b \in A$, для любой точки $u_a \in U_a$ найдется такая точка $u_b \in U_b$, что имеет место неравенство $|K_a(u_a) - K_a(u_b)| < \varepsilon$.

Согласно этому определению семейство множеств $\{U_a\}$ является K-непрерывным, если в случае достаточно близости параметра b к a для любого элемента из множества U_a найдется сколь

угодно близкий (по значению функций) к нему элемент множества U_b.

Лемма 1.3.1. *Пусть A и U — некоторые подмножества евклидова и банахова пространств соответственно U компакт; все элементы семейства замкнутых подмножеств $\{U_a\}$ лежат в U. Пусть отображение $(a, u) \to K_a(u)$ непрерывно на произведении $A \times U$. Пусть семейство подмножеств $\{U_a\}$ непрерывно во всех точках некоторой окрестности точки $a_0 \in A$. Тогда отображение $a \to \max\limits_{u \in U_a} K_a(u)$ является непрерывным в точке $a_0 \in A$.*

Доказательство приведено в приложении А.

Сформулируем теперь теорему о достаточных условиях непрерывной зависимости оптимальных значений критериев задач 1.3.1, 1.3.3, 1.3.5 от неуправляемого параметра.

Для всех упомянутых задач будем предполагать, что все множества $X(t)$, $U(t)$ компактны, множества $\bigcup\limits_{t \in (t_0, t_0+T]} X(t)$ и $\bigcup\limits_{t \in [t_0, t_0+T)} U(t)$ для задач 1.3.1, 1.3.3, 1.3.5 являются ограниченными; множества Λ связные и открытые. Предполагается также, что выполняются условия соответствующих теорем 1.3.1, 1.3.3, 1.3.5, которые гарантируют непрерывную зависимость рассматриваемых состояний системы $x_{u,\lambda}(t)$ (или $\mathrm{E}[x_{u,\lambda}(t)]$ для стохастических задач) и критериев оптимальности задач 1.3.1, 1.3.3, 1.3.5: $K = K(u, \lambda)$, от соответствующих значений управляемых (u) параметров (или законов управления) и неуправляемых (λ) параметров в определенных указанными теоремами множествах и с указанными метриками.

Теорема 1.3.7. *Пусть при любом $\lambda \in \Lambda$ выполняются условия теорем* 1.3.1, 1.3.3, 1.3.5. *Тогда оптимальные значения критериев соответствующих задач* 1.3.1, 1.3.3, 1.3.5 *являются непрерывными функциями параметра $\lambda \in \Lambda$.*

Доказательство приведено в приложении А.

Исследуем теперь условия непрерывной зависимости оптимальных значений критерия задач вариационного исчисления по выбору законов параметрического регулирования от неуправляемых параметров.

Теорема 1.3.8. *Пусть при любом $\lambda \in \Lambda$ выполняются условия теорем* 1.3.2, 1.3.4, 1.3.6. *Тогда для выбранного значения*

номера закона j оптимальные значения критериев K_j соответствующих задач 1.3.2, 1.3.4, 1.3.6 *являются непрерывными функциями параметра* $\lambda \in \Lambda$.

Доказательство приведено в приложении А.

Следствие 1.3.1. При выполнении условий теоремы 1.3.8 оптимальные значения критериев задач 1.3.2, 1.3.4, 1.3.6 являются непрерывными функциями параметра $\lambda \in \Lambda$.

Доказательство приведено в приложении А.

Исследование точек бифуркации экстремалей задач вариационного исчисления по выбору законов параметрического регулирования. Введем следующее определение, характеризующее такие значения неуправляемого параметра $\lambda \in \Lambda$, при которых возможна замена одного оптимального закона регулирования на другой.

Определение 1.3.2. Параметр $\lambda \in \Lambda$ назовем *точкой бифуркации экстремалей* для задачи 1.3.2, 1.3.4 или 1.3.6, если существуют два различных номера законов регулирования $i, j \in \in \{1, \ldots, r\}$ таких, что справедливо соотношение

$$\max_{v \in V^i_{ad,\lambda}} K_i(v, \lambda) = \max_{v \in V^j_{ad,\lambda}} K_j(v, \lambda) = \max_{j=1,\ldots,r} \max_{v \in V^j_{ad,\lambda}} K_j(v, \lambda).$$

При этом дополнительно требуется, чтобы в любой окрестности точки λ нашлась такая точка $\lambda_1 \in \Lambda$, для которой $\max\limits_{j=1,\ldots,r} \max\limits_{v \in V^j_{ad,\lambda_1}} K_j(v, \lambda_1)$ достигался бы для единственного значения j номера закона.

Следующая теорема дает достаточные условия для существования точки бифуркации экстремалей рассматриваемых вариационных задач по выбору закона параметрического регулирования в заданной конечной среде алгоритмов для случаев непрерывной детерминированной, или дискретной детерминированной, или стохастической динамической системы.

Теорема 1.3.9. *Пусть при любом* $\lambda \in \Lambda$, *где* Λ — *открытое связное множество, выполняются условия теорем* 1.3.2, 1.3.4 *или* 1.3.6 *и существует два значения параметра* λ_0 *и* λ_1 ($\lambda_0 \neq \lambda_1$; $\lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda$), *для которых решения соответствующих задач выбора оптимальных законов параметрического регулирования достигаются для двух различных законов* G_{j_0}, G_{j_1}

$(j_0 \neq j_1)$ *из заданного конечного набора, т. е.*

$$\max_{\substack{j=1,\ldots,r \\ j\neq j_0}} \max_{v\in V^j_{ad,\lambda_0}} K_j(v,\lambda_0) < \max_{v\in V^{j_0}_{ad,\lambda_0}} K_{j_0}(v,\lambda_0),$$

$$\max_{\substack{j=1,\ldots,r \\ j\neq j_1}} \max_{v\in V^j_{ad,\lambda_1}} K_j(v,\lambda_1) < \max_{v\in V^{j_1}_{ad,\lambda_1}} K_{j_1}(v,\lambda_1).$$

Тогда имеется хотя бы одна точка бифуркации экстремалей задачи 1.3.2, 1.3.4 *или* 1.3.6.

Доказательство приведено в приложении А.

Следующее утверждение является непосредственным следствием теоремы 1.3.9.

Следствие 1.3.2. Пусть при любом $\lambda \in \Lambda$, где Λ — открытое связное множество, выполняются условия теорем 1.3.2, 1.3.4 или 1.3.6 и при значении $\lambda = \lambda_0$ регулирование с помощью закона G_{j_0} из заданного конечного набора законов параметрического регулирования дает решение задачи 1.3.2, 1.3.4 или 1.3.6, а при $\lambda = \lambda_1$ $(\lambda_0 \neq \lambda_1;\ \lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda)$ регулирование с помощью этого закона не дает решение рассматриваемой задачи 1.3.2, 1.3.4 или 1.3.6. Тогда имеется хотя бы одна точка бифуркации экстремалей указанной задачи.

Доказательство приведено в приложении А.

В завершение приведем численный алгоритм нахождения бифуркационного значения параметра λ одной из задач 1.3.2, 1.3.4 или 1.3.6 по выбору (в среде заданного конечного набора алгоритмов) законов параметрического регулирования и при выполнении условий теоремы 1.3.9.

Соединим точки λ_0 и λ_1 гладкой кривой $S \subset \Lambda$. Разобьем эту кривую на n равновеликих частей с достаточно малым шагом. Для полученных значений (точек) $\beta_i \in S,\ i = 0, 1, \ldots, n,\ \beta_0 = \lambda_0,$ $\beta_n = \lambda_1$ определяются номера законов параметрического регулирования j_i, доставляющих решение задачи 1.3.2, 1.3.4 или 1.3.6 при значении параметра $\lambda = \beta_i$. Затем находится первое значение i, при котором соответствующий номер закона отличается от j_0. В этом случае бифуркационное значение параметра λ лежит на дуге (β_{i-1}, β_i) кривой S.

Для найденного участка кривой алгоритм определения точки бифуркации с заданной точностью ε состоит в применении метода половинного деления. В результате находится точка $\gamma \in (\beta_{i-1}, \beta_i)$, с одной стороны от которой на этой дуге в пределах отклонения ε

от значения γ оптимальным законом является G_{j_0}, а с другой — в пределах отклонения ε от значения γ этот закон оптимальным не является. Из следствия 1.3.2 следует, что существует точка бифуркации экстремалей решаемой задачи на указанной дуге.

1.4. Алгоритм применения теории параметрического регулирования и правила взаимодействия лиц, принимающих решения по выработке и осуществлению эффективной государственной экономической политики на базе информационной системы поддержки принятия решений

1.4.1. Алгоритм применения теории параметрического регулирования. Применение разрабатываемой теории параметрического регулирования эволюции рыночной экономики для выработки и осуществления эффективной государственной экономической политики представляется следующим образом [53, 54, 7, 11].

1. Выбор, на базе соответствующей оценки экономического состояния страны в рамках фаз экономического цикла, направления (стратегии) экономического развития страны.

2. Выбор из библиотеки математических моделей экономической системы одной или нескольких математических моделей, отвечающих задачам экономического развития.

3. Оценка адекватности математических моделей поставленным задачам. Калибровка математических моделей (параметрическая идентификация и ретроспективный прогноз по текущим показателям эволюции экономической системы) и дополнительная верификация выбранных математических моделей с помощью эконометрического анализа и политэкономической интерпретации матриц чувствительности.

4. Оценка (при необходимости) показателей устойчивости и/или структурной устойчивости (грубости) математических моделей без параметрического регулирования, согласно выше приведенным методам оценки показателей устойчивости и условий грубости. В случае устойчивости и/или структурной устойчивости математическую модель можно использовать, после эконометрического анализа и политэкономической интерпретации результатов исследования грубости, для решения задачи выбора оптимальных законов регулирования экономических параметров и прогнозирования макроэкономических показателей.

5. Если математическая модель неустойчива или негруба (структурно неустойчива), то она переводится в резервный раздел библиотеки моделей.

6. Выбор оптимальных законов регулирования экономических параметров.

7. Оценка (при необходимости) показателей устойчивости и/или структурной устойчивости (грубости) математических моделей с выбранными законами параметрического регулирования, согласно выше приведенным методам оценки условий грубости. Если математическая модель при выбранных законах параметрического регулирования устойчива и/или структурно устойчива, то полученные результаты, после соответствующих эконометрического анализа, политэкономической интерпретации и согласования с предпочтениями лиц принимающих решения, можно принять для практического применения. Если математическая модель при выбранных законах параметрического регулирования неустойчива и/или структурно неустойчива, то уточняется решение по выбору законов параметрического регулирования. Уточненные решения по выбору законов параметрического регулирования также подлежат рассмотрению по выше указанной схеме.

8. Исследование зависимости выбранных оптимальных законов параметрического регулирования от изменения неуправляемых параметров экономической системы. При этом возможна замена одних оптимальных законов параметрического регулирования на другие.

Данная укрупненная схема принятия решений по выработке и осуществлению эффективной государственной экономической политики через выбор оптимальных значений экономических параметров должна быть поддержана современными информационными технологиями исследования и имитационного моделирования. Указанная укрупненная схема принятия решений представлена ниже на рис. 1.4.1.

Как известно, принятие решений в рассматриваемой сфере является процессом [25, с. 126, 146], в котором Г. Саймон [23] выделяет три этапа: поиск информации, поиск и нахождение альтернатив и выбор лучшей альтернативы.

Информационная система (ИСППР) для приложений на базе теории параметрического регулирования предназначена для поддержки принятия решений лицами, принимающими решений в сфере экономической политики в рамках малого открытого национального хозяйства на базе теории параметрического регулирования.

Предметами взаимодействия лиц, принимающих решения, с ИСППР являются:

1) оценка состояния национального хозяйства и выбор направления экономической политики;

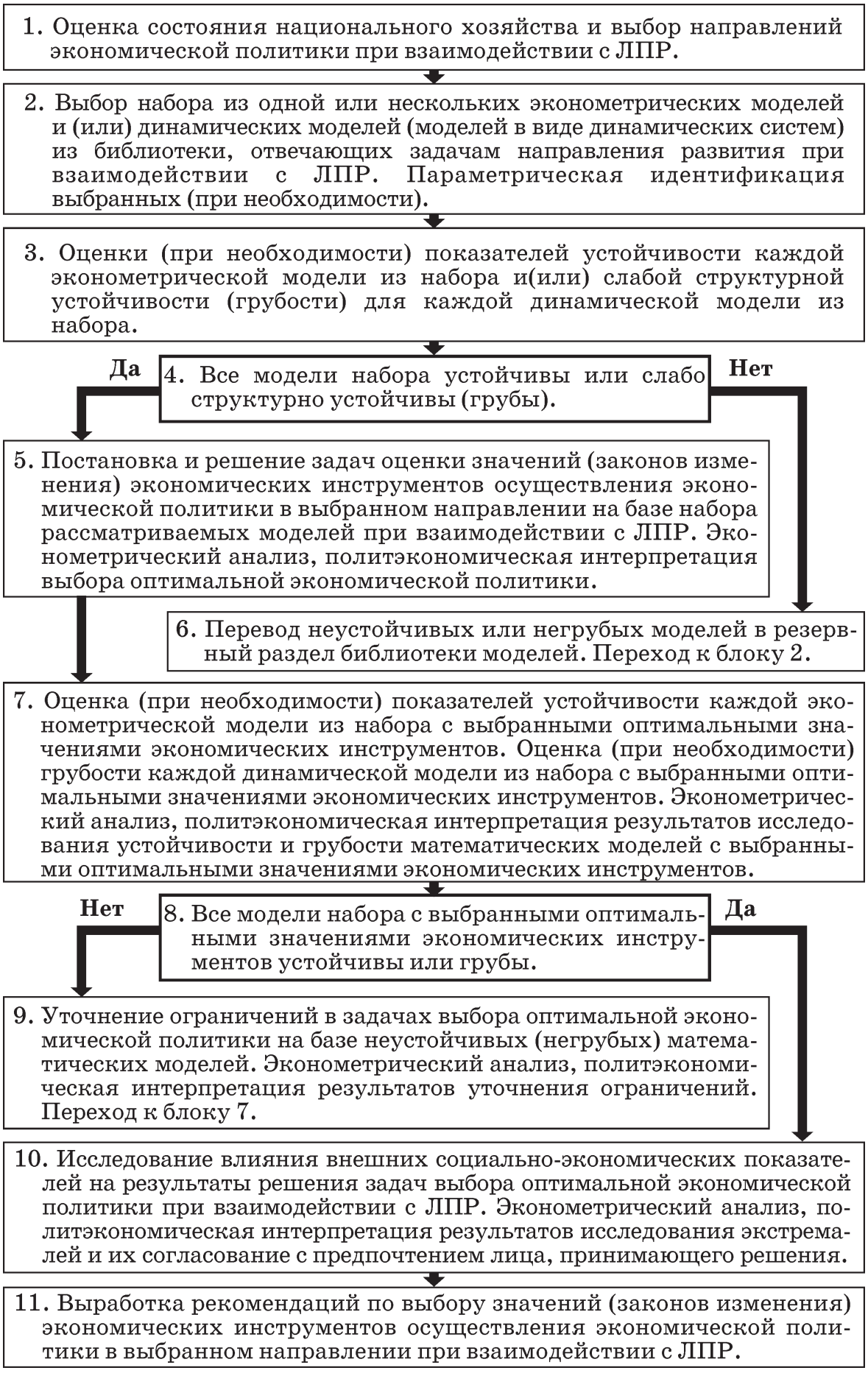

Рис. 1.4.1. Укрупненная схема принятия решений по выработке и осуществлению эффективной государственной экономической политики через выбор оптимальных значений экономических инструментов

2) выбор одной или нескольких экономических моделей и/или динамических моделей (в виде динамических систем) из библиотеки математических моделей, отвечающих задачам экономической политики;

3) постановка и решение задач оценки значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении;

4) исследование влияний значений внешних социально-экономических показателей на результаты решения задач и оценки значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении;

5) выработка рекомендаций по выбору значений экономических инструментов по осуществлению экономической политики по выбранному направлению.

1.4.2. Правила взаимодействия лиц, принимающих решения по выработке и осуществлению эффективной государственной экономической политики на базе информационной системы поддержки принятия решений. Рассмотрим правила взаимодействия ЛПР с ИСППР на уровнях выше перечисленных задач.

Вопросы взаимодействия ЛПР с ИСППР на уровне задачи «Оценка состояния национальной экономики и выбор направления экономической политики». Часть рассматриваемой задачи — оценка состояния национальной экономики — образно, по Г. Саймону, связана с этапом поиска информации для структуризации проблемы выбора направления экономической политики и сводится к формированию необходимой исходной информации на базе ИСППР для указанной проблемы в режиме человеко-машинных процедур взаимодействия ЛПР с ИСППР.

Правила взаимодействия ЛПР с ИСППР на рассматриваемом этапе сводятся к следующим шагам.

Шаг 1. Фаза расчетов. Администратор(ы) ИСППР представляет ЛПР исходную информацию, получаемую от ИСППР в виде, например, равновесных значений кредитной ставки i, валового национального дохода y на рынках благ, денег по годам, характеризующих точки эффективного спроса и показатели состояния равновесия на базе модели общеэкономического равновесия Кейнса по годам; показателей состояния равновесия национального хозяйства на базе модели открытой экономики маленькой страны по годам и данных по годовым фактическим значениям показателей национальной экономики в рамках их равновесных значений на соответствующих макроэкономических рынках; причин и

характеристик конъюнктурных циклов в экономике; показателей деятельности экономических агентов, функционирования национальной экономики за истекший период и в среднесрочном периоде прогнозирования на базе различных вычислимых моделей общего равновесия и информации, получаемой на базе других математических моделей национального хозяйства.

Шаг 2. Фаза анализа ЛПР. ЛПР, оценивая представленную информацию, определяет, является ли она приемлемой; если да, то процедура взаимодействия ЛПР с ИСППР завершена, в противном случае ЛПР формирует новые запросы по требуемой информации.

Шаг 3. Фаза расчетов. Администратор(ы) ИСППР при возможности обеспечения запроса по новой информации, представляет (возможно осуществляет действия с ЛПР) на базе работы с ИСППР запрашиваемую информацию.

Процесс взаимодействия ЛПР с ИСППР в рамках шагов 1–3 продолжается до тех пор, пока ЛПР не получит приемлемую информацию.

Другая часть вышеуказанной задачи — выбор направления экономической политики — решается в 2 этапа. На первом этапе на основе информации, полученной от ИСППР, и информации по результатам мониторинга состояний социально-экономической сферы, внутриполитической стабильности и в области обеспечения национальной безопасности проблема выбора направления экономической политики структурируется в виде древовидного разомкнутого графа для многокритериального выбора во взаимодействии с ЛПР в виде следующих процедур.

Шаг 1. Администратор(ы) ИСППР представляет на основе информации, полученной от ИСППР, результатов мониторинга состояний национальной экономики и свойств древовидного разомкнутого графа — дерева целей в рамках соподчиненности, развертываемости, соотносительной важности [23] — версию декомпозиции главной цели на подцели. При этом признаком завершения декомпозиции главной цели является формулировка таких целей, которые дальше не расчленяются и дают конечные результаты, определенные главной целью.

Шаг 2. ЛПР, оценивая представленную версию дерева целей, определяет, является ли она приемлемой, в противном случае ЛПР формирует свои замечания и пожелания по уточнению представленной версии дерева целей.

Шаг 3. Администратор(ы) ИСППР уточняет начальную версию дерева целей в соответствии с замечаниями и пожеланиями

ЛПР и представляет обновленную версию дерева целей по проблеме выбора направлении экономической политики.

Шаги 2 и 3 повторяются до принятия согласованной с ЛПР версии дерева целей проблемы выбора направления экономической политики.

Второй этап решения задачи выбора направления экономической политики сводится к принятию решения на базе дерева целей через взаимодействия ЛПР с администратором(ами) ИСППР в рамках следующих шагов, реализуемых одним из методов анализа иерархий или методов парных сравнений (типа ELECTRE I, ELECTRE II, ELECTRE III и др.) с соответствующими средствами оценки результатов взаимодействия с ЛПР.

Шаг 1. Ранжирование целей каждого уровня по относительной важности по достижению цели более высокого уровня.

Шаг 2. Оценка значимости каждой цели по отношению к цели более высокого уровня и по отношению к главной цели. При этом сумма коэффициентов значимости целей каждого уровня должна быть равной 1 или 100.

Шаг 3. Оценка коэффициентов значимости данной цели по отношению к главной цели.

Шаг 4. Выбор направления экономической политики на базе результатов шагов 1–3.

Вопросы взаимодействия ЛПР с ИСППР на уровне задачи «Выбор одной или нескольких экономических моделей и/или динамических моделей (в виде динамических систем) из библиотеки математических моделей, отвечающих задачам экономической политики». Решение указанной задачи сводится к принятию решения через взаимодействие ЛПР с администратором(ами) ИСППР в рамках следующих шагов.

Шаг 1. Администратор(ы) ИСППР на базе результатов выбора направления экономической политики предлагает из библиотеки математических моделей набор математических моделей (одну модель), отвечающих задачам выбранного направления государственной политики.

Шаг 2. ЛПР, оценивая предложенный набор математических моделей (одну модель), определяет, является ли он приемлемым; если да, то процедура взаимодействия ЛПР с ИСППР завершена, в противном случае ЛПР вносит новые запросы в рамках выбора набора математических моделей (одной модели).

Шаг 3. Администратор(ы) ИСППР при возможности реализации запроса ЛПР представляет ЛПР новую версию набора математических моделей (одной модели) из библиотеки.

Процесс взаимодействия ЛПР с ИСППР продолжается в рамках шагов 1–3 до тех пор, пока ЛПР не получит приемлемый набор математических моделей (одну модель).

Вопросы взаимодействия ЛПР с ИСППР на уровне задачи «Постановка и решение задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении». Часть рассматриваемой задачи — постановка задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении — связана с согласованием ее на уровне критериев и ограничений на область изменения экономических инструментов и сводится к принятию согласованных решений через взаимодействия администратора(ов) ИСППР с ЛПР на уровне следующих шагов.

Шаг 1. Администратор(ы) ИСППР на базе выбранного направления экономической политики и согласованной версии набора математических моделей (одной модели) предлагает ЛПР постановку задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении.

Шаг 2. ЛПР, оценивая предложенную постановку задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении, определяет, является ли она приемлемой по критериям и ограничениям; если да, то процедура взаимодействия ЛПР с ИСППР завершена, в противном случае ЛПР вносит замечания и пожелания по критериям и ограничениям сформированной задачи.

Шаг 3. Администратор(ы) ИСППР представляет новую постановку задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении с учетом исходных значений и пожеланий ЛПР по критериям и ограничениям исходной постановки задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении.

Процесс взаимодействия ЛПР с ИСППР продолжается до тех пор, пока постановка задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении не получит одобрение ЛПР.

Другая часть вышеуказанной задачи — решение задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осу-

ществления экономической политики в выбранном направлении (далее сокращенно: решение задачи оценок значений) — решается в два этапа.

На первом этапе на основе взаимодействия ЛПР с ИСППР выбирается метод решения сформированной задачи (если сформированная задача является многокритериальной) оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении в рамках следующих процедур.

Шаг 1. Администратор(ы) ИСППР предлагает ЛПР конкретный метод на базе сформированной задачи (решение задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении) и предварительных оценок характеристик методов поддержки принятия решения в классах:

— методы поиска решений без участия ЛПР;

— методы, использующие предпочтения ЛПР для построения правила выбора единственного или небольшого числа парето-эффективных решений;

— интерактивные процедуры решения задачи с участием ЛПР;

— методы, основанные на аппроксимации паретовой границы и информировании о ней ЛПР в том или ином виде; далее ЛПР указывает наиболее предпочтительную критериальную точку на паретовой границе; для этой критериальной точки находят предпочтительные решение.

Методы первых двух классов основываются на построение решающего правила, т. е. правила нахождения одного или нескольких решений из допустимого множества. Отличие первого класса методов от второго состоит в том, что в первом классе решающее правило строится без участия ЛПР, а в методах второго класса используется информация о предпочтениях ЛПР.

Шаг 2. ЛПР, оценивая предложенный метод решения сформированной задачи (решение задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении), определяет, является ли он приемлемым, если да, то процедура взаимодействия ЛПР с ИСППР завершена, в противном случае ЛПР вносит предложение по выбору метода решения сформированной задачи.

Шаг 3. Администратор(ы) ИСППР иллюстрирует применение предложенного ЛПР метода решения сформированной задачи и оценки его характеристик.

Процесс взаимодействия ЛПР с ИСППР продолжается в рамках шагов 1–3 до тех пор, пока метод решения сформированной задачи не получит одобрение ЛПР.

Второй этап решения рассматриваемой задачи связан с решением сформированной задачи на основе выбранного метода с участием ЛПР. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример. Пусть на первом этапе решения задачи оценок значений на основе взаимодействия ЛПР с ИСППР выбраны методы, использующие предпочтения ЛПР для построения правила выбора единственного или небольшого числа парето-эффективных решений определенной ранее многокритериальной задачи, и в качестве одного из таких методов выбран метод анализа иерархий [25].

Взаимодействие администраторов ИСППР с ЛПР при решении задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении, согласно методу анализа иерархий, осуществляется в рамках следующей схемы.

Шаг 1. Для определенных значений экзогенных параметров администратором(ами) ИСППР находится оценка множества Парето P решаемой многокритериальной задачи в виде конечного набора точек.

Шаг 2. ЛПР для набора критериев решаемой многокритериальной задачи определяет показатели относительной важности a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, m,\ j > i)$ для всех пар критериев (K_i, K_j) рассматриваемой многокритериальной задачи.

Шаг 3. Администратором(ами) ИСППР методом анализа иерархий рассчитываются веса W_i линейной функции полезности вида $U(K_1, K_2, \ldots, K_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} W_i K_i$.

Шаг 4. Администратором(ами) ИСППР в найденном множестве P определяется точка (набор точек) P^+, доставляющая максимум для функции U.

Шаг 5. ЛПР, оценивая представленную точку (набор точек) P^+ и соответствующие оценки значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении, определяет, является ли она приемлемой (парето-эффективные решения). В противном случае ЛПР формирует новый набор показателей относительной важности a_{ij} пар критериев.

Шаги 2–5 повторяются до принятия согласованной с ЛПР версии парето-эффективных решений.

Шаг 6. В случае, если множество P^+ состоит из более чем одной точки, ЛПР выбирает единственную точку из P^+ и соответствующие оценки значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении.

Проиллюстрируем эти шаги на базе следующего вычислительного алгоритма для оценки парето-эффективного решения задачи многокритериальной оптимизации на основе метода параметрического регулирования (на примере вычислимой модели с сектором знаний и модели малой открытой экономики).

Объединенная модель, включающая в себя вычислимую модель общего равновесия с сектором знаний и эконометрическую модель малой открытой экономики, строится следующим образом.

Рассматриваются следующие две модели, составляющие объединенную модель.

Модель 1 — вариант вычислимой модели общего равновесия с сектором знаний, параметры которой определены на основе известных статистических данных РК за 2000–2010 гг. и решения соответствующей задачи параметрической идентификации. Расчеты по этой модели проводятся для 2011 г. Модель содержит ограничения на возможные допустимые значения ее эндогенных параметров.

Модель 2 — вариант модели малой открытой экономики, коэффициенты которой оценены на основе известных статистических данных РК за 2000–2010 гг. и прогнозируемых на 2011 г. значений внешних экономических показателей P^Z, i^Z, e^e и экономических инструментов M и G. Модель содержит ограничения на возможные равновесные значения ее эндогенных параметров Y, P, i, N.

В качестве векторного регулируемого параметра рассматривается вектор $p(p_1, p_2, p_3)$, где p_i, $i = 1, 2, 3$, есть величины дополнительных инвестиций в бюджеты 2011 г. секторов 1, 2, 3 модели 1 соответственно. При этом соответствующая величина $\Delta G = p_1 + p_2 + p_3$ добавляется к реальному объему государственных расходов G модели 2.

Для рассматриваемых далее двух- и трехкритериальной задач параметрического регулирования определим следующие 3 критерия.

1. Нормированная расчетная величина ВВП страны на 2011–2015 гг. для модели 1: $K_1 = Y(p)/Y_0 \to \max$.

2. Нормированная расчетная величина экспорта благ 2011 г. для модели 2: $K_2 = Q_{ex}(p)/Q_{ex0} \to \max$.

3. Нормированная расчетная величина потребления импортных благ 2011 г. (со знаком «минус») для модели 2: $K_3 = -Q_{im}(p)/Q_{im0} \to \max$.

Здесь Y_0, Q_{ex0}, Q_{im0} — некоторые базовые значения соответствующих переменных.

Сформулируем две многокритериальные задачи параметрического регулирования на базе объединенной модели.

Задача 1. Найти оценку множества Парето на плоскости (K_1, K_2) на базе моделей 1 и 2, критериев K_1 и K_2 при следующих ограничениях на регулируемые параметры:

$$p_1 \geqslant 0, \quad p_2 \geqslant 0, \quad p_3 \geqslant 0, \quad p_1+p_2+p_3 \leqslant p_m, \quad \Delta G \leqslant p_m. \quad (1.4.1)$$

Здесь p_m — максимальная величина дополнительных инвестиций из государственного бюджета в производящие сектора экономики.

Задача 2. Найти оценку множества Парето в пространстве (K_1, K_2, K_3) на базе моделей 1 и 2, критериев K_1, K_2, K_3 при ограничениях (1.4.1) на регулируемые параметры.

Опишем алгоритмы нахождения указанных в сформулированных задачах оценок множеств Парето с использованием метода уступок [25].

Алгоритм решения задачи 1.

Пусть расчетная идеальная точка значений критериев указанной задачи имеет координаты (K_1^*, K_2^*), где K_1^*, K_2^* — максимальные значения критериев для моделей 1 и 2 при решении соответствующих однокритериальных задач при ограничениях (1.4.1). Пусть при достижении значения критерия K_1^* первой модели значение критерия второй модели равно K_2^0, где $K_2^0 < K_2^*$ (в случае $K_2^0 = K_2^*$ двухкритериальная задача решена). Разделим числовой промежуток $[K_2^0, K_2^*]$ на m равных частей с шагом $h = (K_2^* - K_2^0)/m$, получим набор точек $K_2^i = K_2^0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Здесь $K_2^m = K_2^*$.

Для каждого $i = 0, 1, \ldots, m-1$ решим следующие вспомогательные оптимизационные задачи. Найдем наибольшее значение критерия $K_1 = K_1(p)$ при ограничениях $(^*)$ и $K_2(p) \geqslant K_2^i$. В результате получим оптимальные значения критерия первой модели: K_1^i, $i = 0, 1, \ldots, m$, и набор из $m+1$ точки, $\Pi = \{(K_1^i, K_2^i),\ i = 0, 1, \ldots, m\}$, который и является оценкой искомого множества Парето.

Алгоритм решения задачи 2.

Пусть расчетная идеальная точка значений критериев указанной задачи имеет координаты (K_1^*, K_2^*, K_3^*), где K_1^*, K_2^*, K_3^* —

максимальные значения критериев для моделей 1 (K_1^*) и 2 (K_2^*, K_3^*) при решении соответствующих однокритериальных задач при ограничениях (*). Пусть при достижении значения критерия $K_1 = K_1^*$ значения критерия $K_3 = K_3^{01}$; а при достижении значения критерия $K_2 = K_2^*$ значения критерия $K_3 = K_3^{02}$, $K_3^0 = \min(K_3^{01}, K_3^{02})$ и $K_3^0 < K_3^*$ (в случае $K_3^0 = K_3^*$ трехкритериальная задача сводится к двухкритериальной).

Разделим числовой промежуток $[K_3^0, K_3^*]$ на m равных частей с шагом $h = (K_3^* - K_3^0)/m$, получим набор точек $K_3^i = K_3^0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Здесь $K_3^m = K_3^*$.

Для каждого $i = 0, 1, \ldots, m-1$ решим следующие вспомогательные оптимизационные двухкритериальные задачи. Найти оценку множества Парето на базе объединенной модели для задачи при максимизации критериев K_1 и K_2 при следующих ограничениях:

$$K_3(p) \geqslant K_3^i.$$

Решение этой задачи производится с помощью описанного выше алгоритма оценки множества Парето для двухкритериальной задачи. В результате для каждого фиксированного i получим набор точек $\{K_1^{ij}, K_2^{ij}, K_3^i\}$ пространства, где $j = 0, 1, \ldots, m$.

Окончательно оценка искомого множества Парето будет состоять из всех найденных выше точек: $\Pi = \{K_1^{ij}, K_2^{ij}, K_3^i;\ i, j = 0, 1, \ldots, m\}$.

Пусть предпочтения лица принимающего решения m-критериальной задачи определяются с помощью линейной функции полезности вида

$$U(K_1, K_2, \ldots, K_m) = \sum_{i=1}^{m} W_i K_i, \qquad (1.4.2)$$

где K_i — критерии, а $W_i > 0$ — веса, значения которых заранее не известны; при этом предполагается, что $\sum\limits_{i=1}^{m} W_i = 1$.

Согласно методу анализа иерархий [25, с. 176], в рамках определения значений весов W_i ЛПР просят сообщить не сами значения весов, а показатели относительной важности a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, m,\ j > i)$ для всех пар критериев (K_i, K_j). При этом значения a_{ij} выбираются из некоторой шкалы, например $\{1, 2, \ldots, 10\}$, причем число 10 означает, что критерий i много важнее критерия j, а число 1 — что эти критерии примерно эквивалентны по важности.

При абсолютно логичных ответах ЛПР должны быть получены величины

$$a_{ij} = \frac{W_i}{W_j}, \quad i, j = 1, \ldots, m, \quad j > i. \tag{1.4.3}$$

Заметим, что для двухкритериальной задачи ($m = 2$) значения весов W_i однозначно определяются значениями показателей относительной важности a_{ij}. В этом случае ЛПР определяет число $a_{12} = W_1/W_2$. Добавляя сюда условие $W_1 + W_2 = 1$, получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными, из которой получаем: $W_2 = 1/(1 + a_{12})$, $W_2 = 1 - W_1$.

В случае $m > 2$, согласно методу анализа иерархий, определяется матрица A размера $m \times m$, составленная из показателей a_{ij}. Кроме значений показателей, определенных ЛПР, в этой матрице полагаем $a_{ii} = 1$ и $a_{ij} = 1/a_{ji}$ для случаев $j < i$. Пусть λ — наибольшее собственное число матрицы A и W — соответствующий единичный положительный собственный вектор. Тогда координаты этого вектора $W = (W_1, W_2, \ldots, W_m)$ используются в виде искомого набора весов.

Искомое Парето-эффективное множество оценивается в виде точки (набора точек) из оценки множества Парето, для которых найденная функция полезности U принимает свое наибольшее значение.

Вопросы взаимодействия ЛПР с ИСППР на уровне задачи «Исследование влияний значений внешних социально-экономических показателей на результаты решения задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении». Рассматриваемая задача сводится к принятию решения на основе взаимодействия ЛПР с ИСППР в рамках следующих процедур.

Шаг 1. Администратор(ы) ИСППР на основе анализа постановки задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении информирует ЛПР о планируемом исследовании выбранного набора (одного) внешних социально-экономических показателей для исследования их влияний на результаты решения задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении.

Шаг 2. ЛПР, оценивая предлагаемое исследование выбранного набора (одного) внешних социально-экономических показателей на результаты решения задачи «Исследование влияний

значений внешних социально-экономических показателей на результаты решения задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении», определяет, является ли выбранный набор приемлемым, если да, то процедура взаимодействия ЛПР с ИСППР завершена, в противном случае ЛПР вносит предложение по набору внешних социально-экономических показателей для исследования их влияний на результаты решения этой задачи.

Шаг 3. Администратор(ы) ИСППР предлагает на основе пожеланий ЛПР и анализа математической модели постановки задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении новый набор внешних социально-экономических показателей для исследования их влияний на результаты решения задачи «Исследование влияний значений внешних социально-экономических показателей на результаты решения задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении».

Процесс взаимодействия ЛПР с ИСППР продолжается в рамках шагов 1–3 до тех пор, пока набор внешних социально-экономических показателей для исследования их влияний на результаты решения задачи «Исследование влияний значений внешних социально-экономических показателей на результаты решения задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении» не получит одобрение ЛПР.

Вопросы взаимодействия ЛПР с ИСППР на уровне задачи «Выработка рекомендаций по выбору значений экономических инструментов по осуществлению экономической политики по выбранному направлению». Рассматриваемая задача связана с принятием решения на базе взаимодействия ЛПР с ИСППР в рамках следующих процедур.

Шаг 1. Администратор(ы) ИСППР предлагает на основе оценки значений внешних социально-экономических показателей и результатов исследования зависимостей решения задачи оценок значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении рекомендуемую версию значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении.

Ш а г 2. ЛПР, оценивая рекомендуемую версию значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении, определяет, является ли предлагаемая версия значений экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении приемлемой; если да, то процедура взаимодействия ЛПР с ИСППР завершена, в противном случае ЛПР просит новую информацию о возможных значениях внешних социально-экономических показателей и соответствующих версиях значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении.

Ш а г 3. Администратор(ы) ИСППР предлагает ЛПР по его запросу новую информацию о возможных значениях внешних социально-экономических показателей и соответствующих версиях значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления.

Процесс взаимодействия ЛПР с ИСППР продолжается в рамках шагов 1–3 до тех пор, пока набор значений внешних социально-экономических показателей и соответствующая версия значений (законов изменения) экономических инструментов осуществления экономической политики в выбранном направлении не получит одобрение ЛПР.

1.5. Примеры применения теории параметрического регулирования

1.5.1. Математическая модель неоклассической теории оптимального роста

Описание модели. Математическая модель экономического роста [46] представлена следующей системой из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащей производные по времени (t):

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= Ak^{\alpha} - c - (n+\delta)k, \\ \frac{dc}{dt} &= \frac{c}{1-\beta}(\alpha A k^{\alpha-1} - (\delta + p)). \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Здесь k — отношение капитала (K) к труду (L), т. е. фондовооруженность труда (в этой модели не различается население страны и рабочая сила (труд)); c — среднее душевое потребление; n — уровень роста (или уменьшения) населения: $L(t) = L_0 e^{nt}$; δ — уровень амортизации капитала, $\delta > 0$; p — уровень дисконти-

рования; e^{-pt} — функция дисконтирования ($p > n$); A и α — параметры производственной функции вида $y = \varphi(k) = Ak^{\alpha}$, где y — отношение ВВП к труду, т. е. средняя производительность труда ($0 < \alpha < 1,\ A > 0$); β — параметр функции социальной полезности, характеризующей среднее благосостояние населения: $U(c) = Bc^{\beta}$ ($0 < \beta < 1,\ B > 0$).

Первое уравнение системы (1.5.1) есть фундаментальное уравнение Солоу теории экономического роста. Второе уравнение этой системы получается из условия максимума целевого функционала:

$$\int_0^{\infty} U(c)L(t)e^{-pt}\,dt = BL_0 \int_0^{\infty} e^{\beta \ln c-(p-n)t}\,dt,$$

характеризующего суммарное благосостояние всего населения на промежутке времени $0 \leqslant t < \infty$. Указанный функционал максимизируется при ограничениях

$$k(0) = k_0, \quad k' = Ak^{\alpha} - c - (n+\delta)k, \quad 0 \leqslant c(t) \leqslant \varphi(k(t)),$$

и постоянных значениях параметров δ, n, p, A, B, α, β.

Решения системы (1.5.1) будем рассматривать в некоторой замкнутой области Ω, с границей — простой замкнутой кривой, принадлежащей первому квадранту фазовой плоскости $R^2_+ = \{k > 0,\ c > 0\},\ k(0) = k_0,\ c(0) = c_0,\ (k_0, c_0) \in \Omega$.

Исследование структурной устойчивости математической модели неоклассической теории оптимального роста без параметрического регулирования. Проведем оценку грубости (структурной устойчивости) рассматриваемой модели без параметрического регулирования в вышеуказанной замкнутой области Ω с границей — простой замкнутой кривой, принадлежащей первому квадранту фазовой плоскости $R^2_+ = \{k > 0, c > 0\},\ k(0) = k_0,\ c(0) = c_0,\ (k_0, c_0) \in \Omega$, опираясь на теорему о необходимых и достаточных условиях грубости [12]. Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 1.5.1. *Система* (1.5.1) *в области* R^2_+ *имеет единственную особую точку*

$$k^* = \left(\frac{\alpha A}{\delta + p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad c^* = k^* \frac{(n+\delta)(1-\alpha) + p - n}{\alpha}. \qquad (1.5.2)$$

Эта точка является седловой точкой системы (1.5.1).

Доказательство леммы приведено в приложении А.

Теорема 1.5.1. *Пусть правые части системы*

$$x' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y) \tag{1.5.3}$$

— гладкие функции в некоторой области $\Omega_1 \subset R^2$ *и система* (1.5.3) *имеет в этой области единственную седловую особую точку* (x^*, y^*). *Тогда система* (1.5.3) *является грубой в замкнутой области* Ω $(\Omega \subset \Omega_1)$, *содержащей внутри себя точку* (x^*, y^*).

Доказательство теоремы приведено в приложении A.

Следствие 1.5.1. Система (1.5.1) является грубой в замкнутой области Ω $(\Omega \subset R^2_+)$, содержащей внутри себя точку (k^*, c^*) при любых фиксированных значениях параметров n, L_0, δ, p, A, α, B, β из соответствующих областей их заданий.

Отсюда следует, в частности, факт отсутствия бифуркаций фазового портрета системы (1.5.1) в области Ω при изменении упомянутых в теореме параметров в областях их заданий.

Выбор оптимальных законов параметрического регулирования развития рыночной экономики на базе математической модели неоклассической теории оптимального роста. Рассмотрим теперь возможность осуществления эффективной государственной политики на базе модели (1.5.1) через выбор оптимальных законов регулирования на примере экономического параметра — уровень амортизации капитала (δ).

В работе выбор оптимальных законов параметрического регулирования осуществляется в среде набора следующих зависимостей:

$$\begin{aligned} U_1(t) &= \lambda_1 \frac{\Delta k(t)}{k(0)} + \delta^*, \quad U_2(t) = -\lambda_2 \frac{\Delta k(t)}{k(0)} + \delta^*, \\ U_3(t) &= \lambda_3 \frac{\Delta c(t)}{c(0)} + \delta^*, \quad U_4(t) = -\lambda_4 \frac{\Delta c(t)}{c(0)} + \delta^*. \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

Здесь U_i — i-й закон регулирования параметра δ $(i = \overline{1,4})$; λ_i — настраиваемый коэффициент i-го закона регулирования, $\lambda_i \geqslant 0$; δ^* — постоянная, равная базовому значению параметра δ; $\Delta k(t) = k_i(t) - k(0)$, $\Delta c(t) = c_i(t) - c(0)$; $(k_i(t), c_i(t))$ — решение системы (1.5.1) с начальными условиями $k_i(0) = k_0$, $c_i(0) = c_0$ при использовании закона регулирования U_i. Использование закона регулирования U_i означает подстановку функции из правых частей (1.5.4) в систему (1.5.1) вместо параметра δ; $t = 0$ — время начала регулирования; $t \in [0, T]$.

Задачу выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне одного из экономических параметров δ можно сформулировать в следующем виде. Найти на основе математической модели (1.5.1) оптимальный закон параметрического регулирования на уровне экономического параметра δ в среде набора алгоритмов (1.5.4), т. е. найти оптимальный закон из множества $\{U_i\}$, который обеспечил бы максимум критерия

$$K = BL_0 \int_0^T e^{\beta \ln c_i(t) - (p-n)t}\, dt \to \max_{\{U_i, \lambda_i\}} \tag{1.5.5}$$

при ограничениях

$$|k_i(t) - k(t)| \leqslant 0{,}09k(t), \quad (k_i(t), c_i(t)) \in \Omega, \quad \text{где } t \in [0, T]. \tag{1.5.6}$$

Здесь $(k(t), c(t))$ — решение системы (1.5.1) без параметрического регулирования.

Сформулированная задача решается в два этапа:

— на первом этапе определяются оптимальные значения коэффициентов λ_i для каждого закона U_i путем перебора их значений в соответствующих интервалах (квантованных с малым шагом), обеспечивающих максимум K при ограничениях (1.5.6);

— на втором этапе выбирается закон оптимального регулирования параметра δ на основе результатов первого этапа по максимальному значению критерия K.

Рассматриваемая задача решалась:

— при заданных значениях параметров $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 0{,}5$, $A = 1$, $B = 1$, $k_0 = 4$, $c_0 = 0{,}8$, $T = 3$, $L_0 = 1$;

— при следующих фиксированных значениях нерегулируемых параметров: $n = 0{,}05$, $p = 0{,}1$;

— при базовом значении регулируемого параметра $\delta = 0{,}2$.

Результаты численного решения задачи выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне одного экономического параметра экономической системы показывают, что наилучший результат $K = 1{,}95569$ может быть получен при использовании следующего закона:

$$\delta = 0{,}19 \frac{\Delta k(t)}{4} + 0{,}2. \tag{1.5.7}$$

Отметим, что значение критерия без использования параметрического регулирования равно $K = 1{,}901038$.

Исследование структурной устойчивости математической модели неоклассической теории оптимального роста с учетом параметрического регулирования. Проверим грубость системы (1.5.1), где параметр δ определяется в соответствии с решением задачи параметрического регулирования и с учетом влияния изменений неуправляемых параметров n и p в виде выражения

$$\delta = \lambda_1 \frac{k - k_0}{k_0} + \delta_0 \tag{1.5.8}$$

при любом значении настраиваемого коэффициента $\lambda_1 > 0$. Здесь $k_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ — некоторые фиксированные числа. Подставим (1.5.8) в правые части уравнений системы (1.5.1) и приравняем их к нулям, получим следующую систему относительно неизвестных (k, c) (при фиксированных остальных допустимых значениях переменных и постоянных):

$$\begin{gathered} Ak^\alpha - c - \left(n + \lambda_1 \frac{k - k_0}{k_0} + \delta_0\right) k = 0, \\ \frac{c}{1-\beta}\left[\alpha A k^{\alpha-1} - \left(\lambda_1 \frac{k - k_0}{k_0} + \delta_0\right) - p\right] = 0. \end{gathered} \tag{1.5.9}$$

Поскольку функция из правой части второго уравнения системы (1.5.1) как функция одной переменной k строго убывает и принимает все значения при $k > 0$, то второе уравнение имеет единственное решение k^*. Для этого значения найдется единственное решение c^* первого уравнения (1.5.9), т. е. система (1.5.9) имеет единственное решение (k^*, c^*). Если $(k^*, c^*) \notin R^2_+$, то очевидно, что система (1.5.1) с законом регулирования U_1 является структурно устойчивой в любой замкнутой области $\Omega \subset R^2_+$.

Пусть теперь $(k^*, c^*) \in R^2_+$. Найдем определитель матрицы Якоби функций f_1, f_2 — левых частей соответствующих уравнений системы (1.5.9) в этой точке. Поскольку

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial c}(k^*, c^*) = -1, \\ &\frac{\partial f_2}{\partial k}(k^*, c^*) = \frac{c^*}{1-\beta}(\alpha(\alpha-1)A(k^*)^{\alpha-2} - \lambda_1) < 0, \\ &\frac{\partial f_2}{\partial c}(k^*, c^*) = 0, \end{aligned}$$

то определитель указанной матрицы $\Delta < 0$. Поэтому в этом случае точка (k^*, c^*) является седловой точкой системы (1.5.1) с законом

управления U_1. Из теоремы 1.5.1 следует факт структурной устойчивости рассматриваемой системы в замкнутой области $\Omega \subset R^2_+$, содержащей внутри себя точку (k^*, c^*).

В частности, при использовании указанного закона (1.5.7), система (1.5.1) остается структурно устойчивой.

Методами, изложенными выше, можно проверить условия грубости системы (1.5.1) и при использовании оптимального закона вида $\delta = -\lambda_1 \dfrac{c - c_0}{c_0} + \delta_0$ при нахождении значений параметров (n, p) в замкнутой области, принадлежащей R^2_+.

Нахождение точек бифуркации экстремалей задачи вариационного исчисления на базе математической модели неоклассической теории оптимального роста. Исследуем зависимость результатов выбора закона параметрического регулирования на уровне параметра δ от неуправляемых параметров (n, p), значения которых принадлежат некоторой области (прямоугольнику) Λ на плоскости. Другими словами, найдем возможные точки бифуркации для рассматриваемой вариационной задачи по выбору оптимального закона параметрического регулирования рассматриваемой модели экономического роста.

В результате вычислительного эксперимента были получены графики зависимостей оптимального значения критерия (1.5.5) K

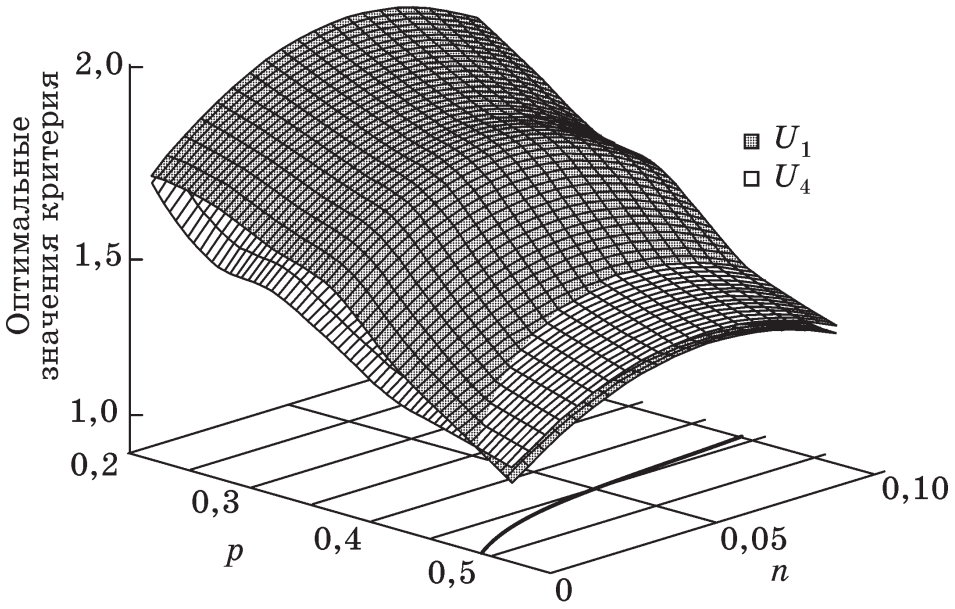

Рис. 1.5.1. Графики оптимальных значений критерия K

от значений параметров (n, p) для каждого из четырех возможных законов U_i. На рис. 1.5.1 представлены графики для законов

U_1 и U_4, которые дают наибольшие значения критерия в области Λ, линия пересечения этих поверхностей — проекция линии пересечения на область значений параметров (n, p), состоящую из бифуркационных точек этих параметров. Эта проекция делит прямоугольник Λ на две части, в одной из которых оптимальным является закон управления U_1, а в другой — U_4. На самой проекции линии оба закона являются оптимальными.

По исходу данного исследования зависимости результатов решения рассматриваемой задачи вариационного исчисления от значений нерегулируемых параметров (n, p), к выбору оптимальных законов параметрического регулирования можно подойти следующим образом. Если значения параметров (n, p) находятся левее линии бифуркации в прямоугольнике Λ (рис. 1.5.1), то в качестве оптимального закона рекомендуется закон U_1, а если значения параметров (n, p) находятся правее линии бифуркации в прямоугольнике Λ, то в качестве оптимального закона рекомендуется закон U_4. Если значения параметров (n, p) находятся на линии бифуркации в прямоугольнике Λ, то в качестве оптимального закона можно рекомендовать любой закон из U_1, U_4.

1.5.2. Односекторная модель экономического роста Солоу

Описание модели. Односекторная модель экономического роста Солоу представлена в книге [19].

Модель описывается системой уравнений, которая включает в себя одно дифференциальное уравнение и два алгебраических уравнения:

$$\begin{aligned} L(t) &= L(0)e^{\nu t}, \\ \frac{dK}{dt} &= -\mu K(t) + \rho X(t), \\ X(t) &= AK(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

Здесь t — время в месяцах; $L(t)$ — численность занятых в экономике; $K(t)$ — основные фонды; $X(t)$ — ВВП; ν — месячный темп прироста занятых; μ — доля выбывших за месяц основных производственных фондов; ρ — доля валовых инвестиций в ВВП; A — коэффициент нейтрального технологического прогресса; α — коэффициент эластичности по фондам.

Оценка параметров модели. В рамках решения задачи предварительной оценки параметров требовалось оценить значения экзогенных параметров ν, μ, ρ, A, α поисковым методом в смысле

минимума критерия (суммы квадратов невязок эндогенных переменных).

Критерий параметрической идентификации имеет вид

$$K = \frac{1}{9}\left[\left(\frac{X(0)-X^*(0)}{X^*(0)}\right)^2 + \left(\frac{X(12)-X^*(12)}{X^*(12)}\right)^2 + \right.$$
$$+ \left(\frac{X(24)-X^*(24)}{X^*(24)}\right)^2 + \left(\frac{X(36)-X^*(36)}{X^*(36)}\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{X(48)-X^*(48)}{X^*(48)}\right)^2 + \left(\frac{K(12)-K^*(12)}{K^*(12)}\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{K(24)-K^*(24)}{K^*(24)}\right)^2 + \left(\frac{K(36)-K^*(36)}{K^*(36)}\right)^2 +$$
$$\left. + \left(\frac{K(48)-K^*(48)}{K^*(48)}\right)^2\right] \to \min. \quad (1.5.11)$$

Здесь $X^*(t)$ — данные о ВВП Республики Казахстан за 2001–2005 гг., $K^*(t)$ — основные фонды Республики Казахстан за период с 2002 по 2005 г., $X(t)$ и $K(t)$ — расчетные значения эндогенных переменных системы (1.5.11).

При расчетах используется значение $L(0)$, равное 6,698, значение $K(0)$, равное 4004 (соответствует 2001 г.), а также значение экзогенного параметра v, равное 0,0017.

Относительная величина среднеквадратического отклонения расчетных значений эндогенных переменных от соответствующих наблюдаемых значений (статистических данных) составила $100\sqrt{K} = 3{,}8\%$.

Исследование структурной устойчивости математической модели неоклассической теории оптимального роста без параметрического регулирования. С помощью численного алгоритма оценки слабой структурной устойчивости дискретной динамической системы для выбранного компакта N, определяемого неравенствами $3000 \leqslant K \leqslant 10\,000,\ 5 \leqslant L \leqslant 10$ в фазовом пространстве переменных (K, L), была получена оценка цепно-рекуррентного множества $R(f, N)$ как пустого множества. Это означает, что односекторная модель экономического роста Солоу для описания взаимодействия рынка благ и денежного рынка оценивается как слабо структурно устойчивая в указанном компакте N.

Выбор оптимальных законов параметрического регулирования развития рыночной экономики на базе математической модели Солоу. Рассмотрим теперь возможность осуществления эффективной государственной политики на базе модели (1.5.10) через выбор оптимальных законов регулирования на примере экономического параметра — доля валовых инвестиций в ВВП (ρ).

В работе выбор оптимальных законов параметрического регулирования осуществляется в среде набора следующих зависимостей:

$$1)\ \rho(t)=\rho^*+k_1\frac{K(t)-K(0)}{K(0)},\quad 2)\ \rho(t)=\rho^*-k_2\frac{K(t)-K(0)}{K(0)},$$
$$3)\ \rho(t)=\rho^*+k_5\frac{X(t)-X(0)}{X(0)},\quad 4)\ \rho(t)=\rho^*-k_6\frac{X(t)-X(0)}{X(0)}, \tag{1.5.12}$$

где k_i — настраиваемый коэффициент i-го закона регулирования, $k_i \geqslant 0$; ρ^* — значение экзогенного параметра ρ, полученное в результате параметрической идентификации модели.

Задачу выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне одного из экономических параметров δ можно сформулировать в следующем виде. Найти на основе математической модели (1.5.10) оптимальный закон параметрического регулирования на уровне экономического параметра ρ в среде набора алгоритмов (1.5.12), который обеспечил бы максимум критерия (среднее значение ВВП на рассматриваемом промежутке времени)

$$K=\frac{1}{49}\sum_{t=0}^{48}X(t)$$

при ограничениях $K>0$. Базовое значение критерия (без применения сценариев) равно 409,97.

Результаты численного решения задачи выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне одного экономического параметра экономической системы показывают, что наилучший результат $K=511{,}34$ может быть получен при использовании следующего закона:

$$\rho(t)=\rho^*+0{,}268\frac{X(t)-X(0)}{X(0)}. \tag{1.5.13}$$

Значения эндогенных переменных модели без применения сценариев, а также с применением оптимального закона приведены ниже в графическом виде (рис. 1.5.2 и 1.5.3).

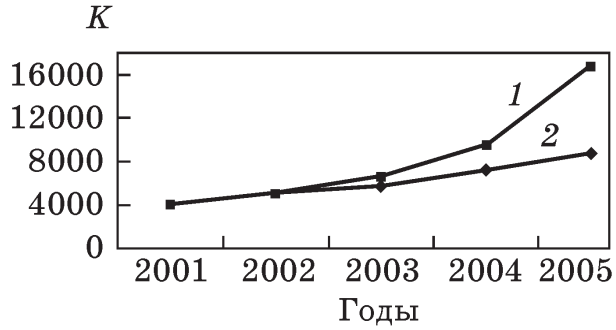

Рис. 1.5.2. Основные фонды без параметрического регулирования (*2*) и при использовании закона 3) (1.5.12), оптимального в смысле критерия K (*1*)

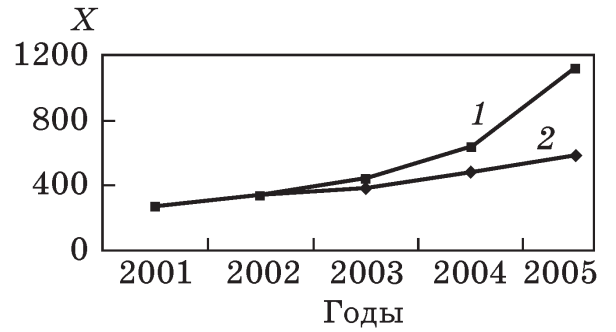

Рис. 1.5.3. ВВП без параметрического регулирования (*2*) и при использовании закона 3) (1.5.12), оптимального в смысле критерия K (*1*)

Исследование структурной устойчивости математической модели неоклассической теории оптимального роста с параметрическим регулированием. Для проведения этого исследования выражение для оптимального закона параметрического регулирования (1.5.13) было подставлено в правую часть второго уравнения системы (1.5.10) вместо параметра ρ. Затем с помощью численного алгоритма оценки слабой структурной устойчивости дискретной динамической системы для выбранного компакта N, определяемого неравенствами $3000 \leqslant K \leqslant 10\,000$, $5 \leqslant L \leqslant 10$ в фазовом пространстве переменных (K, L), была получена оценка цепно-рекуррентного множества $R(f, N)$ как пустого множества. Это означает, что математическая модель Солоу с оптимальным законом параметрического регулирования оценивается как слабо структурно устойчивая в указанном компакте N.

Исследование зависимости оптимального значения критерия K от параметра для задачи вариационного исчисления на базе математической модели Солоу. Исследуем зависимость оптимального значения критерия K от экзогенного параметра μ — доля

выбывших за месяц основных производственных фондов для законов параметрического регулирования (1.5.12) с найденными оптимальными значениями настраиваемых коэффициентов k_i.

В результате вычислительного эксперимента были получены графики зависимостей оптимального значения критерия K (см. рис. 1.5.4). Анализ приведенных графиков показывает, что для ис-

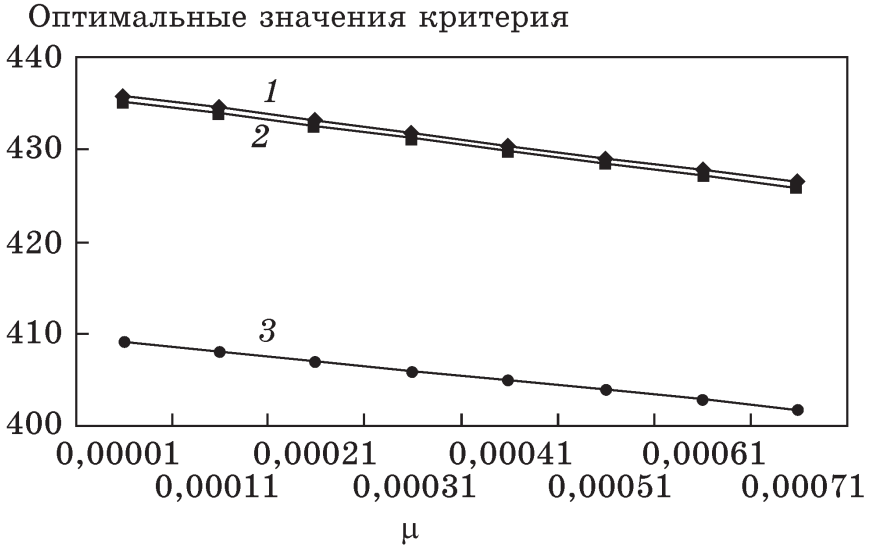

Рис. 1.5.4. Графики зависимостей оптимального значения критерия K от экзогенного параметра μ: *1* — используется закон 1); *2* — используется закон 3); *3* — без параметрического регулирования

следуемого промежутка значений экзогенного параметра μ точки бифуркации экстремалей решаемой вариационной задачи отсутствуют.

1.5.3. Модель оценки затрат на оборону Ричардсона

Описание модели. Модель описывается системой из двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [20]:

$$\frac{dx}{dt} = ay - mx + r, \quad \frac{dy}{dt} = bx - ny + s. \tag{1.5.14}$$

Здесь t — время в месяцах; $x(t)$ — расходы на вооружение первой страны (группы стран); $y(t)$ — расходы на вооружение второй страны (группы стран); a — величина угрозы для первой страны (группы стран); b — величина угрозы для второй страны (группы стран); m — величина расходов вооружения первой страны (группы стран); n — величина расходов вооружения второй страны (группы стран); r — величина прошлой обиды первой страны

(группы стран); s — величина прошлой обиды второй страны (группы стран).

Оценка параметров модели. В рамках решения задачи предварительной оценки параметров требовалось оценить значения экзогенных параметров a, b, m, n, r, s поисковым методом в смысле минимума критерия (суммы квадратов невязок эндогенных переменных).

Критерий параметрической идентификации имеет вид

$$K = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{x(1)-x^*(1)}{x^*(1)}\right)^2 + \left(\frac{x(2)-x^*(2)}{x^*(2)}\right)^2 + \left(\frac{x(3)-x^*(3)}{x^*(3)}\right)^2 + \left(\frac{x(4)-x^*(4)}{x^*(4)}\right)^2 + \left(\frac{y(1)-y^*(1)}{y^*(1)}\right)^2 + \left(\frac{y(2)-y^*(2)}{y^*(2)}\right)^2 + \left(\frac{y(3)-y^*(3)}{y^*(3)}\right)^2 + \left(\frac{y(4)-y^*(4)}{y^*(4)}\right)^2\right] \to \min. \quad (1.5.15)$$

Здесь $x^*(t)$ — статистические данные о расходах на вооружение Франции и России за 1910–1913 гг.; $y^*(t)$ — статистические данные о расходах на вооружение Германии и Австро-Венгрии за 1910–1913 гг.; $x(t)$, $y(t)$ — соответствующие расчетные значения эндогенных переменных системы (1.5.14). Статистические данные (в млн фунтов стерлингов) представлены в табл. 1.5.1.

Таблица 1.5.1. **Статистические данные по эндогенным переменным модели Ричардсона**

Год	t	x^*	y^*
1909	0	115,3	83,9
1910	1	123,4	85,4
1911	2	132,8	90,4
1912	3	144,4	97,7
1913	4	167,4	112,3

Задача предварительной оценки параметров решалась с помощью алгоритма Гаусса–Зейделя с дискретным делителем диапазона оценки, равным 100 000. Число итераций алгоритма равнялось

50. Для улучшения результата оценки параметров проводилась серия из 1000 экспериментов по случайному выбору начальных значений оцениваемых экзогенных параметров из диапазонов их оценки.

В результате решения задачи предварительной оценки параметров были получены следующие значения оцениваемых параметров: $a = 0{,}4846$, $b = 0{,}3498$, $m = 0{,}2526$, $n = 0{,}4390$, $r = 0{,}3387$, $s = -0{,}3386$.

Относительная величина среднеквадратического отклонения расчетных значений эндогенных переменных от соответствующих наблюдаемых значений составила $100\sqrt{K} = 3{,}2819\%$.

Исследование структурной устойчивости математической модели Ричардсона без параметрического регулирования. Для найденных значений параметров системы (1.5.14) стационарная точка этой системы имеет координаты $x_0 = 0{,}2625$, $y_0 = -0{,}5273$ и не лежит в первом квадранте фазовой плоскости $R^2_+ = \{x > 0, y > 0\}$. Поэтому система (1.5.14) является грубой для любой замкнутой области $\Omega \subset R^2_+$.

Выбор оптимальных законов параметрического регулирования развития рыночной экономики на базе математической модели Ричардсона. Рассмотрим теперь возможность осуществления эффективной государственной политики на базе модели (1.5.14) через выбор оптимальных законов регулирования на примере параметра — величина угрозы для второй группы стран b.

В работе выбор оптимальных законов параметрического регулирования осуществляется в среде набора следующих зависимостей:

$$\begin{aligned}
&1)\ b(t) = b^* + k_1 \frac{X(t) - X(0)}{X(0)},\\
&2)\ b(t) = b^* - k_2 \frac{X(t) - X(0)}{X(0)},\\
&3)\ b(t) = b^* + k_3 \frac{Y(t) - Y(0)}{Y(0)},\\
&4)\ b(t) = b^* - k_4 \frac{Y(t) - Y(0)}{YX(0)}.
\end{aligned} \tag{1.5.16}$$

Здесь k_i — коэффициент сценария, b^* — значение экзогенного параметра b, полученное в результате предварительной оценки параметров.

Задачу выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне одного из параметров модели можно сформулировать в следующем виде. Найти на основе математической модели (1.5.14) оптимальный закон параметрического регулирования на уровне экономического параметра b в среде набора алгоритмов (1.5.16), т. е. найти оптимальный закон из указанного множества алгоритмов, который обеспечил бы максимум критерия

$$K = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt, \tag{1.5.17}$$

при ограничениях

$$y(t) \leqslant 1,\ 1 \times x(t). \tag{1.5.18}$$

Здесь промежуток $[0, T]$ регулирования соответствует 1909–1913 гг.

Результаты численного решения задачи выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне одного экономического параметра экономической системы показывают, что наилучший результат $K = 111{,}51$ может быть получен при использовании следующего закона:

$$b(t) = 0{,}3498 + 0{,}3208\frac{X(t) - X(0)}{X(0)}. \tag{1.5.19}$$

Отметим, что базовое значение критерия (без применения регулирования) равно $K = 96{,}8722$.

Графики значений эндогенных переменных модели без параметрического регулирования и с применением параметрического регулирования приведены ниже на рис. 1.5.5 и 1.5.6.

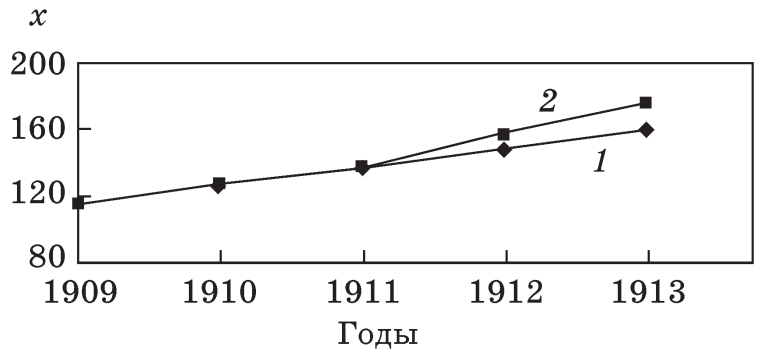

Рис. 1.5.5. Расходы на вооружение первой группы стран без параметрического регулирования и с применением оптимального закона параметрического регулирования: *1* — без параметрического регулирования, *2* — используется закон 1) из (1.5.16)

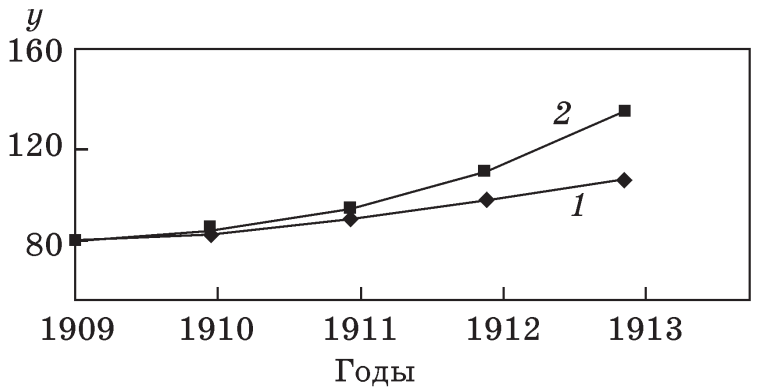

Рис. 1.5.6. Расходы на вооружение второй группы стран без параметрического регулирования и с применением оптимального закона параметрического регулирования: *1* — без параметрического регулирования, *2* — используется закон 1) из (1.5.16)

Исследование структурной устойчивости математической модели Ричардсона с параметрическим регулированием. Для проведения этого исследования выражение для оптимального закона параметрического регулирования (1.5.19) было подставлено в правую часть второго уравнения системы (1.5.14) вместо параметра b. Затем с помощью численного алгоритма оценки слабой структурной устойчивости дискретной динамической системы для выбранного компакта N, определяемого неравенствами $100 \leqslant X \leqslant 150$, $80 \leqslant Y \leqslant 120$ в фазовом пространстве переменных (X, Y), была получена оценка цепно-рекуррентного множества $R(f, N)$ как пустого множества. Это означает, что математическая модель Ричардсона с оптимальным законом параметрического регулирования оценивается как слабо структурно устойчивая в указанном компакте N.

Исследование зависимости оптимального значения критерия K от параметра для задачи вариационного исчисления на базе математической модели Ричардсона. Исследуем зависимости значения критерия K от экзогенного параметра a — величина угрозы для первой группы стран для законов параметрического регулирования (1.5.16) с найденными оптимальными значениями настраиваемых коэффициентов k_i.

В результате вычислительного эксперимента были получены графики зависимостей оптимального значения критерия K (см. рис. 1.5.7). Анализ приведенных графиков показывает, что для исследуемого промежутка значений экзогенного параметра a наблюдаются точки бифуркации экстремалей решаемой вариационной задачи для значений $a = 0{,}315$ и $0{,}345$.

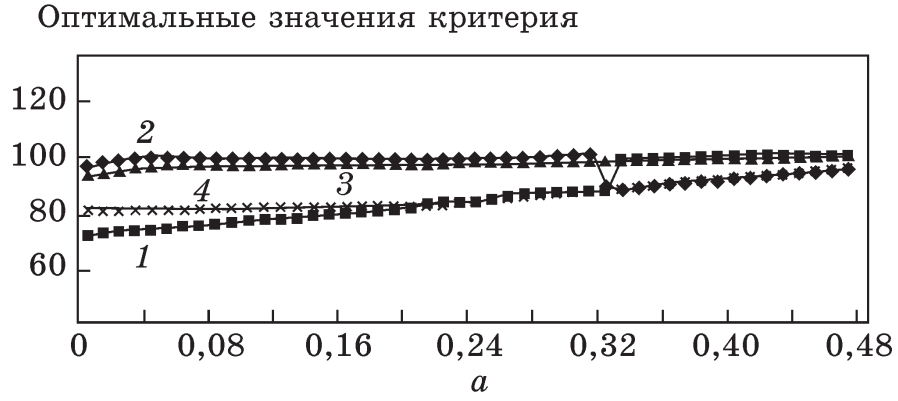

Рис. 1.5.7. Графики зависимостей оптимальных значений критерия K от параметра a: *1* — используется закон 1) из (1.5.16), *2* — используется закон 2) из (1.5.16), *3* — используется закон 3) из (1.5.16), *4* — используется закон 4) из (1.5.16)

1.5.4. Математическая модель экономической системы страны с учетом влияния доли государственных расходов и ставки процента по государственным займам на экономический рост

Описание модели. Математическая модель экономической системы страны для исследования влияний доли государственных расходов во внутреннем валовом продукте и ставки процента по государственным займам на экономический рост, предложенная в [33], после соответствующего преобразования имеет вид

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\Phi^I}{pb} - \mu M, \tag{1.5.20}$$

$$\frac{dQ}{dt} = Mf - \frac{\Phi}{p}, \tag{1.5.21}$$

$$\frac{dL^G}{dt} = r_G L^G + \Phi^G - n_p\Phi - n_L s R^L - n_O(d^p + d^B), \tag{1.5.22}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha\frac{Q}{M}p, \tag{1.5.23}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{\Delta}\max\left\{0, \frac{R^d - R^S}{R^S}\right\}, \quad R^L = \min\{R^d, R^S\}, \tag{1.5.24}$$

$$L^p = \frac{1-\xi}{\xi}L^G, \tag{1.5.25}$$

$$d^p = \frac{1-\xi}{\xi}\beta r_2 L^G, \tag{1.5.26}$$

$$d^B = \beta r_2 L^G, \tag{1.5.27}$$

$$x = \frac{\nu}{1-\delta}\left(1 - \left(\frac{s\nu}{p}\right)^{\frac{1-\delta}{\delta}}\right), \tag{1.5.28}$$

$$R^d = Mx, \tag{1.5.29}$$

$$f = 1 - \left(1 - \frac{1-\delta}{\nu}x\right)^{\frac{1}{1-\delta}}, \tag{1.5.30}$$

$$\Phi^O = \eta_O p M f, \tag{1.5.31}$$

$$\Phi^G = \pi p M f, \tag{1.5.32}$$

$$\Phi^L = (1 - n_L) s R^d, \tag{1.5.33}$$

$$\Phi^I = \frac{1-\xi}{\xi + (1-\xi)n_p}\left\{(1-n_p)\Phi^G - [n_O(d^B + d^p) + n_p\Phi^O] - \right.$$
$$\left. - [n_L - (1-n_L)n_p] s R^L\right\} + (\mu^* + r_G)L^p, \tag{1.5.34}$$

$$\Phi = \Phi^O + \Phi^G + \Phi^L + \Phi^I, \tag{1.5.35}$$

$$R^S = P_0^A \exp(\lambda_p t)\frac{1}{1+\nu\omega}, \quad \omega = \frac{\Phi^L}{pP_0 \exp(\lambda_p t)}. \tag{1.5.36}$$

Здесь M — суммарная производственная мощность;

Q — общий запас товаров на рынке относительно некоторого состояния равновесия;

L^G — общий объем государственного долга;

p — уровень цен;

s — ставка заработной платы;

L^p — объем задолженности производства;

d^p и d^B — предпринимательские и банковские дивиденды соответственно;

R^d и R^S — спрос и предложение рабочей силы соответственно;

δ, ν — параметры функции $f(x)$;

x — решение уравнения $f'(x) = s/p$;

Φ^L и Φ^O — потребительские расходы трудящихся и собственников соответственно;

Φ^I — поток инвестиций;

Φ^G — потребительские расходы государства;

ξ — норма резервирования;

β — отношение средней нормы прибыли от коммерческой деятельности к норме прибыли рантье;

r_2 — ставка процента по депозитам;

r_G — ставка процента по облигациям государственных займов;

η_O — коэффициент склонности собственников к потреблению;

π — доля потребительских расходов государства от внутреннего валового продукта;

n_p, n_O, n_L — ставки налогов на поток платежей, дивиденды и доход трудящихся соответственно;

b — норма фондоемкости единицы мощности;

μ — коэффициент выбытия единицы мощности вследствие деградации;

μ^* — норма амортизации;

α — постоянная времени;

Δ — постоянная времени, задающая характерный временной масштаб процесса релаксации заработной платы;

P_0, P_0^A — начальные значения численности трудящихся и общей численности трудоспособных соответственно;

$\lambda_p > 0$ — заданный темп демографического роста;

ω — душевое потребление в группе трудящихся.

Уравнения и соотношения из математической модели (1.5.20)–(1.5.36) представляют собой соответствующие выражения из [33] или эти выражения после простых преобразований. Так, дифференциальное уравнение (1.5.20) получено из (3.2.18), (3.2.6); (1.5.21) — из (3.2.19) и (3.2.8); (1.5.22) — из (3.2.26) подстановкой выражения для $(\Phi_K^G - H^G)$ из (3.2.25); (1.5.23) представляет (3.2.9); (1.5.24) — (3.2.30); (1.5.25) — выражение со с. 150 [33]; (1.5.26) и (1.5.27) представляют выражения из (3.2.39); (1.5.28) представляет решения уравнения из (3.2.10): $f'(x) = s/p$, где функция (1.5.30) определена на с. 157 [33]; (1.5.29) представляет одно из выражений (3.2.10); (1.5.31) получено из (3.2.15) и (3.2.8); (1.5.32) — из (3.2.16) и (3.2.8); (1.5.33) — из (3.2.22); (1.5.34) представляет соотношение (3.2.36); (1.5.35) есть (3.2.11); (1.5.36) получено из (3.2.12), (3.2.13), (3.2.14).

Параметры модели и начальные условия для дифференциальных уравнений (1.5.20)–(1.5.36) были получены на основе данных экономики Республики Казахстан за 1996–2000 гг. [37] ($r_2 = 0{,}12$, $r_G = 0{,}12$, $\beta = 2$, $n_p = 0{,}08$, $n_L = 0{,}12$, $s = 0{,}1$, $n_O = 0{,}5$, $\mu = \mu^* = 0{,}012$, $\Delta = 1$) или оценены решением задачи параметрической идентификации ($\xi = 0{,}1136$, $\pi = 0{,}1348$, $\delta = 0{,}3$, $\nu = 34$, $\eta_O = 0{,}05$, $b = 3{,}08$, $\alpha = 0{,}008$, $Q(0) = -125\,000$).

Относительная величина среднеквадратического отклонения расчетных значений переменных от соответствующих наблюдаемых составила менее 5%, что иллюстрируется на части охваченных параметрической идентификацией наблюдений в табл. 1.5.2.

Таблица 1.5.2. **Результаты параметрической идентификации**

Год	M^*	M^{**}	p^*	p^{**}
1998	144 438	158 576	1,071	1,09
1999	168 037	183 162	1,16	1,20
2000	216 658	212 190	1,31	1,29

В табл. 1.5.2 M^*, M^{**}, p^*, p^{**} — соответственно значения суммарной производственной мощности и цены продукта, наблюдаемых и модельных (расчетных).

Исследование структурной устойчивости математической модели страны с учетом влияния доли государственных расходов и ставки процента по государственным займам без параметрического регулирования. Исследуем грубость (структурную устойчивость) модели (1.5.20)–(1.5.36), основываясь и теореме о достаточных условиях слабой структурной устойчивости [67] в компактной области фазового пространства.

Утверждение 1.5.1. *Пусть N — компактное множество, лежащее в области ($M > 0$, $Q < 0$, $p > 0$) или ($M > 0$, $Q > 0$, $p > 0$) фазового пространства системы дифференциальных уравнений, полученных из* (1.5.20)–(1.5.36), *т. е. четырехмерного пространства переменных (M, Q, p, L_G); замыкание внутренности N совпадает с N. Тогда поток f, определяемый* (1.5.20)–(1.5.36), *слабо структурно устойчив на N.*

В качестве N можно выбрать, например, параллелепипед с границами $M = M_{\min}$, $M = M_{\max}$, $Q = Q_{\min}$, $Q = Q_{\max}$, $p = p_{\min}$, $p = p_{\max}$, $L_G = L_{G\min}$, $L_G = L_{G\max}$. Здесь $0 < M_{\min} < M_{\max}$, $Q_{\min} < Q_{\max} < 0$ или $0 < Q_{\min} < Q_{\max}$, $0 < p_{\min} < p_{\max}$, $L_{G\min} < L_{G\max}$.

Доказательство утверждения приведено в приложении А.

Выбор оптимальных законов параметрического регулирования развития рыночной экономики на базе математической модели страны с учетом влияния доли государственных расходов и ставки процента по государственным займам. Теперь рассмотрим возможность осуществления эффективной государственной политики

через выбор оптимальных законов регулирования на примере следующих экономических параметров: доля потребительских расходов государства от внутреннего валового продукта π, ставка процента по облигациям государственных займов r_G и норма резервирования ξ.

Оценим возможность выбора оптимальных законов параметрического регулирования в следующей последовательности:

— выбор оптимального закона регулирования на уровне одного из экономических параметров (ξ, π, r_G);

— выбор оптимальной пары законов параметрического регулирования на множестве сочетаний из трех экономических параметров по два;

— выбор оптимальной тройки законов параметрического регулирования для трех экономических параметров.

В работе выбор оптимальных законов параметрического регулирования осуществляется в среде набора следующих зависимостей:

$$
\begin{aligned}
&1)\ U_{1j} = k_{1j}\frac{\Delta M(t)}{M(t_0)} + \mathrm{const}_j,\\
&2)\ U_{2j} = -k_{2j}\frac{\Delta M(t)}{M(t_0)} + \mathrm{const}_j,\\
&3)\ U_{3j} = k_{3j}\frac{\Delta p(t)}{p(t_0)} + \mathrm{const}_j,\\
&4)\ U_{4j} = -k_{4j}\frac{\Delta p(t)}{p(t_0)} + \mathrm{const}_j,\\
&5)\ U_{5j} = k_{5j}\left(\frac{\Delta M(t)}{M(t_0)} + \frac{\Delta p(t)}{p(t_0)}\right) + \mathrm{const}_j,\\
&6)\ U_{6j} = -k_{6j}\left(\frac{\Delta M(t)}{M(t_0)} + \frac{\Delta p(t)}{p(t_0)}\right) + \mathrm{const}_j.
\end{aligned}
\tag{1.5.37}
$$

Здесь U_{ij} — i-й закон регулирования j-го параметра; случай $i = \overline{1,6}$, $j = \overline{1,3}$, $j = 1$ соответствует параметру ξ; $j = 2$ — параметру π; $j = 3$ — параметру r_G; k_{ij} — неотрицательный настраиваемый коэффициент i-го закона регулирования j-го параметра; const_j — постоянная, равная оценке значений j-го параметра по результатам параметрической идентификации.

Задачу выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне одного из экономических параметров (ξ, π, r_G) можно сформулировать в следующем виде. Найти на основе мате-

матической модели (1.5.20)–(1.5.36) оптимальный закон параметрического регулирования U_{ij} в среде набора алгоритмов (1.5.37), который обеспечил бы минимум критерия

$$K = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,dt \to \min_{\{U_{ij},k_{ij}\}} \tag{1.5.38}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} |M(t) - M^{**}(t)| \leqslant 0{,}09M^{**}(t), \\ (M(t), Q(t), L^G(t), p(t), s(t)) \in X, \\ 0 \leqslant U_{ij} \leqslant a_j, \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,2}, \quad t \in [t_0, t_0 + T], \end{gathered} \tag{1.5.39}$$

где $M^{**}(t)$ — значение суммарной производственной мощности без параметрического регулирования, a_j — наибольшее возможное значение j-го параметра, X — компактное множество возможных значений переменных системы.

Сформулированная задача решалась в два этапа:

— на первом этапе определяются оптимальные значения коэффициентов k_{ij} для каждого закона U_{ij} путем перебора значений коэффициентов в промежутках вида $[0, k_{ij}^m)$, квантованных с шагом 0,01, обеспечивающих минимум K при ограничениях (1.5.39). Здесь k_{ij}^m — первое значение коэффициента, при котором нарушается (1.5.39).

— на втором этапе выбирается закон оптимального регулирования конкретного параметра (из трех) на основе результатов первого этапа по минимальному значению критерия K (1.5.38).

Результаты численного решения первого этапа поставленной задачи для $\{U_{ij}\}$ представлены в табл. 1.5.3.

Анализ табл. 1.5.3, согласно требованиям второго этапа решения поставленной задачи, позволяет предложить на уровне однопараметрического регулирования механизма рыночной экономики закон для параметра π следующего вида:

$$\pi = -0{,}84\frac{\Delta p}{1} + 0{,}1348,$$

который обеспечивает наименьшее значение $K = 1{,}023$ среди всех законов U_{ij}.

Задачу выбора оптимальной пары законов для одновременного регулирования двух параметров можно сформулировать в следу-

ющем виде. Найти оптимальную пару законов параметрического регулирования $(U_{ij}, U_{\nu\mu})$ на множестве сочетаний из трех экономических параметров по два на базе набора алгоритмов (1.5.37), которая обеспечила бы минимум критерия

$$K = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,dt \to \min_{\{(U_{ij},k_{ij}),(U_{\nu\mu},k_{\nu\mu})\}}, \qquad (1.5.40)$$

$$i,\nu = \overline{1,6}, \quad j,\mu = \overline{1,3}, \quad J < \mu,$$

при ограничениях (1.5.39).

Таблица 1.5.3. **Численное решение первого этапа поставленной задачи по выбору оптимального закона параметрического регулирования**

Обозначения законов параметрического регулирования	Оптимальные значения коэффициентов законов	Значения критерия K
U_{11}	0,22	1,098
U_{21}	0	1,1734
U_{31}	0,156	1,037
U_{41}	0	1,1734
U_{51}	0,16	1,09
U_{61}	0	1,1734
U_{12}	0	1,1734
U_{22}	0,11	1,09
U_{32}	0	1,1734
U_{42}	0,84	1,023
U_{52}	0	1,1734
U_{62}	0,08	1,084
U_{13}	0	1,1734
U_{23}	0,29	1,17
U_{33}	0	1,1734
U_{43}	0,39	1,1701
U_{53}	0	1,1734
U_{63}	0,23	1,1702

Задача выбора оптимальной пары решается в два этапа:

— на первом этапе для каждой выбранной пары законов регулирования $(U_{ij}, U_{\nu\mu})$ путем перебора определяются оптимальные значения коэффициентов этой пары $(k_{ij}, k_{\nu\mu})$ из соответствующих областей, квантованных с шагом 0,01 для каждого коэффициента, обеспечивающего минимальное значение критерия K при ограничениях (1.5.39);

— на втором этапе выбирается оптимальная пара законов параметрического регулирования на основе результатов первого этапа по минимальному значению критерия K.

Результаты численного решения первого этапа поставленной задачи по выбору оптимальной пары законов параметрического регулирования представлены в 18 таблицах вида табл. 1.5.4, отличающихся друг от друга выражением закона регулирования хотя бы по одному параметру.

Таблица 1.5.4. **Результаты численного решения первого этапа поставленной задачи по выбору оптимальной пары законов**

Пары законов параметрического регулирования				Значение критерия K
Первый закон пары		Второй закон пары		
Обозначение закона	Оптимальное значение коэффициента	Обозначение закона	Оптимальное значение коэффициента	
U_{21}	0	U_{12}	0	1,1734
U_{21}	0,185	U_{22}	0,123	0,981
U_{21}	0	U_{32}	0	1,1734
U_{21}	0	U_{42}	0,84	1,023
U_{21}	0	U_{52}	0	1,1734
U_{21}	0,167	U_{62}	0,167	0,982

Выбор оптимальной пары законов параметрического регулирования, согласно требованиям второго этапа, на основе анализа данных 18 таблиц позволяет рекомендовать для использования законы регулирования параметров (π, ξ) для случая двухпараметрического регулирования рыночного механизма экономики следующего вида:

$$\xi = -0{,}185\frac{\Delta M(t)}{139\,345} + 0{,}1136, \quad \pi = -0{,}123\frac{\Delta M(t)}{139\,345} + 0{,}1348,$$

которые обеспечивают наименьшее значение $K = 0{,}981$ среди всех пар $(U_{ij}, U_{\nu\mu})$.

Задачу выбора оптимальной тройки законов для одновременного регулирования трех параметров можно сформулировать так. Найти оптимальную тройку законов параметрического регулирования на уровне трех параметров на базе набора алгоритмов (1.5.37), которая обеспечила бы минимум критерия

$$K = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,dt \to \min_{\{(U_{i1},k_{i1}),(U_{\nu 2},k_{\nu 2}),(U_{\gamma 3},k_{\gamma 3})\}}, \qquad (1.5.41)$$

$$i, \nu, \gamma = \overline{1,6},$$

при ограничениях (1.5.39).

Сформулированная задача решалась в два этапа:

— на первом этапе для каждой выбранной тройки законов регулирования $(U_{i1}, U_{\nu 2}, U_{\gamma 3})$ путем перебора определяются оптимальные значения коэффициентов этой тройки $(k_{i1}, k_{\nu 2}, k_{\gamma 3})$ из соответствующих областей, квантованных с шагом 0,01 для каждого коэффициента, обеспечивающего минимальное значение критерия K при ограничениях (1.5.39);

— на втором этапе выбирается оптимальная тройка законов регулирования всех параметров на основе результатов первого этапа по минимальному значению критерия K.

Результаты численного решения первого этапа задачи представлены в 36 таблицах вида табл. 1.5.5, содержащих все возможные тройки законов регулирования и отличающихся друг от друга выражением закона регулирования хотя бы по одному параметру.

Выбор оптимальной тройки законов, в соответствии с требованиями второго этапа, дает возможность рекомендовать для использования следующие законы регулирования экономических параметров ξ, π, r_G:

$$\xi(t) = -0{,}185\frac{\Delta M(t)}{139\,345} + 0{,}1136,$$

$$\pi(t) = -0{,}123\frac{\Delta M(t)}{139\,345} + 0{,}1348,$$

$$r_G(t) = -0{,}03\frac{\Delta M(t)}{139\,345} + 0{,}01,$$

обеспечивающих наименьшее значение $K = 0{,}980$ среди всех троек $(U_{i1}, U_{\nu 2}, U_{\gamma 3})$.

Таблица 1.5.5. **Результаты численного решения первого этапа поставленной задачи по выбору оптимальной тройки законов**

Пары законов параметрического регулирования						Значение критерия K
Первый закон тройки		Второй закон тройки		Третий закон тройки		
Обозначение закона	Оптимал. значение коэффиц.	Обозначение закона	Оптимал. значение коэффиц.	Обозначение закона	Оптимал. значение коэффиц.	
U_{21}	0,185	U_{22}	0,123	U_{13}	0	0,981
U_{21}	0,185	U_{22}	0,123	U_{23}	0,03	0,980
U_{21}	0,185	U_{22}	0,123	U_{33}	0	0,981
U_{21}	0,185	U_{22}	0,123	U_{43}	0	0,981
U_{21}	0,185	U_{22}	0,123	U_{53}	0	0,981
U_{21}	0,185	U_{22}	0,123	U_{63}	0	0,981

Таким образом, в данной работе показан один из возможных путей выбора эффективных законов параметрического регулирования рыночной экономики.

Кроме того, задача выбора оптимального набора законов решалась и в другой постановке.

Выбор оптимальных законов параметрического регулирования на базе модели (1.5.20)–(1.5.36) уровне одного из двух параметров ξ $(j = 1)$ и π $(j = 2)$, осуществляется в среде набора следующих зависимостей:

$$\begin{aligned}
&1)\ U_{1j}(t) = k_{1j}\frac{M - M_0}{M_0} + \mathrm{const}_j,\\
&2)\ U_{2j}(t) = -k_{2j}\frac{M - M_0}{M_0} + \mathrm{const}_j,\\
&3)\ U_{3j}(t) = k_{3j}\frac{p - p_0}{p_0} + \mathrm{const}_j,\\
&4)\ U_{4j}(t) = -k_{4j}\frac{p - p_0}{p_0} + \mathrm{const}_j.
\end{aligned} \tag{1.5.42}$$

Здесь U_{ij} — i-й закон регулирования j-го параметра ($i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,2}$); случай $j = 1$ соответствует параметру ξ, $j = 2$ — параметру π; k_{ij} — настраиваемый коэффициент i-го закона регулирования j-го параметра, $k_{ij} \geqslant 0$; const_j — постоянная, равная

оценке значения j-го параметра по результатам параметрической идентификации; M_0, p_0 — начальные значения соответствующих переменных (1.5.20)–(1.5.36) означают подстановку функций U_{ij} из (1.5.42) в уравнения (1.5.20)–(1.5.36) вместо параметра ξ или π.

Задачу выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне одного из двух экономических параметров (ξ, π) можно сформулировать в следующем виде. Найти на основе математической модели (1.5.20)–(1.5.36) оптимальный закон параметрического регулирования на уровне одного из двух экономических параметров (ξ, π) в среде набора алгоритмов (1.5.42), т. е. найти оптимальный закон из множества $\{U_{ij}\}$ и его настраиваемый коэффициент, который обеспечил бы максимум критерия

$$K = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} Y(t)\, dt, \tag{1.5.43}$$

где $Y = Mf$ — валовой внутренний продукт при ограничениях

$$\begin{gathered} |p_{ij}(t) - p^{**}(t)| \leqslant 0{,}09 p^{**}(t), \\ (M(t), Q(t), L^G(t), p(t), s(t)) \in X, \\ 0 \leqslant u_j \leqslant a_j, \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,2}, \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \end{gathered} \tag{1.5.44}$$

Здесь a_j — наибольшее значение j-го параметра, $p^{**}(t)$ — модельные (расчетные) значения уровня цен без параметрического регулирования, $p_{ij}(t)$ — величина уровня цен при U_{ij}-м законе регулирования, X — компактное множество допустимых значений указанных переменных.

Сформулированная задача решается в два этапа:

— на первом этапе определяются оптимальные значения коэффициентов k_{ij} для каждого закона U_{ij} путем перебора значений коэффициентов в промежутках вида $[0, k_{ij}^m)$, квантованных с достаточно малым шагом, обеспечивающих максимум K при ограничениях (1.5.44). Здесь k_{ij}^m — первое значение коэффициента, при котором нарушается (1.5.44).

— на втором этапе выбирается закон оптимального регулирования конкретного параметра (из трех) на основе результатов первого этапа по максимальному значению критерия K.

Результаты численного решения задачи выбора оптимального закона параметрического регулирования экономической системы государства на уровне одного экономического параметра показывают, что наилучший результат $K = 177\,662$ может быть получен при использовании следующего закона регулирования:

$$\xi = -0{,}095\frac{M - M_0}{M_0} + 0{,}1136. \qquad (1.5.45)$$

Заметим, что величина критерия без использования параметрического регулирования равна $K = 170\,784$.

Параметрическое регулирование развития рыночной экономики с изменяющимися целями на базе математической модели страны с учетом влияния доли государственных расходов и ставки процента по государственным займам. Возможность параметрического регулирования процессов инфляции в рыночной экономике рассмотрим на базе математической модели (1.5.20)–(1.5.36). В качестве возможной характеристики развития экономических процессов можно принять уровень цен, учитывая то, что в охваченный для исследования период — 1996–2000 гг. — экономика Казахстана находилась на подъеме и уровень цен может служить некоторой мерой эффективности производства товаров и услуг, а также может характеризовать наличие процессов инфляции или дефляции.

В рамках изменения уровня цен можно условно выделить две области: допустимую и недопустимую области изменения уровня цен. Недопустимую область (B) изменения уровня цен можно определить с помощью неравенств $p(t) \leqslant p_{\text{н}}(t)$ или $p(t) \geqslant p_{\text{в}}(t)$, где $p_{\text{н}}(t)$ — нижняя допустимая граница изменения уровня цен, а $p_{\text{в}}(t)$ — верхняя допустимая граница изменения уровня цен $(p_{\text{н}}(t) < p_{\text{в}}(t),\ 0 < t < T)$. Выполнение неравенства $p(t) \leqslant p_{\text{н}}(t)$ показывает наличие процесса некоторой дефляции, а выполнение $p(t) \geqslant p_{\text{в}}(t)$ показывает наличие некоторой излишней инфляции. Допустимую область (A) изменения уровня цен можно задать с помощью неравенства $p_{\text{н}}(t) < p(t) < p_{\text{в}}(t),\ 0 < t < T$.

В зависимости от области A или B нахождения значений уровня цен постановка задач выбора оптимальных законов параметрического регулирования (воздействия) сводится к следующим задачам:

— в области A параметрическое регулирование не производится;

— в области B необходимо найти и реализовать такие законы параметрического регулирования в среде некоторого заданного набора алгоритмов, которые обеспечивают минимум критерия, характеризующего качество переходных процессов при наложенных ограничениях на возможные значения соответствующих показателей состояния экономики и параметров регулирования (блок B).

Предлагаемый подход реализуется следующим образом. В начале по результатам решения задачи параметрической идентификации запускается процесс моделирования экономической системы. Предварительно, по результатам моделирования определяются области A и B для значений уровня цен. В алгоритме вычислительного эксперимента имеется логическое условие, определяющее нахождение значения уровня цен в той или иной области допустимости. Если в процессе этой оценки окажется, что значение $p(t)$ находится в области B, то включается блок B решения задачи вывода объекта из недопустимой области B в допустимую область A. Если же значение $p(t)$ оказывается в области A, параметрическое регулирование отключается.

Рассмотрим теперь возможность осуществления эффективной государственной политики в рамках блока B через выбор оптимальных законов регулирования на примере следующих экономических параметров: доля потребительских расходов государства от внутреннего валового продукта π, ставка процента по облигациям государственных займов r_G и норма резервирования ξ. Эти параметры приняты для исследования с учетом [42] и анализа матрицы чувствительности показателей: суммарной производственной мощности M, объема государственного долга L^G и уровня цен p.

Алгоритм многоцелевого регулирования апробировался на модели экономики Республики Казахстан для границ изменения уровня цен $p_{\text{н}}(t) = 0{,}9$ и $p_{\text{в}}(t) = 1{,}1$.

Пусть

$$\delta p(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_{\text{н}}(t) < p(t) < p_{\text{в}}(t), \\ p(t) - p_{\text{н}}(t), & \text{если } p(t) \leqslant p_{\text{н}}(t), \\ p(t) - p_{\text{в}}(t), & \text{если } p(t) \geqslant p_{\text{в}}(t). \end{cases}$$

В работе при нахождении уровня цен в недопустимой области B выбор оптимальных законов параметрического регулирования осуществляется в среде набора следующих зависимостей (законов

регулирования):

$$
\begin{aligned}
&1)\ V_{1j} = -k_{1j}\frac{\delta p(t)}{p(t_0)} + \mathrm{const}_j,\\
&2)\ V_{2j} = -\frac{k_{2j}}{t}\int\limits_{t_0}^{t_0+t}\frac{\delta p(t)}{p(t_0)}\,dt + \mathrm{const}_j,\\
&3)\ V_{3j} = -k_{3j}\left(\frac{\delta p(t)}{p(t_0)} + \frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t_0+t}\frac{\delta p(t)}{p(t_0)}\,dt\right) + \mathrm{const}_j.
\end{aligned}
\tag{1.5.46}
$$

Здесь случай $j = 1$ соответствует параметру ξ, $j = 2$ — параметру π, $j = 3$ — параметру r_G; k_{ij} — настраиваемый коэффициент i-го закона регулирования j-го параметра, $k_{ij} \geqslant 0$; const_j — постоянная, равная оценке значения j-го параметра по результатам параметрической идентификации. Выбор оптимальных законов параметрического регулирования осуществляется на уровне двух экономических параметров из тройки (ξ, π, r_G).

Задачу выбора оптимальной пары законов параметрического регулирования на уровне двух экономических параметров из тройки (ξ, π, r_G) можно сформулировать в следующем виде. Найти оптимальную пару законов параметрического регулирования (V_{ij}, $V_{\nu\mu}$) на множестве сочетаний из трех экономических параметров по два на базе набора алгоритмов (1.5.46), которая обеспечила бы минимум критерия

$$
K_1 = \int\limits_{t_0}^{t_0+T}\delta p(t)^2\,dt \to \min_{\{V_{ij},k_{ij}\}}
\tag{1.5.47}
$$

при ограничениях

$$
\begin{gathered}
|M(t) - M^{**}(t)| \leqslant 0{,}09M^{**}(t), \quad t \in [t_0, t_0+T],\\
0 \leqslant V_{ij}(t) \leqslant a_j, \quad 0 \leqslant V_{\nu\mu}(t) \leqslant a_\mu,\\
i = \overline{1,3}, \quad \mu = \overline{1,3}.
\end{gathered}
\tag{1.5.48}
$$

Здесь $M(t)$, $p(t)$ — значения производственной мощности и уровня цен соответственно при использовании параметрического регулирования; $M^{**}(t)$, $p^{**}(t)$ — значения производственной мощности и уровня цен соответственно без параметрического регулирования; a_j, a_μ — наибольшие возможные значения соответствующих регулирующих параметров.

Эта задача решается в два этапа:

— на первом этапе определяются оптимальные значения коэффициентов k_{ij} для каждой пары законов $(V_{ij}, V_{\nu\mu})$, путем перебора определяются оптимальные значения коэффициентов этой пары $(k_{ij}, k_{\nu\mu})$ из соответствующих областей, квантованных с достаточно малым шагом для каждого коэффициента, обеспечивающего минимальное значение критерия K_1 при ограничениях (1.5.48).

— на втором этапе выбирается оптимальная пара законов параметрического регулирования на основе анализа результатов первого этапа по минимальному значению критерия K_1.

Результаты численного решения первого и второго этапов позволяют рекомендовать для использования законы регулирования параметров $(\pi,\ \xi)$ для случая двухпараметрического регулирования рыночного механизма экономики следующего вида:

$$\xi = -k_{1j}\frac{\delta p(t)}{p(t_0)} + 0{,}1136, \quad \pi = -k_{1j}\frac{\delta p(t)}{p(t_0)} + 0{,}1348.$$

При этом оптимальное значение критерия K_1 оказалось равным 0,0086.

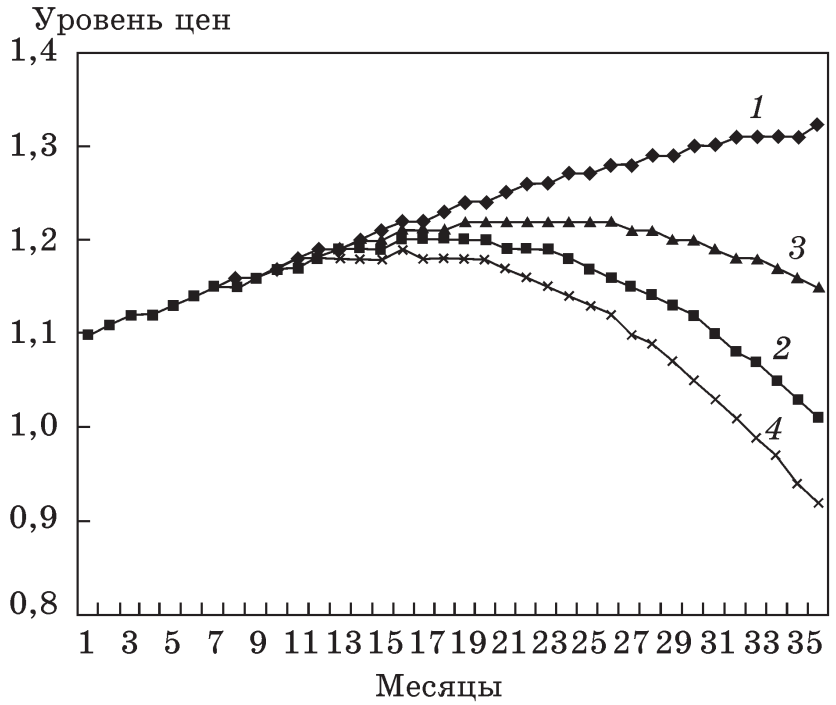

Рис. 1.5.8. Значения уровня цен $p(t)$ при регулировании экономических параметров: *1* — значения уровня цен $p(t)$ без регулирования; *2* — значения уровня цен $p(t)$ при регулировании параметра π; *3* — значения уровня цен $p(t)$ при регулировании параметра ξ; *4* — значения уровня цен $p(t)$ при регулировании пары параметров $(\pi,\ \xi)$

Анализ результатов вычислительных экспериментов показывает, что выбранные и реализованные законы параметрического регулирования по норме резервирования ξ и доли потребительских расходов государства от внутреннего валового продукта π обеспечивают вывод значений уровня цен из недопустимой области в допустимую.

Результаты вычислительного эксперимента по параметрическому регулированию механизмов рыночной экономики с помощью одного закона и пары законов параметрического регулирования представлены в табл. 1.5.6 и на рис. 1.5.8.

Таблица 1.5.6. **Значения уровня цен $p(t)$ при регулировании экономических параметров**

Месяцы	Значения уровня цен $p(t)$ без регулирования	Значения уровня цен $p(t)$ при регулировании параметра π	Значения уровня цен $p(t)$ при регулировании параметра ξ	Значения уровня цен $p(t)$ при регулировании пары параметров (π, ξ)
1	1,1	1,1	1,1	1,1
2	1,11	1,11	1,11	1,11
3	1,12	1,12	1,12	1,12
4	1,12	1,12	1,12	1,12
5	1,13	1,13	1,13	1,13
6	1,14	1,14	1,14	1,14
7	1,15	1,15	1,15	1,15
8	1,16	1,15	1,16	1,15
9	1,16	1,16	1,16	1,16
10	1,17	1,17	1,17	1,17
11	1,18	1,17	1,18	1,17
12	1,19	1,18	1,18	1,18
13	1,19	1,19	1,19	1,18
14	1,2	1,19	1,2	1,18
15	1,21	1,19	1,2	1,18
16	1,22	1,2	1,21	1,19

Таблица 1.5.6 (окончание)

Месяцы	Значения уровня цен $p(t)$ без регулирования	Значения уровня цен $p(t)$ при регулировании параметра π	Значения уровня цен $p(t)$ при регулировании параметра ξ	Значения уровня цен $p(t)$ при регулировании пары параметров (π, ξ)
17	1,22	1,2	1,21	1,18
18	1,23	1,2	1,21	1,18
19	1,24	1,2	1,22	1,18
20	1,24	1,2	1,22	1,18
21	1,25	1,19	1,22	1,17
22	1,26	1,19	1,22	1,16
23	1,26	1,19	1,22	1,15
24	1,27	1,18	1,22	1,14
25	1,27	1,17	1,22	1,13
26	1,28	1,16	1,22	1,12
27	1,28	1,15	1,21	1,1
28	1,29	1,14	1,21	1,09
29	1,29	1,13	1,2	1,07
30	1,3	1,12	1,2	1,05
31	1,3	1,1	1,19	1,03
32	1,31	1,08	1,18	1,01
33	1,31	1,07	1,18	0,99
34	1,31	1,05	1,17	0,97
35	1,31	1,03	1,16	0,94
36	1,32	1,01	1,15	0,92

Исследование структурной устойчивости математической модели страны с учетом влияния доли государственных расходов и ставки процента по государственным займам с параметрическим регулированием. Проверим грубость системы (1.5.20)–(1.5.36), где параметры ξ, π и r_G определяются в соответствии с решением задач параметрического регулирования в виде следующих выра-

жений:

$$
\begin{aligned}
&1)\ U_{1j} = k_{1j}\frac{M(t)-M(0)}{M(0)} + \mathrm{const}_j,\\
&2)\ U_{2j} = -k_{2j}\frac{M(t)-M(0)}{M(0)} + \mathrm{const}_j,\\
&3)\ U_{3j} = k_{3j}\frac{p(t)-p(0)}{p(0)} + \mathrm{const}_j,\\
&4)\ U_{4j} = -k_{4j}\frac{p(t)-p(0)}{p(0)} + \mathrm{const}_j,\\
&5)\ U_{5j} = k_{5j}\left(\frac{M(t)-M(0)}{M(0)} + \frac{p(t)-p(0)}{p(0)}\right) + \mathrm{const}_j,\\
&6)\ U_{6j} = -k_{6j}\left(\frac{M(t)-M(0)}{M(0)} + \frac{p(t)-p(0)}{p(0)}\right) + \mathrm{const}_j,
\end{aligned}
\tag{1.5.49}
$$

при любых значениях настраиваемых коэффициентов $k_{ij} \geqslant 0$. Здесь const_j — постоянная, равная оценке значений j-го параметра по результатам параметрической идентификации.

Применение законов параметрического регулирования U_{ij}, $i = \overline{1,6}$, $j = \overline{1,3}$, означает подстановку соответствующих функций вместо параметров ξ $(j=1)$, π $(j=2)$ и r_G $(j=3)$ в уравнения модели (1.5.20)–(1.5.36). В результате применения этих законов получается следующая система:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\Phi^I}{pb} - \mu M, \tag{1.5.50}$$

$$\frac{dQ}{dt} = Mf - \frac{\Phi}{p}, \tag{1.5.51}$$

$$\frac{dL^G}{dt} = U_{i3}L^G + \Phi^G - n_p\Phi - n_L s R^L - n_O(d^p + d^B), \tag{1.5.52}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha\frac{Q}{M}p, \tag{1.5.53}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s}{\Delta}\max\left\{0, \frac{R^d - R^S}{R^S}\right\}, \quad R^L = \min\{R^d, R^S\}, \tag{1.5.54}$$

$$L^p = \frac{1-U_{i1}}{U_{i1}}L^G, \tag{1.5.55}$$

$$d^p = \frac{1 - U_{i1}}{U_{i1}} \beta r_2 L^G, \tag{1.5.56}$$

$$d^B = \beta r_2 L^G, \tag{1.5.57}$$

$$x = \frac{\nu}{1-\delta} \left(1 - \left(\frac{s\nu}{p} \right)^{\frac{1-\delta}{\delta}} \right), \tag{1.5.58}$$

$$R^d = Mx, \tag{1.5.59}$$

$$f = 1 - \left(1 - \frac{1-\delta}{\nu} x \right)^{\frac{1}{1-\delta}}, \tag{1.5.60}$$

$$\Phi^O = \eta_O p M f, \tag{1.5.61}$$

$$\Phi^G = U_{i2} p M f, \tag{1.5.62}$$

$$\Phi^L = (1 - n_L) s R^d, \tag{1.5.63}$$

$$\Phi^I = \frac{1 - U_{i1}}{U_{i1} + (1 - U_{i1}(t)) n_p} \left\{ (1 - n_p)\Phi^G - [n_O (d^B + d^p) + n_p \Phi^O] - \right.$$
$$\left. - [n_L - (1 - n_L) n_p] s R^L \right\} + (\mu^* + U_{i2}) L^p, \tag{1.5.64}$$

$$\Phi = \Phi^O + \Phi^G + \Phi^L + \Phi^I, \tag{1.5.65}$$

$$R^S = P_0^A \exp(\lambda_p t) \frac{1}{1 + \nu\omega}, \quad \omega = \frac{\Phi^L}{p P_0 \exp(\lambda_p t)}. \tag{1.5.66}$$

Доказательство слабой структурной устойчивости математической модели (1.5.20)–(1.5.36) (проведенное выше и опирающееся на уравнение (1.5.23)) позволяет установить сохранение слабой структурной устойчивости рассматриваемой модели при применении каждого из законов параметрического регулирования $U_{ij}(t)$ в виде следующего утверждения.

Утверждение 1.5.2. *Пусть N — компактное множество, лежащее в области ($M > 0$, $Q < 0$, $p > 0$) или ($M > 0$, $Q > 0$, $p > 0$) фазового пространства системы дифференциальных уравнений, полученных из* (1.5.20)–(1.5.36), *т. е. четырехмерного пространства переменных (M, Q, p, L_G); замыкание внутренности N совпадает с N. Тогда поток f, определяемый* (1.5.50)–(1.5.66) *слабо структурно устойчив на N.*

Нахождение точек бифуркации экстремалей задачи вариационного исчисления на базе математической модели страны с учетом влияния доли государственных расходов и ставки процента по государственным займам. Рассмотрим возможность нахождения точки бифуркации для экстремалей задачи вариационного исчисления по выбору закона параметрического регулирования механизма рыночной экономики на уровне одного экономического параметра в среде конечного фиксированного набора алгоритмов на базе математической модели экономической системы страны (1.5.20)–(1.5.36).

Возможность выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне одного из двух параметров ξ $(j = 1)$ и π $(j = 2)$ и на промежутке времени $[t_0, t_0 + T]$ исследовалась в среде следующих алгоритмов (1.5.42):

$$1)\ U_{1j}(t) = k_{1j}\frac{M - M_0}{M_0} + \mathrm{const}_j,$$

$$2)\ U_{2j}(t) = -k_{2j}\frac{M - M_0}{M_0} + \mathrm{const}_j,$$

$$3)\ U_{3j}(t) = k_{3j}\frac{p - p_0}{p_0} + \mathrm{const}_j,$$

$$4)\ U_{4j}(t) = -k_{4j}\frac{p - p_0}{p_0} + \mathrm{const}_j.$$

В рассматриваемой задаче использовался критерий (1.5.43) (среднее значение ВВП за 1997–99 гг.)

$$K = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} Y(t)\,dt,$$

где $Y = Mf$.

Замкнутое множество в пространстве непрерывных вектор-функций выходных переменных системы (1.5.20)–(1.5.36) и регулирующих параметрических воздействий определяется следующими соотношениями (1.5.44):

$$|p_{ij}(t) - p^{**}(t)| \leqslant 0{,}09p^{**}(t),$$

$$(M(t), Q(t), L^G(t), p(t), s(t)) \in X,$$

$$0 \leqslant u_j \leqslant a_j, \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,2}, \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Исследовались следующие постановки задач для нахождения точек бифуркации экстремалей рассматриваемой задачи вариационного исчисления.

Задача 1.5.1. В этой задаче вариационного исчисления рассматривалась ее зависимость от коэффициента $\lambda = r_2$ математической модели, возможные значения которого принадлежат некоторому отрезку $[a, b]$.

В результате вычислительного эксперимента получены графики зависимостей оптимальных значений критерия K от ставки процента по депозитам (в процентах) для заданного набора алгоритмов (рис. 1.5.9). Как видно из рис. 1.5.9, условия теоремы 1.4.1

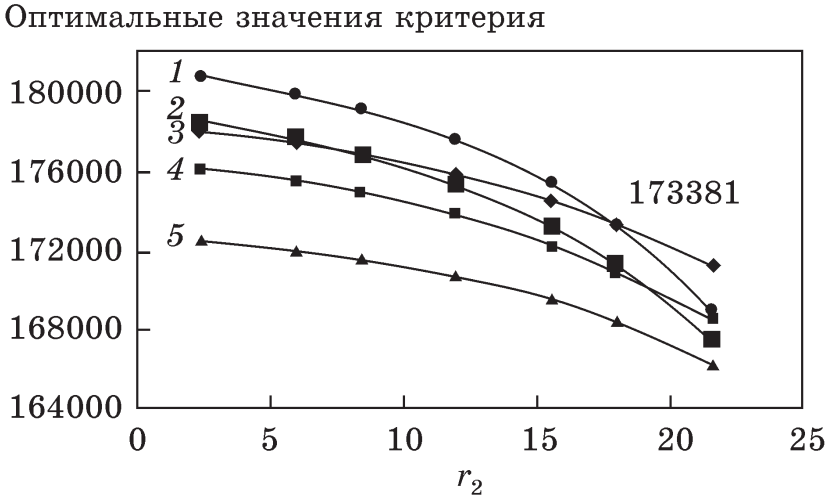

Рис. 1.5.9. Графики зависимостей оптимальных значений критерия от параметра ставки процента по депозитам r_2: *1* — при использовании закона U_{12}; *2* — при использовании закона U_{32}; *3* — при использовании закона U_{21}; *4* — при использовании закона U_{41}; *5* — без регулирования

выполнены, например, для промежутка [15,6; 21,6], поскольку при $r_2 = 15{,}6$ достигается оптимальное значение критерия 175 467 при использовании закона U_{12}, а при $r_2 = 21{,}6$ — оптимальное значение критерия 171 309 при использовании закона U_{21}. Применение предложенного выше численного метода позволяет с погрешностью до 0,001 определить точку бифуркации экстремали рассматриваемой задачи: $r_2^* = 18{,}0$. Для этого значения параметра два закона — U_{21} и U_{12} — являются оптимальными, и соответствующее значение критерия K для них равно 173 381 (млн тенге/мес.).

Задача 1.5.2. Рассмотрим возможность нахождения точек бифуркации экстремалей задачи вариационного исчисления по выбору оптимального набора законов параметрического регулирова-

ния механизмов рыночной экономики с учетом влияния государственных расходов на уровне двух экономических параметров при однопараметрическом возмущении.

В данной задаче вариационного исчисления рассматривалась ее зависимость от коэффициента $\lambda = r_2$ математической модели, возможные значения которого принадлежат некоторому отрезку $[a; b]$.

В результате вычислительного эксперимента получены графики зависимостей оптимальных значений критерия K от ставки процента по депозитам для всех наборов алгоритмов с ненулевыми оптимальными значениями коэффициентов k_{ij} (рис. 1.5.10). Как

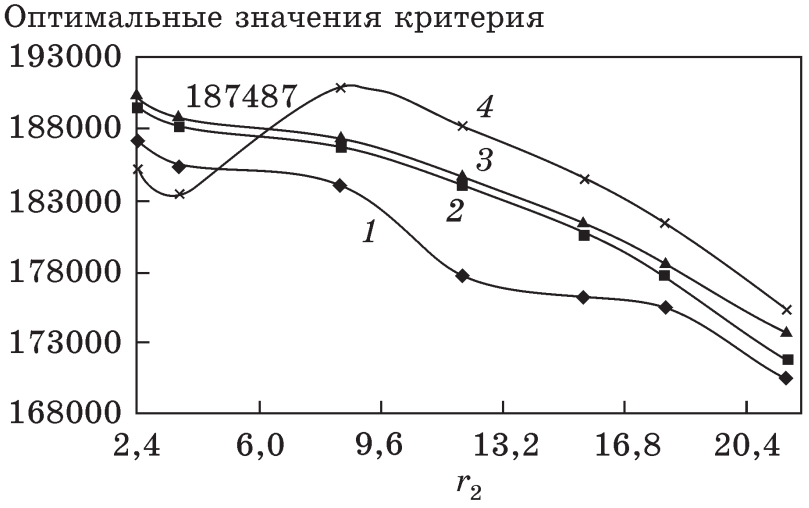

Рис. 1.5.10. Графики зависимостей оптимальных значений критерия от параметра ставки процента по депозитам r_2: *1* — при использовании закона U_{41} и U_{32}; *2* — при использовании закона U_{41} и U_{12}; *3* — при использовании закона U_{21} и U_{32}; *4* — при использовании закона U_{21} и U_{12}

видно из рис. 1.5.10, условия теоремы 1.3.11 выполнены, например, для промежутка [6; 9,6], поскольку при $r_2 = 6$ достигается оптимальное значение критерия 188 803 при использовании двумерного закона $\{U_{21}, U_{32}\}$, а при $r_2 = 9{,}6$ — оптимальное значение критерия 190 831 при использовании закона $\{U_{21}, U_{12}\}$. Применение предложенного выше численного метода позволяет с погрешностью до 0,001 определить точку бифуркации экстремали рассматриваемой задачи: $r_2^* = 0{,}075$. Для этого значения параметра два двумерных закона — $\{U_{21}, U_{32}\}$ и $\{U_{21}, U_{12}\}$ — являются оптимальными, и соответствующее значение критерия K для них равно 187 487 (млн тенге/мес.).

З а д а ч а 1.5.3. Рассмотрим возможность нахождение точек бифуркации экстремалей задачи вариационного исчисления по вы-

бору оптимального закона параметрического регулирования механизмов рыночной экономики на уровне одного экономического параметра при двухпараметрическом возмущении.

В данной задаче вариационного исчисления рассматривалась ее зависимость от двумерного коэффициента $\lambda = (r_2, n_O)$ математической модели, возможные значения которого принадлежат некоторой области (прямоугольнику) Λ на плоскости.

В результате вычислительного эксперимента были получены графики зависимостей оптимального значения критерия K от значений параметров (r_2, n_O) для каждого из 12 возможных законов U_{ij}, $i = \overline{1,6}$, $j = \overline{1,2}$. На рис. 1.5.11 представлены указанные

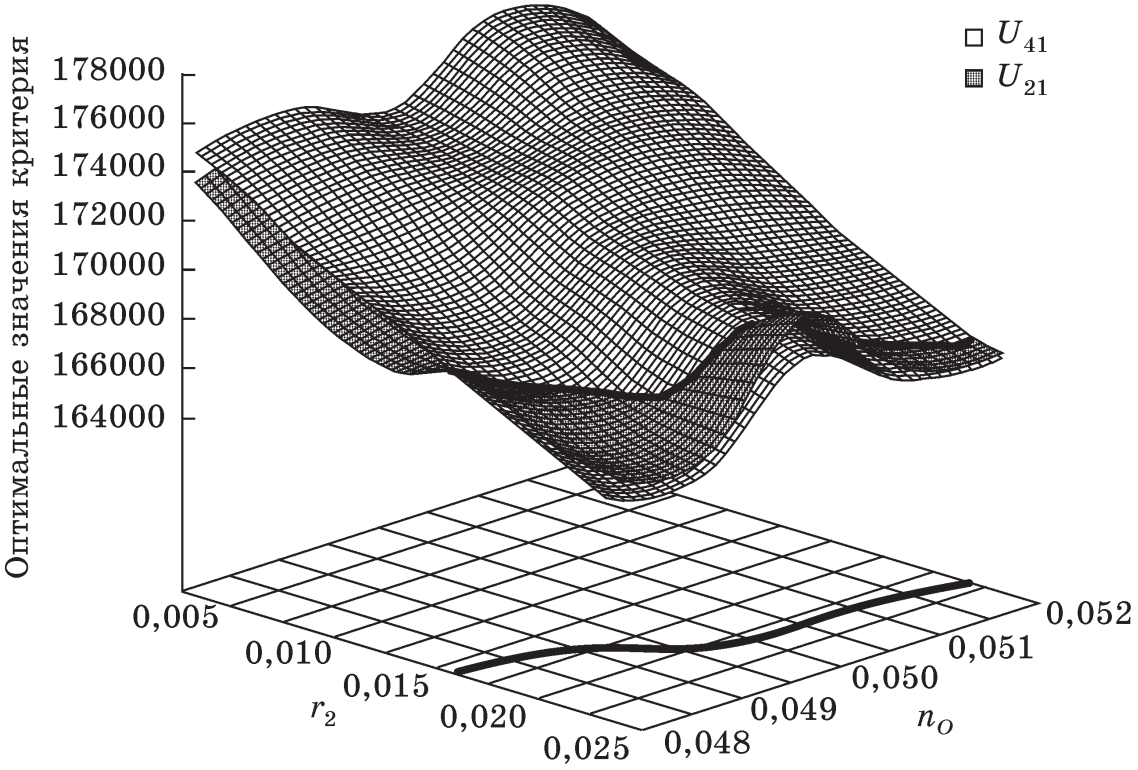

Рис. 1.5.11. Графики зависимостей оптимальных значений критерия от параметров ставки процента по депозитам r_2 и ставки налогов на дивиденты n_O

графики для двух законов U_{21} и U_{41}, дающих наибольшее значение критерия в области Λ, линия пересечения соответствующих поверхностей и проекция этой линии пересечения на плоскость значений λ, состоящая из точек бифуркации этого двумерного параметра. Эта проекция делит прямоугольник Λ на две части, в одной из которых оптимальным является закон управления U_{21}, а в другой — U_{41}, на самой проекции линии оба указанных закона являются оптимальными.

Задача 1.5.4. В результате вычислительного эксперимента также были получены графики зависимостей оптимального значения критерия (1.5.47) K_1 от значений нерегулируемых параметров (r_2, n_O) для каждого из 9 возможных законов (1.5.46) V_{ij}, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$. На рис. 1.5.12 представлены указанные графики для четырех законов (V_{11}, V_{12}, V_{21}, V_{22}), дающих наименьшие значения

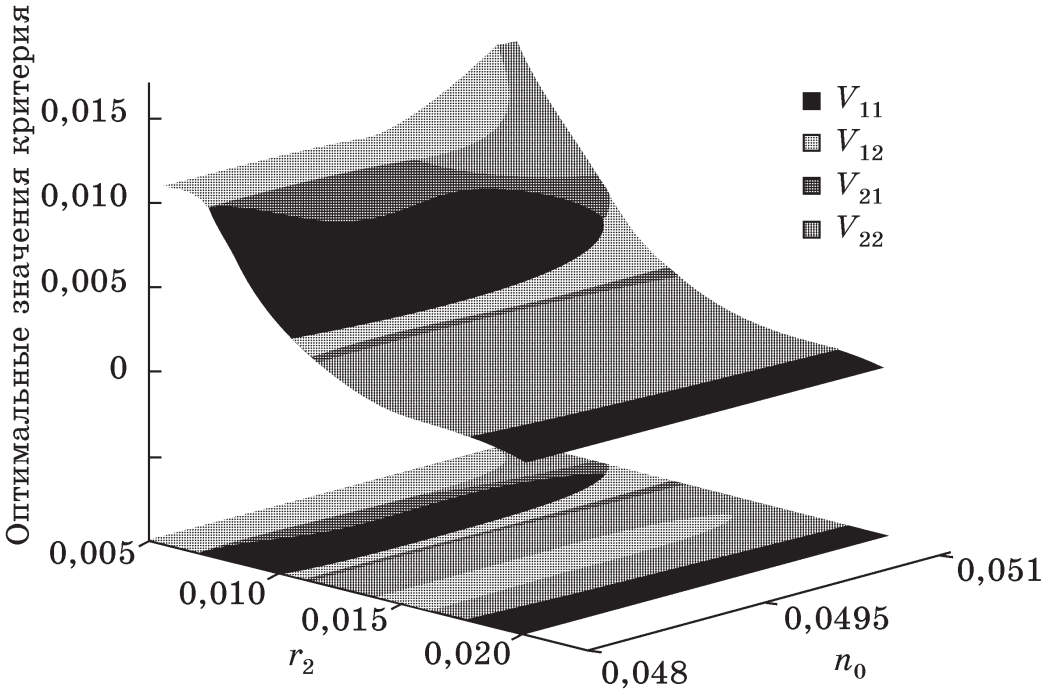

Рис. 1.5.12. График оптимальных значений критерия K_1

критерия K_1 в области Λ, линии пересечения соответствующих поверхностей и проекция этих линий пересечения на плоскость значений λ. Указанные проекции линий состоят из точек бифуркации этого двумерного параметра λ, которые делят прямоугольник Λ на части, внутри каждой из которых оптимальным является только один закон управления, на самой проекции линий два или три различных закона являются оптимальными.

1.5.5. Математическая модель экономической системы страны с учетом влияния международной торговли и валютных обменов на экономический рост

Описание модели. Предложенная в [33] математическая модель для исследования влияния международной торговли и валютных обменов на экономический рост после соответствующих преобразований записывается в виде следующей системы дифференциальных и алгебраических уравнений, в которых $i = 1, 2$ — номер

государства, t — время:

$$\frac{dM_i}{dt} = \frac{\Phi_i^I}{p_i b_i} - \mu_i M_i, \tag{1.5.67}$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = M_i f_i - \frac{\Phi_i}{p_i}, \tag{1.5.68}$$

$$\frac{dL_i^G}{dt} = r_{Gi} L_i^G + \Phi_i^G - n_{pi}\Phi_i - n_{Li} s_i R_i^L - n_{Oi}(d_i^p + d_i^B), \tag{1.5.69}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\alpha_i \frac{Q_i}{M_i} p_i, \tag{1.5.70}$$

$$\frac{ds_i}{dt} = \frac{s_i}{\Delta_i} \max\left\{0, \frac{R_i^d - R_i^S}{R_i^S}\right\}, \quad R_i^L = \min\{R_i^d, R_i^S\}, \tag{1.5.71}$$

$$L_i^p = \frac{1-\xi_i}{\xi_i} L_i^G, \tag{1.5.72}$$

$$d_i^p = \frac{1-\xi_i}{\xi_i} \beta_i r_{2i} L_i^G, \tag{1.5.73}$$

$$d_i^B = \beta_i r_{2i} L_i^G, \tag{1.5.74}$$

$$x_i = \frac{\nu_i}{1-\delta_i}\left(1 - \left(\frac{s_i \nu_i}{p_i}\right)^{\frac{1-\delta_i}{\delta_i}}\right), \tag{1.5.75}$$

$$R_i^d = M_i x_i, \tag{1.5.76}$$

$$f_i = 1 - \left(1 - \frac{1-\delta_i}{\nu_i} x_i\right)^{\frac{1}{1-\delta_i}}, \tag{1.5.77}$$

$$\Phi_i^O = \eta_{Oi} p_i M_i f_i, \tag{1.5.78}$$

$$\Phi_i^G = \pi_i p_i M_i f_i, \tag{1.5.79}$$

$$\Phi_i^L = (1 - n_{Li}) s_i R_i^d, \tag{1.5.80}$$

$$\Phi_i^I = \frac{1}{1+n_{pi}}\left\{\frac{k_{qi} M_i f_i}{\xi_i} - (1-n_{pi})\Phi_i^G + n_{Oi}(d_i^B + d_i^p) + n_{pi}\Phi_i^O + \right.$$

$$\left. + [n_{Li} + (1-n_{Li}) n_{pi}] s_i R_i^L + n_{pi}(\Phi_{ji} - \theta_i \Phi_{ij}) + \mu_i L_{pi} - r_{Gi} L_i^p \right\}, \tag{1.5.81}$$

$$R_i^S = P_{0i}^A \exp(\lambda_{pi} t) \frac{1}{1+\nu_i \omega_i}, \quad \omega_i = \frac{\Phi_i^L}{\left(1 + C_i^L \theta_i \dfrac{p_j}{p_i}\right) P_{0i}(\lambda_{pi} t)}, \quad j = 3 - i, \tag{1.5.82}$$

$$\Phi_{12} = \frac{C_1^L \dfrac{p_2}{p_1}}{1 + C_1^L \theta \dfrac{p_2}{p_1}} \Phi_1^L + \frac{C_1^O \dfrac{p_2}{p_1}}{1 + C_1^O \theta \dfrac{p_2}{p_1}} \Phi_1^O, \tag{1.5.83}$$

$$\Phi_{21} = \frac{C_2^L \dfrac{p_1}{p_2}}{1 + C_2^L \dfrac{1}{\theta} \dfrac{p_1}{p_2}} \Phi_2^L + \frac{C_2^O \dfrac{p_1}{p_2}}{1 + C_2^O \dfrac{1}{\theta} \dfrac{p_1}{p_2}} \Phi_2^O, \tag{1.5.84}$$

$$\Phi_1 = \Phi_1^I + \Phi_1^L + \Phi_1^O + \Phi_1^G + \Phi_{21} - \theta \Phi_{12}, \tag{1.5.85}$$

$$\Phi_2 = \Phi_2^I + \Phi_2^L + \Phi_2^O + \Phi_2^G + \Phi_{12} - \frac{1}{\theta} \Phi_{21}. \tag{1.5.86}$$

Здесь:

M_i — суммарная производственная мощность;

Q_i — общий запас товаров на рынке относительно некоторого состояния равновесия;

L_i^G — общий объем государственного долга;

p_i — уровень цен;

s_i — ставка заработной платы;

L_i^p — объем задолженности производства;

d_i^p и d_i^B — предпринимательские и банковские дивиденды соответственно;

R_i^d и R_i^S — спрос и предложение рабочей силы соответственно;

δ_i, ν_i — параметры функции f_i;

x_i — решение уравнения $f_i'(x_i) = s_i/p_i$;

Φ_i^L и Φ_i^O — потребительские расходы трудящихся и собственников соответственно;

Φ_i^I — поток инвестиций;

Φ_i^G — потребительские расходы государства;

Φ_{ij} — расходы потребителей i-й страны на импортный продукт из j-й страны;

θ — обменный курс валюты первой страны по отношению к валюте второй страны, $\theta_1 = \theta,\ \theta_2 = 1/\theta$;

C_i^L (C_i^O) — количество единиц импортного продукта, потребляемого трудящимся (собственниками) i-й страны на единицу отечественного продукта;

ξ_i — норма резервирования;

β_i — отношение средней нормы прибыли от коммерческой деятельности к норме прибыли рантье;

r_{2i} — ставка процента по депозитам;

r_{Gi} — ставка процента по облигациям государственных займов;

η_{Oi} — коэффициент склонности собственников к потреблению;

π_i — доля потребительских расходов государства от внутреннего валового продукта;

n_{pi}, n_{Oi}, n_{Li} — ставки налогов на поток платежей, дивиденды и доход трудящихся соответственно;

b_i — норма фондоемкости единицы мощности;

μ_i — коэффициент выбытия единицы мощности вследствие деградации;

μ_i^* — норма амортизации;

α_i — постоянная времени;

Δ_i — постоянная времени, задающая характерный временной масштаб процесса релаксации заработной платы;

P_{0i}, P_{0i}^A — начальные значения численности трудящихся и общей численности трудоспособных соответственно;

ω_i — уровень материального потребления на душу в группе трудящихся;

$\lambda_{pi} > 0$ — заданный темп демографического роста;

k_{qi} — доля валового внутреннего продукта страны, резервируемая в золоте.

Среди соотношений (1.5.67)–(1.5.86) уравнения (1.5.83)–(1.5.86) определяют связь экономических систем двух стран. Заметим, что в случае $C_1^L = C_2^L = C_1^O = C_2^O = 0$ торговля между странами отсутствует и их экономические системы независимы друг от друга.

При исследовании значения таких параметров, как b_i, r_{2i}, r_{Gi}, n_{pi}, n_{Li}, β_i, s_i, η_{Oi}, μ_i, μ_i^*, Δ_i, были приняты из [37, 36]. Здесь рассматривался случай идентичных государств ($i = 1$ и 2 соответствуют статистическим данным Республики Казахстан) и случай неидентичных государств ($i = 1$ — Республика Казахстан и $i = 2$ — Российская Федерация).

Для оценки остальных параметров модели: ξ_i, π_i, δ_i, ν_i, η_{Oi}, b_i, α_i, $Q_i(0)$, были решены задачи параметрической идентификации поисковым методом в смысле минимума суммы квадратов невязок:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{N}\left[\left(\frac{M_{ij}^{*}-M_{ij}^{**}}{M_{ij}^{*}}\right)^{2}+\left(\frac{p_{ij}^{*}-p_{ij}^{**}}{p_{ij}^{*}}\right)^{2}\right], \qquad (1.5.87)$$

где M_{ij}^{*}, M_{ij}^{**}, p_{ij}^{*}, p_{ij}^{**} — значения суммарной производственной мощности и цены продукта i-го государства, наблюдаемых [37, 36] и модельных (расчетных), N — число наблюдений, $i=\overline{1,2}$.

Исследование структурной устойчивости математической модели страны с учетом влияния международной торговли и валютных обменов без параметрического регулирования. Исследование грубости (структурную устойчивость) модели (1.5.67)–(1.5.86) основывается на теореме о достаточных условиях слабой структурной устойчивости в компактной области фазового пространства.

Утверждение 1.5.3. *Пусть N — компактное множество, лежащее в области ($M_1>0$, $Q_1<0$, $p_1>0$) или ($M_1>0$, $Q_1>0$, $p_1>0$) фазового пространства системы дифференциальных уравнений математической модели* (1.5.67)–(1.5.86), *т. е. восьмимерного пространства переменных (M_i, Q_i, p_i, L_{Gi}), $i=1,2$; замыкание внутренности N совпадает с N. Тогда поток f, определяемый системой дифференциальных уравнений модели, слабо структурно устойчив на N.*

В качестве N можно выбрать, например, параллелепипед с границами $M_i=M_{i\min}$, $M_i=M_{i\max}$, $Q_i=Q_{i\min}$, $Q_i=Q_{i\max}$, $p_i=p_{i\min}$, $p_i=p_{i\max}$, $L_{Gi}=L_{Gi\min}$, $L_{Gi}=L_{Gi\max}$. Здесь $0<M_{i\min}<M_{i\max}$, $Q_{i\min}<Q_{i\max}<0$ или $0<Q_{i\min}<Q_{i\max}$, $0<p_{i\min}<p_{i\max}$, $L_{Gi\min}<L_{Gi\max}$.

Доказательство этого утверждения, опирающееся на уравнение (1.5.70), аналогично доказательству утверждения 1.5.1.

Выбор оптимальных законов параметрического регулирования развития рыночной экономики на базе математической модели страны с учетом влияния международной торговли и валютных обменов. Выбор оптимальных законов параметрического регулирования экономических параметров ξ_i, π_i, θ осуществляется в среде

набора следующих зависимостей:

$$\begin{aligned}
&1)\ U^i_{1\beta} = k^i_{1\beta}\frac{\Delta M_i(t)}{M_i(t_0)} + \mathrm{const}^i_\beta,\\
&2)\ U^i_{2\beta} = -k^i_{2\beta}\frac{\Delta M_i(t)}{M_i(t_0)} + \mathrm{const}^i_\beta,\\
&3)\ U^i_{3\beta} = k^i_{3\beta}\frac{\Delta p_i(t)}{p_i(t_0)} + \mathrm{const}^i_\beta,\\
&4)\ U^i_{4\beta} = -k^i_{4\beta}\frac{\Delta p_i(t)}{p_i(t_0)} + \mathrm{const}^i_\beta.
\end{aligned} \tag{1.5.88}$$

Здесь $U^i_{\alpha\beta}$ — α-й закон регулирования β-го параметра i-го государства, $\alpha = \overline{1,4}$, $\beta = \overline{1,3}$, случай $\beta = 1$ соответствует параметру ξ_i, $\beta = 2$ — параметру π_i, $\beta = 3$ — параметру θ; $\Delta M_i(t) = M_{\alpha\beta i}(t) - M_i(t_0)$, $\Delta p_i(t) = p_{\alpha\beta i}(t) - p_i(t_0)$, где t_0 — время начала регулирования, $t \in [t_0, t_0 + T]$, $M_{\alpha\beta i}(t)$, $p_{\alpha\beta i}(t)$ — значения производственной мощности и уровня цен i-го государства соответственно при $U^i_{\alpha\beta}$-м законе регулирования; $k^i_{\alpha\beta}$ — настраиваемый коэффициент соответствующего закона ($k^i_{\alpha\beta} \geqslant 0$); const^i_β — постоянная, равная оценке значений β-го параметра по результатам параметрической идентификации.

Задача выбора оптимального закона параметрического регулирования для экономической системы i-й страны на уровне одного из экономических параметров (ξ_i, π_i, θ) ставилась в следующем виде. Найти на основе математической модели (1.5.67)–(1.5.86) оптимальный закон параметрического регулирования в среде набора алгоритмов (1.5.88), т. е. найти оптимальный закон (и его коэффициент $k^i_{\alpha\beta}$) из множества $\{U^i_{\alpha\beta}\}$, который обеспечил бы минимум критерия

$$K_i = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} p_i(t)\,dt \to \min_{\{k^i_{\alpha\beta}, U^i_{\alpha\beta}\}} \tag{1.5.89}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered}
|M_i(t) - M_i^{**}(t)| \leqslant 0{,}09 M_i^{**}(t),\\
0 \leqslant U^i_{\alpha\beta}(t) \leqslant a^i_\beta, \quad \alpha = \overline{1,4}, \quad \beta = \overline{1,3},\\
p_i(t) \geqslant 0, \quad s_i(t) \geqslant 0, \quad t \in [t_0, t_0 + T].
\end{gathered} \tag{1.5.90}$$

Здесь $M_i^{**}(t)$ — значения производственной мощности i-го государства без параметрического регулирования, a_β^i — верхнее значение β-го параметра i-го государства.

Сформулированная задача решается в два этапа:

— на первом этапе определяются оптимальные значения коэффициентов $k_{\alpha\beta}^i$ для каждого закона $U_{\alpha\beta}^i$ путем перебора их значений в соответствующих интервалах, квантованных с шагом 0,01, обеспечивающих минимум критерия K_i при ограничениях (1.5.90);

— на втором этапе выбирается закон оптимального регулирования конкретного параметра на основе результатов первого этапа по минимальному значению критерия K_i.

Задачу выбора оптимальной пары законов для одновременного регулирования двух параметров можно сформулировать в следующем виде. Найти оптимальную пару законов параметрического регулирования $(U_{\alpha\beta}^i, U_{\nu\mu}^i)$ на множестве сочетаний из трех экономических параметров $(\xi_i,\ \pi_i,\ \theta)$ по два при выбранном i на базе набора алгоритмов (1.5.88), которая бы обеспечила минимум критерия

$$K_i = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} p_i(t)\,dt \to \min_{\{(U_{\alpha\beta}^i,k_{\alpha\beta}^i),(U_{\nu\mu}^i,k_{\nu\mu}^i)\}}, \qquad (1.5.91)$$

$$\alpha\nu = \overline{1,4}, \quad \beta\mu = \overline{1,3}, \quad \beta < \mu,$$

при ограничениях (1.5.90).

Задача выбора оптимальной пары решается в два этапа:

— на первом этапе определяются оптимальные значения коэффициентов $k_{\alpha\beta}^i$, $k_{\nu\mu}^i$ для каждой пары законов $(U_{\alpha\beta}^i, U_{\nu\mu}^i)$ путем перебора пар их значений из соответствующих интервалов, квантованных с шагом 0,01, обеспечивающих минимумы критерия K_i при ограничениях (1.5.90);

— на втором этапе выбирается оптимальная пара законов параметрического регулирования на основе результатов первого этапа по минимальному значению критерия K_i.

В работе приведены результаты вычислительных экспериментов по выбору эффективных законов параметрического регулирования потребительских расходов государства, нормы резервирования и обменного курса валюты в рамках следующей части программы исследований:

— оценка значений критериев K_i на базе математической модели взаимодействия идентичных экономических систем двух го-

сударств через внешнюю торговлю; коэффициенты модели оцениваются путем выбора и решения задачи параметрической идентификации по данным одного государства (Республика Казахстан);

— выбор, на базе математической модели взаимодействия идентичных экономических систем двух государств через внешнюю торговлю, оптимального закона параметрического регулирования на уровне одного из экономических параметров (ξ_1, π_1, θ) для экономической системы первого государства и оценка значений критерия K_2 для экономической системы второго государства;

— выбор, на базе математической модели взаимодействия идентичных экономических систем двух государств через внешнюю торговлю, оптимальной пары законов параметрического регулирования на множестве сочетаний из трех экономических параметров по два для экономической системы первого государства и оценка значений критерия K_2 для экономической системы второго государства;

— оценка значения критериев K_i $(i = 1, 2)$ на базе математической модели взаимодействия неидентичных экономических систем двух государств (Республика Казахстан и Российская Федерация) через внешнюю торговлю; коэффициенты модели оцениваются путем выбора и решения задач параметрической идентификации по данным двух различных государств;

— выбор, на базе математической модели взаимодействия неидентичных экономических систем двух государств через внешнюю торговлю, оптимального закона параметрического регулирования обменного курса валюты θ для первого государства и оценка значений критерия K_2 для экономической системы второго государства;

— выбор, на базе математической модели взаимодействия неидентичных экономических систем двух государств через внешнюю торговлю, оптимальной пары законов параметрического регулирования на множестве (ξ_1, θ), (π_1, θ) для экономической системы первого государства и оценка значений критерия K_2 для экономической системы второго государства;

— выбор, на базе математической модели взаимодействия неидентичных экономических систем двух государств через внешнюю торговлю, оптимального закона параметрического регулирования обменного курса валюты θ_2 для второго государства и оценка значений критерия K_1 для экономической системы первого государства;

— выбор, на базе математической модели взаимодействия неидентичных экономических систем двух государств через внеш-

нюю торговлю, оптимальной пары законов параметрического регулирования на множестве (ξ_2, θ_2), (π_2, θ_2) для экономической системы второго государства и оценка значений критерия K_1 для экономической системы первого государства;

— оценка, на базе математической модели взаимодействия неидентичных экономических систем через внешнюю торговлю, влияния регулирования экономической системы одного государства на экономические показатели второго государства при одновременном применении оптимальных законов регулирования на уровне одного экономического параметра из трех (ζ_1, π_1, θ) и (ζ_2, π_2, θ) в двух странах. При этом одновременное регулирование обменного курса θ со стороны двух стран не рассматривалось.

В рамках первого намеченного этапа исследований были оценены коэффициенты математической модели взаимодействия идентичных экономических систем двух государств через внешнюю торговлю на основе данных одного государства [42]. Результаты параметрической идентификации показывают, что величина стандартного отклонения расчетных значений от наблюдаемых значений соответствующих переменных составляет 5%. Значения критериев K_i равны и имеют вид $K_1 = K_2 = 1{,}145$ при $C_1^L = C_2^L = C_1^O = C_2^O = 0{,}1$ и $\theta = 1$.

Результаты численного решения первого этапа задачи выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне одного из экономических параметров (ξ_1, π_1, θ) для экономической системы первого государства представлены в табл. 1.5.7. Анализ табл. 1.5.7 показывает, что наилучший результат $K_1 = 0{,}99$ достигается при использовании закона регулирования

$$\pi_1 = -0{,}8\frac{\Delta p_1(t)}{1} + 0{,}1348.$$

При этом законе регулирования критерий для оптимальности экономической системы второго государства равен $K_2 = 1{,}144$ и незначительно отличается от случая отсутствия регулирования.

Результаты численного решения первого этапа задачи выбора оптимальной пары законов параметрического регулирования представлены в виде восьми таблиц вида табл. 1.5.8, отличающихся друг от друга выражением закона регулирования хотя бы по одному параметру.

На основе анализа этих таблиц, согласно требованиям второго этапа, можно рекомендовать для использования пару законов ре-

гулирования параметров π_1 и θ следующего вида:

$$\pi_1 = -0{,}8\frac{\Delta p_1(t)}{1} + 0{,}1348, \quad \theta = -1{,}6\frac{\Delta M_1(t)}{139\,435} + 0{,}2.$$

При этом значение критерия экономической системы первого государства равно $K_1 = 0{,}97$, значение критерия для экономической системы второго государства незначительно отличается от случая отсутствия регулирования и равно $K_1 = 1{,}144$.

Таблица 1.5.7. **Результаты численного решения первого этапа задачи выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне одного параметра**

Обозначение закона	Коэффициент закона	Значение критерия K_1
U_{11}^1	0,2	1,072
U_{21}^1	0	1,145
U_{31}^1	2,1	1,009
U_{41}^1	0	1,145
U_{12}^1	0	1,145
U_{22}^1	0,1	1,068
U_{32}^1	0	1,145
U_{42}^1	0,8	0,99
U_{13}^1	0	1,145
U_{23}^1	1,8	1,070
U_{33}^1	0	1,145
U_{43}^1	1,9	1,100

Таблица 1.5.8. **Результаты численного решения первого этапа задачи выбора оптимальной пары законов параметрического регулирования**

Пары законов параметрического регулирования				Значение критерия K_1
Первый закон пары		Второй закон пары		
Обозначение закона	Оптимальное значение коэффициента	Обозначение закона	Оптимальное значение коэффициента	
U_{42}^1	0,8	U_{13}^1	0	0,99
U_{42}^1	0,8	U_{23}^1	1,6	0,97
U_{42}^1	0,8	U_{33}^1	0	0,99
U_{42}^1	0,8	U_{43}^1	0	0,99

Далее были оценены коэффициенты математической модели взаимодействия неидентичных экономических систем двух государств через внешнюю торговлю на основе данных различных государств [37, 36]. Результаты параметрической идентификации показывают на приемлемую точность описания. Значения критерия K_i $(i = 1, 2)$ были соответственно равны $K_1 = 1{,}137$, $K_2 = 1{,}775$ при $C_1 = 0{,}15$, $C_2 = 0{,}015$, $\theta = 0{,}2$.

Решение задачи выбора, на базе математической модели взаимодействия неидентичных экономических систем двух государств через внешнюю торговлю, оптимального закона параметрического регулирования обменного валютного курса θ для экономической системы первого государства позволяет предложить закон вида

$$\theta = -1{,}2\frac{\Delta M_1(t)}{139\,435} + 0{,}2.$$

При регулировании курса валюты первого государства по этому закону его критерий улучшается со значения 1,137 до 1,123. При этом критерий второго государства ухудшается со значения 1,734 до 1,828.

Решение задачи выбора, на базе математической модели взаимодействия неидентичных экономических систем двух государств через внешнюю торговлю, оптимальной пары законов параметрического регулирования позволяет предложить следующие законы:

$$\pi_1 = 0{,}2\frac{\Delta M_1(t)}{139\,435} + 0{,}1136, \quad \theta = 1{,}5\frac{\Delta M_1(t)}{139\,435} + 0{,}2.$$

При этом наблюдается критерий $K_2 = 1{,}83$ у экономической системы второго государства при $K_1 = 1{,}05$.

При решении задачи выбора оптимального закона параметрического регулирования второго государства из рассматриваемой пары государств были получены следующие результаты. Оптимальное регулирование параметра θ осуществляется с помощью закона

$$\theta_2 = \frac{1}{-0{,}12\Delta p_2(t) + 0{,}2}.$$

При этом значение критерия K_2 улучшилось от 1,775 до 1,73.

При решении задачи выбора оптимальной пары законов параметрического регулирования для второго государства была получена следующая пара законов:

$$\theta_2 = \frac{1}{-0{,}11\Delta p_2(t) + 0{,}2}, \quad \pi_2 = -0{,}01\Delta p_2(t) + 0{,}1388.$$

При регулировании по этим законам значение критерия K_2 составило 1,66. В обоих случаях критерий первого государства K_1 менялся незначительно (увеличение в пределах 1%).

При проведении одновременного регулирования параметров двух государств было отмечено улучшение значений критериев в пределах 3% для каждого государства по сравнению с регулированием каждого государства по отдельности. Так, оптимальное регулирование первого государства на уровне одного параметра осуществляется с помощью закона U^1_{42}, при этом законе критерий $K_1 = 0{,}99$. Оптимальное регулирование второго государства на уровне одного параметра осуществляется с помощью закона U^2_{43}, при этом законе критерий $K_2 = 1{,}72$. При одновременном применении законов регулирования U^1_{42} и U^2_{43} для обоих государств значения критериев оказались равными $K_1 = 0{,}98$ и $K_2 = 1{,}66$.

Исследование структурной устойчивости математической модели страны с учетом влияния международной торговли и валютных обменов с параметрическим регулированием. Проверим грубость системы (1.5.67)–(1.5.86), где параметры ξ_i, π_i, θ определяются в соответствии с решением задач параметрического регулирования в виде выражений

$$\begin{aligned}
&1)\ U^i_{1\beta} = k^i_{1\beta}\frac{\Delta M_i(t)}{M_i(t_0)} + \mathrm{const}^i_\beta,\\
&2)\ U^i_{2\beta} = -k^i_{2\beta}\frac{\Delta M_i(t)}{M_i(t_0)} + \mathrm{const}^i_\beta,\\
&3)\ U^i_{3\beta} = k^i_{3\beta}\frac{\Delta p_i(t)}{p_i(t_0)} + \mathrm{const}^i_\beta,\\
&4)\ U^i_{4\beta} = -k^i_{4\beta}\frac{\Delta p_i(t)}{p_i(t_0)} + \mathrm{const}^i_\beta
\end{aligned} \tag{1.5.92}$$

при любых значениях настраиваемых коэффициентов $k^i_{\alpha\beta} \geqslant 0$. Здесь const^i_β — постоянная, равная оценке значений β-го параметра i-го государства по результатам параметрической идентификации, $i = \overline{1,2}$, $\alpha = \overline{1,4}$, $\beta = \overline{1,3}$.

Применение закона параметрического регулирования $U^i_{\alpha\beta}$ означает подстановку соответствующих функций вместо параметров ξ_i $(j = 1)$, π_i $(j = 2)$ и θ $(j = 3)$ в уравнения модели (1.5.67)–(1.5.86).

В результате применения этих законов к системе (1.5.67)–(1.5.86) получается следующая система:

$$\frac{dM_i}{dt} = \frac{\Phi_i^I}{p_i b_i} - \mu_i M_i, \tag{1.5.93}$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = M_i f_i - \frac{\Phi_i}{p_i}, \tag{1.5.94}$$

$$\frac{dL_i^G}{dt} = r_{Gi} L_i^G + \Phi_i^G - n_{pi}\Phi_i - n_{Li} s_i R_i^L - n_{Oi}(d_i^p + d_i^B), \tag{1.5.95}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\alpha_i \frac{Q_i}{M_i} p_i, \tag{1.5.96}$$

$$\frac{ds_i}{dt} = \frac{s_i}{\Delta_i} \max\left\{0, \frac{R_i^d - R_i^S}{R_i^S}\right\}, \quad R_i^L = \min\{R_i^d, R_i^S\}, \tag{1.5.97}$$

$$L_i^p = \frac{1 - U_{\alpha 1}^i}{U_{\alpha 1}^i} L_i^G, \tag{1.5.98}$$

$$d_i^p = \frac{1 - U_{\alpha 1}^i}{U_{\alpha 1}^i} \beta_i r_{2i} L_i^G, \tag{1.5.99}$$

$$d_i^B = \beta_i r_{2i} L_i^G, \tag{1.5.100}$$

$$x_i = \frac{\nu_i}{1 - \delta_i} \left(1 - \left(\frac{s_i \nu_i}{p_i}\right)^{\frac{1-\delta_i}{\delta_i}}\right), \tag{1.5.101}$$

$$R_i^d = M_i x_i, \tag{1.5.102}$$

$$f_i = 1 - \left(1 - \frac{1 - \delta_i}{\nu_i} x_i\right)^{\frac{1}{1-\delta_i}}, \tag{1.5.103}$$

$$\Phi_i^O = \eta_{Oi} p_i M_i f_i, \tag{1.5.104}$$

$$\Phi_i^G = U_{\alpha 2}^i p_i M_i f_i, \tag{1.5.105}$$

$$\Phi_i^L = (1 - n_{Li}) s_i R_i^d, \tag{1.5.106}$$

$$\Phi_i^I = \frac{1}{1+n_{pi}}\left\{\frac{k_{qi}M_i f_i}{\xi_i} - (1-n_{pi})\Phi_i^G + n_{Oi}(d_i^B + d_i^p) + \right.$$
$$+ n_{pi}\Phi_i^O + [n_{Li} + (1-n_{Li})n_{pi}]s_i R_i^L + n_{pi}(\Phi_{ji} - U_{\alpha 3}^i \Phi_{ij}) +$$
$$\left. + \mu_i L_{pi} - r_{Gi} L_i^p \right\}, \quad (1.5.107)$$

$$R_i^S = P_{0i}^A \exp(\lambda_{pi} t)\frac{1}{1+\nu_i\omega_i}, \quad \omega_i = \frac{\Phi_i^L}{\left(1 + C_i^L U_{\alpha 3}^i \dfrac{p_j}{p_i}\right) P_{0i}(\lambda_{pi} t)},$$
$$j = 3 - i, \quad (1.5.108)$$

$$\Phi_{12} = \frac{C_1^L \dfrac{p_2}{p_1}}{1 + C_1^L U_{\alpha 3}^i \dfrac{p_2}{p_1}}\Phi_1^L + \frac{C_1^O \dfrac{p_2}{p_1}}{1 + C_1^O U_{\alpha 3}^i \dfrac{p_2}{p_1}}\Phi_1^O, \quad (1.5.109)$$

$$\Phi_{21} = \frac{C_2^L \dfrac{p_1}{p_2}}{1 + C_2^L \dfrac{1}{U_{\alpha 3}^i}\dfrac{p_1}{p_2}}\Phi_2^L + \frac{C_2^O \dfrac{p_1}{p_2}}{1 + C_2^O \dfrac{1}{U_{\alpha 3}^i}\dfrac{p_1}{p_2}}\Phi_2^O, \quad (1.5.110)$$

$$\Phi_1 = \Phi_1^I + \Phi_1^L + \Phi_1^O + \Phi_1^G + \Phi_{21} - U_{\alpha 3}^i \Phi_{12}, \quad (1.5.111)$$

$$\Phi_2 = \Phi_2^I + \Phi_2^L + \Phi_2^O + \Phi_2^G + \Phi_{12} - \frac{1}{U_{\alpha 3}^i}\Phi_{21}. \quad (1.5.112)$$

Доказательство слабой структурной устойчивости математической модели позволяет установить сохранение слабой структурной устойчивости рассматриваемой модели при применении законов параметрического регулирования $U_{\alpha\beta}^i$ в виде следующего утверждения.

Утверждение 1.5.4. *Пусть N — компактное множество, лежащее в области $(M_1 > 0,\ Q_1 < 0,\ p_1 > 0)$ или $(M_1 > 0,\ Q_1 > 0,\ p_1 > 0)$ фазового пространства системы дифференциальных уравнений модели* (1.5.93)–(1.5.112), *т. е. восьмимерного пространства переменных (M_i, Q_i, p_i, L_{Gi}), $i = 1, 2$; замыкание внутренности N совпадает с N. Тогда поток f, определяемый системой* (1.5.93)–(1.5.112), *слабо структурно устойчив на N.*

Нахождение точек бифуркации экстремалей задачи вариационного исчисления на базе математической модели страны с учетом влияния международной торговли и валютных обменов. Кроме

рассмотренного выше случая, задача выбора оптимального набора законов решалась и в другой постановке.

В работе выбор оптимальных законов параметрического регулирования на базе модели (1.5.67)–(1.5.86) на уровне одного из двух параметров ξ_i, π_i осуществляется в среде набора следующих зависимостей:

$$\begin{aligned}
&1)\ U^i_{1\beta} = k^i_{1\beta}\frac{\Delta M_i(t)}{M_i(t_0)} + \mathrm{const}^i_\beta,\\
&2)\ U^i_{2\beta} = -k^i_{2\beta}\frac{\Delta M_i(t)}{M_i(t_0)} + \mathrm{const}^i_\beta,\\
&3)\ U^i_{3\beta} = k^i_{3\beta}\frac{\Delta p_i(t)}{p_i(t_0)} + \mathrm{const}^i_\beta,\\
&4)\ U^i_{4\beta} = -k^i_{4\beta}\frac{\Delta p_i(t)}{p_i(t_0)} + \mathrm{const}^i_\beta.
\end{aligned} \tag{1.5.113}$$

Здесь $U^i_{\alpha\beta}$ — α-й закон регулирования β-го параметра i-го государства, $\alpha = \overline{1,4}$, $\beta = \overline{1,2}$; случай $\beta = 1$ соответствует параметру ξ_i, $\beta = 2 - \pi_i$; $\Delta M_i(t) = M_{\alpha\beta i}(t) - M_i(t_0)$, $\Delta p_i(t) = p_{\alpha\beta i}(t) - p_i(t_0)$, где t_0 — время начала регулирования, $t \in [t_0, t_0 + T]$, $M_{\alpha\beta i}(t)$, $p_{\alpha\beta i}(t)$ — значения производственной мощности и уровня цен i-го государства соответственно при $U^i_{\alpha\beta}$-м законе регулирования; $k^i_{\alpha\beta}$ — настраиваемый коэффициент соответствующего закона ($k^i_{\alpha\beta} \geqslant 0$); const^i_β — постоянная, равная оценке значений β-го параметра по результатам параметрической идентификации.

Задача выбора оптимального закона параметрического регулирования для экономической системы i-й страны на уровне одного из экономических параметров (ξ_i, π_i, θ) ставилась в следующем виде. Найти на основе математической модели (1.5.67)–(1.5.86) оптимальный закон параметрического регулирования в среде набора алгоритмов (1.5.113), т. е. найти оптимальный закон (и его коэффициент $k^i_{\alpha\beta}$) из множества $\{U^i_{\alpha\beta}\}$, который обеспечил бы максимум критерия

$$K_i = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} Y_i(t)\,dt, \tag{1.5.114}$$

где $Y_i = M_i f_i$. В вычислительных экспериментах исследовалось влияние параметрического регулирования первого государства ($i = 1$).

Замкнутое множество в пространстве непрерывных вектор-функций выходных переменных системы (1.5.67)–(1.5.86) и регулирующих параметрических воздействий определяется следующими соотношениями:

$$|p_1(t) - p_1^{**}(t)| \leqslant 0{,}09 p_1^{**}(t),$$
$$(M_i(t), Q_i(t), L_i^G(t), p_i(t), s_i(t)) \in X, \quad 0 \leqslant U_{\alpha\beta}^i \leqslant a_\beta^i, \quad (1.5.115)$$
$$\alpha = \overline{1,4}, \quad \beta = \overline{1,2}, \quad i = \overline{1,2} \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Здесь a_β^i — наибольшее возможное значение α-го параметра i-го государства, $p_i^{**}(t)$ — модельные (расчетные) значения уровня цен i-го государства без параметрического регулирования, X — компактное множество допустимых значений указанных переменных.

В данной задаче вариационного исчисления рассматривалась ее зависимость от двумерного коэффициента $\lambda = (r_{21}, \theta)$ математической модели, возможные значения которого принадлежат некоторой области (прямоугольнику) Λ на плоскости.

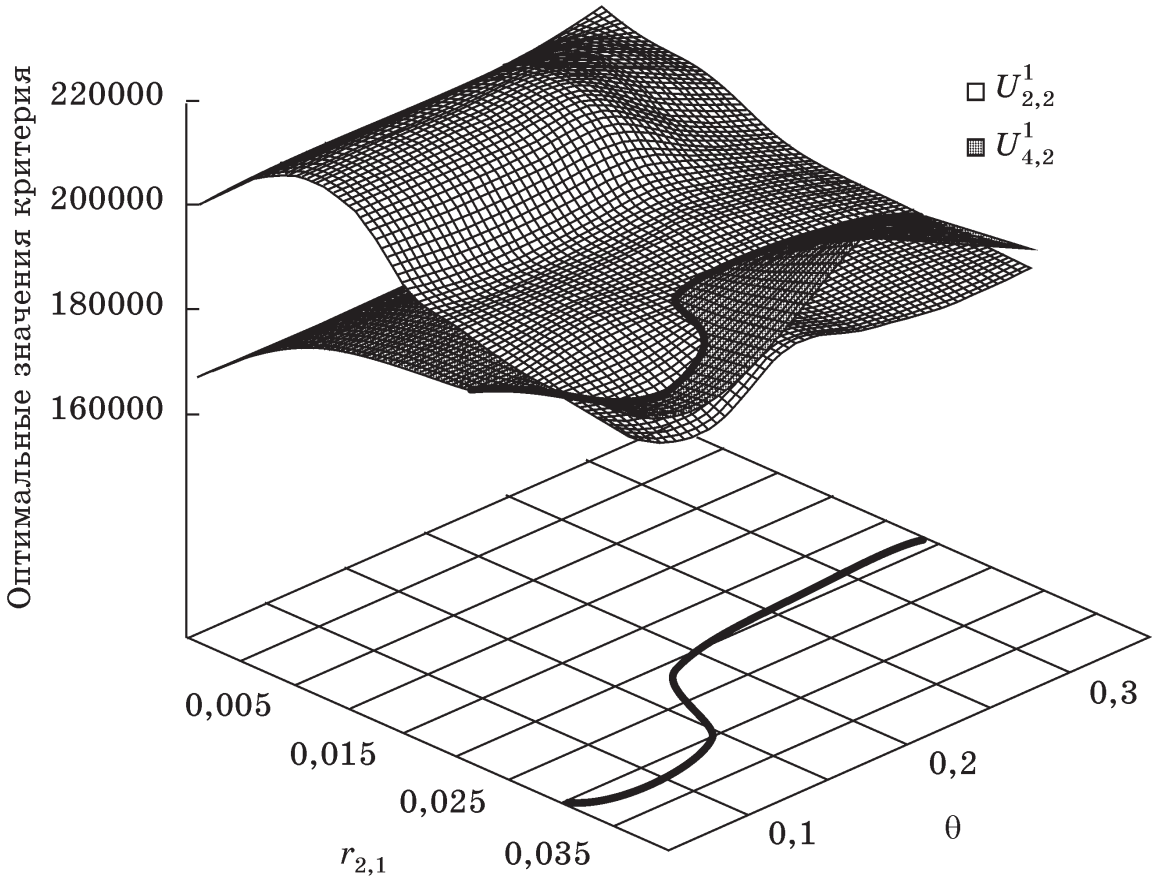

Рис. 1.5.13. Графики зависимостей оптимальных значений критерия от параметров ставки процента по депозитам r_{21} и обменного курса валюты θ

В результате вычислительного эксперимента были получены графики зависимостей оптимального значения критерия K от значений параметров (r_{21}, θ) для каждого из восьми возможных законов $U^1_{\alpha\beta}$, $\alpha = \overline{1,4}$, $\beta = \overline{1,2}$. На рис. 1.5.13 представлены указанные графики для двух законов (U^1_{22} и U^1_{42}), дающих наибольшее значение критерия в области Λ, линия пересечения соответствующих поверхностей и проекция этой линии пересечения на плоскость значений λ, состоящая из точек бифуркации этого двумерного параметра. Эта проекция делит прямоугольник Λ на две части, в одной из которых оптимальным является закон управления $U^1_{22} = -k^1_{22}\dfrac{\Delta M_1(t)}{M_1(t_0)} + \mathrm{const}^1_2$, а в другой — $U^1_{42} = -k^1_{42}\dfrac{\Delta p_1(t)}{p_1(t_0)} + \mathrm{const}^1_2$, на самой проекции линии оба указанных закона являются оптимальными.

1.5.6. Математическая модель глобальной экономики Форрестера

Описание модели. Математическая модель модели «Мировой динамики» Форрестера [29] представлена следующей системой обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений (t — время):

$$P'(t) = P(t)(Bn(t) - D(t)), \tag{1.5.116}$$

$$V'(t) = C_{VG}P(t)V_M(M) - C_{VD}V(t), \tag{1.5.117}$$

$$Z'(t) = C_Z P(t) Z_V(V_R) - \frac{Z(t)}{T_Z(Z_R)}, \tag{1.5.118}$$

$$R'(t) = -C_R P(t) R_M(M), \tag{1.5.119}$$

$$S'(t) = \frac{C_S S_Q Q_M(M) S_F(F)/Q_F(F) - S(t)}{T_S}, \tag{1.5.120}$$

$$M(t) = \frac{V_R(t)(1 - S(t))E_R(R_R)}{(1 - S_N)E_N}, \tag{1.5.121}$$

$$F(t) = \frac{F_S(S_R)F_Z(Z_R)F_P(P_R)F_C}{F_N}, \tag{1.5.122}$$

$$Bn(t) = P(t)C_B B_M(M)B_P(P_R)B_F(F)B_Z(Z_R), \tag{1.5.123}$$

$$D(t) = P(t)C_D D_M(M)D_P(P_R)D_F(F)D_Z(Z_R), \tag{1.5.124}$$

$$Q(t) = C_Q Q_M(M) Q_P(P_R) Q_F(F) Q_Z(Z_R), \tag{1.5.125}$$

$$P_R(t) = \frac{P(t)}{P_N}, \tag{1.5.126}$$

$$V_R(t) = \frac{V(t)}{P(t)}, \tag{1.5.127}$$

$$S_R(t) = \frac{V_R(t) S(t)}{S_N}, \tag{1.5.128}$$

$$R_R(t) = \frac{R(t)}{R_0}, \tag{1.5.129}$$

$$Z_R(t) = \frac{Z(t)}{Z_N}. \tag{1.5.130}$$

Рассматриваемая модель содержит следующие экзогенные константы:

C_Q — стандартное качество жизни,

C_B — нормальный темп рождаемости,

C_D — нормальный темп смертности,

F_C — коэффициент питания,

C_Z — нормальное загрязнение,

C_R — нормальное потребление природных ресурсов,

F_N — нормальный уровень питания,

E_N — нормальная эффективность относительной величины фондов,

C_{VD} — нормальный износ фондов,

C_{VG} — нормальное фондообразование,

T_S — коэффициент влияния загрязнения.

Экзогенные функции модели:

B_M — множитель зависимости рождаемости от материального уровня жизни,

B_P — множитель зависимости рождаемости от плотности населения,

B_F — множитель зависимости рождаемости от питания,

B_Z — множитель зависимости рождаемости от загрязнения,

D_M — множитель зависимости смертности от материального уровня жизни,

D_P — множитель зависимости смертности от плотности населения,

D_F — множитель зависимости смертности от питания,

D_Z — множитель зависимости смертности от загрязнения,

Q_M — множитель зависимости качества жизни от материального уровня жизни,

Q_P — множитель зависимости качества жизни от плотности населения,

Q_F — множитель зависимости качества жизни от питания,

Q_Z — множитель зависимости качества жизни от загрязнения,

F_S — пищевой потенциал фондов,

F_Z — множитель зависимости производства пищи от загрязнения,

F_P — множитель зависимости производства пищи от плотности населения,

E_R — множитель зависимости стоимости добычи природных ресурсов,

Z_V — множитель зависимости загрязнения от удельного объема фондов,

T_Z — время разложения загрязнения (отражает затрудненность естественного разложения при увеличении загрязнения),

R_M — множитель зависимости темпа добычи природных ресурсов от материального уровня жизни,

S_Q — множитель зависимости доли фондов в сельском хозяйстве от относительного качества жизни,

S_F — множитель зависимости доли фондов в сельском хозяйстве от уровня питания,

R_R — доля оставшихся ресурсов,

P_R — относительная плотность населения,

V_R — удельный капитал,

Z_R — относительное загрязнение,

S_R — относительная величина сельскохозяйственных фондов.

Эндогенные переменные модели:

P — численность население мира,

V — основные фонды,

Z — уровень загрязнения,

R — остающаяся часть природных ресурсов,

S — доля фондов в сельском хозяйстве (т. е. в отрасли обеспечения пищей),

M — материальный уровень жизни,

F — относительный уровень питания (количество пищи на человека),

Q — уровень качества жизни,

Bn — темп рождаемости,

D — темп смертности.

В [26] использовались следующие значения коэффициентов и констант:

$$\begin{gathered} C_B = 0{,}04, \quad C_D = 0{,}028, \quad C_Z = 1, \quad C_R = 1, \\ C_Q = 1, \quad F_C = 1, \quad F_N = 1, \quad E_N = 1, \\ P_N = 3, \cdot 10^9, \quad Z_N = 3{,}6 \cdot 10^9, \\ S_N = 0{,}3, \quad T_S = 15, \quad T_{VD} = 40, \quad C_{VG} = 0{,}05, \end{gathered} \tag{1.5.131}$$

а также следующие начальные условия для дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} P_0 = 1{,}65 \cdot 10^9, \quad V_0 = 0{,}4 \cdot 10^9, \\ S_0 = 0{,}2, \quad Z_0 = 0{,}2 \cdot 10^9, \quad R_0 = 9 \cdot 10^{11}, \end{gathered}$$

соответствующие начальному значению времени $t_0 = 1900$. Эти данные были получены на основе наблюдений за 1900–1970 гг.

В настоящей работе значения параметров C_D, C_Z, C_R, C_Q, T_S, T_{VD} принимаются равными выше указанным данным из (1.5.131). Значения параметров C_B, C_{VG} и F_C были заново оценены на основе данных о численности населения Земли за 1901–2009 гг. [61] и расчетных данных по функциям состояния $V^*(t)$, $S^*(t)$, $R^*(t)$, $Z^*(t)$ (принятых при решении задачи параметрической идентификации в качестве наблюдаемых) на основе модели (1.5.116)–(1.5.130). Эти значения определялись с помощью решения задачи параметрической идентификации поисковым методом в смысле минимума критерия:

$$K = \sqrt{\frac{1}{545} \sum_{t=1901}^{2009} (A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2)},$$

Здесь $A = P(t)/P^*(t) - 1$, $B = S(t)/S^*(t) - 1$, $C = R(t)/R^*(t) - 1$, $D = Z(t)/Z^*(t) - 1$, $E = V(t)/V^*(t) - 1$, $P^*(t)$ и $P(t)$ — наблюдаемые и модельные (расчетные) значения численности населения соответственно, значения $V(t)$, $S(t)$, $R(t)$, $Z(t)$ — расчетные данные системы (1.5.116)–(1.5.130). В результате решения указанной выше задачи параметрической идентификации были получены следующие оценки значений оцениваемых параметров: $C_B = 0{,}042095$, $C_{VG} = 0{,}049644$, $F_C = 1{,}078077$. При этом относительная величина среднеквадратического отклонения расчетных значений переменных от соответствующих наблюдаемых значений составила приблизительно $100K = 4{,}27\%$.

Исследование структурной устойчивости математической модели Форрестера без параметрического регулирования

Утверждение 1.5.5. *Пусть N — компактное множество, лежащее в области $\{P > 0, V > 0, S > 0, Z > 0, R > 0\}$ фазового пространства системы дифференциальных уравнений, полученных из* (1.5.116)–(1.5.130), *т. е. пятимерного пространства переменных $\{P, V, S, Z, R\}$; замыкание внутренности N совпадает с N. Тогда поток f, определяемый системой* (1.5.116)–(1.5.130), *слабо структурно устойчив на N.*

В качестве N можно выбрать, например, параллелепипед с границами $P = P_{\min}$, $P = P_{\max}$, $V = V_{\min}$, $V = V_{\max}$, $S = S_{\min}$, $S = S_{\max}$, $Z = Z_{\min}$, $Z = Z_{\max}$, $R = R_{\min}$, $R = R_{\max}$. Здесь $0 < P_{\min} < P_{\max}$, $0 < V_{\min} < V_{\max}$, $0 < S_{\min} < S_{\max}$, $0 < Z_{\min} < Z_{\max}$, $0 < R_{\min} < R_{\max}$.

Доказательство. Проверим вначале, что полутраектория потока f, начинающаяся в любой точке множества N при некотором значении t $(t > 0)$, выходит из N.

Рассмотрим любую полутраекторию, начинающуюся в N. Для нее при $t > 0$ возможны два случая: все точки полутраектории остаются в N или для некоторого t точка полутраектории не принадлежит N. В первом случае из уравнения (1.5.119) $R'(t) = -C_R P(t) R_M(M)$ системы следует, что переменная $R(t)$ для всех $t > 0$ имеет производную, меньше некоторой отрицательной константы, т. е. $R(t)$ стремится к нулю при неограниченном увеличении t, поэтому первый случай невозможен, орбита любой точки из N выходит из N.

Поскольку любое цепочно-рекуррентное множество $R(f, N)$, лежащее внутри N, является инвариантным множеством этого потока, то, в случае его непустоты, оно состоит только из целых орбит. Следовательно, в нашем случае $R(f, N)$ пусто. Утверждение следует из теоремы A [67].

Выбор оптимальных законов параметрического регулирования на базе модели Форрестера. Рассмотрим возможность выработки рекомендаций по выбору рационального сценария развития мировой политики (в смысле цели — максимизации среднего значения качества жизни за 1971–2100 гг.) через выбор оптимальных законов регулирования на примере экономических параметров: F_C — коэффициент питания $(j = 1)$ и C_B — нормальный темп рождаемости $(j = 2)$.

Указанная задача выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне параметра решалась в среде набора

следующих зависимостей:

$$
\begin{aligned}
&1)\ U_{1j} = \mathrm{const}_j + k_{1j}\left(\frac{P(t)}{P(t_0)} - 1\right),\\
&2)\ U_{2j} = \mathrm{const}_j - k_{2j}\left(\frac{P(t)}{P(t_0)} - 1\right),\\
&3)\ U_{3j} = \mathrm{const}_j + k_{3j}\left(\frac{R(t)}{R(t_0)} - 1\right),\\
&4)\ U_{4j} = \mathrm{const}_j - k_{4j}\left(\frac{R(t)}{R(t_0)} - 1\right),\\
&5)\ U_{5j} = \mathrm{const}_j + k_{5j}\left(\frac{Z(t)}{Z(t_0)} - 1\right),\\
&6)\ U_{6j} = \mathrm{const}_j - k_{6j}\left(\frac{Z(t)}{Z(t_0)} - 1\right),\\
&7)\ U_{7j} = \mathrm{const}_j + k_{7j}\left(\frac{V(t)}{V(t_0)} - 1\right),\\
&8)\ U_{8j} = \mathrm{const}_j - k_{8j}\left(\frac{V(t)}{V(t_0)} - 1\right),\\
&9)\ U_{9j} = \mathrm{const}_j + k_{9j}\left(\frac{S(t)}{S(t_0)} - 1\right),\\
&10)\ U_{10j} = \mathrm{const}_j - k_{10j}\left(\frac{S(t)}{S(t_0)} - 1\right),\\
&11)\ U_{11j} = \mathrm{const}_j + k_{11j}\left(\frac{Q(t)}{Q(t_0)} - 1\right),\\
&12)\ U_{12j} = \mathrm{const}_j - k_{12j}\left(\frac{Q(t)}{Q(t_0)} - 1\right).
\end{aligned}
\tag{1.5.132}
$$

Здесь $k_{ij} \geqslant 0$ — настраиваемый коэффициент соответствующего закона U_{ij} $(i = \overline{1,12},\ j = 1,2)$; const_j — базовое значение (без параметрического регулирования) коэффициента питания F_C^* (при $j = 1$) или нормального темпа рождаемости C_B^* (при $j = 2$); время начала регулирования t_0 соответствует 1971 г. Использование одного из законов (1.5.132) означает подстановку соответствующей функции из правой части соответствующего соотношения (1.5.132) в уравнение (1.5.122) или (1.5.123) системы (1.5.116)–(1.5.130) вместо параметра F_C или C_B.

Задача выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне параметр F_C в среде набора алгоритмов (1.5.132) ставилась следующим образом. Найти на основе математической модели (1.5.116)–(1.5.130) оптимальный закон параметрического регулирования в среде набора алгоритмов (1.5.132), т. е. найти оптимальный закон из этого множества алгоритмов и его настраиваемый коэффициент, который обеспечил бы максимум критерия, характеризующего среднее значение уровня качества жизни на отрезке времени от 1971 до 2100 г.:

$$K_1 = \frac{1}{130} \sum_{t=1971}^{2100} Q(t) \tag{1.5.133}$$

при ограничениях

$$\sum_{t=1971}^{2100} Z(t) \leqslant \overline{Z}, \quad F_C(t) \in [0{,}9; 1{,}1]. \tag{1.5.134}$$

Здесь $\overline{Z}$ — суммарное значение уровней загрязнения за 1971–2100 гг. без параметрического регулирования.

Сформулированная задача решается в два этапа:

— на первом этапе определяются оптимальные значения коэффициентов k_{ij} для каждого закона (1.5.132) путем перебора значений настраиваемых коэффициентов в промежутках вида $[0, k_{ij}^m)$, квантованных с достаточно малым шагом, обеспечивающих максимум критерия K_1 при ограничениях (1.5.134). Здесь k_{ij}^m — первое значение коэффициента, при котором нарушается (1.5.134).

— на втором этапе выбирается закон оптимального регулирования параметра (из двенадцати) на основе результатов первого этапа по максимальному значению критерия K_1.

Результаты численного решения задачи выбора оптимального закона параметрического регулирования экономической системы на уровне указанного экономического параметра показывают, что наилучший результат $K_1 = 0{,}70827$ может быть получен при использовании следующего закона регулирования вида 8) из (1.5.132):

$$F_C = F_C^* - 0{,}158 \left(\frac{V(t)}{V(t_0)} - 1 \right). \tag{1.5.135}$$

Заметим, что значение критерия (1.5.133) без параметрического регулирования составляет $K_1 = 0{,}6515$, приращение значения критерия при указанном параметрическом регулировании по сравнению с базовым вариантом составляет 5,025% (рис. 1.5.14).

Задача выбора оптимальной пары законов параметрического регулирования на уровне параметров F_C и C_B в среде набора алгоритмов (1.5.132) ставилась следующим образом. Найти на основе

Рис. 1.5.14. Траектории, характеризующие изменение качества жизни Q: *1* — тенденция, оцененная Форрестером; *2* — тенденция, полученная в результате регулирования параметра воздействия на производство сельскохозяйственной продукции

математической модели (1.5.116)–(1.5.130) оптимальную пару законов параметрического регулирования в среде набора алгоритмов (1.5.132), т. е. найти оптимальную пару законов из этого множества алгоритмов и их настраиваемые коэффициенты, которые обеспечивали бы максимум критерия (1.5.133) при ограничениях (1.5.134).

Результаты численного решения задачи выбора оптимальной пары законов параметрического регулирования экономической системы государства на уровне двух параметров F_C и C_B показывают, что наилучший результат $K_1 = 0{,}703135$ может быть получен при использовании следующей пары законов:

$$\begin{aligned} F_C &= F_C^* - 0{,}15\left(\frac{V(t)}{V(t_0)} - 1\right), \\ C_B &= C_B^* - 0{,}01\left(\frac{P(t)}{P(t_0)} - 1\right). \end{aligned} \tag{1.5.136}$$

В этом случае при указанном параметрическом регулировании приращение значения критерия K_1 по сравнению с базовым вариантом составляет 7,93%.

Сравним полученные результаты параметрического регулирования эволюции динамической системы (1.5.116)–(1.5.130) с найденными оптимальными законами на уровне одного (1.5.135) и двух (1.5.136) параметров и результаты сценария — увеличение параметра F_C на 25% по сравнению с базовым решением (полученным для следующих значений констант: $C_B = 0{,}042095$, $C_D = 0{,}028$, $C_Z = 1$, $C_R = 1$, $C_Q = 1$, $F_C = 1{,}078077$, $F_N = 1$, $E_N = 1$, $P_N = 3{,}6 \cdot 10^9$, $Z_N = 3{,}6 \cdot 10^9$, $S_N = 0{,}3$, $T_S = 15$, $T_{VD} = 40$, $C_{VG} = 0{,}049644$, и следующих начальных условий для дифференциальных уравнений: $P_0 = 1{,}65 \cdot 10^9$, $V_0 = 0{,}4 \cdot 10^9$, $S_0 = 0{,}2$, $Z_0 = 0{,}2 \cdot 10^9$, $R_0 = 9 \cdot 10^{11}$).

Сравнение показывает, что при указанном выше сценарии (увеличении параметра F_C на 25%) среднее значение качества жизни (критерий K_1) в промежутке времени с 1971 по 2100 г. уменьшается на 9,77% по сравнению с базовым вариантом, а среднее значение загрязнения $\dfrac{1}{130}\sum\limits_{t=1971}^{2100} Z(t)$ увеличивается на 4,97% по сравнению с базовым вариантом. При использовании оптимального закона (1.5.135) по параметру F_C показатель качества жизни по сравнению с базовым улучшается на 5,025%, а среднее значение загрязнения по сравнению с базовым уменьшается на 3,5%. При этом значение коэффициента питания F_C по оптимальному закону (1.5.135) изменяется не более чем на 10% по сравнению с базовым значением этого коэффициента $F_C = 1{,}078077$. При использовании оптимальной пары законов вида (1.5.136) показатель качества жизни улучшается на 7,93%, а среднее значение загрязнения уменьшается на 1% по сравнению с базовым вариантом.

Исследование структурной устойчивости математической модели Форрестера с учетом параметрического регулирования. Применение найденных выше оптимальных законов параметрического регулирования (1.5.132) означает замену в уравнениях (1.5.122), (1.5.123) параметров F_C и C_B на соответствующие функции, остальные уравнения модели остаются неизменными. Доказательство слабой структурной устойчивости математической модели, приведенное выше и основанное на использовании уравнения (1.5.119), позволяет получить следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 1.5.6. *Пусть N — компактное множество, лежащее в области $\{P > 0, V > 0, S > 0, Z > 0, R > 0\}$ фазового пространства системы дифференциальных уравнений, полученных из* (1.5.116)–(1.5.130), *т. е. пятимерного пространства переменных $\{P, V, S, Z, R\}$; замыкание внутренности N*

совпадает с N. *Тогда поток* f, *определяемый системой* (1.5.116)–(1.5.130) *и* (1.5.135) *или* (1.5.136), *слабо структурно устойчив на* N.

Нахождение точек бифуркации экстремалей задачи вариационного исчисления на базе математической модели неоклассической теории оптимального роста. Исследуем зависимость решения рассмотренной выше задачи выбора оптимального закона параметрического регулирования от значений двумерного параметра (C_{VG}, C_{VD}), возможные значения которого принадлежат области (прямоугольнику) Λ на плоскости. В результате вычислительных экспериментов были получены графики зависимостей оптимальных значений критерия K от значений параметра (C_{VG}, C_{VD}) для каждого из 24 возможных законов U_{ij}, $i = \overline{1,12}$, $j = \overline{1,2}$. Рисунок 1.5.15 демонстрирует такие графики для четырех законов $U_{2,1}$,

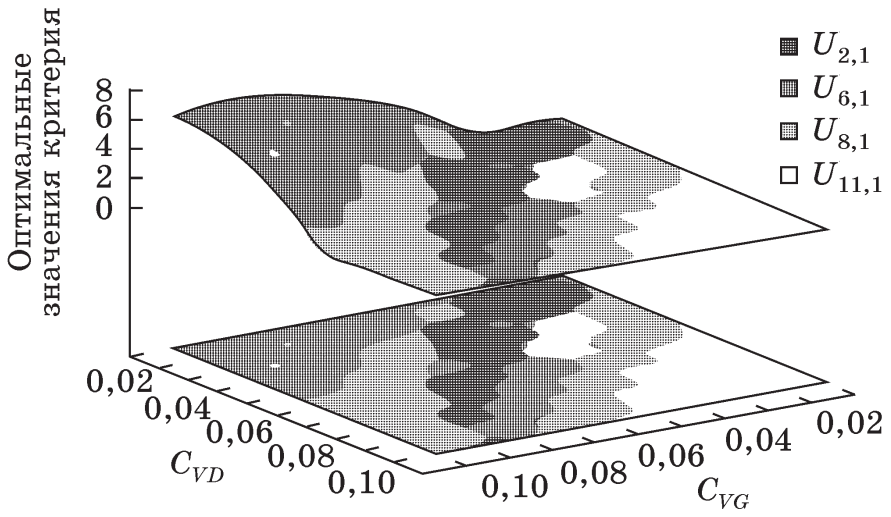

Рис. 1.5.15. График зависимостей оптимальных значений критерия K от параметров (C_{VG}, C_{VD})

$U_{6,1}$, $U_{11,1}$, $U_{8,1}$, которые дают наибольшие значения критерия K в области Λ и линии пересечения соответствующих поверхностей. Проекция этих линий на плоскость (C_{VG}, C_{VD}) состоит из бифуркационных точек этого двумерного параметра. Эта проекция делит прямоугольник Λ на две части, в каждой из которых оптимальным является один из законов $(U_{2,1}, U_{6,1}, U_{11,1}, U_{8,1})$ параметрического регулирования. На границах этих областей оптимальными являются два (или три) соответствующих закона.

1.5.7. Монетарная модель Турновского

Описание модели. Монетарная модель Турновского [72] после соответствующих преобразований (для случая рассмотренного в

[72] сценария экономического развития, когда государственный дефицит полностью финансируется деньгами при неизменном запасе облигаций на душу населения) представлена системой следующих дифференциальных и алгебраических уравнений:

$$\dot{\pi} = \rho[p - \pi], \tag{1.5.137}$$

$$\dot{m} = g - uy + b(r_e(1-u) + \pi) - (m+b)(n+p), \tag{1.5.138}$$

$$\dot{z} = \frac{\gamma(1-u)}{\gamma - 1}[r_e z - Rk] + \\ + \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{z}{k} - 1\right) + 1\right]\gamma(k^* - k) + n\frac{z-k}{\gamma - 1}, \tag{1.5.139}$$

$$\dot{k} = \gamma(k^* - k), \tag{1.5.140}$$

$$y = Ak^{\alpha}, \tag{1.5.141}$$

$$r_e = A\alpha k^{*\,\alpha-1}, \tag{1.5.142}$$

$$R = A\alpha k^{\alpha-1}, \tag{1.5.143}$$

$$k^* = \\ = \frac{y - c\left[(y - Rk)(1-u) + \dfrac{b+z}{l_2}[(1-l_4)m - l_4(b+z) - l_1 y + l_3\pi] + zn - m\pi\right] - nk + g}{\lambda\left[\dfrac{cz}{k} - c + 1\right]}, \tag{1.5.144}$$

$$i = \lambda(k^* - k) + nk. \tag{1.5.145}$$

Здесь точкой обозначены производные по времени t, измеряемому в годах.

Выходные (эндогенные) переменные модели:

π — мгновенный ожидаемый уровень инфляции (1/год);

m — номинальный запас внешних денег на душу населения (тенге/чел), тенге — денежная единица Казахстана;

z — реальный объем акций на душу населения (тенге/чел) (реальные показатели здесь и в дальнейшем определяются ценами 2000 г.);

k — реальная капиталовооруженность (тенге/чел);

y — выпуск реального продукта на душу населения (измеряется в тенге/(чел $\cdot$ год));

r_e — реальная ставка дохода на ценные бумаги до уплаты налогов (1/год);

R — крайний реальный физический продукт капитала (измеряется в тенге/(чел $\cdot$ год^2));

k^* — желательный реальный основной капитал на душу населения (тенге/чел);

i — реальные инвестиции на душу населения (измеряется в тенге/(чел $\cdot$ год)).

Входные (экзогенные) параметры модели, зависящие от времени:

p — индекс потребительских цен (1/год);

g — реальные государственные затраты на душу населения (тенге/(чел $\cdot$ год)) ($g > 0$);

n — уровень роста населения (1/год);

γ — коэффициент уравнения капиталовооруженности (1/год) ($0 < \gamma < 1$);

A, α — коэффициенты производственной функции ($A > 0$, $0 < \alpha < 1$);

c — доля потребления от располагаемого дохода ($0 < \alpha < 1$) (безразмерная);

l_1, l_2, l_3, l_4 — коэффициенты уравнения реального спроса на деньги на душу населения ($l_1 > 0$, $l_2 < 0$, $l_3 > 0$, $0 < l_4 < 1$) (безразмерные);

λ — коэффициент уравнения инвестиции на душу населения ($\lambda > 0$) (1/год);

u — ставка налогообложения дохода ($0 < u < 1$) (безразмерная).

Входные параметры модели:

b — номинальный запас государственных облигаций на душу населения; $b > 0$ (тенге/чел).

К входным параметрам модели относятся начальные значения (при $t = 0$) выходных переменных динамических уравнений (1)–(4) модели: π_0, m_0, z_0, k_0. Значения входных функций модели при целочисленных значениях времени t также будем считать входными параметрами модели. Все входные функции модели рассматриваются в виде кусочно-линейных непрерывных функций, определяемых своими значениями для целочисленных значений t.

Оценка параметров модели Турновского и ретроспективный прогноз. В рамках решения задачи оценки входных параметров (параметрической идентификации) модели были получены значения входных функций и параметров $p(t)$, $g(t)$, $n(t)$, $\gamma(t)$, $A(t)$, $\alpha(t)$, $\lambda(t)$, $c(t)$, $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$, $l_4(t)$, где $t = 0, 1, \ldots, 9$, а также b, u, π_0, m_0, z_0, k_0 поисковым методом в смысле минимума критерия

(суммы квадратов невязок выходных переменных) на базе статистических данных эволюции экономики Республики Казахстан за 2000–2009 гг. При этом значения входных функций и параметров искались в малых промежутках с центрами в наблюдаемых значениях (при их наличии) соответствующих функций и параметров.

Критерий параметрической идентификации имеет вид

$$K_I = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{v}\sum\limits_{t=0}^{n} M_{jt}} \sum_{j=1}^{v}\sum_{t=0}^{n} M_{jt}\left(\frac{x_j(t) - x_j^*(t)}{x_j^*(t)}\right)^2 \to \min. \quad (1.5.146)$$

Здесь $v = 5$ — число выходных переменных, используемых в оценке параметров, j — номер переменной, $n+1$ — количество наблюдений, $t = 0$ соответствует началу 2000 г., $x_j(t)$ — расчетные значения выходных переменных ($y(t)$, $k(t)$, $z(t)$, $\pi(t)$, $i(t)$) при соответствующих значениях времени, знак «$*$» соответствует наблюдаемым значениям соответствующих переменных, M_{jt} — положительные весовые коэффициенты, значения которых были подобраны исходя из значимостей соответствующих значений выходных переменных при решении задачи параметрической идентификации модели. В табл. 1.5.9 приведены веса критерия K_I. В пересечении строки j и столбца t находится значение M_{jt}.

Таблица 1.5.9. **Веса M_{jt} критерия K_I**

Переменная	2000 г. $t=0$	2001 г. $t=1$	2002 г. $t=2$	2003 г. $t=3$	2004 г. $t=4$	2005 г. $t=5$	2006 г. $t=6$	2007 г. $t=7$
$y(t)$, $j=1$	0,001	0,001	0,001	0,01	0,01	1	1	1
$k(t)$, $j=2$	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
$z(t)$, $j=3$	0,001	0,001	0,001	0,01	0,01	1	1	1
$\pi(t)$, $j=4$	0,001	0,001	0,001	0,01	0,01	0,1	0,1	0,1
$i(t)$, $j=5$	0,001	0,001	0,001	0,01	0,01	0,1	0,1	0,1

При решении задачи оценки параметров применялись алгоритмы Рунге-Кутта и Нелдера–Мида [66]. Поставленная задача параметрической идентификации решалась с использованием

статистических данных за 2000–2007 гг. ($n = 7$). В результате решения поставленной задачи относительная величина средневзвешенного квадратичного отклонения расчетных значений выходных переменных модели от соответствующих наблюдаемых значений ($100\sqrt{K_I}$) не превысила 1,2%.

В рамках верификации модели решалась следующая задача ретропрогноза. Используя найденные в результате оценки значений входных функций, параметров и начальных значений выходных переменных на промежутке 2000–2007 гг. (а также экстраполяцию значений входных функций на 2008–2009 гг.), получить оценку на промежутке с 2008 по 2009 г. относительных погрешностей расчетных значений выходных переменных модели относительно соответствующих наблюдаемых значений. Результаты решения этой задачи приведены в табл. 1.5.10. Здесь знак «$*$» соответствует наблюдаемым величинам, знак «Δ» соответствует отклонениям (в процентах) расчетных значений от соответствующих наблюдаемых величин.

Таблица 1.5.10. **Наблюдаемые, расчетные значения выходных переменных модели и соответствующие отклонения (в процентах)**

Год	2008	2009	Год	2008	2009
y^*	336140	334680	Δk	9,66383	1,20669
y	333843	333015	π^*	0,11828	0,07525
Δy	0,68322	0,49744	π	0,11881	0,07639
z^*	1117488	1305937	$\Delta\pi$	0,45321	1,51652
z	1228469	1483599	i^*	136501	151534
Δz	9,93126	13,60410	i	136424	151855
k^*	747806	771832	Δi	0,05666	0,21187
k	675539	762518			

Средняя погрешность указанных в табл. 1.5.10 переменных на период ретропрогнозирования составила 3,7825%, что указывает на приемлемую точность описания эволюции экономики Казахстана с помощью исследуемой модели.

Исследование структурной устойчивости монетарной модели Турновского. Данное исследование проводилось на базе теоремы A Робинсона [67] о достаточных условиях слабой структурной устойчивости.

Отображение f в приведенном алгоритме было определено в виде сдвига по траекториям динамической системы (1.5.137)–(1.5.145), соответствующего изменению времени t на 1 год. При этом входные функции модели были приняты в виде постоянных (равных значениям 2007 г.).

При реализации приведенного выше алгоритма в качестве исходного компакта N использовался параллелепипед $\{0 \leqslant \pi \leqslant 0{,}2,\ 0 \leqslant m \leqslant 8000,\ 0 \leqslant z \leqslant 50\,000,\ 0 \leqslant k \leqslant 830\,000\}$ в фазовом пространстве модели (1)–(9). Разбиение исходного параллелепипеда (и других ячеек, получившихся в результате применения алгоритма) на 16 частей осуществлялось с помощью деления каждого его ребра на две равные части. В результате расчета разработанной программы после 4 итераций, согласно приведенному выше алгоритму, был получен граф G с пустым множеством вершин. Это означает, что исследуемая монетарная модель Турновского с рассматриваемыми значениями входных параметров оценивается как слабо структурно устойчивая в указанном компакте N.

Оценка параметрической чувствительности модели Турновского. В рамках решения задачи по оценке влияний значений входных параметров и функций модели на значения ее выходных переменных была составлена матрица, строки которой занумерованы с помощью всех входных параметров и функций, а столбцы — значениями выходных переменных для $t = 9$, что соответствует 2009 г. Эта матрица содержит коэффициенты чувствительности указанных выходных значений модели по ее входным значениям, рассчитываемые по формуле

$$F_{pj}(t) = 100\frac{x_j^n(t) - x_j(t)}{x_j(t)}. \qquad (1.5.147)$$

Здесь p — варьируемый входной параметр или значение входной функции; $x_j(t)$ — значение j-й выходной переменной для времени t, полученное при запуске модели со значениями входных параметров и функций, полученными в результате оценки параметров или взятыми из статистических источников (базовый просчет); $x_j^n(t)$ — значение соответствующей выходной переменной, полученное при увеличении варьируемого параметра p на 1%, при этом остальные значения параметров и функций остаются неизменными по сравнению с базовым просчетом.

Результаты решения задачи по построению матрицы параметрической чувствительности частично приведены в табл. 1.5.11. Например, при увеличении значения параметра $c(9)$ на 1% и при

сохранении значения $c(8)$, происходит соответствующее увеличение линейной на отрезке $[8, 9]$ функции $c(t)$, что, в свою очередь, влечет изменение значений выходных переменных (и коэффициентов $F_{pj}(t)$) при $t = 9$.

Таблица 1.5.11. **Некоторые элементы матрицы параметрической чувствительности модели для $t = 9$**

Входной параметр	Выходная переменная					
	y	π	m	z	k	i
$c(9)$	−0,01637	0	−0,0123	0,00309	−0,0165	1,693064
$g(9)$	0,280699	0	0,26993	0,33196	0,28325	0,881013
$n(9)$	−0,01726	0	−0,0206	−0,0293	−0,0174	0,048407
$p(9)$	−0,00993	0,5161	−0,052	−0,0136	−0,01	−0,3979
$\lambda(9)$	−0,03802	0	0,0294	−0,0888	−0,0384	−2,59267
$\gamma(9)$	0,136572	0	−0,002	−0,2708	0,13781	−0,45509
$A(9)$	0,790219	0	−0,0334	−0,2985	−0,2096	−3,41885
$\alpha(9)$	11,38849	0	−0,3144	−2,2215	−2,6097	−53,2406
$l_1(9)$	−0,16371	0	0,0578	−0,2697	−0,1652	−4,8311
$l_2(9)$	0,009145	0	0,01151	−0,0083	0,00923	−1,51853
$l_3(9)$	−0,04331	0	−0,0052	−0,0387	−0,0437	0,849691
$l_4(9)$	−0,14034	0	0,0436	−0,2246	−0,1416	−3,58984

Анализ табл. 1.5.11 показывает, что в рамках указанных в этой таблице входных параметров для 2009 г., наибольшее влияние на значения выходных переменных $y(9)$, $m(9)$, $z(9)$, $k(9)$, $i(9)$ оказывает изменение коэффициента производственной функции $\alpha(9)$, а на значение выходной переменной $\pi(9)$ может оказывать влияние только изменение индекса цен $p(9)$.

Нахождение оптимальных значений регулируемых параметров на базе модели Турновского. Рассмотрим теперь возможность осуществления эффективной государственной политики на базе модели (1.5.137)–(1.5.145) через синтез оптимальных значений экономических параметров: государственные затраты на душу населения $g(t)$ и ставка налогообложения дохода $u(t)$ для периода 2010–2015 гг.

Задачу синтеза оптимального закона параметрического регулирования на уровне указанных параметров можно сформулиро-

вать в следующем виде. Найти на основе математической модели (1.5.137)–(1.5.145) такие значения $g(t)$, $u(t)$, $t = 10, \ldots, 15$, которые обеспечили бы максимум критерия (среднее значение выпуска реального продукта на душу населения для промежутка 2010–2015 гг.)

$$K = \frac{1}{6} \sum_{t=10}^{15} y(t) \tag{1.5.148}$$

при следующих ограничениях, накладываемых на выходные переменные модели и регулируемые параметры ($t \in [10, 15]$):

$$\begin{gathered} m(t) > 0, \quad z(t) > 0, \quad k(t) > 0, \quad y(t) > 0, \\ r_e(t) > 0, \quad R(t) > 0, \quad k^* > 0, \quad i(t) > 0, \end{gathered} \tag{1.5.149}$$

$$g(t) > 0, \quad 0 < u(t) < 1. \tag{1.5.150}$$

Заметим, что для базового просчета модели до 2015 г., полученного при найденных значениях входных параметров модели и с помощью экстраполяции входных функций модели линейным трендом, значение критерия оказалось равным $K = 437\,368$ тенге (в ценах 2000 г.).

В результате численного решения поставленной задачи нахождения оптимальных значений параметров $g(t)$, $u(t)$ экономиче-

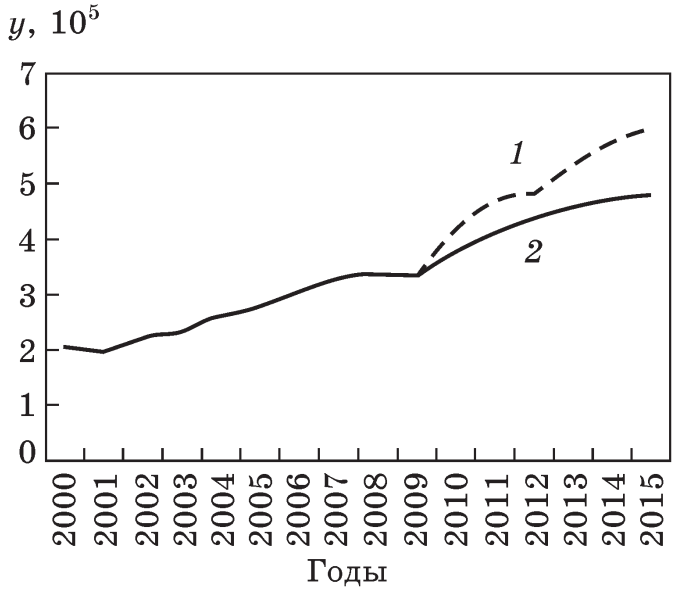

Рис. 1.5.16. Реальный продукт на душу населения: *1* — с применением оптимального закона параметрического регулирования; *2* — без параметрического регулирования

ской системы методом Нэлдера–Мида [66] получен оптимальный результат $K = 511\,552$. Увеличение критерия K при применении

рассмотренного выше параметрического регулирования по сравнению с базовым вариантом составило 16,96%.

Графики расчетных значений выходной переменной модели — выпуск реального продукта на душу населения $y(t)$ без параметрического регулирования, а также с применением найденного оптимального закона параметрического регулирования — приведены рис. 1.5.16.

Исследование зависимости оптимальных значений критерия параметрического регулирования от значений неуправляемых параметров на базе модели Турновского. Рассматриваемая выше оптимизационная задача решались при фиксированных значениях входных параметров, не участвующих в регулировании. Кроме того, в процессе исследований была найдена зависимость оптимальных значений критерия K от значений неуправляемых параметров модели на примере двумерного параметра $\alpha = (c(9), \lambda(9))$, состоящего из доли реального потребления от реального располагаемого дохода и коэффициента уравнения инвестиций для 2009 г. Область изменения этих параметров была определена исходя из оцененных значений $c(9)$ и $\lambda(9)$ в виде прямоугольника $A = [0{,}0820; 0{,}1090] \times [0{,}708; 0{,}719]$.

На рис. 1.5.17 представлены некоторые результаты исследований — графики зависимости критерия K от параметра α (где

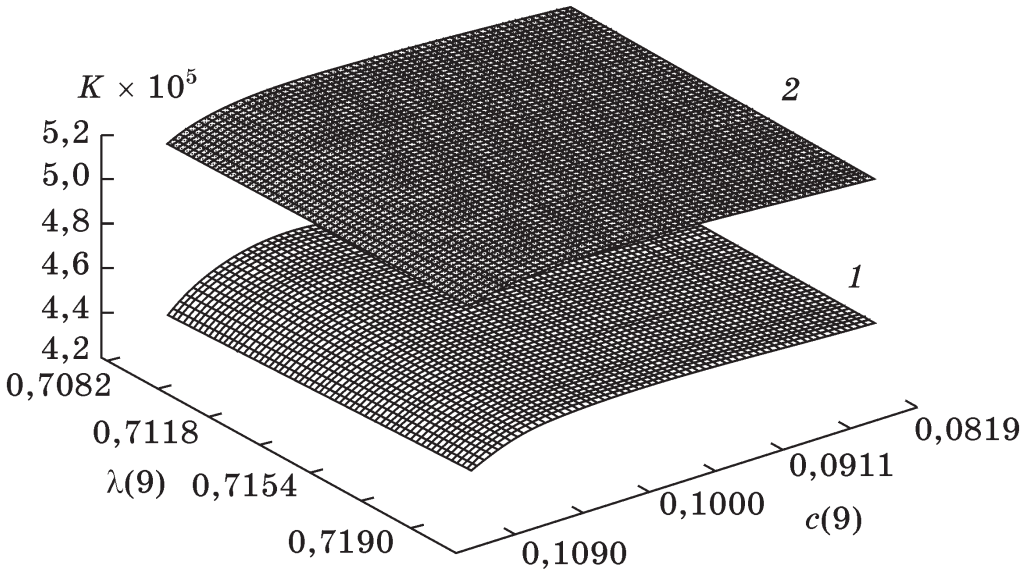

Рис. 1.5.17. Графики зависимости критерия K от параметра α: *1* — базовый вариант; *2* — регулирование государственных затрат на душу населения и ставки налогообложения дохода

$\alpha \in A$) для рассмотренной выше задачи параметрического регулирования. Графики на рис. 1.5.17 описывают базовые и оптималь-

ные (для решаемой задачи нахождения государственных затрат на душу населения и ставки налогообложения дохода) значения критерия K.

1.5.8. Эндогенная модель Джонса

Описание модели. Математическая модель технического прогресса и населения [61] после преобразований представлена системой следующих разностных и алгебраических уравнений:

$$N_t = N_{t-1}(1 + n_t), \tag{1.5.151}$$

$$L_{At} = l_t N_t \pi_t, \tag{1.5.152}$$

$$L_{Yt} = l_t N_t (1 - \pi_t), \tag{1.5.153}$$

$$A_t = A_{t-1} + \delta L^{\lambda}_{A(t-1)} A^{\varphi}_{t-1}, \tag{1.5.154}$$

$$Y_t = A^{\sigma}_t L^{\beta}_{Yt} \varepsilon_t, \tag{1.5.155}$$

$$w_t = \frac{Y_t \pi_t \rho}{L_{At}}. \tag{1.5.156}$$

Здесь t — дискретное время, номер года.

Эндогенные переменные модели:

N_t — численность населения страны (человек);

L_{At} — число людей, вовлеченных в выработку идей (человек);

L_{Yt} — число людей, вовлеченных в производство потребительских товаров (человек);

A_t — запас идей в экономике (безразмерная);

Y_t — выпуск потребительских товаров, выражаемый с помощью производственной функции (тенге/год);

w_t — заработная плата на одного работающего в единицу времени (тенге/год);.

Экзогенные переменные модели:

n_t — темп роста населения (1/год);

l_t — доля занятых в экономике от общего числа населения (безразмерная);

π_t — доля вовлеченных в выработку идей от общего числа занятых в экономике людей (безразмерная);

ε_t — экзогенный производственный шок.

Экзогенные параметры модели:

δ, λ (безразмерная), φ (безразмерная) — параметры производственной функции производства идей;

σ, β — параметры производственной функции выпуска потребительских товаров (безразмерные);

ρ — доля фонда заработной платы от общего выпуска потребительских товаров (безразмерная).

Отметим, что в оригинальном описании модели в [61] параметр ρ отсутствовал, там подразумевалось, что весь выпуск потребительских товаров идет на оплату труда работников. Введение нами в модель параметра ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, осуществлено с целью получения большей адекватности модели реальным экономическим условиям.

К экзогенным параметрам модели относятся начальные значения (при $t = 0$) эндогенных переменных динамических уравнений (1.5.151), (1.5.154) модели: N_0 и A_0. Значения экзогенных функций модели при фиксированном времени t также будем считать экзогенными параметрами модели.

Оценка экзогенных параметров модели Джонса и ретроспективный прогноз. В рамках решения задачи оценки экзогенных параметров (параметрической идентификации) модели были получены оценки экзогенных функций и параметров n_t, l_t, π_t, ε_t, δ, λ, φ, σ, β, ρ, N_0 и A_0 поисковым методом в смысле минимума критерия (суммы квадратов невязок эндогенных переменных) на базе статистических данных эволюции экономики Республики Казахстан за 2000–2009 гг. При этом значения экзогенных функций и параметров искались в малых промежутках с центрами в наблюдаемых значениях (при их наличии) соответствующих функций и параметров.

Критерий параметрической идентификации имеет вид

$$K_I = \frac{1}{v(n+1)} \sum_{j=1}^{v} \sum_{t=0}^{n} \left(\frac{x_{tj} - x^*_{tj}}{x^*_{tj}} \right)^2 \to \min . \qquad (1.5.157)$$

Здесь $v = 5$ — число эндогенных переменных, используемых в оценке параметров; $n + 1$ — количество наблюдений, $t = 0$ соответствует 2000 г.; x_{tj} — расчетные значения эндогенных переменных (N_t, L_{At}, L_{Yt}, Y_t, w_t). Знак «$*$» соответствует наблюдаемым значениям соответствующих переменных.

При решении задачи оценки параметров применялся алгоритм Нелдера–Мида [66]. Поставленная задача параметрической идентификации решалась с использованием статистических данных 2000–2007 гг. ($n = 7$). В результате решения поставленной задачи относительная величина среднеквадратического отклонения расчетных значений эндогенных переменных модели от соответствующих наблюдаемых значений ($100\sqrt{K_I}$) не превысила 1%.

В рамках верификации модели решалась следующая задача ретропрогноза. Используя найденные в результате оценки значений экзогенных функций, параметров и начальных значений эндогенных переменных на промежутке 2000–2007 гг. (а также экстраполяцию значений экзогенных функций на 2008–2009 гг.), получить оценку на промежутке с 2008 по 2009 г. относительных погрешностей расчетных значений эндогенных переменных модели относительно соответствующих наблюдаемых значений. Результаты решения этой задачи приведены в табл. 1.5.12. Здесь знак «$*$» соответствует наблюдаемым величинам, знак «Δ» соответствует отклонениям (в процентах) расчетных значений от соответствующих наблюдаемых величин.

Таблица 1.5.12. **Наблюдаемые расчетные значения выходных переменных модели и соответствующие отклонения (в процентах)**

Год	2008	2009	Год	2008	2009
Y_t^*	$2{,}895 \cdot 10^{13}$	$3{,}450 \cdot 10^{13}$	ΔL_{At}	1,335	2,650
Y_t	$2{,}988 \cdot 10^{13}$	$3{,}660 \cdot 10^{13}$	L_t^*	$7{,}844 \cdot 10^6$	$8{,}041 \cdot 10^6$
ΔY_t	3,210	6,092	L_{Yt}	$7{,}699 \cdot 10^6$	$7{,}786 \cdot 10^6$
N_t^*	$16{,}068 \cdot 10^6$	$16{,}470 \cdot 10^6$	ΔL_{Yt}	1,847	3,155
N_t	$15{,}748 \cdot 10^6$	$15{,}927 \cdot 10^6$	w_t^*	$741{,}751 \cdot 10^3$	$863{,}110 \cdot 10^3$
ΔN_t	1,992	3,298	w_t	$767{,}743 \cdot 10^3$	$930{,}701 \cdot 10^3$
L_{At}^*	18219	18674	Δw_t	3,504	7,831
L_{At}	17975	18179			

Средняя погрешность указанных в таблице переменных на период ретропрогнозирования составила 3,49%, что указывает на приемлемую точность описания эволюции экономики Казахстана с помощью исследуемой модели.

Исследование структурной устойчивости математической модели Джонса. Исследуем грубость (структурную устойчивость) модели (1.5.151)–(1.5.156), основываясь на приведенной теореме о достаточных условиях слабой структурной устойчивости и при дополнительном предположении о постоянности всех экзогенных функций модели. Значения этих функций, а также значения всех экзогенных параметров исследуемой модели будем считать постоянными положительными числами. В этом случае уравнения (1.5.151)–(1.5.156) определяют гомеоморфизм f (и соответствующий каскад), определенный в плоскости (N, A).

Утверждение 1.5.7. *Пусть M — компактное множество, лежащее в области ($N > 0$, $A > 0$) фазового пространства каскада f, задаваемого уравнениями* (1.5.151)–(1.5.156). *Замыкание внутренности M совпадает с M. Тогда каскад f слабо структурно устойчив на M.*

В качестве M можно выбрать, например, прямоугольник с границами $N = N_{\min}$, $N = N_{\max}$, $A = A_{\min}$, $A = A_{\max}$. Здесь $0 < N_{\min} < N_{\max}$, $0 < A_{\min} < A_{\max}$.

Доказательство. Проверим вначале, что полутраектория каскада f, начинающаяся в любой точке множества M при некотором значении t ($t > 0$), выходит из M. Этот факт следует из уравнения (1.5.151) при $n_t > 0$, поскольку в этом случае последовательность N_t есть возрастающая геометрическая прогрессия.

Поскольку любое цепочно-рекуррентное множество $R(f, M)$, лежащее внутри M, является инвариантным множеством каскада, то, в случае его непустоты, оно состоит только из целых орбит. Следовательно, в нашем случае, $R(f, M)$ пусто. Утверждение следует из теоремы A Робинсона [67].

Оценка параметрической чувствительности модели Джонса. В рамках решения задачи по оценке влияний значений экзогенных параметров и функций модели на значения ее эндогенных переменных была составлена матрица, строки которой занумерованы с помощью всех экзогенных параметров и функций, а столбцы — значениями шести эндогенных переменных для $t = 9$, что соответствует 2009 г. Эта матрица содержит коэффициенты эластичности указанных выходных значений модели по ее входным значениям, рассчитываемые формуле

$$F_{pj} = 100\frac{x_{tj}^n - x_{tj}}{x_{tj}}. \qquad (1.5.158)$$

Здесь p — варьируемый экзогенный параметр или значение экзогенной функции; x_{tj} — значение i-й эндогенной переменной для времени t, полученное при запуске модели со значениями экзогенных параметров и функций, полученными в результате оценки параметров или взятыми из статистических источников (базовый просчет); x_{tj}^n — значение соответствующей эндогенной переменной, полученное при увеличении варьируемого экзогенного параметра p на 1%, при этом остальные значения экзогенных параметров и функций остаются неизменными по сравнению с базовым просчетом.

Результаты решения задачи по построению матрицы параметрической чувствительности частично приведены в табл. 1.5.13.

Таблица 1.5.13. **Некоторые элементы матрицы параметрической чувствительности модели**

Параметр	Переменная		
	Y_9	w_9	A_9
A_0	0,158903	0,158903	0,072459
N_0	0,108772	0,007974	0,003775
σ	4,075839	4,075839	0
β	3,891727	3,891727	0
δ	0,198968	0,198968	0,08989
λ	0,095282	0,095282	0,044117
φ	2,07102	2,07102	0,702719
l_0	0,000877	0,000877	0,000416
l_1	0,000879	0,000879	0,000417
l_2	0,00088	0,00088	0,000417
l_3	0,000881	0,000881	0,000418
l_4	0,000882	0,000882	0,000418
l_5	0,000888	0,000888	0,000421
l_6	0,000891	0,000891	0,000422
l_7	0,000887	0,000887	0,000421
l_8	0,000885	0,000885	0,00042
l_9	0,1	$-9{,}53 \cdot 10^{-10}$	0
π_0	0,000877	0,000877	0,000416
π_1	0,000879	0,000879	0,000417
π_2	0,00088	0,00088	0,000417
π_3	0,000881	0,000881	0,000418
π_4	0,000882	0,000882	0,000418
π_5	0,000888	0,000888	0,000421
π_6	0,000891	0,000891	0,000422
π_7	0,000887	0,000887	0,000421
π_8	0,000885	0,000885	0,00042
π_9	$-0{,}00021$	$-0{,}00021$	0
n_0	$-0{,}00026$	$-2{,}01 \cdot 10^{-5}$	$-9{,}56 \cdot 10^{-6}$
n_1	$-0{,}0001$	$-7{,}23 \cdot 10^{-6}$	$-3{,}43 \cdot 10^{-6}$
n_2	0,000112	$6{,}84 \cdot 10^{-6}$	$3{,}25 \cdot 10^{-6}$
n_3	0,000596	$3{,}14 \cdot 10^{-5}$	$1{,}49 \cdot 10^{-5}$
n_4	0,000858	$3{,}80 \cdot 10^{-5}$	$1{,}80 \cdot 10^{-5}$
n_5	0,000985	$3{,}53 \cdot 10^{-5}$	$1{,}67 \cdot 10^{-5}$
n_6	0,001186	$3{,}21 \cdot 10^{-5}$	$1{,}52 \cdot 10^{-5}$

Таблица 1.5.13 (окончание)

Параметр	Переменная		
	Y_9	w_9	A_9
n_7	0,001142	$2{,}08 \cdot 10^{-5}$	$9{,}86 \cdot 10^{-6}$
n_8	0,001311	$1{,}20 \cdot 10^{-5}$	$5{,}70 \cdot 10^{-6}$
n_9	0,001619	$-1{,}62 \cdot 10^{-11}$	0

Анализ табл. 1.5.13 показывает, что наибольшее влияние на значения эндогенных переменных Y_9, w_9 оказывает изменение коэффициента производственной функции σ, а на значение эндогенной переменной A_9 — изменение коэффициента уравнения запаса идей в экономике φ.

Нахождение оптимальных значений регулируемых параметров на базе модели Джонса. Рассмотрим теперь возможность осуществления эффективной государственной политики на базе модели (1.5.151)–(1.5.156) через синтез оптимальных значений экономических параметров — долей вовлеченных в выработку идей от общего числа занятых в экономике людей π_t для периода 2010–2014 гг. Эта возможность обосновывается, в частности, анализом полученной в предыдущем пункте матрицы чувствительности.

Задачу синтеза оптимального закона параметрического регулирования на уровне указанных параметров π_t можно сформулировать в следующем виде. Найти на основе математической модели (1.5.151)–(1.5.156) оптимальный закон параметрического регулирования параметров π_t, т. е. найти такие значения π_t, $t = 10, \ldots, 14$, которые обеспечили бы максимум критерия (среднее значение выпуска потребительских товаров за указанный промежуток времени)

$$K = \frac{1}{5} \sum_{t=10}^{14} Y_t \tag{1.5.159}$$

при следующих ограничениях, накладываемых на эндогенные переменные модели и регулируемые параметры:

$$n_t \geqslant 0, \quad L_{At} \geqslant 0, \quad L_{Yt} \geqslant 0, \quad Y_t \geqslant 0, \quad w_t \geqslant 0, \quad t = 10, \ldots, 14, \tag{1.5.160}$$

$$0{,}0012 \leqslant \pi_t \leqslant 0{,}0480, \quad t = 10, \ldots, 14. \tag{1.5.161}$$

Заметим, что для базового просчета модели до 2014 г., полученного при найденных значениях экзогенных параметров модели и с помощью экстраполяции экзогенных функций модели

линейным трендом, значение критерия оказалось равным $K = 8{,}128 \cdot 10^{13}$ тенге.

В результате численного решения поставленной задачи нахождения оптимальных значений параметров π_i экономической системы методом Нэлдера–Мида [66] получен оптимальный результат $K = 8{,}462 \cdot 10^{13}$, который на 4,1% превосходит базовое значение критерия.

Найденные оптимальные значения регулируемых параметров π_t представлены в табл. 1.5.14.

Таблица 1.5.14. **Оптимальные значения регулируемых параметров π_t**

Регулируемый параметр	Оптимальное значение
π_{10}	0,0480
π_{11}	0,0480
π_{12}	0,0291
π_{13}	0,0123
π_{14}	0,0012

Графики расчетных значений эндогенной переменной модели — выпуска потребительских товаров Y_t без параметрического

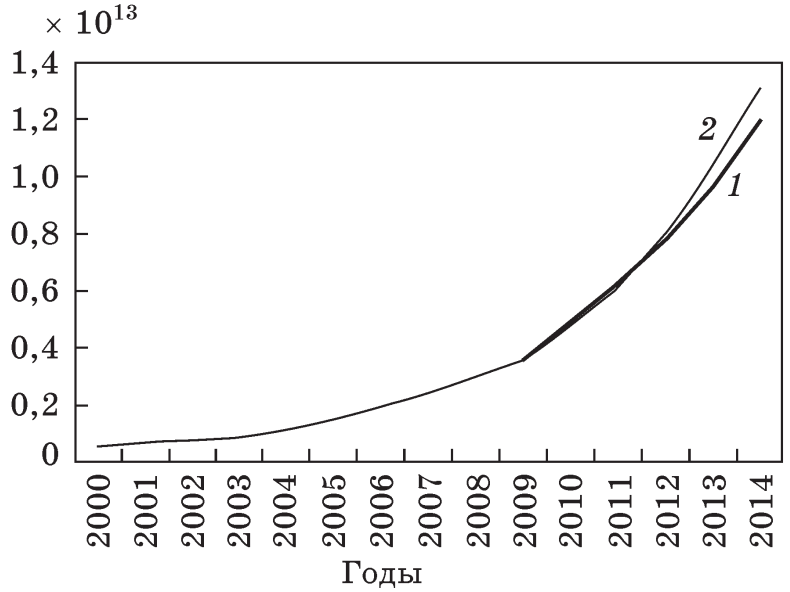

Рис. 1.5.18. Выпуск потребительских товаров Y: *1* — значение без регулирования; *2* — значение с регулированием

регулирования, а также с применением найденного закона параметрического регулирования — приведены на рис. 1.5.18.

Исследование зависимости оптимальных значений критерия параметрического регулирования от значений неуправляемых параметров на базе модели Джонса. Рассматриваемая выше оптимизационная задача решались при фиксированных значениях экзогенных параметров, не участвующих в регулировании. Кроме того, в процессе исследований была найдена зависимость оптимальных значений критерия $K(9)$ от значений неуправляемых параметров модели на примере двумерного параметра $\alpha = (\delta, \sigma)$, состоящего из параметров уравнения производства идей и производственной функции выпуска потребительских товаров.

Область изменения этих параметров была определена исходя из наблюдаемых значений δ и σ в виде прямоугольника $A = [0{,}615; 0{,}769] \times [2{,}11; 3{,}16]$.

На рис. 1.5.19 представлены некоторые результаты исследований — графики зависимости критерия K от параметра α (где $\alpha \in A$) для рассмотренной выше задачи параметрического регулирования.

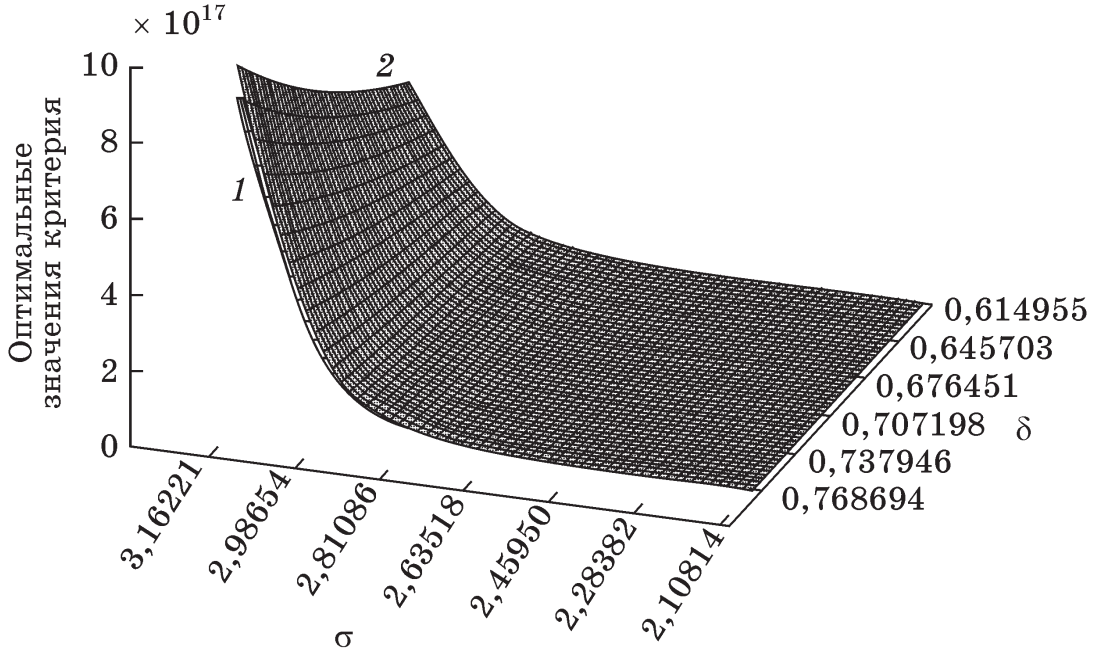

Рис. 1.5.19. Графики зависимости критерия K от параметра α: *1* — базовый вариант; *2* — регулирование долей, вовлеченных в выработку идей, от общего числа занятых в экономике людей

Графики на рис. 1.5.19 описывают базовые и оптимальные (для задачи нахождения долей общего объема фонда заработной платы, которая используется для вознаграждения попыток инноваций) значения критерия K.

Приложение А

Доказательства утверждений, приведенных в главе 1

Доказательство теоремы 1.3.1. Из ограничений (1.3.3) следует, что на любом допустимом управлении u соответствующий критерий оптимальности (1.3.1) $K(u)$ имеет смысл и существует верхняя грань таких значений функционала $K(u)$. Следовательно, существует соответствующая максимизирующая последовательность, т. е. такая последовательность $\{u_k\}$ элементов множества W_{ad}, что имеет место сходимость

$$K(u_k) \to \sup_{u \in W_{ad}} K(u). \tag{A.1}$$

Очевидно, что множество W является ограниченным в пространстве $[H^1(t_0, t_0 + T)]^q$. Тогда, пользуясь теоремой Банаха–Алаоглу, из $\{u_k\}$ можно извлечь такую подпоследовательность, сохраняя для нее для краткости исходное обозначение, что имеет место сходимость $u_k \to u$ в слабой топологии $[H^1(t_0, t_0+T)]^q$. Учитывая замкнутость множества W, установим включение $u \in W$. Согласно теореме Реллиха–Кондрашова, вложение $[H^1(t_0, t_0 + T)]^q \subset \subset (C[t_0, t_0 + T])^q$ компактно. Тогда после, быть может, выделения подпоследовательности установим сходимость

$$u_k \to u \quad \text{в} \quad (C[t_0, t_0 + T])^q. \tag{A.2}$$

Обозначим через x решение задачи (1.1.1), (1.1.2), соответствующее предельному значению u. Справедливы соотношения

$$\dot{x}_k(t) - \dot{x}(t) = f(x_k(t), u_k(t), \lambda) - f(x(t), u(t), \lambda),$$
$$x_k(t_0) - x(t_0) = 0,$$

где через x_k обозначено решение системы (1.1.1), (1.1.2), соответствующее закону регулирования u_k. В результате получаем следующее неравенство для $t \in [0, T]$:

$$|x_k(t) - x(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(x_k(\tau), u_k(\tau), \lambda) - f(x(\tau), u(\tau), \lambda)|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant L_f \int_{t_0}^{t} |x_k(\tau) - x(\tau)|\, d\tau + L_f \int_{t_0}^{t} |u_k(\tau) - u(\tau)|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant L_f \int_{t_0}^{t} |x_k(\tau) - x(\tau)|\, d\tau + L_f T \|u_k - u\|,$$

где L_f есть константа Липшица функции f, а норма здесь и далее понимается в смысле соответствующей степени (своей для управления и функции состояния) пространства $C[t_0, t_0 + T]$. Пользуясь леммой Гронуолла, установим существование такой константы $c > 0$, не зависящей от k, что имеет место оценка

$$\|x_k - x\| \leqslant c\|u_k - u\|. \tag{A.3}$$

Переходя здесь к пределу с учетом условия замкнутости множества $X(t)$, установим, что для предельной функции x выполняется включение (1.3.2), а значит, закон регулирования u является допустимым.

Справедливо неравенство

$$|F(x_k(t)) - F(x(t))| \leqslant L_F|x_k(t) - x(t)|,$$

где L_F есть константа Липшица функции F.

Учитывая условие (А.3), получаем оценку

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} |F(x_k(t)) - F(x(t))|\,dt \leqslant cTL_F\|u_k - u\|.$$

Отсюда, переходя к пределу, получим, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} F(x_k(t))\,dt \to \int\limits_{t_0}^{t_0+T} F(x(t))\,dt.$$

Учитывая, что левая часть этого выражения есть $K(u_k)$, в силу (А.1) заключаем, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} F(x(t))\,dt = \sup_{u\in W_{ad}} K(u),$$

а значит, закон регулирования и является оптимальным. Теорема 1.3.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.3.2. В силу конечности множества законов регулирования достаточно доказать разрешимость задачи максимизации функционала K_f на множестве V_{ad}^j для выбранного номера j $(j = 1, \ldots, r)$. В силу ограничений на степень роста функции F и условия (1.3.13) с ограниченным множеством $\bigcup\limits_{t\in(t_0,t_0+T]} X(t)$ существует верхняя грань функционала K_j, а значит, существует соответствующая максимизирующая последова-

тельность, т. е. такая последовательность $\{v_k\}$ элементов множества V_{ad}^j, что имеет место сходимость

$$K_j(v_k) \to \sup_{v \in V_{ad}^j} K_j(v). \tag{A.4}$$

В силу замкнутости и ограниченности множества V после выделения подпоследовательности получаем сходимость

$$v_k \to v \quad \text{в} \quad R^l, \tag{A.5}$$

причем $v \in V$.

Из (1.3.13), (1.3.14) получим равенства

$$\dot{x}_j^{v_k}(t) - \dot{x}_j^v(t) =$$
$$= f(x_j^{v_k}(t), G_j(v_k, x_j^{v_k}(t)), \lambda) - f(x_j^v(t), G_j(v, x_j^v(t)), \lambda),$$
$$x_j^{v_k}(t_0) - x_j^v(t_0) = 0.$$

Отсюда получаем следующее неравенство для $t \in (t_0, t_0 + T]$:

$$|x_j^{v_k}(t) - x_j^v(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{t} |f(x_j^{v_k}(\tau), G_j(v_k, x_j^{v_k}(\tau)), \lambda) - f(x_j^v(\tau), G_j(v, x_j^v(\tau)), \lambda)|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant L_f \int_{t_0}^{t} |x_j^{v_k}(\tau) - x_j^v(\tau)|\, d\tau +$$
$$+ L_f \int_{t_0}^{t} |G_j(v_k, x_j^{v_k}(\tau)) - G_j(v, x_j^v(\tau))|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant L_f(1 + L_j) \int_{t_0}^{t} |x_j^{v_k}(\tau) - x_j^v(\tau)|\, d\tau + L_f L_j T |v_k - v|.$$

Здесь L_f и L_j есть константы Липшица функции f и G_j соответственно, а норма понимается в смысле пространства R^l. Используя лемму Гронуолла и последнее неравенство, установим существование такой константы $c > 0$, не зависящей от k, j, λ и t, что имеет место оценка

$$|x_j^{v_k}(t) - x_j^v(t)| \leqslant c|v_k - v|, \tag{A.6}$$

откуда следует, что

$$x_j^{v_k}(t) \to x_j^v(t). \tag{A.7}$$

Из условия $v_k \in V_{ad}^j$ следует включение

$$x_j^{v_k}(t) \in X(t), \quad t \in (t_0, t_0 + T].$$

Отсюда в силу (A.7) и замкнутости множества $X(t)$ следует, что имеет место условие

$$x_j^v(t) \in X(t), \quad t \in (t_0, t_0 + T]. \tag{A.8}$$

Из выполнения условий Липшица для функции G_j следует неравенство

$$|G_j(v_k, x_j^{v_k}(t)) \to G_j(v, x_j^v(t))| \leqslant L_f(|v_k - v| + |x_j^{v_k}(t) - x_j^v(t)|).$$

Отсюда в силу неравенства (A.6) следует существование такой положительной константы c_1, не зависящей от каких либо параметров, что имеет место оценка

$$|G_j(v_k, x_j^{v_k}(t)) \to G_j(v, x_j^v(t))| \leqslant c_1|v_k - v|.$$

Отсюда следует сходимость

$$G_j(v_k, x_j^{v_k}(t)) \to G_j(v, x_j^v(t)).$$

Учитывая включение $G_j(v_k, x_j^{v_k}(t)) \in U(t)$ и замкнутость множества $U(t)$, получаем, что $G_j(v, x_j^v(t)) \in U(t)$. Отсюда следует, что $v \in V_{ad}^j$.

Обоснование сходимости

$$\int_{t_0}^{t_0+T} F(x_j^{v_k}(t))\,dt \to \int_{t_0}^{t_0+T} F(x_j^v(t))\,dt$$

на основании сходимости (A.7) осуществляется так же, как и аналогичное свойство в теореме 1.3.1. Тогда из условия (A.4) следует, что настраиваемый коэффициент v является оптимальным. Теорема 1.3.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.3.3. Очевидно, что множество допустимых значений функции K ограничено сверху (ограниченность непрерывной функции на компакте). Тогда существует верхняя грань $\sup K$ этого множества. Следовательно, существует такая последовательность вектор-функций (x_k, u_k) что выполнены

соотношения

$$x_k(t+1) = f(x_k(t), u_k(t), \lambda), \quad t = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{A.9}$$

$$x_k(0) = x_0, \tag{A.10}$$

$$x_k(t) \in X(t), \quad t = 1, \ldots, n, \tag{A.11}$$

$$u_k(t) \in U(t), \quad t = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{A.12}$$

а также сходимость

$$K(x_k) \to \sup K. \tag{A.13}$$

В силу равномерной ограниченности множеств $X(t)$ и $U(t)$ последовательности $\{x_k\}$ и $\{u_k\}$ ограничены. Тогда, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса, после выделения сходящейся подпоследовательности получим сходимости $u_k \to u$ и $x_k \to x$. Учитывая замкнутость множеств $X(t)$ и $U(t)$, заключаем, что предельная пара (u, x) удовлетворяет включениям (1.3.17) и (1.3.18). Переходя к пределу в соотношениях (A.9), (A.10), установим справедливость соотношений (1.3.14), (1.3.15), а значит, пара (u, x) является допустимой. Учитывая непрерывность функции K, получаем сходимость $K(x_k) \to \sup K(x)$. Отсюда и из условия (A.13) следует, что значение $K(x)$ совпадает с верхней гранью $\sup K$ на множестве допустимых пар системы. Теорема 1.3.3 доказана.

Доказательство теоремы 1.3.4. Ограниченность множеств V_{ad}^j следует из ограниченности V, а его замкнутость — из замкнутости и ограниченности множеств $X(t)$ и $U(t)$, а также непрерывности функций f и G_j и теоремы о замкнутости полного прообраза компакта при непрерывном отображении $V \to (X(t), U(t+1))$, задаваемым определением множества V_{ad}^j. Утверждение теоремы следует из теоремы Вейерштрасса о достижении непрерывной функции на компакте своего наибольшего значения.

Доказательство теоремы 1.3.5. Согласно теореме Вейерштрасса, непрерывная функция на непустом замкнутом ограниченном множестве достигает своего максимума. Таким образом, достаточно показать, что определенная с помощью (1.3.29) функция многих переменных $K = K(u)$ непрерывна, а множество U_{ad} замкнуто и ограничено. Его непустота входит в состав условий теоремы.

Покажем, что существуют математические ожидания величин, входящих в фазовое ограничение (1.3.30). Действительно, согласно уравнению (1.3.27), имеем

$$\mathrm{E}[x(t+1)] = \mathrm{E}[f(x(t), u(t), \lambda)] + \mathrm{E}[\xi(t)].$$

Второе слагаемое в правой части этого равенства имеет смысл в силу условий теоремы, а первое вычисляется по формуле

$$\mathrm{E}[f(x(t),u(t),\lambda)] = \int\limits_{R^n} f(\omega,u(t),\lambda)p_{x(t)}(\omega)\,d\omega,$$

если последний интеграл абсолютно сходится (здесь через $p_{x(t)}$ обозначена плотность распределения вероятностей случайной величины $x(t)$). Последний факт действительно имеет место в силу ограничений на рост функции f и наличия математического ожидания величины $x(t)$ для любого $t = 1,\ldots,n$ (этот факт проверяется с помощью метода математической индукции).

Существование математического ожидания в правой части равенства (1.3.29) следует из ограничений на рост функции F_t и существования математического ожидания величины $x(t)$. Пусть имеет место сходимость векторов $u_k \to u,\ u_k \in U_{ad}$. Из уравнения (1.3.27) следует равенство

$$|x_k(t+1) - x(t+1)| = |f(x_k(t),u_k(t),\lambda) - f(x(t),u(t),\lambda)|,$$

где x_k и x есть решения задачи (1.3.27), (1.3.28) при управлениях u_k и u соответственно. Тогда справедливо соотношение

$$|x_k(t+1) - x(t+1)| \leqslant L_f[|x_k(t) - x(t)| + |u_k(t) - u(t)|],$$

где L_f есть константа Липшица функции f. Повторяя аналогичные рассуждения и учитывая, что, в силу условия (1.3.28), $x_k(0) = x(0)$, будем иметь

$$\begin{aligned}|x_k(t+1) - x(t+1)| &\leqslant (L_f)^2|x_k(t-1) - x(t-1)| + \\ &+ (L_f)^2|u_k(t-1) - u(t-1)| + L_f|u_k(t) - u(t)| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{s=0}^{t}(L_f)^{s+1}|u_k(t-s) - u(t-s)| \leqslant \varepsilon_k,\end{aligned}$$

где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Обозначив через L_F максимальную из констант Липшица функций F_t, для $t = 1,\ldots,n$ получаем оценку

$$|F_t[x_k(t)] - F_t[x(t)]| \leqslant L_F\varepsilon_k.$$

Вычислив математические ожидания от обеих частей этого неравенства, получим неравенство

$$\mathrm{E}\{|F_t[x_k(t)] - F_t[x(t)]|\} \leqslant L_F\varepsilon_k.$$

Отсюда следует, что $\mathrm{E}\{|F_t[x_k(t)] - F_t[x(t)]|\} \to 0$ и сходимость рассматриваемой последовательности $\mathrm{E}\{F_t[x_k(t)]\} \to \mathrm{E}\{F_t[x(t)]\}$. Отсюда в силу (1.3.29) следует непрерывность функции $K = K(u)$.

Ограниченность множества U_{ad} следует из ограниченности множества $U(t)$. Замкнутость множества U_{ad} следует из непрерывности отображения $U_{ad} \to X$, задаваемого с помощью определения множества U_{ad} и компактности множества X (теорема о замкнутости полного прообраза компакта при непрерывном отображении). Теперь существование решения исследуемой задачи вытекает из теоремы Вейерштрасса. Теорема 1.3.5 доказана.

Доказательство теоремы 1.3.6. Достаточно установить, что все функции K_f непрерывны, а все множества V_{ad}^j замкнуты и ограничены, где $j = 1, \ldots, r$. Существование всех используемых ниже математических ожиданий доказывается так же, как и при доказательстве теоремы 1.3.5.

Учитывая аддитивность математического ожидания, найдем значения

$$K_j = K_j(v) = \sum_{t=1}^{n} \mathrm{E}\{F_t[x_j^v(t)]\},$$

откуда следует неравенство для $v, , w \in V_{ad}^j$:

$$|K_j(v) - K_j(w)| = \left| \sum_{t=1}^{n} \mathrm{E}\{F_t[x_j^v(t)]\} - \sum_{t=1}^{n} \mathrm{E}\{F_t[x_j^w(t)]\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{n} \left| \mathrm{E}\{F_t[x_j^v(t)]\} - \mathrm{E}\{F_t[x_j^w(t)]\} \right|. \quad \text{(A.14)}$$

Из соотношений (2.41), (2.42) следует, что

$$|x_j^v(t+1) - x_j^w(t+1)| =$$
$$= |f(x_j^v(t), G_j(v, x_j^v(t)), \lambda) - f(x_j^w(t), G_j(w, x_j^w(t)), \lambda)| \leqslant$$
$$\leqslant L_f \left[|x_j^v(t) - x_j^w(t)| + |G_j(v, x_j^v(t)) - G_j(w, x_j^w(t))| \right],$$
$$t = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \text{(A.15)}$$

где L_f есть константа Липшица функции f. Обозначив через L_G максимальную из констант Липшица функции G_j, получим неравенство

$$|x_j^v(t+1) - x_j^w(t+1)| \leqslant$$
$$\leqslant L_f(1 + L_G)|x_j^v(t) - x_j^w(t)| + L_f L_G |v - w|,$$
$$t = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Учитывая равенство $|x_j^v(0) - x_j^w(0)| = 0$, получаем оценку

$$|x_j^v(t+1) - x_j^w(t+1)| \leqslant$$
$$\leqslant L_f L_G \sum_{l=0}^{t} [L_f(1+L_G)]^l |v-w| \leqslant \beta |v-w| \quad \forall\, v, w \in V_{ad}^j, \quad \text{(A.16)}$$

где

$$\beta = L_f L_G \sum_{l=0}^{t} [L_f(1+L_G)]^l.$$

Обозначив через L_F максимальную из констант Липшица функции F_t, будем иметь

$$|F_t[x_j^v(t)] - F_t[x_j^w(t)]| \leqslant L_F |x_j^v(t) - x_j^w(t)| \leqslant$$
$$\leqslant L_F \beta |v-w| \quad \forall\, v, w \in V_{ad}^j. \quad \text{(A.17)}$$

Итак, в случае достаточной малости разности настраиваемых коэффициентов v и w значения $x_j^v(t)$ и $x_j^w(t)$ (а также $F_t[x_j^v(t)]$ и $F_t[x_j^w(t)]$) будут сколь угодно близки друг к другу. Определим сходящуюся последовательность $w = v_k \to v$. Тогда, найдя математические ожидания от левой и правой частей неравенства (А.17), получим неравенство

$$\mathrm{E}\big[|F_t[x_j^v(t)] - F_t[x_j^{v_k}(t)]|\big] \leqslant L_F \beta |v - v_k|.$$

Отсюда следует сходимость

$$\mathrm{E}\{F_t[x_j^{v_k}(t)]\} \to \mathrm{E}\{F_t[x_j^v(t)]\},$$

из которой следует непрерывность функции $K_j(v)$.

Поскольку $V_{ad}^j \subset V$, то множества V_{ad}^j ограничены. Замкнутость множеств V_{ad}^j следует из замкнутости множеств $U(t)$, $X(t+1)$, доказанной выше непрерывности отображений $v \to$ $\to \mathrm{E}[x_j^v(t+1)]$, $v \to \mathrm{E}[G_j(v, x_j^v(t))]$ и определения множества V_{ad}^j как полного прообраза указанных множеств при непрерывных отображениях. Утверждение теоремы следует из теоремы Вейерштрасса о достижении непрерывной на компакте функции своей верхней грани.

Доказательство леммы 1.3.1. Пусть имеет место сходимость некоторой последовательности $a_k \to a_0$, где $a_k \in A$. Обозначим через u_k точку максимума функции K_{a_k} на множестве U_{a_k}, а через u_0 — точку максимума функции K_{a_0} на множестве U_{a_0}.

Учитывая K-непрерывность семейства множеств $\{U_a\}$ и непрерывность на $A \times U$ функции $f_a(x)$, заключаем, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер k_0, что при $k > k_0$ найдутся точки $u'_k \in U_{a_0}$, для которых выполняются неравенства $|K_{a_k}(u'_k) - K_{a_k}(u_k)| \leqslant \varepsilon$ и, кроме того, $\max\limits_{y \in U} |K_{a_k}(y) - K_{a_0}(y)| \leqslant \varepsilon$.

В результате при $k > k_0$ получаем следующие неравенства:

$$K_{a_0}(u_0) \geqslant K_{a_0}(u'_k) \geqslant K_{a_k}(u'_k) - \varepsilon \geqslant K_{a_k}(u_k) - 2\varepsilon. \qquad \text{(A.18)}$$

Подобным образом проверяется соотношение

$$K_{a_k}(u_k) \geqslant K_{a_0}(u_0) - 2\varepsilon. \qquad \text{(A.19)}$$

Из (A.18) и (A.19) следует, что при достаточно больших k справедливо неравенство $|K_{a_k}(u) - K_{a_0}(u_0)| \leqslant 2\varepsilon$, которое обеспечивает сходимость последовательности $K_{a_k}(u_k) \to K_{a_0}(u_0)$. Лемма 1.3.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.3.7. Не ограничивая общности, в силу локальности задачи, множество Λ можно считать компактным. Как было отмечено выше, рассматриваемые задачи синтеза законов параметрического регулирования сводятся к нахождению наибольших значений непрерывных функций (критерия оптимизации $K(u, \lambda)$) в компактных множествах допустимых значений регулируемых параметров: $\max\limits_{u \in U_{ad,\lambda}} K(u, \lambda)$. Здесь $U_{ad,\lambda}$ — множество допустимых значений регулируемых параметров соответствующей задачи при выбранном значении неуправляемого параметра $\lambda \in \Lambda$. Компактность этих множеств была проверена при доказательстве теорем 1.3.1, 1.3.3, 1.3.5. Из непрерывности отображений $(u, \lambda) \to x_{u,\lambda}$ ($(u, \lambda) \to \mathrm{E}[x_{u,\lambda}]$ для стохастических случаев) и $(u, \lambda) \to K(u, \lambda)$, с учетом компактности множеств U и Λ, следует K-непрерывность набора множеств $\{U_{ad,\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$. Требуемое утверждение вытекает из леммы 1.3.1.

Доказательство теоремы 1.3.8. Как и в предыдущей теореме, множество Λ можно считать компактным. Как было отмечено выше, для заданного значения j задачи выбора оптимальных законов параметрического регулирования сводятся к нахождению наибольших значений непрерывных функций (критерия оптимизации $K_j(u, \lambda)$) в компактных множествах допустимых значений настраиваемых коэффициентов: $\max\limits_{v \in V^j_{ad,\lambda}} K_j(v, \lambda)$. Здесь $V^j_{ad,\lambda}$ — множество допустимых значений настраиваемых коэффициентов

соответствующей задачи при выбранных номере закона j и значении неуправляемого параметра $\lambda \in \Lambda$. Компактность этих множеств была проверена при доказательстве теорем 1.3.2, 1.3.4, 1.3.6. Из непрерывности отображений $(v,\lambda) \to x_j^{v,\lambda}$ $((u,\lambda) \to$ $\to \mathrm{E}[x_j^{v,\lambda}]$ для стохастических случаев), $(v,\lambda) \to G_j(v, x_j^{v,\lambda})$ $((u,\lambda) \to \mathrm{E}[G_j(v, x_j^{v,\lambda})]$ для стохастических случаев) и $(u,\lambda) \to$ $\to K_j(u,\lambda)$, с учетом компактности множеств V и A, следует K_j-непрерывность набора множеств $\{V_{ad,\lambda}^j : \lambda \in \Lambda\}$. Требуемое утверждение вытекает из леммы 1.3.1.

Доказательство следствия 1.3.1. Поскольку оптимальное значение критерия указанных задач определяется как наибольшее значение оптимальных значений критериев K_j по всем возможным законам параметрического регулирования из их заданного набора, то его можно записать в виде

$$K(\lambda) = \max_{j=1,\dots,r} \max_{v \in V_{ad,\lambda}^j} K_j(v,\lambda).$$

Поскольку $K(\lambda)$ является наибольшим значением из конечного числа непрерывных функций, то эта функция так же является непрерывной в Λ.

Доказательство теоремы 1.3.9. Соединим точки λ_0 и λ_1 гладкой кривой S, лежащей в области Λ: $S = \{\lambda(s),\ s \in [0,1]\}$, $\lambda(0) = \lambda_0$, $\lambda(1) = \lambda_1$. Обозначим оптимальное значение критерия K_j задачи 1.3.2, 1.3.4, 1.3.6 или 1.3.8 для выбранного закона G_j параметрического регулирования и значения неуправляемого параметра $\lambda = \lambda(s)$ через $K_j(s)$. Из теоремы 1.3.9 следует, что функция $y = K_j(s)$ является непрерывной на отрезке $[0,1]$. Функция $y = \max\limits_{j=1,\dots,r} K_j(s) = K^*(s)$, дающая решение рассматриваемой задачи 1.3.2, 1.3.4 или 1.3.6, следовательно, также является непрерывной на отрезке $[0,1]$. Обозначим через $\Delta(j) \subset [0,1]$ множество всех тех значений параметра s, для которых $K_j(s) = K^*(s)$. Это множество замкнуто как полный прообраз замкнутого множества $\{0\}$ для непрерывной функции $y = K_j(s) - K^*(s)$. Множество $\Delta(j)$ может быть и пустым. В результате промежуток $[0,1]$ представляется в виде следующего конечного объединения, состоящего, как минимум, из двух непустых замкнутых множеств (см. условия теоремы):

$$[0,1] = \bigcup_{j=1,\dots,r} \Delta(j).$$

Следовательно, поскольку по условиям теоремы $0 \in \Delta(j_0)$ и $1 \notin \Delta(j_0)$, то имеется граничная точка s_0 множества $\Delta(j_0)$, находящаяся в интервале $(0,1)$ (будем считать, что s_0 — нижняя грань таких граничных точек для множества $\Delta(j_0)$). Точка s_0 также является граничной точкой некоторого другого множества $\Delta(j_2)$ и принадлежит ему. Для найденного значения s_0 точка $\lambda(s_0)$ является искомой точкой бифуркации, поскольку для $\lambda = \lambda(s_0)$ имеется, как минимум, два оптимальных закона (G_{j_0} и G_{j_2}), а при $\lambda = \lambda(s)$ для $0 \leqslant s < s_0$ — один оптимальный закон G_{j_0}. Теорема 1.3.9 доказана.

Доказательство леммы 1.5.1. Приравняв правые части уравнений системы (1.5.1) к нулям, получим соотношения (1.5.2). Очевидно, что $k^* > 0$, $c^* > 0$. Запишем определитель матрицы Якоби для правых частей уравнений (1.5.2) в точке (k^*, c^*):

$$\Delta = \frac{\alpha - 1}{(1-\beta)\alpha}(\delta + p)((n+\delta)(1-\alpha) + p - n).$$

Поскольку при всех указанных значениях параметров A, α, β, δ, n, p математической модели $\Delta < 0$, то найденная особая точка (k^*, c^*) является седловой точкой системы (1.5.1). Лемма 1.5.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.5.1. Проверим, что система (1.5.3) в области Ω_1 не имеет циклических траекторий. Допустим противное: в области Ω_1 есть циклическая траектория. Тогда внутри ее должна существовать, по крайней мере, одна особая точка и сумма индексов Пуанкаре особых точек, находящихся внутри этого цикла, равна [12, с. 117]. Но в области Ω_1 имеется всего одна седловая точка с индексом -1. Противоречие.

Проверим, что устойчивая и неустойчивая сепаратрисы седловой точки (x^*, y^*) не образуют одну траекторию в области Ω_1. Допустим противное: устойчивая и неустойчивая сепаратрисы седловой точки (x^*, y^*) составляют одну особую траекторию γ, лежащую в Ω_1. Тогда эта траектория (или, если имеется, вторая траектория, составленная из других устойчивой и неустойчивой сепаратрис) вместе с особой точкой являются границей ограниченной ячейки Ω_2, лежащей в области Ω_1. Рассмотрим полутраекторию L_+, исходящую из некоторой точки (x_1, y_1), где (x_1, y_1) — внутренняя точка Ω_2. Тогда, в силу отсутствия циклических траекторий и единственности состояния равновесия, предельными точками L_+ может быть только граница ячейки Ω_2 (точка (x_1, y_1) не может быть единственной предельной точкой L_+, поскольку эта точка

седловая) [12, с. 49]. Рассмотрим теперь полутраекторию L_-, исходящую из точки (x_1, y_1) в противоположном относительно L_+ направлении. Очевидно, что предельными точками L_- не может являться граница Ω_2. А в силу отсутствия других особых точек и особых траекторий в области Ω_2, получаем противоречие.

В соответствии с [12, с. 146, теорема 12] теорема 1.5.1 доказана.

Доказательство утверждения 1.5.1. Проверим вначале, что полутраектория потока f, начинающаяся в любой точке множества N при некотором значении t $(t > 0)$, выходит из N.

Рассмотрим любую полутраекторию, начинающуюся в N. Для нее при $t > 0$ возможны два случая: все точки полутраектории остаются в N или для некоторого t точка полутраектории не принадлежит N. В первом случае из уравнения (1.5.23) системы следует, что переменная $p(t)$ для всех $t > 0$ имеет производную, большую некоторой положительной константы при $Q < 0$ или меньшую некоторой отрицательной константы при $Q > 0$, т. е. $p(t)$ неограниченно возрастает или стремится к нулю при неограниченном увеличении t, поэтому первый случай невозможен, орбита любой точки из N выходит из N.

Поскольку любое цепочно-рекуррентное множество $R(f, N)$, лежащее внутри N, является инвариантным множеством этого потока, то, в случае его непустоты, оно состоит только из целых орбит. Следовательно, в нашем случае $R(f, N)$ пусто. Утверждение следует из теоремы A Робинсона [67].

Глава 2

МЕТОДЫ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ СТАТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ В НАЦИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКЕ

Важным направлением экономической функции государства является проведение стабилизационной политики на основе результатов макроэкономического анализа функционирования рыночной экономики.

Эффективными инструментами макроэкономического анализа функционирования национального хозяйства являются следующие модели: *AD-AS*, *IS*, *LM*, *IS-LM*, *IS-LM-BP*, общего экономического равновесия Кейнса для закрытой экономики и модель малой страны для открытой экономики [43].

В экономической литературе известны факты использования указанных моделей для макроэкономического анализа условий равновесия на рынках национального хозяйства, но неизвестны исследования в рамках оценок оптимальных значений экономических инструментов на базе математических моделей общего экономического равновесия Кейнса и открытой экономики малой страны в смысле некоторого критерия, также неизвестны исследования зависимости оптимальных значений критерия от экзогенных параметров.

На основе факта зависимости решения системы алгебраических уравнений от ее коэффициентов предлагается подход параметрического регулирования статического равновесия национальной экономики, который сводится к оценке оптимальных значений экономических инструментов в виде решения соответствующей задачи математического программирования.

В главе построены модели *IS*, *LM*, *IS-LM*, общего экономического равновесия Кейнса и малой открытой экономики страны, а также приведены результаты макроэкономического анализа и параметрического регулирования статического равновесия национальной экономики.

2.1. Макроэкономический анализ состояния национальной экономики на базе моделей *IS*, *LM*, *IS-LM*, общеэкономического равновесия Кейнса, исследование влияний экономических инструментов на условия равновесия и параметрическое регулирование статического равновесия национальной экономики на основе модели Кейнса

Данный параграф посвящен построению моделей *IS*, *LM*, *IS-LM* и модели общеэкономического равновесия Кейнса на примере экономики Республики Казахстан, исследованию влияний экономических инструментов на условия равновесия на соответствующих рынках и оценке оптимальных значений экономических инструментов на базе математической модели общеэкономического равновесия Кейнса [39].

2.1.1. Построение модели *IS* и исследование влияний экономических инструментов. Введем обозначения для используемых при построении модели экономических показателей: T — налоговые поступления в госбюджет, млрд тенге; S — чистое сбережение, млрд тенге; I — инвестиции в основной капитал, млрд тенге; G — государственные расходы, млрд тенге; Y — валовой национальный доход, млрд тенге; C — потребление домашних хозяйств, млрд тенге.

Макрооценку равновесных условий на рынке благ можно осуществить на базе модели *IS* [39, с. 76], представленной в виде

$$T + S = I + G. \tag{2.1.1}$$

Налоговое поступление T в госбюджет, представляемое выражением $T = T_y Y$, имеет на базе статистических данных за 2000–2008 гг. следующую эконометрическую оценку:

$$\begin{gathered} T = 0{,}2207Y. \\ (0{,}000) \end{gathered} \tag{2.1.2}$$

Статистические характеристики модели (2.1.2) следующие: коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}986$, стандартная ошибка $Se = 209{,}5$, коэффициент аппроксимации $A = 10{,}47\%$, статистика Фишера $F = 581{,}66$. При этом статистическая значимость коэффициента регрессии (2.1.2), а также регрессий, оцененных ниже, представлены в скобках под соответствующими коэффициентами регрессий в виде p-значений.

Чистое сбережение S, представляемое выражением $S = a + S_y Y$, имеет следующую эконометрическую оценку:

$$\begin{gathered} S = -366{,}055 + 0{,}222Y. \\ (0{,}000) \quad (0{,}000) \end{gathered} \tag{2.1.3}$$

Статистические характеристики модели (2.1.3) следующие: коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}994$, стандартная ошибка $Se = 69{,}2$, коэффициент аппроксимации $A = 11{,}47\%$, статистика Фишера $F = 1287{,}2$, статистика Дарбина–Уотсона $DW = 1{,}96$.

Инвестиции в основной капитал, представляемые выражением $I = a + I_i i$, после оценки параметров данной модели по статистическим данным, принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} I = 1367{,}9 - 81{,}3i + 0{,}2751 Y_{\text{ср}}. \\ (0{,}02)\ \ (0{,}03)\quad (0{,}00) \end{gathered} \tag{2.1.4}$$

Коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}99$, стандартная ошибка $Se = 126{,}8$, коэффициент аппроксимации $A = 4{,}2\%$, статистика Фишера $F = 326{,}48$, статистика Дарбина–Уотсона $DW = 1{,}72$. Подставляя в (2.1.3) значение $Y_{\text{ср}} = 6662{,}7$ — среднее значение номинального валового национального дохода (млрд тенге) за 2000–2008 гг. — окончательно для инвестиций получим модель в виде

$$I = 3\,202 - 81{,}3i. \tag{2.1.5}$$

Подставляя выражения (2.1.2), (2.1.3) и (2.1.5) в (2.1.1), получим представление модели IS в следующем виде:

$$-366{,}055 + 0{,}222Y + 0{,}2207Y = 3202 - 81{,}3i + G_{200\text{X}}, \tag{2.1.6}$$

которая позволяет определить для заданных значений Y и $G_{200\text{X}}$ равновесное значение i. В макроэкономической теории предложена методика построения графика линии IS [39, с. 77], которая представляет собой множество сочетаний равновесных значений Y и i (рис. 2.1.1).

Из модели IS_{2007} (рис. 2.1.1) следует, что равновесный ВНД_{2007} при процентной ставке 13,6% равен 11 602,75 млрд тенге, при этом фактический ВНД_{2007} при процентной ставке 13,6% составляет 11 371 млрд тенге, что говорит о недостатке благ на рассматриваемом рынке. Из модели IS_{2008} (рис. 2.1.1) следует, что равновесный ВНД_{2008} при процентной ставке 15,3% равен 13 957,91 млрд тенге, при этом фактический ВНД_{2008} при процентной ставке 15,3% составляет 13 734 млрд тенге, что также говорит о недостатке благ на указанном рынке.

Для оценки мультипликативных эффектов [39, с. 78] экономических инструментов T_y и G построим эконометрическую модель потребления домашних хозяйств C, которая на базе статистических данных за 2000–2008 гг. имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} C = 428{,}68 + 0{,}552 Y^v, \\ (0{,}000)\quad (0{,}000) \end{gathered}$$

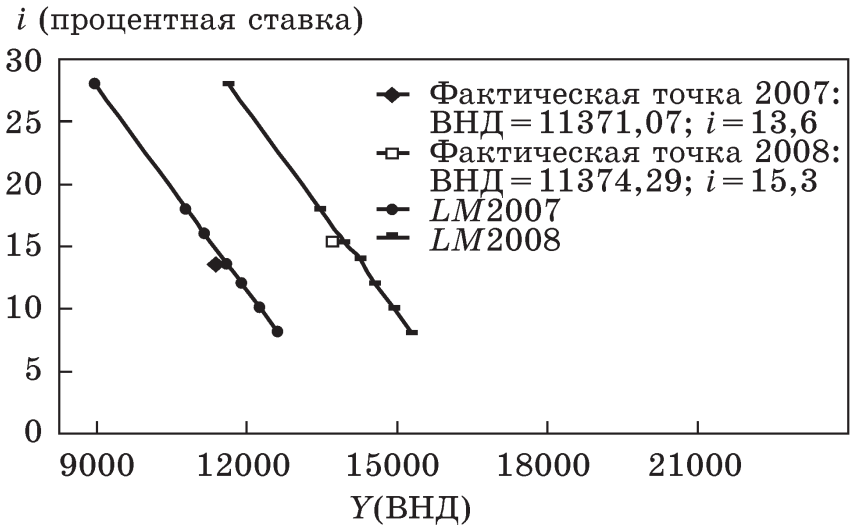

Рис. 2.1.1. Графики моделей IS_{2007} и IS_{2008}

где $Y^v = Y - T_y Y$, $C_{Y^v} = 0{,}552$. Коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}999$, стандартная ошибка $Se = 68{,}92$, коэффициент аппроксимации $A = 1{,}78\%$, статистика Фишера $F = 5394$, статистика Дарбина–Уотсона $DW = 1{,}53$.

В табл. 2.1.1 приведены выражения и полученные на базе модели IS (2.1.6) значения мультипликаторов [39, с. 83] инструментов T_y и G.

Таблица 2.1.1. **Последствия изменения государственных расходов и налогообложения**

Следствие	Действие	
	Увеличение государственных расходов на ΔG	Снижение суммы налогов на ΔT
Прирост национального дохода на	$\dfrac{1}{T_y + S_y}\Delta G = 2{,}26\Delta G$	$\dfrac{C_{Y^v}}{T_y + S_y}\Delta T = 1{,}3\Delta T$
Увеличение дефицита бюджета на	$\left(1 - \dfrac{T_y}{T_y + S_y}\right)\Delta G = 0{,}5\Delta G$	$\left(1 - \dfrac{T_y C_{Y^v}}{T_y + S_y}\right)\Delta T = 0{,}7\Delta T$

Оценим мультипликативные эффекты инструментов G и T_y на данных 2008 г. По данным 2008 г. имеем: $G = 3\,859{,}98$, $Y = 13\,734{,}3$, $T_y = 0{,}2207$. Теперь изменим G на $G = 579$. Это изменение в соответствии с мультипликатором при ΔG приведет к приросту ВНД на величину $\Delta Y = 1308{,}54$.

Также по данным 2008 г. имеем: $G = 3\,859{,}98$, $Y = 13\,734{,}3$, $T_y == 0{,}2207$. Теперь изменим T_y на $\Delta T_y = -0{,}01$. Это измене-

ние в соответствии с мультипликатором при ΔT_y приведет к приросту ВНД на величину $\Delta Y = 328{,}37$. Полученные результаты согласуются с макроэкономической теорией, которая рассматривает влияния экономических инструментов на изменения внутреннего национального дохода, что представлено табл. 2.1.1 [39, с. 83].

2.1.2. Макрооценка равновесных условий на рынке денег. Макрооценку равновесных условий на рынке денег можно осуществить на базе модели LM, представленной в виде [39, с. 111]

$$M = l_{\text{им}} + l_{\text{сд}}, \tag{2.1.7}$$

где M — предложение денег, млрд тенге; $l_{\text{им}}$ — объем имущества (депозиты в депозитных организациях (по секторам и видам валют)), млрд тенге; $l_{\text{сд}}$ — объем сделки (объем кредитов выданных БВУ с учетом скорости обращения денег), млрд тенге.

Для оценки скорости обращения денег воспользуемся уравнением Фишера [119, с. 112]

$$MV = Y,$$

где V — скорость обращения денег; Y — номинальный ВНД; за M — количество денег в обращении в уравнении Фишера принят денежный агрегат $M3$.

Оценка скорости обращения денег по выражению $V = Y/M$ на основе статистических данных за 2007–2008 гг. представлена в табл. 2.1.2.

Таблица 2.1.2. **Значение денежного агрегата $M3$ и скорость обращения денег**

Год	ВНД	Значение денежного агрегата $M3$	Скорость обращения денег V
2007	11 371	4 629,8	2,5
2008	13 734	6 266,4	2,2

Величину предложения денег, за которую в уравнении Фишера принят денежный агрегат $M3$, можно повторно проверить через ее оценку, определяемую по годовым значениям денежной базы и денежного мультипликатора μ.

Денежный мультипликатор μ определяется следующим выражением [119, с. 99]:

$$\mu = \frac{1 + \gamma(1 - \alpha - \beta)}{\alpha + \beta + \gamma(1 - \alpha - \beta)},$$

где $\alpha = RR/D$ — норматив минимального резерва; $\beta = ER/D$ — коэффициент кассовых остатков коммерческих банков; $\gamma = CM/K$ — доля наличных денег в общей сумме кредитов коммерческих банков; RR — минимальные резервы; D — чековые (бессрочные) депозиты (в работе были использованы данные по депозитам в депозитных организациях (по секторам и видам валют)); ER — избыточные резервы; K — кредиты коммерческих банков, принятых в соответствии с выражением K_1/V; K_1 — статистические данные по выданным кредитам; CM — наличные деньги в обращении.

Таблица 2.1.3. **Значение мультипликаторов**

Год	α	β	γ	Значение мультипликатора		
				депозитного	кредитного	денежного
2007	0,143	0,043	0,250	2,565	2,087	3,087
2008	0,045	0,069	0,252	2,969	2,632	3,632

Оценка предложения денег M по денежным базам за 2007–2008 гг. и значениям μ за эти же годы равны: за 2007 г. $M = \mu H = 4\,519{,}9$ млрд тенге; за 2008 г. $M = \mu H = 5\,343{,}6$ млрд тенге.

В табл. 2.1.4 приведены расчетные значения предложения денег и значения денежного агрегата $M3$ по годам. Таблица 2.1.4 показывает, что расчетные значения M и значения денежного агрегата $M3$ одного порядка и близки. Учитывая данный факт и выше полученный результат о скорости обращения денег, в наших конкретных исследованиях за предложение денег приняты их расчетные значения, а фактические значения кредитов БВУ скорректированы с учетом скорости обращения денег.

Таблица 2.1.4. **Расчетные значения предложения денег и значения денежного агрегата**

Год	Расчетные значения предложения денег	Значения денежного агрегата $M3$
2007	4 519,9	4 629,8
2008	5 343,6	6 266,4

Спрос на имущество, представляемое выражением $l_{\text{им}} = e^{a+l_i i}$ имеет следующую эконометрическую оценку:

$$l_{\text{им}} = \underset{(0{,}000)}{438\,883{,}3} \cdot \underset{(0{,}01)}{0{,}66^{i}}. \qquad (2.1.8)$$

Коэффициенты регрессии являются статистически значимыми, хотя коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}33$, стандартная ошибка $Se = 0{,}6$, статистика Фишера $F = 67$. Спрос денег на сделки, представляемый выражением $l_{\text{сд}} = a + bY$, описывает следующую эконометрическую оценку:

$$\underset{\phantom{(0{,}0005)}}{l_{\text{сд}}} = \underset{(0{,}0005)}{-1\,062{,}85} + \underset{(0{,}0000)}{0{,}326Y}, \tag{2.1.9}$$

Коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}965$, стандартная ошибка $Se = 267$, статистика Фишера $F = 193{,}7$.

Подставляя выражения (2.1.8), (2.1.9) в (2.1.7), получим представление модели LM в следующем виде:

$$M_{200\text{X}} = 438\,883{,}3 \cdot 0{,}66^i - 1\,062{,}85 + 0{,}326Y, \tag{2.1.10}$$

которая позволяет определить для заданных значений Y и $M_{200\text{X}}$ равновесное значение i. В макроэкономической теории предложена методика построения графика линии LM [39, с. 113], которая

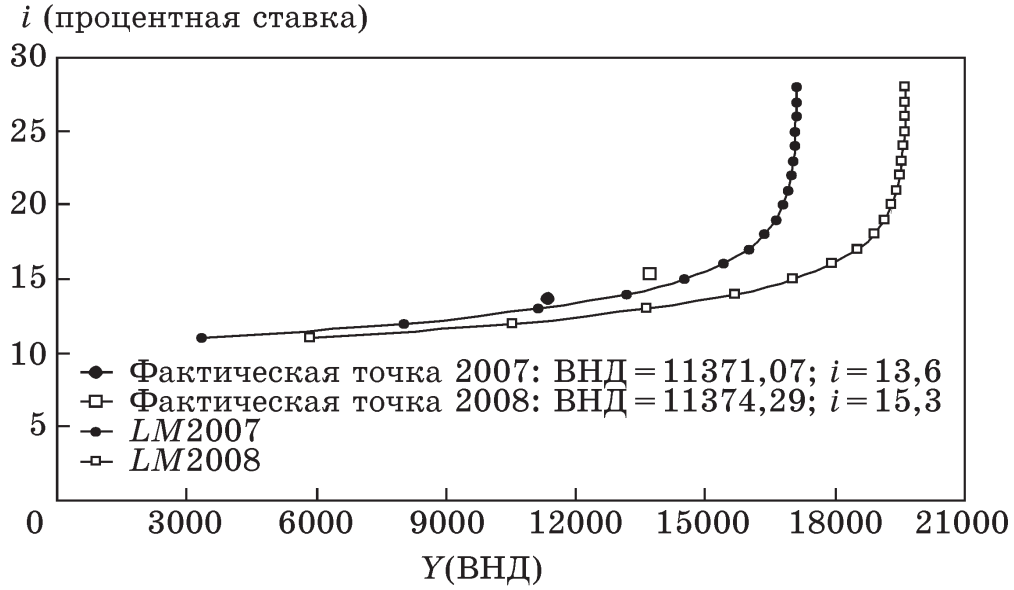

Рис. 2.1.2. Графики модели LM_{2007} и LM_{2008}

представляет собой множество сочетаний равновесных значений Y и i. На рис. 2.1.2 представлены графики моделей LM на 2007 и 2008 гг.

В соответствии с полученными результатами и построенными графиками LM_{2007}, LM_{2008} можно сделать вывод, что фактические значения Y и i 2007–2008 гг. расположены выше соответствующих линий LM_{2007}, LM_{2008}, что говорит об относительно низком спросе на денежные активы.

Тревожный момент заключается в том, что фактическая точка, в которой денежный рынок находился в 2008 г., соответствует более высокой средней рыночной ставке процента, чем в 2007 г., тогда как вся кривая LM 2008 г. находится ниже и правее соответствующей кривой 2007 г., т. е. одному и тому же объему ВНД соответствуют более низкие равновесные ставки процента, нежели год назад. Это является косвенным индикатором того, что правительство регулирует денежный рынок исходя из необходимости удешевления денег, но банки второго уровня реагируют на эти сигналы противоположным образом, поднимая коммерческую учетную ставку.

Именно такая ситуация складывалась в большинстве развитых стран в 2008 г., в преддверии экономического кризиса.

2.1.3. Макрооценка совместного состояния равновесия на рынках благ, денег и исследование влияний экономических инструментов. На базе полученных моделей IS и LM можно представить модель для макрооценки совместного состояния равновесия на рынках благ и денег следующей системой:

$$\begin{gathered} -366{,}055 + 0{,}222Y + 0{,}2207Y = 3202 - 81{,}3i + G_{200\text{X}}, \\ M_{200\text{X}} = 438\,833{,}3 \cdot 0{,}66^i - 1062{,}85 + 0{,}326Y. \end{gathered} \tag{2.1.11}$$

Результаты решения системы (2.1.11) для оценки совместного состояния равновесияна рынках благ и денег на 2007 и 2008 гг. представлены в табл. 2.1.5, а графики моделей IS и LM на 2007 и 2008 гг. представлены на рис. 2.1.3.

Таблица 2.1.5. **Совместные равновесные и фактические значения Y и i**

Год	Фактические значения		Совместные равновесные условия	
	i — процентная ставка БВУ, %	Y — ВНД, млрд тенге	i^*	Y^* — эффективный спрос по Кейнсу
2007	13,6	11 371,1	13,23	11 670,89
2008	15,3	13 734,3	13,29	14 327,31

Из рис. 2.1.3 следует, что координаты точки эффективного спроса для 2007–2008 гг. соответственно представлены $Y^*_{2007} = 11\,670{,}89$, $i^*_{2007} = 13{,}23$ и $Y^*_{2008} = 14\,327{,}31$, $i^*_{2008} = 13{,}29$. Точки фактического состояния экономики Республики Казахстан на 2007–2008 гг. соответственно расположены левее соответствующих IS_{2007} и IS_{2008} и выше соответствующих LM_{2007} и LM_{2008}.

Такое расположение точек фактического состояния экономики говорит о соответствующих нехватках благ в 2007, 2008 гг. на рынке благ и избытках денег в 2007, 2008 гг. на рынке денег.

Оценим влияние инструментов G и M на совместные равновесные условия по данным 2008 г.

По результатам решения системы (2.1.11) на основе данных за 2008 г. имеем: $G = 3859{,}98$ и $M = 5\,343{,}6$. Теперь увеличим G на $\Delta G = 579$, при сохранении M это изменение привело к повыше-

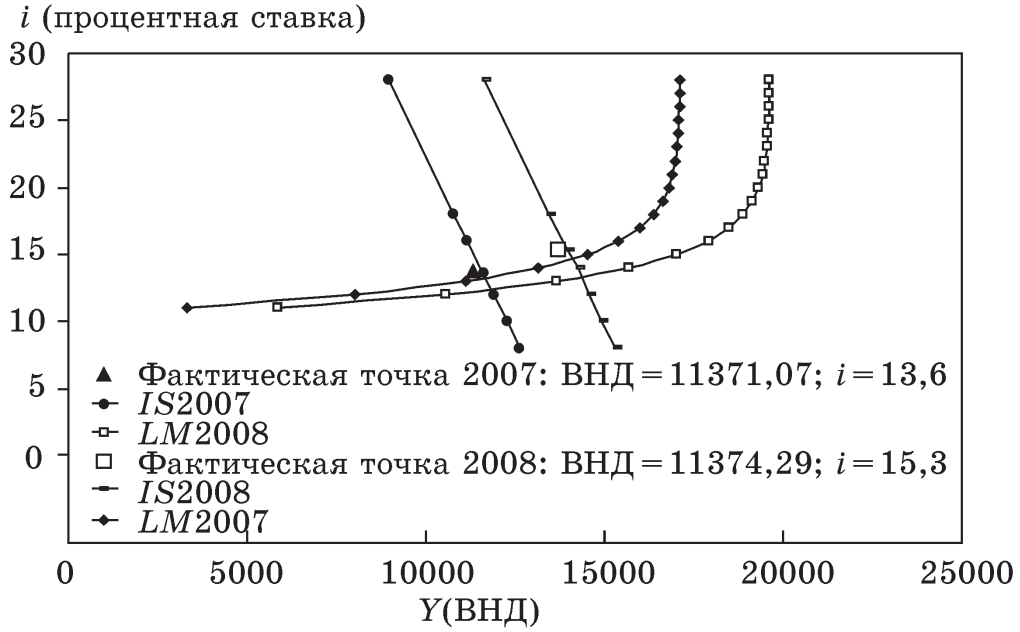

Рис. 2.1.3. Графики моделей IS_{2007}, IS_{2008}, LM_{2007} и LM_{2008}

нию эффективного спроса по Кейнсу — ВНД до 15 522 млрд тенге и к повышению процентной ставки до 13,9% за счет сдвига IS вправо в результате мультипликативного эффекта от увеличения государственных расходов.

Теперь увеличим M_{2008} на $\Delta M = 534$, при сохранении значения G_{2008} это изменение привело к приросту ВНД до 14 438,6 млрд тенге и к снижению процентной ставки до 12,7% за счет сдвига LM вправо в результате увеличения предложения денег.

Полученные результаты также согласуются с макроэкономической теорией о влиянии экономических инструментов на рынках благ и денег [39, с. 78, 114].

2.1.4. Макрооценка состояния равновесия на базе модели общеэкономического равновесия Кейнса и исследование влияний экономических инструментов. Модель общеэкономического равновесия Кейнса на базе моделей IS, LM, эконометрической функции цены предложения труда и эконометрического выражения произ-

водственной функции имеет следующий вид [39, с. 223]:

$$T(Y) + S(Y) = I(i) + G, \tag{2.1.12}$$

$$M = l(Y, i), \tag{2.1.13}$$

$$W^s(N, P) = PY_N, \tag{2.1.14}$$

$$Y = Y(N), \tag{2.1.15}$$

где $W^s(N, P)$ — функция цены предложения труда; Y_N — производная от производственной функции; $Y(N)$ — производственная функция.

Уравнения (2.1.12), (2.1.13) модели общеэкономического равновесия представлены соответствующими уравнениями IS и LM (см. (2.1.11)).

Эконометрическое представление цены предложения труда по статистическим данным за 2000–2008 гг. имеет вид

$$\begin{gathered} W^s(N, P) = \underset{(0{,}000)}{60{,}12P} - \underset{(0{,}000)}{0{,}007N}, \end{gathered} \tag{2.1.16}$$

где P — уровень цен к 2000 г., N — занятое население, тыс. чел. Соответствующие p-значения в уравнении для W^s указаны в скобках под коэффициентами регрессии. Имеем следующие результаты анализа статистической значимости модели для W^s: коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}99$, стандартная ошибка $Se = 3{,}37$, статистика Фишера $F = 522{,}6$, коэффициент аппроксимации $A = 7{,}4\%$.

Эконометрическое представление производственной функции $Y(N)$ по статистическим данным за 2000–2008 гг. имеет вид

$$\begin{gathered} Y = \underset{(0{,}000)}{-5{,}654N} + \underset{(0{,}000)}{0{,}0009N^2}. \end{gathered} \tag{2.1.17}$$

Результаты анализа статистической значимости модели для W^s: коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}98$, стандартная ошибка $Se = 122$, статистика Фишера $F = 172$.

Кейнсианская модель общеэкономического равновесия на базе соотношений (2.1.11), (2.1.16) и (2.1.17) имеет вид

$$\begin{gathered} -366{,}055 + S_y Y + T_y Y = 3202 - 81{,}30i + G_{200\text{X}}, \\ M_{200\text{X}} = 438\,883{,}3 \cdot 0{,}66^i - 1062{,}85 + 0{,}326Y, \\ 60{,}12P - 0{,}00698N = -5{,}65P + 0{,}0018NP, \\ Y = -5{,}65N + 0{,}0009N^2. \end{gathered} \tag{2.1.18}$$

В этой системе, описывающей поведение макроэкономических субъектов, экзогенно заданными параметрами являются величина государственных расходов G и номинальное количество находящихся в обращении денег M. Значения пяти эндогенных параметров Y^*, i^*, P^*, N^*, W^*, при которых равновесие достигается одновременно на всех трех перечисленных рынках, определяют из решения данной системы уравнений.

Подставляя фактические значения $G_{200\text{X}}$, $M_{200\text{X}}$ соответствующего года и решая систему (2.1.18), находим равновесные одновременно на всех трех рынках значения переменных.

По результатам решения системы (2.1.18) на основе данных за 2007, 2008 гг. равновесные значения эндогенных параметров приведены в табл. 2.1.6.

Таблица 2.1.6. **Сравнительный анализ фактических и равновесных значений ВНД, процентной ставки, уровня цен, численности работающих**

Год		Y	i	P	N
2007	фактическое	11 371,1	13,6	1,789	7 631,1
	равновесное	11 670,89	13,23	1,05	7 751,6
	отклонение	2,64%	−0,37	−0,74	1,58%
2008	фактическое	13 734,3	15,3	1,959	7 857,2
	равновесное	14 327,3	13,3	1,103	8048,8
	отклонение	4,32%	−2	−0,9	2,44%

Оценим влияние инструментов G и M на общеэкономические равновесия Кейнса по данным 2008 г.

Увеличение G на $\Delta G = 579$ при сохранении значений M приведет к повышению ВНД до 15 522,6 млрд тенге, к снижению процентной ставки до 13,9%, безработица сократится на 1,6%, а уровень цен повысится до 1,12.

Увеличение M_{2008} на $\Delta M = 534{,}4$ при сохранении значений G приведет к повышению ВНД до 14 438,56 млрд тенге, к снижению процентной ставки до 12,68%, безработица сократится на 0,15%, а уровень цен повысится незначительно до 1,105.

Одновременное увеличение G на $\Delta G = 579$ и увеличение M_{2008} на $\Delta M = 534{,}4$ приведет к повышению ВНД до 15 658,85 млрд тенге, к снижению процентной ставки до 13,15%, безработица сократится на 1,77%, а уровень цен повысится до 1,13.

2.1.5. Параметрическое регулирование статического равновесия национальной экономики на основе модели Кейнса. Рассмотрим возможность оценки оптимальных значений инструментов M и G для заданных внешних экзогенных параметров S_y, T_y на базе модели (2.1.18) для 2008 г. в смысле критерия ВНД:

$$Y \to \max. \tag{2.1.19}$$

Указанную оценку можно получить, решив следующую задачу математического программирования.

Задача 2.1.1. Найти на основе математической модели (2.1.18) значения M, G, которые обеспечивают максимум критерия (2.1.19) при ограничениях

$$\begin{aligned} &|M - M^*| \leqslant 0{,}1M^*, \quad |G - G^*| \leqslant 0{,}1G^*, \\ &|N - N^*| \leqslant 0{,}1N^*, \quad |P - P^*| \leqslant 0{,}1P^*, \\ &|i - i^*| \leqslant 0{,}1i^*, \qquad |Y - Y^*| \leqslant 0{,}1Y^*. \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Здесь M^* и G^* — фактические значения предложения денег и государственных расходов в 2008 г. соответственно. Знак «$*$» для неизвестных системы (2.1.20) соответствует равновесным значениям этих переменных при фиксированных значениях M^* и G^*.

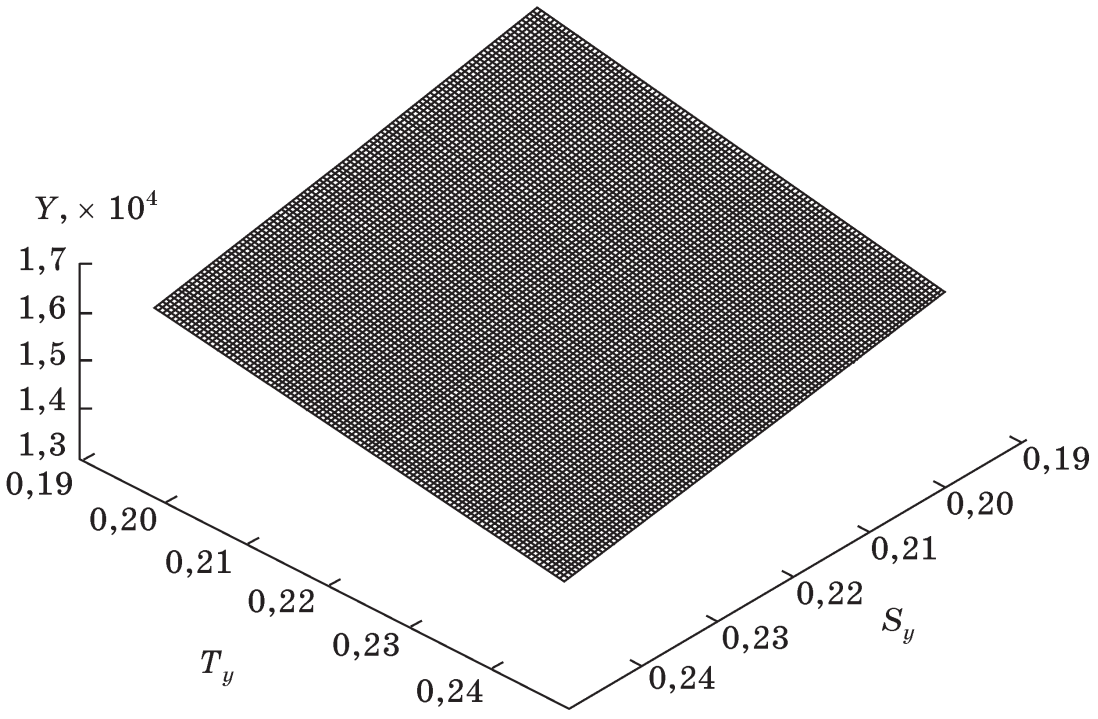

Рис. 2.1.4. График зависимости оптимальных значений критерия Y от параметров T_y, S_y

Для задачи 2.1.1 оптимальными значениями параметров являются $M = 5877{,}96$, $G = 4245{,}98$, при которых достигается максимальное значение критерия $Y = 15\,255{,}9$, значение этого критерия без регулирования равно $14\,327{,}3$. Для найденных оптимальных значений инструментов M и G равновесные значения остальных эндогенных переменных оказались равными: $N = 8148{,}539$, $P = 1{,}1210$, $i = 12{,}986$. Здесь можно отметить также, что при решении данной оптимизационной задачи численность занятых увеличилось примерно на $100\,000$ человек.

На базе задачи 2.1.1 проведено исследование зависимости оптимальных значений критерия Y от пары экзогенных параметров $\{T_y, S_y\}$, заданных в соответствующих областях. Полученный график оптимальных значений критерия (2.1.19) приведен на рис. 2.1.4.

2.2. Макроэкономический анализ и параметрическое регулирование статического равновесия национальной экономики на базе модели маленькой открытой страны

Актуальной проблемой в условиях открытой экономики, когда страна осуществляет свободный товарообмен и перелив капиталов с остальным миром, является обеспечение двойного равновесия — общего экономического равновесия в условиях полной занятости при запланированном (будем полагать нулевом) сальдо платежного баланса.

Все остальные состояния национальной экономики, отличные от двойного равновесия, представляют различные типы неравновесных состояний: безработица сохраняется несмотря на избыток платежного баланса, безработица сочетается с дефицитом платежного баланса, избыточная занятость может сопровождаться как избытком платежного баланса, так и дефицитом платежного баланса. Поэтому государственная экономическая политика нацеливается на достижение двойного равновесия. Оценку равновесных условий открытой экономики можно частично рассматривать на базе модели маленькой страны [39, с. 433].

Мы оставляем в стороне вопрос о том, в каких случаях и почему равновесное состояние макросистемы не может считаться идеалом. В реальной динамике макросистем нередко случаются ситуации, когда государство осознанно поддерживает определенные типы неравновесия, преследуя при этом вполне конкретные цели, в том числе цели стабилизационной политики. В рамках данной равновесной группы моделей подобные ситуации мы не рассматриваем.

Данный параграф посвящен построению математической модели малой открытой экономики на примере Республики Казахстан, исследованию влияния экономических инструментов на условия общего экономического равновесия и состояние платежного баланса, оценке оптимальных значений экономических инструментов на базе модели малой открытой экономики и исследованию зависимостей оптимальных значений критериев от значений одного, пары и тройки из набора внешних экономических параметров, заданных в соответствующих областях.

2.2.1. Построение модели открытой экономики маленькой страны и оценка равновесных условий. Введем обозначения для используемых при построении модели экономических показателей: Y — реальный валовой национальный доход; C — реальный объем потребления домашних хозяйств; I — реальный объем инвестиций в основной капитал; G — реальный объем государственных расходов; NE — реальный объем чистого экспорта благ; P — уровень цен; P^Z — уровень цен за рубежом; l — реальные кассовые остатки; i — среднерыночная процентная ставка банков второго уровня по кредитам; N — число занятых; dY/dN — производная от валового национального дохода по числу занятых; W^S — номинальный уровень зарплаты; NKE — номинальный объем чистого экспорта капитала; e — обменный курс национальной валюты; e^e — ожидаемый обменный курс национальной валюты; $\hat{e}^e$ — ожидаемый темп прироста обменного курса национальной валюты [39, с. 421]; M — номинальное предложение денег, определяемое из [39, с. 412] по формуле $M = \mu H$, где H — денежная база каждого года, а μ — денежный мультипликатор, рассчитанный из балансовых уравнений банковской системы и определяемый по следующей формуле:

$$\mu = \frac{1 + \gamma(1 - \alpha - \beta)}{\alpha + \beta + \gamma(1 - \alpha - \beta)}, \tag{2.2.1}$$

где $\alpha = RR/D$ — норматив минимального резерва; $\beta = ER/D$ — коэффициент кассовых остатков банков второго уровня (БВУ); $\gamma = CM/K$ — доля наличных денег в общей сумме кредитов БВУ; RR — минимальные резервы; ER — избыточные резервы; D — чековые депозиты; CM — наличные деньги в обращении; K — кредиты БВУ, скорректированные с учетом скорости обращения денег.

Построение математической модели малой открытой экономики начнем с оценок денежного мультипликатора, реальных кас-

совых остатков и эконометрических функций, характеризующих состояние национальной экономики.

Оценки значений денежного мультипликатора, рассчитанные из формулы (2.2.1) по статистическим данным за период 2006–2008 гг., приведены ниже.

Год	2006	2007	2008
μ	2,372	3,087	3,632

Реальные кассовые остатки l определяются по формуле

$$l = l_{\text{им}} + l_{\text{сд}}, \tag{2.2.2}$$

где $l_{\text{им}}$ — объем имущества (депозиты в депозитных организациях (по секторам и видам валют)), млрд тенге; $l_{\text{сд}}$ — объем сделки (объем кредитов, выданных БВУ с учетом скорости обращения денег), млрд тенге.

Оценка скорости обращения денег рассчитана по уравнению Фишера [42]:

$$MV = Y,$$

где V — скорость обращения денег; M — количество денег в обращении, в качестве которого в уравнении Фишера обычно принят денежный агрегат $M3$.

Оценки скорости обращения денег, рассчитанные по формуле $V = Y/M$ на основе статистических данных за 2006–2008 гг. [37], представлены в табл. 2.2.1.

Таблица 2.2.1. **Значения номинального ВНД (млрд тенге), денежного агрегата $M3$ (млрд тенге) и скорости обращения денег V**

Год	ВНД	$M3$	V
2007	11 371	4629,8	2,5
2008	13 734	6266,4	2,2

Поведение национального хозяйства в макроэкономической теории характеризуется следующими функциями, построенными эконометрическими методами [1] на основе официальной статистической информации.

1. Потребление C, представленное выражением $C = a + C_Y Y$, имеет следующую эконометрическую оценку, полученную на ба-

зе статистической информации Республики Казахстан за период 2000–2008 гг.:

$$\underset{(0,00)}{C = 555{,}8} + \underset{(0,00)}{0{,}4101Y}. \tag{2.2.3}$$

Статистические характеристики построенной модели потребления C составили: коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}994$ и коэффициент аппроксимации $A = 1{,}8\%$. При этом статистические значимости коэффициентов регрессии (2.2.3), а также регрессий, оцененных ниже, представлены в скобках под соответствующими коэффициентами регрессий в виде p-значений.

2. Потребление импортных благ Q_{im} представлено уравнением регрессии вида

$$Q_{im} = a_1 Y + b_1 e P^Z / P,$$

или, в оцененном виде

$$\underset{(0,00)}{Q_{im} = 0{,}4076Y} - \underset{(0,17)}{2{,}6059 e P^Z / P} \tag{2.2.4}$$

с коэффициентом детерминации $R^2 = 0{,}975$ и коэффициентом аппроксимации $A = 10\%$.

3. Модель спроса на реальные кассовые остатки имеет вид $l = a_2 + b_2 Y + b_3 i + b_4 e$, или, после оценки параметров данной модели по статистическим данным:

$$\underset{(0,01)}{l = 1{,}3320Y} - \underset{(0,08)}{138{,}1i} - \underset{(0,03)}{22{,}6e}. \tag{2.2.5}$$

При построении модели (2.2.5) в качестве данных для левой части были взяты значения l, рассчитанные в соответствии с формулой (2.2.2). При этом коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}999$ и коэффициент аппроксимации $A = 0{,}2\%$.

4. Модель цены предложения труда: $W^S = b_5 N + b_6 P_{\text{ср}}$, где $P_{\text{ср}} = (1 - \alpha)P + \alpha e P^Z / e^0$ имеет следующую эконометрическую оценку, полученную на базе статистической информации:

$$\underset{(0,00)}{W^S = -0{,}0219N} + \underset{(0,00)}{156{,}9 P_{\text{ср}}}, \tag{2.2.6}$$

где $P_{\text{ср}} = 0{,}6P + 0{,}4 e P^Z / e^0$, e^0 — обменный курс в базовом (2000 г.) периоде, α — доля импортируемых товаров в общем их количестве, которая взята на уровне 0,4.

При этом статистические характеристики построенной модели достаточно высокие: коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}986$ и коэффициент аппроксимации для 2007–2008 гг. на уровне $A = 5\%$.

5. Модель чистого экспорта капитала имеет вид $NKE = b_7 e(i^Z + \hat{e}^e - i)$, или, после оценки параметров данной модели по статистическим данным:

$$\underset{(0,00)}{NKE = -0{,}3349 e(i^Z + \hat{e}^e - i)}, \tag{2.2.7}$$

с коэффициентом детерминации $R^2 = 0{,}51$.

6. Производственная функция представлена в парной регрессии $Y = a_3 + b_8 N$, или, в оцененном виде:

$$\underset{(0,00)\quad(0,00)}{Y = -17\,409{,}0 + 3{,}0866 N}, \tag{2.2.8}$$

с коэффициентом детерминации $R^2 = 0{,}93$ и коэффициентом аппроксимации по данным 2007–2008 гг., не превышающим $A = 3{,}5\%$.

7. Модель инвестиции в основной капитал имеет вид

$$I_t = a_4 + b_9 Y_{t-1} + b_{10} i_t,$$

где I_t и i_t — значения показателей инвестиций в текущем периоде; Y_{t-1} — значение валового национального дохода в прошлом периоде.

После оценки параметров последней модели по статистическим данным получено следующее выражение:

$$\underset{(0,34)\quad(0,00)\quad(0,41)}{I_t = 862{,}8 + 0{,}3122 Y_{t-1} - 48{,}4 i_t}. \tag{2.2.9}$$

Коэффициент детерминации при этом составил $R^2 = 0{,}93$, а коэффициент аппроксимации в пределах $A = 5\%$.

Подставляя в (2.2.9) значение $Y_{t-1} = Y_{2007}$, окончательно для инвестиций на 2008 г. получим модель в виде

$$I_{2008} = 2846{,}7 - 48{,}4 i. \tag{2.2.10}$$

Аналогично, подставив в (2.2.9) значение $Y_{t-1} = Y_{2006}$, для инвестиций на 2007 г. получим модель в виде

$$I_{2007} = 2737{,}3 - 48{,}4 i. \tag{2.2.11}$$

8. Модель экспорта благ является регрессией вида $Q_{ex} = b_{11} e P^Z / P$. После оценки параметров эта модель принимает вид

$$\underset{(0,01)}{Q_{ex} = 17{,}87 e P^Z / P}. \tag{2.2.12}$$

Коэффициент детерминации при этом составил $R^2 = 0{,}65$.

На основе полученных эконометрических оценок (2.2.3)–(2.2.12), характеризующих состояние национальной экономики, переходим к построению модели малой открытой экономики для 2008 г.

В рамках линии IS построена функция $Y = C + I + G + Q_{ex} - Q_{im}$, которая с учетом (2.2.3), (2.2.4), (2.2.9)–(2.2.12) примет вид

$$Y = 555{,}8 + 0{,}4101Y + 2846{,}7 - 48{,}4i + G + 20{,}47\frac{eP^Z}{P} - 0{,}4076Y,$$

или

$$Y = 3410{,}9 - 48{,}4i + 20{,}52\frac{eP^Z}{P} + 1{,}0024G. \qquad (2.2.13)$$

Уравнение линии LM: $M/P = l$, с учетом эконометрической модели (2.2.5) примет вид

$$\frac{M}{P} = 1{,}3320Y - 138{,}1i - 22{,}6e,$$

из которого можно получить следующее соотношение:

$$i = -0{,}1640e + 0{,}0096Y - 0{,}0072\frac{M}{P}. \qquad (2.2.14)$$

Подставляя (2.2.14) в (2.2.13), получим уравнение совокупного спроса Y^D:

$$Y^D = 2324{,}0 + 5{,}42e + 13{,}98\frac{eP^Z}{P} + 0{,}6830G + 0{,}2392\frac{M}{P}. \qquad (2.2.15)$$

Подставим (2.2.13) в (2.2.14) и определим функцию процентной ставки для Республики Казахстан за рассматриваемый период:

$$i = 22{,}42 - 0{,}1117e - 0{,}0049\frac{M}{P} + 0{,}1349\frac{eP^Z}{P} + 0{,}0065G. \qquad (2.2.16)$$

Условие равновесия на рынке труда имеет вид [39, с. 435]: $P\,dY/dN = W^S$, которое с учетом эконометрических функций (2.2.6) и (2.2.8) можно представить выражением вида

$$7{,}5P = -0{,}0219N + 156{,}87\left(0{,}6P + 0{,}4\frac{eP^Z}{e^0}\right). \qquad (2.2.17)$$

Из (2.2.17) следует соотношение для N:

$$N = 4165{,}8P + 20{,}20eP^Z. \qquad (2.2.18)$$

Подставив выражение (2.2.18) в производственную функцию (2.2.8), получим функцию совокупного предложения:

$$Y^S = -17\,408{,}6 + 12\,858{,}2P + 62{,}36eP^Z. \qquad (2.2.19)$$

Платежный баланс будет иметь нулевое сальдо, если чистый экспорт благ равен чистому экспорту капитала, т. е. выполняется $NE = NKE/P$, эконометрическое представление которого на основе (2.2.4), (2.2.7), (2.2.12) имеет следующий вид:

$$17{,}87\frac{eP^Z}{P} - \left(0{,}4076Y - 2{,}6059\frac{eP^Z}{P}\right) = -0{,}3349\frac{e(i^Z + \hat{e}^e - i)}{P}.$$

Подставляя в последнее равенство значение отечественной процентной ставки (2.2.16), после преобразований получим уравнение кривой нулевого платежного баланса:

$$Y^{ZBO} = 50{,}23\frac{eP^Z}{P} - 0{,}8215\frac{ei^Z}{P} - 0{,}8215\frac{e^e}{P} + 19{,}24\frac{e}{P} - \\ - 0{,}0918\frac{e^2}{P} - 0{,}0041\frac{eM}{P^2} + 0{,}111\frac{e^2P^Z}{P^2} + 0{,}005\frac{eG}{P}. \qquad (2.2.20)$$

Таким образом, модель малой открытой экономики для 2008 г. будет представлена следующей системой уравнений:

$$Y^D = 2324{,}0 + 5{,}42e + 13{,}98\frac{eP^Z}{P} + 0{,}6830G + 0{,}2392\frac{M}{P},$$

$$Y^S = -17\,408{,}6 + 12\,858{,}2P + 62{,}36eP^Z,$$

$$Y^{ZBO} = 50{,}23\frac{eP^Z}{P} - 0{,}8215\frac{ei^Z}{P} - 0{,}8215\frac{e^e}{P} + 19{,}24\frac{e}{P} - \\ - 0{,}0918\frac{e^2}{P} - 0{,}0041\frac{eM}{P^2} + 0{,}111\frac{e^2P^Z}{P^2} + 0{,}005\frac{eG}{P},$$

$$Y^D = Y^S = Y^{ZBO}. \qquad (2.2.21)$$

Аналогично (2.2.21) может быть построена и модель открытой экономики маленькой страны для 2007 г.

Решая систему (2.2.21), определим при заданных значениях внешних экономических показателей P^Z, i^Z, e^e и экономических инструментах M и G равновесные значения валового национального дохода $Y^* = Y^D = Y^S = Y^{ZBO}$, уровня цен P^*, обменного

курса национальной валюты e^*. Равновесные значения процентной ставки по кредитам банков второго уровня i^* и числа занятых N^* рассчитываются по формулам (2.2.16) и (2.2.18) соответственно.

Для заданных внешних нерегулируемых экономических показателей P^Z, i^Z, e^e и регулируемых экономических инструментов M и G при решении системы (2.2.21) получены равновесные значения эндогенных переменных:

— на 2007 г.: $Y^* = 6383{,}1$, $P^* = 1{,}2054$, $e^* = 110{,}2$, $i^* = 16{,}4$, $N^* = 7708{,}0$;

— на 2008 г.: $Y^* = 6785{,}4$, $P^* = 1{,}2099$, $e^* = 114{,}7$, $i^* = 14{,}7$, $N^* = 7838{,}4$.

На рис. 2.2.1 представлено состояние двойного равновесия и точка пересечения *IS-LM-ZBO* соответствует совместному равновесию на рынках благ, денег и труда при полной занятости и нулевом сальдо платежного баланса на 2008 г. Все комбинации значений национального дохода и ставки процента, кроме $i = 14{,}7\%$, $Y = 6785{,}4$, представляют различные типы неравновесных состояний. Казахстан в 2008 г., согласно построенному графику, также имеет конъюнктурную безработицу и дефицит платежного баланса. На рис. 2.2.1 такую ситуацию представляет точка A

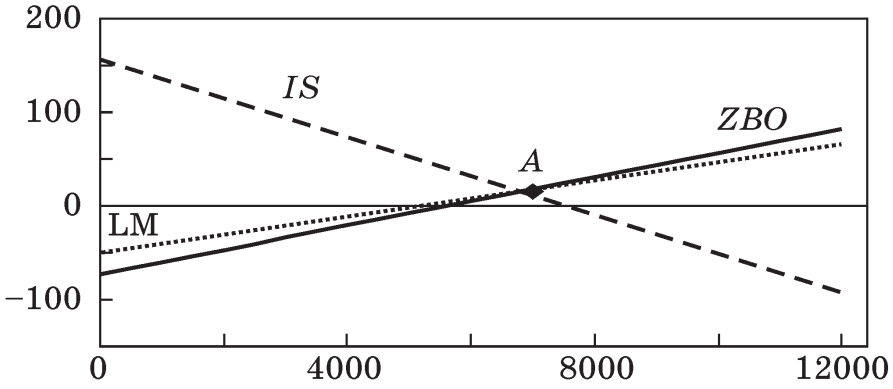

Рис. 2.2.1. Двойное равновесие на 2008 г.

($Y_{2008} = 70\,098{,}0$, $i_{2008} = 15{,}3\%$). Однако можно отметить, что согласно официальной статистике Казахстан в 2008 г. имел профицит платежного баланса.

С учетом указанных результатов получены равновесные значения экономических показателей C, I и др., рассчитанные по построенным выше эконометрическим моделям. В табл. 2.2.2 приведены результаты сравнения равновесных с фактическими значениями этих показателей за 2008 г.

Таблица 2.2.2. **Равновесные и фактические значения показателей за 2008 г.**

Показатели	Равновесное значение Y^*	Фактическое значение $Y_{\text{факт}}$	Отклонение $Y_{\text{факт}} - Y^*$	
			абсолютное	%
Уровень цен P	1,2099	1,96	0,7501	38,3
Обменный курс e	114,6	120,3	5,6687	4,7
Процентная ставка ББВУ i	14,7	15,3	0,6246	4,1
Национальный доход Y	6785,4	7009,8	224,4	3,2
Потребление C	3338,2	3395,1	56,9	1,7
Импорт Q_{im}	2467,5	2326,4	−141,2	−6,1
Инвестиции I	2137,043	2149,2	12,2	0,6
Экспорт Q_{ex}	2045,384	4370,6	2325,2	53,2

2.2.2. Влияние экономических инструментов на равновесные состояния и состояние платежного баланса. Ниже рассчитаны оценки влияния экономических инструментов — предложения денег и государственных расходов — на общее экономическое равновесие и состояние платежного баланса с использованием следующего алгоритма:

1) изменяя значение M_{2008} на $\Delta M = 0{,}01M_{2008}$ и оставляя при этом значения G_{2008} и i^Z_{2008}, P^Z_{2008}, e^e_{2008} неизменными, определяем значения $(M\Delta Y^*)/(Y^*\Delta M)$, $(M\Delta P^*)/(P^*\Delta M)$, $(M\Delta e^*)/(e^*\Delta M)$ и $(M\Delta i^*)/(i^*\Delta M)$, которые показывают, на сколько процентов изменятся равновесные значения показателей Y^*, P^*, e^*, i^* при изменении M_{2008} на 1%;

2) изменяя значение G_{2008} на $\Delta G = 0{,}01G_{2008}$ и оставляя при этом значения M_{2008} и i^Z_{2008}, P^Z_{2008}, e^e_{2008} неизменными, определяем значения $(G\Delta Y^*)/(Y^*\Delta G)$, $(G\Delta P^*)/(P^*\Delta G)$, $(G\Delta e^*)/(e^*\Delta G)$ и $(G\Delta i^*)/(i^*\Delta G)$, которые показывают, на сколько процентов изменятся равновесные значения показателей Y^*, P^*, e^*, i^* при изменении G_{2008} на 1%;

3) изменяя значение M на $\Delta M = 0{,}01M_{2008}$, значение G на $\Delta G = 0{,}01G_{2008}$ и оставляя при этом i^Z_{2008}, P^Z_{2008}, e^e_{2008} неизменными, определяем значения $100\Delta Y^*/Y^*$, $100\Delta P^*/P^*$, $100\Delta e^*/e^*$ и $100\Delta i^*/i^*$, которые показывают, на сколько процентов изменятся равновесные значения показателей Y^*, P^*, e^*, i^* при совместном изменении значений M_{2008} и G_{2008} на 1%.

Результаты расчетов по вышеизложенному алгоритму приведены в табл. 2.2.3–2.2.5.

Согласно предложенному алгоритму, сначала было оценено влияние экономических инструментов — предложения денег и государственных расходов — на условия общего экономического равновесия и состояние платежного баланса раздельно. Из табл. 2.2.3 и 2.2.4 следует, что увеличение G_{2008} на ΔG при сохранении значения M_{2008}, приведет к росту национального дохода и к повышению процентной ставки, а увеличение M_{2008} на ΔM при сохранении значения G_{2008} также приведет к повышению общеэкономического равновесия ВНД, но при этом — к снижению процентной ставки. Кроме того, из таблиц следует, что рост предложения денег оказывает более сильное влияние на рост национального дохода и обменного курса, чем рост государственных расходов.

Таблица 2.2.3. **Влияние инструмента предложения денег на равновесное состояние национальной экономики в 2008 г. для $\Delta M = 0{,}01 M_{2008}$ (в %)**

$(M\Delta Y^*)/(Y^*\Delta M)$	$(M\Delta P^*)/(P^*\Delta M)$	$(M\Delta e^*)/(e^*\Delta M)$	$(M\Delta i^*/(i^*\Delta M)$
0,359	−0,1128	0,4827	−1,4692
Здесь Y^*, P^*, e^*, i^* — равновесные решения для 2008 г., $\Delta Y^* = Y_{M^*} - Y^*$, $\Delta P^* = P_{M^*} - P^*$, $\Delta e^* = e_{M^*} - e^*$, $\Delta i^* = i_{M^*} - i^*$, где Y_{M^*}, P_{M^*}, e_{M^*}, i_{M^*} — равновесные решения при $M = M_{2008} + \Delta M$			

Таблица 2.2.4. **Влияние инструмента государственных расходов на равновесное состояние национальной экономики в 2008 г. для $\Delta G = 0{,}01 G_{2008}$ (в %)**

$(G\Delta Y^*)/(Y^*\Delta G)$	$(G\Delta P^*)/(P^*\Delta G)$	$(G\Delta e^*)/(e^*\Delta G)$	$(G\Delta i^*/(i^*\Delta G)$
0,1892	0,0345	0,0865	0,8017
Здесь $\Delta Y^* = Y_{G^*} - Y^*$, $\Delta P^* = P_{G^*} - P^*$, $\Delta e^* = e_{G^*} - e^*$, $\Delta i^* = i_{G^*} - i^*$, где Y_{G^*}, P_{G^*}, e_{G^*}, i_{G^*} — равновесные решения при $G = G_{2008} + \Delta G$			

Таблица 2.2.5. **Влияние инструментов предложения денег и государственных расходов на равновесное состояние национальной экономики в 2008 г. для $\Delta M = 0{,}01 M_{2008}$ и $\Delta G = 0{,}01 G_{2008}$ (в %)**

$100\Delta Y^*/Y^*$	$100\Delta P^*/P^*$	$100\Delta e^*/e^*$	$100\Delta i^*/i^*$
0,5477	−0,0780	0,5675	−0,6434
Здесь $\Delta Y^* = Y_{MG^*} - Y^*$, $\Delta P^* = P_{MG^*} - P^*$, $\Delta e^* = e_{MG^*} - e^*$, $\Delta i^* = i_{MG^*} - i^*$, где Y_{MG^*}, P_{MG^*}, e_{MG^*}, i_{MG^*} — равновесные решения при $M = M_{2008} + \Delta M$ и $G = G_{2008} + \Delta G$			

В соответствии с макроэкономической теорией рост предложения денег оказывает следующее влияние на равновесные решения системы (2.2.21): национальный доход, уровень цен и обменный курс национальной валюты должны расти, а процентная ставка — снижаться. Полученные в табл. 2.2.3 результаты влияния инструмента предложения денег на равновесное состояние национальной экономики в 2008 г. совпадают с теоретическими предположениями, кроме показателя уровня цен, который в нашем случае направлен на снижение.

В соответствии с макроэкономической теорией рост государственных расходов оказывает следующее влияние на равновесные решения системы (2.2.21): национальный доход, уровень цен, обменный курс национальной валюты и процентная ставка должны расти. Полученные в табл. 2.2.4 результаты влияния инструмента предложения денег на равновесное состояние национальной экономики в 2008 г. полностью совпадают с этими теоретическими предположениями.

На рис. 2.2.2 построены графики линий *IS*, *LM* и *ZBO* по полученным эконометрическим моделям для фактических статистических данных за 2008 г.

Выше было установлено (см. рис. 2.2.1), что по построенным моделям страна имела конъюнктурную безработицу и дефицит платежного баланса. На рис. 2.2.2 такую ситуацию представляет

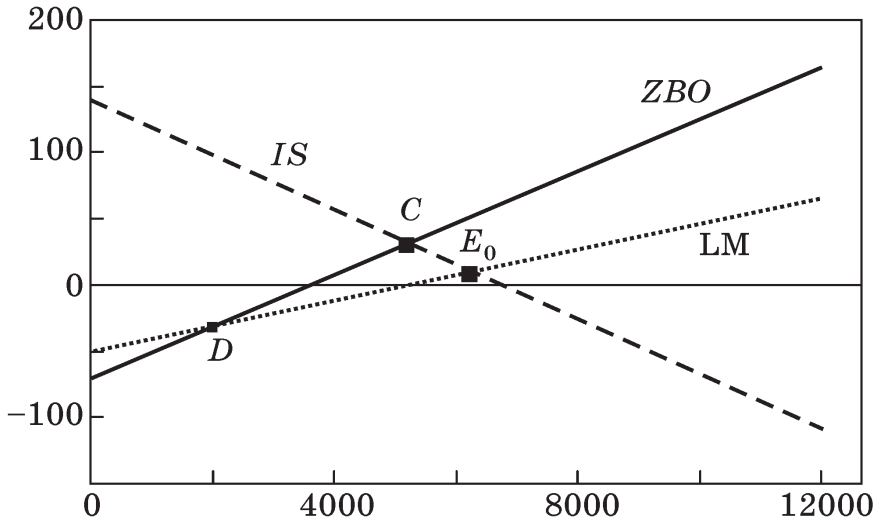

Рис. 2.2.2. Графики *IS-LM-ZBO* по фактическим значениям P, e за 2008 г.

точка E_0. Согласно макроэкономической теории, ликвидировать дефицит платежного баланса можно за счет рестриктивной денежной политики путем сдвига линии LM влево до пересечения ее

с линией IS в точке C или контрактивной фискальной политики путем сдвига линии IS влево до пересечения ее с линией LM в точке D.

2.2.3. Параметрическое регулирование статического равновесия открытой экономики на основе модели маленькой страны. Рассмотрим возможность оценки оптимальных значений инструментов M и G для заданных внешних экзогенных параметров e^e, i^Z, P^Z на базе модели (2.2.21) для 2008 г. в смысле критериев

$$Q_{ex} = \frac{aeP^Z}{P} \to \max \tag{2.2.22}$$

и

$$Q_{imp} = bY^S + \frac{ceP^Z}{P} \to \min. \tag{2.2.23}$$

Указанную оценку можно получить, решив следующие задачи математического программирования.

Задача 2.2.1. Найти на основе математической модели (2.2.21) значения M, G, которые обеспечивают максимум критерия (2.2.22) при ограничениях

$$\begin{aligned} &|M - M^*| \leqslant 0{,}1M^*, \quad &&|G - G^*| \leqslant 0{,}1G^*, \\ &|P - P^*| \leqslant 0{,}1P^*, \quad &&|e - e^*| \leqslant 0{,}1e^*, \\ &|i - i^*| \leqslant 0{,}1i^*, \quad &&|Y - Y^*| \leqslant 0{,}1Y^*. \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

Здесь M^* и G^* — соответственно фактические значения предложения денег и государственных расходов в 2008 г.

Задача 2.2.2. Найти на основе математической модели (2.2.21) значения M, G, которые обеспечивают минимум критерия (2.2.23) при ограничениях (2.2.24).

При решении задач 2.2.1 и 2.2.2 итерационным методом для заданных значений $e^e = 120{,}3$, $i^Z = 1{,}32$, $P^Z = 1{,}2002$ получены следующие результаты.

Для задачи 2.2.1 оптимальными значениями параметров являются $M = 5877{,}96$, $G = 4246$, при которых достигается максимальное значение $Q_{ex} = 3122{,}74$, значение этого критерия без регулирования равно 3023,01.

Для задачи 2.2.2 оптимальными значениями параметров являются $M = 4809{,}234$, $G = 3474$, при которых достигается минимальное значение $Q_{imp} = 4010{,}64$, значение этого критерия без регулирования равно 4183,73.

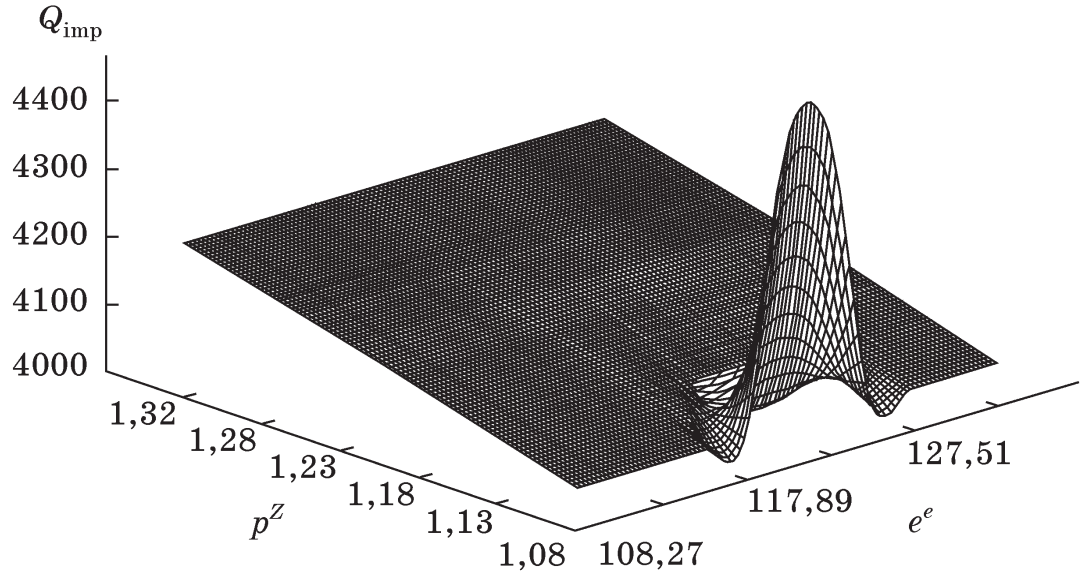

Рис. 2.2.3. График зависимости оптимальных значений критерия Q_{imp} от пары P^Z, e^e

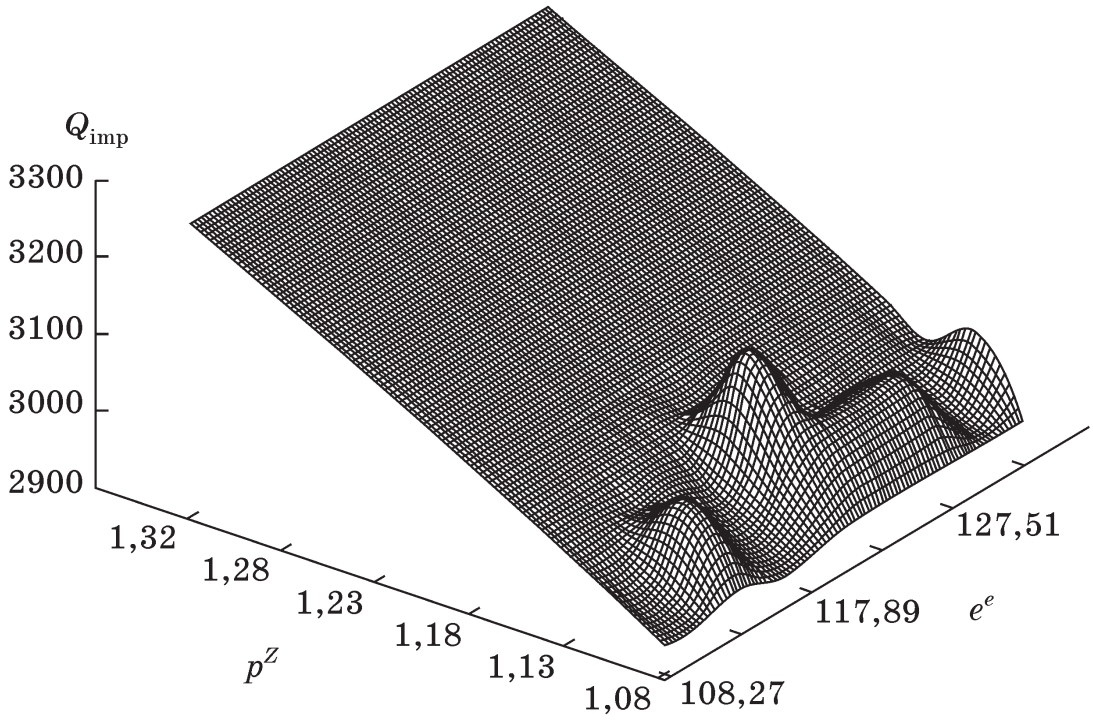

Рис. 2.2.4. График зависимости оптимальных значений критерия Q_{ex} от пары P^Z, e^e

На базе задач 2.2.1 и 2.2.2 проведено исследование зависимостей оптимальных значений критериев Q_{ex} и Q_{imp} от одного, пары и тройки параметров из набора внешних параметров $\{e^e, i^Z, P^Z\}$, заданных в соответствующих областях. Графики зависимости оптимальных значений критериев (2.2.22) и (2.2.23) для отдельных случаев, в том числе от пары параметров (P^Z, e^e), приведены на рис. 2.2.3, 2.2.4.

Глава 3

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Важным разделом современной макроэкономической динамики является теория конъюнктурных циклов, основу которой составляют математические модели [39], предложенные для описания эволюции деловой активности в виде колебательных процессов. В [20] представлен ряд математических моделей конъюнктурных циклов, в рамках которых рассматриваются основные факторы, порождающие колебания экономической конъюнктуры, и не затрагиваются вопросы структурной устойчивости указанных моделей и возможности параметрического регулирования развития экономических систем на базе математических моделей деловых циклов.

Большой интерес представляет развитие теории деловых циклов — оценки структурной устойчивости математических моделей деловых циклов и возможностей параметрического регулирования эволюции экономических систем на базе предложенных математических моделей.

В данной главе приведены результаты развития теории деловых циклов на базе математических моделей — модели цикла Кондратьева [17] и модели Гудвина [5, 39].

3.1. Математическая модель цикла Кондратьева

3.1.1. Описание модели. Эта модель [17] объединяет описания неравновесного экономического роста и неравномерного научно-технического прогресса. Модель описывается следующей системой уравнений, включающей в себя два дифференциальных и одно алгебраическое уравнение:

$$\begin{aligned} & n(t) = Ay(t)^a, \\ & \frac{dx}{dt} = x(t)(x(t)-1)(y_0 n_0 - y(t)n(t)), \\ & \frac{dy}{dt} = n(t)(1-n(t))y(t)^2\left(x(t) - 2 + \frac{\mu + l_0}{n_0 y_0}\right), \\ & n_0 = Ay_0^a. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Здесь t — время (в месяцах); x — эффективность новшеств; y — капиталоотдача; y_0 — капиталоотдача, соответствующая равновесной траектории; n — норма накопления; n_0 — норма накопления, соответствующая равновесной траектории; μ — коэффициент выбытия фондов; l_0 — темп роста занятости, соответствующий равновесной траектории; A и a — некоторые постоянные модели.

Предварительная оценка параметров модели была проведена по статистическим данным Республики Казахстан за 2001–2005 гг. [37], при этом отклонения наблюдаемых статистических данных от расчетных в указанном промежутке времени не превышала 1,9%.

В результате решения задачи предварительной оценки параметрической идентификации были получены следующие значения экзогенных параметров: $a = -0{,}0046235$, $y_0 = 0{,}081173$, $n_0 = 0{,}29317$, $\mu = 0{,}00070886$, $l_0 = 0{,}00032161$, $x(0) = 1{,}91114$.

Предварительное прогнозирование на 2006–2007 гг. дает погрешности для капиталоотдачи на 6,1% и 12,1% соответственно, а для нормы накопления — 2,3% и 11% соответственно.

Соответствующая циклическая фазовая траектория модели цикла Кондратьева приведена на рис. 3.1.1.

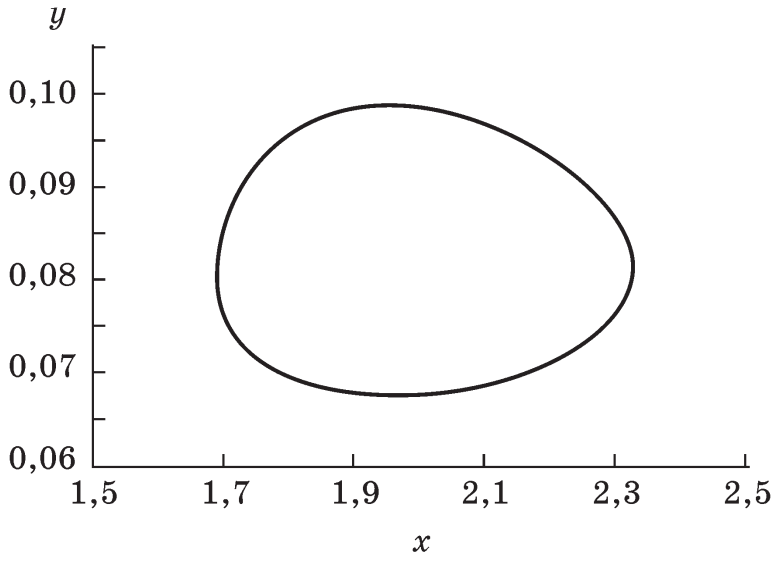

Рис. 3.1.1. Циклическая фазовая траектория модели цикла Кондратьева

Оценка периода циклической траектории, соответствующей статистическим данным РК за указанные годы составила 232 месяца.

3.1.2. Оценка грубости модели цикла Кондратьева без параметрического регулирования. Согласно разделу 2 теории параметрического регулирования (§ 1.1 гл. 1) была проведена оценка

структурной устойчивости (грубости) математической модели в выбранном компакте фазового пространства модели.

В результате применения алгоритма оценки цепно-рекуррентного множества для области $N = [1{,}7; 2{,}3] \times [0{,}066; 0{,}098]$ фазовой плоскости Oxy системы (3.1.1) была получена следующая оценка цепно-рекуррентного множества $R(f, N)$ (рис. 3.1.2). Поскольку

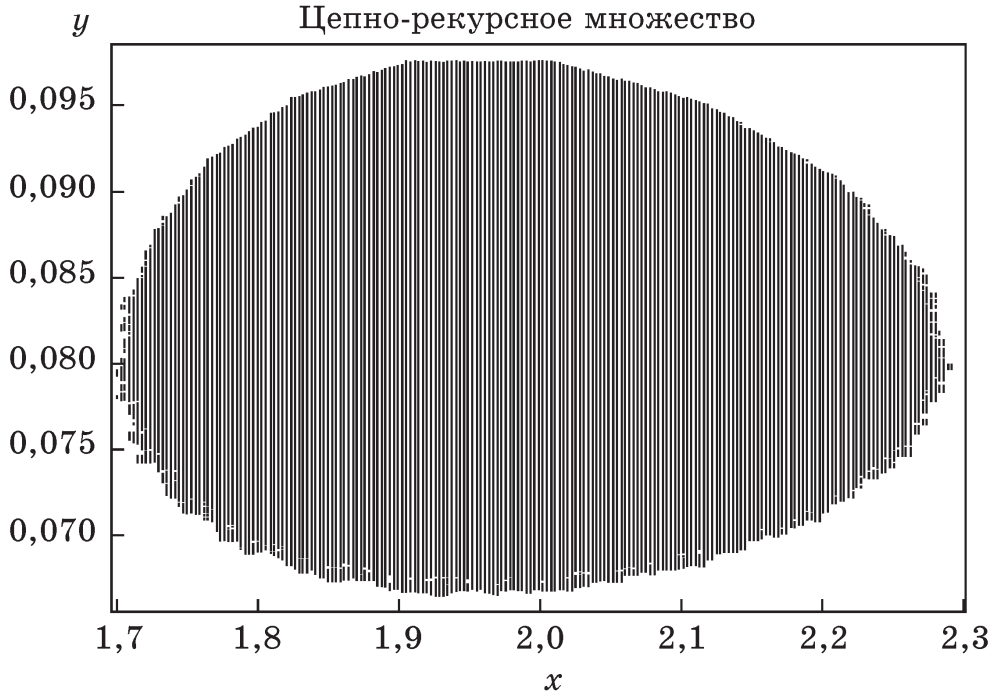

Рис. 3.1.2. Цепно-рекуррентное множество для модели цикла Кондратьева

множество $R(f, N)$ не пусто, то на основании теоремы Робинсона нельзя сделать вывод о слабой структурной устойчивости модели цикла Кондратьева в N. Однако, поскольку в N находится негиперболическая особая точка — центр $\left(x_0 = 2 - \dfrac{\mu + l_0}{n_0 y_0},\ y_0\right)$ [17], то система (3.1.1) не является слабо структурно устойчивой в N.

3.1.3. Параметрическое регулирование эволюции экономической системы на базе модели цикла Кондратьева. В работе выбор оптимальных законов параметрического регулирования осуществляется в среде набора следующих четырех зависимостей:

$$1)\ n_0(t) = n_0^* + k_1 \frac{y(t) - y(0)}{y(0)}, \quad 2)\ n_0(t) = n_0^* - k_2 \frac{y(t) - y(0)}{y(0)},$$
$$3)\ n_0(t) = n_0^* + k_3 \frac{x(t) - x(0)}{x(0)}, \quad 4)\ n_0(t) = n_0^* - k_4 \frac{x(t) - x(0)}{x(0)}. \tag{3.1.2}$$

Здесь k_i — коэффициент сценария; n_0^* — значение экзогенного параметра n_0, полученное в результате предварительной оценки параметров.

Задачу выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне экономического параметра n_0 можно сформулировать в следующем виде.

Найти на основе математической модели (3.1.1) оптимальный закон параметрического регулирования в среде набора алгоритмов (3.1.2), который обеспечил бы оптимальные значения следующих критериев:

$$
\begin{aligned}
&1)\ K_1 = \frac{1}{36}\sum_{t=1}^{36} y(t) \to \max,\\
&2)\ K_2 = \frac{1}{36}\sum_{t=1}^{36} x(t) \to \max,\\
&3)\ K_3 = \frac{1}{36}\left(\frac{\sum\limits_{t=1}^{36} x(t)}{x(0)} + \frac{\sum\limits_{t=1}^{36} y(t)}{y(0)}\right) \to \max,\\
&4)\ K_4 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\left(\frac{x(t)-x_0}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t)-y_0}{y_0}\right)^2\right) \to \min.
\end{aligned}
\tag{3.1.3}
$$

(здесь $T = 232$ — период одного цикла), при ограничениях

$$
0 \leqslant y(t) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant n(t) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x(t). \tag{3.1.4}
$$

Базовые значения критериев (без параметрического регулирования) следующие:

$$
K_1 = 0{,}06848, \quad K_2 = 2{,}05489, \quad K_3 = 2{,}08782, \quad K_4 = 0{,}0307.
$$

В результате решения сформулированных задач по применению подхода параметрического регулирования к эволюции экономической системы было получено значение каждого критерия для оптимального в смысле соответствующего критерия закона из представленного выше набора (3.1.2). Результаты приведены в табл. 3.1.1.

Значения эндогенных переменных модели без применения параметрического регулирования, а также с применением оптимальных законов параметрического регулирования для каждого критерия приведены ниже в графическом виде (рис. 3.1.3–3.1.7).

Таблица 3.1.1. **Значения коэффициентов и критериев для оптимальных законов**

Критерий	Оптимальный закон	Значение коэффициента	Значение критерия
1	3	0,2404966	0,06889
2	3	0,47668	2,230337
3	4	0,071862	2,19674
4	4	0,300519	0,007273

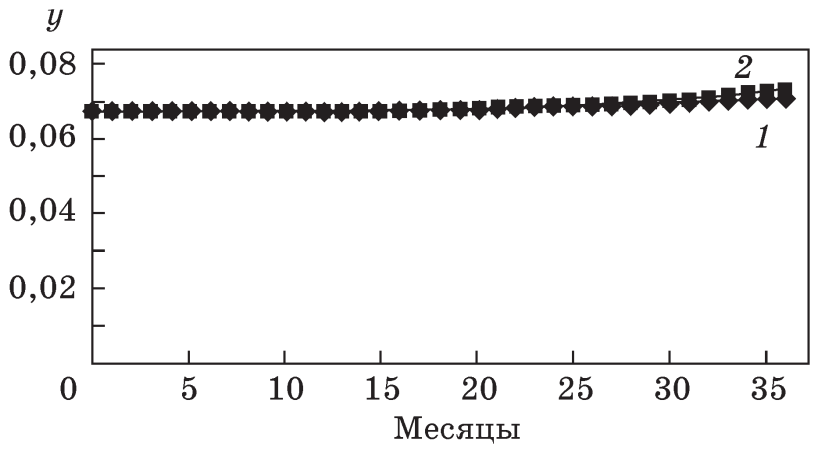

Рис. 3.1.3. Капиталоотдача без параметрического регулирования и при использовании закона 3, оптимального в смысле критерия 1: *1* — без сценария; *2* — используется сценарий 3

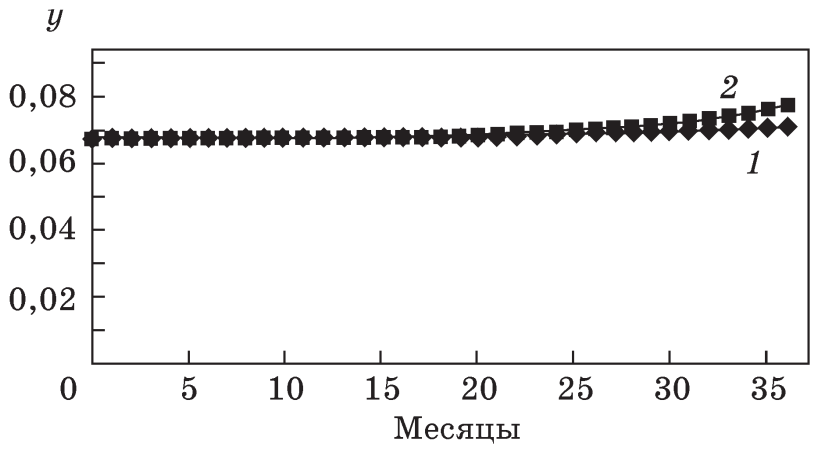

Рис. 3.1.4. Капиталоотдача без параметрического регулирования и при использовании закона 3, оптимального в смысле критерия 2: *1* — без сценария; *2* — используется сценарий 3

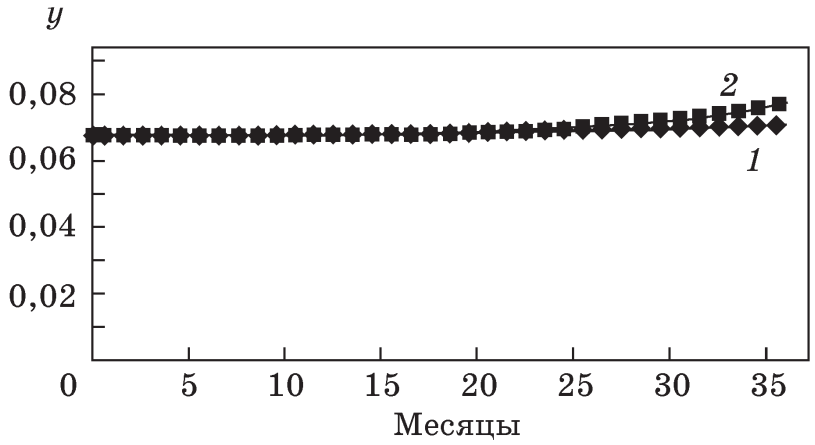

Рис. 3.1.5. Капиталоотдача без параметрического регулирования и при использовании закона 4, оптимального в смысле критерия 3: *1* — без сценария; *2* — используется сценарий 4

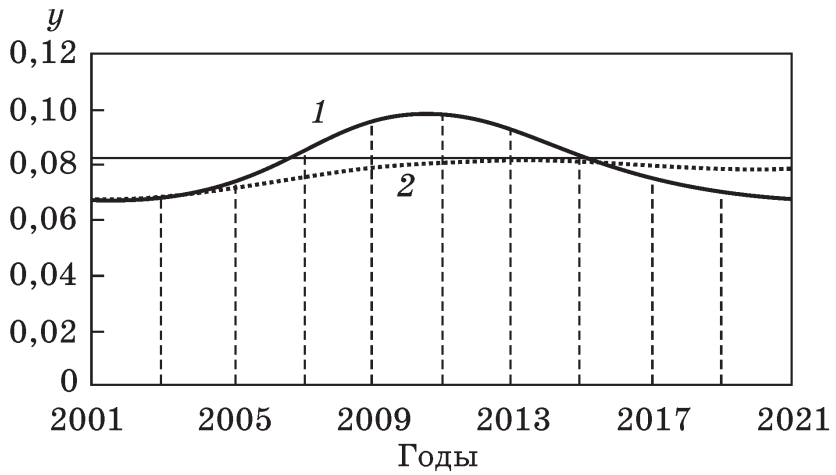

Рис. 3.1.6. Капиталоотдача без параметрического регулирования и при использовании закона 4, оптимального в смысле критерия 4: *1* — без регулирования; *2* — с оптимальным законом регулирования

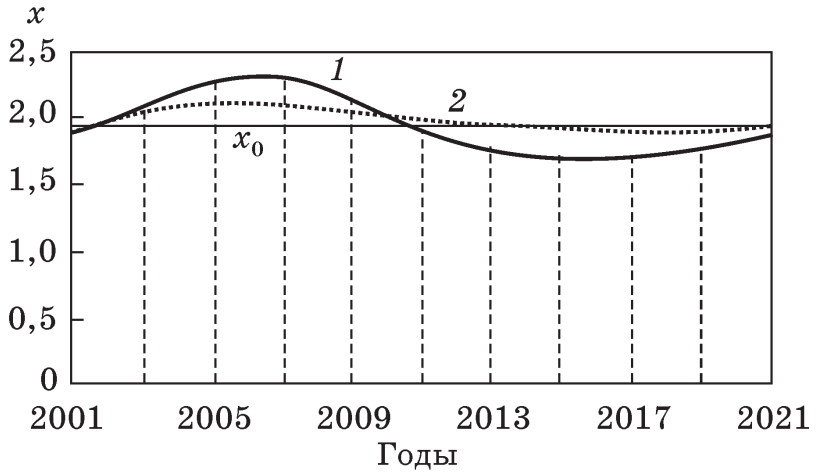

Рис. 3.1.7. Эффективность новшеств без параметрического регулирования и при использовании закона 4, оптимального в смысле критерия 4: *1* — без регулирования; *2* — с оптимальным законом регулирования

3.1.4. Оценка структурной устойчивости математической модели цикла Кондратьева с параметрическим регулированием. Для проведения этого исследования выражения для оптимальных законов параметрического регулирования (3.1.2) с найденными значениями настраиваемых коэффициентов были подставлены в правую часть второго и третьего уравнений системы (3.1.1) вместо параметра n_0. Затем с помощью численного алгоритма оценки слабой структурной устойчивости дискретной динамической системы для выбранного компакта N, определяемого неравенствами $1{,}7 \leqslant x \leqslant 2{,}3,\ 0{,}066 \leqslant y \leqslant 0{,}098$ в фазовом пространстве переменных (x, y), была получена оценка цепно-рекуррентного множества $R(f, N)$ как пустого (или одноточечного) множества. Это означает, что математическая модель цикла Кондратьева с оптимальным законом параметрического регулирования оценивается как слабо структурно устойчивая в указанном компакте N.

3.1.5. Исследование зависимости оптимального значения критерия K от параметра для задачи вариационного исчисления на базе математической модели цикла Кондратьева. Исследуем зависимости оптимального значения критерия K от экзогенного пара-

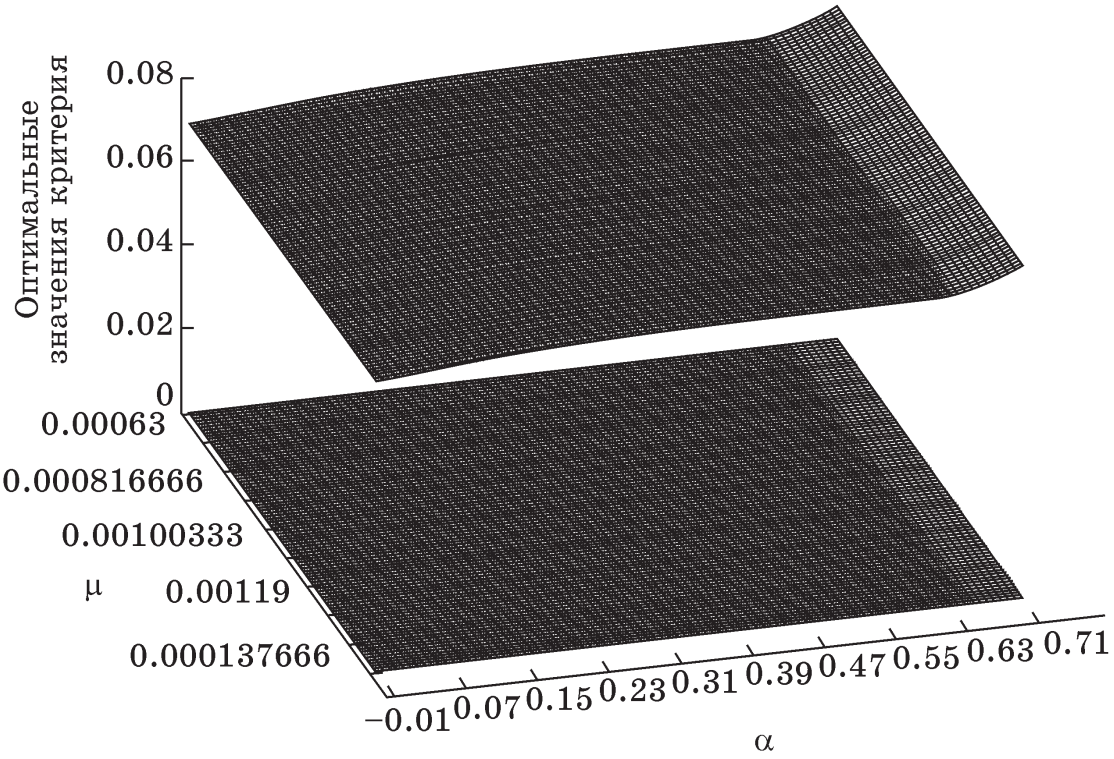

Рис. 3.1.8. Графики зависимостей оптимального значения критерия K от экзогенных параметров μ, a

метра μ (доля выбывших за месяц основных производственных фондов) и a для законов параметрического регулирования (3.1.2)

с найденными оптимальными значениями настраиваемых коэффициентов k_i, где значения параметров μ, a принадлежат прямоугольнику $\Lambda = [0{,}00063; 0{,}00147] \times [-0{,}01; 0{,}71]$ на плоскости.

В результате вычислительного эксперимента были получены графики зависимостей оптимального значения критерия K (для законов 0 и 2 параметрического регулирования, дающих наибольшие значения критерия) от неуправляемых параметров (рис. 3.1.8). Проекция линии пересечения двух поверхностей на плоскость (μ, a) состоит из точек бифуркации экстремалей рассматриваемой задачи вариационного исчисления.

3.2. Математическая модель Гудвина конъюнктурных колебаний растущей экономики

3.2.1. Описание модели. Модель Гудвина, описывающая конъюнктурные колебания растущей экономики, представлена в работах [20, 39].

Модель описывается системой из двух дифференциальных уравнений (3.2.1):

$$\begin{aligned} \delta'(t) &= (a\lambda(t) - a_0)\delta(t), \\ \lambda'(t) &= (-b\delta(t) + b_0)\lambda(t). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Здесь δ — доля занятых от общей численности населения; λ — доля фонда потребления в ВВП; a, a_0, b, b_0 — постоянные модели.

Оценка параметров a, a_0, b, b_0 модели была проведена по статистическим данным Республики Казахстан за 2001–2005 гг. [37], при этом отклонения наблюдаемых статистических данных от расчетных в указанном промежутке времени не превышали 4,93%. В результате решения задачи оценки параметрической идентификации были получены следующие значения экзогенных параметров:

$$a = 0{,}1710, \quad a_0 = 0{,}08, \quad b = 0{,}00211, \quad b_0 = 0{,}001.$$

Расчетный период одного цикла в этом случае составляет $T = 706{,}27$ месяцев.

Модель опирается на предположения о постоянстве следующих экономических параметров: k — капиталоемкость, $0 < k < 1$; n — темп прироста населения, $n > -1$; γ — темп прироста производительности труда, $\gamma > -1$.

Предполагается также, что доля занятых σ линейно зависит от темпа прироста заработной платы ω:

$$\sigma = \sigma_0 + \beta\omega, \quad 0 < \sigma_0 < 1, \quad \beta > 0.$$

Постоянные параметры модели (3.2.1) находятся с помощью следующих соотношений:

$$a = \frac{1}{\beta(1+\gamma)} > 0, \quad a_0 = \frac{\sigma_0}{\beta(1+\gamma)} > 0,$$
$$b = \frac{1}{k(1+\gamma)(1+n)} > 0, \quad b_0 = \frac{1-k(\gamma+n+n\gamma)}{k(1+\gamma)(1+n)}.$$

Будем предполагать также, что $\gamma + n + n\gamma < 1$, в этом случае $b_0 > 0$.

Решения системы (3.2.1) будем рассматривать в некоторой замкнутой односвязной области Ω с границей — простой замкнутой кривой, принадлежащей первому квадранту фазовой плоскости $R^2_+ = \{\delta > 0, \lambda > 0\}$, $\delta(0) = \delta_0$, $\lambda(0) = \lambda_0$, $(\delta_0, \lambda_0) \in \Omega$.

Известно, что в области R^2_+ фазовыми кривыми системы (3.2.1) являются только:

— стационарная особая точка

$$\lambda^* = \frac{a_0}{a}, \quad \delta^* = \frac{b_0}{b}, \quad 0 < \lambda^* < 1, \quad 0 < \delta^* < 1; \tag{3.2.2}$$

— нестационарные циклические траектории, лежащие в R^2_+, возникающие при начальных условиях $(\delta_0, \lambda_0) \neq (\delta^*, \lambda^*)$. При этом особая точка (δ^*, λ^*) лежит внутри этих циклов.

3.2.2. Исследование структурной устойчивости математической модели Гудвина без параметрического регулирования. Проведем оценку структурной устойчивости рассматриваемой модели без параметрического регулирования в замкнутых областях Ω, опираясь на теорему о необходимых и достаточных условиях структурной устойчивости [12]. Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 3.2.1. *Особая точка* (δ^*, λ^*) *системы* (3.2.1) *является центром.*

Доказательство. Запишем, учитывая (3.2.2), матрицу Якоби для правых частей системы уравнений (3.2.1) в точке (δ^*, λ^*):

$$A = \begin{pmatrix} a\lambda^* - a_0 & a\delta^* \\ -b\lambda^* & b_0 - b\delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{ab_0}{b} \\ -\dfrac{ba_0}{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эта матрица имеет мнимые собственные числа $\pm i\sqrt{a_0 b_0}$, следовательно, точка (δ^*, λ^*) является структурно неустойчивым центром (негиперболическая точка).

Утверждение 3.2.1. *Система* (3.2.1) *является структурно неустойчивой в замкнутой области* Ω ($\Omega \subset R^2_+$) *с границей — простой замкнутой кривой, содержащей внутри себя точку* (δ^*, λ^*) *вида* (3.2.2) *при любых указанных выше фиксированных значениях параметров* k, n, γ, λ_0, β *из соответствующих областей их заданий.*

Система (3.2.1) *является структурно устойчивой в замкнутой области* Ω ($\Omega \subset R^2_+$) *с границей — простой замкнутой кривой, не содержащей внутри себя точку* (δ^*, λ^*) *вида* (3.2.2) *при любых указанных выше фиксированных значениях параметров* k, n, γ, λ_0, β *из соответствующих областей их заданий.*

Доказательство. Пусть замкнутая область $\Omega \subset R^2_+$ содержит внутри себя особую точку (δ^*, λ^*). В окрестности этой точки система (3.2.1) является локально структурно неустойчивой, следовательно, она структурно неустойчива в области Ω.

Пусть замкнутая область $\Omega \subset R^2_+$ не содержит внутри себя особую точку (δ^*, λ^*). В этом случае область Ω не содержит внутри себя ни одного цикла (внутри любого цикла должна быть хотя бы одна особая точка). Следовательно, в этом случае система (3.2.1) структурно устойчива в области Ω. Утверждение 3.2.1 доказано.

3.2.3. Задача выбора оптимальных законов параметрического регулирования на базе математической модели Гудвина. Следует отметить, что оценки параметров k, n, γ, σ_0, β по статистическим данным Республики Казахстан за период 2000–2008 гг. не описывают с приемлемой точностью экономику Республики Казахстан, поэтому выбор оптимальных законов параметрического регулирования приведен ниже для условных значений указанных параметров.

Рассмотрим теперь возможность осуществления эффективной государственной политики через выбор оптимальных законов регулирования на примере экономического параметра — капиталоемкости k. Цель экономической политики — уменьшение амплитуд колебаний показателей (δ, λ) эволюции экономической системы страны.

В работе выбор оптимальных законов параметрического регулирования осуществляется в среде набора следующих зависимо-

стей:

$$\begin{aligned}
&1)\ U_1(t) = c_1\frac{\delta(t)-\delta_0}{\delta_0} + k_0,\\
&2)\ U_2(t) = -c_2\frac{\delta(t)-\delta_0}{\delta_0} + k_0,\\
&3)\ U_3(t) = c_3\frac{\lambda(t)-\lambda_0}{\lambda_0} + k_0,\\
&4)\ U_4(t) = -c_4\frac{\lambda(t)-\lambda_0}{\lambda_0} + k_0.
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Здесь U_i — i-й закон регулирования параметра k ($i = \overline{1,4}$); c_i — настраиваемый коэффициент i-го закона регулирования, $c_i > 0$; k_0 — постоянная, равная базовому значению параметра k. Использование закона регулирования U_i означает подстановку функции из правых частей (3.2.3) в систему (3.2.1) вместо параметра k; $t = 0$ — время начала регулирования, $t \in [0, T]$.

Задачу выбора оптимального закона параметрического регулирования на уровне экономического параметра k можно сформулировать в следующем виде. Найти на основе математической модели (3.2.1) оптимальный закон параметрического регулирования экономического параметра k в среде набора алгоритмов (3.2.3), т. е. найти оптимальный закон из множества $\{U_i\}$, который обеспечил бы минимум критерия, характеризующего среднее расстояние от точек траектории до особой точки (δ^*, λ^*) системы:

$$K = \frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{(\delta(t)-\delta^*)^2 + (\lambda(t)-\lambda^*)^2}\,dt \to \min_{\{U_i, c_i\}}, \tag{3.2.4}$$

при ограничениях

$$0 \leqslant k \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 1, \quad t \in [0, T]. \tag{3.2.5}$$

Здесь T — период регулируемой циклической траектории системы (3.2.1), критерий K характеризует среднее расстояние от точек этой траектории до стационарной точки (3.2.2).

Сформулированная задача решается в два этапа:

— на первом этапе определяются оптимальные значения коэффициентов c_i для каждого закона U_i путем перебора их значений в соответствующих интервалах (квантованных с малым шагом), обеспечивающих минимум K при ограничениях (3.2.5);

— на втором этапе выбирается закон оптимального регулирования параметра k на основе результатов первого этапа по минимальному значению критерия K.

Рассматриваемая задача решалась при заданных значениях параметров $\beta = 10/13$, $\gamma = 0{,}5$, $\delta_0 = 0{,}4$, $\lambda_0 = 0{,}5$; при фиксированном значении нерегулируемого параметра $n = 0{,}3$ и при базовом значении регулируемого параметра $k_0 = 10/19$.

При этих значениях параметров стационарная точка системы следующая: $\lambda^* = 0{,}5$, $\delta^* = 0{,}5$.

Результаты численного решения задачи выбора оптимального закона параметрического регулирования показывают, что наилучший результат $K = 0{,}03215307$ может быть получен при использовании следующего закона:

$$k = 4{,}28\frac{\lambda(t) - 0{,}5}{0{,}5} + \frac{10}{19}. \tag{3.2.6}$$

Отметим, что значение критерия без использования параметрического регулирования равно $K = 0{,}0918682$.

В результате численных экспериментов были получены следующие факты:

— уменьшение значения критерия K по сравнению со случаем отсутствия регулирования наблюдалось только при использовании законов $U_1(t)$ и $U_3(t)$ из (3.2.3);

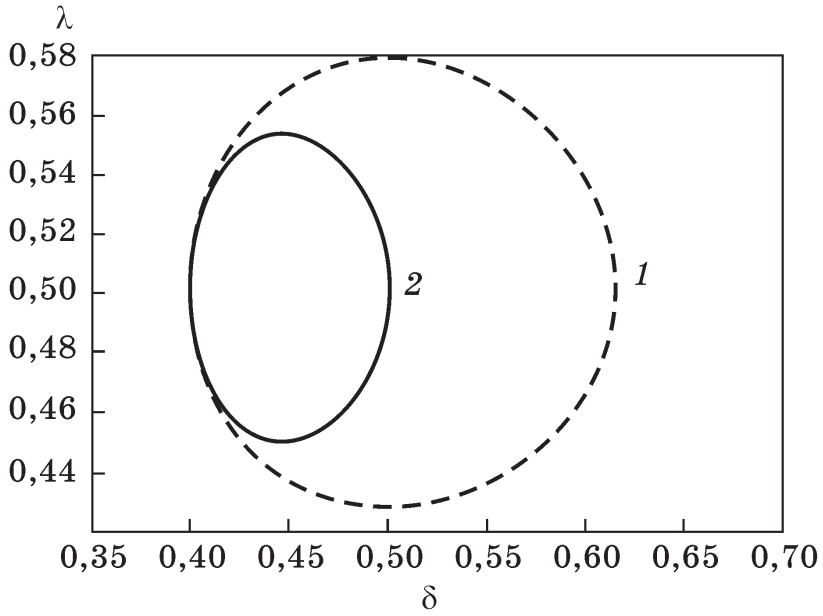

Рис. 3.2.1. Кривая *1* — конъюнктурный цикл без регулирования; кривая *2* — конъюнктурный цикл с законом регулирования $U_1(t)$

— при использовании законов вида $U_1(t)$ наблюдалось сохранение циклического характера фазовой траектории системы (3.2.1) (рис. 3.2.1);

— при использовании законов вида $U_3(t)$ вместо циклической траектории наблюдались траектории, стремящиеся при $t \to +\infty$ к устойчивой особой точке системы (3.2.1) с параметрическим регулированием (рис. 3.2.2).

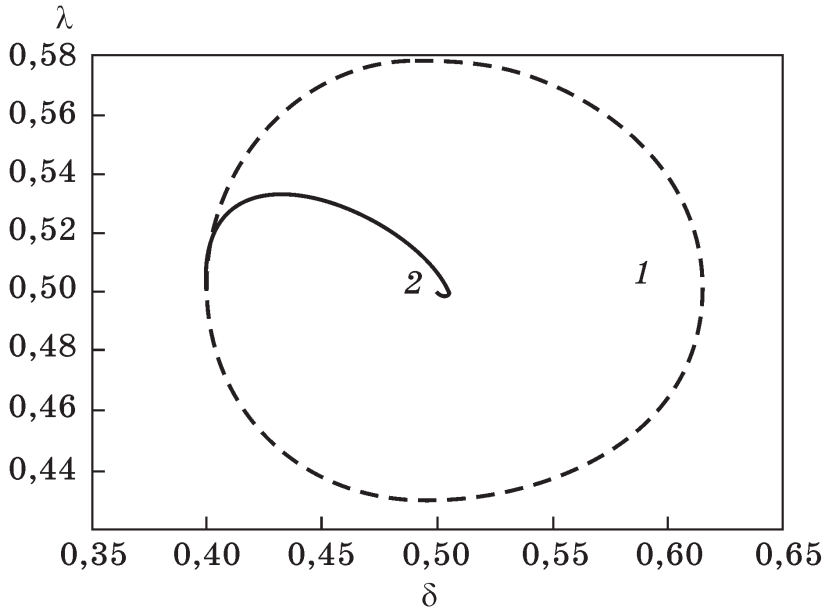

Рис. 3.2.2. Кривая *1* — конъюнктурный цикл без регулирования; кривая *2* — фазовая траектория с оптимальным законом регулирования $U_3(t)$

3.2.4. Исследование структурной устойчивости математической модели Гудвина с параметрическим регулированием. Исследуем структурную устойчивость системы (3.2.1) при использовании закона параметрического регулирования вида $U_3(t)$ или $U_4(t)$ из набора алгоритмов (3.2.3) при любом допустимом фиксированном значении настраиваемого коэффициента $c \neq 0$.

Рассматриваемые законы имеют вид

$$k = c\frac{\lambda(t) - \lambda_0}{\lambda_0} + k_0. \tag{3.2.7}$$

Здесь k_0 — постоянная, равная базовому значению параметра k.

Вначале найдем особые точки системы (3.2.1) с параметрическим регулированием. Подставим соответствующее выражение для k в правые части уравнений системы (3.2.1) и приравняем их к нулю, получим следующую систему относительно неизвестных (δ, λ) (при фиксированных остальных допустимых значениях переменных и постоянных):

$$\begin{gathered}(a\lambda - a_0)\delta = 0,\\ \left(-\frac{1}{k(\lambda)(1+\gamma)(1+n)}\delta + \frac{1 - k(\lambda)(\gamma + n + n\gamma)}{k(\lambda)(1+\gamma)(1+n)}\right)\lambda = 0.\end{gathered} \tag{3.2.8}$$

Здесь $k(\lambda) = c\dfrac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} + k_0$. Мы будем использовать только такие значения c, при которых $0 < k(\lambda) < 1$. Система (3.2.4) в R^2_+ имеет единственное решение:

$$\lambda^* = \frac{a_0}{a}, \quad \delta^* = 1 - k(\lambda^*)(\gamma + n + n\gamma), \tag{3.2.9}$$

где $0 < \lambda^* < 1,\ 0 < \delta^* < 1$.

Запишем теперь матрицу Якоби для левых частей системы уравнений (3.2.8) в точке (3.2.9):

$$A = \begin{pmatrix} a\lambda^* - a_0 & a\delta^* \\ -b\lambda^* & \left(\dfrac{c\delta^*}{B_1} - \dfrac{c}{B_1}\right)\lambda^* + (-b\delta^* + b_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a\delta^* \\ -b\lambda^* & \dfrac{c(\delta^* - 1)\lambda^*}{\left(c\dfrac{\lambda^* - \lambda_0}{\lambda_0} + k_0\right)^2 \lambda_0(1+\gamma)(1+n)} \end{pmatrix},$$

где

$$B_1 = \left(c_1\frac{\lambda^* - \lambda_0}{\lambda_0} + k_0\right)^2 \lambda_0(1+\gamma)(1+n).$$

Собственные числа матрицы A являются корнями уравнения

$$m^2 + \frac{c(1-\delta^*)\lambda^*}{\left(c\dfrac{\lambda^* - \lambda_0}{\lambda_0} + k_0\right)^2 \lambda_0(1+\gamma)(1+n)} m +$$

$$+ \frac{1 - k(\lambda^*)(\gamma + n + n\gamma)}{k(\lambda^*)(1+\gamma)(1+n)} a_0 = 0.$$

Обозначив коэффициенты этого уравнения через p и q, получим квадратное уравнение

$$m^2 + pm + q = 0, \tag{3.2.10}$$

где $q > 0$ и знак p совпадает со знаком коэффициента c.

Возможны следующие случаи:

1) если дискриминант уравнения (3.2.10)

$$D = \left(\frac{c(1-\delta^*)\lambda^*}{\left(c\dfrac{\lambda^*-\lambda_0}{\lambda_0}+k_0\right)^2 \lambda_0(1+\gamma)(1+n)} \right)^2 - 4\frac{1-k(\lambda^*)(\gamma+n+n\gamma)}{k(\lambda^*)(1+\gamma)(1+n)}a_0 < 0,$$

то особая точка (δ^*, λ^*) системы (3.2.1) с параметрическим регулированием (3.2.7) является фокусом, причем при $c > 0$ этот фокус устойчив, а при $c < 0$ этот фокус неустойчив;

2) если $D \geqslant 0$, то особая точка (3.2.9) системы (3.2.1) с параметрическим регулированием (3.2.7) является узлом, причем при $c > 0$ этот узел устойчив, а при $c < 0$ этот узел неустойчив.

Утверждение 3.2.2. *Система* (3.2.1) *с параметрическим регулированием* (3.2.7) *является локально структурно устойчивой в любой достаточно малой замкнутой области* Ω ($\Omega \subset \subset R^2_+$) *с границей — простой замкнутой кривой, содержащей внутри себя точку* (δ^*, λ^*) *вида* (3.2.9) *при любых указанных выше фиксированных значениях параметров* c, n, γ, λ_0, β *из соответствующих областей их заданий.*

Система (3.2.1) *является структурно устойчивой в любой замкнутой области* Ω ($\Omega \subset R^2_+$) *с границей — простой замкнутой кривой, не содержащей внутри себя точку* (δ^*, λ^*) *вида* (3.2.9) *при любых указанных выше фиксированных значениях параметров* c, n, γ, λ_0, β *из соответствующих областей их заданий.*

Доказательство. Пусть особая точка (δ^*, λ^*) не лежит в замкнутой области $\Omega \subset R^2_+$. В этом случае, повторив рассуждения из доказательства утверждения 3.2.1, получим, что система (3.2.1), (3.2.7) структурно устойчива в области Ω.

Пусть теперь особая точка (δ^*, λ^*) лежит в замкнутой области $\Omega \subset R^2_+$. Поскольку эта точка является гиперболической (узел или фокус), то в ее окрестности система (3.2.1), (3.2.7) локально структурно устойчива. Утверждение 3.2.2 доказано.

Исследуем структурную устойчивость системы (3.2.1) при использовании закона параметрического регулирования вида $U_1(t)$

или $U_2(t)$ из набора алгоритмов (3.2.3) при любом фиксированном допустимом значении настраиваемого коэффициента $c \neq 0$.

Рассматриваемые законы имеют вид

$$k = c\frac{\delta(t) - \delta_0}{\delta_0} + k_0. \tag{3.2.11}$$

Вначале найдем особые точки системы (3.2.1) с параметрическим регулированием (3.2.11). Подставим это выражение для k в правые части уравнений системы (3.2.1) и приравняем их к нулю, получим следующую систему уравнений относительно неизвестных (δ, λ) (при фиксированных остальных допустимых значениях переменных и постоянных):

$$\begin{gathered}(a\lambda - a_0)\delta = 0,\\ \left(-\frac{1}{k(\delta)(1+\gamma)(1+n)}\delta + \frac{1 - k(\delta)(\gamma + n + n\gamma)}{k(\delta)(1+\gamma)(1+n)}\right)\lambda = 0.\end{gathered} \tag{3.2.12}$$

Здесь $k(\delta) = c\dfrac{\delta - \delta_0}{\delta_0} + k_0$. Система (3.2.12) имеет единственное решение

$$\lambda^* = \frac{a_0}{a}, \quad \delta^* = \frac{1 + (c - k_0)(\gamma + n + n\gamma)}{1 + c(\gamma + n + n\gamma)/\delta_0}. \tag{3.2.13}$$

Мы будем использовать только такие значения c, при которых $0 < k(\delta) < 1,\ 0 < \lambda^* < 1,\ 0 < \delta^* < 1$.

Запишем теперь матрицу Якоби для левых частей системы уравнений (3.2.8) в точке (3.2.9):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a\delta^* \\ \left(\dfrac{c(\delta^* - 1)}{\left(c\frac{\delta^* - \delta_0}{\delta_0} + k_0\right)^2 \delta_0(1+\gamma)(1+n)} - \dfrac{1}{\left(c\frac{\delta^* - \delta_0}{\delta_0} + k_0\right)\delta_0(1+\gamma)(1+n)}\right)\lambda^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эта матрица имеет мнимые собственные числа, следовательно, особая точка (3.2.13) является центром. Методами [11] можно доказать, что в R^2_+, кроме указанной точки (3.2.9), все фазовые кривые системы (3.2.1) с параметрическим регулированием (3.2.11) являются циклами. Следующее утверждение доказывается так же, как утверждение 3.2.1.

Утверждение 3.2.3. *Система* (3.2.1) *с параметрическим регулированием* (3.2.11) *является структурно неустойчивой в замкнутой области* Ω ($\Omega \subset R^2_+$) *с границей — простой замкнутой кривой, содержащей внутри себя точку* (δ^*, λ^*) *вида* (3.2.13) *при любых указанных выше фиксированных значениях параметров* c, k, n, γ, λ_0, β *из соответствующих областей их заданий.*

Система (3.2.1), (3.2.11) *является структурно устойчивой в замкнутой области* Ω ($\Omega \subset R^2_+$) *с границей — простой замкнутой кривой, не содержащей внутри себя точку* (δ^*, λ^*) *вида* (3.2.13) *при любых указанных выше фиксированных значениях параметров* c, k, n, γ, λ_0, β *из соответствующих областей их заданий.*

3.2.5. Исследование зависимости оптимального закона параметрического регулирования от значений неуправляемого параметра математической модели Гудвина. Рассмотрим зависимость результатов выбора оптимального закона параметрического регули-

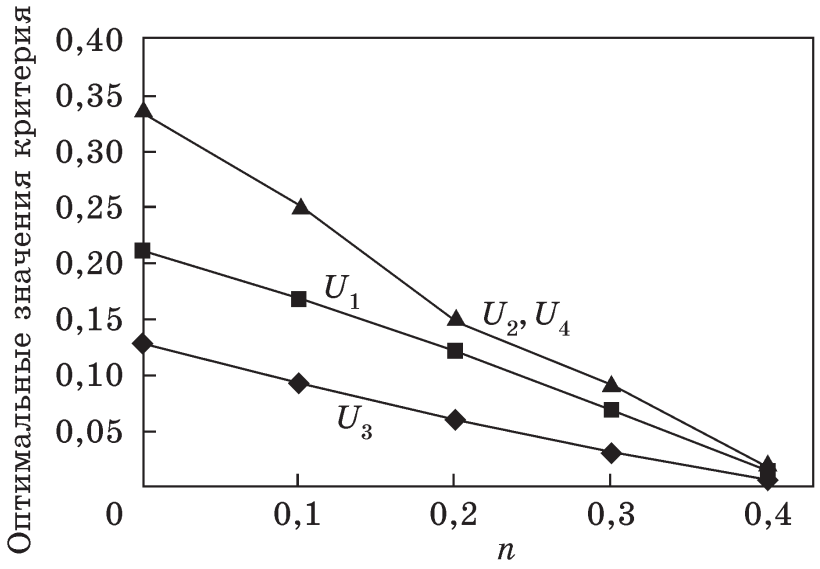

Рис. 3.2.3. Графики зависимостей оптимальных значений критерия K от неуправляемого параметра n

рования на уровне параметра k от неуправляемого параметра n (темп прироста населения), значения которого принадлежат промежутку $[0; 0{,}4]$.

В результате вычислительного эксперимента были получена табл. 3.2.1 и график (рис. 3.2.3) зависимостей оптимального значения критерия K от значений параметра n для каждого из 4 возможных законов (3.2.3).

Таблица 3.2.1

Закон регулирования	Оптимальное значение критерия для закона				
	$n = 0$	$n = 0{,}1$	$n = 0{,}2$	$n = 0{,}3$	$n = 0{,}4$
$U_3(t)$	0,130000	0,093165	0,060932	0,032153	0,006379
$U_1(t)$	0,210856	0,167352	0,121062	0,069768	0,014642
$U_2(t)$, $U_4(t)$	0,336324	0,251121	0,151368	0,091868	0,018441

Анализ табл. 3.2.1 показывает, что для всех рассматриваемых значениях параметра n оптимальным законом управления является закон $U_3(t)$, т. е. для рассматриваемого промежутка значений параметра n точки бифуркации экстремалей исследуемой задачи вариационного исчисления отсутствуют.

Глава 4

МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА НАЦИОНАЛЬНОГО ХОЗЯЙСТВА НА БАЗЕ ВЫЧИСЛИМЫХ МОДЕЛЕЙ ОБЩЕГО РАВНОВЕСИЯ

Как известно [39], в рамках проведения макроэкономической политики требуется оценка значений экономических инструментов, обеспечивающих равномерный рост (динамическое равновесие), при котором достигается такое развитие экономики, когда увеличивающиеся от периода к периоду объемы спроса и предложения на макроэкономических рынках всегда равны друг другу при полном использовании труда и капитала. Отмеченное в какой-то мере является требованием к математическим моделям, используемым для оценки рациональных значений экономических инструментов государственной политики в сфере экономического роста.

В настоящее время проблема экономического роста покрыта большим количеством феноменологических и эконометрических моделей [45].

На основе базового уравнения регрессии для оценки детерминант экономического роста

$$g = a_0 + \sum_l a_l x_l + \sum_p b_p z_p + \sum_r c_r \text{ДИТ}_r + \varepsilon$$

(где g — темп экономического прироста основных показателей национального продукта (ВВП, ВНП) в стране; a_0 — константа; a_l — коэффициенты при экономических переменных; x_l — экономические переменные; b_p — коэффициенты при дополнительных переменных; z_p — дополнительные переменные (политические, социальные, географические и др.); c_r — коэффициенты при фиктивных переменных; ДИТ_r — фиктивные переменные, отражающие групповой эффект; ε — случайная составляющая)

получены различные эконометрические модели зависимостей экономического роста от различного рода детерминант для оценки широкого спектра гипотез, предположений об их влиянии на экономический рост и эконометрические динамические межотраслевые модели, эконометрические макроэкономические модели [57, 59, 68], которые в основном предназначены для прогноза и не отвечают ранее указанным требованиям. Широкий круг феноменологических моделей [45], начиная от математических моделей неоклассической теории Солоу [69], Свана [71] (дополненных динамическими оптимизационными моделями на основе включения проблемы Рамсея в такие математические модели эндогенного экономического роста, в которых, например, представлены: производство инноваций как продукта, производимого особым сектором экономики (например, модель Гроссмана и Хелпмана [60]); деятельность, направленная на развитие самого человека (например, модель Роберта Лукаса [65]); международная торговля и распространение технологий (например, модель Лукаса [64])) и др., дает ответы на вопросы по источникам экономического роста, но также не покрывает выше отмеченные требования к математическим моделям для оценки рациональных значений экономических инструментов государственной политики в сфере экономического роста.

В рамках балансовых моделей [63], где межотраслевые связи представляются через систему материальных балансов для некоторого набора продуктов в совокупности охватывающих все национальное хозяйство, можно заметить то, что система материальных балансов, выражающая межотраслевые связи, формируется без рыночных отношений агентов, и в ней отсутствуют описания таких важнейших агентов, как государство, банковский сектор и совокупный потребитель. Поэтому балансовые модели в меньшей степени отвечают ранее указанному требованию.

В работе [27] предложен ряд вычислимых моделей общего равновесия, которые в большей степени удовлетворяют обозначенному выше требованию к математическим моделям, применяемым для оценки рациональных значений экономических инструментов государственной политики в сфере экономического роста.

В настоящей главе приводятся результаты макроэкономического анализа и параметрического регулирования экономического роста национального хозяйства на базе вычислимых моделей общего равновесия с учетом ограничений на уровень цен, что позволяет в определенной мере учесть требования по антиинфляционной политике.

4.1. Макроэкономический анализ и параметрическое регулирование эволюции национальной экономики на базе вычислимой модели общего равновесия отраслей экономики

4.1.1. Описание модели, параметрическая идентификация и ретроспективный прогноз. CGE-модель [27] в общем виде можно записать с помощью системы соотношений, которую можно разбить на подсистемы следующих видов.

1. Подсистема разностных уравнений, связывающая значения эндогенных переменных для двух последовательных лет:

$$x_{t+1} = F(x_t, y_t, z_t, u, \lambda). \tag{4.1.1}$$

Здесь t — номер года, дискретное время, $t = 0, 1, \ldots$; $\widetilde{x}_t = (x_t, y_t, z_t) \in R^m$ — вектор эндогенных переменных системы; $x_t = (x_t^1, x_t^2, \ldots, x_t^{m_1}) \in X_1$, $y_t = (y_t^1, y_t^2, \ldots, y_t^{m_2}) \in X_2$, $z_t = (z_t^1, z_t^2, \ldots, z_t^{m_3}) \in X_3$, $m_1 + m_2 + m_3 = m$. Здесь переменные x_t включают в себя значения основных фондов, остатки средств агентов на счетах в банках и др.; y_t включают в себя значения спроса и предложения агентов на различных рынках и др., z_t — различные виды рыночных цен и доли бюджета на рынках с государственными ценами для различных экономических агентов; $u \in U \subset R^q$ и $\lambda \in \Lambda \subset R^s$ — векторы экзогенных параметров (соответственно управляемых и неуправляемых); X_1, X_2, X_3, U — компактные множества с непустыми внутренностями $(\mathrm{Int}\,(X)_i)$, $i = 1, 2, 3$, и $\mathrm{Int}\,(W)$ соответственно; F: $X_1 \times X_2 \times X_3 \times W \times \Lambda \to R^{m_1}$ — непрерывная функция.

2. Подсистема алгебраических уравнений, описывающих поведение и взаимодействие агентов на различных рынках в течение выбранного года, эти уравнения допускают выражение переменных y_t через экзогенные параметры и остальные эндогенные переменные:

$$y_t = G(x_t, z_t, u, \lambda). \tag{4.1.2}$$

Здесь G: $X_1 \times X_2 \times X_3 \times U \times \Lambda \to R^{m_2}$ — непрерывная функция.

3. Подсистема рекуррентных соотношений для итеративных вычислений равновесных значений рыночных цен на различных рынках и долей бюджета на рынках с государственными ценами для различных экономических агентов:

$$z_t[Q+1] = Z(y_t[Q], z_t[Q], L, u, \lambda). \tag{4.1.3}$$

Здесь $Q = 0, 1, 2, \ldots$ — номер итерации; L — набор из положительных чисел (настраиваемые константы итераций), при умень-

шении их значений экономическая система быстрее приходит в состояние равновесия, однако при этом увеличивается опасность ухода цен в отрицательную область; Z: $X_2 \times X_3 \times (0, +\infty)^{m_3} \times U \times \Lambda \to R^{m_3}$ — непрерывное отображение, являющееся сжимающим при фиксированных $x_t \in X_1$, $u \in U$, $\lambda \in \Lambda$ и некоторых фиксированных L. В этом случае отображение Z имеет единственную неподвижную точку, к которой сходится итерационный процесс (4.1.2), (4.1.3).

CGE-модель общего равновесия (4.1.1)–(4.1.3) при фиксированных значениях экзогенных параметров для каждого момента времени t определяет значения эндогенных переменных $\widetilde{x}_t$, соответствующие равновесию цен спроса и предложения на рынках с негосударственными ценами и долей бюджета на рынках с государственными ценами агентов в рамках следующего алгоритма.

1. На первом шаге полагается $t = 0$ и задаются начальные значения переменных x_0.

2. На втором шаге для текущего t задаются начальные значения переменных $z_t[0]$ на различных рынках и для различных агентов; с помощью (4.1.2) вычисляются значения $y_t[0] = G(x_t, z_t[0], u, \lambda)$ (начальные значения спроса и предложения агентов на рынках товаров и услуг).

3. На третьем шаге для текущего времени t запускается итерационный процесс (4.1.3). При этом для каждого Q текущие значения спросов и предложений находятся из (4.1.2): $y_t[Q] = G(x_t, z_t[Q], u, \lambda)$, через уточнения рыночных цен и долей бюджетов на рынках с государственными ценами экономических агентов.

Условием остановки итерационного процесса является равенство значений спросов и предложений на различных рынках. В результате определяются равновесные значения рыночных цен на каждом рынке и долей бюджета на рынках с государственными ценами для различных экономических агентов. Индекс Q для таких равновесных значений эндогенных переменных мы опускаем.

4. На следующем шаге по полученному равновесному решению для момента t с помощью разностных уравнений (4.1.1) находятся значения переменных x_{t+1} для следующего момента времени. Значение t увеличивается на единицу. Переход на шаг 2.

Количество повторений шагов 2–4 определяется в соответствии с задачами калибровки, прогноза и регулирования на заранее выбранных интервалах времени.

Рассматриваемая CGE-модель может быть представлена в виде непрерывного отображение f: $X \times U \times \Lambda \to R^m$, задающего пре-

образование значений эндогенных переменных системы для нулевого года в соответствующие значения следующего года согласно приведенному выше алгоритму. Здесь компакт X в фазовом пространстве эндогенных переменных определяется множеством возможных значений переменных x (компакт X_1 с непустой внутренностью) и соответствующими равновесными значениями переменных y и z, рассчитываемых с помощью соотношений (4.1.2) и (4.1.3).

Будем предполагать, что для выбранной точки $x_0 \in \mathrm{Int}\,(X_1)$ верно включение $\widetilde{x}_t = f^t(\widetilde{x}_0)\big|_{X_1} \in \mathrm{Int}\,(X_1)$ при фиксированных $u \in \mathrm{Int}\,(U)$ и $\lambda \in \Lambda$ для $t = 0, 1, \ldots, T$ (T — фиксированное натуральное число). Это отображение f определяет дискретную динамическую систему (полукаскад) в множестве X, на траектории которого наложено соответствующее начальное условие:

$$\{f^t,\ t = 0, 1, \ldots\}, \quad x\big|_{t=0} = x_0. \tag{4.1.4}$$

Агенты модели. Рассматриваемая модель [27] описывает поведение и взаимодействие на 46 товарных рынках и 16 рынках рабочей силы следующих 20 экономических агентов (секторов):

№ 1 — сельское хозяйство, охота и лесоводство;

№ 2 — рыболовство, рыбоводство;

№ 3 — горнодобывающая промышленность;

№ 4 — обрабатывающая промышленность;

№ 5 — производство и распределение электроэнергии, газа и воды;

№ 6 — строительство;

№ 7 — торговля; ремонт автомобилей и изделий домашнего пользования;

№ 8 — гостиницы и рестораны;

№ 9 — транспорт и связь;

№ 10 — финансовая деятельность;

№ 11 — операции с недвижимым имуществом, аренда и услуги предприятиям;

№ 12 — государственное управление;

№ 13 — образование;

№ 14 — здравоохранение и социальные услуги;

№ 15 — прочие коммунальные, социальные и персональные услуги;

№ 16 — услуги по ведению домашнего хозяйства.

Часть выпущенного продукта экономических агентов — производителей товаров и услуг № 1–16 — используется в производстве,

другая часть уходит на инвестиции, а третья продается домашним хозяйствам. Агенты-производители торгуют между собой промежуточными и инвестиционными товарами;

№ 17 — совокупный потребитель, объединяющий в себя домашние хозяйства. Совокупный потребитель покупает потребительские товары, производимые агентами-производителями. Кроме того, он покупает импортные товары, предлагаемые внешним миром;

№ 18 — правительство, представленное совокупностью центрального, региональных и местных правительств, а также внебюджетными фондами. Правительство устанавливает налоговые ставки и определяет сумму субсидий агентам-производителям и размеры социальных трансфертов домашним хозяйствам. Кроме того, в этот сектор входят некоммерческие организации, обслуживающие домашние хозяйства (политические партии, профсоюзы, общественные объединения и т. д.);

№ 19 — банковский сектор, включающий в себя Национальный банк и коммерческие банки;

№ 20 — внешний мир.

Рассматриваемая модель содержит 698 эндогенных переменных и 2045 оцениваемых экзогенных параметров.

В работе принята следующая система обозначений экзогенных эндогенных переменных CGE-моделей:

⟨Тип⟩⟨Параметр⟩_⟨Цена и ее кодировка⟩_⟨Номер экономического агента и кодировка рынка⟩[⟨значение времени (t) или номер итерации (Q)⟩].

Здесь ⟨Тип⟩ может содержать два значения: C — экзогенная переменная, V — эндогенная переменная; ⟨Параметр⟩ соответствует действию, осуществляемому агентом. Примером такого действия может быть S — предложение товара, D — спрос на товар, O — определение агентом доли бюджета и др.

Например, обозначение $CO_p3_1z[0]$ соответствует экзогенной переменной — доле бюджета 1-й отрасли (сельское хозяйство, охота и лесоводство), идущей на покупку промежуточного продукта, производимого 3-й отраслью (горнодобывающая промышленность) по цене P_3z на промежуточные товары 3-й отрасли для нулевого (2000) года.

Экзогенные переменные модели. В число экзогенных параметров входят:

— коэффициенты производственных функций секторов;

— различные доли бюджетов секторов;

— доли произведенного продукта идущие на продажу на различных рынках;

— нормы амортизации для основных фондов и доли выбывших основных фондов;

— ставки по депозитам;

— различные налоговые ставки;

— коэффициенты, отражающий уровень неплатежей агентам-производителям;

— норма амортизации для основных фондов;

— доля выбывших основных фондов;

— коэффициент, отражающий уровень задолженности по заработной плате работникам всех отраслей;

— экспортные цены и государственные цены на товары, услуги, рабочую силу и др.

В табл. 4.1.1 приводится список экзогенных переменных модели.

Таблица 4.1.1. **Экзогенные переменные вычислимой модели отраслей экономики**

Агенты производители № 1–16	
CO_pi_il	Доля бюджета i-й отрасли, идущая на оплату рабочей силы по цене $P__il$
CO_pj_iz	Доля бюджета i-й отрасли, идущая на покупку промежуточного продукта, производимого отраслями $j = \overline{1,16}$ по цене $P__jz$
CO_p_in	Доля бюджета i-й отрасли, идущая на покупку инвестиционных товаров по цене $P__n$
CE_pi_iz	Доля произведенного i-й отраслью продукта, идущая на продажу на рынках промежуточных товаров по цене $P__iz$
CE_p_ic	Доля произведенного i-й отраслью продукта, идущая на продажу на рынке конечных товаров по цене $P__ic$
CE_p_in	Доля произведенного i-й отраслью продукта, идущая на продажу на рынке инвестиционных товаров по цене $P__in$
CE_pexi_ic	Доля произведенного i-й отраслью продукта, идущая на продажу на рынке экспортных товаров по цене $P__exi$
CA_r_i	Эмпирический коэффициент размерности производственной функции
CA_z_ji	Коэффициенты производственной функции при потребляемых i-й отраслью промежуточных продуктах $j = \overline{1,16}$
CA_k_i	Коэффициент производственной функции при капитале
CA_l_i	Коэффициент производственной функции при труде

Таблица 4.1.1 (окончание)

CO_y_i	Коэффициент, отражающий уровень неплатежей агентам-производителям
CA_n	Норма амортизации для основных фондов
CO_w_i	Коэффициент, отражающий уровень задолженности по заработной плате работникам всех отраслей
$CR__i$	Доля выбывших основных фондов
№ 17. Домашние хозяйства	
CO_p_17c	Доля бюджета совокупного потребителя, идущая на покупку конечных товаров по цене $P__c$
CO_b_17	Доля бюджета, идущая на вклады в банках
CS_pi_17l	Количество работников, занятых в секторах № 1–16
№ 18. Правительство	
CT_vad	Ставка налога на добавленную стоимость
CT_pr	Ставка налога на прибыль организаций
CT_pod	Ставка налога на доходы физических лиц
CT_esn	Ставка единого социального налога
$CO_s_i_18$	Доли консолидированного бюджета, идущие на субсидирование агентов-производителей
CO_tr_18	Доля консолидированного бюджета, идущая на социальные трансферты
CO_f_18	Доля в расходах внебюджетных фондов, идущая на пенсии, пособия и т. д.
CB_other_18	Сумма налоговых поступлений (не вошедших в число рассматриваемых), неналоговых доходов и прочих доходов консолидированного бюджета
№ 19. Банковский сектор	
$CP__bpercent$	Ставка по депозитам для предприятий
$CP_h_bpercent$	Ставка по депозитам для физических лиц
Общая часть модели	
$CP__exi$	Цена на экспортный продукт, производимый i-й отраслью
Технические параметры	
$Ceta__1$	Константа итерации, применяемая в случае экзогенной цены

Эндогенные переменные модели. В число эндогенных переменных входят:

— бюджеты секторов и их различные доли;

— остатки бюджетов агентов;

— производимые добавленные стоимости производящих секторов;

— спросы и предложения на различные товары и услуги;

— выручки секторов;

— основные фонды производящих секторов;

— количество работников, занятых в секторах № 1–16;

— заработная плата работников;

— различные виды расходов консолидированного бюджета;

— различные виды цен на товары услуги и рабочую силу;

— субсидии секторам-производителям;

— социальные трансферты населению;

— валовой выпуск товаров и услуг;

— объем производства промежуточной продукции;

— объем производства конечной продукции;

— ВВП страны.

В табл. 4.1.2 приводится список эндогенных переменных модели.

Таблица 4.1.2. **Эндогенные переменные вычислимой модели отраслей экономики**

Агенты производители № 1–16	
VO_tc_i	Доля бюджета агента-производителя, идущая на уплату налогов в консолидированный бюджет
VO_tf_i	Доля бюджета агента-производителя, идущая на уплату налогов во внебюджетные фонды
VO_s_i	Остаток бюджета агента-производителя
VD_pi_il	Спрос i-й отрасли на рабочую силу по цене *P__il*
VD_pj_iz	Спрос i-й отрасли на промежуточную продукцию, производимую отраслями $j = \overline{1,16}$ по цене *P__jz*
VD_p_in	Спрос i-й отрасли на инвестиционные товары по цене *P__in*
VY__i	Выпуск товаров и услуг в ценах базового периода
VY_g_i	Добавленная стоимость, производимая i-й отраслью
VK__i	Основные фонды агента-производителя
VS_pi_iz	Предложение промежуточной продукции
VS_p_ic	Предложение конечной продукции

Таблица 4.1.2 (продолжение)

VS_p_in	Предложение инвестиционных товаров
VS_pex_ic	Предложение экспортных товаров
VY_p_i	Выручка агента-производителя
VY_r_i	Прибыль агента-производителя
VB__i	Бюджет агента-производителя
VB_b_i	Остаток средств агента-производителя на счетах в банках
№ 17. Домашние хозяйства	
*VO_tc_*17	Доля бюджета совокупного потребителя, идущая на уплату налогов в консолидированный бюджет
*VO_s_*17	Остаток бюджета сектора № 17
*VD_p_*17*c*	Спрос домашних хозяйств на конечные товары
VW__i	Заработная плата работников в секторах № 1–22
*VB__*17	Бюджет домашних хозяйств
*VB_b_*17	Деньги домашних хозяйств на счетах в банках
№ 18. Правительство	
*VO_s_*18	Доля нераспределенного консолидированного бюджета
*VO_s_*18*f*	Доля нераспределенных средств внебюджетных фондов
*VG_s_i_*18	Субсидии секторам-производителям
*VG_tr_*18	Социальные трансферты населению
*VG_f_*18	Средства внебюджетных фондов, выделенные для населения
*VB__*18	Консолидированный бюджет
*VB_b_*18	Профицит (дефицит) консолидированного бюджета
*VF__*18	Средства внебюджетных фондов
*VF_b_*18	Остаток средств внебюджетных фондов
Интегральные показатели модели	
VY	Валовой выпуск товаров и услуг (в ценах базового периода)
VS_z	Объем производства промежуточной продукции (в ценах базового периода)
VS__c	Объем производства конечной продукции (в ценах базового периода)
VY_g	ВВП
VP	Индекс потребительских цен

Таблица 4.1.2 (окончание)

Общая часть модели	
VP__il	Цена на рабочую силу в i-й отрасли
VP__iz	Цена на промежуточный продукт, производимый i-й отраслью
VP__n	Цена на инвестиционные товары
VP__c	Цена на потребительские товары
VP	Индекс потребительских цен
VD_ps_il	Суммарный спрос на рабочую силу по цене *P__il*
VD_ps_iz	Суммарный спрос на промежуточный продукт по цене *P__iz*
VD_ps_n	Суммарный спрос на инвестиционные товары по цене *P__n*
VD_ps_c	Суммарный спрос на потребительские товары по цене *P__c*
VS_ps_il	Суммарное предложение рабочей силы по цене *P__il*
VS_ps_iz	Суммарное предложение промежуточного продукта по цене *P__iz*
VS_ps_n	Суммарное предложение инвестиционных товаров по цене *P__n*
VS_ps_c	Суммарное предложение потребительских товаров по цене *P__c*

Рынки модели. На 50 рынках модели в результате уравнивания спросов и предложений на различные виды товаров, услуг и рабочую силу формируются равновесные цены.

В описываемой модели имеется:

— 16 рынков промежуточных товаров и услуг, производимых агентами-производителями;

— 1 рынок инвестиционных товаров;

— 1 рынок конечных товаров.

Помимо этого в модели рассматривается:

— 16 внешних рынков экспортных товаров, производимых агентами-производителями;

— 16 рынков рабочей силы.

Общее число рынков в модели — 46. На внутренних рынках используются государственный и рыночный механизмы ценообразования. Цены на внешних рынках вводятся в модель экзогенно. Теперь запишем формулы, отражающие процесс изменения цен на внутренних рынках (i означает номер агента).

Цена на рабочую силу в i-й отрасли:

$$VP__il[Q+1] = VP__il[Q] \times Abs(VD_ps_il[t]/VS_ps_il[t]). \tag{4.1.5}$$

Цена на промежуточный продукт, производимый i-й отраслью:

$$VP__iz[Q+1] = VP__iz[Q] \times Abs(VD_ps_iz[t]/VS_ps_iz[t]). \tag{4.1.6}$$

Цена на инвестиционные товары:

$$VP__n[Q+1] = VP__n[Q] \times Abs(VD_ps_n[t]/VS_ps_n[t]). \tag{4.1.7}$$

Цена на потребительские товары:

$$VP__c[Q+1] = VP__c[Q] \times Abs(VD_ps_c[t]/VS_ps_c[t]). \tag{4.1.8}$$

То есть в модели мы имеем $16 + 16 + 1 = 33$ цены на товары, продаваемые на внутренних рынках.

Ниже приводятся обозначения цен для внешних рынков.

Цена на экспортный продукт, производимый i-й отраслью обозначается

$$P_exi. \tag{4.1.9}$$

Таким образом, общее число цен в модели: $33 + 16 = 49$.

Теперь перейдем к формулам, описывающим механизм образования спроса и предложения на товары, производимые агентами № 1–16 по государственным и рыночным ценам.

Конечные формулы, определяющие спрос и предложение каждого экономического агента на рынках товаров, участвующих вмодели, приводятся ниже.

Суммарный спрос на рабочую силу по цене $VP__il[t]$:

$$VD_ps_il[t] = VD_pi_il[t]. \tag{4.1.10}$$

Для упрощения мы не рассматриваем спрос отрасли i на рабочую силу из других отраслей. В этой связи суммарный спрос на рабочую силу по цене $VP__il[t]$ определяется спросом одной i-й отрасли.

Суммарное предложение рабочей силы по цене $VP__il[t]$:

$$VS_ps_il[t] = CS_pi_17l. \tag{4.1.11}$$

Суммарный спрос на промежуточный продукт по цене $VP__jz[t]$, производимый j-й отраслью:

$$VD_ps_jz[t] = \mathrm{SUM}\,(VD_pj_iz[t]). \tag{4.1.12}$$

Здесь и далее SUM $(X__i)$ соответствует сумме соответствующих показателей агентов-производителей: $\sum_{i=1}^{16} X__i$ — номер экономического агента.

Как видно, суммарный спрос на промежуточный продукт по цене $VP__jz[t]$ складывается из потребностей в промежуточном продукте j-й отрасли ($j = 1, \ldots, 16$) со стороны всех 16 отраслей.

Суммарное предложение промежуточного продукта по цене $VP__iz[t]$:

$$VS_ps_iz[t] = VS_pi_iz[t]. \tag{4.1.13}$$

Суммарный спрос на инвестиционные товары по цене $VP__n[t]$:

$$VD_ps_n[t] = \text{SUM}\,(VD_p_in[t]). \tag{4.1.14}$$

Суммарное предложение инвестиционных товаров по цене $VP__n[t]$:

$$VS_ps_n[t] = \text{SUM}\,(VS_p_in[t]). \tag{4.1.15}$$

Суммарный спрос на потребительские товары по цене $VP__c[t]$:

$$VD_ps_c[t] = VD_p_17c[t]. \tag{4.1.16}$$

Суммарное предложение потребительских товаров по цене $VP__c[t]$:

$$VS_ps_c[t] = \text{SUM}\,(VS_p_ic[t]). \tag{4.1.17}$$

Таким образом, мы имеем $32+32+2+2 = 68$ формул для определения суммарных спроса и предложения товаров на внутренних рынках.

Приведем обозначения, определяющие суммарный спрос и предложение на экспортируемые товары.

Суммарный спрос на экспортируемые товары по цене $CP_pex_ic[t]$ (задано):

$$VD_pex_ic[t]. \tag{4.1.18}$$

Суммарное предложение товаров на экспорт по цене $CP_pex_ic[t]$:

$$VS_pex_ic[t]. \tag{4.1.19}$$

В итоге получилось $68 + 32 = 100$ формул для определения суммарных спроса и предложения на все товары, используемые в модели.

Перейдем к описанию деятельности экономических агентов, участвующих в модели.

Экономические агенты № 1–16 — производители товаров и услуг. Уравнение производственной функции экономического агента-производителя имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} VY__i[t+1] = CA_r_i[t] \times \mathrm{Exp}\,(VD_p1_iz[t] \times \\ \times CA_z_1i[t]) \times \mathrm{Exp}\,(VD_p2_iz[t] \times CA_z_2i[t]) \times \\ \times \mathrm{Exp}\,(VD_p3_iz[t] \times CA_z_3i[t]) \times \mathrm{Exp}\,(VD_p4_iz[t] \times \\ \times CA_z_4i[t]) \times \mathrm{Exp}\,(VD_p5_iz[t] \times CA_z_5i[t]) \times \\ \times \mathrm{Exp}\,(VD_p6_iz[t] \times CA_z_6i[t]) \times \mathrm{Exp}\,(VD_p7_iz[t] \times \\ \times CA_z_7i[t]) \times \mathrm{Exp}\,(VD_p8_iz[t] \times CA_z_8i[t]) \times \\ \times \mathrm{Exp}\,(VD_p9_iz[t] \times CA_z_9i[t]) \times \mathrm{Exp}\,(VD_p10_iz[t] \times \\ \times CA_z_10i[t]) \times \mathrm{Exp}\,(VD_p11_iz[t] \times CA_z_11i[t]) \times \\ \times \mathrm{Exp}\,(VD_p12_iz[t] \times CA_z_12i[t]) \times \mathrm{Exp}\,(VD_p13_iz[t] \times \\ \times CA_z_13i[t]) \times \mathrm{Exp}\,(VD_p14_iz[t] \times CA_z_14i[t]) \times \\ \times \mathrm{Exp}\,(VD_p15_iz[t] \times CA_z_15i[t]) \times \mathrm{Exp}\,(VD_p16_iz[t] \times \\ \times CA_z_16i[t]) \times \mathrm{Power}(((VK__i[t]+VK__i[t+1])/2), CA_k_i[t]) \times \\ \times \mathrm{Power}\,(VD_pi_il[t], CA_l_i[t]). \quad (4.1.20) \end{aligned}$$

Здесь CA_r_i, CA_z_ji, CA_k_i, CA_l_i — параметры производственной функции, $\mathrm{Power}\,(X, Y)$ — соответствует X^Y, $\mathrm{Exp}\,(X)$ соответствует e^X.

В следующих формулах определяется спрос агента i на факторы производства:

— спрос на рабочую силу:

$$VD_pi_il[t] = (CO_pi_il \times VB__i[t])/VP__il[t]. \quad (4.1.21)$$

— спрос на промежуточную продукцию, производимую всеми агентами-производителями:

$$VD_p1_iz[t] = (VO_p1_iz[t] \times VB__i[t])/CP__1z[t], \quad (4.1.22)$$

$$VD_p2_iz[t] = (CO_p2_iz \times VB__i[t])/VP__2z[t], \quad (4.1.23)$$

$$VD_p3_iz[t] = (CO_p3_iz \times VB__i[t])/VP__3z[t], \quad (4.1.24)$$

$$VD_p4_iz[t] = (CO_p4_iz \times VB__i[t])/VP__4z[t], \quad (4.1.25)$$

$$VD_p5_iz[t] = (CO_p5_iz \times VB__i[t])/VP__5z[t], \quad (4.1.26)$$

$$VD_p6_iz[t] = (CO_p6_iz \times VB__i[t])/VP__6z[t], \quad (4.1.27)$$

$$VD_p7_iz[t] = (CO_p7_iz \times VB__i[t])/VP__7z[t], \quad (4.1.28)$$

$$VD_p8_iz[t] = (CO_p8_iz \times VB__i[t])/VP__8z[t], \quad (4.1.29)$$

$$VD_p9_iz[t] = (CO_p9_iz \times VB__i[t])/VP__9z[t], \quad (4.1.30)$$

$$VD_p10_iz[t] = (CO_p10_iz \times VB__i[t])/VP__10z[t], \quad (4.1.31)$$

$$VD_p11_iz[t] = (CO_p11_iz \times VB__i[t])/VP__11z[t], \quad (4.1.32)$$

$$VD_p12_iz[t] = (CO_p12_iz \times VB__i[t])/VP__12z[t], \quad (4.1.33)$$

$$VD_p13_iz[t] = (CO_p13_iz \times VB__i[t])/VP__13z[t], \quad (4.1.34)$$

$$VD_p14_iz[t] = (CO_p14_iz \times VB__i[t])/VP__14z[t], \quad (4.1.35)$$

$$VD_p15_iz[t] = (CO_p15_iz \times VB__i[t])/VP__15z[t], \quad (4.1.36)$$

$$VD_p16_iz[t] = (CO_p16_iz \times VB__i[t])/VP__16z[t]; \quad (4.1.37)$$

— спрос на инвестиционные товары:

$$VD_p_in[t] = (CO_p_in \times VB__i[t])/VP__n[t]. \quad (4.1.38)$$

В следующих формулах определяется предложение товаров и услуг, производимых агентом-производителем:

— предложение промежуточной продукции:

$$VS_pi_iz[t] = CE_pi_iz \times VY__i[t]; \quad (4.1.39)$$

— предложение конечной продукции:

$$VS_p_ic[t] = CE_p_ic \times VY__i[t]; \quad (4.1.40)$$

— предложение инвестиционных товаров:

$$VS_p_in[t] = CE_p_in \times VY__i[t]; \quad (4.1.41)$$

— предложение товаров, идущих на экспорт:

$$VS_pex_ic[t] = CE_pexi_ic \times VY__i[t]. \quad (4.1.42)$$

В следующей формуле подсчитывается выручка агента-производителя:

$$VY_p_i[t] = VS_pi_iz[t] \times VP__iz[t] + VS_p_ic[t] \times VP__c[t] + \\ + VS_p_in[t] \times VP__n[t] + VS_pex_ic[t] \times CP__exi[t]. \quad (4.1.43)$$

Прибыль агента-производителя:

$$VY_r_i[t] = CO_y_i \times VY_p_i[t] - (VD_p1_iz[t] + VD_p2_iz[t] + \\ + VD_p3_iz[t] + VD_p4_iz[t] + VD_p5_iz[t] + VD_p6_iz[t] + \\ + VD_p7_iz[t] + VD_p8_iz[t] + VD_p9_iz[t] + VD_p10_iz[t] + \\ + VD_p11_iz[t] + VD_p12_iz[t] + VD_p13_iz[t] + \\ + VD_p14_iz[t] + VD_p15_iz[t] + VD_p16_iz[t] + \\ + (VW__i[t] \times CO_w_i) + CA_n[t] \times (VK__i[t] \times VP__n[t])). \quad (4.1.44)$$

Здесь CO_y_i — коэффициент, отражающий уровень неплатежей; CA_n — норма амортизации для основных фондов. Здесь подсчитывается прибыль сектора, складывающаяся из выручки, скорректированной на уровень неплатежей. Со знаком минус идут средства, потраченные на промежуточный продукт, заработную плату (без учета задолженности — коэффициент CO_w_i) и амортизацию основных фондов.

Добавленная стоимость, производимая сектором i:

$$VY_g_i[t] = VY_r_i[t] + VW__i[t]. \quad (4.1.45)$$

Добавленная стоимость складывается из прибыли, полученной в текущем периоде, и реально выплаченной заработной платы работникам сектора.

Бюджет агента-производителя:

$$VB__i[t] = VB_b_i[t-1] \times (1 + CP__bpercent[t-1]) + \\ + CO_y_i \times VY_p_i[t] + VG_s_i18[t-1]. \quad (4.1.46)$$

Бюджет агента формируется из:

1) средств, находящихся на банковских счетах (с учетом процентов по вкладам);

2) выручки, полученной в текущем периоде;

3) субсидий, полученных из консолидированного бюджета VG_s_i18.

Динамика остатков средств агента-производителя на счетах в банках:

$$VB_b_i[t] = VO_s_i[t] \times VB__i[t]. \quad (4.1.47)$$

Основные фонды:

$$VK__i[t+1] = (1 - CR__i[t]) \times VK__i[t] + VD_p_in[t]. \quad (4.1.48)$$

В этой формуле подсчитывается объем основных фондов с учетом их выбытия. Со знаком плюс идут введенные в эксплуатацию фонды.

Доля бюджета агента-производителя, идущая на уплату налогов в консолидированный бюджет:

$$VO_tc_i[t] = (VY_g_i[t] \times CT_vad[t])/VB__i[t] + \\ + (VY_r_i[t] \times CT_pr[t])/VB__i[t]. \quad (4.1.49)$$

Здесь учитываются налог на добавленную стоимость и налог на прибыль.

Доля бюджета, идущая на уплату единого социального налога во внебюджетные фонды:

$$VO_tf_i[t] = (VW__i[t] \times CT_esn[t])/VB__i[t]. \quad (4.1.50)$$

Остаток бюджета агента-производителя:

$$VO_s_i[t] = 1 - (CO_pi_il + CO_p_in + VO_tc_i[t] + \\ + VO_tf_i[t] + VO_p1_iz[t] + CO_p2_iz + CO_p3_iz + CO_p4_iz + \\ + CO_p5_iz + CO_p6_iz + CO_p7_iz + CO_p8_iz + \\ + CO_p9_iz + CO_p10_iz + CO_p11_iz + CO_p12_iz + \\ + CO_p13_iz + CO_p14_iz + CO_p15_iz + CO_p16_iz). \quad (4.1.51)$$

Экономический агент № 17 — совокупный потребитель. Переходим к формулам, определяющим поведение совокупного потребителя.

Спрос домашних хозяйств на конечные товары:

$$VD_p_17c[t] = (CO_p_17c \times VB__17[t])/VP__c[t]. \quad (4.1.52)$$

Заработная плата работников секторов № 1–16:

$$VW__i[t] = VD_pi_il[t] \times VP__il[t]. \quad (4.1.53)$$

Бюджет домашних хозяйств:

$$VB__17[t] = VB_b_17[t-1] \times (1 + CP_h_bpercent[t-1]) + \\ + VB__17[t-1] \times VO_s_17[t-1] + VG_tr_18[t-1] + \\ + VG_f_18[t-1] + \mathrm{SUM}\,(VW__i[t]). \quad (4.1.54)$$

Бюджет агента формируется из:

1) денег, отложенных на счетах в банках;

2) нераспределенных наличных денег, оставшихся с предыдущего периода;

3) пенсий, пособий и субсидий, получаемых из внебюджетных фондов;

4) заработной платы, получаемой у агентов-производителей № 1–16.

Динамика остатков средств домашних хозяйств на счетах в банках:

$$VB_b_17[t] = CO_b_17 \times VB__17[t]. \tag{4.1.55}$$

Доля бюджета, идущая на уплату подоходного налога:

$$VO_tc_17[t] = (tS \times CT_pod[t])/VB__17[t]. \tag{4.1.56}$$

Остаток наличных денег:

$$VO_s_17[t] = 1 - CO_p_17c - VO_tc_17[t] - CO_b_17. \tag{4.1.57}$$

Экономический агент № 18 — правительство. Как уже говорилось, этот экономический агент представлен совокупностью федерального, региональных и местных правительств, а также внебюджетными фондами. Помимо этого сюда входят некоммерческие организации, обслуживающие домашние хозяйства.

Переходим к формулам, определяющим поведение экономического агента № 18.

Консолидированный бюджет:

$$\begin{aligned} VB__18[t] = \mathrm{SUM}\,(VO_tc_i[t] \times VB__i[t]) + \\ + VO_tc_18[t] \times VB__18[t] + CB_other_18[t] + \\ + VB_b_18[t] \times (1 + CP__bpercent[t-1]). \end{aligned} \tag{4.1.58}$$

В этой формуле суммируются деньги, собранные в виде налогов с агентов-производителей, а также от населения. Экзогенно вводимое в модель значение CB_other_18 представляет собой сумму других налогов (не вошедших в перечень рассматриваемых в модели), неналоговых доходов и прочих доходов консолидированного бюджета. К полученной сумме приплюсовываются средства, находящиеся на банковских счетах (с учетом процентов по вкладам).

Динамика остатков средств консолидированного бюджета на счетах в банках:

$$VB_b_18[t+1] = VO_s_18[t] \times VB__18[t]. \tag{4.1.59}$$

Денежные средства вне бюджетных фондов:

$$\begin{aligned} VF__18[t] = \mathrm{SUM}\,(VO_tf_i[t] \times VB__i[t]) + \\ + VF_b_18[t] \times (1 + CP__bpercent[t-1]). \end{aligned} \tag{4.1.60}$$

Здесь рассчитывается сумма, собранная с агентов-производителей в виде единого социального налога, поступающая на счета внебюджетных фондов: пенсионного фонда, фонда социального страхования, Федерального и территориальных фондов обязательного медицинского страхования. К полученной сумме приплюсовываются средства, находящиеся на банковских счетах (с учетом процентов по вкладам).

Динамика остатков средств внебюджетных фондов на счетах в банках:

$$VF_b_18[t+1] = VO_s_18f[t] \times VF__18[t]. \tag{4.1.61}$$

Субсидии секторам-производителям:

$$VG_s_i18[t] = CO_s_i18 \times VB__18[t]. \tag{4.1.62}$$

Социальные трансферты населению:

$$VG_tr_18[t] = CO_tr_18 \times VB__18[t]. \tag{4.1.63}$$

Средства внебюджетных фондов, выделенные для населения:

$$VG_f_18[t] = CO_f_18 \times VF__18[t]. \tag{4.1.64}$$

Сюда входят средства пенсионного фонда и фонда социального страхования, идущие на выплату пенсий и пособий.

Интегральные показатели модели. Приведем формулы, по которым вычисляются некоторые интегральные показатели экономики Казахстана:

— валовой выпуск товаров и услуг (в ценах базового периода):

$$VY[t] = \mathrm{SUM}\,(VY__i[t]); \tag{4.1.65}$$

— совокупное предложение промежуточной продукции (в ценах базового периода):

$$VS__z[t] = \mathrm{SUM}\,(VS_pi_iz[t]); \tag{4.1.66}$$

— совокупное предложение конечной продукции (в ценах базового периода):

$$VS__c[t] = \mathrm{SUM}\,(VS_p_ic[t]); \tag{4.1.67}$$

— ВВП Казахстана:

$$VY_g[t] = \mathrm{SUM}\,(VY_g_i[t])/VP__c[0]; \tag{4.1.68}$$

— индекс потребительских цен:

$$VP[t] = 100 \times (VP__c[t]/VP__c[t-1]). \tag{4.1.69}$$

Рассматриваемая модель представляется в рамках общих выражений:

— соотношения (4.1.1) $m_1 = 67$ выражениями;
— соотношения (4.1.2) $m_2 = 597$ выражениями;
— соотношения (4.1.3) $m_3 = 34$ выражениями.

Параметрическая идентификация модели и ретропрогноз. Задача параметрической идентификации исследуемой макроэкономической математической модели состоит в нахождении оценок неизвестных значений ее параметров, при которых достигается минимальное значение целевой функции, характеризующей отклонения значений выходных переменных модели от соответствующих наблюдаемых значений (известных статистических данных). Эта задача сводится к нахождению минимального значения функции нескольких переменных (параметров) в некоторой замкнутой области Ω евклидова пространства с ограничениями-вида $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, накладываемыми на значения эндогенных переменных модели. В случае большой размерности области возможных значений искомых параметров, стандартные методы нахождения экстремумов функции часто бывают неэффективными в связи наличием нескольких локальных минимумов целевой функции. Ниже предлагается алгоритм, учитывающий особенности задачи параметрической идентификации макроэкономических моделей и позволяющий обойти указанную проблему «локальных экстремумов».

В качестве области $\Omega \subset U \times \Lambda \times X_1$ для оценки возможных значений экзогенных параметров рассматривалась область вида $\Omega = \prod_{i=1}^{q+s+m_1} [a_i, b_i]$, где $[a_i, b_i]$ — промежуток возможных значений параметра ω^i, $i = 1, \ldots, q + s + m_1$. При этом оценки параметров, для которых имелись наблюдаемые значения, искались в промежутках $[a_i, b_i]$ с центрами в соответствующих наблюдаемых значениях (в случае одного такого значения) или в некоторых промежутках, покрывающих наблюдаемые значения (в случае нескольких таких значений). Прочие промежутки $[a_i, b_i]$ для поиска параметров выбирались с помощью косвенных оценок их возможных значений. Для нахождения минимальных значений непрерывной функции нескольких переменных $F\colon \Omega \to R$ с дополнительными ограничениями на эндогенные переменные в вычислительных экспериментах использовался алгоритм направленного поиска Нелдера–Мида. Применение этого алгоритма для начальной точки ω_1 можно интерпретировать в виде (сходящейся

к локальному минимуму $\omega_0 = \arg\min\limits_{\Omega,\widetilde{x}\in\widetilde{X}} F(\omega)$ функции F) последовательности $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$, где $F(\omega_{j+1}) \leqslant F(\omega_j)$, $\omega_j \in \Omega$, $j = 1, 2, \ldots$ В описании следующего алгоритма мы будем считать, что точка ω_0 может быть найдена достаточно точно.

Для решения задачи параметрической идентификации рассматриваемой вычислимой модели на основе очевидного предположения о несовпадении (в общем случае) точек минимума двух различных функций предложены два критерия следующего типа:

$$K_A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{n_\alpha(t_2 - t_1 + 1)} \sum_{t=t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n_A} \alpha_i \left(\frac{y_t^i - y_t^{i^*}}{y_t^{i^*}} \right)^2},$$

$$K_B(\omega) = \sqrt{\frac{1}{n_\beta(t_2 - t_1 + 1)} \sum_{t=t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n_B} \beta_i \left(\frac{y_t^i - y_t^{i^*}}{y_t^{i^*}} \right)^2}. \tag{4.1.70}$$

Здесь $\{t_1, \ldots, t_2\}$ — промежуток времени идентификации; y_t^i, $y_t^{i^*}$ — расчетные и наблюдаемые значения выходных переменных модели соответственно; $K_A(\omega)$ — вспомогательный критерий; $K_B(\omega)$ — основной критерий; $n_B > n_A$; $\alpha_i > 0$ и $\beta_i > 0$ — некоторые весовые коэффициенты, значения которых определяются в процессе решения задачи параметрической идентификации динамической системы; $\sum\limits_{i=1}^{n_A} \alpha_i = n_\alpha$, $\sum\limits_{i=1}^{n_B} \beta_i = n_\beta$.

Алгоритм решения задачи параметрической идентификации модели был выбран в виде следующих этапов.

1. Параллельно, для некоторого вектора начальных значений параметров $\omega_1 \in \Omega$, решаются задачи A и B, в результате находятся точки ω_{A0} и ω_{B0} минимума критериев K_A и K_B соответственно.

2. Если для некоторого достаточно малого числа ε верно $K_B(\omega_{B0}) < \varepsilon$, то задача параметрической идентификации модели решена.

3. В противном случае, используя в качестве начальной точки ω_1 точку ω_{B0}, решается задача A, и, используя в качестве начальной точки ω_1 точку ω_{A0}, решается задача B. Переход на этап 2.

Достаточно большое число повторений этапов 1–3 дает возможность выходить искомым значениям параметров из окрестностей точек неглобальных минимумов одного критерия с помощью дру-

гого критерия и тем самым решить задачу параметрической идентификации.

В результате совместного решения задач A и B, согласно указанному алгоритму с использованием алгоритма Нелдера–Мидда, были получены значения $K_A = 0{,}015$ и $K_B = 0{,}0063$. При этом относительная величина отклонений расчетных значений переменных, используемых в основном критерии, от соответствующих наблюдаемых значений составила менее 0,63%.

Результаты просчета и ретроспективного прогноза модели на 2008 г., частично представленные в табл. 4.1.3, демонстрируют расчетные (VY, VY_g, VP), наблюдаемые значения и отклонения расчетных значений основных выходных переменных модели от соответствующих наблюдаемых значений. Здесь промежуток времени 2000–2007 гг. соответствует периоду параметрической идентификации модели; 2008 г. — период ретропрогноза; VY — валовый выпуск ($\times 10^{12}$ тенге, в ценах 2000 г.); VY_g — ВВП ($\times 10^{12}$ тенге, в ценах 2000 г.); VP — индекс потребительских цен в процентах к предыдущему году; знак «$*$» соответствует наблюдаемым значениям, знак «Δ» соответствует отклонениям (в процентах) расчетных значений от соответствующих наблюдаемых значений.

Таблица 4.1.3. **Наблюдаемые, расчетные значения выходных переменных модели и соответствующие отклонения**

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
VY^*	5,44	6,32	6,47	6,86	7,72	8,52	9,25	9,69	9,84
VY	5,38	6,32	6,47	6,86	7,72	8,52	9,27	9,64	9,82
ΔVY	−1,22	−0,02	0,00	0,00	0,05	0,08	0,21	−0,51	−0,26
VY_g^*	2,45	2,78	3,05	3,36	3,72	4,09	4,55	5,01	5,18
VY_g	2,47	2,78	3,05	3,35	3,72	4,09	4,55	5,01	5,20
ΔVY_g	0,88	0,07	−0,04	−0,02	−0,02	−0,02	−0,04	−0,15	0,38
VP^*		106,4	106,6	106,8	106,7	107,5	108,4	118,8	109,5
VP		107,6	106,8	106,9	106,7	107,3	108,2	118,6	109,4
ΔVP		1,13	0,18	0,08	−0,05	−0,23	−0,22	−0,24	−0,05

Средняя квадратичная погрешность ретропрогноза всех 491 эндогенных переменных модели на 2008–2009 гг. составляет 5,86%.

Результаты верификации показывают приемлемую адекватность CGE-модели отраслей экономики.

4.1.2. Макроэкономический анализ на базе вычислимой модели общего равновесия отраслей экономики. Рациональность осуществления дискреционной государственной политики обусловливает проведение макроэкономического анализа на основе возможных инструментов.

В настоящем пункте приводятся некоторые результаты макроэкономического анализа экономики Республики Казахстан на основе вычислимой модели общего равновесия секторов экономики после оценки ее параметров на основе статистических данных Республики Казахстан за 2000–2009 гг.

Анализу подвергались динамика (и ее тренды) экзогенных и эндогенных показателей, а также темпы (и их тренды) эндогенных показателей экономических агентов и всей национальной экономики в ретроспективном периоде за 2000–2009 гг. и среднесрочном прогнозном (перспективном) периоде за 2010–2015 гг.

Перечень экзогенных и эндогенных показателей экономических агентов и национальной экономики, на основе которых осуществлялся ретроспективный и перспективный макроэкономический анализ, приведен в табл. 4.1.1 и 4.1.2.

Ретроспективный и перспективный анализ показателей экономических агентов и национальной экономики на базе вычислимой модели общего равновесия отраслей экономики. Ниже приведены отдельные результаты ретроспективного анализа на уровне отраслей и национальной экономики.

Результаты ретроспективного анализа экзогенных переменных на уровне отраслей экономики. Ретроспективный анализ экзогенных показателей по отраслям за 2000–2009 г. показывает, что в течение указанного периода:

— Численность занятых во всех отраслях, за исключением 16-й отрасли (услуги по ведению домашнего хозяйства), в среднем возрастала. Наибольший средний прирост (расчитанный по линейному тренду) наблюдался в отрасли 6 (строительство) — $4{,}2 \cdot 10^4$ человек в год. Отрицательный прирост (снижение в среднем на $2{,}3 \cdot 10^3$ человек в год) наблюдался в отрасли 16 (услуги по ведению домашнего хозяйства).

— Тренд показателя «Доля промежуточной продукции в выпуске отрасли» имел положительный наклон для отраслей 8, 11, 10, 2, 4, 1 и отрицательный наклон для отраслей 16, 9, 13, 14, 5, 12, 6, 7, 15, 3. Наибольшее возрастание тренда (4,4% в год) наблюдалось в отрасли 8 (гостиницы и рестораны), а наибольшее убывание (3,4% в год) наблюдалось в отрасли 3 (горнодобывающая промышленность).

— Тренд показателя «Доля конечной продукции в выпуске отрасли» имел положительный наклон для отраслей 5, 12, 16, 1, 4, 14, 11, 13 и отрицательный наклон для отраслей 3, 6, 15, 10, 9, 7, 2, 8, 6. Наибольшее возрастание тренда (4,9% в год) наблюдалось в отрасли 5 (производство и распределение электроэнергии, газа и воды), а наибольшее убывание (3,8% в год) наблюдалось в отрасли 8 (гостиницы и рестораны).

— Тренд показателя «Доля экспорта в выпуске отрасли» имел положительный наклон для отраслей 7, 3, 4, 9, 15, 10, 2, 5 и отрицательный наклон для отраслей 6, 13, 8, 11, 12, 1. В отраслях 14 и 16 экспортная составляющая в выпуске была близка к нулю. Наибольшее возрастание тренда (3,6% в год) наблюдалось в отрасли 7 (торговля, ремонт автомобилей и изделий домашнего пользования), а наибольшее убывание (1,8% в год) наблюдалось в отрасли 1.

— Тренд показателя «Цена экспортных поставок продукции отрасли» возрастал для всех 16 отраслей. Наибольшее возрастание тренда (62% в год) наблюдалось в отрасли 5 (производство и распределение электроэнергии, газа и воды), а наименьшее возрастание (5,9% в год) наблюдалось в отрасли 13 (образование).

— Тренд показателя «Доля расходов предприятий отрасли, идущая на оплату труда» имел положительный наклон для отраслей 15, 13, 7, 4, 6, 5, 9, 18, 2 и отрицательный наклон для отраслей 14, 10, 11, 3, 16. Наибольшее возрастание тренда (1,9% в год) наблюдалось в отрасли 15 (прочие коммунальные, социальные и персональные услуги), а наибольшее убывание (1,4% в год) наблюдалось в отрасли 16 (услуги по ведению домашнего хозяйства).

— Тренд показателя «Доля расходов предприятий отрасли, идущая на покупку инвестиционной продукции» имел положительный наклон для отраслей 12, 6, 11, 5, 4, 1, 9, 14, 2, 7, 10 и отрицательный наклон для отраслей 13, 15, 8, 3. Эта доля для отрасли 16 была равной нулю. Наибольшее возрастание тренда (10% в год) наблюдалось в отрасли 12 (государственное управление), а наибольшее убывание (2% в год) наблюдалось в отрасли 3 (горнодобывающая промышленность).

— Показатель «Доля инвестиционной продукции в выпуске отрасли» был отличен от нуля в 8 отраслях из 16. При этом в отраслях 6, 7, 2, 1, 9 (отрасли здесь и далее расположены в порядке убывания углового коэффициента тренда) этот показатель имел положительный наклон линейного тренда, наибольшее значение (2,9% в год) наблюдалось в отрасли 6 (строительство). Эта доля

для отрасли 6 в 2008 г. составила 78%. В отраслях 15, 4, 11 отмечались отрицательные наклоны линейных трендов рассматриваемого показателя. Наибольшее падение тренда отмечалось в отрасли 11 (операции с недвижимым имуществом, аренда и услуги предприятиям) — 0,94% в год.

На рис. 4.1.1 дана графическая иллюстрация динамики (и ее тренда) одного из показателей экономических агентов для ретро-

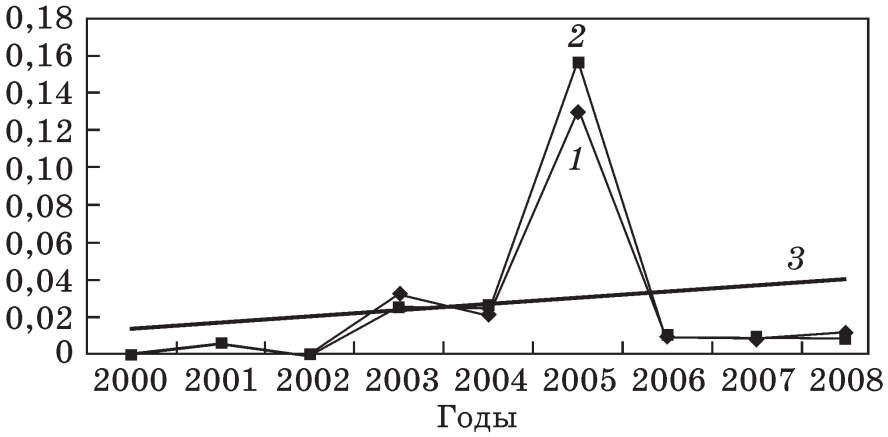

Рис. 4.1.1. Наблюдаемые (*1*), оцененные (*2*) значения и линейный тренд (*3*) экзогенной переменной «Доля инвестиционной продукции в выпуске отрасли 1»

спективного макроанализа, которая представлена на примере переменной «Доля инвестиционной продукции в выпуске экономического агента 1 (сельское хозяйство, охота и лесоводство)».

Анализ рис. 4.1.1 показывает положительный наклон линейного тренда исследуемого показателя, что характеризует возрастание (в среднем) доли инвестиционной продукции в выпуске экономического агента 1 (сельское хозяйство, охота и лесоводство) в рассматриваемом периоде.

В рамках ретроспективного анализа показателей отраслей экономики на базе исследуемой модели также были получены наблюдаемые, расчетные значения (и их линейные тренды) такого экзогенного показателя для каждой из 16 отраслей экономики, как CO_pj_iz (доля расходов предприятий отрасли i, идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j ($i, j = 1, \ldots, 16$)). В частности, ретроспективный анализ указанных показателей отраслей за 2000–2009 гг. показывает, что:

— Тренд показателя CO_pj_1z (Доля расходов предприятий отрасли 1 (сельское хозяйство, охота и лесоводство), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положительный наклон для отраслей $j = 1, 8, 2, 13$ и отрицательный наклон для отраслей $j = 11, 3, 15, 14, 10, 6, 12, 5, 7, 9$.

Отрасль 1 покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики, не производила. Наибольшее возрастание тренда (1,7% в год) наблюдалось для $j = 1$, а наибольшее убывание (0,63% в год) — для $j = 3$ (горнодобывающая промышленность). Максимальное значение показателя CO_pj_1z отмечалось для $j = 1$ и составляло в 2008 г. 36%.

— Тренд показателя CO_pj_2z (Доля расходов предприятий отрасли 2 (рыболовство, рыбоводство), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положительный наклон для отраслей $j = 9, 11, 5, 10, 3, 6, 8$ и отрицательный наклон для отраслей $j = 14, 15, 1, 12, 4, 7, 2$. Отрасль 2 покупку промежуточных товаров, производимых 13-й и 16-й отраслями экономики, не производила. Наибольшее возрастание тренда (1,6% в год) наблюдалось для $j = 9$, а наибольшее убывание (3,2% в год) — для $j = 2$ (горнодобывающая промышленность). Максимальное значение показателя CO_pj_2z отмечалось для $j = 4$ (обрабатывающая промышленность) и составляло в 2008 г. 18%.

— Тренд показателя CO_pj_3z (Доля расходов предприятий отрасли 3 (горнодобывающая промышленность), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положительный наклон для отраслей $j = 11, 10, 7, 12, 1, 2, 16$ и отрицательный наклон для отраслей $j = 8, 15, 13, 4, 14, 6, 5, 3, 9$. Отрасль 3 покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики, не производила. Наибольшее возрастание тренда (1,3% в год) наблюдалось для $j = 11$ (операции с недвижимым имуществом, аренда и услуги предприятиям), а наибольшее убывание (1,1% в год) — для $j = 9$ (транспорт и связь). Максимальное значение показателя CO_pj_3z отмечалось для $j = 11$ (обрабатывающая промышленность) и составляло в 2008 г. 19%.

— Тренд показателя CO_pj_4z (Доля расходов предприятий отрасли 4 (обрабатывающая промышленность), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положительный наклон для отраслей $j = 4, 3, 11, 1, 10, 6, 8, 2$ и отрицательный наклон для отраслей $j = 14, 12, 13, 15, 5, 9, 7$. Отрасль 4 покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики, не производила. Наибольшее возрастание тренда (0,46% в год) наблюдалось для $j = 4$, а наибольшее убывание (0,85% в год) — для $j = 7$ (торговля, ремонт автомобилей и изделий домашнего пользования). Максимальное значение показателя CO_pj_4z отмечалось для $j = 4$ (обрабатывающая промышленность) и составляло в 2008 г. 25%.

— Тренд показателя CO_pj_5z (Доля расходов предприятий отрасли 5 (производство и распределение электроэнергии, газа и воды), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положительный наклон для отраслей j=4, 5, 11, 3, 10, 8, 14, 1, 12, 2, 16 и отрицательный наклон для отраслей j = 15, 13, 6, 9, 7. Наибольшее возрастание тренда (2,0% в год) наблюдалось для j = 4 (обрабатывающая промышленность), а наибольшее убывание (1,0% в год) — для j = 7 (торговля, ремонт автомобилей и изделий домашнего пользования). Максимальное значение показателя CO_pj_5z отмечалось для j = 4 (обрабатывающая промышленность) и составляло в 2008 г. 19%.

— Тренд показателя CO_pj_6z (Доля расходов предприятий отрасли 6 (производство и распределение электроэнергии, газа и воды), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положительный наклон для отраслей j = 4, 6, 10, 8, 2, 14 и отрицательный наклон для отраслей j = 13, 12, 1, 15, 11, 5, 7, 9, 3. Отрасль 6 покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики, не производила. Наибольшее возрастание тренда (2,3% в год) наблюдалось для j = 4 (обрабатывающая промышленность), а наибольшее убывание (0,79% в год) — для j = 3 (торговля, ремонт автомобилей и изделий домашнего пользования). Максимальное значение показателя CO_pj_6z отмечалось для j = 4 (обрабатывающая промышленность) и составляло в 2008 г. 37%.

— Тренд показателя CO_pj_7z (Доля расходов предприятий отрасли 7 (производство и распределение электроэнергии, газа и воды), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положительный наклон для отраслей j=11, 3, 10, 8, 13 и отрицательный наклон для отраслей j=2, 14, 12, 15, 1, 5, 6, 9, 4, 7. Отрасль 7 покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики, не производила. Наибольшее возрастание тренда (2,3% в год) наблюдалось для j = 11 (операции с недвижимым имуществом, аренда и услуги предприятиям), а наибольшее убывание (1,7% в год) — для j = 7. Максимальное значение показателя CO_pj_7z отмечалось для j = 11 (операции с недвижимым имуществом, аренда и услуги предприятиям) и составляло в 2008 г. 17%.

— Тренд показателя CO_pj_8z (Доля расходов предприятий отрасли 8 (гостиницы и рестораны), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положительный наклон для отраслей j = 1, 9, 10, 6 и отрицательный наклон для отраслей j = 3, 14, 13, 12, 4, 2, 15, 7, 5, 8, 11. Отрасль 8

покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики, не производила. Наибольшее возрастание тренда (0,92% в год) наблюдалось для $j = 1$ (сельское хозяйство, охота и лесоводство), а наибольшее убывание (0,62% в год) — для $j = 11$. Максимальное значение показателя CO_pj_8z отмечалось для $j = 4$ (обрабатывающая промышленность) и составляло в 2008 г. 20%.

— Тренд показателя CO_pj_9z (Доля расходов предприятий отрасли 9 (транспорт и связь), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положительный наклон для отраслей $j = 9, 11, 10, 8, 2$ и отрицательный наклон для отраслей $j = 14, 13, 15, 12, 1, 3, 6, 5, 4, 7$. Отрасль 8 покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики, не производила. Наибольшее возрастание тренда (0,69% в год) наблюдалось для $j = 9$, а наибольшее убывание (1,0% в год) — для $j = 7$ (торговля, ремонт автомобилей и изделий домашнего пользования). Максимальное значение показателя CO_pj_9z отмечалось для $j = 4$ (обрабатывающая промышленность) и составляло в 2008 г. 15%.

— Тренд показателя CO_pj_10z (Доля расходов предприятий отрасли 10 (финансовая деятельность), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положительный наклон для отраслей $j = 4, 9, 11, 8, 1, 6, 5, 15, 13, 2$ и отрицательный наклон для отраслей $j = 16, 14, 12, 3, 12, 3, 7, 10$. Наибольшее возрастание тренда (0,15% в год) наблюдалось для $j = 4$ (обрабатывающая промышленность), а наибольшее убывание (0,98% в год) — для $j = 10$. Максимальное значение показателя CO_pj_10z отмечалось для $j = 4$ (обрабатывающая промышленность) и составляло в 2008 г. 16%.

— Тренд показателя CO_pj_11z (Доля расходов предприятий отрасли 11 (операции с недвижимым имуществом, аренда и услуги предприятиям), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положительный наклон для отраслей $j = 4, 7, 9, 5, 13, 14, 8, 2$ и отрицательный наклон для отраслей $j = 16, 12, 1, 15, 3, 6, 11$. Наибольшее возрастание тренда (1,6% в год) наблюдалось для $j = 4$ (обрабатывающая промышленность), а наибольшее убывание (0,70% в год) — для $j = 11$. Максимальное значение показателя CO_pj_11z отмечалось для $j = 11$ и составляло в 2008 г. 25%.

— Тренд показателя CO_pj_12z (Доля расходов предприятий отрасли 12 (государственное управление), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положи-

тельный наклон для отраслей $j = 8, 10, 6, 11, 15, 1, 14, 13$ и отрицательный наклон для отраслей $j = 2, 9, 3, 5, 4, 7, 12$. Отрасль 12 покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики, не производила. Наибольшее возрастание тренда (0,92% в год) наблюдалось для $j = 8$ (гостиницы и рестораны), а наибольшее убывание (0,76% в год) — для $j = 11$. Максимальное значение показателя CO_pj_12z отмечалось для $j = 4$ (обрабатывающая промышленность) и составляло в 2008 г. 18%.

— Тренд показателя CO_pj_13z (Доля расходов предприятий отрасли 13 (образование), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положительный наклон для отраслей $j = 4, 6, 9, 15, 1, 8$ и отрицательный наклон для отраслей $j = 2, 10, 3, 12, 14, 7, 13, 5, 11$. Отрасль 13 покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики, не производила. Наибольшее возрастание тренда (2,9% в год) наблюдалось для $j = 4$ (обрабатывающая промышленность), а наибольшее убывание (0,66% в год) — для $j = 11$ (операции с недвижимым имуществом, аренда и услуги предприятиям). Максимальное значение показателя CO_pj_13z отмечалось для $j = 4$ (обрабатывающая промышленность) и составляло в 2008 г. 24%.

— Тренд показателя CO_pj_14z (Доля расходов предприятий отрасли 14 (здравоохранение и социальные услуги), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положительный наклон для отраслей $j = 4, 6, 1, 7, 8$ и отрицательный наклон для отраслей $j = 2, 3, 12, 11, 10, 15, 9, 13, 5, 14$. Отрасль 14 покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики, не производила. Наибольшее возрастание тренда (3,2% в год) наблюдалось для $j = 4$ (обрабатывающая промышленность), а наибольшее убывание (1,1% в год) — для $j = 14$. Максимальное значение показателя CO_pj_14z отмечалось для $j = 4$ (обрабатывающая промышленность) и составляло в 2008 г. 37%.

— Тренд показателя CO_pj_15z (Доля расходов предприятий отрасли 15 (прочие коммунальные, социальные и персональные услуги), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положительный наклон для отраслей $j = 4, 8, 10, 5, 7, 2, 16$ и отрицательный наклон для отраслей $j = 6, 1, 3, 13, 12, 9, 14, 15, 11$. Отрасль 15 покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики, не производила. Наибольшее возрастание тренда (0,22% в год) наблюдалось для $j = 4$ (обрабатывающая промышленность), а наибольшее убыва-

ние (0,83% в год) — для $j = 11$ (операции с недвижимым имуществом, аренда и услуги предприятиям). Максимальное значение показателя CO_pj_15z отмечалось для $j = 4$ (обрабатывающая промышленность) и составляло в 2008 г. 21%.

— Тренд показателя CO_pj_16z (Доля расходов предприятий отрасли 16 (услуги по ведению домашнего хозяйства), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью j) имел положительный наклон для отраслей $j = 11, 4$ и отрицательный наклон для отраслей $j = 1, 14, 16, 8, 15, 6, 9, 13$. Отрасль 16 покупку промежуточных товаров, производимых отраслями 2, 3, 7, 10, 12 экономики, не производила. Наибольшее возрастание тренда (1,2% в год) наблюдалось для $j = 11$ (операции с недвижимым имуществом, аренда и услуги предприятиям), а наибольшее убывание (0,41% в год) — для $j = 13$ (образование). В 2008 г. 16-я отрасль промежуточные продукты не покупала.

На рис. 4.1.2 для примера представлена иллюстрация исходных данных для ретроспективного макроанализа на уровне отраслей экономики в рамках экзогенной переменной «Доля расходов

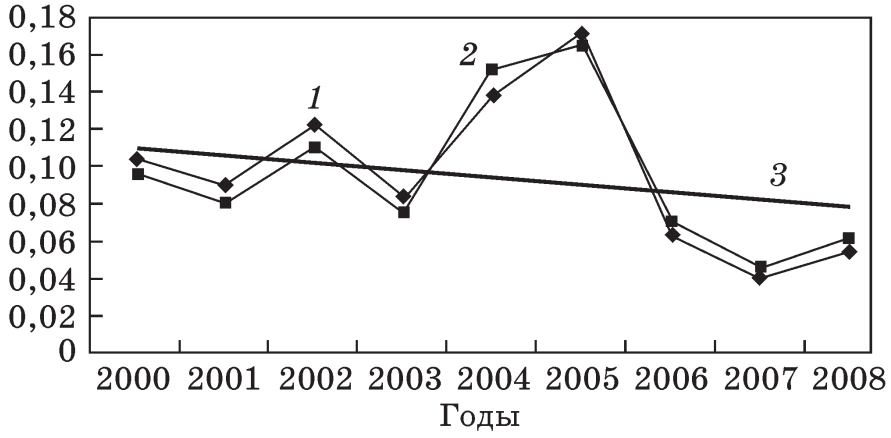

Рис. 4.1.2. Наблюдаемые (*1*), оцененные (*2*) значения и линейный тренд (*3*) экзогенной переменной «Доля расходов предприятий отрасли 1, идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью 4»

предприятий отрасли 1 (сельское хозяйство, охота и лесоводство), идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью 4 (обрабатывающая промышленность)». Отрицательный наклон линейного тренда на рис. 4.1.2 свидетельствует об уменьшении (в среднем) указанной доли расходов в рассматриваемом промежутке времени.

Также проведен ретроспективный анализ эндогенных переменных на уровне отраслей экономики. Графическая иллюстрация динамики и темпа (и их трендов) одного из эндогенных показа-

телей отраслей (в разрезе показателя «Валовая добавленная стоимость в ценах 2000 г.» отрасли «Обрабатывающая промышленность») для макроанализа приведены на рис. 4.1.3, 4.1.4.

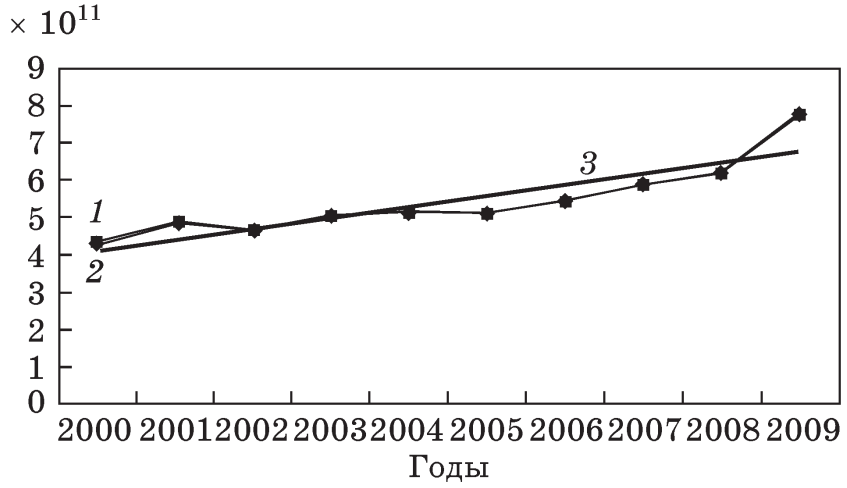

Рис. 4.1.3. Наблюдаемые (*1*), расчетные (*2*) значения и линейный тренд (*3*) эндогенной переменной «Валовая добавленная стоимость отрасли 4 (в ценах 2000 г.)»

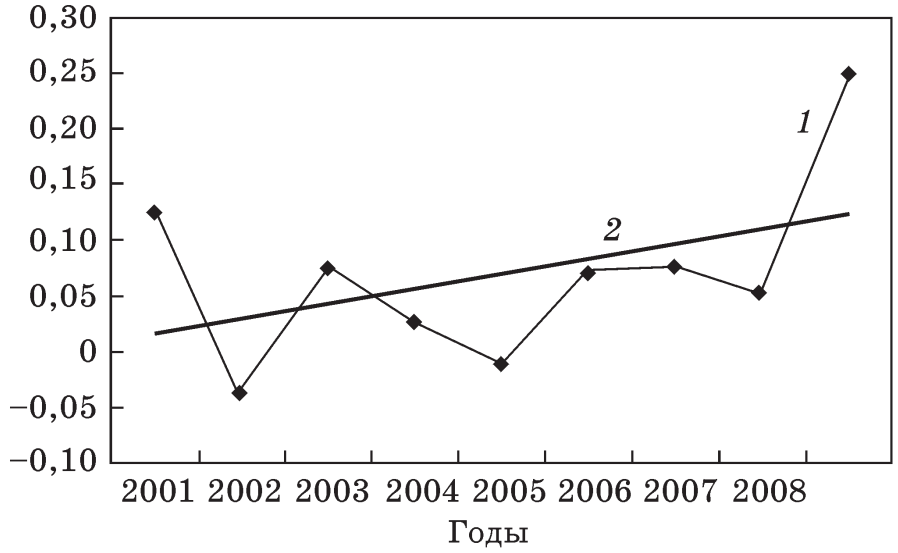

Рис. 4.1.4. Темп (*1*) и линейный тренд (*2*) переменной «Валовая добавленная стоимость отрасли 4 (в постоянных ценах)»

Заметим, что расчетные и наблюдаемые значения переменной на рис. 4.1.2 практически совпадают между собой, что объясняется качеством проведенной параметрической идентификации исследуемой модели. Анализ данных, представленных на рис. 4.1.3 и 4.1.4 (положительный наклон линейных трендов как самой переменной, так и ее темпа), свидетельствует об ускоренном росте указанного показателя в промежутке 2000–2009 гг.

Ретроспективный сравнительный анализ. В рамках ретроспективного сравнительного анализа показателей отраслей экономики для каждого года с 2000 по 2008 было также проведено ранжирование отраслей по следующим показателям:

— валовая добавленная стоимость отрасли (в ценах 2000 г.);

— основные средства отрасли (в ценах 2000 г.);

— фондоотдача отрасли;

— спрос отрасли на рабочую силу;

— производительность труда в отрасли.

Анализ результатов ранжирования по указанным показателям позволяет сделать, например, выводы о том, что:

— наибольшая среди отраслей экономики ВДС наблюдалась в отрасли 4 (обрабатывающая промышленность) в 2000–2002 гг., в отрасли 11 (операции с недвижимым имуществом, аренда и услуги предприятиям) в 2003–2004 гг. и в отрасли 3 (горнодобывающая промышленность) в 2005–2008 гг.;

— наибольшие основные средства за все время наблюдения имелись в отрасли 3 (горнодобывающая промышленность);

— наибольшая фондоотдача в 2000–2005 гг. наблюдалась в отрасли 7 (торговля, ремонт автомобилей и изделий домашнего пользования), в 2006–2008 гг. — в отрасли 10 (финансовая деятельность);

— наибольшее количество занятых (около 30% от общего числа занятых) за все время наблюдения отмечалось в отрасли 1 (сельское хозяйство, охота и лесоводство);

— при этом в отрасли 1 в 2000–2008 гг. наблюдалась наименьшая производительность труда. Наибольшая производительность труда практически во всем исследуемом периоде времени и с увеличивающемся отрывом от других отраслей отмечалась в отрасли 3 (горнодобывающая промышленность).

Результаты ранжирования в рамках отмеченных показателей в разрезе 2008 г. отраслей экономики Республики Казахстан для иллюстрации представлены в табл. 4.1.4–4.1.8.

Таблица 4.1.4. **Валовая добавленная стоимость отрасли**

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя ВДС (в тенге, в ценах 2000 г.) для 2008 г.
1	3	$9{,}92923 \cdot 10^{11}$
2	11	$7{,}94163 \cdot 10^{11}$
3	7	$6{,}49315 \cdot 10^{11}$

Таблица 4.1.4 (окончание)

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя ВДС (в тенге, в ценах 2000 г.) для 2008 г.
4	4	$6{,}24578 \cdot 10^{11}$
5	9	$5{,}83432 \cdot 10^{11}$
6	6	$4{,}29188 \cdot 10^{11}$
7	10	$2{,}79863 \cdot 10^{11}$
8	1	$2{,}78125 \cdot 10^{11}$
9	13	$1{,}49005 \cdot 10^{11}$
10	12	$9{,}00073 \cdot 10^{10}$
11	5	$8{,}88712 \cdot 10^{10}$
12	15	$8{,}88331 \cdot 10^{10}$
13	14	$7{,}84887 \cdot 10^{10}$
14	8	$4{,}36384 \cdot 10^{10}$
15	16	$4{,}40276 \cdot 10^{9}$
16	2	$4{,}14457 \cdot 10^{9}$

Таблица 4.1.5. **Основные средства отрасли**

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя «Основные средства отрасли» (в тенге, в ценах 2000 г.) для 2008 г.
1	3	$1{,}55078 \cdot 10^{12}$
2	11	$1{,}15043 \cdot 10^{12}$
3	4	$6{,}43257 \cdot 10^{11}$
4	9	$6{,}41518 \cdot 10^{11}$
5	12	$3{,}21504 \cdot 10^{11}$
6	6	$2{,}94698 \cdot 10^{11}$
7	5	$2{,}75815 \cdot 10^{11}$
8	1	$2{,}33045 \cdot 10^{11}$
9	7	$2{,}21753 \cdot 10^{11}$
10	13	$9{,}67223 \cdot 10^{10}$
11	14	$8{,}86825 \cdot 10^{10}$
12	10	$7{,}66333 \cdot 10^{10}$

Таблица 4.1.5 (окончание)

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя «Основные средства отрасли» (в тенге, в ценах 2000 г.) для 2008 г.
13	15	$5{,}98872 \cdot 10^{10}$
14	8	$3{,}36888 \cdot 10^{10}$
15	2	$1{,}44711 \cdot 10^{9}$
16	16	0

Таблица 4.1.6. **Фондоотдача в отрасли**

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя «Фондоотдача в отрасли» для 2008 г.
1	10	3,65197
2	7	2,928106
3	2	2,864025
4	13	1,540538
5	15	1,48334
6	6	1,456368
7	8	1,295338
8	1	1,193439
9	4	0,970963
10	9	0,909455
11	14	0,885053
12	11	0,690321
13	3	0,640272
14	5	0,322213
15	12	0,279957
16	16	0

Таблица 4.1.7. **Спрос отрасли на рабочую силу**

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя «Спрос отрасли на рабочую силу» для 2008 г.
1	1	2 349 730
2	7	1 150 307

Таблица 4.1.7 (окончание)

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя «Спрос отрасли на рабочую силу» для 2008 г.
3	13	754 299
4	9	588 847
5	4	572 886
6	6	548 895
7	11	378 129
8	12	352 489
9	14	347 329
10	15	205 425
11	3	200 283
12	5	164 816
13	8	103 048
14	10	96 165
15	16	24 360
16	2	19 971

Таблица 4.1.8. **Производительность труда в отрасли**

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя «Производительность труда в отрасли» (в ценах 2000 г.) для 2008 г.
1	3	4 957 609
2	10	2 910 234
3	11	2 100 238
4	4	1 090 231
5	9	990 804
6	6	781 913,2
7	7	564 471
8	5	539 213,9
9	15	432 435
10	8	423 477,3
11	12	255 348
12	14	225 978,1

Таблица 4.1.8 (окончание)

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя «Производительность труда в отрасли» (в ценах 2000 г.) для 2008 г.
13	2	207 533,5
14	13	197 540,5
15	16	180 739
16	1	118 364,8

Результаты ретроспективного анализа основных интегральных показателей экономики страны, показателей правительства, домашних хозяйств. Также в работе приведены результаты ретроспективного анализа указанных показателей за 2000–2009 гг.

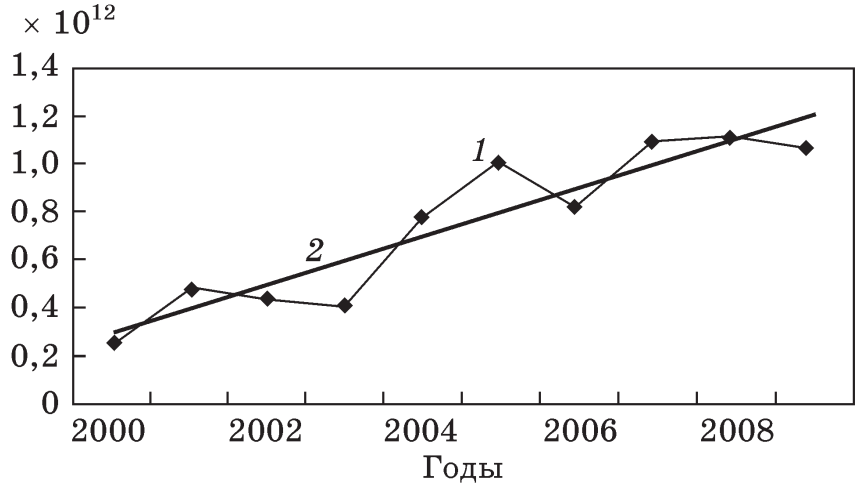

Рис. 4.1.5. Значение (*1*) и линейный тренд (*2*) эндогенной переменной «Выпуск инвестиционной продукции»

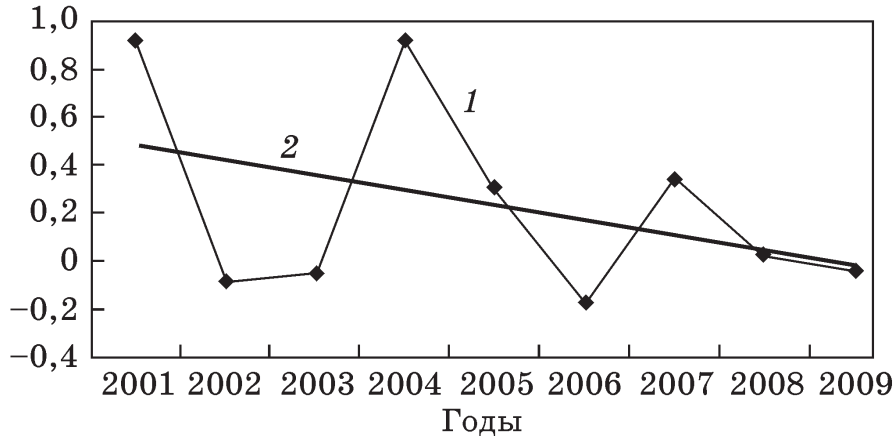

Рис. 4.1.6. Значение темпа (*1*) и линейный тренд (*2*) эндогенной переменной «Выпуск инвестиционной продукции»

На рис. 4.1.5, 4.1.6 представлен пример исходных данных для ретроспективного макроанализа показателей национальной экономики в разрезе эндогенной переменной «Выпуск инвестиционной продукции».

Анализ представленных на рис. 4.1.5 и 4.1.6 трендов позволяет сделать вывод о том, что в 2000–2009 гг. в среднем наблюдался рост реального выпуска инвестиционной продукции в стране с замедлением (в среднем) этого роста.

Результаты перспективного анализа эндогенных переменных на уровне отраслей экономики. Перспективный анализ эндогенных показателей эволюции экономики Республики Казахстан проводился на основе базового просчета модели секторов экономики до 2015 г. при использовании экстраполяции наблюдаемых значений экзогенных переменнных модели до 2015 г.

Перспективный анализ эндогенных показателей за период 2000–2015 гг. по отраслям показывает, что:

— Тренды показателя «Бюджет предприятий отрасли (в ценах 2000 г.)» для всех отраслей возрастают, причем наибольшее возрастание ($7{,}37 \cdot 10^{10}$ тенге/год) наблюдалось в отрасли 10, а наименьшее ($3{,}3 \cdot 10^{8}$ тенге/год) — в отрасли 14. Тренды темпов рассматриваемого показателя имеют отрицательные наклоны для почти всех отраслей, за исключением 12 и 4. Это свидетельствует о том, что во всех отраслях, кроме 12 и 4, ожидается падение темпов роста бюджетов (максимальное падение 3% в год по тренду наблюдалось в отрасли 14).

— Тренды показателя «Валовая добавленная стоимость отрасли (в ценах 2000 г.)» для почти всех отраслей (кроме отраслей 12 и 14) возрастают, причем наибольшее возрастание ($7{,}40 \cdot 10^{10}$ тенге/год) наблюдалось в отрасли 4, а наибольшее падение ($2{,}2 \times \times 10^{9}$ тенге/год) — в отрасли 14. Тренды темпов рассматриваемого показателя имеют отрицательные наклоны для почти всех отраслей, за исключением отраслей 5, 15, 13, 2, 12, 14. Это свидетельствует о том, что во всех отраслях, кроме 5, 15, 13, 2, 12, 14, ожидается падение темпов роста ВДС (максимальное падение 18% в год по тренду наблюдалось в отрасли 16, а максимальный рост 1,6% в год — в отрасли 14).

— Тренды показателя «Выпуск отрасли (в ценах 2000 г.)» для почти всех отраслей (кроме отраслей 16, 2, 3, 14, 11, 9) возрастают, причем наибольшее возрастание ($1{,}6 \cdot 10^{11}$ тенге/год) наблюдалось в отрасли 6, а наибольшее падение ($3{,}4 \cdot 10^{10}$ тенге/год) — в от-

расли 9. Тренды темпов рассматриваемого показателя имеют отрицательные наклоны для почти всех отраслей, за исключением отраслей 4, 5, 12, 15. Это свидетельствует о том, что во всех отраслях, кроме 4, 5, 12, 15, ожидается падение темпов роста «Выпуска отрасли» (максимальное падение 19% в год по тренду наблюдалось в отрасли 16, а максимальный рост 1,1% в год — в отрасли 4).

— Тренды показателя «Основные средства отрасли (в ценах 2000 г.)» для почти всех отраслей (кроме отраслей 2, 8, 14, 1, 5) возрастают, причем наибольшее возрастание ($5{,}5 \cdot 10^{10}$ тенге/год) наблюдалось в отрасли 6, а наибольшее падение ($6{,}2 \cdot 10^{9}$ тенге/год) — в отрасли 9. Тренды темпов рассматриваемого показателя имеют отрицательные наклоны для почти всех отраслей, за исключением отраслей 10, 2, 8, 14, 1, 5. Это свидетельствует о том, что во всех отраслях, кроме 10, 2, 8, 14, 1, 5, ожидается падение темпов роста «Основных средств» (максимальное падение 1% в год по тренду наблюдалось в отрасли 12, а максимальный рост 0,58% в год — в отрасли 10).

— Тренды показателя «Предложение инвестиционной продукции отрасли (в ценах 2000 г.)» для отраслей 6, 4, 7, 1, 9, 15, 2 возрастают, причем наибольшее возрастание ($1{,}1 \cdot 10^{11}$ тенге/год) наблюдалось в отрасли 6, а наибольшее падение ($8{,}8 \cdot 10^{8}$ тенге/год) — в отрасли 11. Тренды темпов рассматриваемого показателя имеют отрицательные наклоны для почти всех отраслей или близкие к нулю наклоны для всех упомянутых выше отраслей. Это свидетельствует о том, что во всех этих отраслях, кроме 11, ожидается падение темпов роста предложения инвестиционной продукции. В неуказанных в этом абзаце отраслях инвестиционная продукция не производится.

— Тренды показателя «Предложение конечной продукции отрасли (в ценах 2000 г.)» для почти всех отраслей (кроме отраслей 11, 2, 14, 9) возрастают, причем наибольшее возрастание ($3{,}1 \cdot 10^{10}$ тенге/год) наблюдалось в отрасли 4, а наибольшее падение ($6{,}9 \cdot 10^{9}$ тенге/год) — в отрасли 9. Тренды темпов рассматриваемого показателя имеют отрицательные наклоны для почти всех отраслей, за исключением отраслей 15, 7. Это свидетельствует о том, что во всех отраслях, кроме 15, 7, ожидается падение темпов роста предложения конечной продукции (максимальное падение 15% в год по тренду наблюдалось в отрасли 12, а максимальный рост 0,28% в год — в отрасли 15).

— Тренды показателя «Предложение промежуточной продукции отрасли (в ценах 2000 г.)» для почти всех отраслей (кроме отраслей 16, 2, 14, 3, 9) возрастают, причем наибольшее возрастание

($6{,}6 \cdot 10^{10}$ тенге/год) наблюдалось в отрасли 4, а наибольшее падение ($1{,}0 \cdot 10^{10}$ тенге/год) — в отрасли 9. Тренды темпов рассматриваемого показателя имеют отрицательные наклоны для почти всех отраслей, за исключением отраслей 5, 15. Это свидетельствует о том, что во всех отраслях, кроме 5, 15, ожидается падение темпов роста предложения промежуточной продукции (максимальное падение со значительными скачками наблюдалось в отрасли 16, а максимальный рост 2,9% в год — в отрасли 5).

— Тренды показателя «Предложение экспортной продукции отрасли (в ценах 2000 г.)» для почти всех отраслей (кроме отраслей 2, 13, 11, 1, 9) возрастают, причем наибольшее возрастание ($3{,}0 \cdot 10^{10}$ тенге/год) наблюдалось в отрасли 4, а наибольшее падение ($1{,}6 \cdot 10^{9}$ тенге/год) — в отрасли 9. Тренды темпов рассматриваемого показателя имеют отрицательные наклоны для почти всех отраслей, за исключением отраслей 12, 8, 13, 1. Это свидетельствует о том, что во всех отраслях, кроме 12, 8, 13, 1, ожидается падение темпов роста предложения экспортной продукции (максимальное падение 22% в год по тренду наблюдалось в отрасли 15, а максимальный рост 3,3% в год — в отрасли 13). В отраслях 14, 16 экспортная продукция не производится.

— Тренды показателя «Прибыль отрасли (в ценах 2000 г.)» для почти всех отраслей (кроме отраслей 16, 14, 12, 13) возрастают, причем наибольшее возрастание ($6{,}6 \cdot 10^{10}$ тенге/год) наблюдалось в отрасли 4, а наибольшее падение ($9{,}7 \cdot 10^{9}$ тенге/год) — в отрасли 13. Тренды темпов рассматриваемого показателя имеют отрицательные наклоны для почти всех отраслей, за исключением отраслей 4, 5, 1, 15, 2, 14. Это свидетельствует о том, что во всех отраслях, кроме 4, 5, 1, 15, 2, 14, ожидается падение темпов роста прибыли отрасли (максимальное падение 15% в год по тренду наблюдалось в отрасли 12, а максимальный рост 4,0% в год — в отрасли 15).

На рис. 4.1.7, 4.1.8 в качестве примера представлена иллюстрация исходных данных для ретроспективного макроанализа на уровне отраслей экономики на базе эндогенных переменных и в разрезе переменной (ее темпа и их трендов) «Валовая добавленная стоимость (в ценах 2000 г.) экономического агента 4 (обрабатывающая промышленность)».

Аализ представленной на рис. 4.1.7, 4.1.8 информации и ее сравнение с рис. 4.1.2, 4.1.3 показывают, что в перспективе до 2015 г. ожидается рост (в среднем) ВДС отрасли 4 с возрастанием (в среднем) темпов этого роста. То есть тенденции, отмеченные ранее на рис. 4.1.2, 4.1.3 сохраняются (согласно базовому прогнозу) и

на 2010–2015 гг. Однако угловой коэффициент тренда на рис. 4.1.7 несколько выше, чем соответствующий угловой коэффициент на рис. 4.1.2, что свидетельствует о возрастании (в среднем) темпов

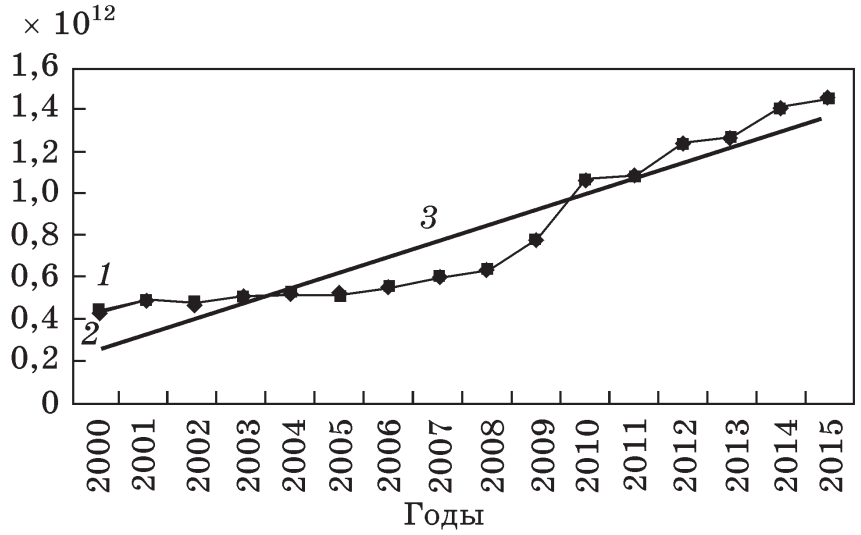

Рис. 4.1.7. Наблюдаемые (*1*), расчетные (*2*) значения и линейный тренд (*3*) переменной «Валовая добавленная стоимость отрасли 4 (в ценах 2000 г.)»

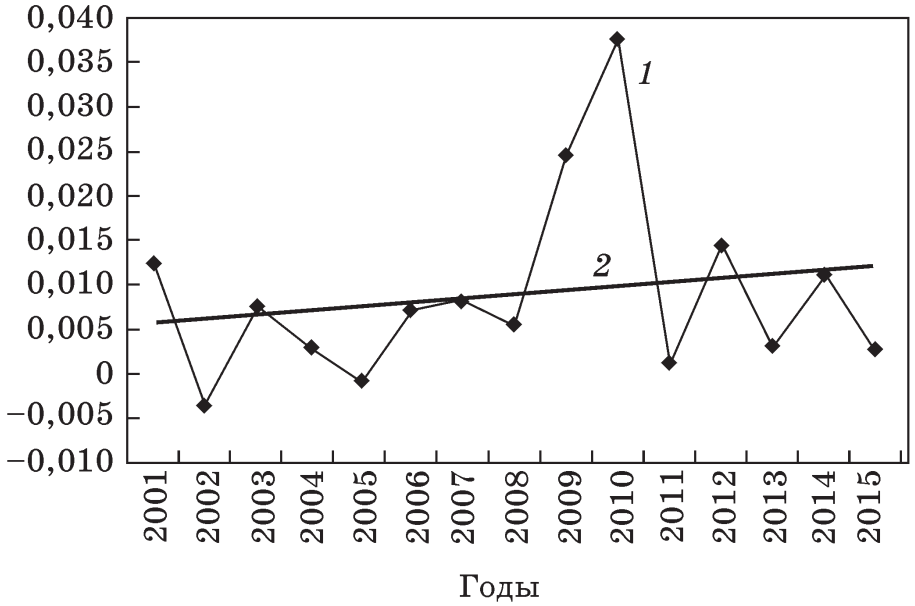

Рис. 4.1.8. Темп переменной «Валовая добавленная стоимость отрасли 4 (в постоянных ценах)» (*1*) и его линейный тренд (*2*)

этого роста в перспективном периоде. Об этом же свидетельствует и бóльшие (в среднем) значения тренда на рис. 4.1.8 по сравнению с его значениями для ретроспективного периода (рис. 4.1.3).

В рамках перспективного анализа показателей отраслей экономики на базе исследуемой модели также были получены расчетные

прогнозные значения (и их линейные тренды) показателей спроса отрасли i на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.) $(i, j = 1, \ldots, 16)$, для каждой из 16 отраслей экономики.

Перспективный анализ указанных показателей отраслей за 2000–2015 гг. по отраслям показывает, что:

— Тренд показателя «Спрос отрасли 1 (сельское хозяйство, охота и лесоводство) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для отраслей $j = 4$, 5, 16, 10, 7, 12, 8, 16 и отрицательный наклон для отраслей $j = 13$, 2, 15, 14, 3, 11, 9. Отрасль 1 покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики, не производит. Наибольшее возрастание тренда ($2{,}3 \cdot 10^9$ тенге/год) наблюдалось для $j = 4$, а наибольшее убывание ($2{,}3 \cdot 10^9$ тенге/год) — для $j = 9$. Тренд темпа указанного показателя возрастает только для товаров 5 отрасли и убывает для остальных отраслей.

— Тренд показателя «Спрос отрасли 2 (рыболовство, рыбоводство) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для отраслей $j = 4$, 5, 9, 10, 11, 12, 6, 3, 7, 8 и отрицательный наклон для отраслей $j = 15$, 14, 1, 2. Отрасль 2 не производит покупку промежуточных товаров, производимых отраслями экономики 13 и 16. Наибольшее возрастание тренда ($5{,}1 \cdot 10^7$ тенге/год) наблюдалось для $j = 4$, а наибольшее убывание ($7{,}7 \cdot 10^7$ тенге/год) — для $j = 2$. Тренд темпа указанного показателя возрастает только для товаров отраслей 12, 6, 8 и убывает для остальных отраслей.

— Тренд показателя «Спрос отрасли 3 (горнодобывающая промышленность) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для отраслей $j = 5$, 4, 10, 7, 6, 8, 12, 15, 11 и отрицательный наклон для отраслей $j = 2$, 1, 16, 13, 14, 3, 9. Наибольшее возрастание тренда ($4{,}8 \cdot 10^9$ тенге/год) наблюдалось для $j = 5$, а наибольшее убывание ($3{,}1 \cdot 10^9$ тенге/год) — для $j = 9$. Тренд темпа указанного показателя возрастает только для товаров отраслей 3, 16 и убывает для остальных отраслей.

— Тренд показателя «Спрос отрасли 4 (обрабатывающая промышленность) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для отраслей $j = 4$, 5, 10, 6, 11, 8, 12 и отрицательный наклон для отраслей $j = 16$, 15, 14, 13, 2, 1, 3, 7, 9. Наибольшее возрастание тренда ($1{,}5 \cdot 10^{10}$ тенге/год) наблюдалось для $j = 4$,

а наибольшее убывание ($2{,}3 \cdot 10^9$ тенге/год) — для $j = 9$. Тренд темпа указанного показателя возрастает только для товаров отраслей 4, 5, 6, 12, 16 и убывает для остальных отраслей.

— Тренд показателя «Спрос отрасли 5 (производство и распределение электроэнергии, газа и воды) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для отраслей $j = 5$, 4, 6, 10, 3, 7, 11, 12, 15, 8, 1, 2 и отрицательный наклон для отраслей $j = 16$, 9, 13, 14. Наибольшее возрастание тренда ($1{,}2 \cdot 10^{10}$ тенге/год) наблюдалось для $j = 5$, а наибольшее убывание ($1{,}3 \cdot 10^7$ тенге/год) — для $j = 14$. Тренд темпа указанного показателя возрастает только для товаров отраслей 7, 2, 16 и убывает для остальных отраслей.

— Тренд показателя «Спрос отрасли 6 (строительство) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для отраслей $j = 4$, 6, 5, 7, 10, 11, 8, 12, 1, 15, 13 и отрицательный наклон для отраслей $j = 2$, 14, 3, 9. Отрасль 6 не производит покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики. Наибольшее возрастание тренда ($1{,}0 \cdot 10^{10}$ тенге/год) наблюдалось для $j = 4$, а наибольшее убывание ($3{,}7 \cdot 10^8$ тенге/год) — для $j = 9$. Тренд темпа указанного показателя убывает для всех 15 отраслей.

— Тренд показателя «Спрос отрасли 7 (торговля, ремонт автомобилей и изделий домашнего пользования) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для отраслей $j = 10$, 4, 5, 11, 8, 7, 12 и отрицательный наклон для отраслей $j = 13$, 2, 14, 15, 1, 3, 9. Отрасль 7 не производит покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики. Наибольшее возрастание тренда ($3{,}8 \cdot 10^9$ тенге/год) наблюдалось для $j = 10$, а наибольшее убывание ($1{,}9 \cdot 10^9$ тенге/год) — для $j = 9$. Тренд темпа указанного показателя возрастает только для товаров отраслей 4, 5, 6, 15, 1 и убывает для остальных отраслей.

— Тренд показателя «Спрос отрасли 8 (гостиницы и рестораны) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для отраслей $j = 4$, 5, 10, 1, 6, 7, 8, 9, 15, 11, 12, 3 и отрицательный наклон для отраслей $j = 14$, 13, 2. Отрасль 8 не производит покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики. Наибольшее возрастание тренда ($1{,}0 \cdot 10^9$ тенге/год) наблюдалось для $j = 4$, а наибольшее убывание ($1{,}2 \cdot 10^7$ тенге/год) — для $j = 2$. Тренд темпа указанного показателя возрастает только

для товаров отраслей 4, 8, 15, 12 и убывает для остальных отраслей.

— Тренд показателя «Спрос отрасли 9 (транспорт и связь) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для отраслей $j = 4, 5, 10, 6, 8, 12, 11$ и отрицательный наклон для отраслей $j = 16, 2, 15, 14, 13, 1, 7, 3, 9$. Наибольшее возрастание тренда ($4{,}5 \cdot 10^9$ тенге/год) наблюдалось для $j = 4$, а наибольшее убывание ($1{,}2 \cdot 10^9$ тенге/год) — для $j = 9$. Тренд темпа указанного показателя возрастает только для товаров отраслей 5, 16, 15, 7 и убывает для остальных отраслей.

— Тренд показателя «Спрос отрасли 10 (финансовая деятельность) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для всех отраслей, за исключением 2 и 4, имеющих отрицательный наклон. Наибольшее возрастание тренда ($1{,}1 \cdot 10^{10}$ тенге/год) наблюдалось для $j = 10$, а наибольшее убывание ($4{,}8 \cdot 10^5$ тенге/год) — для $j = 14$. Тренд темпа указанного показателя возрастает только для товаров отраслей 16, 2 и убывает для остальных отраслей.

— Тренд показателя «Спрос отрасли 11 (операции с недвижимым имуществом, аренда и услуги предприятиям) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для отраслей $j = 4, 10, 5, 6, 7, 8, 12, 9, 15, 13$ и отрицательный наклон для отраслей $j = 18, 2, 11, 1, 14, 3$. Наибольшее возрастание тренда ($5{,}3 \cdot 10^9$ тенге/год) наблюдалось для $j = 4$, а наибольшее убывание ($3{,}0 \cdot 10^8$ тенге/год) — для $j = 3$. Тренд темпа указанного показателя возрастает только для товаров 15-й отрасли и убывает для остальных отраслей.

— Тренд показателя «Спрос отрасли 12 (государственное управление) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для отраслей $j = 5, 4, 10, 6, 8, 12, 15, 1, 11, 13$ и отрицательный наклон для отраслей $j = 2, 14, 3, 7, 9$. Отрасль 12 не производит покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики. Наибольшее возрастание тренда ($3{,}2 \cdot 10^9$ тенге/год) наблюдалось для $j = 5$, а наибольшее убывание ($2{,}8 \cdot 10^8$ тенге/год) — для $j = 9$. Тренд темпа указанного показателя возрастает только для товаров отраслей 6, 12, 7 и убывает для остальных отраслей.

— Тренд показателя «Спрос отрасли 13 (образование) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для отраслей $j = 5, 4,$

6, 15, 10, 13, 12, 8, 1 и отрицательный наклон для отраслей $j = 2$, 3, 9, 7, 14, 11. Отрасль 13 не производит покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики. Наибольшее возрастание тренда ($4{,}2 \cdot 10^8$ тенге/год) наблюдалось для $j = 5$, а наибольшее убывание ($2{,}8 \cdot 10^8$ тенге/год) — для $j = 11$. Тренд темпа указанного показателя возрастает только для товаров 13-й отрасли и убывает для остальных отраслей.

— Тренд показателя «Спрос отрасли 14 (здравоохранение и социальные услуги) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для отраслей $j = 4$, 5, 6, 7, 10, 15, 8, 12, 13 и отрицательный наклон для отраслей $j = 2$, 3, 11, 1, 14, 9. Отрасль 14 не производит покупку промежуточных товаров, производимых 16-й отраслью экономики. Наибольшее возрастание тренда ($5{,}1 \cdot 10^9$ тенге/год) наблюдалось для $j = 4$, а наибольшее убывание ($7{,}0 \cdot 10^8$ тенге/год) — для $j = 5$. Тренд темпа указанного показателя возрастает только для товаров 13-й отрасли и убывает для остальных отраслей.

— Тренд показателя «Спрос отрасли 15 (прочие коммунальные, социальные и персональные услуги) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для отраслей $j = 4$, 5, 10, 15, 7, 6, 8, 12, 11, 13, 1 и отрицательный наклон для отраслей $j = 16$, 2, 3, 9, 14. Наибольшее возрастание тренда ($2{,}8 \cdot 10^9$ тенге/год) наблюдалось для $j = 4$, а наибольшее убывание ($6{,}3 \cdot 10^7$ тенге/год) — для $j = 14$. Тренд темпа указанного показателя возрастает только для товаров отраслей 4, 16 и убывает для остальных отраслей.

— Тренд показателя «Спрос отрасли 16 (услуги по ведению домашнего хозяйства) на промежуточную продукцию, производимую отраслью j (в постоянных ценах 2000 г.)» имел положительный наклон для отраслей $j = 6$, 4, 8 и отрицательный наклон для отраслей $j = 1$, 16, 14, 15, 9, 11, 13. Отрасль 16 не производит покупку промежуточных товаров, производимых отраслями экономики 10, 5, 12, 7, 2. Наибольшее возрастание тренда ($8{,}8 \cdot 10^6$ тенге/год) наблюдалось для $j = 6$, а наибольшее убывание ($1{,}0 \cdot 10^7$ тенге/год) — для $j = 13$. Тренд темпа указанного показателя возрастает только для товаров отраслей 4, 16, 15 и убывает для остальных отраслей.

На рис. 4.1.9 и 4.1.10 в качестве примера представлена иллюстрация исходных данных для перспективного макроанализа динамики и темпа (и их трендов) отраслей экономики на примере эндогенной переменной «Спрос отрасли 1 (сельское хозяйство, охота

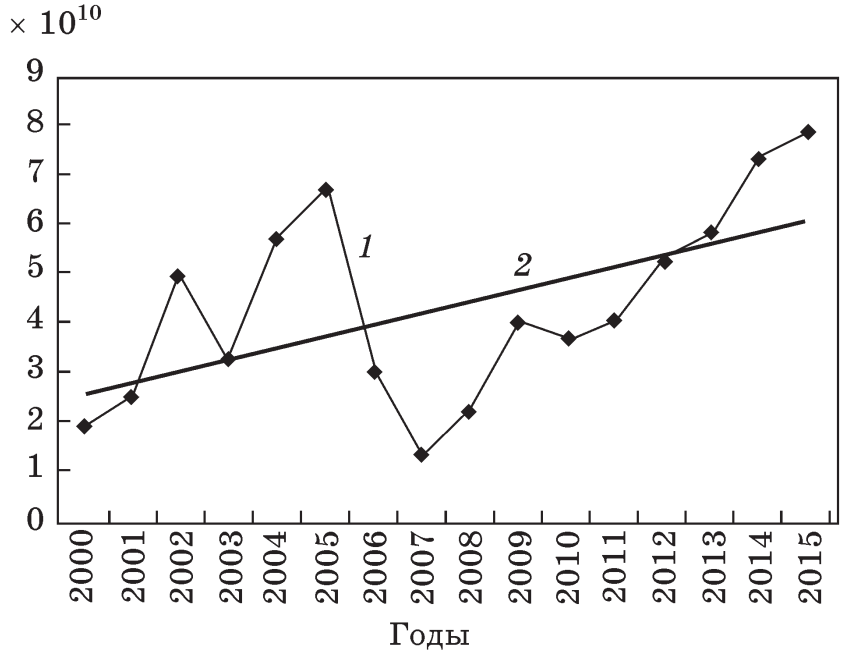

Рис. 4.1.9. «Спрос отрасли 1 на промежуточную продукцию, производимую отраслью 4 (в ценах 2000 г.)»: *1* — расчетные значения переменной; *2* — ее линейный тренд

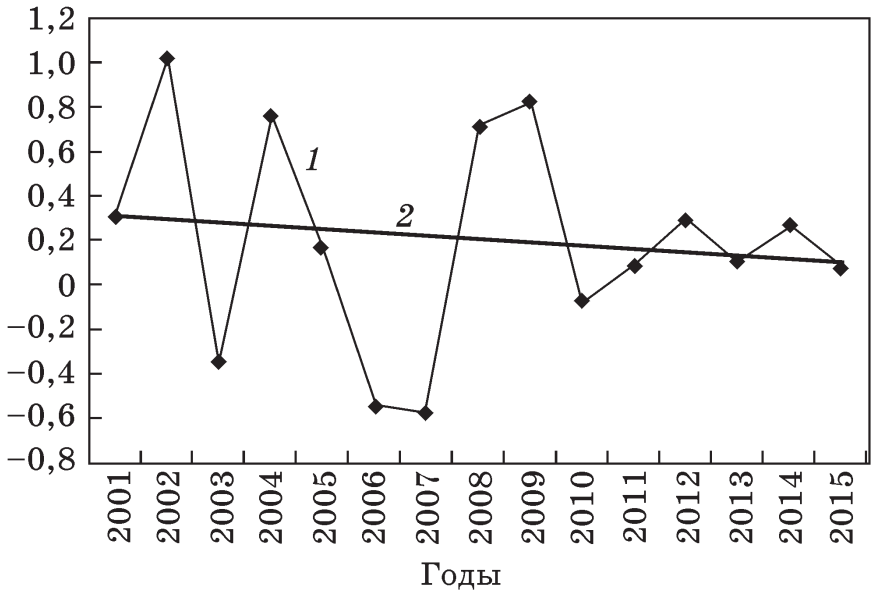

Рис. 4.1.10. Темп (*1*) и линейный тренд (*2*) переменной «Спрос отрасли 1 на промежуточную продукцию, производимую отраслью 4 (в ценах 2000 г.)»

и лесоводство) на промежуточную продукцию, производимую отраслью 4 (обрабатывающая промышленность) (в ценах 2000 г.)».

Положительный наклон линейного тренда показателя (см. рис. 4.1.9) свидетельствует об увеличении (в среднем) указанного спроса отрасли в рассматриваемом промежутке времени. В то же время отрицательный наклон тренда темпа этого показателя сви-

детельствует об уменьшении (в среднем в течение периода 2000–2015 гг.) темпов роста показателя.

Перспективный сравнительный анализ показателей отраслей экономики. В рамках перспективного сравнительного анализа показателей отраслей экономики для каждого года с 2009 по 2015 было проведено ранжирование отраслей по тем же показателям, что и в случае ретроспективного макроанализа:

— валовая добавленная стоимость отрасли (в ценах 2000 г.);

— основные средства отрасли (в ценах 2000 г.);

— фондоотдача отрасли;

— спрос отрасли на рабочую силу;

— производительность труда в отрасли.

Анализ результатов ранжирования по указанным показателям позволяет сделать, например, выводы о том, что:

— наибольшая среди отраслей экономики реальная ВДС в 2010–2015 гг. ожидается в отрасли 4 (обрабатывающая промышленность). При этом прирост ВДС в этой отрасли в 2015 г. по сравнению с 2009 г. составит около 86%;

— наибольшие основные средства среди отраслей за весь период ретро- и перспективного анализа приходятся на отрасль 3 (горнодобывающая промышленность). Прирост основных средств этой отрасли составит в 2015 г. 9,2% по сранению с 2009 г.;

— наибольшая фондоотдача в 2009–2015 гг. ожидается в отрасли 2 (рыболовство, рыбоводство), в 2015 г. она более чем в 60 раз будет превосходить фондоотдачу отрасли 12 (государственное управление);

— наибольшее количество занятых в 2000–2015 гг. ожидается в отрасли 1 (сельское хозяйство, охота и лесоводство), в 2015 г. спрос этой отрасли на рабочую силу составит 2 581 607 человек, наименьшее число занятых с 2012 г. ожидается в отрасли 16 (услуги по ведению домашнего хозяйства), в 2015 г. — 24 361;

— наибольшая производительность труда в 2010–2015 гг. ожидается в отрасли 10 (финансовая деятельность). В 2015 г. производительность в этой отрасли в 23 раза будет превышать производительность труда в отрасли 14 (здравоохранение и социальные услуги).

Результаты ранжирования в рамках этих прогнозных показателей для указанных выше показателей отраслей экономики Республики Казахстан для 2015 г. в качестве примера представлены в табл. 4.1.9–4.1.13.

Таблица 4.1.9. **Валовая добавленная стоимость отрасли**

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя ВДС (в тенге, в ценах 2000 г.) для 2015 г.
1	4	$1{,}45122 \cdot 10^{12}$
2	6	$6{,}65949 \cdot 10^{11}$
3	3	$6{,}57340 \cdot 10^{11}$
4	7	$5{,}87018 \cdot 10^{11}$
5	11	$5{,}44444 \cdot 10^{11}$
6	10	$4{,}38485 \cdot 10^{11}$
7	1	$4{,}25092 \cdot 10^{11}$
8	9	$4{,}12240 \cdot 10^{11}$
9	5	$3{,}05231 \cdot 10^{11}$
10	15	$2{,}09079 \cdot 10^{11}$
11	13	$1{,}99452 \cdot 10^{11}$
12	8	$9{,}18216 \cdot 10^{10}$
13	12	$7{,}56724 \cdot 10^{10}$
14	14	$5{,}51708 \cdot 10^{10}$
15	2	$7{,}43652 \cdot 10^{9}$
16	16	$5{,}15982 \cdot 10^{9}$

Таблица 4.1.10. **Основные средства отрасли**

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя «Основные средства отрасли» (в тенге, в ценах 2000 г.) для 2015 г.
1	3	$1{,}72577 \cdot 10^{12}$
2	11	$1{,}33253 \cdot 10^{12}$
3	9	$7{,}32356 \cdot 10^{11}$
4	12	$7{,}25682 \cdot 10^{11}$
5	4	$6{,}6799 \cdot 10^{11}$
6	6	$3{,}87501 \cdot 10^{11}$
7	5	$2{,}88265 \cdot 10^{11}$
8	7	$2{,}78329 \cdot 10^{11}$

Таблица 4.1.10 (окончание)

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя «Основные средства отрасли» (в тенге, в ценах 2000 г.) для 2015 г.
9	1	$2{,}08751 \cdot 10^{11}$
10	10	$1{,}41096 \cdot 10^{11}$
11	13	$1{,}16788 \cdot 10^{11}$
12	14	$7{,}83038 \cdot 10^{10}$
13	15	$7{,}73435 \cdot 10^{10}$
14	8	$2{,}76785 \cdot 10^{10}$
15	2	$1{,}16724 \cdot 10^{10}$
16	16	0

Таблица 4.1.11. **Фондоотдача в отрасли**

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя «Фондоотдача в отрасли» для 2015 г.
1	2	6,371005
2	8	3,317435
3	10	3,107695
4	15	2,703250
5	4	2,172512
6	7	2,109079
7	1	2,036358
8	6	1,718572
9	13	1,707822
10	5	1,058857
11	14	0,704573
12	9	0,562895
13	11	0,408581
14	3	0,380897
15	12	0,104278
16	16	0

Таблица 4.1.12. **Спрос отрасли на рабочую силу**

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя «Спрос отрасли на рабочую силу» для 2015 г.
1	1	2 581 608
2	7	1 235 941
3	13	963 120
4	6	841 841
5	9	604 098
6	4	595 420
7	11	516 757
8	12	406 500
9	14	401 955
10	3	247 131
11	15	225 833
12	5	184 281
13	8	150 238
14	10	139 326
15	2	27 907
16	16	24 361

Таблица 4.1.13. **Производительность труда в отрасли**

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя «Производительность труда в отрасли» (в ценах 2000 г.) для 2015 г.
1	10	3 147 177
2	3	2 659 884
3	4	2 437 295
4	5	1 656 329
5	11	1 053 578
6	15	925 811,3
7	6	791 063,1
8	9	682 406,4

Таблица 4.1.13 (окончание)

№ п.п.	№ отрасли	Значение показателя «Производительность труда в отрасли» (в ценах 2000 г.) для 2015 г.
9	8	611 171,8
10	7	474 956,1
11	2	266 466,3
12	16	211 806,2
13	13	207 089,8
14	12	186 155,8
15	1	164 661,7
16	14	137 256,4

Перспективный анализ основных интегральных показателей экономики страны, показателей правительства, домашних хозяйств. Перспективный анализ указанных выше показателей за 2000–2015 гг. показывает, что:

— ВДС страны (в ценах 2000 г.) в указанном периоде возрастает со средним темпом тренда $2{,}5 \cdot 10^{11}$ тенге в год, при этом темп показателя ВДС падает (по его тренду) на 0,84% в год;

— валовый выпуск (в ценах 2000 г.) в указанном периоде возрастает со средним темпом тренда $4{,}0 \cdot 10^{11}$ тенге в год, при этом темп показателя ВДС падает (по его тренду) на 0,45% в год;

— выпуск инвестиционной продукции (в ценах 2000 г.) в указанном периоде возрастает со средним темпом тренда $1{,}2 \cdot 10^{11}$ тенге в год, при этом темп этого показателя падает (по его тренду) на 2,0% в год;

— выпуск конечной продукции (в ценах 2000 г.) в указанном периоде возрастает со средним темпом тренда $9{,}9 \cdot 10^{10}$ тенге в год, при этом темп этого показателя падает (по его тренду) на 0,46% в год;

— выпуск промежуточной продукции (в ценах 2000 г.) в указанном периоде возрастает со средним темпом тренда $1{,}7 \cdot 10^{11}$ тенге в год, при этом темп этого показателя падает (по его тренду) на 1,2% в год;

— выпуск экспортной продукции (в ценах 2000 г.) в указанном периоде возрастает со средним темпом тренда $5{,}1 \cdot 10^{10}$ тенге в год,

при этом темп этого показателя падает (по его тренду) на 1,4% в год;

— государственный бюджет (в ценах 2000 г.) в указанном периоде возрастает со средним темпом тренда $1{,}0 \cdot 10^{11}$ тенге в год, при этом темп этого показателя падает (по его тренду) на 1,5% в год;

— социальные трансферты домашним хозяйствам (в ценах 2000 г.) в указанном периоде возрастают со средним темпом тренда $1{,}0 \cdot 10^{11}$ тенге в год, при этом темп этого показателя падает (по его тренду) на 1,5% в год;

— основные средства (в ценах 2000 г.) в указанном периоде возрастают со средним темпом тренда $2{,}2 \cdot 10^{10}$ тенге в год, при этом темп этого показателя падает (по его тренду) на 0,79% в год;

— фондоотдача в указанном периоде возрастают со средним темпом тренда $1{,}4 \cdot 10^{-2}$ 1/год^2, при этом темп этого показателя падает (по его тренду) на 0,69% в год;

— общая численность занятых в указанном периоде возрастает со средним темпом тренда $1{,}9 \cdot 10^5$ человек в год, при этом темп этого показателя падает (по его тренду) на 0,14% в год;

— производительность труда в указанном периоде возрастает со средним темпом тренда $1{,}9 \cdot 10^4$ тенге/(чел. $\cdot$ год^2), при этом темп этого показателя падает (по его тренду) на 0,68% в год;

— индекс потребительских цен в указанном периоде колеблется в пределах 6–8% в год с незначительным падением тренда этого показателя с темпом 0,008% в год;

— реальные цены на инвестиционную продукцию в указанном периоде падают со средним темпом тренда 1,2% в год, при этом темп этого показателя падает (по его тренду) на 0,16% в год;

— деньги домашних хозяйств на счетах в банках (в ценах 2000 г.) в указанном периоде возрастают со средним темпом тренда $4{,}3 \cdot 10^9$ тенге в год, при этом темп этого показателя падает (по его тренду) на 0,047% в год.

На рис. 4.1.11, 4.1.12 в качестве примера проведен анализ исходных данных для перспективного макроанализа показателей национальной экономики в разрезе эндогенной переменной «Выпуск инвестиционной продукции».

Анализ представленных на рис. 4.1.11 и 4.1.12 трендов позволяет сделать вывод о том, что в 2000–2015 гг. так же, как и в периоде ретроанализа (рис. 4.1.6, 4.1.7), в среднем ожидается рост реального выпуска инвестиционной продукции в стране с замедлением (в среднем) этого роста. Однако уменьшение отрицательного наклона тренда темпа (рис. 4.1.12) для периода 2000–2015 гг. по сравнению с периодом ретроанализа (рис. 4.1.6) свидетельствует о

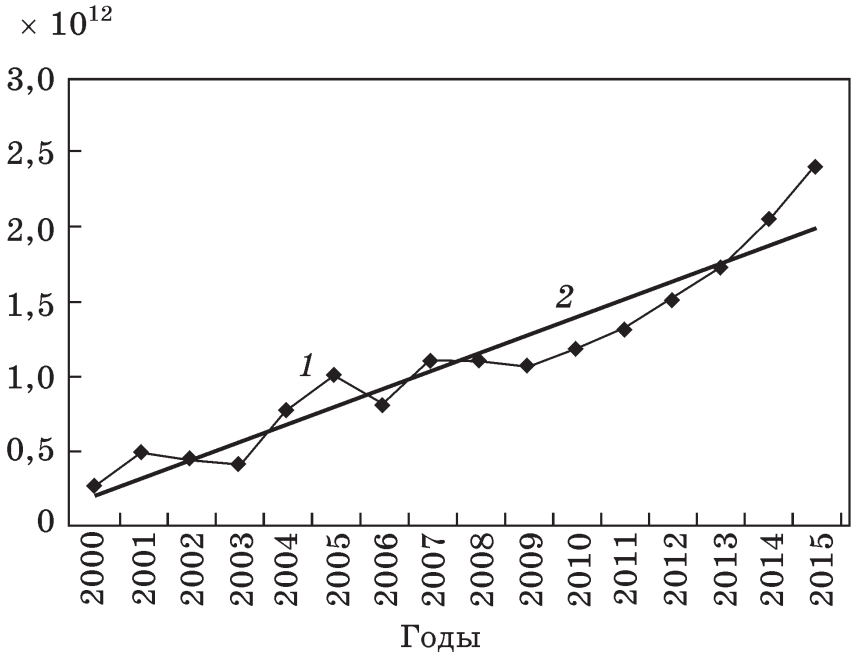

Рис. 4.1.11. Расчетные значения (*1*) и линейный тренд (*2*) эндогенной переменной «Выпуск инвестиционной продукции (в ценах 2000 г.)»

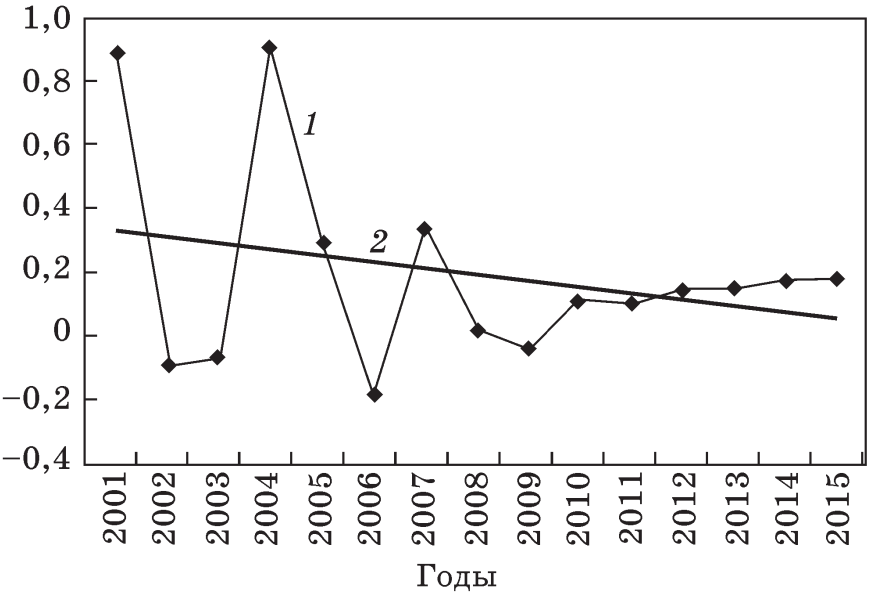

Рис. 4.1.12. Темп (*1*) и линейный тренд (*2*) переменной «Выпуск инвестиционной продукции (в ценах 2000 г.)»

некотором возрастании темпов роста инвестиционной продукции к концу исследуемого периода.

Анализ коэффициентов эластичности эндогенных переменных вычислимой модели общего равновесия отраслей экономики. В рамках ретроспективного анализа отраслей экономики были по-

лучены оценки коэффициентов эластичности 18 эндогенных переменных для каждой из 16 отраслей экономики, а также 14 интегральных показателей экономики страны, показателей правительства, домашних хозяйств для 2009 г. по 341 экзогенным показателям модели за 2008–2014 гг. Эти коэффициенты эластичности составляют матрицу размера 302×341, элементы которой находятся по формуле

$$F_{pj}(t) = 100\frac{x_j^n(t) - x_j(t)}{x_j(t)}. \qquad (4.1.71)$$

Здесь p — варьируемый экзогенный параметр; $x_j(t)$ — значение j-й эндогенной переменной для времени $t = 2009$, полученное при базовом просчете модели; $x_j^n(t)$ — значение соответствующей эндогенной переменной, полученное при увеличении значений варьируемого экзогенного параметра p для 2000–2008 гг. на 1%, при этом остальные значения экзогенных параметров остаются неизменными по сравнению с базовым просчетом.

Например, расчетный коэффициент эластичности «Бюджета домашних хозяйств» по «Доле расходов предприятий отрасли 1, идущей на оплату труда» оказался равным 0,0229. Это означает, что если доля расходов отрасли 1, идущая на оплату труда в каждый из 2000–2008 гг., увеличится на 1% по сравнению с базовым вариантом, то бюджет домашних хозяйств в 2009 г. увеличится на 0,0229% по сравнению с базовым вариантом.

В рамках перспективного анализа отраслей экономики были также получены аналогичные коэффициенты эластичности эндогенных показателей 2015 г. по экзогенным показателям 2009 г.

Анализ влияний экзогенных параметров и, в частности, параметров CO_pj_iz «Доля расходов предприятий отрасли j, идущая на покупку промежуточной продукции, производимой отраслью i» на значение ВДС страны показывает, что:

— среднее значение абсолютных величин коэффициентов эластичности ВДС по долям CO_pj_iz оказалось достаточно высоким и равным 4,7450;

— среднее значение абсолютных величин коэффициентов эластичности ВДС по остальным долям бюджетов отраслей оказалось равным 2,379.

Это замечание позволяет рекомендовать параметры CO_pj_iz для использования при параметрическом регулировании роста национальной экономики. Описание экспериментов с параметрическим регулированием приведено ниже в п. 4.1.3.

Анализ источников экономического роста на базе вычислимой модели общего равновесия отраслей экономики. Перейдем теперь к анализу источников экономического роста по отраслям экономики на основе ретроспективных данных за 2000–2009 гг. Для этого, используя выражения производственных функций (4.1.16) экономических агентов модели, оценим влияние изменения аргументов этих функций на темпы роста ВДС отраслей $VY__i[t+1]$ в предположении постоянства коэффициентов при потребляемых отраслью промежуточных продуктах $CA_z_ji[t]$, коэффициентов при капитале $CA_k_i[t]$ и коэффициентов при труде $CA_l_i[t]$. Такое предположение используется при экстраполяции указанных функций на прогнозный период расчета модели 2010–2015 гг.

Прологарифмировав обе части (4.1.20), найдя полное приращение функции $\ln(VY__i)$ и отбросив члены высшего порядка малости, получим следующую оценку темпа роста y_i реального ВДС i-й отрасли в зависимости от темпов роста аргументов производственной функции CA_r_i, VD_pj_iz, $Ki_{\text{ср}} = (VK__i[t] + VK__i[t+1])/2$ и $VD_pi_il[t]$:

$$y_i = \frac{\Delta VY__i}{VY__i} = \frac{\Delta CA_r_i}{CA_r_i} + \sum_{j=1}^{16}(CA_z_ji \times VD_pj_iz)\frac{\Delta VD_pj_iz}{VD_pj_iz} + CA_k_i\frac{\Delta Ki_{\text{ср}}}{Ki_{\text{ср}}} + CA_l_i\frac{\Delta VD_pi_il}{VD_pi_il}. \quad (4.1.72)$$

Обозначим через $a_i = \Delta CA_r_i/CA_r_i$ темп технического прогресса в i-й отрасли; через $z_{ij} = \Delta VD_pj_iz/VD_pj_iz$ темп потребляемых i-й отраслью промежуточных продуктов, произведенных j-й отраслью; через $k_i = \Delta Ki_{\text{ср}}/Ki_{\text{ср}}$ темп накопления капитала в i-й отрасли; через $l_i = \Delta VD_pi_il/VD_pi_il$ темп роста затрат труда в i-й отрасли, где знак «Δ» означает приращение переменной; значения времени в (4.1.72) для краткости пропущены.

Коэффициенты в правой части формулы (4.1.72) при узанных выше темпах и характеризуют степени влияния рассматриваемых факторов на экономический рост и позволяют сравнить их влияние с влиянием технического прогресса, коэффицмент при котором равен 1. Обозначив эти коэффициенты через $\alpha_{ij} = CA_z_ji \times VD_pj_iz$, $\beta_i = CA_k_i$, $\gamma_i = CA_l_i$, из (4.1.72) получим ее

сокращенную запись:

$$y_i = a_i + \sum_{j=1}^{16} \alpha_{ij} z_{ij} + \beta_i k_i + \gamma_i l_i. \qquad (4.1.73)$$

Приведем значения коэффициентов, определяющих вклады источников экономического роста отраслей на базе рассматриваемой модели для 2008 г. (табл. 4.1.14). Коэффициенты в таблице показывают, на сколько процентов увеличится темп роста ВДС при увеличении факторов роста (основных фондов, труда или спроса на промежуточные товары экономических агентов) на 1%.

Анализ табл. 4.1.14 показывает, что если исключить темп технического прогресса, влияние которого на темп роста всех отраслей в данной модели одинаково, наибольшее влияние на рост ВДС отраслей 1, 2, 5, 7, 12, 13, 16 экономики вносит темп роста затрат труда; для отраслей 4, 6, 8, 9, 10, 11, 15 — темп накопления капитала; а для оставшихся отраслей 3, 14 — темп потребляемых отраслью промежуточных продуктов, произведенных остальными отраслями.

Оценка положений макроэкономической теории на базе вычислимой модели общего равновесия отраслей экономики. В данном пункте описываются результаты вычислительных экспериментов по оценке отдельных положений макроэкономической теории о циклических колебаниях макроэкономических показателей при шоковых изменениях спросов на конечные и инвестиционные товары.

В рамках макроэкономической теории циклические колебания экономических процессов могут возникнуть при [40]:

— линейной зависимости между объемом потребительских расходов и текущим доходом;

— линейной зависимости между инвестициями и приростом доходов.

С целью проверки этих положений был проведен ряд вычислительных экспериментов по просчету следующих сценариев изменения указанных спросов на конечные и инвестиционные товары:

a) $O_1(t) = O_1[t-1] + a(Yg[t] - Yg[t-1]);$ (4.1.74)

b) $O_{2i}[t] = O_{2i}[t-1] + b(Yg[t-3] - 2Yg[t-2] + Yg[t-1]),$
$i = 1, \ldots, 16;$ (4.1.75)

c) совместное применение сценариев a) и b);

d) увеличение долей $O_1[t]$ в k раз по сравнению с базовым вариантом;

Таблица 4.1.14. **Коэффициенты, характеризующие влияние факторов экономического роста**

Номер отрасли i	β_i	γ_i	α_{i1}	α_{i2}	α_{i3}	α_{i4}	α_{i5}	α_{i6}
1	0,3089	0,9051	$1{,}345 \cdot 10^{-12}$	$9{,}480 \cdot 10^{-2}$	$2{,}897 \cdot 10^{-14}$	$2{,}171 \cdot 10^{-13}$	$1{,}602 \cdot 10^{-14}$	$2{,}028 \cdot 10^{-14}$
2	0,2426	2,4964	$1{,}590 \cdot 10^{-16}$	$7{,}308 \cdot 10^{-1}$	$7{,}087 \cdot 10^{-16}$	$9{,}884 \cdot 10^{-15}$	$1{,}390 \cdot 10^{-15}$	$1{,}120 \cdot 10^{-15}$
3	0,9650	0,6886	$2{,}886 \cdot 10^{-15}$	0,000	$2{,}970 \cdot 10^{-12}$	$8{,}269 \cdot 10^{-13}$	$9{,}894 \cdot 10^{-14}$	1,478
4	1,2900	0,0805	$2{,}227 \cdot 10^{-13}$	$1{,}343 \cdot 10^{-1}$	$8{,}634 \cdot 10^{-13}$	$9{,}989 \cdot 10^{-13}$	$9{,}029 \cdot 10^{-3}$	$2{,}641 \cdot 10^{-16}$
5	$1{,}0 \cdot 10^{-10}$	2,4083	$3{,}199 \cdot 10^{-17}$	$5{,}537 \cdot 10^{-17}$	$8{,}913 \cdot 10^{-14}$	$6{,}720 \cdot 10^{-4}$	$5{,}406 \cdot 10^{-3}$	$5{,}300 \cdot 10^{-4}$
6	0,9343	0,7721	$2{,}078 \cdot 10^{-16}$	$9{,}186 \cdot 10^{-18}$	$3{,}313 \cdot 10^{-14}$	$3{,}940 \cdot 10^{-13}$	$2{,}467 \cdot 10^{-15}$	$1{,}324 \cdot 10^{-14}$
7	$1{,}0 \cdot 10^{-10}$	1,8792	$8{,}133 \cdot 10^{-16}$	$1{,}061 \cdot 10^{-15}$	$3{,}115 \cdot 10^{-14}$	$2{,}660 \cdot 10^{-13}$	$4{,}124 \cdot 10^{-14}$	$2{,}508 \cdot 10^{-13}$
8	1,0691	0,4706	$2{,}003 \cdot 10^{-2}$	$1{,}498 \cdot 10^{-15}$	$4{,}343 \cdot 10^{-17}$	$6{,}171 \cdot 10^{-14}$	$3{,}375 \cdot 10^{-15}$	$7{,}288 \cdot 10^{-15}$
9	0,8660	0,2153	$4{,}289 \cdot 10^{-16}$	2,265	$1{,}666 \cdot 10^{-13}$	$8{,}753 \cdot 10^{-15}$	$3{,}057 \cdot 10^{-14}$	$4{,}005 \cdot 10^{-14}$
10	0,6702	0,5492	0,000	0,000	0,000	$4{,}397 \cdot 10^{-15}$	$5{,}602 \cdot 10^{-15}$	$8{,}811 \cdot 10^{-15}$
11	1,2022	0,1006	$2{,}929 \cdot 10^{-5}$	2,267	$5{,}064 \cdot 10^{-14}$	$1{,}030 \cdot 10^{-12}$	$1{,}664 \cdot 10^{-4}$	$5{,}308 \cdot 10^{-13}$
12	$1{,}0 \cdot 10^{-10}$	2,5822	$5{,}415 \cdot 10^{-14}$	0,000	0,000	$4{,}255 \cdot 10^{-13}$	$2{,}573 \cdot 10^{-14}$	0,000
13	0,2635	1,7177	$2{,}370 \cdot 10^{-14}$	0,000	0,000	$8{,}847 \cdot 10^{-13}$	$1{,}142 \cdot 10^{-13}$	$5{,}739 \cdot 10^{-15}$
14	0,0227	1,7814	$6{,}736 \cdot 10^{-14}$	$2{,}018 \cdot 10^{-1}$	$6{,}280 \cdot 10^{-15}$	$1{,}288 \cdot 10^{-12}$	$1{,}919 \cdot 10^{-13}$	$4{,}809 \cdot 10^{-13}$
15	0,9304	0,2173	$1{,}041 \cdot 10^{-15}$	$1{,}408 \cdot 10^{-3}$	$7{,}681 \cdot 10^{-15}$	$3{,}712 \cdot 10^{-13}$	$3{,}926 \cdot 10^{-14}$	$1{,}579 \cdot 10^{-13}$
16	0	1,9372	0	0	0	0	0	0

Таблица 4.1.14 (окончание)

Номер отрасли i	α_{i7}	α_{i8}	α_{i9}	α_{i10}	α_{i11}	α_{i12}	α_{i13}	α_{i14}	α_{i15}	α_{i16}
1	$1{,}345 \cdot 10^{-12}$	$4{,}325 \cdot 10^{-15}$	$4{,}595 \cdot 10^{-2}$	$1{,}807 \cdot 10^{-14}$	$1{,}177 \cdot 10^{-14}$	0	$1{,}681 \cdot 10^{-16}$	$1{,}178 \cdot 10^{-15}$	$9{,}304 \cdot 10^{-18}$	0
2	$1{,}590 \cdot 10^{-16}$	$8{,}054 \cdot 10^{-17}$	$1{,}087 \cdot 10^{-14}$	$2{,}616 \cdot 10^{-17}$	2,280	0	0	0	0	0
3	$2{,}886 \cdot 10^{-15}$	$4{,}633 \cdot 10^{-14}$	$2{,}221 \cdot 10^{-2}$	$1{,}436 \cdot 10^{-13}$	$4{,}626 \cdot 10^{-12}$	0	$1{,}581 \cdot 10^{-15}$	$4{,}991 \cdot 10^{-4}$	$1{,}571 \cdot 10^{-14}$	0
4	$2{,}227 \cdot 10^{-13}$	$8{,}038 \cdot 10^{-15}$	$1{,}444 \cdot 10^{-13}$	$4{,}353 \cdot 10^{-14}$	$6{,}338 \cdot 10^{-16}$	0	$1{,}247 \cdot 10^{-16}$	$3{,}379 \cdot 10^{-3}$	$5{,}445 \cdot 10^{-16}$	0
5	$3{,}199 \cdot 10^{-17}$	$1{,}642 \cdot 10^{-15}$	$2{,}760 \cdot 10^{-1}$	$6{,}132 \cdot 10^{-3}$	$2{,}512 \cdot 10^{-14}$	0	$3{,}273 \cdot 10^{-5}$	$2{,}026 \cdot 10^{-17}$	$5{,}494 \cdot 10^{-4}$	0
6	$2{,}078 \cdot 10^{-16}$	$7{,}977 \cdot 10^{-15}$	$1{,}117 \cdot 10^{-2}$	$6{,}525 \cdot 10^{-16}$	$2{,}014 \cdot 10^{-14}$	0	$8{,}436 \cdot 10^{-17}$	$1{,}554 \cdot 10^{-17}$	$1{,}089 \cdot 10^{-15}$	0
7	$8{,}133 \cdot 10^{-16}$	$6{,}067 \cdot 10^{-14}$	$4{,}548 \cdot 10^{-1}$	$3{,}407 \cdot 10^{-13}$	$1{,}505 \cdot 10^{-12}$	0	$5{,}394 \cdot 10^{-16}$	$8{,}576 \cdot 10^{-5}$	$4{,}404 \cdot 10^{-16}$	0
8	$2{,}003 \cdot 10^{-2}$	$1{,}528 \cdot 10^{-15}$	$8{,}267 \cdot 10^{-15}$	$3{,}053 \cdot 10^{-14}$	$1{,}507 \cdot 10^{-14}$	0	$2{,}339 \cdot 10^{-17}$	$1{,}338 \cdot 10^{-17}$	$2{,}244 \cdot 10^{-16}$	0
9	$4{,}289 \cdot 10^{-16}$	$3{,}346 \cdot 10^{-14}$	$1{,}002 \cdot 10^{-12}$	$3{,}203 \cdot 10^{-13}$	$4{,}339 \cdot 10^{-13}$	0	$3{,}657 \cdot 10^{-15}$	$4{,}803 \cdot 10^{-16}$	$1{,}091 \cdot 10^{-15}$	0
10	0,000	$1{,}991 \cdot 10^{-14}$	$3{,}270 \cdot 10^{-1}$	$2{,}862 \cdot 10^{-13}$	$5{,}408 \cdot 10^{-15}$	0	$1{,}347 \cdot 10^{-14}$	0	$8{,}805 \cdot 10^{-18}$	0
11	$2{,}929 \cdot 10^{-5}$	$6{,}664 \cdot 10^{-14}$	$6{,}596 \cdot 10^{-13}$	$2{,}965 \cdot 10^{-13}$	$2{,}646 \cdot 10^{-12}$	0	$9{,}260 \cdot 10^{-14}$	$1{,}661 \cdot 10^{-3}$	$9{,}599 \cdot 10^{-6}$	0
12	$5{,}415 \cdot 10^{-14}$	$4{,}185 \cdot 10^{-1}$	$1{,}548 \cdot 10^{-1}$	$9{,}506 \cdot 10^{-13}$	$7{,}964 \cdot 10^{-3}$	0	$2{,}126 \cdot 10^{-14}$	$1{,}408 \cdot 10^{-15}$	$2{,}886 \cdot 10^{-15}$	0
13	$2{,}370 \cdot 10^{-14}$	$4{,}820 \cdot 10^{-14}$	$5{,}807 \cdot 10^{-1}$	$1{,}794 \cdot 10^{-14}$	$1{,}331 \cdot 10^{-13}$	0	$3{,}939 \cdot 10^{-15}$	$7{,}738 \cdot 10^{-17}$	$1{,}835 \cdot 10^{-14}$	0
14	$6{,}736 \cdot 10^{-14}$	1,891	$2{,}118 \cdot 10^{-13}$	$4{,}749 \cdot 10^{-17}$	$2{,}743 \cdot 10^{-13}$	0	$2{,}219 \cdot 10^{-16}$	$1{,}782 \cdot 10^{-14}$	$6{,}646 \cdot 10^{-14}$	0
15	$1{,}041 \cdot 10^{-15}$	$6{,}285 \cdot 10^{-14}$	$2{,}139 \cdot 10^{-1}$	$9{,}739 \cdot 10^{-14}$	$8{,}436 \cdot 10^{-14}$	0	$9{,}538 \cdot 10^{-17}$	$1{,}416 \cdot 10^{-17}$	$1{,}222 \cdot 10^{-13}$	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

e) увеличение долей $O_{2i}[t]$ $(t = 1, \ldots, 16)$ в l раз по сравнению с базовым вариантом;

f) совместное применение сценариев d) и e).

Здесь $t = 2010, \ldots, 2015$ — время в годах; $O_1[t] = CO_p_17c[t]$ — доля бюджета домашних хозяйств, идущая на покупку конечных товаров (экзогенная функция); $O_{2i}[t]$ — доля бюджета i-й отрасли, идущая на покупку инвестиционных товаров $(i = 1, \ldots, 15)$ (экзогенная функция); $Yg[t] = VY_g[t]$ — сумма ВДС отраслей в постоянных ценах (эндогенная переменная); a, b, l, k — положительные константы $(l > 1,\ k > 1)$.

Применение сценариев a) и b) означает расчет модели при значениях параметров O_1 и O_{2i}, определяемых формулами (4.1.74) и (4.1.75) соответственно, начиная с $t = 2010$. При этом значения всех остальных экзогенных параметров модели для сценариев a)–f) соответствуют ее базовому варианту.

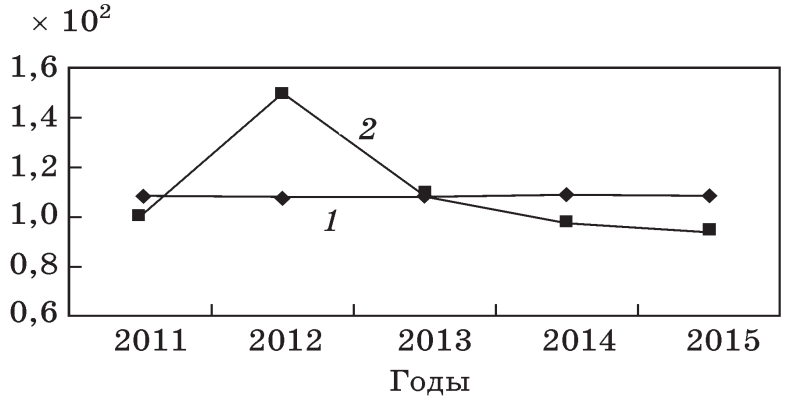

Рис. 4.1.13. Значения индекса потребительских цен при использовании сценария a) (где $a = 3 \cdot 10^{-13}$) (*2*) и для базового варианта (*1*)

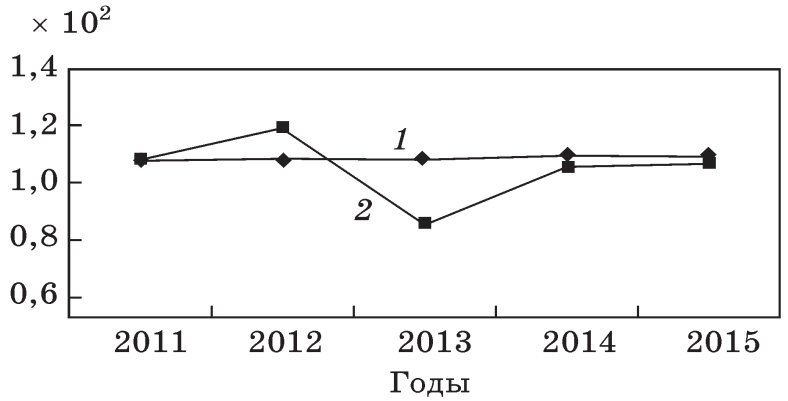

Рис. 4.1.14. Значения индекса потребительских цен при использовании сценария b) (где $b = 10^{-13}$) (*2*) и для базового варианта (*1*)

В результате проведения вычислительных экспериментов на базе модели по реализации сценариев a)–f) наблюдались циклические колебания переменной $P(t)$ (индекс потребительских цен) (рис. 4.1.13–4.1.18). При этом для значений реальных показателей (в частности $Yg[t]$) колебательных явлений обнаружено не было.

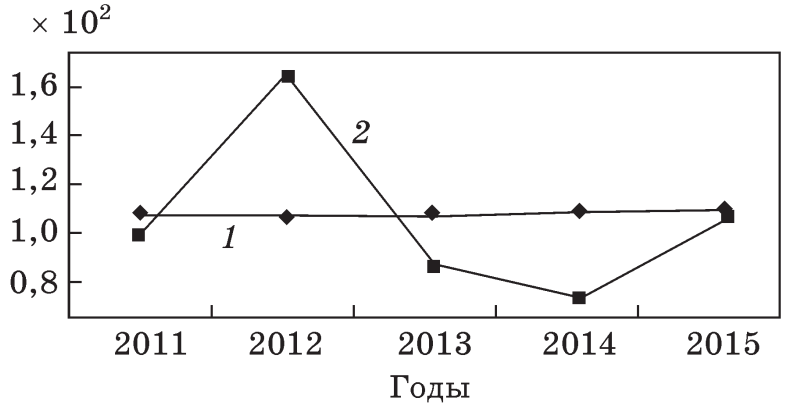

Рис. 4.1.15. Значения индекса потребительских цен при использовании сценария c) (где $a = 3 \cdot 10^{-13}$, $b = 10^{-13}$) (*2*) и для базового варианта (*1*)

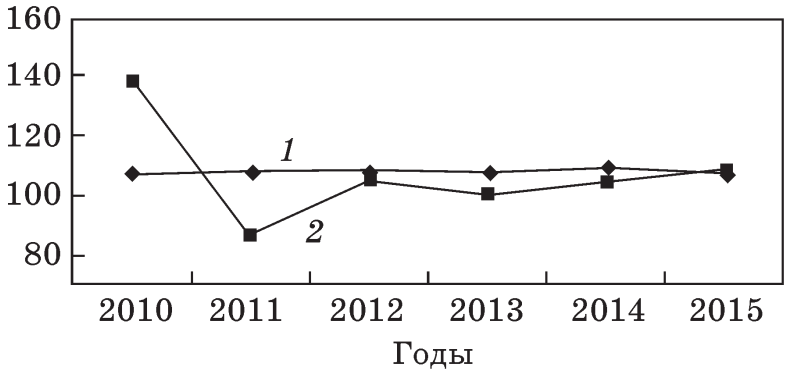

Рис. 4.1.16. Значения индекса потребительских цен при использовании сценария d) (где $k = 1{,}2$) (*2*) и для базового варианта (*1*)

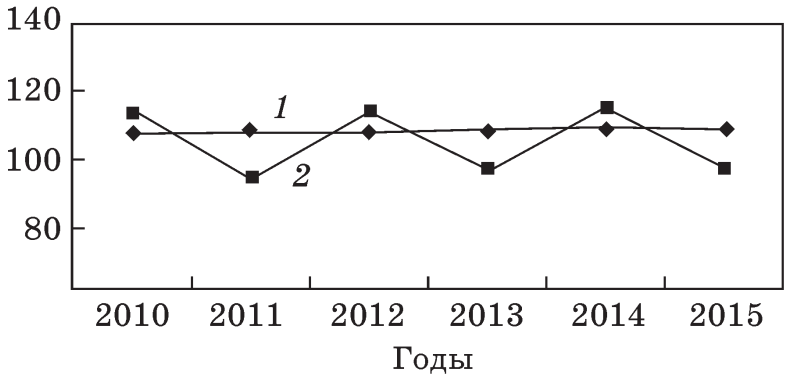

Рис. 4.1.17. Значения индекса потребительских цен при использовании сценария e) (где $l = 1{,}4$) (*2*) и для базового варианта (*1*)

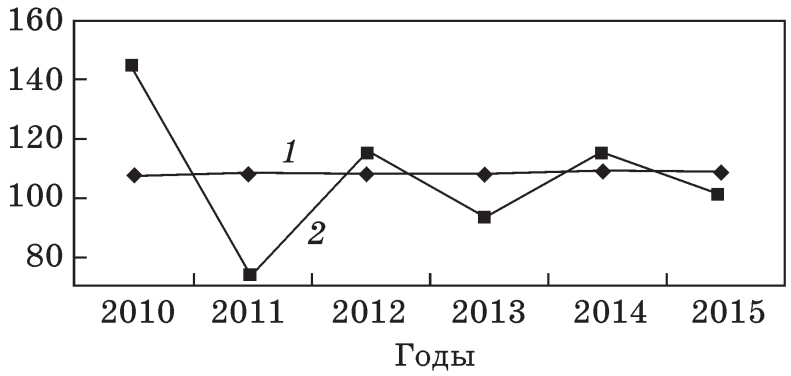

Рис. 4.1.18. Значения индекса потребительских цен при использовании сценария f) (где $k = 1{,}2$, $l = 1{,}4$) (*2*) и для базового варианта (*1*)

Представленные на рис. 4.1.13–4.1.18 результаты экспериментов подтверждают соответствующие положения макроэкономической теории [40].

4.1.3. Нахождение оптимальных законов параметрического регулирования на базе CGE-модели секторов экономики

Подавление циклических колебаний макроэкономических показателей методами параметрического регулирования. В вычислительных экспериментах рассматривалась следующая задача подавления циклических колебаний уровня потребительских цен, возникших при использовании сценария c) развития экономической системы, предусматривающего линейную зависимость между объемом потребительских расходов и текущим доходом и линейную зависимость между инвестициями и приростом доходов.

На базе вычислимой модели секторов экономики с использованием сценария c) (см. п. 4.1.2, где $a = 3 \cdot 10^{-13}$, $b = 10^{-13}$) найти значения долей $O_i^j[t] = CO_pj_iz[t]$ бюджетов j-го агента-производителя, идущих на покупку товаров и услуг, производимых i-м агентом-производителем для 2010–2015 гг. ($i, j = 1, \ldots, 16$), которые обеспечивали бы нижнюю грань следующего критерия K_p, характеризующего отклонение расчетных значений индекса потребительских цен $VP[t]$ от соответствующих желаемых значений $P[t]$:

$$K_p = \sum_{t=2010}^{2015} \left(\frac{VP[t] - P[t]}{P[t]} \right)^2 .$$

Здесь в качестве желаемых значений $P[t]$ использовались расчетные базовые значения индекса потребительских цен модели без параметрического регулирования.

Ограничения на регулируемые параметры:

$$0{,}5 \leqslant \frac{O_i^j[t]}{\overline{O}_i^j} \leqslant 1{,}5, \quad \sum_{i=1}^{16} O_i^j(t) \leqslant 1,$$

где $i, j = 1, \ldots, 16$, $t = 2010, \ldots, 2015$. Здесь $\overline{O}_i^j$ — базовые значения указанных долей, полученные в результате решения задачи параметрической идентификации модели по данным 2000–2008 гг.

Ограничения на рост макроэкономического показателя: $Yr[t] \geqslant$ $\geqslant 0{,}95Yc[t]$. Здесь $Yc[t]$ — расчетные сценарные значения суммы ВДС отраслей без параметрического регулирования, $Yr[t]$ — расчетные значения суммы ВДС отраслей с параметрическим регулированием.

Значение критерия K_p без параметрического регулирования $K_p = 0{,}424$. Оптимальное значение критерия при применении закона параметрического регулирования оказалось равным $K_p =$ $= 0{,}000844$.

Базовые значения макроэкономических показателей $Y(t)$ и $P(t)$, значения, полученные при применении сценария с) и значения, полученные при применении оптимального закона параметрического регулирования приведены на рис. 4.1.19, 4.1.20.

Анализ результатов вычислительных экспериментов, представленных на рис. 4.1.19, 4.1.20 показывает, что при использовании найденного оптимального закона параметрического регулирования

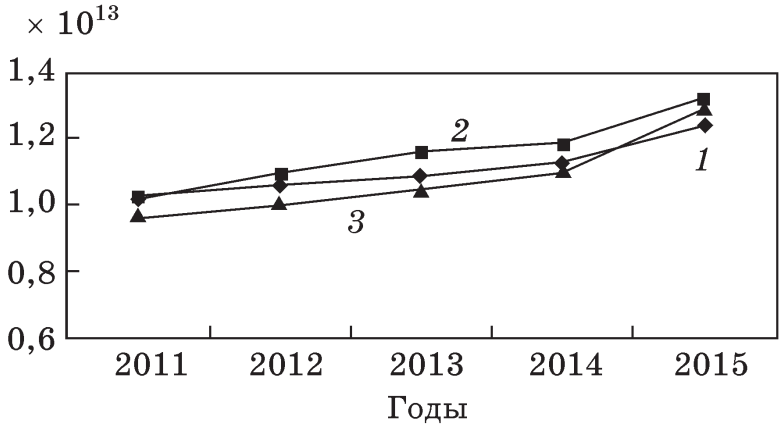

Рис. 4.1.19. Расчетные значения сумм ВДС отраслей экономики: *1* — базовый вариант; *2* — сценарный; *3* — подавление

индекс потребительских цен на регулируемом периоде практически полностью совпал с желаемыми значениями, при этом значения суммы ВДС отраслей экономики оказались несколько ниже (за исключением 2015 г.) соответствующих базовых значений.

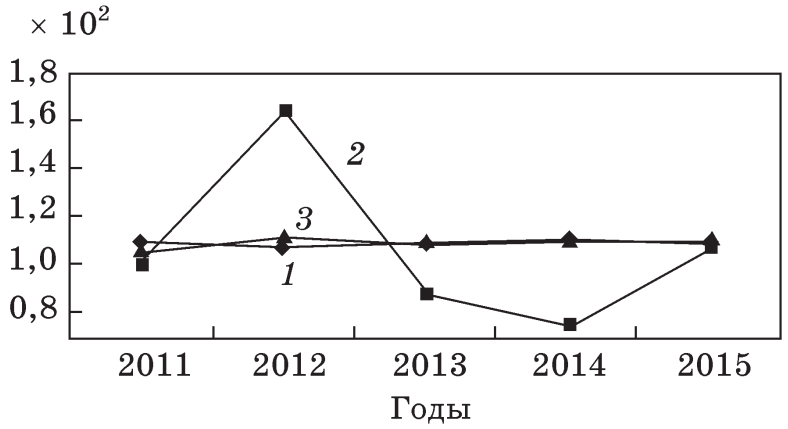

Рис. 4.1.20. Расчетные значения индекса потребительских цен: *1* — базовый вариант; *2* — сценарный; *3* — подавление

Нахождение оптимальных законов параметрического регулированияна базе стохастической CGE-модели секторов экономики. Стохастическая вычислимая модель отраслей экономики была получена из соответствующей детерминированной модели (с найденными в результате решения задачи параметрической идентификации оценками значениями экзогенных параметров) путем добавления дискретного гауссовского шума с независимыми составляющими к правым частям всех динамических уравнений (4.1.1) модели. К таким уравнениям относятся уравнения для расчета следующих эндогенных переменных:

— валовый выпуск товаров и услуг в ценах базового периода $VY__i$ $(i = 1, \ldots, 16)$ шестнадцати секторов-производителей с помощью соответствующих производственных функций;

— основных фондов $VK__i$ $(i = 1 < \ldots, 15)$ пятнадцати секторов-производителей;

— годовых бюджетов $VB__i$ $(i = 1, \ldots, 18)$ шестнадцати отраслей экономики, домашних хозяйств и консолидированного бюджета.

Добавленные аддитивные шумы к выражениям $VY__i$ могут инициировать соответствующие циклические колебания, вызываемые резкими сдвигами (шоками) в развитии технологического прогресса и случайными изменениями в темпах роста населения. Добавленные аддитивные шумы к выражениям $VK__i$ характеризуют случайные изменения долей бюджетов агентов-производителей, идущих на покупку инвестиционных товаров и случайный характер коэффициентов выбытия фондов. Добавленные аддитивные шумы к выражениям $VB__i$ описывают случайный характер доходов, получаемых сектором в текущем периоде.

В настоящей работе оценки средних квадратичных отклонений генерируемых гауссовских случайных величин, определяющих указанный шум, были получены на основе анализа соответствующих статистических данных развития экономики Республики Казахстан в 2000–2008 гг. следующим образом. Для каждого временно́го ряда наблюдаемых значений указанных выше переменных рассчитывались выборочные средние квадратичные отклонения разностей между наблюдаемыми значениями и трендом этих значений. Найденные таким образом величины были приняты за оценки средних квадратичных отклонений компонент генерируемого дискретного гауссовского шума $\xi(t)$, добавляемого к правым частям указанных выше 50 динамических уравнений.

В вычислительных экспериментах со стохастической вычислимой моделью секторов экономики в качестве критерия оптимизации использовался критерий

$$K_s = \mathrm{E}\left[\frac{1}{6}\sum_{t=2010}^{2015} VY_g[t]\right] \to \max. \qquad (4.1.76)$$

Здесь и далее через E обозначено математическое ожидание; K_s — математическое ожидание валового выпуска страны в ценах 2000 г. за 2010–2015 гг. В вычислительных экспериментах расчет критерия K_s производился следующим образом. Методом Монте-Карло моделировались N реализаций случайного процесса $\xi(t)$ и, после N просчетов модели для всех этих реализаций поочередно используемых в уравнениях вида (1.3.27), в качестве значения критерия K_s бралось среднее арифметическое значений выражений $\frac{1}{6}\sum\limits_{t=2010}^{2015} Y(t)$ по этим N реализациям. Подобным образом проверялось выполнение условия вида (1.3.30) принадлежности математических ожиданий значений эндогенных переменных заданным областям фазового пространства модели.

Значение критерия K_s для базового расчетного варианта (с использованием значений экзогенных параметров, полученные в результате параметрической идентификации модели) равно $K_s = 0{,}9891 \cdot 10^{13}$.

При экспериментах с критерием оптимизации (4.1.76) использовались ограничения на рост уровня потребительских цен следующего вида:

$$\mathrm{E}(VPr[t]) \leqslant 1{,}09\mathrm{E}(VP[t]), \quad t = 2010, \ldots, 2015.$$

Здесь $VP[t]$ — расчетный уровень потребительских цен модели без параметрического регулирования; $VPr[t]$ — уровень потребительских цен с параметрическим регулированием.

В вычислительных экспериментах осуществлялось регулирование 1536 экзогенных параметров-долей бюджета j-го агента-производителя, идущих на покупку товаров и услуг, производимых i-м агентом-производителем для 2100–2015 гг. $O_i^j(t)$, $t = 2010, \ldots, 2015$, $i, j = 1, \ldots, 16$. Здесь $\sum\limits_{i=1}^{16} O_i^j(t) \leqslant 1$ для указанных значений t. Базовые значения указанных долей, полученные в результате решения задачи параметрической идентификации модели по данным 2000–2008 гг. будем обозначать через $\overline{O}_i^j$, $i, j = 1, \ldots, 16$.

Рассматривалась следующая задача нахождения оптимальных значений регулируемых векторов параметров. На базе стохастической вычислимой модели секторов экономики найти указанные значения долей бюджетов агентов-производителей $O_i^j(t)$, которые обеспечивали бы верхнюю грань критерия K_s при дополнительных ограничениях на эти доли следующего вида:

$$0{,}5 \leqslant \frac{O_i^j(t)}{\overline{O}_i^j} \leqslant 2, \quad i, j = 1, \ldots, 16, \quad t = 2010, \ldots, 2015.$$

Решения этих оптимизационных задач проводились с помощью алгоритма Нелдера–Мида. После применения параметрического регулирования долей бюджетов стохастической модели значение критерия оказалось равным $K_s = 1{,}2453 \cdot 10^{13}$, его значение увеличилось на 25,89% по сравнению с базовым вариантом.

Аналогичная задача параметрического регулирования с соответствующими ограничениями решалась и на базе детерминированной CGE-модели отраслей экономики с использованием детерминированного аналога критерия (4.1.76):

$$K_d = \frac{1}{6} \sum_{t=2010}^{2015} Y_t \to \max.$$

После применения параметрического регулирования долей бюджетов агентов-производителей значение критерия детерминированной модели оказалось равным $K_d = 1{,}6283 \cdot 10^{13}$, значение критерия увеличилось на 33,14% по сравнению с базовым вариантом.

Сравнение результатов решения задач вариационного исчисления на базе стохастической и детерминированной вычислимых моделей общего равновесия говорит о снижении расчетного значения функционала вариационной задачи при учете возмущающих нарушений в детерминированной вычислимой модели общего равновесия в виде аддитивного шума.

4.2. Регулирование эволюции национальной экономики на базе вычислимой модели общего равновесия с сектором знаний

4.2.1. Описание модели, параметрическая идентификации и ретроспективный прогноз

Агенты модели. Рассматриваемая модель [27, 10] описывает поведение и взаимодействие на 9 товарных рынках и 2 рынках рабочей силы следующих 7 экономических агентов.

Экономический агент № 1 — сектор науки и образования (знаний), оказывающий услуги по обучению студентов и производству знаний. Сюда входят образовательные учреждения (государственные и негосударственные), оказывающие услуги по предоставлению высшего образования, а также организации науки.

Сектор предоставляет услуги, распределяемые по трем направлениям:

1) услуги для инновационного сектора (в основном выполнение НИОКР) и прочих отраслей экономики (тоже в основном выполнение НИОКР), а также услуги для экономического агента № 5, включающие в себя, в соответствии с методологией СНС, услуги нерыночной науки. Кроме того, часть услуг по предоставлению знаний сектор потребляет сам;

2) услуги для экономического агента № 5 (включающие в себя, в соответствии с методологией СНС, услуги бесплатного образования), услуги по обучению на платной основе для инновационного сектора, прочих отраслей экономики и домашних хозяйств. Кроме того, часть образовательных услуг сектор потребляет сам;

3) услуги для внешнего мира — выполнение работ по научным грантам.

Экономический агент № 2 — инновационный сектор, представляющий собой совокупность инновационно-активных предприятий и организаций. Сектор производит продукт, распределяемый по двум направлениям:

1) инновационные товары для внутреннего рынка. Под инновационными товарами понимается конечная продукция, произведенная на основе различного рода технологических и прочих форм инноваций. Этот показатель соответствует объему отгруженной инновационной продукции. Произведенная сектором продукция потребляется всеми секторами-производителями (в том числе и самим сектором) в качестве затрат на исследования и разработки и как затраты на технологические инновации, а также экономическим агентом № 5 (имеется в виду государственное финансирование инновационной деятельности);

2) инновационные товары для внешнего мира.

Экономический агент № 3 — прочие отрасли экономики.

Они производят продукт, распределяемый по четырем направлениям:

1) конечные продукты для домашних хозяйств, включающие в себя потребительские товары текущего потребления (продукты питания и т. д.), товары длительного потребления (бытовая техника, автомобили и т. д.), а также услуги;

2) конечные продукты для экономического агента № 5, состоящие из:

a) конечного продукта для государственных учреждений (по методологии СНС — расходы государственных учреждений на приобретение конечной продукции), включающего в себя: бесплатные услуги для населения, оказываемые предприятиями и организациями в области здравоохранения, культуры (услуги образования здесь не рассматриваются, так как их предоставляет экономический агент № 1); услуги, удовлетворяющие потребности общества в целом, т. е. общее государственное управление, охрана правопорядка, национальная оборона, жилищное хозяйство и т. д.;

b) конечного продукта для некоммерческих организаций, обслуживающих домашние хозяйства, включающего всебя бесплатные услуги социального характера;

3) инвестиционные товары — затраты на улучшение произведенных и непроизведенных материальных активов (иными словами, затраты на создание основного капитала). В соответствии с методологией СНС, этот вид товара определяется как сумма валового накопления основного капитала и изменения запасов материальных оборотных средств минус стоимость приобретенных новых и существующих основных фондов (за вычетом выбытия);

4) экспортные товары. Поскольку одной из составляющих рассмотренных ранее товаров являются импортные товары, то для

избежания двойного счета в экспортные товары входит только чистый экспорт (т. е. экспорт минус импорт).

Для производства товаров и услуг агенты-производители № 1–3 покупают факторы производства:

1) рабочую силу (по государственным и рыночным ценам);
2) инвестиционные товары;
3) инновационные товары;
4) услуги по предоставлению знаний (к примеру, НИОКР);
5) образовательные услуги (обучение на платной основе).

Экономический агент № 4 — совокупный потребитель, объединяющий в себя домашние хозяйства. Агент покупает конечные товары, производимые прочими отраслями экономики. Помимо этого, домашние хозяйства пользуются платными образовательными услугами. Также сектор формирует предложение рабочей силы.

Экономический агент № 5 — правительство устанавливает налоговые ставки, определяет доли бюджета, идущие на субсидирование производителей и на социальные трансферты, а также расходует средства своего бюджета для покупки конечных товаров, произведенных прочими отраслями экономики.

Экономический агент № 6 — банковский сектор определяет проценты для привлеченных депозитов.

Экономический агент № 7 — внешний мир.

Экзогенные параметры модели. Модель содержит 86 экзогенных параметров и 110 эндогенных переменных. В число экзогенных параметров входят:

— коэффициенты производственных функций секторов;

— различные доли бюджетов секторов;

— доли произведенного продукта, идущие на продажу на различных рынках;

— нормы амортизации для основных фондов и доли выбывших основных фондов;

— ставки по депозитам;

— различные налоговые ставки;

— экспортные цены и государственные цены на товары, услуги, рабочую силу и др.

В табл. 4.2.1 приводится список экзогенных параметров модели.

Таблица 4.2.1. **Экзогенные переменные вычислимой модели с сектором знаний**

Экономический агент № 1 — сектор науки и образования	
CO_p1_1l	Доля бюджета, идущая на покупку рабочей силы по цене $P__1l$
CO_p1_1z	Доля бюджета, идущая на покупку услуг по предоставлению знаний по цене $P__1z$
CO_p1_1r	Доля бюджета, идущая на покупку образовательных услуг по цене $P__1r$
CO_p1_1n	Доля бюджета, идущая на покупку инновационных товаров по цене $P__1n$
CO_p1_1i	Доля бюджета, идущая на покупку инвестиционных товаров по цене $P__1i$
CE_p1_1z	Доля произведенного продукта, идущая на продажу на рынках услуг по предоставлению знаний по цене $P__1z$
CE_p2_1z	Доля произведенного продукта, идущая на продажу на рынках услуг по предоставлению знаний по цене $P__2z$
CE_p1_1r	Доля произведенного продукта, идущая на продажу на рынках образовательных услуг по цене $P__1r$
CA_r_1	Коэффициент размерности производственной функции
CA_k_1	Коэффициент при основных фондах производственной функции
CA_l_1	Коэффициент при труде производственной функции
$Calpha__1$	Коэффициент при затратах на услуги по предоставлению знаний производственной функции
$Cbeta__1$	Коэффициент при затратах на образовательные услуги производственной функции
$Cgamma__1$	Коэффициент при затратах на инновационную продукцию производственной функции
CA_0_1	Норма амортизации для основных фондов
$CR__1$	Доля выбывших основных фондов
Экономический агент № 2 — инновационный сектор	
CO_p1_2l	Доля бюджета, идущая на покупку рабочей силы по цене $P__1l$
CO_p1_2z	Доля бюджета, идущая на покупку услуг по предоставлению знаний по цене $P__1z$
CO_p1_2r	Доля бюджета, идущая на покупку образовательных услуг по цене $P__1r$
CO_p1_2n	Доля бюджета, идущая на покупку инновационных товаров по цене $P__1n$

Таблица 4.2.1 (продолжение)

CO_p1_2i	Доля бюджета, идущая на покупку инвестиционных товаров по цене $P__1i$
CE_p1_2n	Доля произведенного продукта, идущая на продажу на рынках инновационной продукции по цене $P__1n$
CE_p2_2n	Доля произведенного продукта, идущая на продажу на рынках инновационной продукции по цене $P__2n$
CA_r_2	Коэффициент размерности производственной функции
CA_k_2	Коэффициент при основных фондах производственной функции
CA_l_2	Коэффициент при труде производственной функции
$Calpha__2$	Коэффициент при затратах на услуги по предоставлению знаний производственной функции
$Cbeta__2$	Коэффициент при затратах на образовательные услуги производственной функции
$Cgamma__2$	Коэффициент при затратах на инновационную продукцию производственной функции
CA_0_2	Норма амортизации для основных фондов
$CR__2$	Доля выбывших основных фондов
Экономический агент № 3 — прочие отрасли экономики	
CO_p1_3l	Доля бюджета, идущая на покупку рабочей силы по цене $P__1l$
CO_p1_3z	Доля бюджета, идущая на покупку услуг по предоставлению знаний по цене $P__1z$
CO_p1_3r	Доля бюджета, идущая на покупку образовательных услуг по цене $P__1r$
CO_p1_3n	Доля бюджета, идущая на покупку инновационных товаров по цене $P__1n$
CO_p1_3i	Доля бюджета, идущая на покупку инвестиционных товаров по цене $P__1i$
CE_p1_3c	Доля произведенного продукта, идущая на продажу на рынках конечных товаров для домашних хозяйств по цене $P__1c$
CE_p1_3g	Доля произведенного продукта, идущая на продажу на рынках конечных товаров для экономического агента № 5 по цене $P__1g$
CE_p1_3i	Доля произведенного продукта, идущая на продажу на рынках инвестиционных товаров по цене $P__1i$
CE_p2_3c	Доля произведенного продукта, идущая на продажу на рынках экспортных товаров по цене $P__2c$

Таблица 4.2.1 (продолжение)

CA_r_3	Коэффициент размерности производственной функции
CA_k_3	Коэффициент при основных фондах производственной функции
CA_l_3	Коэффициент при труде производственной функции
$Calpha__3$	Коэффициент при затратах на услуги по предоставлению знаний производственной функции
$Cbeta__3$	Коэффициент при затратах на образовательные услуги производственной функции
$Cgamma__3$	Коэффициент при затратах на инновационную продукцию производственной функции
CA_0_3	Норма амортизации для основных фондов
$CR__3$	Доля выбывших основных фондов
Экономический агент № 4 — совокупный потребитель	
CO_p1_4c	Доля бюджета, идущая на покупку конечных товаров по цене $P__1c$
CO_p1_4r	Доля бюджета, идущая на покупку образовательных услуг по цене $P__1r$
CO_b_4	Доля бюджета, идущая на вклады в банках
CS_p3_4l	Предложение рабочей силы по цене $P__3l$
CS_p1_4l	Предложение рабочей силы по цене $P__1l$
Экономический агент № 5 — правительство	
CT_vad	Ставка налога на добавленную стоимость
CT_pr	Ставка налога на прибыль организаций
CT_pod	Ставка налога на доходы физических лиц
CT_esn	Ставка единого социального налога
CO_p1_5g	Доля консолидированного бюджета, идущая на покупку конечных товаров по цене $P__1g$
CO_p1_5z	Доля консолидированного бюджета, идущая на покупку услуг по предоставлению знаний по цене $P__1z$
CO_p1_5r	Доля консолидированного бюджета, идущая на покупку образовательных услуг по цене $P__1r$
CO_p1_5n	Доля консолидированного бюджета, идущая на покупку инновационных товаров по цене $P__1n$
CO_s1_5	Доля консолидированного бюджета, идущая на субсидирование сектора 1

Таблица 4.2.1 (продолжение)

CO_s2_5	Доля консолидированного бюджета, идущая на субсидирование сектора 2
CO_s3_5	Доля консолидированного бюджета, идущая на субсидирование сектора 3
CO_tr_5	Доля консолидированного бюджета, идущая на выплату социальных трансфертов населению
CO_f4_5	Доля средств внебюджетных фондов, идущая на выплату пенсий, пособий и т. д.
CO_s_5b	Доля нераспределенного консолидированного бюджета
CO_s_5f	Доля нераспределенных средств внебюджетных фондов
CB_other_5	Сумма налоговых поступлений (не вошедших в число рассматриваемых), неналоговых доходов и прочих доходов консолидированного бюджета
Экономический агент № 6 — банковский сектор	
$CP__bpercent$	Ставка по депозитам для предприятий
$CP_h_bpercent$	Ставка по депозитам для физических лиц
Общая часть модели	
$CP__3l$	Государственная цена на рабочую силу
$CP__2z$	Экспортная цена на услуги по предоставлению знаний
$CP__2n$	Экспортная цена на инновационные товары
$CP__2c$	Экспортная цена на конечные товары
CD_p2_sz	Суммарный спрос на услуги по предоставлению знаний по экспортным ценам
CD_p2_sn	Суммарный спрос на инновационные товары по экспортным ценам
CD_p2_sc	Суммарный спрос на конечные товары по экспортным ценам
Технические параметры	
$CC__1l$	Константа итерации, применяемая в случае равновесной цены
$CC__1c$	Константа итерации, применяемая в случае равновесной цены
$CC__1g$	Константа итерации, применяемая в случае равновесной цены
$CC__1n$	Константа итерации, применяемая в случае равновесной цены

Таблица 4.2.1 (окончание)

$CC__1i$	Константа итерации, применяемая в случае равновесной цены
$CC__1r$	Константа итерации, применяемая в случае равновесной цены
$CC__1z$	Константа итерации, применяемая в случае равновесной цены
$Ceta__1$	Константа итерации, применяемая в случае экзогенной цены
$Ceta__2$	Константа итерации, применяемая в случае экзогенной цены
$Ceta__3$	Константа итерации, применяемая в случае экзогенной цены

Эндогенные переменные модели. В число эндогенных переменных входят:

— бюджеты секторов и их различные доли;
— производимые добавленные стоимости;
— спросы и предложения на различные товары и услуги;
— выручки секторов;
— основные фонды секторов;
— заработная плата работников;
— различные виды расходов консолидированного бюджета;
— различные виды цен на товары услуги и рабочую силу;

В табл. 4.2.2 приводится список эндогенных переменных модели.

Таблица 4.2.2. **Эндогенные переменные вычислимой модели с секторм знаний**

Экономический агент № 1 — сектор науки и образования	
VO_p3_1l	Доля бюджета, идущая на покупку рабочей силы по цене $P__3l$
VO_t_1	Доля бюджета, идущая на уплату налогов в консолидированный бюджет
VO_f_1	Доля бюджета, идущая на уплату налогов во внебюджетные фонды
VO_s_1	Доля нераспределенного бюджета
$VY__1$	Производимая сектором добавленная стоимость
VS_p1_1z	Предложение услуг по предоставлению знаний по цене $P__1z$
VS_p2_1z	Предложение услуг по предоставлению знаний по цене $P__2z$
VS_p1_1r	Предложение образовательных услуг по цене $P__1r$
VD_p3_1l	Спрос на рабочую силу по цене $P__3l$
VD_p1_1l	Спрос на рабочую силу по цене $P__1l$

Таблица 4.2.2 (продолжение)

VD_p1_1z	Спрос на услуги по предоставлению знаний по цене $P__1z$
VD_p1_1r	Спрос на образовательные услуги по цене $P__1r$
VD_p1_1n	Спрос на инновационные товары по цене $P__1n$
VD_p1_1i	Спрос на инвестиционные товары по цене $P__1i$
VY_p_1	Выручка в текущих ценах
VB_1	Бюджет сектора
VB_b_1	Остаток средств на счетах в банках
$VK__1$	Основные фонды сектора
Экономический агент № 2 — инновационный сектор	
VO_p3_2l	Доля бюджета, идущая на покупку рабочей силы по цене $P__3l$
VO_t_2	Доля бюджета, идущая на уплату налогов в консолидированный бюджет
VO_f_2	Доля бюджета, идущая на уплату налогов во внебюджетные фонды
VO_s_2	Доля нераспределенного бюджета
$VY__2$	Производимая сектором добавленная стоимость
VS_p1_2n	Предложение инновационных товаров по цене $P__1n$
VS_p2_2n	Предложение инновационных товаров по цене $P__2n$
VD_p3_2l	Спрос на рабочую силу по цене $P__3l$
VD_p1_2l	Спрос на рабочую силу по цене $P__1l$
VD_p1_2z	Спрос на услуги по предоставлению знаний по цене $P__1z$
VD_p1_2r	Спрос на образовательные услуги по цене $P__1r$
VD_p1_2n	Спрос на инновационные товары по цене $P__1n$
VD_p1_2i	Спрос на инвестиционные товары по цене $P__1i$
VY_p_2	Выручка в текущих ценах
$VB__2$	Бюджет сектора
VB_b_2	Остаток средств на счетах в банках
$VK__2$	Основные фонды
Экономический агент № 3 — прочие отрасли экономики	
VO_p3_3l	Доля бюджета, идущая на покупку рабочей силы по цене $P__3l$

Таблица 4.2.2 (продолжение)

VO_t_3	Доля бюджета, идущая на уплату налогов в консолидированный бюджет
VO_f_3	Доля бюджета, идущая на уплату налогов во внебюджетные фонды
VO_s_3	Доля нераспределенного бюджета
VY__3	Производимая сектором добавленная стоимость
VS_p1_3c	Предложение конечных товаров по цене *P__1c*
VS_p1_3g	Предложение конечных товаров по цене *P__1g*
VS_p1_3i	Предложение инвестиционных товаров по цене *P__1i*
VS_p2_3c	Предложение конечных товаров по цене *P__2c*
VD_p3_3l	Спрос на рабочую силу по цене *P__3l*
VD_p1_3l	Спрос на рабочую силу по цене *P__1l*
VD_p1_3z	Спрос на услуги по предоставлению знаний по цене *P__1z*
VD_p1_3r	Спрос на образовательные услуги по цене *P__1r*
VD_p1_3n	Спрос на инновационные товары по цене *P__1n*
VD_p1_3i	Спрос на инвестиционные товары по цене *P__1i*
VY_p_3	Выручка в текущих ценах
VB__3	Бюджет сектора
VB_b_3	Остаток средств на счетах в банках
VK__3	Основные фонды
Экономический агент № 4 — совокупный потребитель	
VO_tax_4	Доля бюджета, идущая на уплату подоходного налога
VO_s_4	Доля нераспределенного бюджета
VD_p1_4c	Спрос домашних хозяйств на конечные товары по цене *P__1c*
VD_p1_4r	Спрос домашних хозяйств на образовательные услуги по цене *P__1r*
VW_3_1	Заработная плата работников сектора 1 (предприятия государственной формы собственности)
VW_1_1	Заработная плата работников сектора 1 (предприятия частной формы собственности)
VW_3_2	Заработная плата работников сектора 2 (предприятия государственной формы собственности)
VW_1_2	Заработная плата работников сектора 2 (предприятия частной формы собственности)

Таблица 4.2.2 (продолжение)

VW_3_3	Заработная плата работников сектора 3 (предприятия государственной формы собственности)
VW_1_3	Заработная плата работников сектора 3 (предприятия частной формы собственности)
$VB__4$	Бюджет домашних хозяйств
VB_b_4	Остаток средств на счетах в банках
Экономический агент № 5 — правительство	
VD_p1_5g	Спрос на конечные товары по цене $P__1g$
VD_p1_5z	Спрос на услуги по предоставлению знаний по цене $P__1z$
VD_p1_5r	Спрос на образовательные услуги по цене $P__1r$
VD_p1_5n	Спрос на инновационные товары по цене $P__1n$
VG_s_1	Расходы консолидированного бюджета, направленные на субсидирование сектора 1
VG_s_2	Расходы консолидированного бюджета, направленные на субсидирование сектора 2
VG_s_3	Расходы консолидированного бюджета, направленные на субсидирование сектора 3
VG_tr_4	Социальные трансферты населению, сформированные из средств консолидированного бюджета
VG_f_4	Средства внебюджетных фондов, выделенные для населения
$VB__5$	Консолидированный бюджет
VB_b_5	Остаток средств консолидированного бюджета
$VF__5$	Денежные средства внебюджетных фондов
VF_b_5	Остаток средств внебюджетных фондов
Общая часть модели	
$VP__1l$	Цена на рабочую силу
$VP__1c$	Цена на конечные товары для домашних хозяйств
$VP__1g$	Цена на конечные товары для экономического агента № 5
$VP__1n$	Цена на инновационные товары
$VP__1i$	Цена на инвестиционные товары
$VP__1r$	Цена на образовательные услуги
$VP__1z$	Цена на услуги по предоставлению знаний

Таблица 4.2.2 (окончание)

VD_p3_sl	Суммарный спрос на рабочую силу по цене *P__3l*
VD_p1_sl	Суммарный спрос на рабочую силу по цене *P__1l*
VD_p1_sc	Суммарный спрос на конечные товары для домашних хозяйств по цене *P__1c*
VD_p1_sg	Суммарный спрос на конечные товары для экономического агента № 5 по цене *P__1g*
VD_p1_sn	Суммарный спрос на инновационные товары по цене *P__1n*
VD_p1_si	Суммарный спрос на инвестиционные товары по цене *P__1i*
VD_p1_sr	Суммарный спрос на образовательные услуги по цене *P__1r*
VD_p1_sz	Суммарный спрос на услуги по предоставлению знаний по цене *P__1z*
VS_p3_sl	Суммарное предложение рабочей силы по цене *P__3l*
VS_p1_sl	Суммарное предложение рабочей силы по цене *P__1l*
VS_p1_sc	Суммарное предложение конечных товаров для домашних хозяйств по цене *P__1c*
VS_p2_sc	Суммарное предложение конечных товаров по цене *P__2c*
VS_p1_sg	Суммарное предложение конечных товаров для экономического агента № 5 по цене *P__1g*
VS_p1_sn	Суммарное предложение инновационных товаров по цене *P__1n*
VS_p2_sn	Суммарное предложение инновационных товаров по цене *P__2n*
VS_p1_si	Суммарное предложение инвестиционных товаров по цене *P__1i*
VS_p1_sr	Суммарное предложение образовательных услуг по цене *P__1r*
VS_p1_sz	Суммарное предложение услуг по предоставлению знаний по цене *P__1z*
VS_p2_sz	Суммарное предложение услуг по предоставлению знаний по цене *P__2z*
Интегральные показатели	
VY	ВВП (в ценах базового периода)
VY_p	ВВП (в текущих ценах)
VP	Индекс потребительских цен
VK	Основные фонды
Техническая переменная	
VI__l	Индикатор дефицитности для рынка рабочей силы

Рынки модели. На следующих рынках в результате уравнивания спросов и предложений на различные виды товаров, услуг и рабочую силу формируются равновесные цены:

— рынок конечных товаров для домашних хозяйств;

— рынок конечных товаров, идущих на экспорт;

— рынок конечных товаров для экономического агента № 5;

— рынок инвестиционных товаров;

— рынок рабочей силы, оплачиваемой предприятиями частной формы собственности;

— рынок рабочей силы, оплачиваемой из средств государственного бюджета;

— рынок инновационных товаров;

— рынок инновационных товаров, идущих на экспорт;

— рынок знаний;

— рынок знаний, идущих на экспорт;

— рынок образовательных услуг.

Ниже приводится используемая в модели формула, определяющая индикатор дефицитности для рынка рабочей силы с регулируемой государством ценой:

$$VI__l[t] = VS_p3_sl[t]/VD_p3_sl[t]. \qquad (4.2.1)$$

Теперь запишем формулы модели, отражающие процесс изменения цен для всех рынков:

— на рабочую силу:

$$VP__1l[Q+1] = VP__1l[Q] + (VD_p1_sl[t] - \\ - VS_p1_sl[t])/CC__1l; \qquad (4.2.2)$$

— на конечные товары для домашних хозяйств:

$$VP__1c[Q+1] = VP__1c[Q] + (VD_p1_sc[t] - \\ - VS_p1_sc[t])/CC__1c; \qquad (4.2.3)$$

— на конечные товары для экономического агента № 5:

$$VP__1g[Q+1] = VP__1g[Q] + (VD_p1_sg[t] - \\ - VS_p1_sg[t])/CC__1g; \qquad (4.2.4)$$

— на инновационные товары:

$$VP__1n[Q+1] = VP__1n[Q] + (VD_p1_sn[t] - \\ - VS_p1_sn[t])/CC__1n; \qquad (4.2.5)$$

— на инвестиционные товары:

$$VP__1i[Q+1] = VP__1i[Q] + (VD_p1_si[t] - \\ - VS_p1_si[t])/CC__1i; \quad (4.2.6)$$

— на образовательные услуги:

$$VP__1r[Q+1] = VP__1r[Q] + (VD_p1_sr[t] - \\ - VS_p1_sr[t])/CC__1r; \quad (4.2.7)$$

— на услуги по предоставлению знаний:

$$VP__1z[Q+1] = VP__1z[Q] + (VD_p1_sz[t] - \\ - VS_p1_sz[t])/CC__1z. \quad (4.2.8)$$

Теперь приведем формулы, определяющие суммарный спрос и предложение товаров для каждой из цен, используемых в модели. Конечные формулы, определяющие спрос и предложение конкретного экономического агента приводятся в соответствующих пунктах.

Суммарный спрос и предложение рабочей силы по государственным и рыночным ценам:

$$VD_p3_sl[t] = VD_p3_1l[t] + VD_p3_2l[t] + VD_p3_3l[t], \quad (4.2.9)$$

$$VD_p1_sl[t] = VD_p1_1l[t] + VD_p1_2l[t] + VD_p1_3l[t], \quad (4.2.10)$$

$$VS_p3_sl[t] = CS_p3_4l[t], \quad (4.2.11)$$

$$VS_p1_sl[t] = CS_p1_4l[t]. \quad (4.2.12)$$

Суммарный спрос и предложение конечных товаров для домашних хозяйств по рыночным ценам:

$$VD_p1_sc[t] = VD_p1_4c[t], \quad (4.2.13)$$

$$VS_p1_sc[t] = VS_p1_3c[t]. \quad (4.2.14)$$

Суммарный спрос и предложение конечных товаров для экономического агента № 5 по рыночным ценам:

$$VD_p1_sg[t] = VD_p1_5g[t], \quad (4.2.15)$$

$$VS_p1_sg[t] = VS_p1_3g[t]. \quad (4.2.16)$$

Суммарный спрос и предложение инновационных товаров по рыночным ценам:

$$VD_p1_sn[t] = VD_p1_1n[t] + VD_p1_2n[t] + \\ + VD_p1_3n[t] + VD_p1_5n[t], \quad (4.2.17)$$

$$VS_p1_sn[t] = VS_p1_2n[t]. \tag{4.2.18}$$

Суммарный спрос и предложение инвестиционных товаров по рыночным ценам:

$$VD_p1_si[t] = VD_p1_1i[t]+VD_p1_2i[t]+VD_p1_3i[t], \tag{4.2.19}$$

$$VS_p1_si[t] = VS_p1_3i[t]. \tag{4.2.20}$$

Суммарный спрос и предложение образовательных услуг по рыночным ценам:

$$VD_p1_sr[t] = VD_p1_1r[t] + VD_p1_2r[t] + VD_p1_3r[t] + \\ + VD_p1_4r[t] + VD_p1_5r[t], \tag{4.2.21}$$

$$VS_p1_sr[t] = VS_p1_1r[t]. \tag{4.2.22}$$

Суммарный спрос и предложение услуг по предоставлению знаний по рыночным ценам:

$$VD_p1_sz[t] = VD_p1_1z[t] + VD_p1_2z[t] + \\ + VD_p1_3z[t] + VD_p1_5z[t], \tag{4.2.23}$$

$$VS_p1_sz[t] = VS_p1_1z[t]. \tag{4.2.24}$$

Таким образом, мы имеем 16 формул для определения суммарного спроса и предложения рассматриваемых в модели товаров.

Приведем обозначения, определяющие суммарный спрос и предложение на экспортируемые товары и услуги.

Суммарный спрос и предложение услуг по предоставлению знаний (научные гранты) по экспортным ценам:

$$CD_p2_sz[t] \text{ — задано}, \tag{4.2.25}$$

$$VS_p2_sz[t] = VS_p2_1z[t]. \tag{4.2.26}$$

Суммарный спрос и предложение инновационных товаров по экспортным ценам:

$$CD_p2_sn[t] \text{ — задано}, \tag{4.2.27}$$

$$VS_p2_sn[t] = VS_p2_2n[t]. \tag{4.2.28}$$

Суммарный спрос и предложение конечных товаров по экспортным ценам:

$$CD_p2_sc[t] \text{ — задано}, \tag{4.2.29}$$

$$VS_p2_sc[t] = VS_p2_3c[t]. \tag{4.2.30}$$

В итоге у нас получилось $16+6=22$ формулы для определения суммарных спроса и предложения на все товары, используемые в модели.

Опишем деятельность экономических агентов, участвующих в модели.

Экономический агент № 1 — сектор науки и образования. Выше говорилось о том, что на рынках с государственными ценами, уравнивание совокупного спроса и предложения происходит посредством корректировки доли бюджета VO_p3_1. Этот процесс описывается следующей формулой:

$$VO_p3_1l[Q+1] = VO_p3_1l[Q] \times Ceta__1 + \\ + VO_p3_1l[Q] \times VI__l[t] \times (1 - Ceta__1). \quad (4.2.31)$$

Здесь Q — шаг итерации, $0 < Ceta__1 < 1$ — модельная константа. При ее увеличении равновесие достигается медленнее, однако при этом система уравнений становится более устойчивой.

Переходим к формулам, определяющим поведение сектора науки и образования.

Уравнение производственной функции:

$$VY__1[t+1] = CA_r_1 \times \\ \times Power(((VK__1[t] + VK__1[t+1])/2), CA_k_1) \times \\ \times Power((VD_p1_1l[t] + VD_p3_1l[t]), CA_l_1) \times \\ \times Exp(Calpha__1 \times VD_p1_1z[t] + Cbeta__1 \times VD_p1_1r[t] + \\ + Cgamma__1 \times VD_p1_1n[t]). \quad (4.2.32)$$

Здесь $Power(X, Y)$ соответствует X^Y, $Exp(X)$ соответствует e^X.

В следующих формулах определяется спрос сектора науки и образования на факторы производства.

Спрос на рабочую силу:

— по государственным ценам:

$$VD_p3_1l[t] = (VO_p3_1l[t] \times VB__1[t])/CP__3l[t]; \quad (4.2.33)$$

— по рыночным ценам:

$$VD_p1_1l[t] = (CO_p1_1l[t] \times VB__1[t])/VP__1l[t]. \quad (4.2.34)$$

Спрос на услуги по предоставлению знаний:

$$VD_p1_1z[t] = (CO_p1_1z[t] \times VB__1[t])/VP__1z[t]. \quad (4.2.35)$$

Спрос на образовательные услуги:

$$VD_p1_1r[t] = (CO_p1_1r[t] \times VB__1[t])/VP__1r[t]. \quad (4.2.36)$$

Спрос на инновационные товары:

$$VD_p1_1n[t] = (CO_p1_1n[t] \times VB__1[t])/VP__1n[t]. \quad (4.2.37)$$

Спрос на инвестиционные товары:

$$VD_p1_1i[t] = (CO_p1_1i[t] \times VB__1[t])/VP__1i[t]. \quad (4.2.38)$$

В следующих формулах определяется предложение услуг, производимых сектором науки и образования.

Предложение услуг по предоставлению знаний:

— по рыночным ценам:

$$VS_p1_1z[t] = CE_p1_1z \times VY__1[t]; \quad (4.2.39)$$

— по экспортным ценам:

$$VS_p2_1z[t] = CE_p2_1z \times VY__1[t]; \quad (4.2.40)$$

Предложение образовательных услуг:

$$VS_p1_1r[t] = CE_p1_1r \times VY__1[t]. \quad (4.2.41)$$

В следующей формуле подсчитывается выручка сектора науки и образования от предложенных услуг:

$$VY_p_1[t] = VS_p1_1z[t] \times VP__1z[t] + VS_p2_1z[t] \times CP__2z[t] + \\ + VS_p1_1r[t] \times VP__1r[t]. \quad (4.2.42)$$

Бюджет сектора науки и образования:

$$VB__1[t] = VB_b_1[t] \times (1 + CP__bpercent[t-1]) + \\ + VY_p_1[t] + VG_s_1[t-1]. \quad (4.2.43)$$

Бюджет агента формируется из:

1) средств, находящихся на банковских счетах (с учетом процентов по вкладам);

2) выручки, полученной в текущем периоде;

3) субсидий, полученных из консолидированного бюджета $VG_s_1[t-1]$.

Динамика остатков средств сектора науки и образования на счетах в банках:

$$VB_b_1[t+1] = VO_s_1[t] \times VB__1[t]. \quad (4.2.44)$$

Основные фонды:

$$VK__1[t+1] = (1-CR__1[t]) \times VK__1[t] + VD_p1_1i[t]. \quad (4.2.45)$$

В этой формуле подсчитывается объем основных фондов с учетом их выбытия. Со знаком плюс идут введенные в эксплуатацию фонды.

Доля бюджета сектора науки и образования, идущая на уплату налогов в консолидированный бюджет:

$$VO_t_1[t] = (VY_p_1[t] \times CT_vad[t])/VB__1[t] + \\ + ((VY_p_1[t] - VW_3_1[t] - VW_1_1[t] - VK__1[t] \times \\ \times CA_0_1[t]) \times CT_pr[t])/VB__1[t]. \quad (4.2.46)$$

Здесь учитываются налог на добавленную стоимость и налог на прибыль. При подсчете доли бюджета, идущей на уплату налога на прибыль, из выручки вычитаются затраты на оплату рабочей силы предприятий государственной ($VW_3_1[t]$) и частной ($VW_1_1[t]$) форм собственности, а также амортизационные отчисления $VK__1[t] \times CA_0_1[t]$. Доля бюджета, идущая на уплату единого социального налога во внебюджетные фонды:

$$VO_f_1[t] = ((VW_3_1[t] + VW_1_1[t]) \times CT_esn[t])/VB__1[t]. \quad (4.2.47)$$

Остаток бюджета сектора науки и образования:

$$VO_s_1[t] = 1 - CO_p1_1l[t] - VO_p3_1l[t] - CO_p1_1z[t] - \\ - CO_p1_1r[t] - CO_p1_1n[t] - CO_p1_1i[t] - \\ - VO_t_1[t] - VO_f_1[t]. \quad (4.2.48)$$

Экономический агент № 2 — инновационный сектор. Выше говорилось о том, что на рынках с государственными ценами уравнивание совокупного спроса и предложения происходит посредством корректировки доли бюджета VO_p3_2l. Этот процесс описывается следующей формулой:

$$VO_p3_2l[Q+1] = VO_p3_2l[Q] \times Ceta__2 + \\ + VO_p3_2l[Q] \times VI__l[t] \times (1 - Ceta__2), \quad (4.2.49)$$

где Q — шаг итерации; $0 < Ceta__2 < 1$ — модельная константа, при ее увеличении равновесие достигается медленнее, однако при этом система уравнений становится более устойчивой.

Переходим к формулам, определяющим поведение инновационного сектора.

Уравнение производственной функции:

$$VY__2[t+1] = CA_r_2 \times \\ \times Power(((VK__2[t] + VK__2[t+1])/2), CA_k_2) \times \\ \times Power((VD_p1_2l[t] + VD_p3_2l[t]), CA_l_2) \times \\ \times Exp(Calpha__2 \times VD_p1_2z[t] + Cbeta__2 \times VD_p1_2r[t] + \\ + Cgamma__2 \times VD_p1_2n[t]). \quad (4.2.50)$$

В следующих формулах определяется спрос инновационного сектора на факторы производства.

Спрос на рабочую силу:

— по государственным ценам:

$$VD_p3_2l[t] = (VO_p3_2l[t] \times VB__2[t])/CP__3l[t]; \quad (4.2.51)$$

— по рыночным ценам:

$$VD_p1_2l[t] = (CO_p1_2l[t] \times VB__2[t])/VP__1l[t]. \quad (4.2.52)$$

Спрос на услуги по предоставлению знаний:

$$VD_p1_2z[t] = (CO_p1_2z[t] \times VB__2[t])/VP__1z[t]. \quad (4.2.53)$$

Спрос на образовательные услуги:

$$VD_p1_2r[t] = (CO_p1_2r[t] \times VB__2[t])/VP__1r[t]. \quad (4.2.54)$$

Спрос на инновационные товары:

$$VD_p1_2n[t] = (CO_p1_2n[t] \times VB__2[t])/VP__1n[t]. \quad (4.2.55)$$

Спрос на инвестиционные товары:

$$VD_p1_2i[t] = (CO_p1_2i[t] \times VB__2[t])/VP__1i[t]. \quad (4.2.56)$$

В следующих формулах определяется предложение товаров, производимых инновационным сектором.

Предложение инновационных товаров:

— по рыночным ценам:

$$VS_p1_2n[t] = CE_p1_2n \times VY__2[t]. \quad (4.2.57)$$

— по экспортным ценам:

$$VS_p2_2n[t] = CE_p2_2n \times VY__2[t]. \quad (4.2.58)$$

В следующей формуле подсчитывается выручка инновационного сектора:

$$VY_p_2[t] = VS_p1_2n[t] \times VP__1n[t] + \\ + VS_p2_2n[t] \times CP__2n[t]. \quad (4.2.59)$$

Бюджет инновационного сектора:

$$VB__2[t] = VB_b_2[t] \times (1 + CP__bpercent[t-1]) + \\ + VY_p_2[t] + VG_s_2[t-1]. \quad (4.2.60)$$

Бюджет агента формируется из:

1) средств, находящихся на банковских счетах (с учетом процентов по вкладам);

2) выручки, полученной в текущем периоде;

3) субсидий, полученных из консолидированного бюджета VG_s_2.

Динамика остатков средств инновационного сектора на счетах в банках:

$$VB_b_2[t+1] = VO_s_2[t] \times VB__2[t]. \quad (4.2.61)$$

Основные фонды:

$$VK__2[t+1] = (1 - CR__2[t]) \times VK__2[t] + VD_p1_2i[t]. \quad (4.2.62)$$

В этой формуле подсчитывается объем основных фондов сучетом их выбытия. Со знаком плюс идут введенные в эксплуатацию фонды.

Доля бюджета инновационного сектора, идущая на уплату налогов в консолидированный бюджет:

$$VO_t_2[t] = (VY_p_2[t] \times CT_vad[t])/VB__2[t] + \\ + ((VY_p_2[t] - VW_3_2[t] - VW_1_2[t] - \\ - VK__2[t] \times CA_0_2[t]) \times CT_pr[t])/VB__2[t]. \quad (4.2.63)$$

Здесь учитываются налог на добавленную стоимость и налог на прибыль. При подсчете доли бюджета, идущей на уплату налога на прибыль, из выручки вычитаются затраты на оплату рабочей силы предприятий государственной (VW_3_2) и частной (VW_1_2) форм собственности, а также амортизационные отчисления $VK__2[t] \times CA_0_2[t]$.

Доля бюджета, идущая на уплату единого социального налога во внебюджетные фонды:

$$VO_f_2[t] = ((VW_3_2[t] + VW_1_2[t]) \times CT_esn[t])/VB__2[t]. \quad (4.2.64)$$

Остаток бюджета инновационного сектора:

$$VO_s_2[t] = 1 - CO_p1_2l[t] - VO_p3_2l[t] - \\ - CO_p1_2z[t] - CO_p1_2r[t] - CO_p1_2n[t] - \\ - CO_p1_2i[t] - VO_t_2[t] - VO_f_2[t]. \quad (4.2.65)$$

Экономический агент № 3 — прочие отрасли экономики. Выше говорилось о том, что на рынках с государственными ценами уравнивание совокупного спроса и предложения происходит посредством корректировки доли бюджета VO_p3_3l. Этот процесс описывается следующей формулой:

$$VO_p3_3l[Q+1] = VO_p3_3l[Q] \times Ceta__3 + \\ + VO_p3_3l[Q] \times VI__l[t] \times (1 - Ceta__3), \quad (4.2.66)$$

где Q — шаг итерации, $0 < Ceta__3 < 1$ — модельная константа.

Переходим к формулам, определяющим поведение прочих отраслей экономики.

Уравнение производственной функции:

$$VY__3[t+1] = CA_r_3 \times \\ \times Power(((VK__3[t] + VK__3[t+1])/2), CA_k_3) \times \\ \times Power((VD_p1_3l[t] + VD_p3_3l[t]), CA_l_3) \times \\ \times Exp(Calpha__3 \times VD_p1_3z[t] + Cbeta__3 \times VD_p1_3r[t] + \\ + Cgamma__3 \times VD_p1_3n[t]). \quad (4.2.67)$$

В следующих формулах определяется спрос прочих отраслей экономики на факторы производства.

Спрос на рабочую силу:

— по государственным ценам:

$$VD_p3_3l[t] = (VO_p3_3l[t] \times VB__3[t])/CP__3l[t]; \quad (4.2.68)$$

— по рыночным ценам:

$$VD_p1_3l[t] = (CO_p1_3l[t] \times VB__3[t])/VP__1l[t]. \quad (4.2.69)$$

Спрос на услуги по предоставлению знаний:

$$VD_p1_3z[t] = (CO_p1_3z[t] \times VB__3[t])/VP__1z[t]. \quad (4.2.70)$$

Спрос на образовательные услуги:

$$VD_p1_3r[t] = (CO_p1_3r[t] \times VB__3[t])/VP__1r[t]. \quad (4.2.71)$$

Спрос на инновационные товары:

$$VD_p1_3n[t] = (CO_p1_3n[t] \times VB__3[t])/VP__1n[t]. \quad (4.2.72)$$

Спрос на инвестиционные товары:

$$VD_p1_3i[t] = (CO_p1_3i[t] \times VB__3[t])/VP__1i[t]. \quad (4.2.73)$$

В следующих формулах определяется предложение товаров, производимых прочими отраслями экономики.

Предложение конечных товаров для домашних хозяйств:

$$VS_p1_3c[t] = CE_p1_3c \times VY__3[t]. \quad (4.2.74)$$

Предложение конечных товаров для экономического агента № 5:

$$VS_p1_3g[t] = CE_p1_3g \times VY__3[t]. \quad (4.2.75)$$

Предложение инвестиционных товаров:

$$VS_p1_3i[t] = CE_p1_3i \times VY__3[t]. \quad (4.2.76)$$

Предложение товаров на экспорт:

$$VS_p2_3c[t] = CE_p2_3c \times VY__3[t]. \quad (4.2.77)$$

В следующей формуле подсчитывается выручка прочих отраслей экономики:

$$VY_p_3[t] = VS_p1_3c[t] \times VP__1c[t] + VS_p1_3g[t] \times VP__1g[t] + \\ + VS_p1_3i[t] \times VP__1i[t] + VS_p2_3c[t] \times CP__2c[t]. \quad (4.2.78)$$

Бюджет прочих отраслей экономики:

$$VB__3[t] = VB_b_3[t] \times (1 + CP__bpercent[t-1]) + \\ + VY_p_3[t] + VG_s_3[t-1]. \quad (4.2.79)$$

Бюджет формируется из:

1) средств, находящихся на банковских счетах (с учетом процентов по вкладам);

2) выручки, полученной в текущем периоде;

3) субсидий, полученных из консолидированного бюджета VG_s_3.

Динамика остатков средств прочих отраслей экономики на счетах в банках:

$$VB_b_3[t+1] = VO_s_3[t] \times VB__3[t]. \quad (4.2.80)$$

Основные фонды:

$$VK__3[t+1] = (1 - CR__3[t]) \times VK__3[t] + VD_p1_3i[t]. \quad (4.2.81)$$

В этой формуле подсчитывается объем основных фондов с учетом их выбытия. Со знаком плюс идут введенные в эксплуатацию фонды.

Доля бюджета прочих отраслей экономики, идущая на уплату налогов в консолидированный бюджет:

$$VO_t_3[t] = (VY_p_3[t] \times CT_vad[t])/VB__3[t] + \\ + ((VY_p_3[t] - VW_3_3[t] - VW_1_3[t] - \\ - VK__3[t] \times CA_0_3[t]) \times CT_pr[t])/VB__3[t]. \quad (4.2.82)$$

Здесь учитываются налог на добавленную стоимость и налог на прибыль. При подсчете доли бюджета, идущей на уплату налога на прибыль, из выручки вычитаются затраты на оплату рабочей силы предприятий государственной (VW_3_3) и частной (VW_1_3) форм собственности, а также амортизационные отчисления.

Доля бюджета, идущая на уплату единого социального налога во внебюджетные фонды:

$$VO_f_3[t] = ((VW_3_3[t] + VW_1_3[t]) \times CT_esn[t])/VB__3[t]. \quad (4.2.83)$$

Остаток бюджета прочих отраслей экономики:

$$VO_s_3[t] = 1 - CO_p1_3l[t] - VO_p3_3l[t] - \\ - CO_p1_3z[t] - CO_p1_3r[t] - CO_p1_3n[t] - \\ - CO_p1_3i[t] - VO_t_3[t] - VO_f_3[t]. \quad (4.2.84)$$

Экономический агент № 4 — совокупный потребитель (домашние хозяйства). Переходим к формулам, определяющим поведение совокупного потребителя.

Спрос домашних хозяйств на конечные товары:

$$VD_p1_4c[t] = (CO_p1_4c[t] \times VB__4[t])/VP__1c[t]. \quad (4.2.85)$$

Спрос домашних хозяйств на образовательные услуги:

$$VD_p1_4r[t] = (CO_p1_4r[t] \times VB__4[t])/VP__1r[t]. \quad (4.2.86)$$

Заработная плата работников сектора науки и образования:
— предприятий государственной формы собственности:

$$VW_3_1[t] = VD_p3_1l[t] \times CP__3l[t]; \quad (4.2.87)$$

— предприятий частной формы собственности:

$$VW_1_1[t] = VD_p1_1l[t] \times VP__1l[t]. \quad (4.2.88)$$

Заработная плата работников инновационного сектора:
— предприятий государственной формы собственности:

$$VW_3_2[t] = VD_p3_2l[t] \times CP__3l[t]; \quad (4.2.89)$$

— предприятий частной формы собственности:

$$VW_1_2[t] = VD_p1_2l[t] \times VP__1l[t]. \quad (4.2.90)$$

Заработная плата работников прочих отраслей экономики:
— предприятий государственной формы собственности:

$$VW_3_3[t] = VD_p3_3l[t] \times CP__3l[t]; \quad (4.2.91)$$

— предприятий частной формы собственности:

$$VW_1_3[t] = VD_p1_3l[t] \times VP__1l[t]. \quad (4.2.92)$$

Бюджет домашних хозяйств:

$$\begin{aligned} VB__4[t] = VB_b_4[t-1] \times (1 + CP_h_bpercent[t-1]) + \\ + VB__4[t-1] \times VO_s_4[t-1] + VW_3_1[t] + VW_1_1[t] + \\ + VW_3_2[t] + VW_1_2[t] + VW_3_3[t] + VW_1_3[t] + \\ + VG_f_4[t-1] + VG_tr_4[t-1]. \end{aligned} \quad (4.2.93)$$

Бюджет агента формируется из:
1) денег, отложенных на счетах в банках;
2) нераспределенных наличных денег, оставшихся с предыдущего периода;
3) заработной платы, получаемой у трех агентов-производителей;
4) пенсий, пособий и субсидий, получаемых из внебюджетных фондов.

Динамика остатков средств домашних хозяйств на счетах в банках:

$$VB_b_4[t] = CO_b_4[t] \times VB__4[t]. \quad (4.2.94)$$

Доля бюджета, идущая на уплату подоходного налога:

$$\begin{aligned} VO_tax_4[t] = ((VW_3_1[t] + VW_1_1[t] + \\ + VW_3_2[t] + VW_1_2[t] + VW_3_3[t] + \\ + VW_1_3[t]) \times CT_pod[t])/VB__4[t]. \end{aligned} \quad (4.2.95)$$

Остаток наличных денег:

$$\begin{aligned} VO_s_4[t] = 1 - CO_p1_4c[t] - CO_p1_4r[t] - \\ - VO_tax_4[t] - CO_b_4[t]. \end{aligned} \quad (4.2.96)$$

Экономический агент № 5 — правительство. Переходим к формулам, определяющим поведение экономического агента № 5.

Консолидированный бюджет:

$$VB__5[t] = VO_t_1[t] \times VB__1[t] + VO_t_2[t] \times VB__2[t] + \\ + VO_t_3[t] \times VB__3[t] + VO_tax_4[t] \times VB__4[t] + \\ + CB_other_5 + VB_b_5[t] \times (1 + CP__bpercent[t-1]). \quad (4.2.97)$$

В этой формуле суммируются деньги, собранные в виде налогов с агентов-производителей, а также от населения. Экзогенно вводимое в модель значение CB_other_5 представляет собой сумму других налогов (не вошедших в перечень рассматриваемых в модели), неналоговых доходов и прочих доходов консолидированного бюджета. К полученной сумме приплюсовываются средства, находящиеся на банковских счетах (с учетом процентов по вкладам).

Динамика остатков средств консолидированного бюджета на счетах в банках:

$$VB_b_5[t+1] = CO_s_5b[t] \times VB__5[t]. \quad (4.2.98)$$

Денежные средства внебюджетных фондов:

$$VF__5[t] = VO_f_1[t] \times VB__1[t] + \\ + VO_f_2[t] \times VB__2[t] + VO_f_3[t] \times VB__3[t] + \\ + VF_b_5[t] \times (1 + CP__bpercent[t-1]). \quad (4.2.99)$$

Здесь рассчитывается сумма, собранная с агентов-производителей в виде единого социального налога, поступающая насчета внебюджетных фондов:

— пенсионного фонда;

— фонда социального страхования;

— Федерального и территориальных фондов обязательного медицинского страхования.

К полученной сумме приплюсовываются средства, находящиеся на банковских счетах (с учетом процентов по вкладам).

Динамика остатков средств внебюджетных фондов на счетах в банках:

$$VF_b_5[t+1] = CO_s_5f[t] \times VF__5[t]. \quad (4.2.100)$$

Спрос на конечные товары:

$$VD_p1_5g[t] = (CO_p1_5g[t] \times VB__5[t])/VP__1g[t]. \quad (4.2.101)$$

Оплата услуг по предоставлению знаний:

$$VD_p1_5z[t] = (CO_p1_5z[t] \times VB__5[t])/VP__1z[t]. \quad (4.2.102)$$

Оплата образовательных услуг:

$$VD_p1_5r[t] = (CO_p1_5r[t] \times VB__5[t])/VP__1r[t]. \quad (4.2.103)$$

Спрос на инновационные товары:

$$VD_p1_5n[t] = (CO_p1_5n[t] \times VB__5[t])/VP__1n[t]. \quad (4.2.104)$$

Субсидии секторам-производителям:
— сектору науки и образования:

$$VG_s_1[t] = CO_s1_5[t] \times VB__5[t]; \quad (4.2.105)$$

— инновационному сектору:

$$VG_s_2[t] = CO_s2_5[t] \times VB__5[t]; \quad (4.2.106)$$

— прочим отраслям экономики:

$$VG_s_3[t] = CO_s3_5[t] \times VB__5[t]. \quad (4.2.107)$$

Социальные трансферты населению:

$$VG_tr_4[t] = CO_tr_5[t] \times VB__5[t]. \quad (4.2.108)$$

Средства внебюджетных фондов, выделенные для населения:

$$VG_f_4[t] = CO_f4_5[t] \times VF__5[t]. \quad (4.2.109)$$

Сюда входят средства пенсионного фонда и фонда социального страхования, идущие на выплату пенсий и пособий.

Интегральные показатели модели. В этом пункте мы приведем формулы, по которым вычисляются некоторые интегральные показатели экономики Казахстана.

ВВП (в ценах базового периода):

$$VY[t] = VY__1[t] + VY__2[t] + VY__3[t]. \quad (4.2.110)$$

ВВП (в текущих ценах):

$$VY_p[t] = VY_p_1[t] + VY_p_2[t] + VY_p_3[t]. \quad (4.2.111)$$

Индекс потребительских цен:

$$VP[t] = 100 \times (VP__1c[t]/VP__1c[t-1]). \quad (4.2.112)$$

Основные фонды

$$VK[t] = VK__1[t] + VK__2[t] + VK__3[t]. \quad (4.2.113)$$

В данной модели:

— соотношения (4.1.1) представлены 12 выражениями для нахождения ВДС секторов с помощью производственных функций, основных фондов секторов, остатков средств на счетах в банках;

— соотношения (4.1.2) представлены 88 выражениями для нахождения спросов и предложений на различные товары и услуги секторов, бюджетов и долей бюджетов секторов, субсидий секторам из консолидированного бюджета и др.;

— соотношения (4.1.1) представлены 10 выражениями, служащими для нахождения равновесных рыночных цен и долей бюджетов секторов на рынках с экзогенными ценами.

Значения экзогенных функций рассматриваемой модели были определены с помощью решения задачи параметрической идентификации модели с использованием доступных статистических данных Республики Казахстан за период 2000–2008 гг. Адекватность моделии процесса идентификации обеспечивались следующими фактами.

1. В критерий идентификации были включены статистические данные по основным макроэкономическим показателям (ВВП и ВДС секторов, основные фонды секторов и др.).

2. Оценки экзогенных параметров и начальных значений разностных уравнений, для которых имелись наблюдаемые значения, искались в промежутках с центрами в соответствующих наблюдаемых значениях или покрывающих несколько наблюдаемых значений.

3. Промежутки для оценки прочих параметров определялись по косвенным признакам. При этом значения параметров, изменяющихся по годам, искались при условии их незначительного варьирования.

В результате решения задачи параметрической идентификации относительная величина среднеквадратического отклонения расчетных значений эндогенных переменных от соответствующих наблюдаемых значений (статистических данных) составила менее одного процента.

4. Проверка адекватности модели с целью выявления ее способности давать точные прогнозные значения была осуществлена с помощью ретроспективного прогноза. Для этого после решения задачи параметрической идентификации с использованием статистических данных республики [37] за 2000–2007 гг. значения всех экзогенных показателей модели были продлены на период 2008 г. и произведен просчет модели на проверяемый период. Дополнительная параметрическая идентификация при этом не проводилась.

В результате совместного решения задач A и B (см. (4.1.1)) с использованием алгоритма Нелдера–Мидда [66] было получено значение $K_B = 0{,}0073$. При этом относительная величина отклонений расчетных значений переменных используемых в основном критерии от соответствующих наблюдаемых значений составила менее 0,73%.

Таблица 4.2.3. **Наблюдаемые, расчетные значения выходных переменных модели и соответствующие отклонения**

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
VY^*	2,60	2,95	3,24	3,54	3,88	4,26	4,72	5,14	5,30
VY	2,60	2,95	3,24	3,54	3,88	4,26	4,72	5,15	5,26
ΔVY	−0,04	0,00	0,04	0,03	0,04	−0,01	0,07	0,26	−0,73
$VY__1^*$	0,107	0,102	0,116	0,125	0,134	0,157	0,164	0,165	0,200
$VY__1$	0,109	0,102	0,116	0,126	0,134	0,158	0,164	0,164	0,199
$\Delta VY__1$	1,80	−0,76	−0,01	1,32	0,46	0,49	−0,02	−0,59	−0,34
$VY__2^*$	0,033	0,0364	0,041	0,045	0,050	0,049	0,068	0,072	0,061
$VY__2$	0,041	0,0343	0,039	0,044	0,050	0,049	0,067	0,071	0,061
$\Delta VY__2$	25,00	−5,86	−4,73	−2,65	−0,57	−0,19	−0,13	−0,88	0,16
$VY__3^*$	2,23	2,46	2,80	3,07	3,36	3,68	4,03	4,48	4,88
$VY__3$	1,9	2,463	2,8	3,07	3,36	3,68	4,03	4,48	4,89
$\Delta VY__3$	−14,63	0,08	0,07	0,03	0,02	0,02	0,00	0,11	0,28
VP^*		106,40	106,60	106,80	106,70	107,50	108,40	118,80	109,50
VP		106,57	106,81	106,95	106,83	107,64	108,50	118,90	109,50
ΔVP	0,00	0,16	0,20	0,14	0,12	0,13	0,09	0,09	0,00

Результаты просчета и ретроспективного прогноза модели на 2008 г., частично представленные в табл. 4.2.3, демонстрируют расчетные (VY, $VY__1$, $VY__2$, $VY__3$, VP), наблюдаемые значения и отклонения расчетных значений основных выходных переменных модели от соответствующих наблюдаемых значений. Здесь промежуток времени 2000–2007 гг. соответствует периоду параметрической идентификации модели; 2008 г. — период ретропрогноза; VY — валовой внутренний продукт ($\times 10^{12}$ тенге, в ценах 2000 г.); $VY__i$ — валовая добавленная стоимость i-го сектора ($\times 10^{12}$ тенге, в ценах 2000 г.); VP — индекс потребительских цен

в процентах к предыдущему году; знак «*» соответствует наблюдаемым значениям, знак «Δ» соответствует отклонениям (в процентах) расчетных значений от соответствующих наблюдаемых значений.

Средняя погрешность расчетных значений эндогенных переменных от соответствующих наблюдаемых значений на период ретроспективного прогнозирования составила 1,04%.

Результаты верификации показывают приемлемую адекватность CGE-модели с сектором знаний.

4.2.2. Оценка положений макроэкономической теории на базе вычислимой модели общего равновесия с сектором знаний. На базе вычислимой модели с сектором знаний были проведены эксперименты по проверке основных положений макроэкономической теории с целью обнаружения возможных причин возникновения циклических колебаний макроэкономических показателей при шоковых изменениях спросов на конечные и инвестиционные товары. Эксперименты, аналогичные экспериментам, описанным в п. 4.1.2 для вычислимой модели общего равновесия отраслей экономики, состоят в просчете следующих сценариев изменения спросов на конечные и инвестиционные товары:

a) $O_1[t] = O_1[t-1] + a(Y[t] - Y[t-1]);$ (4.2.114)

b) $O_{2i}[t] = O_{2i}[t-1] + b(Y[t-3] - 2Y[t-2] + Y[t-1]),$
$i = 1, 2, 3;$ (4.2.115)

c) совместное применение сценариев a) и b);

d) увеличение долей $O_1[t]$ в k раз по сравнению с базовым вариантом;

e) увеличение долей $O_{2i}[t]$ $(i = 1, 2, 3)$ в l раз по сравнению с базовым вариантом;

f) совместное применение сценариев d) и e).

Здесь $t = 2010, \ldots, 2015$ — время в годах; $O_1[t] = CO_p_4c[t]$ — доля бюджета домашних хозяйств, идущая на покупку конечных товаров (экзогенная функция); $O_{2i}[t]$ — доля бюджета i-й отрасли, идущая на покупку инвестиционных товаров $(i = 1, 2, 3)$ (экзогенная функция); $Y[t] = VY[t]$ — ВВП в ценах 2000 г. (эндогенная переменная); a, b, l, k — положительные константы $(l > 1,\ k > 1)$.

В результате проведения вычислительных экспериментов на базе модели по реализации сценариев a)–f) наблюдались следующие циклические колебания переменной $P(t)$ (индекс потребительских цен) (рис. 4.2.1–4.2.4). При этом для значений реальных показателей (в частности $Y[t]$) колебательных явлений обнаружено

не было. При использовании всех предложенных сценариев наблюдалось снижение значений показателя ВВП $Y[t]$ по сравнению с базовым вариантом.

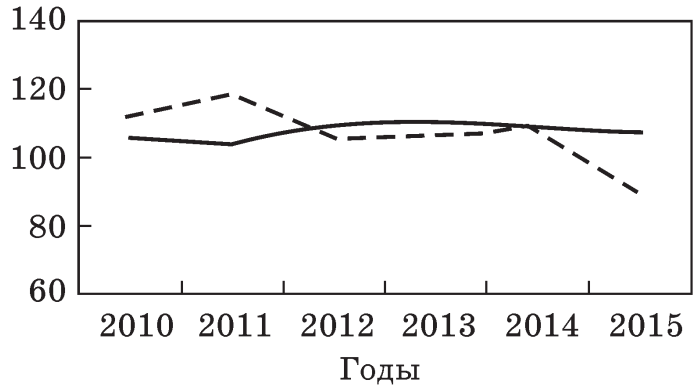

Рис. 4.2.1. Значения индекса потребительских цен при использовании сценария a) (где $a = 3 \cdot 10^{-13}$) (штриховая линия) и для базового варианта (сплошная линия)

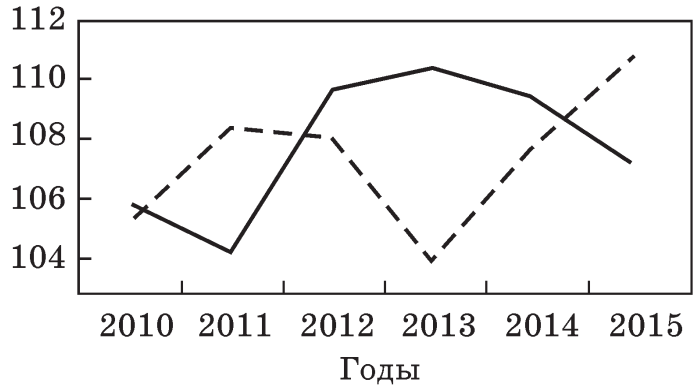

Рис. 4.2.2. Значения индекса потребительских цен при использовании сценария b) (где $b = 10^{-13}$) (штриховая линия) и для базового варианта (сплошная линия)

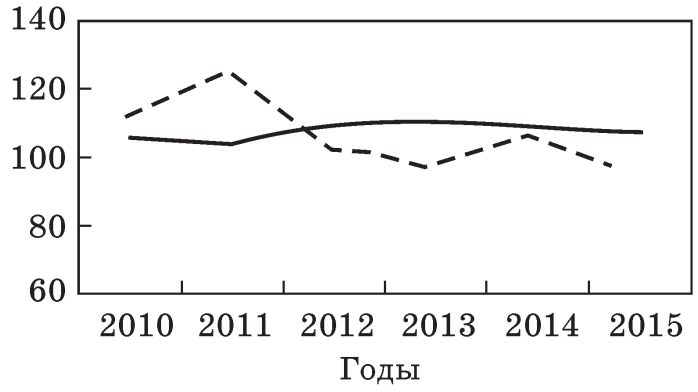

Рис. 4.2.3. Значения индекса потребительских цен при использовании сценария c) (где $a = 3 \cdot 10^{-13}$, $b = 10^{-13}$) (штриховая линия) и для базового варианта (сплошная линия)

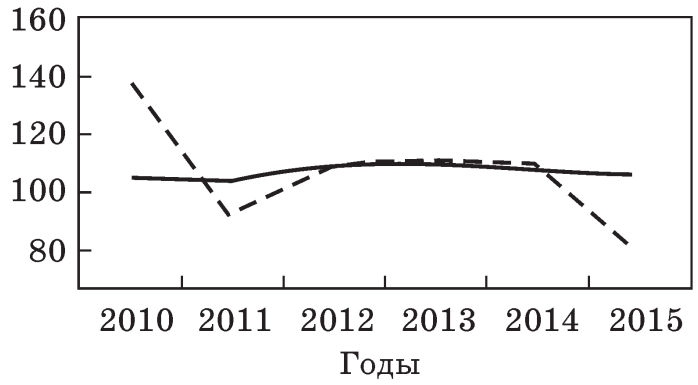

Рис. 4.2.4. Значения индекса потребительских цен при использовании сценария d) (где $k = 1{,}2$) (штриховая линия) и для базового варианта (сплошная линия)

Представленные на рис. 4.2.1–4.2.4 результаты экспериментов подтверждают, как и для приведенного выше случая вычислимой модели секторов экономики, соответствующие положения макроэкономической теории [40].

4.2.3. Нахождение оптимальных законов параметрического регулированияна базе CGE-модели с сектором знаний

Подавление циклических колебаний макроэкономических показателей методами параметрического регулирования. В вычислительных экспериментах рассматривалась следующая задача (аналогичная рассмотренной в п. 4.1.3 задачи для случая вычислимой модели секторов экономики) подавления циклических колебаний уровня потребительских цен, возникших при использовании сценария c) развития экономической системы, предусматривающего линейную зависимость между объемом потребительских расходов и текущим доходом и линейную зависимость между инвестициями и приростом доходов.

На базе вычислимой модели с сектором знаний с использованием сценария c) (см. п. 4.2.2, где $a = 3 \cdot 10^{-13}$, $b = 10^{-13}$) найти значения налоговых ставок $CT_vad[t]$, $CT_pr[t]$, $CT_pod[t]$, $CT_esn[t]$ для 2010–2015 гг., которые обеспечивали бы нижнюю грань следующего критерия K_p, характеризующего отклонение расчетных значений индекса потребительских цен $VP[t]$ от соответствующих желаемых значений $P[t]$:

$$K_p = \sum_{t=2010}^{2015} \left(\frac{VP[t] - P[t]}{P[t]} \right)^2 .$$

Здесь в качестве желаемых значений $P[t]$ использовались расчетные базовые значения индекса потребительских цен модели без параметрического регулирования.

Ограничения на регулируемые параметры: $0{,}104 \leqslant CT_vad[t] \leqslant 0{,}156$, $0{,}24 \leqslant CT_pr[t] \leqslant 0{,}36$, $0{,}04 \leqslant CT_pod[t] \leqslant 0{,}06$, $0{,}16 \leqslant CT_esn[t] \leqslant 0{,}24$.

Ограничения на рост макроэкономического показателя: $Yr[t] \geqslant 0{,}95Yc[t]$. Здесь $Yc[t]$ — расчетные сценарные ВВП без параметрического регулирования; $Yr[t]$ — расчетные значения ВВП с параметрическим регулированием.

Значение критерия K_p без параметрического регулирования $K_p = 0{,}424$. Оптимальное значение критерия K_p при применении закона параметрического регулирования оказалось равным $K_p = 0{,}000844$.

Базовые значения макроэкономических показателей $Y(t)$ и $P(t)$, значения, полученные при применении сценария с) и значения, полученные при применении оптимального закона параметрического регулирования приведены на рис. 4.2.5, 4.2.6.

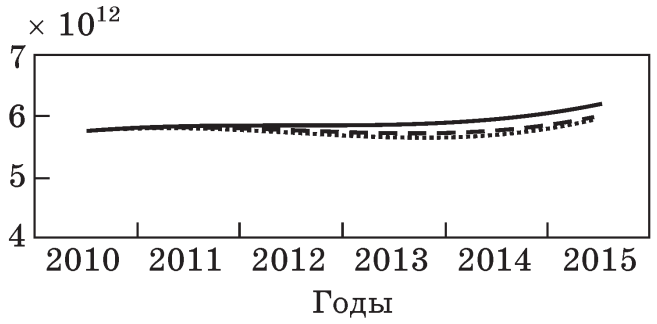

Рис. 4.2.5. Расчетные значения сумм ВДС отраслей экономики: сплошная линия — базовый вариант; штриховая линия — сценарный вариант; пунктирная линия — подавление

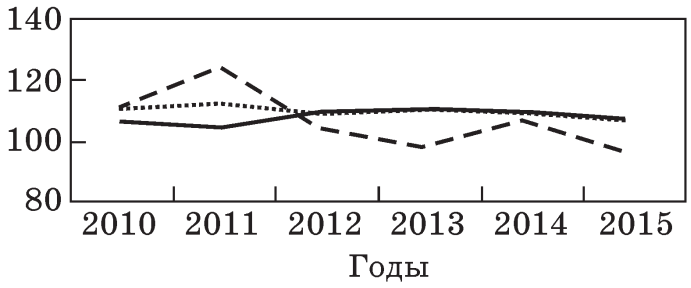

Рис. 4.2.6. Расчетные значения индекса потребительских цен: сплошная линия — базовый вариант; штриховая линия — сценарный вариант; пунктирная линия — подавление

Анализ результатов вычислительных экспериментов, представленных на рис. 4.2.5, 4.2.6 показывает, что при использовании найденного оптимального закона параметрического регулирования

индекс потребительских цен в 2011 г. оказался существенно меньше сценарного, а на регулируемом периоде, начиная с 2012 г., практически полностью совпал с желаемыми значениями. При этом значения ВВП практически совпали с исходными значениями сценарного варианта.

Нахождение оптимальных законов параметрического регулирования на базе стохастической CGE-модели с сектором знаний. Стохастическая вычислимая модель с сектором знаний была получена из соответствующей детерминированной модели (с найденными в результате решения задачи параметрической идентификации оценками значений экзогенных параметров) путем добавления дискретного гауссовского шума с независимыми составляющими к правым частям всех динамических уравнений модели. К таким уравнениям относятся уравнения для расчета следующих эндогенных переменных:

— добавленных стоимостей ($VY__1$, $VY__2$, $VY__3$) трех секторов-производителей с помощью соответствующих производственных функций;

— добавленных стоимостей ($VK__1$, $VK__2$, $VK__3$) трех секторов-производителей;

— годовых бюджетов ($VB__1$, $VB__2$, ..., $VB__5$) секторов 1–5.

Добавленные аддитивные шумы к выражениям добавленных стоимостей $VY__i$ могут инициировать соответствующие циклические колебания, вызываемые резкими сдвигами (шоками) в развитии технологического прогресса и случайными изменениями в темпах роста населения. Добавленные аддитивные шумы к выражениям добавленных стоимостей $VK__i$ характеризуют случайные изменения долей бюджетов агентов-производителей, идущих на покупку инвестиционных товаров, и случайный характер коэффициентов выбытия фондов. Добавленные аддитивные шумы к выражениям годовых бюджетов $VB__i$ описывают случайный характер доходов, получаемых сектором в текущем периоде.

В настоящей работе оценки средних квадратичных отклонений генерируемых гауссовских случайных величин, определяющих указанный шум, были получены на основе анализа соответствующих статистических данных развития экономики Республики Казахстан в 2000–2008 гг. следующим образом. Для каждого временно́го ряда наблюдаемых значений указанных выше переменных рассчитывались выборочные средние квадратичные отклонения разностей между наблюдаемыми значениями и

трендом этих значений. Найденные таким образом величины были приняты за оценки средних квадратичных отклонений компонент генерируемого дискретного гауссовского шума $\xi(t)$, добавляемого к правым частям указанных выше 11 динамических уравнений.

В вычислительных экспериментах со стохастической вычислимой моделью секторов экономики в качестве критерия оптимизации использовался критерий

$$K_s = \mathrm{E}\left\{\frac{1}{6}\sum_{t=2010}^{2015} VY[t]\right\} \to \max. \qquad (4.2.116)$$

Здесь K_s — математическое ожидание среднего ВВП страны в ценах 2000 г. за 2010–2015 гг.

При экспериментах с критерием оптимизации (4.2.116) использовались дополнительные ограничения на рост уровня потребительских цен следующего вида:

$$\mathrm{E}(VPr[t]) \leqslant 1{,}09\mathrm{E}(VP[t]), \quad t = 2010, \ldots, 2015. \qquad (4.2.117)$$

Здесь $VP[t]$ — расчетный уровень потребительских цен модели без параметрического регулирования, $VPr[t]$ — уровень потребительских цен с параметрическим регулированием.

В вычислительных экспериментах осуществлялось регулирование 18 управляемых параметров $O_i[t] = CO_s1_i[t]$ $(t = 2010, \ldots, 2015,\ i = 1, 2, 3)$ — долей консолидированного бюджета, идущих на субсидирование трех агентов производителей в 2100–2015 гг. При этом должно выполняться естественное ограничение: сумма всех используемых в модели восьми долей консолидированного бюджета (включая указанные выше доли $O_i[t]$, $i = 1, 2, 3$) не должна превышать единицы:

$$\sum_{i=1}^{8} O_i[t] \leqslant 1, \quad t = 2010, \ldots, 2015. \qquad (4.2.118)$$

Рассматривалась следующая задача нахождения оптимальных значений регулируемых параметров. На базе стохастической вычислимой модели с сектором знаний найти значения долей $O_i[t]$ консолидированных бюджетов, идущих на субсидирование трех агентов производителей, которые обеспечивали бы верхнюю грань критерия K_s при дополнительных ограничениях (4.2.118) на эти доли.

Решения этой оптимизационной задачи проводились с помощью алгоритма Нелдора–Мида [66]. После применения параметрического регулирования долей бюджетов стохастической модели значение критерия оказалось равным $K_s = 7{,}234 \cdot 10^{12}$, его значение увеличилось на 24,93% по сравнению с базовым вариантом $K_s = 5{,}79 \cdot 10^{12}$.

Аналогичная задача параметрического регулирования с соответствующими ограничениями решалась и на базе детерминированной CGE-модели с сектором знаний с использованием критерия K_d (детерминированного аналога критерия (4.2.116)):

$$K_d = \frac{1}{6} \sum_{t=2010}^{2015} Y(t).$$

После применения параметрического регулирования долей консолидированных бюджетов, идущих на субсидирование агентов-производителей, значение критерия детерминированной модели оказалось равным $K_d = 9{,}23 \cdot 10^{12}$, значение критерия увеличилось на 33,14% по сравнению с базовым вариантом.

4.3. Регулирование эволюции национальной экономики на базе вычислимой модели общего равновесия с теневым сектором

4.3.1. Описание модели, параметрическая идентификации и ретроспективный прогноз. Как известно, национальные хозяйства многих стран [24] функционируют с теневым сектором, деятельность которого негативно сказывается на эволюции экономики страны. Рациональным направлением оценки и поиска эффективных экономических мер снижения влияния деятельности теневого сектора на развитие экономической системы страны является использование математической модели национальной экономики.

Экономические агенты модели. Рассматриваеваемая модель [27] описывает поведение и взаимодействие на 10 товарных рынках и 3 рынках рабочей силы следующих 7 экономических агентов. Первые три из них являются агентами-производителями.

Экономический агент № 1 — государственный сектор экономики. Сюда входят предприятия, доля государственной собственности в которых более 50%.

Экономический агент № 2 — рыночный сектор, состоящий из легально существующих предприятий и организаций с частной и смешанной формами собственности.

Государственный и рыночный сектора производят продукт, распределяемый по четырем направлениям:

1) конечный продукт для домашних хозяйств, включающий в себя потребительские товары текущего потребления (продукты питания и т. д.), товары длительного потребления (бытовая техника, автомобили и т. д.), а также услуги;

2) конечный продукт для экономического агента № 5:

a) конечный продукт для государственных учреждений, включающий в себя: бесплатные услуги для населения, оказываемые предприятиями и организациями в области здравоохранения, образования и культуры; услуги, удовлетворяющие потребности общества вцелом, т. е. общее государственное управление, охрана правопорядка, национальная оборона, нерыночная наука, жилищное хозяйство и т. д.;

b) конечный продукт для некоммерческих организаций, обслуживающих домашние хозяйства, включающий всебя бесплатные услуги социального характера;

3) инвестиционные товары — затраты на создание основного капитала. В этот вид товара не входят государственные (или правительственные) инвестиции, поскольку они учитываются в предыдущем виде товара. Основные фонды в модели выделены в отдельный вид товара;

4) экспортные товары. Поскольку одной из составляющих рассмотренных ранее товаров являются импортные товары, то для избегания двойного счета в экспортные товары входит только чистый экспорт.

Помимо произведенного продукта, государственный и рыночный сектора торгуют основными фондами (в модели это капитальные товары).

Экономический агент № 3 — теневой сектор.

Существуют различные виды теневой экономики [27]:

— беловоротничковая теневая экономика, или неофициальная экономическая деятельность работников регистрируемой экономики, связанная с их официальной профессиональной деятельностью. Сюда входят: экономика неформальных связей (т. е. закулисное выполнение обычных производственных заданий); экономика приписок (выдача фиктивных результатов за реальные); экономика взяток (злоупотребление служебным положением должностных лиц в личных целях);

— серая (неформальная) теневая экономика — разрешенная законом экономическая деятельность, которая не учитывается официальной статистикой. В этом секторе ТЭ производятся в

основном обычные товары и услуги (как и в легальной экономике), но производители уклоняются от официального учета, не желая нести дополнительных расходов, связанных с уплатой налогов и т. д.;

— черная (подпольная) теневая экономика — запрещенная законом экономическая деятельность, связанная с производством и реализацией запрещенных товаров и услуг (наркобизнес, рэкет и т. д.).

Что касается теневого сектора рассматриваемой модели, то в него входит серая теневая экономика, а также беловоротничковая, представленная производством рыночным сектором конечных товаров для домашних хозяйств.

Теневой сектор продает только один вид товара — конечный продукт для домашних хозяйств. Этот экономический агент не платит налоги и не получает субсидии. Теневой сектор осуществляет следующие действия:

— по распределению своего бюджета: оплачивает услуги рабочей силы, определяет долю нераспределенного бюджета;

— по распределению произведенного продукта: определяет долю конечного продукта, идущую на продажу на рынке конечных товаров для домашних хозяйств по теневой цене.

Экономический агент № 4 — совокупный потребитель, объединяющий в себя домашние хозяйства страны.

Совокупный потребитель покупает конечные товары, производимые государственным, рыночным и теневым секторами. Кроме того, в рамках этого сектора определяются предложения рабочей силы для государственного, рыночного и теневого секторов.

Экономический агент № 5 — правительство, представленное совокупностью центрального, региональных и местных правительств, а также внебюджетными фондами. Кроме того, в этот сектор входят некоммерческие организации, обслуживающие домашние хозяйства (политические партии, профсоюзы, общественные объединения и т. д.).

Экономический агент № 5 устанавливает налоговые ставки, определяет доли бюджета, идущие на субсидирование производителей и на социальные трансферты, а также расходует средства своего бюджета для покупки конечных товаров, произведенных государственным и рыночным секторами.

Экономический агент № 6 — банковский сектор, включающий в себя Центральный банк и коммерческие банки.

Банковский сектор определяет проценты для привлеченных депозитов и выпускает в обращение деньги.

Экономический агент № 7 — внешний мир.

Экзогенные параметры модели. В число экзогенных параметров входят:

— коэффициенты производственных функций секторов;

— различные доли бюджетов секторов;

— доли произведенного продукта, идущие на продажу на различных рынках;

— нормы амортизации для основных фондов;

— ставки по депозитам;

— эмиссия денег;

— различные налоговые ставки;

— доли консолидированного бюджета, идущие на покупку конечных товаров, на субсидирование государственного и рыночного секторов и на социальные трансферты;

— экспортные цены на конечные товары для внешнего мира.

В табл. 4.3.1 представлен список экзогенных параметров модели.

Таблица 4.3.1. **Экзогенные переменные вычислимой модели отраслей экономики с теневым сектором**

Экономический агент № 1 — государственный сектор экономики	
O_1k_P2	Доля бюджета государственного сектора, идущая на покупку капитальных товаров по цене P_2k
O_1i_P2	Доля бюджета государственного сектора, идущая на покупку инвестиционных товаров по цене P_2i
E_1c_P2	Доля произведенного продукта государственного сектора, идущая на продажу на рынках конечных товаров по цене P_2c
E_1g_P1	Доля произведенного продукта государственного сектора, идущая на продажу на рынках конечных товаров для экономического агента № 5 по цене P_1g
E_1g_P2	Доля произведенного продукта государственного сектора, идущая на продажу на рынках конечных товаров для экономического агента № 5 по цене P_2g
E_1i_P1	Доля произведенного продукта государственного сектора, идущая на продажу на рынках инвестиционных товаров по цене P_1i
E_1i_P2	Доля произведенного продукта государственного сектора, идущая на продажу на рынках инвестиционных товаров по цене P_2i
E_1k_P1	Доля основных фондов государственного сектора, идущая на продажу на рынках капитальных товаров по цене P_1k
E_1k_P2	Доля основных фондов государственного сектора, идущая на продажу на рынках капитальных товаров по цене P_2k

Таблица 4.3.1 (продолжение)

E_1ex_Pex	Доля произведенного продукта государственного сектора, идущая на продажу на рынках конечных товаров в странах внешнего мира по цене P_ex
A_1_r	Эмпирический коэффициент размерности государственного сектора
A_1_k	Коэффициент при капитале государственного сектора
A_1_l	Коэффициент при труде государственного сектора
A_1_n	Норма амортизации для основных фондов государственного сектора
Экономический агент № 2 — рыночный сектор экономики	
O_2l_P2	Доля бюджета рыночного сектора, идущая на покупку рабочей силы по цене P_2l
O_2k_P2	Доля бюджета рыночного сектора, идущая на покупку капитальных товаров по цене P_2k
O_2i_P2	Доля бюджета рыночного сектора, идущая на покупку инвестиционных товаров по цене P_2i
E_2c_P2	Доля произведенного продукта рыночного сектора, идущая на продажу на рынках конечных товаров по цене P_2c
E_2c_P3	Доля произведенного продукта рыночного сектора, идущая на продажу на рынках конечных товаров по цене P_3c
E_2g_P2	Доля произведенного продукта рыночного сектора, идущая на продажу на рынках конечных товаров для экономического агента № 5 по цене P_2g
E_2i_P2	Доля произведенного продукта рыночного сектора, идущая на продажу на рынках инвестиционных товаров по цене P_2i
E_2k_P2	Доля основных фондов рыночного сектора, идущая на продажу на рынках капитальных товаров по цене P_2k
E_2ex_Pex	Доля произведенного продукта рыночного сектора, идущая на продажу на рынках конечных товаров в странах внешнего мира по цене P_ex
A_2_r	Эмпирический коэффициент размерности рыночного сектора
A_2_k	Коэффициент при капитале рыночного сектора
A_2_l	Коэффициент при труде рыночного сектора
A_2_n	Норма амортизации для основных фондов рыночного сектора
Экономический агент № 3 — теневой сектор	
O_3l_P3	Доля бюджета теневого сектора, идущая на покупку рабочей силы по цене P_3l
E_3c_P3	Доля произведенного продукта теневого сектора, идущая на продажу на рынках конечных товаров по цене P_3c

Таблица 4.3.1 (продолжение)

A_3_r	Эмпирический коэффициент размерности теневого сектора
A_3_k	Коэффициент при капитале теневого сектора
A_3_l	Коэффициент при труде теневого сектора
Экономический агент № 4 — совокупный потребитель	
L_1_a	Доля работников, прибывших в государственный сектор (к примеру, начавших в государственном секторе свою трудовую деятельность)
L_1_r	Доля работников, выбывших из государственного сектора (к примеру, ушедших на пенсию)
L_2_a	Доля работников, прибывших в рыночный сектор (к примеру, начавших в рыночном секторе свою трудовую деятельность)
L_2_r	Доля работников, выбывших из рыночного сектора (к примеру, ушедших на пенсию)
O_4c_P1	Доля бюджета домашних хозяйств, идущая на покупку конечных товаров по цене P_1c
O_4c_P2	Доля бюджета домашних хозяйств, идущая на покупку конечных товаров по цене P_2c
O_4c_P3	Доля бюджета домашних хозяйств, идущая на покупку конечных товаров по цене P_3c
$O_4_\$$	Доля бюджета домашних хозяйств, идущая на покупку иностранной валюты
O_4_b	Доля бюджета домашних хозяйств, идущая на сбережения (в виде вкладов в банках)
L_1_2	Доля работников государственного сектора, переходящих в рыночный сектор
L_2_1	Доля работников рыночного сектора, переходящих в государственный сектор
L_12_3	Доля работников государственного и рыночного секторов, частично занятых в теневом секторе
Экономический агент № 5 — правительство	
T_vad	Налог на добавленную стоимость
T_pr	Налог на прибыль организаций
T_prop	Налог на имущество
T_pod	Налог на доходы физических лиц
T_esn	Единый социальный налог
O_5g_P2	Доля консолидированного бюджета, идущая на покупку конечных товаров по цене P_2g

Таблица 4.3.1 (окончание)

O_5_s1	Доля консолидированного бюджета, идущая на субсидирование государственного сектора
O_5_s2	Доля консолидированного бюджета, идущая на субсидирование рыночного сектора
O_5_tr	Доля консолидированного бюджета, идущая на социальные трансферты
O_5_f1	Доля в расходах внебюджетных фондов, идущая государственному сектору
O_5_f2	Доля в расходах внебюджетных фондов, идущая рыночному сектору
O_5_f4	Доля в расходах внебюджетных фондов, идущая домашним хозяйствам
B_5_Other	Сумма налоговых поступлений (не вошедших в число рассматриваемых), неналоговых доходов и прочих доходов консолидированного бюджета
Экономический агент № 6 — банковский сектор	
M_1	Эмиссия денег государственного сектора
M_2	Эмиссия денег рыночного сектора
P_b	Ставка по депозитам для предприятий
P_b_h	Ставка по депозитам для физических лиц
Общая часть модели	
P_1l	Государственные цены на рабочую силу
P_1C	Государственные цены на конечные товары для домашних хозяйств
P_1g	Государственные цены на конечные товары для экономического агента № 5
P_1i	Государственные цены на инвестиционные товары
P_1k	Государственные цены на капитальные товары
P_1ex	Государственные цены на конечные товары для внешнего мира
Модельные константы	
$etta$	Константа, используемая для корректировки долей бюджета агентов при уравнивании совокупного спроса и предложения на рынках с государственными ценами
Q	Шаг итерации
C	Константа итераций, используемая для изменения скорости вычисления равновесного состояния CGE-модели

Эндогенные переменные модели. В число эндогенных переменных модели входят:

— бюджеты секторов и их различные доли;

— доли произведенного продукта, идущие на продажу на различных рынках;

— остатки бюджетов агентов;

— добавленные стоимости производящих секторов;

— спросы и предложения на различные виды товаров услуг и рабочую силу секторов;

— выручки секторов;

— основные фонды производящих секторов;

— доли работников выбывших из каждого производящего сектора;

— доли работников прибывших в каждый производящий сектор;

— заработные платы работников;

— различные виды расходов консолидированного бюджета;

— различные виды цен на товары, услуги и рабочую силу;

— субсидии секторам-производителям;

— социальные трансферты населению;

— валовой выпуск товаров и услуг;

— ВВП.

В табл. 4.3.2 приводится список эндогенных переменных модели.

Таблица 4.3.2. **Эндогенные переменные вычислимой модели отраслей экономики с теневым сектором**

Экономический агент № 1 — государственный сектор экономики	
O_1l_P1	Доля бюджета государственного сектора, идущая на покупку рабочей силы по цене P_1l
O_1k_P1	Доля бюджета государственного сектора, идущая на покупку капитальных товаров по цене P_1k
O_1i_P1	Доля бюджета государственного сектора, идущая на покупку инвестиционных товаров по цене P_1i
O_1_t	Доля бюджета государственного сектора, идущая на уплату налогов в консолидированный бюджет
O_1_f	Доля бюджета государственного сектора, идущая на уплату налогов во внебюджетные фонды
O_1_s	Доля нераспределенного бюджета государственного сектора

Таблица 4.3.2 (продолжение)

E_1c_P1	Доля произведенного продукта государственного сектора, идущая на продажу на рынках конечных товаров по цене P_1c
Y_1	Добавленная стоимость государственного сектора (в ценах базового периода)
S_1c_P1	Предложение конечных товаров государственного сектора по цене P_1c
S_1c_P2	Предложение конечных товаров государственного сектора по цене P_2c
S_1g_P1	Предложение конечных товаров государственного сектора для экономического агента № 5 по цене P_1g
S_1g_P2	Предложение конечных товаров государственного сектора для экономического агента № 5 по цене P_2g
S_1i_P1	Предложение инвестиционных товаров государственного сектора по цене P_1i
S_1i_P2	Предложение инвестиционных товаров государственного сектора по цене P_2i
S_1k_P1	Предложение капитальных товаров государственного сектора по цене P_1k
S_1k_P2	Предложение капитальных товаров государственного сектора по цене P_2k
S_1ex_Pex	Предложение экспортных товаров государственного сектора по цене P_ex
D_1l_P1	Спрос государственного сектора на рабочую силу по цене P_1l
D_1k_P1	Спрос государственного сектора на капитальные товары по цене P_1k
D_1k_P2	Спрос государственного сектора на капитальные товары по цене P_2k
D_1i_P1	Спрос государственного сектора на инвестиционные товары по цене P_1i
D_1i_P2	Спрос государственного сектора на инвестиционные товары по цене P_2i
Y_1_p	Выручка государственного сектора в текущих ценах
B_1	Бюджет государственного сектора
B_1_b	Остаток средств государственного сектора на счетах в банках
K_1	Основные фонды государственного сектора
Экономический агент № 2 — рыночный сектор экономики	
O_2k_P1	Доля бюджета рыночного сектора, идущая на покупку капитальных товаров по цене P_1k

Таблица 4.3.2 (продолжение)

O_2i_P1	Доля бюджета рыночного сектора, идущая на покупку инвестиционных товаров по цене P_1i
O_2_t	Доля бюджета рыночного сектора, идущая на уплату налогов в консолидированный бюджет
O_2_f	Доля бюджета рыночного сектора, идущая на уплату налогов во внебюджетные фонды
O_2_s	Доля нераспределенного бюджета рыночного сектора
Y_2	Добавленная стоимость рыночного сектора (в ценах базового периода)
S_2c_P2	Предложение конечных товаров рыночного сектора по цене P_2c
S_2c_P3	Предложение конечных товаров рыночного сектора по цене P_3c
S_2g_P2	Предложение конечных товаров рыночного сектора для экономического агента № 5 по цене P_2g
S_2i_P2	Предложение инвестиционных товаров рыночного сектора по цене P_2i
S_2k_P2	Предложение капитальных товаров рыночного сектора по цене P_2k
S_2ex_Pex	Предложение экспортных товаров рыночного сектора по цене P_ex
D_2l_P2	Спрос на рабочую силу рыночного сектора по цене P_2l
D_2k_P1	Спрос рыночного сектора на капитальные товары по цене P_1k
D_2k_P2	Спрос рыночного сектора на капитальные товары по цене P_2k
D_2i_P1	Спрос рыночного сектора на инвестиционные товары по цене P_1i
D_2i_P2	Спрос рыночного сектора на инвестиционные товары по цене P_2i
Y_p	Выручка рыночного сектора в текущих ценах
B_2	Бюджет рыночного сектора
B_2_b	Остаток средств рыночного сектора на счетах в банках
K_2	Основные фонды рыночного сектора
Экономический агент № 3 — теневой сектор	
O_3_s	Доля нераспределенного бюджета теневого сектора
Y_3	Добавленная стоимость теневого сектора (в ценах базового периода)
S_3c_P3	Предложение конечных товаров теневого сектора по цене P_3c

Таблица 4.3.2 (продолжение)

D_3l_P3	Спрос теневого сектора на рабочую силу по цене P_3l
Y_3_p	Выручка бюджета теневого сектора в текущих ценах
B_3	Бюджет теневого сектора
B_3_b	Остаток средств бюджета теневого сектора на счетах в банках
K_3	Основные фонды теневого сектора
Экономический агент № 4 — совокупный потребитель	
M_4	Эмиссия денег сектора домашних хозяйств
O_4_tax	Доля бюджета домашних хозяйств, идущая на уплату налогов в консолидированный бюджет
O_4_s	Доля нераспределенного бюджета домашних хозяйств
L_1	Предложение рабочей силы государственному сектору
L_2	Предложение рабочей силы рыночному сектору
L_3	Предложение рабочей силы теневому сектору
D_4c_P1	Спрос домашних хозяйств на конечные товары по цене P_1c
D_4c_P2	Спрос домашних хозяйств на конечные товары по цене P_2c
D_4c_P3	Спрос домашних хозяйств на конечные товары по цене P_3c
W_1	Заработная плата работников государственного сектора
W_2	Заработная плата работников рыночного сектора
W_3	Заработная плата работников теневого сектора
B_4	Бюджет домашних хозяйств
B_4_b	Остаток средств на счетах в банках
Экономический агент № 5 — правительство	
O_5g_P1	Доля консолидированного бюджета, идущая на покупку конечных товаров по цене P_1g
O_5_s	Доля нераспределенного консолидированного бюджета
O_5f_s	Доля нераспределенных средств внебюджетных фондов
D_5g_P1	Спрос на конечные товары по цене P_1g
D_5g_P2	Спрос на конечные товары по цене P_2g
G_1_s	Расходы консолидированного бюджета, направленные на субсидирование государственного сектора
G_2_s	Расходы консолидированного бюджета, направленные на субсидирование рыночного сектора
G_4_tr	Социальные трансферты населению, сформированные из средств консолидированного бюджета

Таблица 4.3.2 (продолжение)

G_1_f	Средства внебюджетных фондов, направленные государственному сектору
G_2_f	Средства внебюджетных фондов, направленные рыночному сектору
G_4_f	Средства внебюджетных фондов, выделенные для населения
B_5	Консолидированный бюджет
B_5_b	Остаток средств консолидированного бюджета на счетах в банках
F_5	Денежные средства внебюджетных фондов
F_5_b	Остаток средств внебюджетных фондов на счетах в банках
Общая часть модели	
P_2l	Рыночные цены на рабочую силу
P_2c	Рыночные цены на конечные товары для домашних хозяйств
P_2g	Рыночные цены на конечные товары для экономического агента № 5
P_2i	Рыночные цены на инвестиционные товары
P_2k	Рыночные цены на капитальные товары
P_3l	Рыночные цены на рабочую силу
P_3c	Рыночные цены на конечные товары для домашних хозяйств
I_l	ИД для рынка рабочей силы
I_c	ИД для рынка конечных продуктов для домашних хозяйств
I_g	ИД для рынка конечных продуктов для экономического агента № 5
I_i	ИД для рынка инвестиционных товаров
I_k	ИД для рынка капитальных товаров
D_sl_P1	Суммарный спрос на рабочую силу по цене P_1l
D_sl_P2	Суммарный спрос на рабочую силу по цене P_2l
D_sl_P3	Суммарный спрос на рабочую силу по цене P_3l
S_sl_P1	Суммарное предложение рабочей силы по цене P_1l
S_sl_P2	Суммарное предложение рабочей силы по цене P_2l
S_sl_P3	Суммарное предложение рабочей силы по цене P_3l
D_sc_P1	Суммарный спрос на конечные товары по цене P_1c
D_sc_P2	Суммарный спрос на конечные товары по цене P_2c
D_sc_P3	Суммарный спрос на конечные товары по цене P_3c

Таблица 4.3.2 (окончание)

S_sc_P1	Суммарное предложение конечных товаров по цене P_1c
S_sc_P2	Суммарное предложение конечных товаров по цене P_2c
S_sc_P3	Суммарное предложение конечных товаров по цене P_3c
D_sg_P1	Суммарный спрос на конечные товары по цене P_1g
D_sg_P2	Суммарный спрос на конечные товары по цене P_2g
S_sg_P1	Суммарное предложение конечных товаров по цене P_1g
S_sg_P2	Суммарное предложение конечных товаров по цене P_2g
D_si_P1	Суммарный спрос на инвестиционные товары по цене P_1i
D_si_P2	Суммарный спрос на инвестиционные товары по цене P_2i
S_si_P1	Суммарное предложение инвестиционных товаров по цене P_1i
S_si_P2	Суммарное предложение инвестиционных товаров по цене P_2i
D_sk_P1	Суммарный спрос на капитальные товары по цене P_1k
D_sk_P2	Суммарный спрос на капитальные товары по цене P_2k
S_sk_P1	Суммарное предложение капитальных товаров по цене P_1k
S_sk_P2	Суммарное предложение капитальных товаров по цене P_2k
Y	ВВП (в ценах базового периода)
Y_p	ВВП (в текущих ценах)
P	Инфляция потребительских цен
L	Количество людей, занятых в экономике
K	Основные фонды

Рынки модели. На следующих 13 рынках модели в результате уравнивания спросов и предложений на различные виды товаров, услуг и рабочую силу формируются равновесные цены:

— рынки конечных товаров для домашних хозяйств с государственными, рыночными и теневыми ценами;

— рынки конечных товаров для экономического агента № 5 с государственными и рыночными ценами;

— рынки капитальных товаров с государственными и рыночными ценами;

— рынки инвестиционных товаров с государственными и рыночными ценами;

— рынки рабочей силы с государственными, рыночными и теневыми ценами;

— рынок экспортных товаров.

Для каждого рынка определяются суммарный спрос и предложение, уравниваемые в процессе итерационного пересчета. Ниже приводятся используемые в модели формулы, определяющие индикаторы дефицитности для рынков с государственными ценами:

— рынок рабочей силы:

$$I_l[t] = S_sl_P1[t]/D_sl_P1[t]; \tag{4.3.1}$$

— рынок конечных продуктов для домашних хозяйств:

$$I_c[t] = S_sc_P1[t]/D_sc_P1[t]; \tag{4.3.2}$$

— рынок конечных продуктов для экономического агента № 5:

$$I_g[t] = S_sg_P1[t]/D_sg_P1[t]; \tag{4.3.3}$$

— рынок инвестиционных товаров:

$$I_i[t] = S_si_P1[t]/D_si_P1[t]; \tag{4.3.4}$$

— рынок капитальных товаров:

$$I_k[t] = S_sk_P1[t]/D_sk_P1[t]. \tag{4.3.5}$$

Как видно, индикатор дефицитности есть частное от деления предложения продукта на его спрос.

Теперь запишем формулы модели, отражающие рыночный процесс изменения цен:

— на рабочую силу:

$$\begin{gathered} P_2l[Q+1] = P_2l[Q] \times C_2l, \\ C_2l = \mathrm{Abs}\,(D_sl_P2[Q]/S_sl_P2[Q])/C; \end{gathered} \tag{4.3.6}$$

— на конечные товары для домашних хозяйств:

$$\begin{gathered} P_2c[Q+1] = P_2c[Q] \times C_2c, \\ C_2c = \mathrm{Abs}\,(D_sc_P2[Q]/S_sc_P2[Q])/C; \end{gathered} \tag{4.3.7}$$

— на конечные товары для экономического агента № 5:

$$\begin{gathered} P_2g[Q+1] = P_2g[Q] \times C_2g, \\ C_2g = \mathrm{Abs}\,(D_sg_P2[Q]/S_sg_P2[Q])/C; \end{gathered} \tag{4.3.8}$$

— на инвестиционные товары:

$$\begin{gathered} P_2i[Q+1] = P_2i[Q] \times C_2i, \\ C_2i = \mathrm{Abs}\,(D_si_P2[Q]/S_si_P1[Q])/C; \end{gathered} \tag{4.3.9}$$

— на капитальные товары:

$$\begin{gathered} P_2k[Q+1] = P_2k[Q] \times C_2k, \\ C_2k = \mathrm{Abs}\,(D_sk_P2[Q]/S_sk_P2[Q])/C. \end{gathered} \tag{4.3.10}$$

Равновесная цена на теневых рынках образуется так же, как и в случае рыночной цены. Ниже приводятся соответствующие формулы.

Цена на рабочую силу:

$$\begin{gathered} P_3l[Q+1] = P_3l[t] \times C_3l, \\ C_3l = \mathrm{Abs}\,(D_sl_P3[Q]/S_sl_P3[Q])/C. \end{gathered} \tag{4.3.11}$$

Цена на конечные товары для домашних хозяйств:

$$\begin{gathered} P_3c[Q+1] = P_3c[t] \times C_3c, \\ C_3c = \mathrm{Abs}\,(D_sc_P3[Q]/S_sc_P3[Q])/C. \end{gathered} \tag{4.3.12}$$

Теперь приведем формулы, определяющие суммарный спрос и предложение товаров для каждой из цен, используемых в модели. Конечные формулы, определяющие спрос и предложение каждого экономического агента приводятся ниже.

Суммарный спрос на рабочую силу по государственным, рыночным и теневым ценам:

$$D_sl_P1[t] = D_1l_P1[t], \tag{4.3.13}$$

$$D_sl_P2[t] = D_2l_P2[t], \tag{4.3.14}$$

$$D_sl_P3[t] = D_3l_P3[t]. \tag{4.3.15}$$

Суммарное предложение рабочей силы по государственным, рыночным и теневым ценам:

$$S_sl_P1[t] = L_1[t], \tag{4.3.16}$$

$$S_sl_P2[t] = L_2[t], \tag{4.3.17}$$

$$S_sl_P3[t] = L_3[t]. \tag{4.3.18}$$

Суммарный спрос на конечные товары для домашних хозяйств по государственным, рыночным и теневым ценам:

$$D_sc_P1[t] = D_4c_P1[t], \tag{4.3.19}$$

$$D_sc_P2[t] = D_4c_P2[t], \tag{4.3.20}$$

$$D_sc_P3[t] = D_4c_P3[t]. \tag{4.3.21}$$

Суммарное предложение конечных товаров для домашних хозяйств по государственным, рыночным и теневым ценам:

$$S_sc_P1[t] = S_1c_P1[t], \tag{4.3.22}$$

$$S_sc_P2[t] = S_1c_P2[t] + S_2c_P2[t], \tag{4.3.23}$$

$$S_sc_P3[t] = S_2c_P3[t] + S_3c_P3[t]. \tag{4.3.24}$$

Суммарный спрос на конечные товары для экономического агента № 5 по государственным и рыночным ценам:

$$D_sg_P1[t] = D_5g_P1[t], \tag{4.3.25}$$

$$D_sg_P2[t] = D_5g_P2[t]. \tag{4.3.26}$$

Суммарное предложение конечных товаров для экономического агента № 5 по государственным и рыночным ценам:

$$S_sg_P1[t] = S_1g_P1[t], \tag{4.3.27}$$

$$S_sg_P2[t] = S_1g_P2[t] + S_2g_P2. \tag{4.3.28}$$

Суммарный спрос на инвестиционные товары по государственным и рыночным ценам:

$$D_si_P1[t] = D_1i_P1[t] + D_2i_P1[t], \tag{4.3.29}$$

$$D_si_P2[t] = D_1i_P2[t] + D_2i_P2[t]. \tag{4.3.30}$$

Суммарное предложение инвестиционных товаров по государственным и рыночным ценам:

$$S_si_P1[t] = S_1i_P1[t], \tag{4.3.31}$$

$$S_si_P1[t] = S_1i_P2[t] + S_2i_P2[t]. \tag{4.3.32}$$

Суммарный спрос на капитальные товары по государственным и рыночным ценам:

$$D_sk_P1[t] = D_1k_P1[t] + D_2k_P1[t], \tag{4.3.33}$$

$$D_sk_P2[t] = D_1k_P2[t] + D_2k_P2[t]. \tag{4.3.34}$$

Суммарное предложение капитальных товаров по государственным и рыночным ценам:

$$S_sk_P1[t] = S_1k_P1[t], \tag{4.3.35}$$

$$S_sk_P2[t] = S_1k_P2[t] + S_2k_P2[t]. \tag{4.3.36}$$

Таким образом, мы имеем 24 формулы для определения суммарного спроса и предложения товаров, рассматриваемых в модели.

Экономический агент № 1 — государственный сектор. На рынках с государственными ценами уравнивание совокупного спроса и предложения происходит посредством корректировки долей бюджета и готового продукта. Этот процесс описывается следующими формулами:

$$O_1l_P1[Q+1] = O_1l_P1[Q] \times etta_1l + \\ + O_1l_P1[Q] \times I_l[t] \times (1 - etta_1l), \quad (4.3.37)$$

$$O_1i_P1[Q+1] = O_1i_P1[Q] \times etta_1i + \\ + O_1i_P1[Q] \times I_i[t] \times (1 - etta_1i), \quad (4.3.38)$$

$$O_1k_P1[Q+1] = O_1k_P1[Q] \times etta_1k + \\ + O_1k_P1[Q] \times I_k[t] \times (1 - etta_1k), \quad (4.3.39)$$

$$E_1c_P1[Q+1] = E_1c_P1[Q] \times etta_1c + \\ + E_1c_P1[Q] \times I_c[t] \times (1 - etta_1c). \quad (4.3.40)$$

Здесь Q — шаг итерации, $0 < etta_1l$, $etta_1i$, $etta_1k$, $etta_1c < 1$ — модельные константы, при их увеличении равновесие достигается медленнее, однако при этом система уравнений становится более устойчивой.

Переходим к формулам, определяющим поведение государственного сектора.

Уравнение производственной функции:

$$Y_1[t+1] = A_1_r \times power(((K_1[t] + K_1[t+1])/2), A_1_k) \times \\ \times power(D_1l_P1[t], A_1_l). \quad (4.3.41)$$

Здесь $Power(X, Y)$ соответствует X^Y; A_1_r, A_1_k, A_1_l — параметры производственной функции.

В следующих формулах определяется спрос государственного сектора на факторы производства.

Спрос на рабочую силу по государственным ценам:

$$D_1l_P1[t] = (O_1l_P1[t] \times B_1[t])/P_1l. \quad (4.3.42)$$

Спрос на капитальные товары:

— по государственным ценам:

$$D_1k_P1[t] = (O_1k_P1[t] \times B_1[t])/P_1; \quad (4.3.43)$$

— по рыночным ценам:

$$D_1k_P2[t] = (O_1k_P2 \times B_1[t])/P_2k[t]. \quad (4.3.44)$$

Спрос на инвестиционные товары:

— по государственным ценам:

$$D_1i_P1[t] = (O_1i_P1[t] \times B_1[t])/P_1i; \quad (4.3.45)$$

— по рыночным ценам:

$$D_1i_P2[t] = (O_1i_P2 \times B_1[t])/P_2i[t]. \quad (4.3.46)$$

В следующих формулах определяется предложение товаров, производимых государственным сектором.

Предложение конечных товаров для домашних хозяйств:

— по государственным ценам:

$$S_1c_P1[t] = E_1c_P1[t] \times Y_1[t]; \quad (4.3.47)$$

— по рыночным ценам:

$$S_1c_P2[t] = E_1c_P2 \times Y_1[t]. \quad (4.3.48)$$

Предложение конечных товаров для экономического агента № 5:

— по государственным ценам:

$$S_1g_P1[t] = E_1g_P1 \times Y_1[t]; \quad (4.3.49)$$

— по рыночным ценам:

$$S_1g_P2[t] = E_1g_P2 \times Y_1[t]. \quad (4.3.50)$$

Предложение инвестиционных товаров:

— по государственным ценам:

$$S_1i_P1[t] = E_1i_P1 \times Y_1[t]; \quad (4.3.51)$$

— по рыночным ценам:

$$S_1i_P2[t] = E_1i_P2 \times Y_1[t]. \quad (4.3.52)$$

Предложение капитальных товаров:

— по государственным ценам:

$$S_1k_P1[t] = E_1k_P1 \times K_1[t]; \quad (4.3.53)$$

— по рыночным ценам:

$$S_1k_P2[t] = E_1k_P2 \times K_1[t]. \quad (4.3.54)$$

Предложение экспортных товаров:

$$S_1ex_Pex[t] = E_1ex_Pex \times Y_1[t]. \quad (4.3.55)$$

В следующей формуле подсчитывается выручка государственного сектора:

$$Y_1_p[t] = S_1c_P1[t] \times P_1c + S_1c_P2[t] \times P_2c[t] + \\ + S_1g_P1[t] \times P_1g + S_1g_P2[t] \times P_2g[t] + \\ + S_1i_P1[t] \times P_1i + S_1i_P2[t] \times P_2i[t] + S_1k_P1[t] \times P_1k + \\ + S_1k_P2[t] \times P_2k[t] + S_1ex_Pex[t] \times P_ex. \quad (4.3.56)$$

Как видно, она складывается из выручки от продажи конечных товаров и услуг для домашних хозяйств и экономического агента № 5, инвестиционных, капитальных, а также экспортных товаров.

Бюджет государственного сектора:

$$B_1[t] = B_1_b[t] \times (1 + CP_b[t-1]) + \\ + Y_1_p[t] + G_1_s[t-1] + G_1_f[t-1] + M_1. \quad (4.3.57)$$

Бюджет агента формируется из:

1) средств, находящихся на банковских счетах (с учетом процентов по вкладам);

2) выручки, полученной в текущем периоде;

3) субсидий, полученных из консолидированного бюджета G_1_s;

4) части средств внебюджетных фондов G_1_f;

5) денежной эмиссии M_1.

Динамика остатков средств государственного сектора на счетах в банках:

$$B_1_b[t+1] = O_1_s[t] \times B_1[t]. \quad (4.3.58)$$

Динамика основных фондов:

$$K_1[t+1] = K_1[t] \times (1 - E_1k_P1 - E_1k_P2) \times (1 - A_1_n) + \\ + D_1k_P1[t] + D_1k_P2[t] + D_1i_P1[t] + D_1i_P2[t]. \quad (4.3.59)$$

В этой формуле подсчитывается объем основных фондов с учетом их продажи и износа. Со знаком плюс идут купленные фонды и инвестиции в основной капитал.

Доля бюджета государственного сектора, идущая на уплату налогов в консолидированный бюджет:

$$O_1_t[t] = (Y_1_p[t] \times T__vad)/B_1[t] + \\ + ((Y_1_p[t] - W_1[t] - K_1[t] \times P_1k \times A_1_n) \times T__pr)/B_1[t] + \\ + ((K_1[t] \times P_1k) \times T__prop)/B_1[t]. \quad (4.3.60)$$

Здесь учитываются налоги на добавленную стоимость, налог на прибыль и налог на имущество. При подсчете доли бюджета, идущей на уплату налога на прибыль, из выручки вычитаются затраты на оплату рабочей силы W_1 и амортизационные отчисления $K_1[t] \times P_1k \times A_1_n$.

Доля бюджета, идущая на уплату единого социального налога во внебюджетные фонды:

$$O_1_f[t] = (W_1[t] \times T__esn)/B_1[t]. \tag{4.3.61}$$

Остаток бюджета государственного сектора экономики:

$$O_1_s[t] = 1 - O_1l_P1[t] - O_1k_P1[t] - O_1k_P2 - \\ - O_1i_P1[t] - O_1i_P2 - O_1_t[t] - O_1_f[t]. \tag{4.3.62}$$

Экономический агент № 2 — рыночный сектор. Поведение рыночного сектора незначительно отличается от государственного сектора, поэтому в некоторых местах мы сократим описание, составленное по аналогии с агентом № 1.

Рыночный сектор корректирует доли своего бюджета O_2k_P1 и O_2k_P1, идущие на покупку капитальных и инвестиционных товаров по государственным ценам. Этот процесс описывается следующими формулами:

$$O_2k_P1[Q] = O_2k_P1[Q] \times etta_2k + \\ + O_2k_P1[Q] \times I_k[t] \times (1 - etta_2k), \tag{4.3.63}$$

$$O_2i_P1[Q] = O_2i_P1[Q] \times etta_2i + \\ + O_2i_P1[Q] \times I_i[t] \times (1 - etta_2i), \tag{4.3.64}$$

где Q — шаг итерации, $0 < etta_2k, etta_2i < 1$ — модельные константы.

Переходим к формулам, определяющим поведение рыночного сектора.

Уравнение производственной функции:

$$Y_2[t+1] = A_2_r \times power(((K_2[t] + K_2[t+1])/2), A_2_k) \times \\ \times power(D_2l_P2[t], A_2_l). \tag{4.3.65}$$

Здесь A_2_r, A_2_k, A_2_l — параметры производственной функции.

В следующих формулах определяется спрос рыночного сектора на факторы производства.

Спрос на рабочую силу по рыночным ценам:

$$D_2l_P2[t] = (O_2l_P2 \times B_2[t])/P_2l[t]. \quad (4.3.66)$$

Спрос на капитальные товары:
— по государственным ценам:

$$D_2k_P1[t] = (O_2k_P1[t] \times B_2[t])/P_1k; \quad (4.3.67)$$

— по рыночным ценам:

$$D_2k_P2[t] = (O_2k_P2 \times B_2[t])/P_2k[t]. \quad (4.3.68)$$

Спрос на инвестиционные товары:
— по государственным ценам:

$$D_2i_P1[t] = (O_2i_P1[t] \times B_2[t])/P_1i; \quad (4.3.69)$$

— по рыночным ценам:

$$D_2i_P2[t] = (O_2i_P2 \times B_2[t])/P_2i[t]. \quad (4.3.70)$$

В следующих формулах определяется предложение товаров, производимых рыночным сектором.

Предложение конечных товаров для домашних хозяйств:
— по рыночным ценам:

$$S_2c_P2[t] = E_2c_P2 \times Y_2[t]; \quad (4.3.71)$$

— по теневым ценам:

$$S_2c_P3[t] = E_2c_P3 \times Y_2[t]. \quad (4.3.72).$$

Предложение конечных товаров для экономического агента № 5 по рыночным ценам:

$$S_2g_P2[t] = E_2g_P2 \times Y_2[t]. \quad (4.3.73)$$

Предложение инвестиционных товаров по рыночным ценам:

$$S_2i_P2[t] = E_2i_P2 \times Y_2[t]. \quad (4.3.74)$$

Предложение капитальных товаров по рыночным ценам:

$$S_2k_P2[t] = E_2k_P2 \times K_2[t]. \quad (4.3.75)$$

Предложение экспортных товаров:

$$S_2ex_Pex[t] = E_2ex_Pex \times Y_2[t]. \quad (4.3.76)$$

В следующей формуле подсчитывается выручка рыночного сектора:

$$Y_2_p = S_2c_P2[t] \times P_2c[t] + S_2g_P2 \times P_2g[t] + \\ + S_2i_P2[t] \times P_2i[t] + S_2k_P2[t] \times P_2k[t] + \\ + S_2ex_Pex[t] \times P_ex. \quad (4.3.77)$$

Как видно, она складывается из выручки от продаж конечных товаров и услуг для домашних хозяйств и экономического агента № 5, инвестиционных, капитальных, а также экспортных товаров. Как уже говорилось выше, выручка от продаж конечных товаров и услуг для домашних хозяйств по теневым ценам здесь не учитывается.

Бюджет рыночного сектора:

$$B_2[t] = B_2_b[t] \times (1 + CP_b[t-1]) + Y_2_p + \\ + G_2_S[t-1] + G_2_f[t-1] + M_2. \quad (4.3.78)$$

Бюджет агента формируется из:

1) средств, находящихся на банковских счетах (с учетом процентов по вкладам);

2) выручки, полученной в текущем периоде;

3) субсидий, полученных из консолидированного бюджета G_2_S2;

4) части средств внебюджетных фондов G_2_f;

5) денежной эмиссии M_2.

Динамика остатков средств рыночного сектора на счетах в банках:

$$B_2_b[t+1] = O_2_s[t] \times B_2[t]. \quad (4.3.79)$$

Динамика основных фондов:

$$K_2[t+1] = K_2[t] \times (1 - E_2k_P2) \times (1 - A_2_n) + D_2k_P1[t] + \\ + D_2k_P2[t] + D_2i_P1[t] + D_2i_P2[t]. \quad (4.3.80)$$

В этой формуле подсчитывается объем основных фондов с учетом их продажи и износа. Со знаком плюс идут купленные фонды и инвестиции в основной капитал.

Доля бюджета рыночного сектора, идущая на уплату налогов в консолидированный бюджет:

$$O_2_t[t] = (Y_2_p \times T__vad)/B_2[t] + \\ + ((Y_2_p - W_2[t] - K_2[t] \times P_2k[t] \times A_2_n) \times T__pr)/B_2[t] + \\ + ((K_2[t] \times P_2k[t]) \times T__prop)/B_2[t]. \quad (4.3.81)$$

Здесь учитываются налоги на добавленную стоимость, налог на прибыль и налог на имущество. При подсчете доли бюджета, идущей на уплату налога на прибыль, из выручки вычитаются затраты на оплату рабочей силы W_2 и амортизационные отчисления $K_2[t] \times P_2k[t] \times A_2_n$.

Доля бюджета, идущая на уплату единого социального налога во внебюджетные фонды:

$$O_2_f[t] = (W_2[t] \times T__esn)/B_2[t]. \tag{4.3.82}$$

Остаток бюджета рыночного сектора экономики:

$$O_2_s[t] = 1 - O_2l_P2 - O_2k_P1[t] - O_2k_P2 - \\ - O_2i_P1[t] - O_2i_P2 - O_2_t[t] - O_2_f[t]. \tag{4.3.83}$$

Экономический агент № 3 — теневой сектор. Запишем формулы, определяющие поведение теневого сектора.

Производственная функция:

$$Y_3[t+1] = A_3_r \times power(((K_3[t] + K_3[t+1])/2), A_3_k) \times \\ \times power(D_3l_P3[t], A_3_l). \tag{4.3.84}$$

Здесь A_3_r, A_3_k, A_3_l — параметры производственной функции.

Уравнение производственной функции имеет такой же вид, как у государственного и рыночного секторов, однако один из ее аргументов — основные фонды — рассчитывается по-другому.

Своих основных фондов у теневого сектора в нашей модели нет (равно как и в реальной жизни, представители беловоротничковой и серой экономики используют основные фонды государственного и рыночного секторов), поэтому основные фонды теневого сектора формируются следующим образом:

$$K_3[t] = gamma \times (K_1[t] + K_2[t]), \tag{4.3.85}$$

где $gamma$ — доля основных фондов государственного и рыночного секторов, используемых в теневой экономике.

Спрос на рабочую силу по теневым ценам вычисляется так же, как и у других секторов:

$$D_3l_P3[t] = (O_3l_P3 \times B_3[t])/P_3l[t]. \tag{4.3.86}$$

Далее вычисляется предложение конечных товаров для домашних хозяйств по теневым ценам:

$$S_3c_P3[t] = E_3c_P3 \times Y_3[t]. \tag{4.3.87}$$

В следующей формуле подсчитывается выручка теневого сектора:

$$Y_3_p[t] = (S_2c_P3[t] + S_3c_P3[t]) \times P_3c[t]. \qquad (4.3.88)$$

Здесь учитываются конечные товары, произведенные беловоротничковой и серой ТЭ.

Бюджет теневого сектора:

$$B_3[t] = B_3_b[t] \times (1 + CP_b[t-1]) + Y_3_p[t]. \qquad (4.3.89)$$

Бюджет агента формируется из:

1) средств, находящихся на банковских счетах (с учетом процентов по вкладам);

2) выручки, полученной в текущем периоде.

Динамика остатков средств теневого сектора на счетах в банках:

$$B_3_b[t+1] = O_3_s[t] \times B_3[t]. \qquad (4.3.90)$$

Остаток бюджета теневого сектора экономики:

$$O_3_s[t] = 1 - O_3l_P3[t]. \qquad (4.3.91)$$

Экономический агент № 4 — совокупный потребитель (домашние хозяйства). Переходим к формулам, определяющим поведение совокупного потребителя.

Спрос домашних хозяйств на конечные товары:

— по государственным ценам:

$$D_4c_P1[t] = (O_4c_P1 \times B_4[t])/P_1c; \qquad (4.3.92)$$

— по рыночным ценам:

$$D_4c_P2[t] = (O_4c_P2 \times B_4[t])/P_2c[t]; \qquad (4.3.93)$$

— по теневым ценам:

$$D_4c_P3[t] = (O_4c_P3 \times B_4[t])/P_3c[t]. \qquad (4.3.94)$$

Движение рабочей силы:

— в государственном секторе:

$$L_1[t] = L_1[t-1] \times (1 - L_1_2[t-1] + L_1_a[t-1] - \\ - L_1_r[t-1]) + L_2[t-1] \times L_2_1[t-1]; \qquad (4.3.95)$$

— в рыночном секторе:

$$L_2[t] = L_2[t-1] \times (1 - L_2_1[t-1] + L_2_a[t-1] - \\ - L_2_r[t-1]) + L_1[t-1] \times L_1_2[t-1]; \qquad (4.3.96)$$

— в теневом секторе:

$$L_3[t] = (L_1[t] + L_2[t]) \times L_12_3. \quad (4.3.97)$$

Количество работников теневого сектора определяется как доля от работников государственного и рыночного секторов.

Заработная плата работников:

— государственного сектора:

$$W_1[t] = D_1l_P1[t] \times P_1l; \quad (4.3.98)$$

— рыночного сектора:

$$W_2[t] = D_2l_P2[t] \times P_2l[t]; \quad (4.3.99)$$

— теневого сектора:

$$W_3[t] = D_3l_P3[t] \times P_3l[t]. \quad (4.3.100)$$

Бюджет домашних хозяйств:

$$\begin{aligned} B_4[t] = {} & B_4_b[t] \times (1 + CP_b_h[t-1]) + \\ & + VB_4[t-1] \times VO_4_s[t-1] + W_1[t] + W_2[t] + W_3[t] + \\ & + G_4_tr[t-1] + G_4_f[t-1] + M_4[t]. \end{aligned} \quad (4.3.101)$$

Бюджет агента формируется из:

1) денег, отложенных на счетах в банках;

2) нераспределенных наличных денег, оставшихся с предыдущего периода;

3) заработной платы, получаемой в государственном, рыночном и теневом секторах;

4) пенсий, пособий и субсидий, получаемых из внебюджетных фондов;

5) денежной эмиссии M_4;

6) доходов от собственности, предпринимательской деятельности и прочих доходов. Эта составляющая бюджета вводится в модель экзогенно, чтобы дополнить бюджет до значений официальной статистики.

Динамика остатков средств домашних хозяйств на счетах в банках:

$$B_4_b[t+1] = B_4[t] \times O_4_b. \quad (4.3.102)$$

Доля бюджета, идущая на уплату подоходного налога:

$$O_4_tax[t] = ((W_1[t] + W_2[t]) \times T__pod)/B_4[t]. \quad (4.3.103)$$

Остаток наличных денег:

$$O_4_s[t] = 1 - O_4c_P1 - O_4c_P2 - O_4c_P3 - \\ - O_4_tax[t] - O_4_b - O_4_buck. \quad (4.3.104)$$

Экономический агент № 5 — государство. Экономический агент № 5 корректирует долю бюджета, идущую на покупку конечных товаров по государственной цене. Этот процесс описывается следующей формулой:

$$O_5g_P1[Q] = O_5g_P1[Q] \times etta_5g + \\ + O_5g_P1[Q] \times I_g[t] \times (1 - etta_5g), \quad (4.3.105)$$

где Q — шаг итерации, $0 < etta_5g < 1$ — модельная константа.

Переходим к формулам, определяющим поведение экономического агента № 5.

Консолидированный бюджет:

$$B_5[t] = O_1_t[t] \times B_1[t] + O_2_t[t] \times B_2[t] + \\ + O_4_tax[t] \times B_4[t] + B_5_other + \\ + B_5_b[t] \times (1 + CP_b[t-1]). \quad (4.3.106)$$

В этой формуле суммируются деньги, собранные в виде налогов с государственного и рыночного секторов, а также от населения. Экзогенно вводимое в модель значение B_5_other представляет собой сумму других налогов (не вошедших в перечень рассматриваемых в модели), неналоговых доходов и прочих доходов консолидированного бюджета. К полученной сумме приплюсовываются средства, находящиеся на банковских счетах (с учетом процентов по вкладам).

Динамика остатков средств консолидированного бюджета на счетах в банках:

$$B_5_b[t+1] = (O_5b_s[t] \times B_5[t]), \quad (4.3.107)$$

$$f_5[t] = O_1_f[t] \times B_1[t] + O_2_f[t] \times B_2[t] + \\ + F_5_b[t] \times (1 + CP_b[t-1]). \quad (4.3.108)$$

Здесь рассчитывается сумма, собранная с государственного и рыночного секторов в виде единого социального налога, поступающая на счета внебюджетных фондов:

— пенсионного фонда;

— фонда социального страхования;

— Федерального и территориальных фондов обязательного медицинского страхования.

К полученной сумме приплюсовываются средства, находящиеся на банковских счетах (с учетом процентов по вкладам).

Динамика остатков средств внебюджетных фондов на счетах в банках:

$$F_5_b[t+1] = O_5f_s[t] \times F_5[t]. \tag{4.3.109}$$

Спрос на конечные товары:

— по государственным ценам:

$$D_5g_P1[t] = (O_5g_P1[t] \times B_5[t])/P_1g; \tag{4.3.110}$$

— по рыночным ценам:

$$D_5g_P2[t] = (O_5g_p2 \times B_5[t])/P_2g[t]. \tag{4.3.111}$$

Субсидии секторам-производителям:

— государственному сектору:

$$G_1_s[t] = O_5_s1 \times B_5[t]; \tag{4.3.112}$$

— рыночному сектору:

$$G_2_s[t] = O_5_s2 \times B_5[t]. \tag{4.3.113}$$

Социальные трансферты населению:

$$G_4_tr[t] = O_5_tr \times B_5[t]. \tag{4.3.114}$$

Средства внебюджетных фондов, направленные:

— государственному сектору:

$$G_1_f[t] = O_5_f1 \times F_5[t]; \tag{4.3.115}$$

— рыночному сектору:

$$G_2_f[t] = O_5_f2 \times F_5[t]. \tag{4.3.116}$$

Средства внебюджетных фондов, выделенные для населения:

$$G_4_f[t] = O_5_f4 \times F_5[t]. \tag{4.3.117}$$

Сюда входят средства пенсионного фонда и фонда социального страхования, идущие на выплату пенсий и пособий.

Экономический агент № 6 — банковский сектор. Банковский сектор в модели включает в себя Центральный банк и коммерческие банки. Этот экономический агент выполняет следующие функции:

1) осуществляет эмиссию денег M_1, M_2, M_4;

2) устанавливает ставку по депозитам для предприятий и физических лиц.

Экономический агент № 7 — внешний мир. В данной версии модели все экономические показатели внешнего мира задаются экзогенно. Это значит, что отечественные производители не могут экспортировать больше, чем внешнему миру нужно.

Интегральные показатели модели. В этом пункте мы приведем формулы, по которым вычисляются интегральные показатели экономики.

ВВП (в ценах базового периода):

$$Y[t] = Y_1[t] + Y_2[t]. \tag{4.3.118}$$

ВВП (в текущих ценах):

$$Y_p[t] = Y_1_p[t] + Y_2_p[t]. \tag{4.3.119}$$

Инфляция потребительских цен:

$$P[t] = 100 \times (P_2c[t]/P_2c[t-1]). \tag{4.3.120}$$

Количество людей, занятых в экономике:

$$L[t] = L_1[t] + L_2[t] + L_3[t]. \tag{4.3.121}$$

Основные фонды:

$$K[t] = K_1[t] + K_2[t]. \tag{4.3.122}$$

Рассматриваемая CGE-модель с теневым сектором представляется в рамках: соотношения (4.1.1) — 11 выражениями ($n_1 = 11$), соотношения (4.1.2) — 98 выражениями ($n_2 = 98$), соотношения (4.1.3) — 14 выражениями ($n_3 = 14$).

Исследуемая модель содержит 144 экзогенных параметров (значения которых требуется оценить путем решения задачи параметрической идентификации) и 123 эндогенных переменных.

Параметрическая идентификация CGE-модели с теневым сектором. Задача идентификации (калибровки) экзогенных параметров модели решалась методами, применявшимеся при параметрической идентификации вычислимой модели секторов экономики и вычислимой модели с сектором знаний.

Для оценки качества ретроспективного прогнозирования на основе данных экономики Республики Казахстан за 2000–2004 гг. для некоторой начальной точки $\omega^1 \in \Omega$ решалась задача (задача A) оценки параметров модели и начальных условий для разностных уравнений с помощью нахождения минимума критерия K_{IA}:

$$K_{IA}^2 = \frac{1}{10} \sum_{t=2000}^{2004} \left[\left(\frac{Y^*[t] - Y[t]}{Y^*[t]} \right)^2 + \left(\frac{P^*[t] - P[t]}{P^*[t]} \right)^2 \right]. \tag{4.3.123}$$

Здесь t — номер года; основные макроэкономические показатели: $Y[t]$ — расчетный ВВП в млрд тенге в ценах 2000 г., $P[t]$ — расчетный уровень потребительских цен. Знак «$*$» здесь и далее соответствует наблюдаемым значениям соответствующих переменных. Задачу параметрической идентификации для модели будем считать решенной, если найдется такая точка $\omega^0_{K_{IA}} \in \Omega$, что $K_{IA}(\omega^0_{K_{IA}}) < \varepsilon$ для достаточно малого ε.

Наряду с задачей A для точки ω^1 решалась и аналогичная задача (задача B) с использованием расширенного критерия K_{IB} вместо критерия K_{IA}:

$$K^2_{IB} = \frac{1}{12{,}15}\left\{ \sum_{t=2000}^{2004} \left[\left(\frac{Y^*[t] - Y[t]}{Y^*[t]} \right)^2 + \left(\frac{P^*[t] - P[t]}{P^*[t]} \right)^2 \right] + \right.$$

$$+0{,}1 \sum_{t=2000}^{2004} \left[\left(\frac{L^*_1[t] - L_1[t]}{L^*_1[t]} \right)^2 + \left(\frac{L^*_2[t] - L_2[t]}{L^*_2[t]} \right)^2 \right] +$$

$$+0{,}1 \sum_{t=2000}^{2004} \left[\left(\frac{K^*_1[t] - K_1[t]}{K^*_1[t]} \right)^2 + \left(\frac{K^*_2[t] - K_2[t]}{K^*_2[t]} \right)^2 \right] +$$

$$+0{,}01 \sum_{t=2000}^{2004} \left[\left(\frac{Y^*_1[t] - Y_1[t]}{Y^*_1[t]} \right)^2 + \left(\frac{Y^*_2[t] - Y_2[t]}{Y^*_2[t]} \right)^2 + \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{Y^*_3[t] - Y_3[t]}{Y^*_3[t]} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.3.124)$$

Здесь $L_1[t]$ — численность работников государственного сектора; $L_2[t]$ — численность работников рыночного сектора; $K_1[t]$ — основные фонды государственного сектора; $K_2[t]$ — основные фонды рыночного сектора; $Y_1[t]$ — ВДС госсектора; $Y_2[t]$ — ВДС рыночного сектора; $Y_3[t]$ — ВДС теневого сектора.

Значения понижающих весов в критерии (4.3.124) определены в процессе идентификации параметров для конкретной динамической системы.

В результате совместного решения задач A и B согласно указанному алгоритму были получены значения $K_{IA} = 0{,}0025$ и $K_{IB} = 0{,}12$. При этом относительная величина отклонений расчетных значений переменных, используемых в критерии (4.3.124), от соответствующих наблюдаемых значений составила менее 0,25%.

Результаты ретроспективного прогноза модели на 2005–2008 гг., представленные в табл. 4.3.3, демонстрируют расчетные, наблюдаемые значения и отклонения расчетных значений основных выходных переменных модели от соответствующих фактических значений.

Таблица 4.3.3. **Результаты ретроспективного прогноза модели**

	2005 г.	2006 г.	2007 г.	2008 г.
$Y^*[t]$	4258,03	4715,65	5136,54	5303,27
$Y[t]$	4221,69	4586,33	5004,12	5478,31
Погрешность (%)	−0,861	−2,820	−2,646	3,195
$P^*[t]$	107,6	108,4	118,8	109,5
$P[t]$	108,4	109,5	112,6	112,0
Погрешность (%)	0,706	1,017	−5,528	2,240

4.3.2. Нахождение оптимальных значений регулируемых параметров на базе CGE-модели с теневым сектором. В рамках исследования анализа связи между некоторыми явлениями теневой экономики и основными макроэкономическими показателями страны (ВВП и индексом потребительских цен), был проведен ряд описываемых ниже вычислительных экспериментов (расчета сценариев, предусматривающих некоторые возможные негативные явления в экономике страны), аналогичных экспериментам в [27].

В работе рассматривались следующие шесть сценариев.

1. Имитация процесса изъятия денежных средств (10%, 20%, 30%) из консолидированного бюджета страны и направления этих средств домашним хозяйствам, начиная с 2005 г. (сценарии 1–3). Имитировался процесс хищения напрямую или вполне легальный процесс освоения бюджетных средств (процесс отката).

2. Имитация изъятия средств (10%, 20%, 30%) у производителя и перенаправление их домашним хозяйствам, начиная с 2005 г. (сценарии 4–6). В этом случае имитируется процесс дачи (со стороны производителя) и получения взяток (в конечном счете, домашними хозяйствами).

Результаты применения перечисленных 6 сценариев экономического развития страны с негативным влиянием теневой экономики в сравнении с базовым вариантом эволюции представлены в табл. 4.3.4 и 4.3.5.

Таблица 4.3.4. **Значения ВВП (в млн тенге в ценах 2000 г.) в базовом варианте и при использовании сценариев 1–6**

	2005 г.	2006 г.	2007 г.	2008 г.
Базовый вариант	4 300 103	4 618 653	4 963 707	5 337 048
Сценарий 1	4 301 026	4 623 221	4 975 060	5 357 813
Сценарий 2	4 301 887	4 627 487	4 985 442	5 376 495
Сценарий 3	4 302 752	4 631 527	4 994 972	5 393 343
Сценарий 4	4 298 244	4 612 732	4 953 878	5 324 870
Сценарий 5	4 296 520	4 607 483	4 945 717	5 315 665
Сценарий 6	4 294 935	4 602 927	4 939 176	5 309 146

Таблица 4.3.5. **Значения индекса потребительских цен (в % к предыдущему году) в базовом варианте и при использовании сценариев 1–6**

	2005 г.	2006 г.	2007 г.	2008 г.
Базовый вариант	107,624	108,602	109,334	108,816
Сценарий 1	115,575	109,706	109,986	108,989
Сценарий 2	123,530	109,761	110,470	109,044
Сценарий 3	131,481	108,962	111,001	109,006
Сценарий 4	138,576	118,506	113,760	111,462
Сценарий 5	171,450	123,439	115,029	111,904
Сценарий 6	206,522	125,441	114,879	111,508

Анализ табл. 4.3.4 и 4.3.5 показывает, что исследуемые сценарии незначительно влияют на ВВП страны, в то же время индекс потребительских цен значительно возрастает в первый год применения сценариев 1–6, в последующие годы их влияние на индексы цен ослабевает.

Отметим, что рассмотренные аспекты теневой экономики — хищения из бюджета и взятки — приводят к ярко выраженным негативным последствиям для экономики страны. В обоих случаях возрастает спрос на потребительские товары, что приводит к естественному росту потребительских цен. Помимо этого производитель зачастую транслирует издержки, идущие на взятки, в цену своей продукции, что также приводит к росту цен. В любом случае, в конечном счете, страдает большая часть населения

страны, не имеющая отношения к дележу бюджетных средств и получению взяток и откатов.

Следующая серия вычислительных экспериментов ставила своей целью методами параметрического регулирования уменьшить отрицательное воздействие каждого из рассматриваемых сценариев на один из основных макроэкономических показателей — уровень цен.

В рамках применения подхода параметрического регулирования ставилась задача нахождения оптимальных значений для 2005–2008 гг. (и для каждого рассматриваемого сценария) таких регулируемых государством 76 параметров (u_i^l, $i = 1, \ldots, 19$ — номер параметра, $l = 2005, \ldots, 2008$ — номер года), как:

— различные налоговые ставки;

— доли консолидированного бюджета, идущие на финансирование государственного, рыночного секторов экономики, покупку конечных товаров;

— доли бюджетов государственного сектора, идущие на покупку различных видов товаров;

— доли различных видов товаров, произведенных государственным сектором экономики для реализации на различных рынках.

В качестве минимизируемого критерия K использовался уровень потребительских цен страны для 2008 г. относительно 2004 г. при использовании j-го сценария ($j = 1, \ldots, 6$):

$$K = P_2c[2008]/P_2c[2004].$$

Среди ограничений решаемой вариационной задачи использовалось ограничение для ВВП страны следующего вида:

$$Y^j[t] \geqslant \overline{Y}^j[t], \quad j = 1, \ldots, 6.$$

Здесь $\overline{Y}^j[t]$ — значения ВВП при использовании j-го сценария без параметрического регулирования; $Y^j[t]$ — значения ВВП при использовании j-го сценария и оптимальных в смысле критерия K значений регулируемых параметров.

Ограничения для регулируемых параметров u_i^l представлены в табл. 4.3.6.

В работе рассматривалась следующая задача нахождения оптимальных значений экономических параметров u_i^l. Определить на базе модели (4.3.118)–(4.3.122) оптимальные в смысле критерия K значения экономических параметров u_i^l, $i = 1, \ldots, 19$, $l = 2005, \ldots, 2008$, при указанных выше ограничениях.

Таблица 4.3.6. **Регулируемые параметры модели и ограничения, накладываемые на них**

№	Регулируемый параметр u_i^l	Промежуток возможных значений регулируемого параметра
1	Ставка налога на добавленную стоимость	[0,135; 0,165]
2	Ставка налога на прибыль организаций	[0,27; 0,33]
3	Ставка налога на имущество	[0,009; 0,011]
4	Ставка налога на доходы физических лиц	[0,135; 0,165]
5	Ставка единого социального налога	[0,099; 0,121]
6	Доля консолидированного бюджета, идущая на покупку конечных товаров	[0,117; 0,143]
7	Доля консолидированного бюджета, идущая на субсидирование государственного сектора	[0,325; 0,398]
8	Доля консолидированного бюджета, идущая на субсидирование рыночного сектора	[0,028; 0,034]
9	Доля консолидированного бюджета, идущая на социальные трансферты	[0,320; 0,391]
10	Доля бюджета государственного сектора, идущая на покупку капитальных товаров	[0,129; 0,158]
11	Доля бюджета государственного сектора, идущая на покупку инвестиционных товаров	[0,068; 0,083]
12	Доля произведенного продукта государственного сектора, идущая на продажу на рынках конечных товаров для рыночного сектора	[0,101; 0,123]
13	Доля произведенного продукта государственного сектора, идущая на продажу на рынках конечных товаров для экономического агента № 5 по экзогенным ценам	[0,039; 0,048]
14	Доля произведенного продукта государственного сектора, идущая на продажу на рынках конечных товаров для экономического агента № 5 по рыночным ценам	[0,039; 0,048]
15	Доля произведенного продукта государственного сектора, идущая на продажу на рынках инвестиционных товаров по экзогенным ценам	[0,107; 0,131]
16	Доля произведенного продукта государственного сектора, идущая на продажу на рынках инвестиционных товаров по рыночным ценам	[0,107; 0,131]
17	Доля основных фондов государственного сектора, идущая на продажу на рынках капитальных товаров по экзогенным ценам	[0,200; 0,244]

Таблица 4.3.6 (окончание)

№	Регулируемый параметр u_i^l	Промежуток возможных значений регулируемого параметра
18	Доля основных фондов государственного сектора, идущая на продажу на рынках капитальных товаров по рыночным ценам	[0,200; 0,244]
19	Доля произведенного продукта, идущая на продажу на рынках конечных товаров в странах внешнего мира	[0,230; 0,281]

Поставленная задача нахождения наименьшего значения критерия K — функции 76 переменных (и соответствующих значений управляемых параметров $\{u_i^l\} = \arg\min K$) — для каждого из 6 рассматриваемых сценариев при отмеченных ограничениях решалась с помощью алгоритма Нелдера–Мида. В табл. 4.3.7 представлены результаты решения поставленной задачи.

Таблица 4.3.7. **Результаты применения подхода параметрического регулирования**

Сценарий	Критерий K без параметрического регулирования	Критерий K при найденных оптимальных значениях параметров	Y^{j*}[2008] в трлл тенге	Y^j[2008] в трлл тенге
1	1,52	1,32	5,35	5,47
2	1,63	1,41	5,38	5,45
3	1,73	1,50	5,40	5,50
4	2,08	1,87	5,32	5,44
5	2,72	2,47	5,31	5,44
6	3,32	3,04	5,31	5,44

Анализ табл. 4.3.7 показывает, что подход параметрического регулирования позволяют в случае рассматриваемых сценариев понизить уровень цен 2008 г. на 9,4–13,2%, а ВВП страны для 2008 г. повысить на 1,30–2,44% по сравнению со случаем отсутствия регулирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В книге описана теория параметрического регулирования экономического роста на основе детерминированных непрерывных динамических моделей, детерминированных дискретных динамических моделей, стохастических дискретных динамических моделей с аддитивным шумом. Представленная теория состоит из 8 составляющих, в рамках которых:

— предложены прикладные методы оценки структурной устойчивости и устойчивости математических моделей;

— сформулированы и доказаны теоремы об условиях существования задач вариационного исчисления по синтезу и выбору оптимальных законов параметрического регулирования;

— предложен метод исследования зависимости результатов решения рассматриваемых задач вариационного исчисления от значений нерегулируемых параметров. В частности, дано определение точки бифуркации экстремалей задачи вариационного исчисления по выбору оптимальных законов параметрического регулирования, сформулирована и доказана теорема об условиях существования точки бифуркации.

Эффективность теории параметрического регулирования проиллюстрирована на ряде примеров, в число которых входят: математическая модель неоклассической теории оптимального роста, математическая модель экономической системы страны с учетом влияния доли государственных расходов и ставки процента по государственным займам на экономический рост, математическая модель экономической системы страны с учетом влияния международной торговли и валютных обменов на экономический рост, монетарная модель Турновского, эндогенная модель Джонса, вычислимая модель общего равновесия отраслей экономики, математическая модель глобальной экономики Форрестера и др.

В книге на основе факта зависимости решения системы алгебраических уравнений от ее коэффициентов предложен подход параметрического регулирования статического равновесия национальной экономики. Эффективность подхода параметрического регулирования статического равновесия показана на базе математических моделей общего экономического равновесия Кейнса и открытой экономики малой страны.

В книге проиллюстрированы инструментальные возможности ряда математических моделей, например таких, как модели *IS*, *LM*, *IS-LM*, модель общего экономического равновесия Кейнса, модель открытой экономики малой страны, ряда моделей конъюнктурных циклов, вычислимой модели общего равновесия отраслей экономики и других соответственно в сферах: макроэкономического анализа состояний макроэкономических рынков; оценки характеристик конъюнктурных циклов в виде амплитуд и периодов соответствующих бизнес-циклов; ретроспективного анализа за период идентификации, верификации математической модели и перспективного анализа за период среднесрочного прогноза показателей экономических агентов и национальной экономики, а также их инструментальные возможности для оценки эластичности соответствующих эндогенных переменных, источников экономического роста и оценки отдельных макроэкономических положений о конъюнктурных циклах на базе соответствующих математических моделей.

Важным прикладным моментом материалов книги является иллюстрация возможностей выработки рекомендаций по экономической политике. Так, графики зависимостей оптимальных значений критериев оптимизационных задач, сформулированных на базе математических моделей общего экономического равновесия Кейнса и малой открытой экономики страны (коэффициенты которых оценены по статистическим данным национальной экономики) позволяют в качестве рекомендаций по экономической политике рассматривать для известных значений внешних экономических параметров соответствующие оптимальные значения экономических инструментов, входящих в состав оптимального решения сформулированной оптимизационной задачи.

В качестве рекомендаций по экономической политике для регулирования бизнес-цикла можно рассматривать соответствующие оптимальные законы параметрического регулирования в рамках (выбранных лицом, принимающим решение) соответствующих критериев регулирования эволюции конъюнктурных циклов.

В рамках вычислимых моделей общего равновесия в качестве рекомендаций по экономической политике можно рассматривать соответствующие оптимальные законы параметрического регулирования в рамках (согласованных с лицом, принимающим решения) критериев эффективности экономического роста. Таким образом, результаты исследований, изложенные в данной книге, представляют элементы современной парадигмы макроанализа и выработки рекомендаций по экономической политике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. Учебник для вузов.—М.: ЮНИТИ, 1998. 1022 с.
2. Аносов Д.В. Грубые системы // Труды математического института АН СССР. 1985. Т. 169. С. 59–93.
3. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: МЦНМО, 2002.
4. Ашимов А.А., Боровский Ю.В., Волобуева О.И., Ашимов Ас.А. О выборе эффективных законов параметрического регулирования механизмов рыночной экономики // Автоматика и телемеханика. 2005. № 3. С. 105–112.
5. Ашимов А.А., Боровский Ю.В., Нижегородцев Р.М., Новиков Д.А., Султанов Б.Т. Параметрическое регулирование характеристик конъюнктурных циклов на примере модели Гудвина / Информационная экономика: институциональные проблемы. Материалы Девятых Дрокеровских чтений / Под ред. Р.М. Нижегородцева.—М.: Доброе слово, 2009. С. 53–66.
6. Ашимов А.А., Боровский Ю.В., Новиков Д.А., Нижегородцев Р.М., Султанов Б.Т. Структурная устойчивость и параметрическое регулирование на примере моделей циклической динамики макросистем // Проблемы управления. 2010. № 1. С. 12–17.
7. Ашимов А.А., Боровский Ю.В., Султанов Б.Т., Искаков Н.А., Ашимов Ас.А. Элементы теории параметрического регулирования эволюции экономической системы страны.—М.: Физматлит, 2009.
8. Ашимов А.А., Сагадиев К.А., Боровский Ю.В., Искаков Н.А., Ашимов Ас.А. О теории параметрического регулирования развития рыночной экономики // Управление большими системами. 2007. № 17. С. 3–27.
9. Ашимов А.А., Сагадиев К.А., Боровский Ю.В., Искаков Н.А., Ашимов Ас.А. Развитие и применение теории параметрического регулирования эволюции экономической системы на базе одной неоклассической модели оптимального роста // Автоматика и телемеханика. 2008. № 8. С. 113–119.
10. Ашимов А.А., Султанов Б.Т., Адилов Ж.М., Боровский Ю.В., Боровский Н.Ю., Ашимов Ас.А. О применении теории параметрического регулирования для вычислимых моделей общего равновесия // Экономика и математические методы. 2010. Т. 46, № 3. С. 109–116.
11. Ашимов А.А., Султанов Б.Т., Адилов Ж.М., Боровский Ю.В., Новиков Д.А., Нижегородцев Р.М., Ашимов Ас.А. Макроэкономический анализ и экономическая политика на базе параметрического регулирования.—М.: Физматлит, 2010.
12. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.—М.: Наука, 1990.

13. Беленькая О.И. Анализ влияния инструментов кредитно-денежной политики банка России на параметры реальных инвестиций [www.optim.ru/fin/20012/rbelenkaya/asp].

14. Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К. Геометрические методы в вариационных задачах.—М.: Магистр, 1998. 658 с.

15. Государственное регулирование рыночной экономики / Под ред. И.И. Столярова.—М.: Дело, 2001.

16. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.—Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

17. Дубовский С.В. Объект моделирования — цикл Кондратьева // Математическое моделирование. 1995. Т. 7, № 6. С. 65–74.

18. Евтушенко Ю.Г., Малкова В.У., Станевичюс А.А. Параллельный поиск глобального экстремума функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 49, № 2. С. 255–269.

19. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач.—М.: Наука, 1974.

20. Колемаев В.А. Математическая экономика.—М.: Юнити, 2002.

21. Коплык И.В., Поленница П.В., Остапова О.П. Поиск глобального экстремума функции, заданной имитационной моделью. Вестник СумГУ, серия «Технические науки». 2009. № 2. С. 105–112.

22. Крюков Р.В. Государственное регулирование национальной экономики.—М.: Прориздат, 2005.

23. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений.—М.: Логос, 2002. 392 с.

24. Латов Ю.В. Экономика вне закона: Очерки по теории и истории теневой экономики.—М.: Московский общественный научный фонд, 2001.

25. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений.—М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2008. 200 с.

26. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики.—М.: Едиториал УРСС, 2004.

27. Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Сулакшин С.С. Применение вычислимых моделей в государственном управлении.—М.: Научный эксперт, 2007. 304 с.

28. Макконелл К.Р., Брю С.Л. Экономикс. Принципы, проблемы и политика. Т. 1, 2.—М.: Республика, 1992.

29. Матросов В.М., Измоденова-Матросова К.В. Учение о ноосфере, глобальное моделирование и устойчивое развитие.—М.: Академия, 2005.

30. Матросов В.М., Хрусталев М.М., Арнаутов О.В., Кротов В.Ф. О высокоагрегированной модели развития России. Analysis of development instability on the base of mathematical modeling. Preprints of the Second International Workshop. Moscow, 1993.

31. Орлов А.И. Эконометрика. Учебник.—М.: Изд-во «Экзамен», 2002. 576 с.

32. Петренко Е. И. Разработка и реализация алгоритмов построения символического множества // Дифференциальные уравнения и процессы управления (электронный журнал). 2006. № 3. С. 55–96.

33. Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. Опыт математического моделирования экономики.—М.: Энергоатомиздат, 1996.

34. Понтрягин А. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.—М.: Наука, 1970.

35. Сакс Д. Д., Ларрен Ф. Б. Макроэкономика. Глобальный подход.—М.: Дело, 1996.

36. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского.—М.: Наука, 1987.

37. Статистический ежегодник Казахстана / Под ред. К. С. Абдиева.—Алматы: Агентство Республики Казахстан по статистике, 2001–2009.

38. Статистический ежегодник России / Под ред. А. Е. Суринова.—М.: Росстат, 2010.

39. Тарасевич Л. С., Гребенников П. И., Леусский А. И. Макроэкономика.—М.: Высшее образование, 2006.

40. Туманова Е. С., Шагас Н. А. Макроэкономика.—М.: Инфра-М, 2004.

41. Улам С. Нерешенные математические задачи.—М.: Наука, 1964.

42. Фридмен М. Количественная теория денег.—М.: Эльф пресс, 1996. 77 с.

43. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных математических моделей. Пер. с чешск.—М.: Мир, 1991.

44. Черник Д. Г., Морозов В. П. и др. Введение в экономико-математические модели налогообложения.—М.: Финансы и статистика, 2001.

45. Шараев Ю. В. Теория экономического роста.—М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006.

46. Яновский Л. П. Контролирование хаоса в моделях экономического роста // Экономика и математические методы. 2002. Т. 38, № 1. С. 16–23.

47. Ashimov A. A., Borovsky Yu. V., Ashimov As. A. Parametrical regulation of the marker economy mechanisms // Proceedings of 18th International Conference on Systems Engineering ICSEng 2005. 16–18 August, 2005. Las Vegas, Nevada. P. 189–193.

48. Ashimov A. A., Sagadiev K. A., Borovsky Yu. V., Ashimov As. A. On bifurcation of extremals of one class of variational calculus tasks at the choice of the optimum law of a dynamic systems parametric regulation // Proceedings of XVIII International Conference on Systems Engineering (ICSE 2006), Coventry University, UK, 2006. P. 15–20.

49. Ashimov A. A., Sultanov B. T., Adilov Zh. M., Borovskiy Yu. V., Borovskiy N. Yu., Ashimov As. A. Development of parametrical regulation theory on the basis of one class computable general equilibrium models // Proceedings of 12th International Conference on Intelligent Systems and Control, 2009.—Cambridge, MA, USA. P. 212–217.

50. Ashimov A., Sagadiyev K. A., Borovskiy Yu. V., Iskakov N. A., Ashimov As. A. Development of the market economy evolution parametrical regulation theory on the growth model basis // 27th IASTED International Conference on Modelling, Identification and Control. February 11–13, 2008.—Innsbruck, Austria. P. 83–86.

51. Ashimov A.A., Iskakov N.A., Borovskiy Yu.V., Sultanov B.T., Ashimov As.A. On the development and usage of the market economy parametrical regulation theory on the basis of one-class mathematical models // Proceedings of 19th International Conference on Systems Engineering ICSEng 2008. 19–21 August, 2008.—Las Vegas, Nevada, USA. P. 43–48.

52. Ashimov A.A., Iskakov N.A., Borovskiy Yu.V., Sultanov B.T., Ashimov As.A. Parametrical regulation of economic growth on the basis of one-class mathematical models // Systems Science. 2009. V. 35, № 1. P. 57–63.

53. Ashimov A.A., Sagadiyev K.A., Borovskiy Yu.V., Iskakov N.A., Ashimov As.A. Elements of the market economy development parametrical regulation theory // Proceedings of the Ninth IASTED International Conference on Control and Applications, held May 30–June 1, 2007.—Montreal–Quebec, Canada. P. 296–301.

54. Ashimov A.A., Sagadiyev K.A., Borovskiy Yu.V., Iskakov N.A., Ashimov As.A. On the market economy development parametrical regulation theory // Proceedings of the 16th International Conference on Systems Science, 4–6 September 2007.—Wroclaw, Poland. P. 493–502.

55. Ashimov A.A., Sagadiyev K.A., Borovskiy Yu.V., Iskakov N.A., Ashimov As.A. On the market economy development parametrical regulation theory, Kybernetes // The international journal of cybernetics, systems and management sciences. UK, Bingley: Emerald, 2008. V. 37, № 5. P. 623–636.

56. Ashimov A.A., Sagadiyev K.A., Borovskiy Yu.V., Iskakov N.A., Ashimov As.A. Development and usage of the market economy parametrical regulation theory on the basis of one-class mathematical models // 14th International Congress of Cybernetics and Systems of WOSC. Book of Abstracts. September 9–12, 2008.—Wroclaw, Poland. Book of Abstracts. P. 14.

57. Cass D. Optimum growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation // Review of Economic Studies. 1965. V. 32. P. 233–240.

58. CIA World Factbook — https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/index.html.

59. Diamond P. National Debt in a Neoclassical Growth Model // American Economic Review. 1965. V. 55. P. 1126–1150.

60. Grossman G., Helpman E. Innovation and Growth in the Global Economy.—Cambridge: MA, MIT Press, 1991.

61. Jones Ch.I. Was an Industrial Revolution Inevitable? Economic Growth over the Very Long Run // Advances in Macroeconomics. V. 1, № 2. 2001. Article 1. 49 p.

62. Koopmans T. Capital Accumulation and Economic Growth // Pontificae Academiae Scientiarum Scripta Varia. 1965. V. 28. P. 225–300.

63. Leontief W. Essays in Economics: Theories and Theorizing.—London: Oxford University Press, 1966.

64. Lukas R. Making a Miracle // Econometrica. 1993. V. 61, № 2. P. 251–271.

65. Lukas R. On the Mechanics of Economic Development // Journal of monetary Economics. 1998. № 2.

66. Nelder J.A., Mead R. A simplex method for function minimization // The Computer Journal. 1965. № 7. P. 308–313.

67. Robinson C. Structural Stability on Manifolds with Boundary // Journal of differential equations. 1980. № 37. P. 1–11.

68. Schneider F., Enste D. Shadow Economies: Size, Causes and Consequences // Journal of Economic Literature. 2000. V. 8, № 1. P. 100.

69. Solow R. A. Contribution to the Theory of Economic Growth // Quarterly Journal of economics. 1956. V. 70. P. 65–94.

70. Strongin R. G., Sergeyev Y. D. Global Optimization with Non-Convex Constraints. Sequential and Parallel Algorithms.—Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

71. Swan T. Economic Growth and Capital Accumulation // Economic Record. 1956. V. 32, № 2. P. 334–361.

72. Turnovsky S. Macroeconomic Dynamics and Growth in a Monetary Economy: a Synthesis // Journal of money, Credit and Banking. 1978. V. 10. Issue 1. P. 1–26.

73. Turnovsky S. J. Methods of Macroeconomic Dynamics.—Cambridge: MITPress, 2000.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ашимов Абдыкаппар Ашимович — академик Национальной академии наук Республики Казахстан, д.т.н., профессор, Казахский Национальный технический университет им. К.И. Сатпаева.
e-mail: ashimov37@mail.ru.

Боровский Юрий Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, доцент, Казахский Национальный технический университет им. К.И. Сатпаева.
e-mail: yuborovskiy@rambler.ru.

Султанов Бахыт Турлыханович — консультант государственной научно-технической программы, Казахский Национальный технический университет им. К.И. Сатпаева. e-mail: sultanov_bt@pochta.ru.

Адилов Жексенбек Макеевич — д.э.н., профессор, Казахский Национальный технический университет им. К.И. Сатпаева.
e-mail: allnt@ntu.kz.

Новиков Дмитрий Александрович — чл.-корр. Российской академии наук, д.т.н., профессор, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. e-mail: novikov@ipu.ru.

Алшанов Рахман Алшанович — д.э.н., профессор, Казахский Национальный технический университет им. К.И. Сатпаева.
e-mail: AlshanovRA@yandex.ru.

Ашимов Аскар Абдыкаппарович — научный работник государственной научно-технической программы, Казахский Национальный технический университет им. К.И. Сатпаева. e-mail: a.ashimov37@kcp.kz.