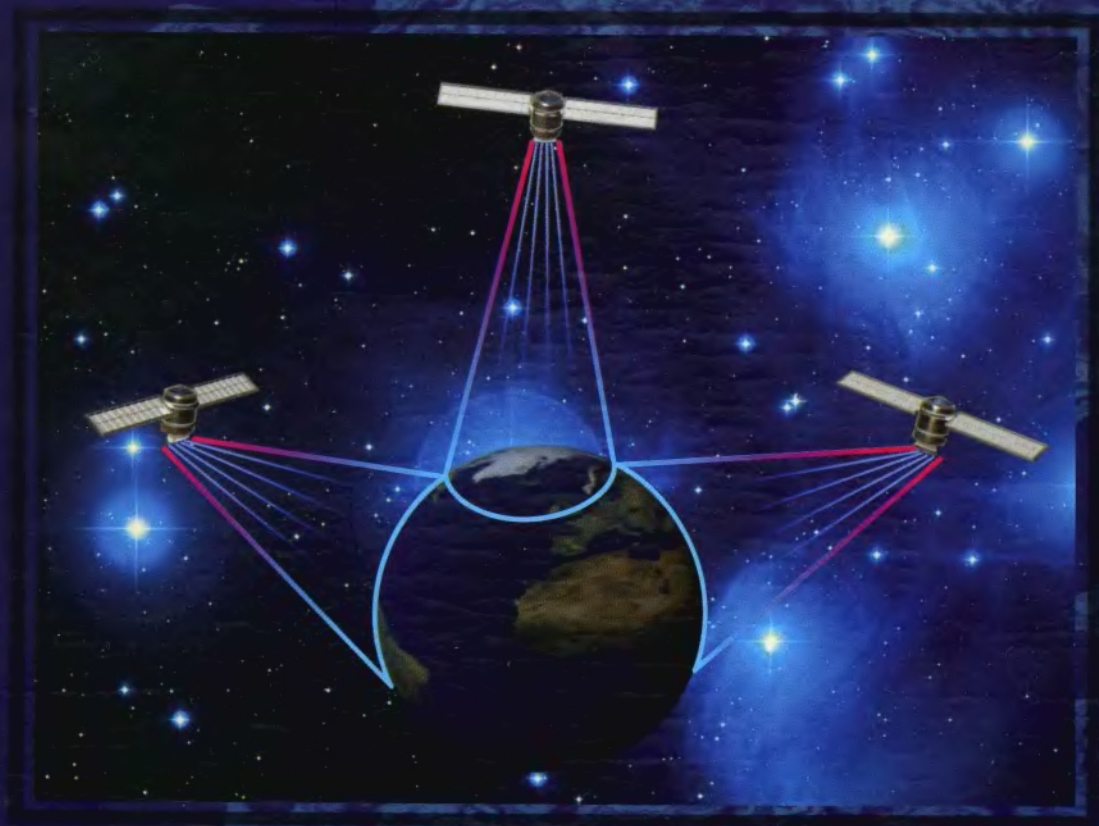


ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ



ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ В РАДИОФИЗИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Под редакцией
заслуженного деятеля науки РФ,
д. ф.-м. н., профессора В.Ф. Кравченко



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 517.95: 621.391.24: 530.1

ББК 22.311

Ц75

Авторский коллектив:

М. А. Басараб, В. К. Волосюк, О. В. Горячкин, А. А. Зеленский, В. Ф. Кравченко,
А. В. Ксендзук, Б. Г. Кутуза, В. В. Лукин, А. В. Тоцкий, В. П. Яковлев

Цифровая обработка сигналов и изображений в радиофизических приложениях. / Под ред. В. Ф. Кравченко. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 544 с. — ISBN 978-5-9221-0871-3.

В монографии изложены новые перспективные направления цифровой обработки сигналов применительно к задачам радиофизики и радиотехники. Монография состоит из семи глав. В первой главе рассмотрены и обоснованы новые методы аппроксимации сигналов с помощью финитных функций, включая новый класс атомарных функций, на основе теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона. Во второй главе рассмотрено использование биспектрального анализа в цифровой обработке сигналов. Третья глава посвящена многопозиционным радиолокационным системам с синтезированием апертуры антенн. В четвертой главе рассмотрены некоторые аспекты цифровой обработки сигналов в обзорных РЛС и РСА. Разработке алгоритмов для слепой обработки сигналов посвящена пятая глава. Шестая глава состоит из двух частей. В первой изложена теория R-функций и атомарных функций (АФ) применительно к описанию локусов произвольной формы, а во второй по результатам первой построены двумерные весовые функции (окна) Кравченко на опорных областях нестандартной геометрии для цифровой обработки многомерных сигналов и изображений. В седьмой главе впервые на основе обобщенных рядов Котельникова и Левитана предложен и обоснован новый класс аналитических вейвлетов. Численный эксперимент и анализ физических результатов показывают потенциальные возможности предложенного и обоснованного нового класса вейвлетов в различных задачах радиофизики, радиолокации, радиовидения.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов радиофизических и радиотехнических специальностей, а также для специалистов, работающих в области вычислительной математики и физики.

Рецензент: академик РАН В. И. Пустовойт

ISBN 978-5-9221-0871-3

© ФИЗМАТЛИТ, 2007

© Коллектив авторов, 2007

“В технике связи при передаче различных сигналов мы имеем обычно дело с функциями времени, спектр которых ограничен, т.е. в спектре которых не содержатся частоты выше некоторой граничной. Такие функции обладают замечательным свойством, установленным впервые в 1933 г. В.А. Котельниковым и выраженным им в теореме, играющей фундаментальную роль в теории связи и, в частности, в импульсной связи.”

Академик А. А. Харкевич

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга построена на оригинальных результатах авторов, полученных ими за последние годы. Безусловно, ее чтение предполагает знакомство читателя с теорией цифровой обработки сигналов (ЦОС) различной физической природы, а также классической теоремой Уиттекера–Котельникова–Шеннона.

В первой главе рассмотрены и обоснованы новые методы аппроксимации сигналов с помощью финитных функций, включая новый класс атомарных функций (АФ), на основе теоремы Уиттекера–Котельникова–Шеннона.

Вторая глава посвящена биспектральному анализу и его приложениям. Показано, что биспектральный анализ может служить чувствительным и точным средством, позволяющим выявить и измерить отклонения исследуемого процесса от нормального закона распределения. Поэтому в ряде прикладных задач радиолокации, гидролокации, астрономии, технической диагностики машин и механизмов, медицинской диагностики и других биспектральный анализ часто служит единственным эффективным средством обработки сигналов и оценки параметров исследуемых процессов.

В третьей главе обсуждаются проблемы построения нового поколения многопозиционных радиолокационных систем апертуры антенны. Постоянное повышение требований к системам дистанционного зондирования (ДЗ) и, в частности, к точности, надежности, возможности получения данных при условии минимального размера зон затенений, оперативности и частоте наблюдений привели к необходимости создания системы глобального мониторинга земной поверхности. Такой глобальной системой ДЗ аэрокосмического базирования, которая способна удовлетворить самые высокие требования к качеству получаемых данных, является многопозиционная система с синтезированием апертуры антенны (МПРСА). Впервые этот термин был введен в работах А.В. Ксендзука. Приведенный в этой главе материал является обобщением исследований автора. Им сделан акцент на методы и алгоритмы обработки, которые могут быть легко интегрированы в цифровой виде или в виде программ применительно к системам ДЗ или наземным радиолокационным станциям обработки.

В четвертой главе рассмотрены особенности первичной и вторичной цифровой обработки процессов в РСА с учетом их стохастического

и нестационарного характера. Предложены методы создания цифровой аппаратуры аттестации, разработаны и исследованы качественные показатели систем ДЗ. Показаны особенности вторичной цифровой обработки радиолокационных изображений и механизм определения динамических, флуктуационных, шумовых и общих ошибок оценки УЭПР в скаттерометрических РСА. Исследованы некоторые алгоритмы интерпретации РЛИ (обнаружение протяженных объектов по результатам радиолокационного наблюдения), а также разработаны и исследованы цифровые методы развертки фазы в интерферометрических системах с синтезированием апертуры антенны.

В пятой главе излагается современная теория, методы и алгоритмы слепой обработки сигналов (СОС), а также некоторые приложения ее к решению задач связи по каналам с рассеянием и космической радиолокации. Здесь задача “слепой обработки” сформулирована как цифровая обработка неизвестных сигналов, прошедших линейный канал с неизвестными характеристиками на фоне аддитивных шумов. Она часто возникает в различных приложениях ЦОС и изображений: в системах радиотехники, в том числе в системах радиолокации, радионавигации, радиоастрономии, цифрового телевидения; в системах радиосвязи; в задачах цифровой обработки речи, изображений, при обработке сигналов медицинской техники, в геофизике и т. д.

Шестая глава состоит из двух частей. В первой на конкретных примерах изложена теория R-функций и АФ применительно к описанию локусов произвольной формы, а во второй — по результатам первой, построенны двумерные весовые функции (окна) Кравченко на опорных областях нестандартной геометрии для цифровой обработки многомерных сигналов и изображений.

В седьмой главе впервые на основе обобщенных рядов Котельникова и Левитана предложен и обоснован новый класс аналитических вейвлетов. Исследования показали, что они могут быть эффективными в задачах цифровой обработки СШП сигналов. Предложена методика согласования аналитических вейвлетов с конкретными СШП сигналами с целью повышения качества их анализа и цифровой обработки. Функционал качества по оценке эффективности вейвлетных базисов Кравченко–Котельникова и Кравченко–Левитана позволяет определить подходящий для практической реализации. Проведенный численный эксперимент, а также анализ физических результатов показывают потенциальные возможности предложенного и обоснованного нового класса вейвлетов в различных задачах радиофизики, радиолокации, радиовидения.

В написании монографии принимали участие: М.А. Басараб, В.Ф. Кравченко, В.П. Яковлев (гл. 1), А.А. Зеленский, В.В. Лукин, А.В. Тоцкий (гл. 2), А.В. Ксендзук (гл. 3), В.К. Волосюк, В.Ф. Кравченко, А.В. Ксендзук, Б.Г. Кутуза (гл. 4), О.В. Горячкин (гл. 5), В.Ф. Кравченко (гл. 6 и 7). Авторы выражают благодарность Д.В. Чурикову и А.В. Юрину за помощь при оформлении книги, в частности, гл. 6 и 7.

Заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук,
профессор *В.Ф. Кравченко*

ГЛАВА 1

АППРОКСИМАЦИЯ ФИНИТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ УИТТЕКЕРА–КОТЕЛЬНИКОВА–ШЕННОНА

Введение

Информационный этап технической революции берет начало от двух великих изобретений — телефона и радио. Эти средства связи обеспечивают непосредственный обмен информацией в диалоговом режиме. Радио снимает ограничения на местоположение абонентов, в результате обмен информацией возможен в любой момент времени. Развитие техники постепенно обеспечивало новыми услугами расширяющуюся общность потребителей.

В связи с этим возник вопрос о принципиальной возможности воспроизведения техническими средствами реальных сигналов, переносящих информацию, в первую очередь, речевых. Отображение с приемлемыми искажениями реальных сигналов путем использования формальных, искусственных математических процедур широко обсуждалось в связи с аппроксимацией функций рядами Фурье. Специалисты пришли к выводу о полной адекватности математического описания и реальных изображений; наглядным и убедительным примером явилось отображение рядами Фурье женских профилей. К сожалению, представление рядами Фурье не соответствовало имевшимся к тому времени техническим возможностям средств связи: необходимы были иные методы аппроксимации.

Решение было получено В.А. Котельниковым в 1933 году [1]. Он предложил разлагать в ряд Фурье не сигнал $f(t)$, подлежащий передаче, а его спектр $S(\omega)$ — преобразование Фурье $f(t)$. Самой важной в этом подходе была гипотеза о том, что реальные сигналы имеют спектр $S(\omega)$, сосредоточенный на конечном интервале, в идеале — финитный спектр, равный нулю вне полосы $(-\alpha, +\alpha)$. Таким образом,

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k e^{\frac{i\pi k\omega}{\alpha}},$$

где

$$D_k = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{i\pi k\omega}{\alpha}} S(\omega) d\omega.$$

Поскольку $f(t)$ и $S(\omega)$ составляют пару преобразований Фурье,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.1)$$

и таким образом

$$D_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\alpha} f\left(\frac{\pi k}{\alpha}\right).$$

Подставляя D_k в соотношение для спектра и переходя от $S(\omega)$ к $f(t)$, получим ряд Уиттекера–Котельникова–Шеннона (УКШ) для $f(t)$:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi k}{\alpha}\right) \frac{\sin \alpha \left(t - \frac{\pi k}{\alpha}\right)}{\alpha \left(t - \frac{\pi k}{\alpha}\right)}. \quad (1.2)$$

Таким образом, сигнал с финитным спектром оказывается представленным без искажения своими значениями $f(\pi k/\alpha)$ — отсчетами в дискретные моменты времени. Отсчетное представление отвечает положительно на вопрос о возможности передачи реальных сигналов перспективными техническими средствами.

Следующий этап развития техники связи характеризовался исследованиями потенциальных возможностей средств связи с точки зрения максимизации скорости передачи сообщений по каналам связи с учетом помех. Соответствующий математический аппарат был создан на основе статистических методов Н. Винером, К. Шенноном, В. А. Котельниковым и А. Н. Колмогоровым [1–4]. Выборочное представление лежит в основе этих исследований. В частности, К. Шеннон в своей работе по теории информации использовал ряд (1.2) для представления участков спектральной плотности стационарного случайного процесса. Естественно, обсуждение и использование полученных результатов привлекло пристальное внимание к модели функции с финитным спектром.

Оказалось, что такая модель удобна для разнообразных систем в физике и технике. Действительно, большинство используемых устройств представляют собой линейные системы, в которых выход $F(y)$ связан с входом $f(x)$ преобразованием типа свертки:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h(y-x) dx,$$

где $h(x)$ — характеристика линейной системы — отклик на дельта-воздействие. При исследовании физических свойств линейных систем часто приходят к выводу о том, что преобразование Фурье $H(\omega)$ отклика $h(x)$ сосредоточено в конечной области. В антенной технике эта область отождествляется с раскрывом, в оптике — с ограничивающей диафрагмой. С другой стороны, входное воздействие длится конечное время или наблюдается в ограниченной области. Таким образом, в теории линейных систем

можно двояко использовать модель финитной функции, считая $H(\omega)$ и $f(x)$ функциями, равными нулю вне ограниченных областей.

Предварительное исследование финитных функций и их спектров показало их парадоксальные свойства. Д.В. Агеев [5] доказал, что функция с финитным спектром на интервале $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ может с любой точностью аппроксимировать на заданном отрезке $(-T, +T)$ непрерывную функцию, например, сигнал, спектр которого сосредоточен на интервале $(-\Omega, +\Omega)$, где $\Omega \gg \varepsilon$. Таким образом, в принципе возможно передавать широкополосный сигнал с помощью сигнала узкополосного.

Столь же парадоксальный результат был получен Д. Слепяном [6]. Рассматривалась задача об обнаружении сигнала с финитным спектром, заданного на интервале $(-T, +T)$ в смеси с аддитивным шумом. Задачу удалось свести к обнаружению того же сигнала на фоне шума при $T \rightarrow \infty$, в результате вероятность обнаружения оказалась сколь угодно близкой к единице.

Свойства функций с финитным спектром удалось подробно исследовать с привлечением хорошо разработанной в математике теории целых функций. Нетрудно показать, что функция (1.1) после замены вещественной переменной t на комплексную переменную z оказывается аналитической в любой ограниченной области комплексной плоскости:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} S(\omega) e^{i\omega z} d\omega.$$

Более того, она возрастает при $|z| \rightarrow \infty$ не быстрее $e^{\alpha|z|}$, т.е. является целой функцией экспоненциального роста. Важно, что справедливо и обратное утверждение, доказанное Пэли и Винером [7]: всякая целая функция экспоненциального роста имеет финитный спектр. Таким образом, класс функций с финитным спектром совпадает с классом функций экспоненциального роста. В теории целых функций успешно решается задача интерполяции — восстановления заданной функции по бесконечной последовательности ее элементов, например, производных в заданной точке. И.Т. Уиттекер [7] использовал в качестве элементов значения функции в равноотстоящих точках; оказалось, что, если расстояния между ними не больше $\frac{\pi}{\alpha}$, решение задачи однозначно и задается рядом (1.2), в котором переменная t заменяется комплексной переменной z .

Методы теории целых функций использовались при исследовании свойств функций с финитным спектром в трех прикладных направлениях:

- 1) обобщение и исследование выборочного преобразования;
- 2) задача синтеза, т.е. расчет характеристики линейной системы $h(x)$ с финитным спектром с заданными свойствами;
- 3) задача восстановления входного воздействия $f(x)$ по отклику линейной системы $F(y)$.

Остановимся на некоторых типичных примерах, иллюстрирующих специфику полученных результатов.

1.1. Теорема Уиттекера–Котельникова–Шеннона

Общий метод получения интерполяционных рядов основан на принципе наложения спектров. Рассмотрим последовательность дельта-функций

$$p_\delta(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\Delta) p_k,$$

где p_k — линейные функционалы функции $f(x)$ с финитным спектром $S(\omega)$:

$$p_k = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-ik\Omega} S(\Omega) H(\Omega) d\Omega,$$

где $H(\omega)$ — заданная “фильтрующая” функция.

Запишем преобразование Фурье $S_\Delta(\omega)$ функции $f_\delta(x)$, используя представление p_k :

$$S_\Delta = \int_{-\alpha}^{\alpha} S(\Omega) H(\Omega) \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\Delta(\omega - \Omega)} \right) d\Omega.$$

Сумма в правой части есть ряд Фурье периодической дельта-функции:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\omega\Delta} = \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta}\right).$$

После интегрирования получим представление

$$S_\Delta(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{-\infty}^{+\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta}\right) H\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta}\right). \quad (1.3)$$

Сумма представляет собой суперпозицию, наложение подобных слагаемых. Если выбрать $\alpha = \frac{\pi}{\Delta}$, отдельные слагаемые не перекрываются, и в частности при $|\omega| \leq \alpha$

$$S_\Delta(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta} S(\omega) H(\omega),$$

то есть

$$S(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi} \frac{S_\Delta(\omega)}{H(\omega)}.$$

Таким образом, для получения $S(\omega)$ необходимо отсечь все слагаемые в (1.3), кроме одного, и умножить результат на функцию $\frac{1}{H(\omega)}$. Этого можно добиться, используя полосовой фильтр с частотной характеристикой

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{\Delta}{2\pi} \frac{1}{H(\omega)}, & |\omega| \leq \alpha, \\ 0, & |\omega| > \alpha. \end{cases}$$

В результате получается исходная функция в виде интерполяционного ряда:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} p_k \Phi(x - k\Delta), \quad (1.4)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} h(\omega) e^{i\omega z} d\omega.$$

Проиллюстрируем метод наложения на примере восстановления плотности вероятности $p(x)$ случайной величины с финитной характеристической функцией $S(\omega)$ по вероятностям квантованных значений

$$p_k = \int_{k\Delta-0,5\Delta}^{k\Delta+0,5\Delta} p(x) dx.$$

Выборочное представление имеет вид (1.4), где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\Delta\pi} \int_{-0,5\pi}^{0,5\pi} \frac{\lambda}{\sin \lambda} e^{i \frac{2}{\Delta} x \lambda} d\lambda.$$

Рассмотрим случай, когда в точках отсчета задается набор параметров функции, т. е. можно составить несколько дельта-последовательностей. Проиллюстрируем имеющиеся возможности на примере двух наборов:

$$p_\delta(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} p_k \delta(x - k\Delta),$$

$$p_\delta^*(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} p_k^* \delta(x - k\Delta),$$

где

$$p_k = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-ik\Delta\Omega} S(\Omega) H(\Omega) d\Omega,$$

$$p_k^* = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-ik\Delta\Omega} S(\Omega) H^*(\Omega) d\Omega.$$

Поскольку число параметров увеличилось, целесообразно рассмотреть пропорциональное увеличение расстояния Δ между отсчетами. Переходя к преобразованиям Фурье, получим две суммы, в которых слагаемые при

увеличенном расстоянии перекрываются:

$$S_{\Delta}(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{-\infty}^{+\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta}\right) H\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta}\right),$$

$$S_{\Delta}^*(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{-\infty}^{+\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta}\right) H^*\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta}\right).$$

Попытаемся восстановить исходный спектр $S(\omega)$ на интервале $(-\alpha, \alpha)$ из этих последовательностей. Для этого умножим их на спектры $\Phi(\omega)$, $\Phi^*(\omega)$ восстанавливающих фильтров-интерполяторов и сложим:

$$\begin{aligned} \Phi(\omega)S_{\Delta}(\omega) + \Phi^*(\omega)S_{\Delta}^*(\omega) = & \frac{2\pi}{\Delta} \left[\Phi(\omega) \sum_{-\infty}^{+\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta}\right) H\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta}\right) + \right. \\ & \left. + \Phi^*(\omega) \sum_{-\infty}^{+\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta}\right) H^*\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta}\right) \right]. \quad (1.5) \end{aligned}$$

Если интервал Δ больше $\frac{\pi}{\alpha}$, в некоторых точках отрезка $(-\alpha, \alpha)$ могут присутствовать несколько слагаемых каждой суммы. Если этих слагаемых не больше двух, можно попытаться из линейной комбинации (1.5) путем выбора Φ и Φ^* выделить $S(\omega)$. Максимальное значение расстояния между отсчетами, при котором это возможно, соответствует $\Delta = 2\pi/\alpha$; при этом в каждой точке ω будет два слагаемых. Так, при $\omega > 0$, полагая $\Phi(\omega) = \Phi^*(\omega) = 0$, получим

$$\begin{aligned} \Phi(\omega)S(\omega)H(\omega) + S(\omega - 2\pi/\Delta)H(\omega - 2\pi/\Delta) + \\ + \Phi^*(\omega)S(\omega)H^*(\omega) + S(\omega - 2\pi/\Delta)H^*(\omega - 2\pi/\Delta). \end{aligned}$$

Приравнявая эту суммы $S(\omega)$, составим систему линейных уравнений для Φ , Φ^* :

$$\begin{aligned} \Phi(\omega)H(\omega) + \Phi^*(\omega)H^*(\omega) &= 1, \\ \Phi(\omega)H(\omega - 2\pi/\Delta) + \Phi^*(\omega)H^*(\omega - 2\pi/\Delta) &= 0. \end{aligned}$$

Из этой системы можно найти характеристики восстанавливающих фильтров Φ , Φ^* . Таким образом, необходимым условием восстановления является требование не более чем двукратного перекрытия области спектра.

Проиллюстрируем общий результат хорошо известным примером [9].

Пусть $p_k = f(k\Delta)$, $p_k^* = \frac{df(k\Delta)}{dx}$. В этом случае

$$\begin{aligned} p_k &= \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-ik\Delta\Omega} S(\Omega) d\Omega, & H(\Omega) &= 1, \\ p_k^* &= - \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-ik\Delta\Omega} i\Omega S(\Omega) d\Omega, & H^*(\Omega) &= -i\Omega. \end{aligned}$$

Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) - i\omega\Phi^*(\omega) &= 1, \\ \Phi(\omega) - (\omega - 2\pi/\Delta)\Phi^*(\omega) &= 0,\end{aligned}$$

откуда при $\omega \geq 0$

$$\Phi^*(\omega) = i\frac{\Delta}{2\pi}, \quad \Phi(\omega) = 1 + \frac{i\omega\Delta}{2\pi}.$$

Обобщение метода трансляции на многомерный случай получено в [10]. Функция $f(\mathbf{x})$ N переменных $(x_1, x_2, \dots, x_N) = \mathbf{x}$ имеет финитный спектр $S(\xi)$, равный нулю вне области D N -мерного пространства $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \xi$. Перед выборочным преобразованием сигнал $f(\mathbf{x})$ проходит через L фильтров, имеющих спектральные характеристики $\Phi_l(\xi)$. На выходах формируются отсчеты

$$A_l(\mathbf{x}_k) = \int_D S(\xi) e^{i\mathbf{k}_l(\xi - \mathbf{x}_k)} d\xi.$$

Точки $\mathbf{x}_k$ образуют решетку

$$\mathbf{x}_k = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + \dots + k_N \mathbf{a}_N,$$

где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$ — образующие векторы. Представление $f(\mathbf{x})$ ищется в виде ряда

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_N} \sum_{l=1}^L A_l(\mathbf{x}_k) \Phi_l(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k).$$

Для анализа возможности такого представления перейдем к спектрам и используем разложение периодической дельта-функции:

$$\sum_{\mathbf{k}} e^{i(\xi \mathbf{x}_k)} = V \sum_{\mathbf{k}} \delta(\xi - \rho_k).$$

Точки

$$\rho_k = k_1 \mathbf{b}_1 + k_2 \mathbf{b}_2 + \dots + k_N \mathbf{b}_N$$

образуют решетку, обратную решетке с направляющими векторами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$:

$$\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j = \begin{cases} 2\pi, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

а V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{b}_j$.

Требуя совпадения преобразования Фурье с искомым спектром $S(\xi)$, получим систему уравнений для функций $\varphi_l(\xi)$ -преобразований Фурье $\Phi_l(z)$:

$$\sum_l \varphi_l(\xi) H_l(\xi - \rho_k) = \frac{(\sqrt{2\pi})^N}{V} \delta_{k_0},$$

где δ_{km} — символ Кронекера.

Для возможности решения необходимо, чтобы в одной точке ξ пересекалось не более L функций $H_l(\xi - \rho_k)$. Это условие можно сформулировать следующим образом. Если $\theta(\xi)$ — опорная функция области D , равная единице на D и нулю вне D , то для существования отсчетного представления

необходимо, чтобы в каждой точке D при трансляции по узлам ρ_k должно складываться не более L опорных функций:

$$\sum_k \theta(\xi - \rho_k) \leq L, \quad \xi \in D. \quad (1.6)$$

Минимальное число “степеней свободы”, необходимое для восстановления сигнала, или максимальный объем пространства, приходящийся на один отсчет, достигается, если в (1.6) будет равенство. Для некоторых областей в этом случае осуществляется L -кратное заполнение всего пространства, и объем, приходящийся на один отсчет, достигает максимально возможного значения. Хорошо известны относящиеся к этому случаю области в виде прямоугольника или правильного шестиугольника. Кроме того, существуют и многосвязные области, обеспечивающие полное перекрытие; в одномерном случае получаются представления для функций, спектр которых сосредоточен на неперекрывающихся отрезках.

Речевые сигналы или сигналы изображения иногда моделируются случайными процессами. Рассмотрим примеры выборочного представления в этих случаях.

При достаточно малых расстояниях между отсчетами возможна аппроксимация реальных сигналов с любой степенью точности. При достаточно малом шаге квантования аналоговые отсчеты с высокой точностью заменяются квантованными значениями. В результате сочетания дискретизации и квантования по уровню получается цифровой сигнал, который можно передавать по цифровым каналам связи. На приемном конце в результате цифро-аналогового преобразования и использования фильтра-интерполятора восстанавливается исходное сообщение. Но увеличение числа отсчетов и числа уровней квантования приводит к росту скорости создания сообщений, что вызывает увеличение необходимой пропускной способности канала связи. Поэтому актуальна задача выбора частоты и шага квантования, обеспечивающих минимум скорости при заданной погрешности восстановления.

Рассмотрим результат решения этой задачи для системы связи, изображенной на рис. 1.1 [11].

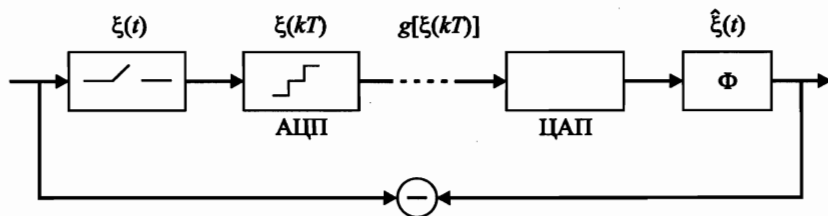


Рис. 1.1. Структурная схема системы связи

Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с заданной корреляционной функцией подвергается дискретизации с интервалом между отсчетами T и квантованию по уровню с шагом h в конечном диапазоне $(-Nh, Nh)$. На

приемном конце используется ступенчатый цифро-аналоговый преобразователь и идеальный фильтр-интерполятор с частотой отсечки $\Delta = \frac{\pi}{T}$, после которого следует фильтр с постоянной частотной характеристикой в полосе $(-\Omega, \Omega)$ и равной нулю вне полосы. При заданной среднеквадратичной погрешности аппроксимации входного сигнала сигналом на выходе ищутся значения параметров T , h , N и Ω , обеспечивающие минимум произведения числа отсчетов в единицу времени на логарифм числа уровней $M = 2N + 1$. Результаты расчетов для процесса с гауссовской корреляционной функцией

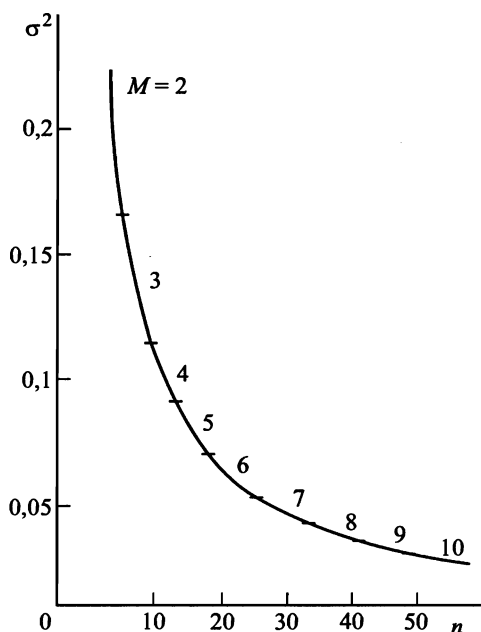


Рис. 1.2. Расчет физических процессов с гауссовской корреляционной функцией $e^{-\tau^2}$ и единичной дисперсией

и единичной дисперсией показаны на рис. 1.2. На кривой отмечены участки, соответствующие значениям $M = 2, 3, \dots, 10$.

В технике связи перспективны адаптивные системы, которые меняют свои характеристики в зависимости от текущих значений параметров сигнала. Важнейшим параметром является эффективная полоса частот, определяющая расстояние между отсчетами. Целесообразное расстояние можно определять с прогнозом на основании анализа предыдущих отсчетов. Простейший алгоритм основан на сопоставлении знаков двух предыдущих отсчетов: если знаки одинаковы, расстояние можно увеличить, если разные — уменьшить. Заметим, что нет необходимости передавать по каналу связи сведения о текущем расстоянии, поскольку оно определяется по уже принятым отсчетам.

Эффективность ряда алгоритмов адаптивной дискретизации исследована в [12] для гауссовского сигнала с экспоненциальной корреляционной

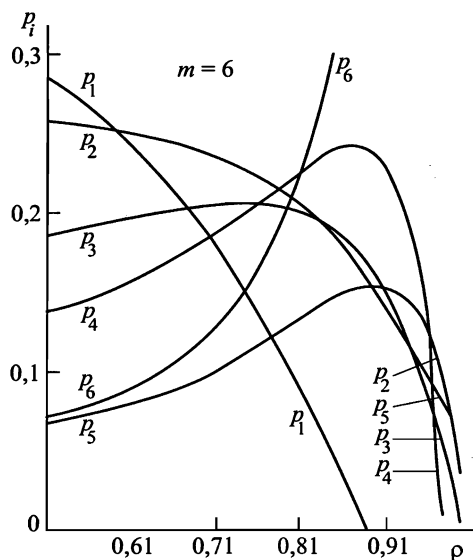


Рис. 1.3. Зависимость вероятностей P_i реализации i -го диапазона от $\rho = e^{-\frac{T_0}{T}}$ для $m = 6$

функцией $e^{-\frac{\tau}{T}}$. Расстояния между отсчетами образуют арифметическую прогрессию: $T_i = iT_0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Если при расстоянии T_i отсчеты имеют одинаковые знаки, следующий отсчет берется через интервал T_{i+1} , если разные, — через интервал T_{i+2} . На рис. 1.3 показана зависимость вероятностей P_i реализации i -го диапазона от $\rho = e^{-\frac{T_0}{T}}$ для $m = 6$, иллюстрирующая возможность адаптации.

1.2. Синтез функций с финитным спектром

Рассмотрим особенности подбора функции с заданными свойствами на примере синтеза направленной характеристики адаптивной антенны с обработкой сигнала [13]. Такие антенны считаются перспективными в радиолокации и в технике связи, поскольку направленная характеристика изменяется автоматически в соответствии с текущей ситуацией в контролируемом секторе.

В качестве иллюстрации используем антенную систему, формирующую веер направленных характеристик, или парциальных диаграмм направленности. Будем считать, что парциальная диаграмма $\varphi_n(x)$ соответствует постоянному амплитудному распределению тока в раскрыве, а ее максимальное значение определяется угловой координатой $x = n$:

$$\varphi_n(x) = \frac{\sin \pi(x - n)}{\pi(x - n)}.$$

Отклики парциальных диаграмм на распределение целей $\beta(y)$ в секторе ответственности считаются равными

$$a_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(y) \frac{\sin \pi(y-i)}{\pi(y-i)} dy.$$

Направление на цель с координатой $y = y_0$, для которой $\beta(y) = \delta(y - y_0)$, определяется с точностью до ширины парциальной диаграммы по номеру луча, для которого отклик максимален. Не нарушая общности, будем считать, что в секторе имеется цель с координатой, соответствующая $i = 0$. Попытаемся улучшить разрешение по углу, используя обработку соседних с максимальным откликом, составляя линейную комбинацию

$$A = \sum_{j=-N}^N a_j \gamma_j,$$

в которой γ_j можно оперативно изменять в соответствии с обстановкой в зоне обзора. Подставляя соотношения для a_j , получим:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(y) \sum_{j=-N}^N \gamma_j \frac{\sin \pi(y-j)}{\pi(y-j)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(y) \phi(y) dy,$$

где

$$\phi(y) = \sum_{j=-N}^N \gamma_j \frac{\sin \pi(y-j)}{\pi(y-j)}.$$

Подбор γ_j сводится к синтезу функции с финитным спектром, т.е. к подбору коэффициентов ряда УКШ, обеспечивающих функцию $\psi(y)$ с заданными свойствами. По предположению в результате предварительного анализа обстановки в секторе $-1 < y < 1$ зафиксирована цель. Для уточнения ее угловой координаты нужно получить функцию $\phi(y)$ с более узким лучом в этом секторе. Используя соотношение $\sin \pi(y-j) = (-1)^j \sin \pi y$ и приводя дроби к общему знаменателю, получим представление $\phi(y)$ в виде взвешенного полинома $P_{2N}(y)$ степени $2N$:

$$\phi(y) = \frac{P_{2N}(y) \sin \pi y}{\pi y(1-y^2) \dots \left(1 - \frac{y^2}{N^2}\right)}.$$

Весовая функция

$$v(y) = \frac{\sin \pi y}{\pi y(1-y^2) \dots \left(1 - \frac{y^2}{N^2}\right)}$$

при достаточно большом N в интервале $(-1, 1)$ мало отличается от единицы, поэтому $\phi(y)$ на этом интервале практически совпадает с многочленом степени $2N$. Многочлен, обеспечивающий оптимальное сужение луча, имеет вид

$$P_{2N}(y) = \cos 2N \arccos \sqrt{\frac{b^2 - y^2}{1 - b^2}},$$

где b — параметр, определяющий ширину луча. Уровень боковых лепестков на интервале $(-1, 1)$ равен

$$\eta = \frac{1}{\operatorname{ch} 2N \operatorname{arch} \sqrt{\frac{b^2}{b^2 - 1}}}.$$

На рис. 1.4 показан график модифицированной диаграммы направленности при значении $b = 0,5$, обеспечивающей двукратное сужение луча.

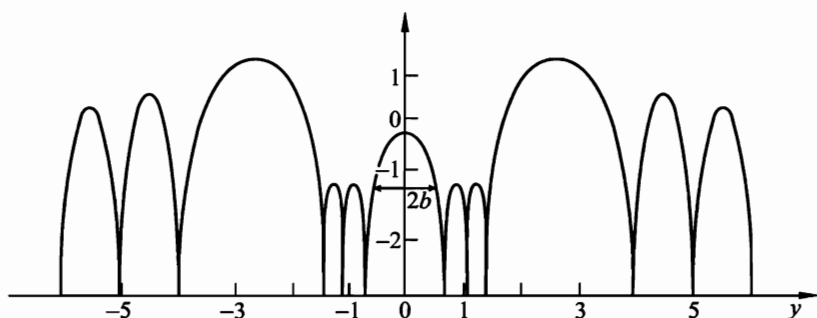


Рис. 1.4. Модифицированная диаграмма направленности при значении $b = 0,5$

Характерной особенностью является резкий рост $\phi(y)$ вне сектора ответственности $(-1, 1)$. Нетрудно заметить, что “нетипичное” поведение диаграммы направленности на интервале аппроксимации реализуется за счет “хвостов” исходных парциальных функций, имеющих максимум вдали от интервала $(-1, 1)$. Подобная ситуация усложняет реализацию линейной обработки, поскольку необходимый результат получается путем суперпозиции хвостов функций, имеющих значительные амплитудные множители разного знака. В результате ужесточаются требования к реализации соответствующих значений γ_j .

Рассмотренный пример иллюстрирует недостатки метода передачи широкополосного сигнала с помощью сигнала узкополосного. Оказывается, что энергия, необходимая для передачи, намного больше энергии полезного сигнала. Жесткие допуски на задание отсчетов вне интервала существования широкополосного сигнала указывают на усиление влияния шумов.

Чтобы заведомо обеспечить практический результат, необходимо ввести требование “технической реализуемости”, гарантирующее ограничение роста синтезируемой функции с финитным спектром вне интервала аппроксимации. Известны два подхода для формулировки такого требования. Один из них предполагает ограничение числа $2N + 1$ используемых базисных функций. Другой предполагает ограничение параметра регуляризации, например, в виде отношения энергии искомой функции на интервале аппроксимации к полной энергии в полосе частот.

При энергетических ограничениях полезен переход к новой системе базисных функций, имеющих максимальную концентрацию энергии на задан-

ном интервале $(-T, T)$. Такие функции являются собственными функциями интегрального уравнения

$$\phi_i(y) = \lambda_i \int_{-1}^1 \frac{\sin c(x-y)}{\pi(x-y)} \phi_i(x) dx, \quad (1.7)$$

где $c = T\Omega$, Ω — ширина спектра [14]. Они обладают уникальным свойством двойной ортогональности: во-первых, на конечном интервале $(-1, 1)$, на котором осуществляется аппроксимация, и во вторых, на всей оси, на которой сосредоточена полная энергия. Таким образом, упрощается задача синтеза с ограничением параметра регуляризации.

Решения интегрального уравнения (1.7) преобразуются линейной системой, характеристика которой имеет постоянное преобразование Фурье в области финитности. Аналогичное свойство характерно и для двумерных сигналов, используемых в оптических линиях связи. Вход $f(x_1, x_2)$ связан с выходом $F(y_1, y_2)$ соотношением двумерной свертки

$$F(y_1, y_2) = \iint f(x_1, x_2) h(y_1 - x_1, y_2 - x_2) dx_1 dx_2.$$

Функции $f(x_1, x_2)$, $F(y_1, y_2)$ заданы в области R , а спектр $h(z_1, z_2)$ постоянен в области финитности D , определяемой ограничивающей диафрагмой.

Если при прохождении через систему форма сигнала не меняется, то в области R выполняется соотношение [15]:

$$f(y_1, y_2) = \lambda \iint_R f(x_1, x_2) h(y_1 - x_1, y_2 - x_2) dx_1 dx_2.$$

Коэффициент $\lambda < 1$ определяет отношение энергии в области R к полной энергии в области финитности спектра D . Собственные функции $f_i(y_1, y_2)$ интегрального уравнения образуют полную систему, обладающую свойством двойной ортогональности: в области R и на всей плоскости (y_1, y_2) . Максимальное значение $\lambda = \lambda_0$ получается, если используется нулевая собственная функция. Величина λ_0 зависит от форм области D и R .

В [16] разработан метод получения формы области D , обеспечивающий максимум λ_0 для заданной формы области R . Максимизация $\lambda_0(R)$ путем изменения формы R при фиксации ее площади показала, что оптимальными являются области R и D в форме круга.

1.3. Продолжение функций с финитным спектром

Известно, что аналитическая функция однозначно определяется своими значениями в ограниченной области, например, на конечном интервале, то есть может быть продолжена на всю область аналитичности. Функция с финитным спектром аналитична в любой ограниченной области комплексной плоскости, и поэтому в принципе может быть продолжена на всю вещественную ось, если задать ее значения на конечном интервале.

Особенности реализации такого продолжения мы рассмотрим на примере восстановления финитного входа $f(x)$ по отклику $F(y)$ линейной системы.

Для этого необходимо решить интегральное уравнение типа свертки

$$F(y) = \int f(x)h(y-x)dx,$$

где $h(z)$ — характеристика линейной системы. После преобразования Фурье получим соотношение

$$\tilde{F}(\omega) = \tilde{h}(\omega)\tilde{f}(\omega).$$

Если функция $\tilde{f}(\omega)$ — преобразование Фурье, $\tilde{h}(\omega)$ — известна и не обращается в ноль на некотором конечном интервале $(-\Omega, \Omega)$, по спектру $\tilde{F}(\omega)$ выхода на этом интервале можно найти спектр входа:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\tilde{h}(\omega)}.$$

В некоторых приложениях, например, в астрономии, можно считать, что функция $f(x)$ сосредоточена на конечном интервале, и положить $f(x) = 0$ при $|x| > T$. Тогда спектр $\tilde{f}(\omega)$ (преобразование Фурье финитной функции) есть целая аналитическая функция, и по ее значениям на конечном интервале, скажем, в полосе фильтра $|\omega| < \Omega$, можно путем аналитического продолжения восстановить значения $\tilde{f}(\omega)$ при $|\omega| > \Omega$, а затем определить после преобразования по Фурье вход $f(x)$. Алгоритм восстановления был впервые предложен в 1958 году Л. Б. Тартаковским [17], а позже А. Папулисом.

Однако задача аналитического продолжения некорректна: при наличии сколь угодно малой погрешности при задании $\tilde{f}(\omega)$ внутри интервала ошибка восстановления за интервал сколь угодно велика. Именно это положение не позволяет провести аналитическое продолжение функции с финитным спектром за конечный интервал, возможность которого предполагается в работе [6].

Для того чтобы получить корректное решение, приходится ограничивать класс возможных входов. Одно из таких ограничений сводится к требованию конечности числа базисных функций, аппроксимирующих вход $f(x)$. Удобно в качестве базисных функций выбрать N первых функций с максимальной концентрацией в области определения входа $(-T, T)$. Более нагляден выбор в качестве базисных тригонометрических функций. В этих случаях получена явная связь ошибки измерения спектра на конечном интервале с ошибкой восстановления; как и следовало ожидать, продолжение мало эффективно, если параметр Релея $c = \Omega T$ мал [7]. Аналогичный вывод получен при анализе “сверхразрешения”, когда $f(x)$ представляется суперпозицией двух дельта-функций, имитирующих точечные цели.

Предположение о конечности числа “степеней свободы”, или допустимого числа базисных функций, вызывает серьезные методологические возражения, поскольку его невозможно проверить по результатам обработки доступных данных на выходе прибора, а вход по предположению недоступен. Впрочем, такая ситуация вообще характерна для теории измерений: интерпретация результатов измерений основана на конкретных априорных предположениях, которые невозможно подтвердить или опровергнуть по полученным данным [18].

Можно попытаться обойти эту трудность, оценивая не весь вход, а его параметр — длительность $2T$ [20]. Будем считать, что на интервале частот $(-\Omega, \Omega)$ известна функция $\tilde{f}(\omega) + n(\omega)$, где $n(\omega)$ — гауссовский процесс с корреляционной функцией $\chi\delta(\omega - \omega')$. Функция $f(x)$ представляется конечной суммой

$$f(x) = \sum \alpha_n \phi_n(x, c),$$

где $c = \Omega T$ — измеряемый параметр, α_n — вещественные величины с нулевым средним и одинаковой дисперсией, независимые между собой и от $n(\omega)$. В качестве базовых функций выбирались либо собственные функции с максимальной концентрацией, либо тригонометрические функции. В последнем случае

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{-N}^N \alpha_n \frac{\sin T \left(\omega - \frac{\pi n}{T} \right)}{\omega - \frac{\pi n}{T}}.$$

Для дисперсии оценки параметра c при $c \rightarrow 0$ и малом отношении β помеха–сигнал получено соотношение

$$\sigma = \frac{\beta^2}{c^2 \left(A^2 + \frac{2}{45} \beta \right)},$$

где

$$A = \frac{2}{\pi^2} \sum_1^N \frac{1}{k^2},$$

β — отношение интенсивности аддитивной помехи к интенсивности сигнала на интервале $(-T, T)$. Характер зависимости от β существенно зависит от числа слагаемых ряда УКШ: если сигнал предполагается постоянным, $A = 0$, и дисперсия пропорциональна отношению шум–сигнал β ; при $A \neq 0$ дисперсия пропорциональна β^2 , т.е. намного меньше. Заметим, что зависимость A от числа слагаемых N менее существенна: при изменении N от единицы до двух величина A меняется на 25%. Таким образом, переход к модифицированному алгоритму оценивания, учитывающему возможное непостоянство сигнала, может существенно увеличить достоверность измерения.

1.4. Теорема о полиномиальном сканировании

В отличие от теоремы отсчетов, которая оперирует частотными характеристиками функции $f(t)$, теорема о полиномиальном сканировании [21] оперирует временными характеристиками этой функции, и поэтому эти две теоремы оказываются дополняющими друг друга. Предпочтительность и возможность применения одной или другой из этих теорем зависит от характера конкретных функций, подлежащих сканированию.

Пусть $f(t)$ — бесконечно дифференцируемая на всей числовой оси функция и существует такое $\lambda = T_0/2 > 0$, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{p}} \lambda_0^p \sup |f^{(p)}(\tau)| = 0, \quad (1.8)$$

где

$$-p\lambda_0 \leq \tau \leq p\lambda_0.$$

Тогда при любом $0 < T \leq T_0$ для любого фиксированного значения t справедливо

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=-k}^k Q\left(n, k, \frac{t}{T}\right) S\left(n, k, \frac{t}{T}\right) f(nT), \quad (1.9)$$

где

$$Q\left(n, k, \frac{t}{T}\right) = \frac{(k!)^2 \Gamma\left(k+1+\frac{t}{T}\right) \Gamma\left(k+1-\frac{t}{T}\right)}{(k-n)!(k+n)! \Gamma\left(k+1+\frac{t}{T}-n\right) \Gamma\left(k+1-\frac{t}{T}+n\right)}, \quad (1.9a)$$

$$S\left(n, k, \frac{t}{T}\right) = \prod_{j=1}^k \left[1 - \left(\frac{t-nT}{jT}\right)^2\right], \quad (1.9b)$$

а $\Gamma(x)$ — гамма-функция от аргумента x , для которой, как известно, $\Gamma(1) = 1$ и справедлива формула приведения (см., например, [22]):

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-d)\Gamma(x-d) \quad (d < x). \quad (1.9в)$$

Как сама формулировка этой теоремы, так и ее доказательство базируются на интерполяционной формуле Лагранжа, которая позволяет построить многочлен степени m , интерполирующий заданную функцию $f(t)$ в $m+1$ узлах интерполяции $t = t_i$ ($i = 0, 1, \dots, m$)

$$f(t) = \sum_{n=0}^m f(t_n) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n}}^m \left(\frac{t-t_j}{t_n-t_j}\right) + R_m(t), \quad (1.10)$$

где функция ошибки $R_m(t)$ равна нулю при всех $t = t_i$ ($i = 0, 1, \dots, m$).

Выбрав в качестве узлов интерполяции $2k+1$ точки $t = 0, \pm T, \pm 2T, \dots$, где $T > 0$ некоторая конечная величина, формулу (1.10) после

несложных преобразований (с использованием формулы (1.9в)) можно представить как

$$f(t) = \sum_{n=-k} Q\left(n, k, \frac{t}{T}\right) S\left(n, k, \frac{t}{T}\right) f(nT) + R_{2k}(t). \quad (1.11)$$

Здесь интерполирующий многочлен Лагранжа специально выражен через функции $Q(n, k, t/T)$ и $S(n, k, t/T)$, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что при конечных значениях n и t/T имеют место

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q\left(n, k, \frac{t}{T}\right) = 1, \quad (1.12)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S\left(n, k, \frac{t}{T}\right) = \frac{\sin \pi \left(\frac{t}{T} - n\right)}{\pi \left(\frac{t}{T} - n\right)} \quad (1.13)$$

(см. например, [23]), т.е. для любого фиксированного значения t при $k \rightarrow \infty$, когда формула (1.11) принимает вид

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=-k}^k Q\left(n, k, \frac{t}{T}\right) S\left(n, k, \frac{t}{T}\right) f(nT) + \lim_{k \rightarrow \infty} R_{2k}(t), \quad (1.11a)$$

слагаемые, соответствующие конечным значениям n , оказываются равными

$$\frac{\sin \pi \left(\frac{t}{T} - n\right)}{\pi \left(\frac{t}{T} - n\right)} f(nT). \quad (1.14)$$

Сопоставив это выражение с формулой (1.9б), легко обнаружить, что оно совпадает со слагаемыми, фигурирующими в этой формуле (если положить $T = T_0/2$).

Заметим, что в ряде случаев вместо формулы (1.9) можно пользоваться эквивалентной стандартной формулой

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T^{2k}} \sum_{n=-k}^k f(nT) \prod_{\substack{j=-k \\ j \neq n}}^k \left(\frac{t - jT}{n - j} \right). \quad (1.15)$$

В [21] в качестве примера рассмотрена функция

$$f(t) = At^z e^{\sigma t} \sin(\omega t + \beta), \quad (1.16)$$

которую при $\sigma \neq 0$ и/или $z \neq 0$ нельзя представить с помощью теоремы отсчетов. Подставляя в формулу (1.8) выражение для p -й производной этой функции и переходя к пределу $p \rightarrow \infty$, можно найти уравнение для наибольших допустимых значений шага сканирования $T_0 = 2\lambda_0$ при

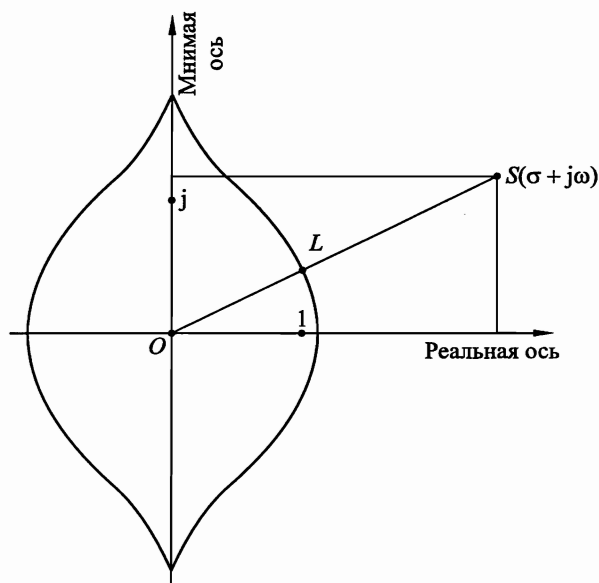


Рис. 1.5. Симметричная относительно мнимой и вещественной осей координат комплексной плоскости замкнутая кривая (лист)

заданных значениях σ и ω , независимо от значения $z = 0, 1, \dots$:

$$\lambda_0 R \exp(\lambda_0 R |\cos \varphi|) = 1, \quad (1.17)$$

где

$$R = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega}{\sigma}.$$

На рис. 1.5 приведена симметричная относительно мнимой и вещественной осей координат комплексной плоскости замкнутая кривая (лист)

$$0,5p \exp(0,5p |\cos \varphi|) = 1. \quad (1.18)$$

Из сопоставления (1.17) с (1.18) легко обнаружить весьма простой способ определения при заданных σ и ω наибольшего допустимого значения шага сканирования $T_0 = 2\lambda_0$, а именно, построить точку $s = \sigma + j\omega$, провести луч, проходящий через начало координат и точку s , определить точку L пересечения этого луча с листом. Значение T_0 при этом определяется как отношение длин двух отрезков:

$$T_0 = \frac{OL}{OS}. \quad (1.19)$$

Следует особо отметить, что хотя в общем случае, когда $\sigma \neq 0$ или $z \neq 0$, применительно к функции (1.16) теорема отсчетов “не работает”. В том единственном случае, когда $\sigma = z = 0$, т.е. когда речь идет о функции $f(t) = A \sin(\omega t + \beta)$ с ограниченным спектром частот, применение теоремы отсчетов становится возможным, так как теорема УКШ устанавливает лимит сверху на шаг сканирования, равный π/ω , в то время как значение лимита при полиномиальном сканировании оказывается равным $2/\omega$, т.е. в $\pi/2$ раз меньше.

1.5. Обобщенные ряды Котельникова на основе атомарных функций

Для интерполяции сигналов с финитным спектром можно также использовать преобразования Фурье атомарных функций (АФ) [24]. Это связано с тем, что нули этих преобразований расположены регулярным образом. Кроме того, спектры АФ стремятся к нулю на бесконечности значительно быстрее функции $\text{sinc}(x)$, что позволяет ограничиться сравнительно небольшим числом членов интерполяционного ряда. Пусть

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (1.20)$$

определяют пару преобразований Фурье для функции f и ее изображения $\widehat{f}$. Согласно теореме УКШ, функция f с финитным спектром ($\widehat{f}(\xi) = 0$ при $|\xi| > \Omega$) однозначно восстанавливается по множеству своих отсчетов

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \text{sinc} \left[\frac{\pi}{\Delta} (x - k\Delta) \right], \quad (1.21)$$

где $0 < \Delta \leq \pi/\Omega$, а $\text{sinc}(x) \equiv \sin(x)/x$. Кроме того,

$$\widehat{f}(\xi) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) e^{-ik\Delta\xi}. \quad (1.22)$$

Если условие $\Delta \leq \pi/\Omega$ выполняется строго ($\Delta < \pi/\Omega$), то выборка функции f называется избыточной. Тогда возможно построение ряда, аналогичного (1.21), но обладающего более высокой скоростью сходимости. Рассмотрим подход, основанный на аппроксимационных свойствах АФ [24–26].

Теорема 1.1. Пусть функция $f(x)$ имеет финитный спектр ($\text{supp } \widehat{f}(\xi) = [-\Omega, \Omega]$). Тогда при любом выборе $\Delta \leq \pi/\Omega$ и функции $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$ такой, что

$$1) \widehat{\gamma}(0) = 1;$$

$$2) \text{supp } \gamma = [-1, 1]$$

будет справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \widehat{\gamma} \left[\left(\frac{\pi}{\Delta} - \Omega \right) (x - k\Delta) \right] \text{sinc} \left[\frac{\pi}{\Delta} (x - k\Delta) \right]. \quad (1.23)$$

Доказательство. Выберем функцию $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, равную единице на $[-\Omega, \Omega]$ и нулю вне $[-a, a]$, где $a = 2\pi/\Delta - \Omega > \pi/\Delta$. Тогда вместо (1.22) можно записать

$$\widehat{f}(\xi) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \psi(\xi) e^{-ik\Delta\xi}, \quad (1.24)$$

где

$$\psi(\xi) = \varepsilon^{-1} \chi_\varepsilon(\Delta \xi / \pi), \quad \varepsilon = a - \pi / \Delta. \quad (1.25)$$

Здесь χ_ε является ε -усреднением по Соболеву характеристической функции интервала

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq 1, \\ 0, & |\xi| > 1, \end{cases}$$

т. е. $\chi_\varepsilon(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\varepsilon^{-1} t) \chi(\xi - t) dt$. Выполнив обратное преобразование Фурье (1.24), получим (1.23).

Вследствие бесконечной дифференцируемости γ , ее Фурье-образ $\hat{\gamma}$ убывает на бесконечности быстрее любой степени $|x|$, и усеченный ряд (1.23) при одном и том же конечном числе слагаемых дает меньшую погрешность аппроксимации функции f в L_2 , чем (1.21). В качестве ядра γ , в частности, может быть выбрана любая АФ (табл. 1.1), нормированная соответствующим образом. Отметим, что в общем случае γ может не быть бесконечно дифференцируемой, а обладать конечной, достаточно высокой степенью гладкости.

Таблица 1.1. Финитные функции и их преобразования Фурье

	Функция $\gamma(\xi)$	Носитель	Преобразование Фурье $\hat{\gamma}(x)$
1	$h_a(\xi),$ ($a > 1$)	$\left[-\frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1}\right]$	$\prod_{j=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{a^j}\right)$
2	$\operatorname{fup}_n(\xi)$ ($n = 0, 1, \dots$)	$\left[-\frac{n+2}{2}, \frac{n+2}{2}\right]$	$\operatorname{sinc}^n\left(\frac{x}{2}\right) \prod_{j=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2^j}\right)$
3	$\Xi_n(\xi)$ ($n = 1, 2, \dots$)	$[-1, 1]$	$\prod_{j=1}^{\infty} \operatorname{sinc}^n\left(\frac{x}{2(n+1)^j}\right)$
4	$\operatorname{mup}_n(\xi)$ ($n = 1, 2, \dots$)	$[-1, 1]$	$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sinc}^2(nx(2n)^{-j})}{\operatorname{sinc}(x(2n)^{-j})}$
5	$\theta_n(\xi)$ ($n = 0, 1, \dots$)	$\left[-\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right]$	$\operatorname{sinc}^{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)$

Одним из основных свойств АФ $h_a(\xi)$ является то, что $h_a(\xi) = a/2$ при $|\xi| \leq \frac{a-2}{a(a-1)}$, $a \geq 2$. Таким образом, в (1.24) можно положить $\psi(\xi) = \frac{2}{a} h_a\left(\frac{a-2}{a(a-1)\Omega} \xi\right)$. Согласно теореме 1.1, при $\hat{\gamma}(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{a-1}{a^j} x\right)$, $a > 2$, $\Delta \leq \frac{\pi}{\Omega} \cdot \frac{a-2}{a-1}$ справедливо следующее разложение [26]:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \prod_{j=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left[\frac{a\pi}{\Delta a^j} (x - k\Delta)\right]. \quad (1.26)$$

Выражение (1.26) можно интерпретировать как разложение функции f по неортонормированному базису сдвигов-сжатий Фурье-образов АФ $h_a(\xi)$. При практических вычислениях необходимо ограничиться конечным числом членов произведения в правой части (1.26). В этом случае также будет иметь место точное разложение

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc} \left[\frac{a\pi}{\Delta a^j} (x - k\Delta) \right] \quad (1.27)$$

при $a(1 + a^{-M}) > 2$, $\Delta = \frac{\pi}{\Omega} \cdot \frac{a(1 + a^{-M}) - 2}{a - 1}$. Минимально возможные значения a могут быть найдены из решения алгебраического уравнения $a(1 + a^{-M}) = 2$. При $M = 1$ из (1.27) как частный случай получается ряд Котельникова (1.21), а в пределе при $M \rightarrow \infty$ — ряд (1.26).

Теория Стренга–Фикса и обобщенная теорема отсчетов. Рассмотрим другой возможный подход к построению функции ψ в (1.24), отличной от (1.25). Пусть $W_2^p(\mathbb{R})$ ($p \geq 0$, $p \in \mathbb{Z}$) — пространство, являющееся пополнением множества бесконечно дифференцируемых на всей числовой оси функций по норме

$$\|u\|_{W_2^p} = \left(\sum_{\alpha \leq p} \int_{-\infty}^{\infty} |u^{(\alpha)}|^2 dx \right)^{1/2}.$$

При $p = 0$ $W_2^0 \equiv L_2$. Тогда, согласно теореме Стренга–Фикса [27], если функция $\gamma \in W_2^p$ финитна, то следующие условия эквивалентны:

- 1) $\hat{\gamma}(0) \neq 0$, но $\hat{\gamma}^{(\alpha)}(2\pi j) = 0$, если $0 \neq j \in \mathbb{Z}$, $|\alpha| \leq p$;
- 2) если $|\alpha| \leq p$, то $\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^\alpha \gamma(x - j)$ есть полином от x с главным членом cx^α , $c \neq 0$.

В частном случае, при $\alpha = 0$, $\hat{\gamma}(0) = 1$, сдвиги функции γ дают разбиение единицы,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(x - j) \equiv 1.$$

Выбрав подходящий шаг $h > 0$, можно добиться того, что конечная сумма сдвигов-сжатий функции γ

$$\sum_{j=M}^N \gamma\left(\frac{x}{h} - j\right), \quad (M, N \in \mathbb{Z}, M < N)$$

будет равна единице на любом интервале конечной длины, спадая до нуля за его пределами. Таким образом, при согласованном выборе параметров M, N, h , последняя сумма будет удовлетворять требованиям, налагаемым на функцию ψ в (1.24). Считая Фурье-образ $\hat{\gamma}$ известным, возможно построение выражений, аналогичных (1.23), позволяющих однозначно восстановить f по своим равноотстоящим отсчетам [25].

Теорема 1.2. Пусть функция $f(x)$ имеет финитный спектр $\text{supp } \widehat{f}(\xi) = [-\Omega, \Omega]$. Тогда при любом выборе $\Delta \leq \pi/\Omega$ и функции $\gamma_m \in L_2$ ($m = 1, 2, \dots$), такой, что

1. $\widehat{\gamma}_m(0) = 1$, но $\widehat{\gamma}_m(2\pi j) = 0$ при $0 \neq j \in \mathbb{Z}$;

2. $\text{supp } \gamma_m = [-(m+1)/2, (m+1)/2]$,

будет справедливо разложение

$$f(x) = \frac{\pi + \Delta\Omega}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \frac{\widehat{\gamma}_m \left[\frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\pi}{\Delta} - \Omega \right) (x - k\Delta) \right]}{\text{sinc} \left[\frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{\pi}{\Delta} - \Omega \right) (x - k\Delta) \right]} \times \\ \times \text{sinc} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\Delta} + \Omega \right) (x - k\Delta) \right]. \quad (1.28)$$

Пусть $\widehat{\gamma}_m(x) = \text{sinc}(x/2) \cdot \widehat{\delta}_m(x)$, причем $\widehat{\delta}_m(0) = 1$. Выражение (1.28) в этом случае примет вид

$$f(x) = \frac{\Delta}{2\pi} \left(\frac{\pi}{\Delta} + \Omega \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \widehat{\delta}_m \left[\frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\pi}{\Delta} - \Omega \right) (x - k\Delta) \right] \times \\ \times \text{sinc} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\Delta} + \Omega \right) (x - k\Delta) \right]. \quad (1.29)$$

Аналогично (1.23), при $\Delta = \frac{\pi}{\Omega}$ формулы (1.28), (1.29) переходят в обычный ряд Котельникова (1.21). В качестве функции γ_m могут быть выбраны АФ $\text{fir}_n(\xi)$ ($m = n - 1$), $\Xi_n \left(\frac{2}{n+1} \xi \right)$ ($m = n$) и $\text{mir}_n(\xi)$ ($m = 1$), а также В-сплайны $\theta_n(\xi)$ ($m = n$) (табл. 1.1). Все они образуются путем свертки базисной характеристической функции интервала $[-1/2, 1/2]$, обеспечивающей удовлетворение условиям теоремы Стренга–Фикса, с характеристическими функциями других интервалов меньшей или равной длины. В связи с этим следует отметить, что на практике при построении разбиения единицы можно ограничиться любым конечным числом членов произведений фурье-образов АФ, так как при этом условия теоремы Стренга–Фикса по-прежнему будут выполняться.

1.6. Полиномы Левитана на основе АФ

Обозначим через $\mathbf{W}_\sigma$ ($\sigma \geq 0$) совокупность всех целых функций $f(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) экспоненциального типа $\leq \sigma$, для которых $f(x)/|x - i| \in L_2(\mathbb{R})$, а через $\mathbf{B}_\sigma$ ($\sigma \geq 0$) — пространство целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leq \sigma$, ограниченных на вещественной оси [28]. При этом $\mathbf{B}_\sigma \supset \mathbf{W}_\sigma$. Разложение в ряд Котельникова не является единственно возможной формой представления функций такого рода. Б.М. Левитан [29] доказал

теорему о том, что для любой функции $f(z)$ класса $\mathbf{B}_\sigma$ можно построить бесконечную последовательность периодических тригонометрических сумм $S_n(f; z)$ ($n = 1, 2, \dots$), ограниченных на вещественной оси той же константой, что и $f(z)$, и сходящихся к $f(z)$ равномерно в каждой конечной части комплексной плоскости. Положим $h = \sigma/n$, $n = 1, 2, \dots$ и

$$E_h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} \operatorname{sinc}^2(hu/2) f(u) du, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.30)$$

Тогда

$$S_n(f; z) = h \sum_{k=-n}^n E_h(kh) e^{ikhz}. \quad (1.31)$$

Существует также другое эквивалентное представление полиномов Левитана, внешний вид которого напоминает разложение в ряд Котельникова,

$$S_n(f; z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(z + k\Delta) \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi}{\Delta} (z + k\Delta) \right], \quad (1.32)$$

где $\Delta = 2\pi/h = 2\pi n/\sigma$. В последнем выражении в качестве базисных функций фигурируют сдвиги-сжатия ядер Фейера. Обобщенные многочлены Левитана [29] для функций $f(z) \in \mathbf{W}_\sigma^{(r)}$ ($\sigma \geq 0$, $r = 0, 1, 2, \dots$), таких, что $f(x)/|x - i|^{2r+1} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$, строятся на основе ядер типа Фейера (Джексона) и имеют вид

$$S_n^{(r)}(f; z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(z + k\Delta) \operatorname{sinc}^{2r+2} \left[\frac{\pi}{\Delta} (z + k\Delta) \right]. \quad (1.33)$$

Для полиномов Левитана справедлива следующая важная теорема об аппроксимации.

Теорема 1.3. Если $f(z) \in \mathbf{W}_\sigma$ ($\sigma > 0$) и $|f(x)| \leq A$ ($x \in \mathbb{R}$), то

$$|f(x) - S_n(f; x)| \leq 2A \left(1 - \operatorname{sinc}^2(\pi x/\Delta) \right) \leq 2A(\pi x/\Delta)^2. \quad (1.34)$$

Можно видеть, что в отличие от ряда Котельникова точность аппроксимации рядами (1.31), (1.32) растет при $\Delta \rightarrow \infty$. Для многочленов вида (1.33) существуют более строгие оценки погрешности аппроксимации.

Продemonстрируем возможности АФ для синтеза обобщенных полиномов Левитана. Оставим в силе введенные выше обозначения и предположения об аппроксимируемой функции. Вместо (1.30) положим

$$U_h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} \left[\prod_{j=1}^{\infty} \operatorname{sinc}(hu/2^{j+1}) \right]^2 f(u) du, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.35)$$

Выражение в квадратных скобках есть преобразование Фурье АФ $\operatorname{up}(2x/h)$, а его квадрат — спектр свертки этой функции с собой, обозначаемой также $\operatorname{sup}(2x/h) \equiv \operatorname{up}(2x/h) * \operatorname{up}(2x/h)$. Очевидно, что интеграл в (1.35) равен нулю при $|x| \geq \sigma + h$. Обобщенный полином

Левитана имеет вид

$$P_n(f; z) = h \sum_{k=-n}^n U_h(kh) e^{ikhz}. \quad (1.36)$$

Так как $U_h(kh) = 0$ при $|k| > n$, то можно записать $P_n(f; z) = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_h(kh) e^{ikhz}$. Рассмотрим функцию $f_h(z) = f(z) \prod_{j=1}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(hz/2^{j+1})$

С помощью теоремы Винера–Пэли [29] можно показать, что она, а также ее производная $f'(z)$ непрерывны и принадлежат пространству $L(\mathbb{R})$ на прямых, параллельных вещественной оси. Применив к функции $f_h(z + t/h)$ формулу суммирования Пуассона, в итоге получим

$$P_n(f; z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(z + k\Delta) \prod_{j=1}^{\infty} \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi}{2^j \Delta} (z + k\Delta) \right]. \quad (1.37)$$

Из этого представления следуют следующие очевидные свойства обобщенных полиномов Левитана:

1) если $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) вещественна, то $P_n(f; x)$ ($x \in \mathbb{R}$) тоже вещественны;

2) если $f(x) \geq 0$ ($x \in \mathbb{R}$), то $P_n(f; x) \geq 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Теорема 1.4. Если $f(z) \in W_{\sigma}$ ($\sigma > 0$) и $|f(x)| \leq A$ ($x \in \mathbb{R}$), то

$$|f(x) - P_n(f; x)| \leq 2A \left(1 - \prod_{j=1}^{\infty} \operatorname{sinc}^2[\pi x/(2^j \Delta)] \right). \quad (1.38)$$

Оказывается, что погрешность, возникающая при аппроксимации функции полиномом Левитана на основе АФ (1.37) ниже, чем для обычной аппроксимации (1.32) [30]. В обоих случаях погрешность минимальна при $x = 0$. Кроме того, с ростом n ($h \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow \infty$) интервал, на котором достигается хорошее качество аппроксимации, также увеличивается. Аналогично (1.33) могут быть определены обобщенные полиномы Левитана более высокого порядка

$$P_n^{(r)}(f; z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(z + k\Delta) \prod_{j=1}^{\infty} \operatorname{sinc}^{2r+2} \left[\frac{\pi}{2^j \Delta} (z + k\Delta) \right], \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (1.39)$$

1.7. R-функции и соотношение неопределенности для пространственных сигналов, локализованных в области сложной геометрии

В квантовой механике хорошо известен принцип (соотношение) неопределенности Гейзенберга, согласно которому нельзя одновременно задать точно координату и импульс частицы. Существует также более общее соотношение неопределенности, справедливое для любых двух величин,

связанных между собой преобразованием Фурье [7]. Последнее, в частности, имеет место в теории синтеза антенн, при радиоинтерферометрических измерениях и т. п. Существуют различные формулировки принципа неопределенности. Рассмотрим его трактовку для многомерных сигналов, имеющую аналогию с отношением Релея для оператора Лапласа и сводящуюся к решению краевой задачи на собственные значения с краевыми условиями Дирихле [31]. Для решения последней используется аппарат теории R-функций [32]. Пусть функция (сигнал) $f(t) \in L_2(-\infty, \infty)$. Тогда существует ее преобразование Фурье $\hat{f}(\omega) \in L_2(-\infty, \infty)$ и выполняется равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = E, \quad (1.40)$$

где E — энергия сигнала.

Аналогичным образом определяется многомерное преобразование Фурье для функций $f(\mathbf{x}) \in L_2(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{f}(\mathbf{w}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{w}\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (1.41)$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\mathbf{w}) e^{-i\mathbf{w}\mathbf{x}} d\mathbf{w}, \quad (1.42)$$

где $\mathbf{w} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Без ограничения общности, многомерный случай будет рассматриваться на примере пространства $\mathbb{R}^2$.

Вместо $f(t)$ рассмотрим масштабированную функцию с той же энергией

$$f_\mu(t) \equiv \sqrt{\mu} f(\mu t). \quad (1.43)$$

Согласно свойству преобразования Фурье, ей будет соответствовать

$$\hat{f}_\mu(\omega) = (\sqrt{\mu})^{-1} \hat{f}(\mu^{-1}\omega). \quad (1.44)$$

Таким образом, преобразование Фурье $\hat{f}_\mu(\omega)$ при изменении μ ведет себя противоположным образом по сравнению с $f(t)$, так что при сжатии функции происходит растяжение ее фурье-образа и наоборот.

Рассмотрим случай, когда $f(t) = f(-t)$. Тогда спектр $\hat{f}(\omega)$ будет также вещественной, четной функцией. В качестве удобной меры ширины функции можно принять величину среднеквадратичного отклонения квадрата модуля функции

$$\sigma_f^2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dx. \quad (1.45)$$

Соответственно,

$$\sigma_{\hat{f}}^2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.46)$$

Принцип неопределенности имеет вид [7, 18]

$$\sigma_f \sigma_{\hat{f}} \geq E/2, \quad (1.47)$$

причем равенство в (1.47) достигается для гауссовой функции вида $f(t) = A \exp(-at^2)$. Известно, что собственными функциями преобразования Фурье являются функции Эрмита [18]

$$\varphi_0(t) = \exp(-t^2/2), \quad \varphi_n(t) = \left(t - \frac{d}{dt}\right) \varphi_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.48)$$

а собственные значения λ_k ($k = 0, 1, 2, 3$) принадлежат множеству $\{1, -i, -1, i\}$. Каждому собственному значению соответствует инвариантное подпространство бесконечной размерности с ортогональным базисом, состоящим из функций

$$\varphi_{k+4n}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Функции Эрмита связаны с полиномами Эрмита $H_n(x)$ соотношением

$$\varphi_n(t) = H_n(t) \exp(-t^2/2),$$

где

$$H_0 = 1, \quad H_n = \left(2t - \frac{d}{dt}\right) H_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Функция $\varphi_0(t)$, соответствующая собственному значению 1 и имеющая максимальную энергию, обращает соотношение (1.47) в равенство.

Обобщение (1.47) на двумерный случай записывается следующим образом [18]:

$$\int_{R^2} x^2 |f|^2 dx dy \int_{R^2} u^2 |\hat{f}|^2 du dv \geq \pi^2 E^2, \quad (1.49)$$

$$\int_{R^2} y^2 |f|^2 dx dy \int_{R^2} v^2 |\hat{f}|^2 du dv \geq \pi^2 E^2, \quad (1.50)$$

$$\int_{R^2} (x^2 + y^2) |f|^2 dx dy \int_{R^2} (u^2 + v^2) |\hat{f}|^2 du dv \geq 4\pi^2 E^2, \quad (1.51)$$

где $f = f(x, y)$, $\hat{f} = \hat{f}(u, v)$. Равенства в выражениях (1.49)–(1.51) достигаются только в тех случаях, когда, соответственно,

$$f(x, y) = A(y) \exp(-ax^2),$$

$$f(x, y) = B(x) \exp(-by^2),$$

$$f(x, y) = C \exp(-ax^2 - by^2).$$

Приведенные выше формулировки принципа неопределенности не являются исчерпывающими. Во-первых, вместо (1.45), (1.46) можно ввести иные меры сосредоточенности сигнала и спектра. Во-вторых, на сигнал и спектр могут быть наложены априорные ограничения, которые приводят к увеличению постоянной в правой части (1.47). Это относится, в частности, к сигналам, заведомо имеющим конечную длительность.

Обозначим через W_α [29] подпространство пространства $L_2(-\infty, \infty)$, состоящее из спектральных функций $\hat{f}(\omega)$ таких, что сигнал $f(t)$ интегрируем в квадрате и локализован на интервале $[-T, T]$. Последнее условие можно записать как $f(T) = 0$ при $|t| > T$. В этом случае [18]

$$(2T)^2 D_\omega^2 \geq \pi^2, \quad (1.52)$$

где

$$D_\omega^2 = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-T}^T |f'(t)|^2 dt \bigg/ \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt.$$

Из последнего соотношения видно, что функция, на которой D_ω^2 принимает минимальное значение, должна быть непрерывно дифференцируемой внутри интервала $[-T, T]$ и обращаться в ноль на его концах, так как в противном случае D_ω^2 будет обращаться в бесконечность. Равенство в (1.52) достигается в случае сигнала

$$f(t) = A \cos \frac{\pi t}{2T}. \quad (1.53)$$

В двумерном случае, когда $f(x, y)$ тождественно обращается в ноль за пределами ограниченной области в $\mathbb{R}^2$, т.е. при $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, аналогичная задача заключается в минимизации функционала

$$D_{u,v}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (u^2 + v^2) |\hat{f}|^2 du dv \bigg/ E = \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx dy \bigg/ \int_{\Omega} |f|^2 dx dy. \quad (1.54)$$

Нетрудно видеть, что эта задача эквивалентна задаче нахождения наименьшего собственного числа и соответствующей собственной функции в области Ω для оператора Лапласа с краевыми условиями Дирихле на границе $\partial\Omega$:

$$\Delta u = \lambda u \quad \text{в } \Omega, \quad (1.55)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.56)$$

Здесь $\lambda = D_{u,v}^2$. В простейшем случае, когда носитель есть прямоугольная область $\Omega = [-\alpha, \alpha] \times [-\beta, \beta]$, а $f(x, y) \in W_{\alpha,\beta}$, оптимальная функция имеет вид

$$f(x, y) = C \cos \frac{\pi x}{2\alpha} \cos \frac{\pi y}{2\beta},$$

и выполняется следующее соотношение

$$S^2 \cdot D_{u,v}^2 = \pi^2 \left[(2\alpha)^2 + (2\beta)^2 \right],$$

где $S = 4\alpha\beta$ — площадь области Ω . Таким образом, для любого сигнала, локализованного в прямоугольной области, имеет место соотношение неопределенности вида

$$S^2 \cdot D_{u,v}^2 \geq \pi^2 \left[(2\alpha)^2 + (2\beta)^2 \right]. \quad (1.57)$$

Если носитель f есть круг радиуса R , то

$$S^2 \cdot D_{u,v}^2 \geq \pi^2 R^2 \mu_{01}^2, \quad (1.58)$$

где $S = \pi R^2$, а $\mu_{01} \approx 2.405$ — наименьший нуль функции Бесселя первого рода нулевого порядка $J_0(x)$. Правая часть (1.58) минимальна при

$$f(x, y) = C J_0 \left(\frac{\mu_{01}}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

Аналогично можно получить соотношения неопределенности для случая других канонических областей, границы которых образованы координатными линиями одной из ортогональных систем, т. е. когда возможно использование метода разделения переменных применительно к задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Для ограниченной области Ω произвольной геометрии возможно лишь численное решение поставленной задачи.

Пусть конечная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ имеет кусочно-гладкую границу $\partial\Omega$. Численное решение основано на методе Ритца минимизации функционала (1.54). Неизвестное решение $f(x, y)$ должно принадлежать пространству $\dot{W}_2^1$, состоящему из функций пространства $W_2^1(\Omega)$ и равных нулю на $\partial\Omega$. Согласно методу Ритца, решение ищется в виде ряда с неопределенными коэффициентами [35–37]

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k(x, y), \quad (1.59)$$

где $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ — базисные (координатные) функции. Подставив (1.59) в (1.54), после дифференцирования по c_k и приравнивания производных нулю, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения:

$$AC = \lambda BC, \quad (1.60)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} (\nabla\varphi_0, \nabla\varphi_0) & (\nabla\varphi_0, \nabla\varphi_1) & \dots & (\nabla\varphi_0, \nabla\varphi_N) \\ (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_0) & (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1) & \dots & (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\nabla\varphi_N, \nabla\varphi_0) & (\nabla\varphi_N, \nabla\varphi_1) & \dots & (\nabla\varphi_N, \nabla\varphi_N) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \dots & (\varphi_0, \varphi_N) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_N, \varphi_0) & (\varphi_N, \varphi_1) & \dots & (\varphi_N, \varphi_N) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_N \end{pmatrix}.$$

Здесь $(\cdot, \cdot) \equiv (\cdot, \cdot)_{L_2(\Omega)}$. В случае ортонормированного базиса матрица B будет единичной. Для решения обобщенной алгебраической проблемы собственных значений (1.60) разработаны многочисленные эффективные алгоритмы [38–40].

В силу своей самосопряженности и положительной определенности, оператор Лапласа имеет дискретный набор положительных собственных чисел

$$0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \quad (1.61)$$

Приближенные собственные значения оператора Лапласа удовлетворяют цепочке неравенств

$$\lambda_0^{(N)} \leq \lambda_1^{(N)} \leq \dots \leq \lambda_N^{(N)} \quad (1.62)$$

и являются приближениями к точным значениям сверху, т. е.

$$\lambda_k^{(N)} \geq \lambda_k, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_k^{(N)} = \lambda_k. \quad (1.63)$$

Чем больше номер k , тем хуже приближение. Соответствующие линейно независимые собственные функции имеют вид

$$u_p^{(N)} = \sum_{k=0}^N c_k^{(p)} \varphi_k, \quad p = \overline{0, N}. \quad (1.64)$$

Базисные функции должны удовлетворять следующим требованиям [35–37]:

1) линейная независимость и полнота в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ при $N \rightarrow \infty$;

2) обязательное удовлетворение главным краевым условиям Дирихле;

3) минимизация ошибки аппроксимации при заданном N ;

4) устойчивость решения алгебраической системы Рунта (1.60).

В зависимости от вида носителя можно выделить два основных класса координатных последовательностей:

1) функции с бесконечным носителем (глобальные): алгебраические и тригонометрические полиномы, специальные функции и др.;

2) функции с финитным носителем (локальные): B -сплайны, АФ, вейвлеты и др.

В случае области произвольной формы сложно подобрать базисные функции, удовлетворяющие условию Дирихле на границе. Ситуация упрощается, если использовать локальные функции (конечные элементы) и соответствующим образом аппроксимировать границу ломаными. Это требует, однако, привлечения достаточно большого числа базисных функций в отличие от случая функций с бесконечным носителем. Имеет место

Теорема 1.5 (Л. В. Канторович [41]). Пусть система функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $W_2^1(\Omega)$, а функция $\omega(x, y)$ бесконечно дифференцируема в Ω и удовлетворяет следующим условиям:

1) $\omega(x, y) \in \overset{\circ}{W}_2^1$;

2) $\omega(x, y) > 0$, $(x, y) \in \Omega$;

$$3) \omega(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega;$$

$$4) |\nabla\omega(x, y)| \neq 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

Тогда система функций

$$\psi_k = \omega\varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.65)$$

будет полной в $\overset{\circ}{W}_2^1$.

Полнота и линейная независимость системы (1.65) влечет за собой сходимость метода Ритца.

Пусть сложная область Ω образована из более простых областей $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ с помощью теоретико-множественных операций пересечения " $\cap$ ", объединения " $\cup$ " и дополнения " $\neg$ ", т. е.

$$\Omega = F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_m\}, \{\cap, \cup, \neg\}). \quad (1.66)$$

Полагаем известными уравнения границ $\omega_i(x, y) = 0$ ($i = 1, \dots, m$). Тогда с помощью метода R-функций [33] можно получить уравнение границы $\partial\Omega$. Для этого следует формально заменить в предикатном уравнении (1.66) символы Ω на $\omega(x, y)$, Ω_i на $\omega_i(x, y)$ ($i = 1, \dots, m$), символы логических операций $\{\cap, \cup, \neg\}$ — на символы алгебраических R-операций $\{\wedge, \vee, \neg\}$, соответственно. В результате получим аналитическое выражение для границы области Ω

$$\omega(x, y) = 0. \quad (1.67)$$

При этом $\omega(x, y) > 0$ во внутренних точках Ω и $\omega(x, y) < 0$ за пределами Ω . Одной из наиболее распространенных систем двуместных R-операций является система $\mathcal{R}_\alpha$:

$$\begin{aligned} f_1 \wedge_\alpha f_2 &\equiv (1 + \alpha)^{-1} \left(f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - 2\alpha f_1 f_2} \right), \\ f_1 \vee_\alpha f_2 &\equiv (1 + \alpha)^{-1} \left(f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - 2\alpha f_1 f_2} \right), \\ \neg f &\equiv -f. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Здесь $\alpha = \alpha(x, y)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $-1 < \alpha(x, y) \leq 1$.

Выбирая функции системы (1.65) в качестве базисных в представлении (1.59), приходим к алгебраической задаче на собственные значения (1.60). Решив последнюю, получаем приближение к искомому наименьшему собственному числу λ_0 и соответствующей собственной функции u_0 , доставляющей минимум функционалу (1.54).

Рассмотрим следующий пример. Уравнение границы крестообразной области Ω , образованной наложением прямоугольника с длинами сторон $2a$, $2b$ на свой образ, полученный поворотом на 90° относительно начала координат, имеет вид

$$\omega(x, y) = \left[(a^2 - x^2) \wedge_\alpha (b^2 - y^2) \right] \vee_\alpha \left[(b^2 - x^2) \wedge_\alpha (a^2 - y^2) \right]. \quad (1.69)$$

На рис. 1.6 приведены линии уровня функции ω (при $\alpha = 0$) а) и собственной функции б), соответствующей наименьшему собственному числу для значений $a = 1$, $b = 0,5$.

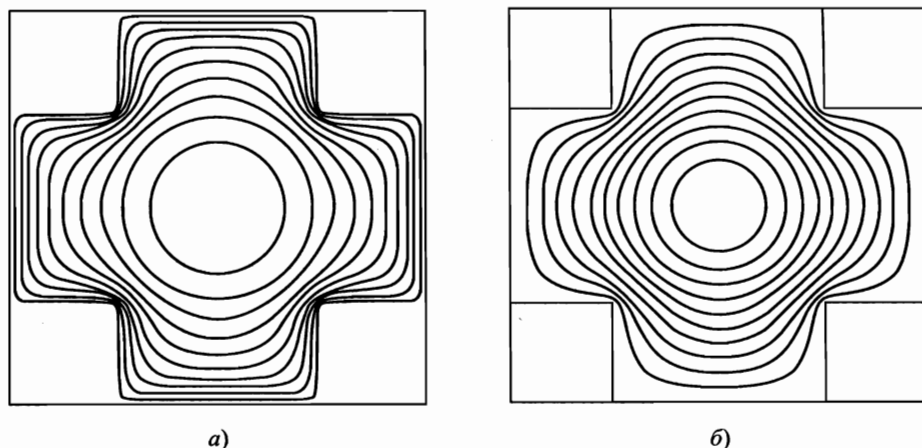


Рис. 1.6. Линии уровня функции ω (при $\alpha = 0$) (а) и собственной функции (б), соответствующей наименьшему собственному числу

Вычисление компонент матриц системы Ритца (1.60) осуществлялось численно с помощью двумерной квадратурной формулы трапеций на равномерной сетке 100×100 ; вычисление дифференциальных операторов проводилось с помощью конечно-разностных аппроксимаций второго порядка точности с шагами $\Delta x = 0,0001$, $\Delta y = 0,0001$. Использовались многочлены Лежандра четной степени $L_{2k}(2x)L_{2n}(2y)$, ($0 \leq k + n \leq M$), ортонормированные в прямоугольнике $|x| \leq b$, $|y| \leq b$. Общее количество базисных функций находится по формуле $N = 1 + (M^2 + 3M)/2$.

1.8. Системы функций с двойной ортогональностью и обобщенное соотношение неопределенности

Одна из трактовок соотношения неопределенности основывается на использовании собственных функций усеченного преобразования Фурье, являющихся функциями с двойной ортогональностью [42–49]. В одномерном случае это так называемые вытянутые волновые сфероидальные функции, которые достаточно хорошо изучены и табулированы [47, 48]. Многомерные функции с двойной ортогональностью (гиперсфероидальные функции [47, 49]) исследованы хуже, поэтому основное внимание уделено новым численным методам их расчета с использованием R-функций и АФ.

В качестве меры сосредоточенности частотной характеристики сигнала можно взять функционал $\beta(f)$, который для каждого фиксированного частотного интервала $[-w, w]$ определяется следующим образом [18]:

$$\beta(f) = \int_{-w}^w |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.70)$$

В силу равенства Парсеваля, для сигналов ограниченной длительности (1.69) примет вид

$$\beta(f) = \int_{-w}^w |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \bigg/ \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt. \quad (1.71)$$

Очевидно, $\beta(f) < 1$, так как функция, ограниченная по длительности, не может иметь финитный спектр. Обобщенное соотношение неопределенности формулируется следующим образом: при фиксированных w и T требуется найти непрерывный сигнал $f_0(t)$, оптимальный в том смысле, что

$$\beta^* = \max_{f \in C} \beta(f) = \beta(f_0). \quad (1.72)$$

Несложно показать [13, 18], что оптимальная функция равна собственной функции $S_0(x)$ интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\int_{-T}^T S(\tau) \frac{\sin w(t - \tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau = \lambda S(t), \quad (1.73)$$

соответствующей наибольшему собственному значению $\lambda = \lambda_0$. При этом $\beta^* = \lambda_0$. Путем простого изменения масштаба можно показать, что решение S_0 уравнения (1.73) зависит только от величины произведения wT . Сигналы $S_0(t) = S_0(t, wT)$ известны в литературе как *вытянутые волновые сфероидальные функции* (ВВСФ).

Введем новую переменную $z = t/T$. Уравнение (1.73) принимает вид

$$\int_{-1}^1 \psi(\xi) \operatorname{sinc} L(z - \xi) d\xi = \lambda \psi(z), \quad (1.74)$$

где $\psi(z) = S(Tz)$, $L = wT$. Собственные функции $\psi_n(z)$ уравнения (1.74) совпадают с собственными функциями усеченного преобразования Фурье

$$\mu \int_{-1}^1 \psi(\xi) e^{iL\xi z} d\xi = \psi(z), \quad (1.75)$$

а также удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{d\psi}{dz} \right] + (b - L^2 z^2) \psi = 0,$$

где b — постоянная разделения волнового уравнения в вытянутых сфероидальных координатах. Собственные и характеристические числа при этом связаны соотношением

$$\lambda_n = \frac{L}{2\pi |\mu_n|^2}. \quad (1.76)$$

Ядра интегральных уравнений (1.75), (1.76) симметричны и невырождены. Они также положительно определены [13], так как независимо от вида функции $g(z)$ квадратичная форма

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(z_1, z_2) g(z_1) g(z_2) dz_1 dz_2 \bigg/ \int_{-1}^1 |g(z)|^2 dz > 0, \quad (1.77)$$

где $K(z_1, z_2) = e^{iLz_1 z_2}$ или $K(z_1, z_2) = \text{sinc } L(z_1 - z_2)$.

Значительно более сложным является вопрос максимизации функционала вида (1.71) для многомерных, в частности, двумерных областей:

$$\beta(f) = \int_{\Omega} |\widehat{f}(\mathbf{w})|^2 d\mathbf{w} \bigg/ \int_A |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \quad (1.78)$$

Отметим два частных случая.

1. Пусть области A и Ω представляют собой прямоугольники с центром в начале координат и сторонами $2T_1, 2T_2$ и $2w_1, 2w_2$ соответственно. В этом случае соответствующее (1.78) интегральное уравнение примет вид

$$\int_{-T_2}^{T_2} \int_{-T_1}^{T_1} f(\xi, \eta) \frac{\sin \Omega_1(x - \xi)}{\pi(x - \xi)} \frac{\sin \Omega_2(y - \eta)}{\pi(y - \eta)} d\xi d\eta = \lambda f(x, y). \quad (1.79)$$

Собственная функция уравнения (1.79), соответствующая максимальному собственному значению λ_0 , имеет вид [18]

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ суть решения уравнений

$$\int_{-T_1}^{T_1} f_1(\xi) \frac{\sin \Omega_1(x - \xi)}{\pi(x - \xi)} d\xi = \lambda_x f_1(x)$$

и

$$\int_{-T_2}^{T_2} f_2(\eta) \frac{\sin \Omega_2(y - \eta)}{\pi(y - \eta)} d\eta = \lambda_y f_2(y),$$

а $\lambda = \lambda_x \lambda_y$.

2. Среди многомерных раскрытов исключительное место занимает раскрыв круглой формы, так как он единственный, форма которого совпадает с формой области видимости. С помощью преобразования Ганкеля можно показать, что система функций с двойной ортогональностью в этом случае определяется из решения интегрального уравнения [13]

$$\int \int_{\xi^2 + \eta^2 \leq T^2} f(\xi, \eta) \frac{J_1(wT \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2})}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi d\eta = \lambda f(x, y), \quad (1.80)$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого рода.

Соответствующая математическая теория для случая произвольного раскрыва разработана слабо [13].

Основной теоретический результат, относящийся к свойствам собственных функций уравнения (1.74), формулируется следующим образом [46]. При любом $L > 0$ можно построить бесконечную последовательность вещественных собственных функций $\{\psi_i\}_{i=0}^{\infty}$, для которых:

1) собственные числа положительны и образуют убывающую последовательность

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots;$$

2) функции $\psi_i(z)$ имеют финитный в интервале $[-1, 1]$ спектр, ортонормированы на вещественной оси и образуют полную систему в W_1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(z) \psi_j(z) dz = \delta_{ij}, \quad (1.81)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера;

3) функции $\psi_i(z)$ ортогональны на интервале $(-1, 1)$ и образуют на этом интервале полную систему в пространстве $L_2(-1, 1)$:

$$\int_{-1}^1 \psi_i(z) \psi_j(z) dz = \delta_{ij} \lambda_i; \quad (1.82)$$

4) для любых комплексных z

$$\int_{-1}^1 \psi_i(\eta) \operatorname{sinc} L(z - \eta) d\eta = \lambda_i \psi_i(z). \quad (1.83)$$

Свойства 2) и 3) совместно носят название свойства двойной ортогональности.

Существует общий метод для построения систем функций с двойной ортогональностью, опирающийся на теорию непрерывных самосопряженных (симметричных) операторов в гильбертовом пространстве [44, 45]. Пусть L_2 — произвольное гильбертово пространство, W — подпространство L_2 , P — оператор проектирования на W , D — некоторый линейный самосопряженный оператор, отображающий L_2 в себя. Задача заключается в построении системы векторов $\{f_i\}$ в W , обладающей следующими свойствами:

- 1) система $\{f_i\}$ полна в W ;
- 2) система $\{f_i\}$ ортонормальна в L_2 ;
- 3) $(Df_i, f_j) = 0$ при $i \neq j$.

Теорема 1.6 [46]. Пусть сужение оператора PD на подпространство W осуществляет взаимно однозначное и вполне непрерывное отображение W в себя. Тогда полная ортонормальная система собственных векторов оператора PD (т.е. $PDf_i = \lambda_i f_i$) является единственной системой, обладающей свойствами 1), 2), 3).

В пространстве целых функций конечной степени данный результат имеет следующую трактовку. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, W_Ω — подпространство целых функций конечной степени, представимых в виде

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Omega} \widehat{f}(\mathbf{w}) e^{i\mathbf{w}\mathbf{x}} d\mathbf{w}. \quad (1.84)$$

По теореме Планшереля [29] W_Ω изометрично в L_2 . Пусть D — оператор умножения элемента $f(\mathbf{x})$ на неотрицательную измеримую функцию $p(\mathbf{x})$, строго положительную на некотором множестве положительной меры, причем $p(\mathbf{x}) \in L_2(\mathbb{R}^n)$. D — вполне непрерывный оператор в W_Ω . Оператор PD , где P — оператор проектирования в W_Ω , осуществляет взаимно однозначное отображение пространства W_Ω в $L_2(\mathbb{R}^n)$ и имеет вид

$$PDf(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\Omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (1.85)$$

где ядро K_Ω представляет собой преобразование Фурье характеристической функции области Ω , т. е.

$$K_\Omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{-n/2}} \int_{\Omega} e^{i\mathbf{w}\mathbf{x}} d\mathbf{w}. \quad (1.86)$$

В случае, когда $p(\mathbf{x})$ — характеристическая функция измеримого множества A , выражение (1.85) имеет вид

$$PDf(\mathbf{x}) = \int_A K_\Omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.87)$$

Так как все условия теоремы выполнены, то существует система функций $\{f_i\}$, обладающая свойствами:

- 1) система $\{f_i\}$ полна в W_Ω ;
- 2) система $\{f_i\}$ ортонормальна в $L_2(\mathbb{R}^n)$;
- 3) $\int_A f_i(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ при $i \neq j$.

Эта система является системой собственных функций оператора PD , которая ортогональна как на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, так и на A . Других систем с теми же свойствами не существует.

Разработана достаточно подробная классификация ВВСФ и родственных им функций [46], а также выявлена тесная связь ВВСФ с функциями Матье [13]. Кроме того, в настоящее время одномерные ВВСФ хорошо протабулированы [48].

В заключении к работе [46] среди прочих проблем отмечается необходимость изучения систем функций с двойной ортогональностью в следующих двух направлениях:

“а) более глубокое и подробное изучение этих систем на прямой, в том числе рассмотрение асимптотического поведения, влияния веса, простых аппроксимаций, численных методов расчета, составление таблиц и графиков;

б) изучение дважды ортогональных систем функций от нескольких переменных, зависимость функций и собственных чисел от формы области финитности, гладкости ее границы, связности, а также другие вопросы, перечисленные в предыдущем пункте."

К этим вопросам можно добавить также проблему о построении функций $f(t)$, максимизирующих отношение (1.71) и имеющих априорные ограничения, в частности, заданные граничные условия на концах интервала финитности $[-T, T]$.

Практическое использование функций с двойной ортогональностью в многомерном случае по-прежнему затрудняется сложностью их вычисления. Поэтому разработка быстродействующих алгоритмов максимизации функционала (1.78) является особенно актуальной. Среди различных методов нахождения собственных значений и собственных функций интегрального уравнения вида (1.74) следует отметить следующие:

- 1) приближенные решения для малых L [18];
- 2) асимптотические решения с использованием разложений по многочленам Лежандра (при $L \rightarrow 0$) и функциям Бесселя (при $L \rightarrow \infty$) [7–8, 13], использование аппарата цепных дробей [47];
- 3) специальные методы отыскания характеристических чисел интегральных уравнений [50] (метод Ритца, метод следов, метод Келлога);
- 4) численные методы решения интегральных уравнений [50] (метод квадратур, метод наименьших квадратов, метод моментов, метод коллокации, метод аппроксимации ядра вырожденным).

Первая группа методов приводит к слишком грубым результатам, в то время как получение асимптотических решений затруднено сложностью численной их реализации, а также медленной сходимостью при значениях $L = wT > 5$. Методы следов, Келлога и наименьших квадратов также достаточно громоздки. Метод квадратур дает хорошую точность и приемлемое время счета для $L \leq 8$ [51]. Поэтому, в данной работе основное внимание будет уделено методам Ритца (метод моментов является одной из реализаций метода Ритца), коллокации и замены ядра вырожденным.

Метод Ритца относится к наиболее распространенным методам решения задач на собственные значения. Применительно к задаче решения интегрального уравнения (1.73)

$$K\psi \equiv \int_{-T}^T \psi(\tau) K(t, \tau) d\tau = \lambda \psi(t), \quad (1.88)$$

где $K(t, \tau) = \sin w(t - \tau)/[\pi(t - \tau)]$, он формулируется следующим образом. Приближенные собственные функции ψ_N будем искать в виде ряда по системе координатных функций φ_k с неопределенными коэффициентами c_k ,

$$\psi_N(t) = \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k(t). \quad (1.89)$$

Система линейно независимых функций φ_k должна быть полна в $L_2(-T, T)$. Подчиним коэффициенты c_n условию $\|\psi_k\|_{L_2(a,b)} = 1$, что дает

$$\sum_{k,m=0}^N c_k \bar{c}_m (\varphi_k, \varphi_m) = 1.$$

Найдем при этом условии стационарные значения квадратичной формы (1.77)

$$(K\psi_N, \psi_N) = \sum_{k,m=0}^N c_k \bar{c}_m (K\varphi_k, \varphi_m).$$

По методу Лагранжа это приводит к системе линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов c_k (λ — множитель Лагранжа)

$$AC = \lambda BC, \quad (1.90)$$

где $A = \{a_{k,m}\}_{k,m=0}^N$, $B = \{b_{k,m}\}_{k,m=0}^N$, $C = \{c_k\}_{k=0}^N$. Элементы симметричных матриц A и B вычисляются следующим образом:

$$a_{k,m} = \int_{-T}^T \int_{-T}^T \varphi_k(t_1) \varphi_m(t_2) \frac{\sin w(t_1 - t_2)}{\pi(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2, \quad (1.91)$$

$$b_{k,m} = \int_{-T}^T \varphi_k(t) \varphi_m(t) dt. \quad (1.92)$$

Если в качестве функций φ_n выбрать полную ортонормированную в $L_2(-T, T)$ систему, то элементы матрицы B примут особенно простой вид

$$b_{k,m} = \delta_{k,m},$$

где δ — символ Кронекера. Решив алгебраическую проблему (1.90) [38–40], получим собственные значения и собственные функции ядра $K(t, \tau)$. При этом приближенные собственные значения получаются с недостатком. Из (1.91) видно, что даже в одномерном случае приходится многократно производить двойное интегрирование. При переходе к многомерным задачам возникает необходимость вычислять интегралы более высокой кратности и, кроме того, в общем случае ядро определяется выражением (1.76), что еще более усложняет численную реализацию. В этой связи рассмотрим другой вариант метода Ритца. Будем непосредственно максимизировать функционал (1.71)

$$\beta(f) = \int_{-w}^w |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \bigg/ \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt.$$

Подставим (1.89) в последнее отношение и приравняем производные β по всем c_k нулю. После несложных выкладок получим систему вида (1.90).

Элементы матрицы B по-прежнему вычисляются по формулам (1.92), а

$$a_{k,m} = \frac{1}{2} \int_{-w}^w \left[\widehat{\varphi}_k(\omega) \overline{\widehat{\varphi}_m(\omega)} + \overline{\widehat{\varphi}_k(\omega)} \widehat{\varphi}_m(\omega) \right] d\omega, \quad (1.93)$$

где $\widehat{\varphi}$ — преобразование Фурье базисных функций φ . При численной реализации для вычисления $\widehat{\varphi}$ в узлах равномерной сетки интегрирования, целесообразно воспользоваться процедурами дискретного преобразования Фурье (ДПФ) или быстрого преобразования Фурье (БПФ). Нетрудно убедиться, что выражения (1.91) и (1.93) тождественны, однако в последнем случае кратность интеграла уменьшилась на единицу. Ценность данного замечания особенно проявляется в двумерном случае при максимизации функционала (1.78)

$$\beta(f) = \int_{\Omega} |\widehat{f}(\mathbf{w})|^2 d\mathbf{w} \Big/ \int_A |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Здесь разложение (1.89) будет иметь вид

$$\psi_N(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k(\mathbf{x}), \quad (1.94)$$

причем $\varphi_k(\mathbf{x}) = \varphi_{k_1}^{(1)}(x_1) \cdot \varphi_{k_2}^{(2)}(x_2) \cdot \dots \cdot \varphi_{k_n}^{(1)}(x_n)$, а элементы матриц алгебраической системы (1.89) находятся следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{k,m} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\widehat{\varphi}_k(\mathbf{w}) \overline{\widehat{\varphi}_m(\mathbf{w})} + \overline{\widehat{\varphi}_k(\mathbf{w})} \widehat{\varphi}_m(\mathbf{w}) \right] d\mathbf{w} = \\ &= \int_{\Omega} |\widehat{\varphi}_k| |\widehat{\varphi}_m| \cos(\arg \widehat{\varphi}_k - \arg \widehat{\varphi}_m) d\mathbf{w}, \end{aligned} \quad (1.95)$$

$$b_{k,m} = \int_A \varphi_k(\mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.96)$$

Выполнить приближенные оценки собственного числа λ_0 можно с помощью метода следов [36]. Величина $\lambda_0 = \sqrt{A_{2m}/A_{2m+2}}$ дает приближение к λ_0 с недостатком, а $\bar{\lambda}_0 = \sqrt[2m]{A_{2m}^{-1}}$ — с избытком. Здесь m -й след ядра $K(t, \tau)$ $A_m = \int_{-T}^T K_m(s, s) ds$, где $K_m(t, \tau)$ — m -е итерированное ядро, определяемое как

$$K_1(t, \tau) \equiv K(t, \tau), \quad K_m(t, \tau) = \int_{-T}^T K(t, s) K_{m-1}(s, \tau) ds, \quad m = 2, 3, \dots$$

Так как ядро симметрично, то следы четного порядка можно вычислять по формуле

$$A_{2m} = \int_{-T}^T \int_{-T}^T |K_m(t, \tau)|^2 dt d\tau = 2 \int_{-T}^T \int_{-T}^t |K_m(t, \tau)|^2 d\tau dt,$$

требующей вдвое меньшего числа итераций.

Обсудим количество арифметических операций, необходимых для численной реализации обычной и модифицированной схемы Ритца. Для этого достаточно сравнить между собой вычислительные затраты на нахождение компонент $a_{k,m}$. Пусть интегрирование осуществляется численно, количество узлов сетки равно M . Тогда для нахождения всех элементов матрицы A по формуле (1.91) потребуется $Q = O(N^2 M^2)$ операций, по формуле (1.93) с использованием процедуры ДПФ $Q = O(NM^2 + M^2 N)$, а с использованием алгоритма БПФ (при $M = 2^l$) $Q = O(NM \log_2 M + N^2 M)$. Если же известны аналитические выражения преобразования Фурье $\hat{\varphi}$, то количество действий оказывается порядка $O(N^2 M)$.

Метод коллокации заключается в подстановке (1.89) в (1.88) и требовании обращения невязки

$$\varepsilon = \int_{-T}^T \psi(\tau) K(t, \tau) d\tau - \lambda \psi(t)$$

в нуль в заданной системе точек t_j ($j = 0, 1, \dots, N$). В результате получается система (1.89) с компонентами матриц

$$a_{k,m} = \int_{-T}^T \varphi_k(\tau) \frac{\sin w(t_m - \tau)}{\pi(t_m - \tau)} d\tau, \quad (1.97)$$

$$b_{k,m} = \varphi_k(t_m). \quad (1.98)$$

Основной недостаток метода заключается в трудности выбора точек t_j , обеспечивающего близкую к нулю невязку не только в точках коллокации, но и на всем интервале $[-1, 1]$. Кроме того, очевидно, что для достижения хорошей степени аппроксимации необходимо использовать большое число базисных функций N . Это может ухудшить обусловленность матриц системы линейных алгебраических уравнений и, следовательно, устойчивость метода. Удовлетворительное решение данной проблемы достигается при выборе функций с компактным носителем (сплайны [27, 52], АФ [24]) в качестве базисных. Количество арифметических операций метода коллокации $Q = O(N^2 M)$.

Метод аппроксимации ядра вырожденным заключается в приближенном разложении ядра уравнения (1.88) по системе функций $\varphi_k(t, \tau) = \varphi_{k_1}^{(1)}(t)\varphi_{k_2}^{(2)}(\tau)$:

$$\tilde{K}(t, \tau) = \sum_{k=0}^N c_k \varphi_{k_1}^{(1)}(t) \varphi_{k_2}^{(2)}(\tau). \quad (1.99)$$

Собственные числа ядра $\tilde{K}(t, \tau)$ совпадают собственными числами матрицы A с компонентами

$$a_{k,m} = \int_{-T}^T \varphi_k(t) \varphi_m(t) dt.$$

По количеству действий ($Q = O(N^2 M)$) данный метод сопоставим с методом коллокации и рассмотренным выше модифицированным методом Ритца. В [50] приведены некоторые способы аппроксимации ядра вырожденным при решении интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма 2-го рода (одномерные и двумерные разложения в ряды Тейлора, Фурье, представление интерполяционными многочленами Лагранжа, метод Бэтмена, комбинированные методы). Отмечается сравнительно небольшое число известных в литературе способов такой аппроксимации и, как следствие, недостаточная приспособленность метода приближенных вырожденных ядер в численной реализации. Основным препятствием является сложность представления двумерной функции (ядра) с приемлемой точностью с помощью небольшого количества базисных.

В [51] рассмотрен метод, основанный на аппроксимации ВВСФ отрезком ряда УКШ. Данный подход эквивалентен следующему разложению ядра

$$\frac{\sin w(t - \tau)}{w(t - \tau)} = \sum_{k=-N}^N \frac{\sin w(t - k\Delta)}{w(t - k\Delta)} \frac{\sin[\pi\Delta^{-1}(\tau - k\Delta)]}{\pi\Delta^{-1}(\tau - k\Delta)}, \quad (1.100)$$

которое при $N \rightarrow \infty$ является точным.

В [53] предложены эффективные алгоритмы решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода (в том числе однородных) на основе разложения неизвестного решения или ядра по базису АФ. При этом вместо атомарных можно использовать любые другие финитные функции с хорошими аппроксимационными свойствами, в частности, B -сплайны Шенберга [27, 52]. Согласно методу коллокации неизвестное решение (1.88) ищется в виде

$$\Phi_{N,r}(\psi; t) = \sum_{k=-M}^{N+M} c_k \varphi_{r,k}(t), \quad (1.101)$$

где при четном r $M = r/2$, $\varphi_{r,k}(t) \equiv \text{fup}_r\left(\frac{t+T}{h} - k\right)$, $h = 2T/N$, а неизвестные компоненты разложения находятся из следующей системы

$$\sum_{j=-M}^{N+M} (\varphi_{ij} - \lambda a_{ij}) c_j = 0, \quad i = \overline{-M, N+M}, \quad (1.102)$$

где

$$\varphi_{ij} = \varphi_{r,j}(t_i), \quad a_{ij} = \int_{-T}^T K(t_i, \tau) \varphi_{r,j}(\tau) d\tau,$$

$$t_i = -T + ih, \quad i = \overline{-M, N+M}.$$

Для решения (1.88) методом вырожденных ядер определим приближенное ядро в виде $\tilde{K}(x, s) = \Phi_{N,r}(K; x, s)$, где $\Phi_{N,r}(K; x, s)$ — двумерный атомарный интерполянт, определяемый следующим образом. Рассмотрим интерполяцию $f(x_1, x_2) \in C^{(r+1)}(\Pi)$, имеющей непрерывные частные производные порядка не выше $r+1$ по каждой из переменных. Пусть область Π — прямоугольник $[a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$, а функция f может быть продолжена за ее пределы на всю числовую плоскость. На Π введем сетку

$$\Delta_{N_1, N_2}: (x_{1m}; x_{2n}) = (a_1 + mh_1; a_2 + nh_2),$$

$$h_i = (b_i - a_i)/N_i, \quad i = 1, 2,$$

$$m = \overline{-M, N_1 + M}, \quad n = \overline{-M, N_2 + M}, \quad M = [(r+1)/2].$$

При четном r двумерный атомарный интерполянт будет иметь вид

$$\Phi_{N,r}(f; x_1, x_2) = \sum_{k=0}^N c_k \varphi_{r,\mu(k)}^{(1)}(x_1) \varphi_{r,\nu(k)}^{(2)}(x_2), \quad (1.103)$$

где

$$\varphi_{r,k}^{(i)}(x_i) \equiv \text{fup}_r \left(\frac{x_i - a_i}{h_i} - k \right), \quad i = 1, 2,$$

$$\Phi_{N,r}(f; x_{1m}, x_{2n}) = f(x_{1m}, x_{2n}), \quad m = \overline{-M, N_1 + M}, \quad n = \overline{-M, N_2 + M},$$

$$\mu(k) = \left\lfloor \frac{k}{N_2 + 2M + 1} \right\rfloor - M, \quad \nu(k) = k - (N_2 + 2M + 1)(\mu(k) + M) - M,$$

$$k = \overline{0, N}, \quad N = (N_1 + 2M + 1)(N_2 + 2M + 1) - 1.$$

В силу того, что ядро (1.88) определено на квадрате $[-T, T] \times [-T, T]$, в (1.103)

$$\varphi_{r,k}^{(i)}(t^{(s)}) \equiv \varphi_{r,k}(t^{(s)}) \equiv \text{fup}_r \left(\frac{t^{(s)} + T}{h} - k \right), \quad s = 1, 2, \quad t^{(1)} \equiv t, \quad t^{(2)} \equiv \tau.$$

Приближенное решение (1.88) методом аппроксимации ядра вырожденным имеет вид

$$\psi_N(t) = \lambda \sum_{k=0}^N (c_k d_{\nu(k)}) \varphi_{r,\mu(k)}(t), \quad (1.104)$$

где моменты $d_k = \int_{-T}^T \psi(t) \varphi_{r,k}(t) dt$ и собственные числа находятся из

решения однородной алгебраической системы

$$d_i - \lambda \sum_{j=0}^{N+2M} \{c_j g_{\mu(j),i}\} d_{\nu(j)} = 0, \quad i = \overline{-M, N+M},$$

где $g_{p,q} = \int_{-T}^T \varphi_{r,p}(t) \varphi_{r,q}(t) dt$.

Учет ограничений на искомый сигнал с помощью R-функций. Пусть желательно получить оптимальный сигнал ψ , удовлетворяющий определенным граничным условиям (например, Неймана, Дирихле, 3-го рода) на концах интервала $[-T, T]$ или на границе многомерной области A . В этом случае, воспользовавшись структурным методом R-функций, можно реализовать метод Ритца с базисными функциями в (1.94), точно удовлетворяющими краевым условиям на границе. В табл. 1.2 приведены основные структуры решения многомерных задач, из которых как частный случай можно получить структуры для решения одномерных задач.

Таблица 1.2. Краевые условия и структуры решения

Краевые условия		Структуры решения
1-го рода (Дирихле)	$\psi _{\partial\Omega} = f$	$\psi_N = \sum_{k=0}^N c_k(\omega\varphi_k) + f$
2-го рода (Неймана)	$\partial\psi/\partial\nu _{\partial\Omega} = f$	$\psi_N = \sum_{k=0}^N c_k(\varphi_k - \omega\nabla\omega\nabla\varphi_k) - \omega f$
3-го рода	$(\partial\psi/\partial\nu + h\psi) _{\partial\Omega} = f$	$\psi_N = \sum_{k=0}^N c_k[(1 + \omega h)\varphi_k - \omega\nabla\omega\nabla\varphi_k] - \omega f$

Примечание. В структурах для условий 2-го и 3-го рода уравнение границы ω нормализованное: $\partial\omega/\partial\nu|_{\partial\Omega} = -1$, где ν — внешняя нормаль к границе.

Диаграмма направленности (ДН) линейного излучателя длины $2a$, симметрично расположенного относительно начала координат, пропорциональна

$$F(u) = \int_{-a}^a f(x) e^{iku} dx,$$

где $u = \sin\theta$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, θ — угол между радиусом-вектором точки наблюдения и нормалью к антенне в плоскости излучения. Из свойств преобразования Фурье следует, что ДН $F(u)$ принадлежит классу W_a . После замены переменных $c = ka$, $\omega = u\sqrt{c}$, $t = x\sqrt{c}/a$, с точностью до числового множителя

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} f(t) e^{i\omega t} dt.$$

Так как области видимости соответствует $\omega \in [-\sqrt{c}, \sqrt{c}]$, то величина

$$\int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} |F(\omega)|^2 d\omega$$

пропорциональна излучаемой энергии. С другой стороны, в силу равенства Парсеваля величина

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} |f(t)|^2 dt$$

пропорциональна полной энергии тока, подводимого к антенне. Функция $F(u)$ вне области видимости характеризует реактивную составляющую тока в антенне. Коэффициент сверхнаправленности имеет вид

$$Q(c) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \bigg/ \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} |F(\omega)|^2 d\omega$$

и определяет, насколько данная антенна является технически реализуемой и экономически выгодной. Величина $Q(c)$ ограничена снизу постоянной $Q_0(c)$, причем $Q_0(c) \xrightarrow{c \rightarrow \infty} 1$ и $Q_0(c) \xrightarrow{c \rightarrow 0} \infty$. Задача заключается в определении формы $f(t)$, при которой $Q(c) = Q_0(c)$ или $\|Q - Q_0\| \leq \varepsilon$, где ε — малое число.

Расчет проведен методом Ритца совместно с процедурой БПФ. Использовались следующие системы координатных функций:

- 1) степенные полиномы четной степени t^{2n} ($n = \overline{0, N}$);
- 2) структуры Дирихле $\omega(t)t^{2n}$ ($n = \overline{0, N}$), где $\omega(t) = c - t^2$;
- 3) структуры Неймана $t^{2n}(1 + 2n\omega(t)/\sqrt{c})$ ($n = \overline{0, N}$), где $\omega(t) = (c - t^2)/(2\sqrt{c})$;
- 4) линейные B -сплайны $\frac{1}{\Delta} B_1 \left(\frac{t + \sqrt{c}}{\Delta} - n \right)$ ($n = \overline{0, N}$), $\Delta = 2\sqrt{c}/N$;
- 5) ир-базис $\frac{1}{\Delta} \text{ир} \left(\frac{t + \sqrt{c}}{\Delta} - n \right)$ ($n = \overline{0, N}$), $\Delta = 2\sqrt{c}/N$;
- 6) кубические B -сплайны $\frac{1}{\Delta} B_3 \left(\frac{t + \sqrt{c}}{\Delta} - n \right)$ ($n = \overline{-1, N+1}$), $\Delta = 2\sqrt{c}/N$;
- 7) fur_2 -базис $\frac{1}{\Delta} \text{fur}_2 \left(\frac{t + \sqrt{c}}{\Delta} - n \right)$ ($n = \overline{-1, N+1}$), $\Delta = 2\sqrt{c}/N$.

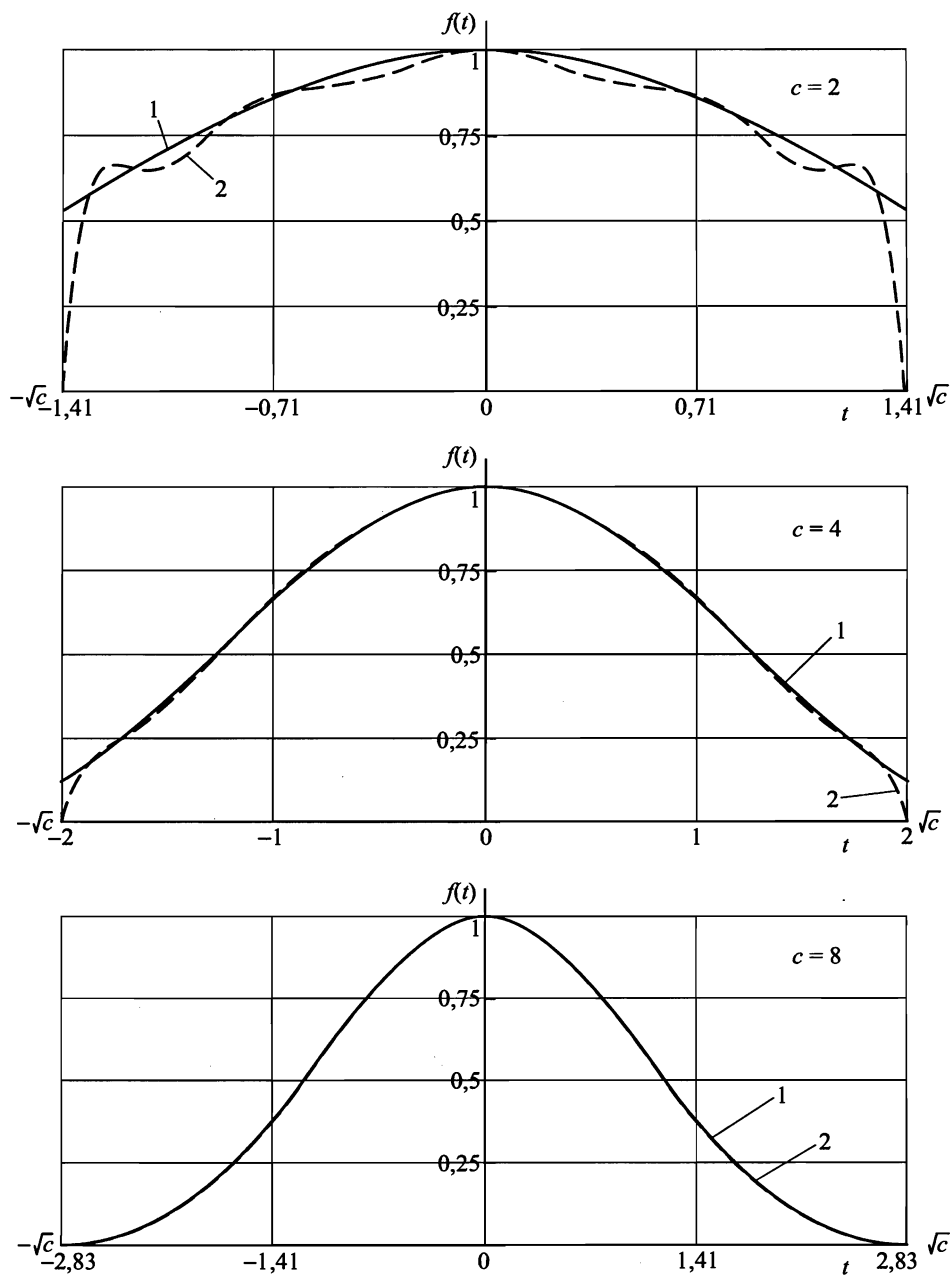
Численное интегрирование осуществлялось методом прямоугольников на равномерной сетке ($M = 128$). В табл. 1.3, 1.4 приведены приближенные собственные числа $\tilde{\lambda}_0$ для различных значений параметра c . На рис. 1.7 показаны собственные функции, соответствующие $\tilde{\lambda}_0$.

Таблица 1.3. Приближенные собственные числа, найденные с помощью степенных полиномов, структур Дирихле и структур Неймана

N	0	1	2	3	4
$c = 2 \quad (\lambda_0 = 0,8805)$					
полиномы	0,8561	0,8805	—	—	—
Дирихле	0,8288	0,8574	0,8679	0,8725	0,8748
Неймана	0,8561	0,8798	0,8805	—	—
$c = 4 \quad (\lambda_0 = 0,9959)$					
полиномы	0,9110	0,9916	0,9958	0,9959	—
Дирихле	0,9915	0,9937	0,9949	0,9952	0,9954
Неймана	0,9110	0,9953	0,9957	0,9958	0,9959
$c = 8 \quad (\lambda_0 = 1,0000)$					
полиномы	0,9605	0,9983	0,9999	1,0000	—
Дирихле	0,9983	0,9998	1,0000	—	—
Неймана	0,9605	0,9999	0,9999	1,0000	—

Таблица 1.4. Приближенные собственные числа, найденные с помощью B_1 - и B_3 -сплайнов, up- и fur₂-функций

N	1	2	4	8	16
$c = 2 \quad (\lambda_0 = 0,8805)$					
B_1	0,8561	0,8794	0,8804	0,8805	—
up	0,8561	0,8786	0,8795	0,8778	0,8804
B_3	0,8805	—	—	—	—
fur ₂	0,8805	—	—	—	—
$c = 4 \quad (\lambda_0 = 0,9959)$					
B_1	0,9110	0,9931	0,9949	0,9958	0,9959
up	0,9110	0,9911	0,9878	0,9940	0,9954
B_3	0,9916	0,9959	—	—	—
fur ₂	0,9916	0,9959	—	—	—
$c = 8 \quad (\lambda_0 = 1,0000)$					
B_1	0,9605	0,9974	0,9987	0,9998	1,0000
up	0,9605	0,9977	0,9967	0,9973	0,9992
B_3	0,9983	0,9999	1,0000	—	—
fur ₂	0,9983	0,9999	1,0000	—	—

Рис. 1.7. Собственные функции, соответствующие $\tilde{\lambda}_0$

Пусть A — вписанный в прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ двумерный плоский раскрыв с линейной поляризацией поля вдоль оси z . ДН по полю имеет вид

$$F(u, v) = \int_A f(x, y) e^{ik(xu+yv)} dx dy,$$

где $u = \sin \theta \cos \varphi$, $v = \sin \theta \sin \varphi$. Обозначим $c_1 = ka$, $c_2 = kb$, $\omega_1 = u\sqrt{c_1}$, $\omega_2 = v\sqrt{c_2}$, $t_1 = x\sqrt{c_1}/a$, $t_2 = y\sqrt{c_2}/b$. Выражение для ДН примет вид

$$F(\omega_1, \omega_2) = \int_A f(t_1, t_2) e^{i(t_1\omega_1+t_2\omega_2)} dt_1 dt_2.$$

Область видимости Ω при этом представляет собой эллипс $\frac{\omega_1^2}{c_1} + \frac{\omega_2^2}{c_2} \leq 1$, следовательно, излучаемая энергия пропорциональна

$$\int_{\Omega} |F(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2,$$

в то время как полная энергия —

$$\int_{R^2} |F(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 = \int_A |f(t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2.$$

Задача: найти распределение $f(t_1, t_2)$, доставляющее минимум отношению

$$Q(\Omega) = \int_{R^2} |F(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2 \bigg/ \int_{\Omega} |F(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2$$

и обращающееся в ноль на границе области A .

На рис. 1.8 представлены требуемые распределения $f(t_1, t_2)$ для квадратной, круглой и крестообразной областей при $c_1 = c_2 = c = 4$. Использовались структуры Дирихле с полиномами Лежандра четной степени в качестве координатных функций. Максимальная степень полиномов по каждой переменной $P = 4$ (количество координатных функций $N = 6$). Интегрирование осуществлялось методом прямоугольников на равномерной сетке 64×64 . Приближенные собственные числа

$\tilde{\lambda}_0 = 0,9808$ для квадратной области,

$\tilde{\lambda}_0 = 0,9698$ для круглой области,

$\tilde{\lambda}_0 = 0,9432$ для крестообразной области.

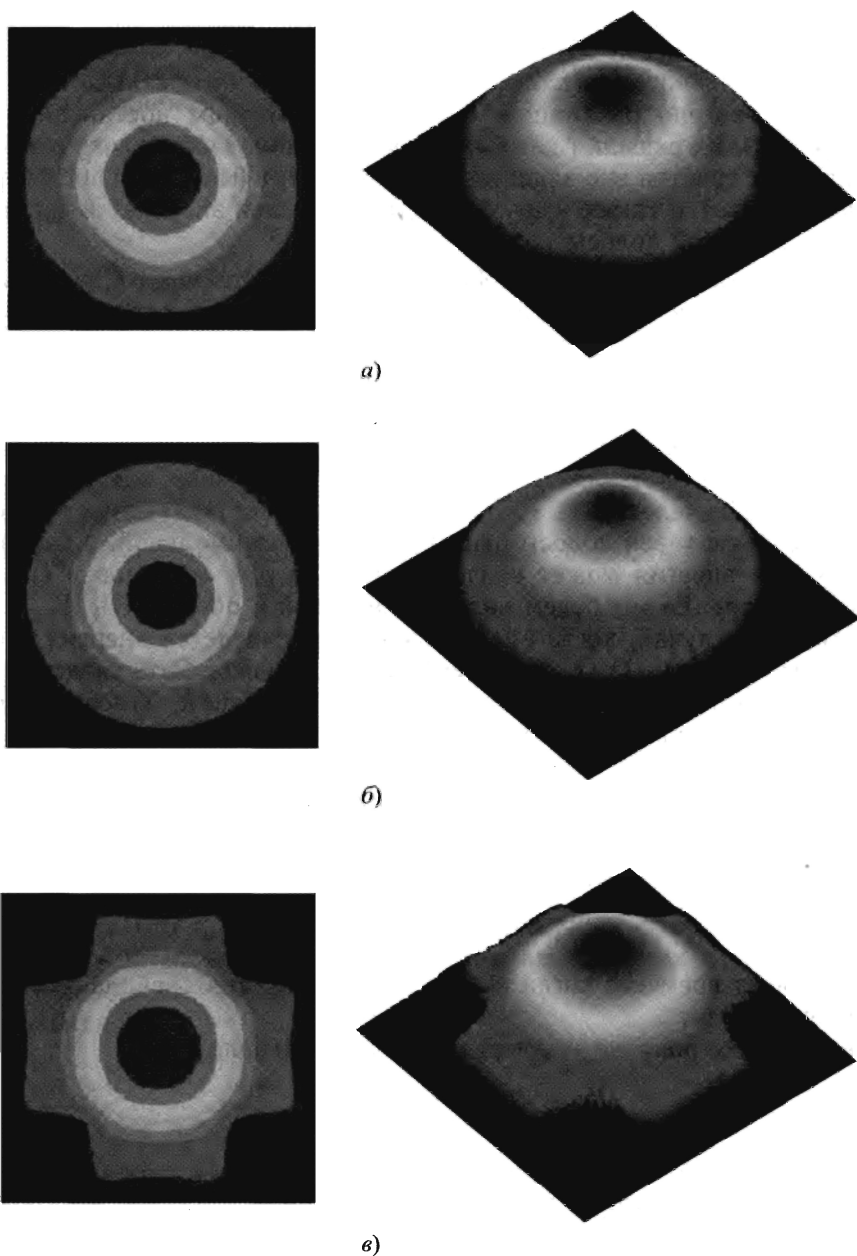


Рис. 1.8. Распределения $f(t_1, t_2)$ для квадратной (а), круглой (б) и крестообразной (в) областей при $c_1 = c_2 = c = 4$

1.9. Функции с минимальной энергией вредного спектра

Рассмотренные выше ВВСФ могут иметь большое значение в определении оптимального сигнала. Однако, понятие оптимального сигнала может быть введено различным образом. Рассмотрим постановки задачи и новые методы их решения для сигналов, имеющих минимальную энергию составляющих спектра вне заданной полосы частот (минимальной энергией вредного спектра), а также импульсов с наименьшей энергией в спектре за пределами заданной полосы [54, 55].

Сигналы с минимальной энергией вредного спектра. Сигнал может начаться лишь после момента времени a , когда было принято решение о его посылке. Поэтому функция времени $f(t) = f$, выражающая сигнал, должна удовлетворять условию

$$f = 0 \quad \text{при} \quad t < a. \quad (1.105)$$

Такая функция, как известно, всегда имеет спектр, простирающийся до бесконечности. Представляет интерес выяснить: какова должна быть f , удовлетворяющая условию (1.105), чтобы энергия составляющих ее спектра за пределами некоторой полосы частот была бы минимальной, и каков этот минимум. Эта энергия может создавать помехи для сигналов в соседних областях спектра. Ее мы будем называть вредной и обозначать W_v .

Рассмотрим случай, когда вредной энергией считается энергия спектра за пределами полосы $-\Omega, \Omega$. Ряд других случаев может быть сведен к нему, если использовать свойства модулированных колебаний. Угловую частоту Ω мы будем называть граничной частотой.

При приеме сигнала не всегда можно использовать всю его энергию, так как не всегда можно ждать, когда сигнал полностью затухнет. Поэтому введем понятие энергии полезного участка сигнала. Она будет равна

$$W_n = \int_a^b f^2 dt,$$

где b — момент времени, когда кончается регистрация сигнала для принятия решения о нем.

Введем также понятие — энергия “хвоста” сигнала:

$$W_x = \int_b^\infty f^2 dt.$$

Будем искать f , удовлетворяющую условию (1.1), для которой при заданном

$$H_x = \frac{W_x}{W_n} \quad (1.106)$$

величина

$$H_v = \frac{W_v}{W_n} \quad (1.107)$$

минимальна. Такую функцию назовем оптимальным сигналом. Для решения этой задачи введем вспомогательную величину

$$H_R = H_B + RH_X, \quad (1.108)$$

где R — некоторая постоянная, и будем искать такую функцию f , которая обеспечит минимальное возможное значение H_R . Эту функцию мы обозначим $\tilde{f}$ и соответствующие ей величины H_R , H_B , H_X — $\tilde{H}_R$, $\tilde{H}_B$, $\tilde{H}_X$. Очевидно, справедливо неравенство

$$H_B + RH_X \geq \tilde{H}_B + R\tilde{H}_X, \quad (1.109)$$

поскольку $\tilde{H}_R$ — минимально возможное значение H_R . Если брать не любые функции f , а лишь те, для которых $H_X = \tilde{H}_X$, то для них на основании (1.109) $H_B \geq \tilde{H}_B$. Таким образом, $\tilde{H}_B$ будет минимально возможным значением H_B при условии, что f таково, что $H_X = \tilde{H}_X$. Отсюда следует, что f обеспечивающее минимально возможное значение H_R , будет оптимальным сигналом при условии, что $H_X = \tilde{H}_X$. Задаваясь различными значениями R , мы получим серию функций $\tilde{f}$, $\tilde{H}_R$, $\tilde{H}_X$, $\tilde{H}_B$ и зависимость между ними.

Введем понятие низкочастотной части функции f и обозначим ее, добавив индекс “н”. Будем считать

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.110)$$

где

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f e^{-i\omega t} dt$$

— спектр функции f .

Отметим, что f_n как функция с ограниченным спектром всегда простирается от $-\infty$ до ∞ и, если не равна нулю при всех t , может равняться нулю только в отдельных точках.

Очевидно,

$$W_B = \int_a^{\infty} f^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} f_n^2 dt. \quad (1.111)$$

В соответствии с этим и выражениями (1.106)–(1.108) будем иметь

$$H_R = \frac{\int_a^{\infty} f^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} f_n^2 dt + R \int_b^{\infty} f^2 dt}{\int_a^b f^2 dt}. \quad (1.112)$$

Возьмем $f = \tilde{f} + \mu\varphi$, где μ — некоторая постоянная, φ — произвольная функция времени, удовлетворяющая условию (1.105). Получим

$$H_R = \left(\int_a^\infty (\tilde{f} + \mu\varphi)^2 dt - \int_{-\infty}^\infty (\tilde{f}_H + \mu\varphi)^2 dt + \right. \\ \left. + R \int_b^\infty (\tilde{f} + \mu\varphi)^2 dt \right) / \left(\int_a^b (\tilde{f} + \mu\varphi)^2 dt \right). \quad (1.113)$$

Раскрывая это выражение и пренебрегая членами, содержащими μ во второй и более высоких степенях, получим

$$H_R = \frac{A}{B} \left[1 + \frac{2\mu}{A} \left(\int_a^\infty \tilde{f}\varphi dt - \int_{-\infty}^\infty \tilde{f}_H\varphi_H dt + R \int_b^\infty \tilde{f}\varphi dt - \frac{A}{B} \int_a^b \tilde{f}\varphi dt \right) \right].$$

Здесь A и B — значения числителя и знаменателя выражения (1.113) при $\mu = 0$. Преобразуем второй интеграл. В соответствии с теоремой Парсеваля, по которой для действительных функций $f(t)$ и $g(t)$ справедливо выражение

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty G_f(\omega) G_\varphi^*(\omega) d\omega,$$

где

$$G_f(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad G_\varphi^*(\omega) = \int_{-\infty}^\infty \varphi(t) e^{i\omega t} dt,$$

и принимая во внимание, что $\tilde{f}_H$ имеет спектр в пределах $-\Omega, \Omega$, и что при $t < a$ по условию $\varphi = 0$, получим

$$\int_{-\infty}^\infty \tilde{f}_H\varphi_H dt = \int_{-\infty}^\infty \tilde{f}_H\varphi dt = \int_a^\infty \tilde{f}_H\varphi dt.$$

Разбивая интервал интегрирования на участки, komponуя их и учитывая, что $A/B = \tilde{H}_R$, получим

$$H_R = \tilde{H}_R \left\{ 1 + \frac{2\mu}{A} \left[\int_a^b (\tilde{f} - \tilde{f}_H - \tilde{H}_R \tilde{f}) \varphi dt + \int_b^\infty (\tilde{f} - \tilde{f}_H + R\tilde{f}) \varphi dt \right] \right\}. \quad (1.114)$$

Если скобки под интегралами не равны нулю на участках интегрирования, то всегда можно выбрать φ так, чтобы $H_R < \tilde{H}_R$, а это противоречит условию, что $\tilde{H}_R$ — минимально возможное значение H_R . Таким образом,

должно быть

- 1) $\tilde{f} = 0$ на участке $-\infty, a$; по условию (1.105);
- 2) $\tilde{f} = \frac{1}{1 - \tilde{H}_R} \tilde{f}_H$ на участке a, b ;
- 3) $\tilde{f} = \frac{1}{1 + R} \tilde{f}_H$ на участке b, ∞ .

Величину $\tilde{H}_R$ можно найти, если воспользоваться уравнением (1.112), выразив в нем $\tilde{f}$ через $\tilde{f}_H$ с помощью уравнений (1.115). Получим

$$V = \frac{\tilde{H}_R}{1 - \tilde{H}_R} = \frac{\int_{-\infty}^a \tilde{f}_H^2 dt + \frac{R}{1 + R} \int_b^{\infty} \tilde{f}_H^2 dt}{\int_a^b \tilde{f}_H^2 dt} = \frac{I_a + \frac{R}{1 + R} (I_{\infty} - I_b)}{I_b - I_a} \quad (1.116)$$

и

$$\tilde{H}_R = \frac{V}{1 + V}, \quad (1.117)$$

где

$$I_p = \int_{-\infty}^p \tilde{f}_H^2 dt, \quad p = a, b, \infty. \quad (1.118)$$

Функция $\tilde{f}_H$ имеет спектр в пределах $-\Omega, \Omega$ и поэтому, как можно показать, может быть представлена рядом УКШ

$$\tilde{f}_H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin(\Omega t - n\theta)}{\Omega t - n\theta}, \quad (1.119)$$

где

$$\theta \leq \pi.$$

Обычно принимают $\theta = \pi$, но в данном случае оказалось, что ряд лучше сходится при $\theta = 2/3\pi$. Это значение θ и было принято.

Для того чтобы $\tilde{f}$ соответствовало оптимальному сигналу, выполнение условий, выраженных формулами (1.115) и (1.116), необходимо, но недостаточно. Эти условия будут выполняться также для f , соответствующих максимуму и другим экстремумам H_R . Чтобы получить оптимальный сигнал, надо выбрать $\tilde{f}_H$ таким, чтобы величина $\tilde{H}_R$, выражаемая формулами (1.116) и (1.117), была минимальной, а затем определить $\tilde{f}$ с помощью уравнений (1.115). При этом должно быть выполнено условие, что $\tilde{f}_H$ является низкочастотной частью f . Но, как можно показать, это условие всегда будет выполняться, если $\tilde{f}_H$ представлено рядом (1.119) и $\tilde{f}$ определено с помощью уравнений (1.115) и (1.116).

Таким образом, оптимальный сигнал $\tilde{f}$ должен выражаться уравнениями (1.115), где $\tilde{f}_H$ определяется уравнением (1.119), в котором x_n соответствует минимуму величины V или, как это следует из (1.117), минимуму $\tilde{H}_R$.

Перейдем к отысканию x_k , обеспечивающих минимум V , для чего подставим в (1.118) выражение (1.119). Получим

$$I_p = \int_{-\infty}^p \tilde{f}_H^2 dt = \int_{-\infty}^p \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin(\Omega t - k\theta)}{\Omega t - k\theta} \right]^2 dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_p(l, m) x_l x_m. \quad (1.120)$$

Здесь

$$C_p(l, m) = \int_{-\infty}^p \frac{\sin(\Omega t - l\theta)}{\Omega t - l\theta} \frac{\sin(\Omega t - m\theta)}{\Omega t - m\theta} dt.$$

Проведя интегрирование, получаем

$$C_p(l, m) = \frac{1}{\Omega} \frac{\cos[(l-m)\theta]}{2(l-m)\theta} [\text{Cin}(2\Omega p - 2l\theta) - \text{Cin}(2\Omega p - 2m\theta)] + \\ + \frac{1}{\Omega} \frac{\sin[(l-m)\theta]}{2(l-m)\theta} [\text{Si}(2\Omega p - 2l\theta) + \text{Si}(2\Omega p - 2m\theta) + \pi]$$

при $l \neq m$ и

$$C_p(m, m) = \frac{1}{\Omega} \left[\frac{\cos(2\Omega p - 2m\theta) - 1}{2\Omega p - 2m\theta} + \text{Si}(2\Omega p - 2m\theta) + \frac{\pi}{2} \right],$$

$$C_{\infty}(l, m) = \frac{\pi}{\Omega} \frac{\sin[(l-m)\theta]}{(l-m)\theta}$$

при $l \neq m$ и

$$C_{\infty}(m, m) = \frac{\pi}{\Omega}.$$

Использованы общепринятые обозначения

$$\text{Cin}(z) = \int_0^z \frac{1 - \cos(y)}{y} dy, \quad \text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin(y)}{y} dy.$$

Подставляя значение l_p из (1.120) в (1.116), получим

$$V = \frac{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A(l, m) x_l x_m}{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B(l, m) x_l x_m},$$

$$A(l, m) = C_a(l, m) + \frac{R}{1+R} [C_{\infty}(l, m) - C_b(l, m)],$$

$$B(l, m) = C_b(l, m) - C_a(l, m).$$

Величина $\tilde{H}_R$ находится из выражения (1.117). $\tilde{H}_x$ можно отыскать, подставляя в уравнение (1.106) значение $\tilde{f}$ из (1.115). Учитывая (1.118), получим

$$\tilde{H}_x = \frac{\frac{1}{(1+R)^2} (I_\infty - I_b)}{\frac{1}{(1-\tilde{H}_R)^2} (I_b - I_a)}.$$

Далее, на основании (1.107), (1.111), (1.115) и (1.118)

$$\tilde{H}_b = \frac{\frac{1}{(1-\tilde{H}_R)^2} (I_b - I_a) + \frac{1}{(1+R)^2} (I_\infty - I_b) - I_\infty}{\frac{1}{(1-\tilde{H}_R)^2} (I_b - I_a)}.$$

Величины $\tilde{H}_R$, $\tilde{H}_x$ и $\tilde{H}_b$ будут зависеть от R , Ωa и Ωb . Но так как очевидно, что выбор начала отсчета времени не должен влиять на них, то они будут зависеть только от R и $\Omega b - \Omega a = \frac{2\pi}{T_r} (b - a) = 2\pi\alpha$, где T_r — период граничной частоты, $\alpha = \frac{b - a}{T_r}$.

Прямых формул, выражающих зависимости $\tilde{H}_R$, $\tilde{H}_x$ и $\tilde{H}_b$ от R и α с помощью известных функций, получить не удалось, поэтому были проведены конкретные расчеты для

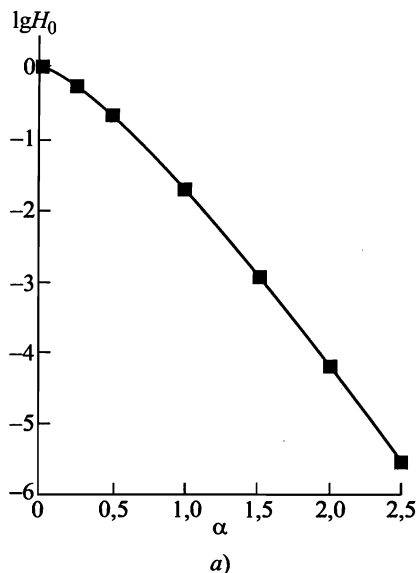
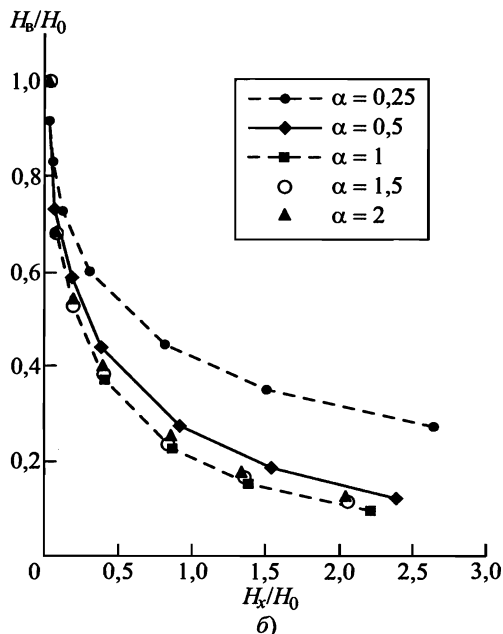
$$R = \infty; 5; 2; 1; 0,5; 0,2; 0,1; 0,05 \quad \text{и} \quad \alpha = 0,125; 0,25; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5.$$

При этом были получены следующие результаты.

1. При $R = \infty$ в соответствии с (1.115) $\tilde{f} = 0$ при $t < a$ и $t < b$, т. е. весь оптимальный сигнал сосредоточен на участке a, b . В этом случае $\tilde{H}_x = 0$, $\tilde{H}_b = \tilde{H}_R = H_0$ и $\tilde{f}$ оказывается симметричной.

Зависимость H_0 от α для этого случая приведена на рис. 1.9. При $\alpha \rightarrow 0$, $H_0 \rightarrow 1$. Это следует и из общих соображений. При $\alpha = 0,25$ примерно 50 % энергии сигнала уходит за пределы граничной частоты, при $\alpha = 0,5$ — около 20 %, при $\alpha = 1$ — около 2 %, при 1,5 — около 0,1 %, при 2 — около 1/200 %. Дальше H_0 уменьшается быстрее чем в 400 раз при увеличении α на единицу. При неоптимальном сигнале за граничную частоту будет уходить больше энергии. Случай с $\tilde{H}_x = 0$ был рассмотрен с помощью вытянутых волновых функций [43] и согласуется с рис. 1.9. Приблизенно $\tilde{f}$ для этого случая может быть представлена с помощью окна Кайзера [56].

2. При R конечном сигнал не кончается в момент b , $\tilde{H}_x \neq 0$ и величина $\tilde{H}_b$ уменьшается с увеличением $\tilde{H}_x$. Результаты расчета приведены на рис. 10. В этом случае оказалось удобным по оси абсцисс откладывать величину $\tilde{H}_x/H_0$, а по оси ординат $\tilde{H}_b/H_0$. На рисунке приводятся кривые

Рис. 1.9. Зависимость H_0 от α Рис. 1.10. Случай с $\tilde{H}_x = 0$ на основе вытянутых волновых функций

для значений $\alpha = 0,25; 0,5; 1$. Для значений $\alpha = 1,5$ и 2 , чтобы не усложнять рисунок, приводятся отдельные точки.

Как видно из рис. 1.10, наличие даже небольшого “хвоста” может существенно уменьшить $\tilde{H}_b$. Так, при $\alpha = 1$ и $\tilde{H}_x = 0,04$, а также при $\alpha = 2$ и $\tilde{H}_x = 10^{-4}$ величина $\tilde{H}_b$ составляет примерно $1/8$ от H_0 .

Может показаться, что пропуская оптимальный сигнал через фильтр, обладающий затуханием на частотах, больших чем Ω , мы уменьшим H_b и получим сигнал лучше чем оптимальный. Это не так. При таком фильтре должно возрасти H_x , и H_b не будет меньше, чем у оптимального сигнала при этом новом $\tilde{H}_x$.

При расчетах в ряде (1.119) бралось до 9 членов — большее количество брать было нецелесообразно, так как это приводило лишь к незначительному уменьшению $\tilde{H}_b$, меньшему, чем точность расчета. Чтобы получить сигнал, у которого $\tilde{H}_b$ всего лишь на несколько процентов больше чем у оптимального, оказалось достаточно при $\alpha \leq 1$ трех членов ряда (1.119), для $\alpha = 1,5$ — пяти и для $\alpha = 2$ — семи членов. Эта зависимость станет понятной, если учесть, что при выбранном $\theta = (2/3)\pi$, члены ряда (1.119) сдвинуты друг относительно друга на $T_r/3$.

В таблицах 1.5–1.9 приведены параметры сигналов, близких к оптимальному. Как можно показать, полученные при этом значения H_b несколько превосходят истинные величины, однако они отличаются от $\tilde{H}_b$ всего на несколько процентов.

Таблица 1.5. Параметры сигналов при $a = -0,125T_r$, $b = 0,125T_r$, $\alpha = 0,25$

R	H_R	H_x	H_b	X_{-1}	X_0	X_1
∞	0,5322	0	0,5322	0,0322	1	0,0322
5	0,5098	0,0041	0,4894	0,0079	1	0,0628
2	0,4830	0,0197	0,4434	-0,0148	1	0,1094
1	0,4496	0,0569	0,3927	-0,0336	1	0,1871
0,5	0,4045	0,1452	0,3319	-0,0428	1	0,3370
0,2	0,3312	0,4271	0,2458	0,0188	1	0,7293
0,1	0,2718	0,8375	0,1880	0,0366	1	1,2251
0,05	0,2182	1,3818	0,1491	0,1184	1	1,8622

Таблица 1.6. Параметры сигналов при $a = -0,25T_r$, $b = 0,25T_r$, $\alpha = 0,5$

R	H_R	H_x	H_b	X_{-1}	X_0	X_1
∞	0,2167	0	0,2167	0,1310	1	0,1310
5	0,2017	0,0026	0,1885	0,1110	1	0,1561
2	0,1848	0,0121	0,1606	0,0924	1	0,1942
1	0,1649	0,0328	0,1322	0,0771	1	0,2571
0,5	0,1400	0,0770	0,1015	0,0699	1	0,3765
0,2	0,1036	0,1986	0,0639	0,0896	1	0,6737
0,1	0,0775	0,3477	0,0427	0,1312	1	1,0169
0,05	0,0563	0,5148	0,0306	0,1867	1	1,4091

Таблица 1.7. Параметры сигналов при $a = -0,5T_r$, $b = 0,5T_r$, $\alpha = 1$

R	H_R	H_x	H_b	X_{-1}	X_0	X_1
∞	0,0190	0	0,0190	0,5170	1	0,5170
5	0,0173	0,0003	0,0159	0,5014	1	0,5353
2	0,0156	0,0013	0,0130	0,4800	1	0,5619
1	0,0135	0,0033	0,0103	0,4713	1	0,6030
0,5	0,0111	0,0072	0,0075	0,4590	1	0,6735
0,2	0,0079	0,0163	0,0046	0,4545	1	0,8182
0,1	0,0059	0,0254	0,0033	0,4597	1	0,9475
0,05	0,0044	0,0339	0,0027	0,4686	1	1,0623

Таблица 1.8. Параметры сигналов при $a = -0,75T_r$, $b = 0,75T_r$, $\alpha = 1,5$

R	H_R	H_x	H_b	X_{-2}	X_{-1}	X_0	X_1	X_2
∞	1109×10^{-6}	0	1109×10^{-6}	0,1219	0,7131	1	0,7131	0,1219
5	1011×10^{-6}	17×10^{-6}	928×10^{-6}	0,1182	0,7025	1	0,7253	0,1255
1	905×10^{-6}	75×10^{-6}	755×10^{-6}	0,1137	0,6913	1	0,7420	0,1298
1	784×10^{-6}	195×10^{-6}	588×10^{-6}	0,1076	0,6796	1	0,7666	0,1355
0,5	641×10^{-6}	427×10^{-6}	427×10^{-6}	0,0988	0,6675	1	0,8059	0,1440
0,2	453×10^{-6}	939×10^{-6}	265×10^{-6}	0,0839	0,6540	1	0,8777	0,1613
0,1	337×10^{-6}	1468×10^{-6}	190×10^{-6}	0,0728	0,6436	1	0,9342	0,1824
0,05	249×10^{-6}	2163×10^{-6}	141×10^{-6}	0,0638	0,6274	1	0,9800	0,2163

Таблица 1.9. Параметры сигналов при $a = -T_r$, $b = T_r$, $\alpha = 2$

R	H_R	H_x	H_b	X_{-3}	X_{-2}	X_{-1}	X_0	X_1	X_2	X_3
∞	57×10^{-6}	0	57×10^{-6}	0,0141	0,2550	0,7242	1	0,7242	0,2550	0,0141
5	52×10^{-6}	1×10^{-6}	48×10^{-6}	0,0139	0,2501	0,7195	1	0,7330	0,2596	0,0151
1	47×10^{-6}	4×10^{-6}	39×10^{-6}	0,0132	0,2429	0,7110	1	0,7445	0,2668	0,0164
1	41×10^{-6}	10×10^{-6}	31×10^{-6}	0,0125	0,2344	0,7017	1	0,7597	0,2758	0,0181
0,5	33×10^{-6}	22×10^{-6}	23×10^{-6}	0,0120	0,2228	0,6908	1	0,7826	0,2889	0,0207
0,2	24×10^{-6}	48×10^{-6}	14×10^{-6}	0,0115	0,2024	0,6720	1	0,8251	0,3157	0,0254
0,1	17×10^{-6}	74×10^{-6}	10×10^{-6}	0,0111	0,1890	0,6562	1	0,8536	0,3400	0,0280
0,05	13×10^{-6}	114×10^{-6}	7×10^{-6}	0,0099	0,1749	0,6302	1	0,8798	0,3760	0,0293

На рис. 1.11 приведен пример оптимального сигнала для параметров $\alpha = 0,5$, $R = \infty$. Для него $H_x = 0$, $H_b = 0,2167$. На рис. 1.12 дан пример оптимального сигнала для $\alpha = 0,5$, $R = 0,5$. Для него $H_x = 0,0770$, $H_b = 0,1015$.

Полученные результаты можно использовать для выяснения, насколько сигналы в конкретных системах близки к оптимальным и насколько в них теоретически можно уменьшить энергию вредного спектра.

Импульсы с минимальной энергией вредного спектра. Рассмотрим импульсы, имеющие вид, изображенный на рис. 1.13, состоящие из полезной части на участке a, b , используемой для анализа сигнала при приеме, и “хвостов” a', a и b, b' . Если эти хвосты достаточно малы, то на них могут быть наложены другие импульсы без сильного искажения. Таким образом,

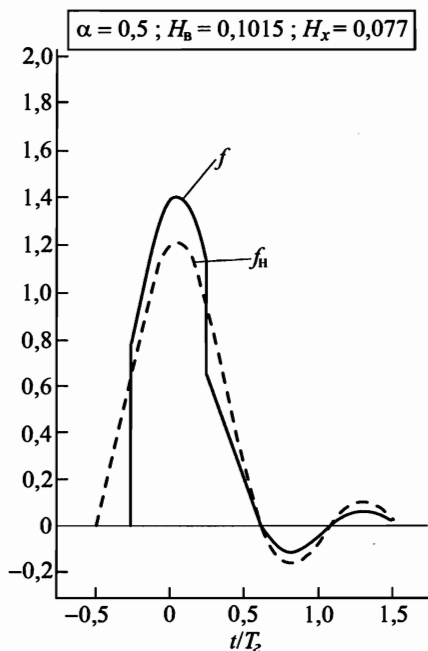


Рис. 1.11. Пример оптимального сигнала для $\alpha = 0,5$, $R = \infty$

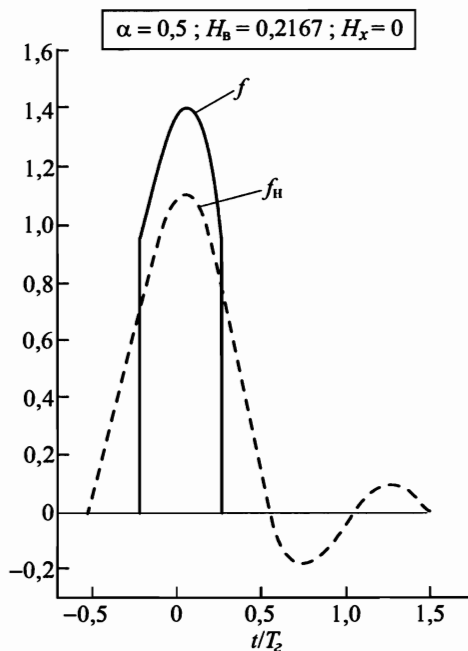


Рис. 1.12. Пример оптимального сигнала для $\alpha = 0,5$, $R = 0,5$

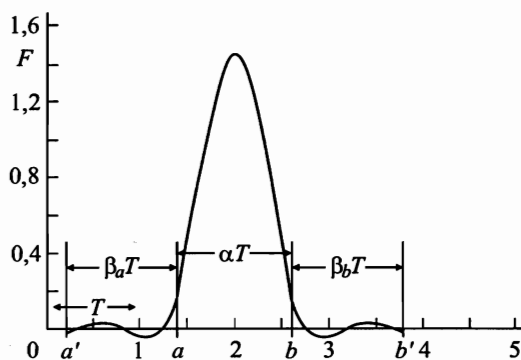


Рис. 1.13. Пример импульса с полезной частью и “хвостами”

они не будут отнимать на себя время, но могут иногда, как будет показано ниже, существенно улучшить спектр.

Энергию полезного участка импульса обозначим через

$$W_{\Pi} = \int_a^b f^2 dt \quad (1.121)$$

и энергию хвостов импульса — через

$$W_x = \int_{a'}^a f^2 dt + \int_b^{b'} f_H^2 dt. \quad (1.122)$$

Здесь через f обозначена функция времени t , изображающая импульс. В рассматриваемом случае

$$f = 0 \quad \text{при} \quad t < a' \quad \text{и} \quad t > b'. \quad (1.123)$$

Как известно, такой импульс имеет спектр, простирающийся до бесконечности, если значения a' и b' конечны.

Энергию спектра импульса за пределами заданной полосы $(-\Omega, \Omega)$ будем обозначать W_b и называть вредной, поскольку она может вызывать помехи, тут $\Omega = 2\pi/T$ — угловая граничная частота, T — период граничной частоты.

Рассмотрим метод отыскания импульса, у которого при заданной частоте Ω , продолжительности хвостов и полезного участка, а также отношении

$$h_x = W_x/W_\Pi \quad (1.124)$$

величина

$$h_b = W_b/W_\Pi \quad (1.125)$$

будет наименьшей. Такой импульс будем называть оптимальным для данного h_x . В дальнейшем будем считать, что величины a , b , b' и Ω заданы. Обозначим

$$h_R = h_b + Rh_x, \quad (1.126)$$

где $R \geq 0$ — некоторый параметр. Как легко показать, всегда $h_R \geq 0$, поэтому параметр h_R должен иметь наименьшее значение. Пусть это значение при заданном R появляется при $f = F$ и равно H_R . Значения h_b , h_x при этом обозначим через H_b , H_x . Поскольку по условию

$$h_b + Rh_x = h_R \geq H_R = H_b + RH_x,$$

очевидно, что при f , для которых $h_x = H_x$, всегда $h_b \geq H_b$, причем равенство справедливо при $f = F$. Таким образом H_b является наименьшей величиной h_b при $h_x = H_x$. Это доказывает следующую лемму.

Лемма. *Функция $f = F$, отвечающая наименьшему значению h_R при заданном R , соответствует оптимальному импульсу для H_x .*

Аналогично можно доказать, что при оптимальном импульсе и выборе такого значения f , при котором $h_b = H_b$, наименьшее значение $h_x = H_x$.

Имеет место теорема.

Теорема 1.7. *Импульс на рис. 1.13 будет оптимальным, если соответствующая ему функция $f = F$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) на участках $(-\infty, a')$, (b', ∞) $F = 0$ по условию (1.123);

$$2) \text{ на участках } (a', a), (b, b') \quad F = \frac{1}{1+R} F_H, \quad (1.127)$$

$$3) \text{ на участке } (a, b) \quad F = (1+V) F_H, \quad (1.128)$$

4) F_H — функция, спектр которой лежит в пределах $(-\Omega, \Omega)$, обеспечивающая при заданном R наименьшую величину выражения

$$V = \frac{\int_{-\infty}^{a'} F_H^2 dt + \frac{R}{1+R} \left(\int_{a'}^a F_H^2 dt + \int_b^{b'} F_H^2 dt \right) + \int_{b'}^{\infty} F_H^2 dt}{\int_a^b F_H^2 dt}. \quad (1.129)$$

Введем понятие низкочастотной части функции f и будем понимать под ней

$$f_H = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\omega) \exp(i\omega t) dt,$$

где

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f \exp(-i\omega t) dt$$

— спектр функции f . Таким образом, f_H получаем из f путем отбрасывания составляющих с частотами по модулю, большими, чем Ω . Функция f_H всегда непрерывна и простирается от $-\infty$ до $+\infty$.

Очевидно, что

$$W_b = \int_{a'}^{b'} f^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt. \quad (1.130)$$

При доказательстве теоремы 1.7 принималось, что F_H является низкочастотной частью F . Это будет так, если $F - F_H$ не содержит составляющих в полосе $(-\Omega, \Omega)$. Поэтому в соответствии с теоремой Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} (F - F_H) \frac{\sin(\Omega t - k\theta)}{\Omega t - k\theta} dt = 0 \quad (1.131)$$

при любых постоянных k и θ , поскольку $\frac{\sin(\Omega t - k\theta)}{\Omega t - k\theta}$ имеет составляющие только в этой полосе. Покажем справедливость равенства (1.131) при соблюдении условий (1.127)–(1.129). Функция F_H как имеющая спектр в пределах $(-\Omega, \Omega)$ всегда может быть представлена рядом

$$F_H = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin(\Omega t - k\theta)}{\Omega t - k\theta}, \quad (1.132)$$

где k — целое число, $\theta \leq \pi$ — постоянная величина. Поэтому

$$\frac{\partial F_H}{\partial x_k} = \frac{\sin(\Omega t - k\theta)}{\Omega t - k\theta}$$

и, следовательно, равенство (1.131) можно переписать так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (F - F_H) \frac{\partial F_H}{\partial x_k} dt = 0.$$

Выражая при этом F через F_H при помощи (1.127) и (1.128) и принимая во внимание

$$\int (F - F_H) \frac{\partial F_H}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \int F_H^2 dt,$$

а также учитывая, что величина V соответствует экстремуму и поэтому может быть принята как постоянная, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (F - F_H) \frac{\partial F_H}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[- \int_{-\infty}^{a'} F_H^2 dt - \frac{R}{1+R} \left(\int_{a'}^a F_H^2 dt + \int_b^{b'} F_H^2 dt \right) - \right. \\ \left. - \int_{b'}^{\infty} F_H^2 dt + V \int_a^b F_H^2 dt \right]. \quad (1.133) \end{aligned}$$

Сравнивая (1.133) с (1.129), видим, что сумма первых трех слагаемых в квадратных скобках равна $-V \int_a^b F_H^2 dt$. Отсюда следует, что правая часть (1.133) равна нулю. Это доказывает равенство (1.131) и то, что любая функция F_H , выражаемая рядом (1.132), при соблюдении условий (1.127)–(1.129) будет низкочастотной частью F .

Перейдем к отысканию значения F_H , при котором будет обеспечено наименьшее значение выражения (1.130) для V . Для этого раскроем интегралы, входящие в это выражение. Возьмем интеграл

$$\begin{aligned} \int_u^{u'} f_H^2 dt = \int_u^{u'} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin(\Omega t - k\theta)}{\Omega t - k\theta} \right)^2 dt = \\ = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [E_{l,m}(u') - E_{l,m}(u)] x_l x_m, \quad (1.134) \end{aligned}$$

где

$$E_{l,m}(u) = \int_{-\infty}^u \frac{\sin(\Omega t - l\theta) \sin(\Omega t - m\theta)}{(\Omega t - l\theta)(\Omega t - m\theta)} dt.$$

Проведя интегрирование, при $l \neq m$ получим

$$\begin{aligned} E_{l,m}(u) = \frac{\cos[(l-m)\theta]}{2\Omega(l-m)\theta} [\text{Cin}(2\Omega u - 2l\theta) - \text{Cin}(2\Omega u - 2m\theta)] + \\ + \frac{\sin[(l-m)\theta]}{2\Omega(l-m)\theta} [\text{Si}(2\Omega u - 2l\theta) + \text{Si}(2\Omega u - 2m\theta) + \pi] \quad (1.135) \end{aligned}$$

и

$$E_{m,m}(u) = \frac{1}{\Omega} \left[\frac{\cos(2\Omega u - 2m\theta) - 1}{2\Omega u - 2m\theta} + \text{Si}(2\Omega u - 2m\theta) + \frac{\pi}{2} \right].$$

Переходя к пределу, для $u = \infty$ при $l \neq m$ получим

$$E_{l,m}(\infty) = \frac{\pi \sin[(l-m)\theta]}{\Omega(l-m)\theta}$$

и

$$E_{m,m}(\infty) = \pi/\Omega.$$

Подставляя значения интегралов в выражение (1.129) для V и учитывая (1.134), получим

$$V = \frac{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{l,m} x_l x_m}{\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{l,m} x_l x_m}, \quad (1.136)$$

где

$$\begin{aligned} A_{l,m} = E_{l,m}(a') + \frac{R}{1+R} [E_{l,m}(a) - E_{l,m}(a') + E_{l,m}(b') - E_{l,m}(b)] + \\ + E_{l,m}(\infty) - E_{l,m}(b') = \frac{1}{1+R} [E_{l,m}(a') - E_{l,m}(b')] + \\ + \frac{R}{1+R} [E_{l,m}(a) - E_{l,m}(b)] + E_{l,m}(\infty), \end{aligned} \quad (1.137)$$

$$B_{l,m} = E_{l,m}(b) - E_{l,m}(a). \quad (1.138)$$

Задаваясь Ω , a' , a , b , b' и различными R , можно отыскать при помощи (1.136) значения x_k , дающие наименьшее V . По этим x_k при помощи (1.124) и (1.125) можно получить значения H_x , H_b и определить зависимость между ними.

Как видно из (1.135) и (1.136), x_k и, следовательно, f , V , H_x , H_b будут зависеть от R , а также от $\Omega a'$, Ωa , Ωb , $\Omega b'$. При условии, что они не должны зависеть от выбора начала отсчета времени, указанные величины будут определяться разностями

$$\Omega a - \Omega a' = \frac{2\pi}{T} (a - a') = 2\pi\beta_a,$$

$$\Omega b - \Omega a = \frac{2\pi}{T} (b - a) = 2\pi\alpha,$$

$$\Omega b' - \Omega b = \frac{2\pi}{T} (b' - b) = 2\pi\beta_b.$$

$$\text{Здесь } \beta_a = \frac{a - a'}{T}, \quad \alpha = \frac{b - a}{T}, \quad \beta_b = \frac{b' - b}{T}.$$

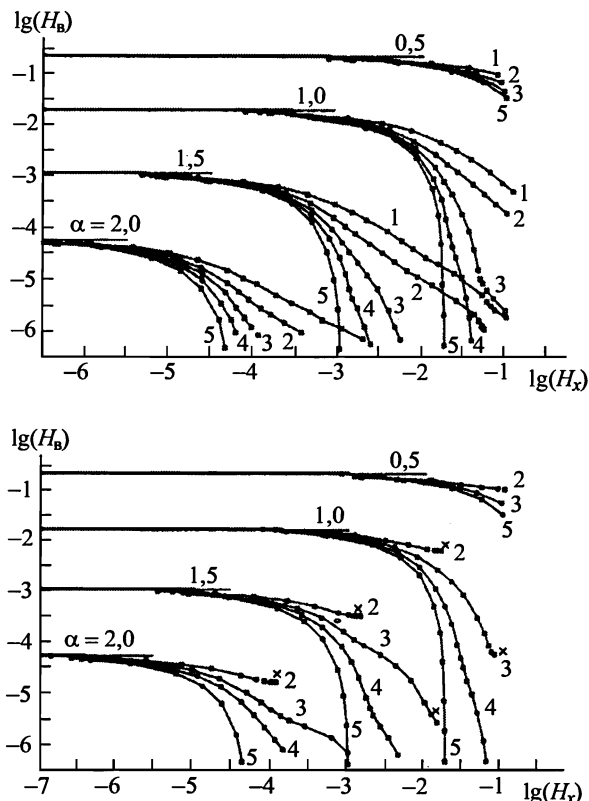


Рис. 1.14. Результаты численных расчетов для $\beta_b = -\infty$ и $\beta_b = \beta_a$

Результаты численных расчетов приведены на рис. 1.14, а, б соответственно для $\beta_b = -\infty$ и $\beta_b = \beta_a$. На рисунках по осям отложены десятичные логарифмы H_x и H_b . Таким образом, одно деление соответствует 10 дБ.

Кривые зависимостей для различных α представлены в виде отдельных пучков. Чем больше значение α , тем ниже проходит пучок. Каждый пучок состоит из кривых для различных β_a . При более длинном переднем хвосте и большем β_a кривые проходят ниже.

Когда $H_x \rightarrow 0$, кривые асимптотически приближаются к значению $H_b = H_0$, которое соответствует $H_x = 0$ при данном α , т. е. к случаю, когда нет хвостов. Зависимость $\lg H_0$ от α приведена на рис. 1.15. Этот случай, как видно из (1.127), соответствует $R = \infty$.

При уменьшении R и сохранении других параметров постоянными величина H_b уменьшается, а H_x увеличивается. Расчет был проведен для значений $R = \infty; 10; 5; 2; 1; 0,5; 0,2; \dots$ и до тех пор, пока результаты не выходили за пределы рисунка или до $R = 0$. Последние случаи отмечены знаком $\times$. Значения $R < 0$ не имеют смысла, при них H_b увеличивается с ростом H_x .

На рис. 1.14 приведены также кривые для $\beta_a = \beta_b = \infty$. Такой случай практически не осуществим, так как импульс при этом надо начинать

в $-\infty$. Однако его можно рассматривать как предельный: он дает наименьшее значение H_b при заданных α и H_{-x} . Зависимость H_b от H_{-x} для этого случая может быть выражена формулой

$$H_b = \left[\sqrt{H_0} - \sqrt{(1 - H_0) H_x} \right]^2, \quad (1.139)$$

где H_0 — значение H_b при заданном α и $\beta_a = \beta_b = \infty$. Как видно из формулы (1.139), при

$$H_x = \frac{H_0}{1 - H_0} \quad (1.140)$$

значение H_b становится равным нулю. В этом случае $R = V = 0$ и F в соответствии с (1.127) и (1.128) становится равным F_b на всем участке t от $-\infty$ до ∞ .

Расчеты показали, что при параметрах рис. 1.14 в полосе частот $(\Omega, 2\Omega)$, т.е. в соседнем канале, лежит примерно 3/4 энергии всего вредного спектра. При малых H_b эта доля еще больше увеличивается.

На рис. 1.13 приведен пример оптимального импульса при $\alpha = \beta_a = \beta_b = 1$, а на рис. 1.16 — его спектр.

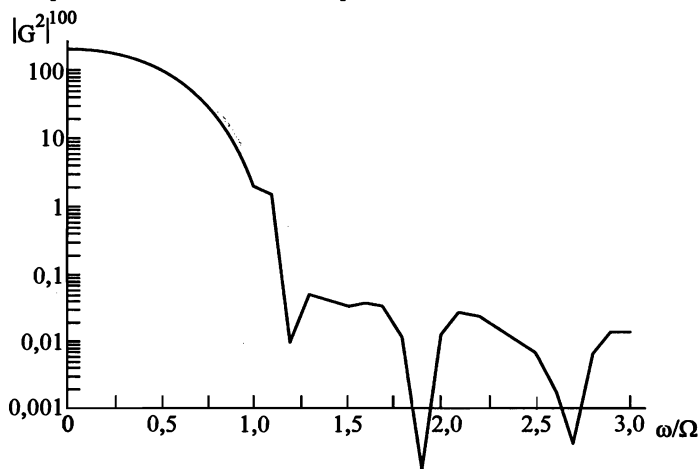


Рис. 1.16. Спектр оптимального импульса при $\alpha = \beta_a = \beta_b = 1$

Расчеты проводили при числе членов в (1.131), равном 9. Увеличение числа членов при $\alpha \leq 2$ на результатах практически не сказывалось. За нулевой отсчет времени выбрана середина полезного участка. Для улучшения сходимости принимали $\theta = 2\pi/3$.

Ранее были рассмотрены отдельные частные случаи импульсов. Случаи $\beta_a = \beta_b = 0$ и $\beta_a = 0, \beta_b = \infty$ описаны выше, а случаи $\beta_a = \beta_b = 0$ и $\beta_a = \beta_b = \infty$ — в [43].

Представленные в этой главе оригинальные результаты являются развитием и обобщением основополагающих работ В.А. Котельникова [58].

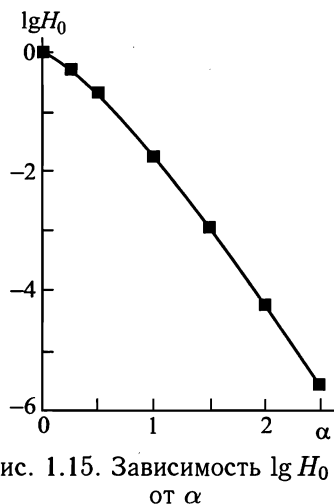


Рис. 1.15. Зависимость $\lg H_0$ от α

1.10. Кватернионы и атомарные функции в задачах сферической интерполяции и аппроксимации

Наряду с параллельным переносом вращение является одним из основных видов движения твердого тела в 3-х мерном пространстве. Если положение и ориентация тела задаются в дискретные моменты времени, то, как правило, возникает проблема аппроксимации его поступательного и вращательного движений. Более простой и изученной является первая задача: помимо обычной линейной интерполяции к настоящему времени разработано большое количество методов и их разновидностей для аппроксимации положения тела в трехмерном пространстве по дискретному множеству отсчетов. Пожалуй, одним из наиболее эффективных подходов здесь является приближение на основе финитных функций: сплайнов определенной степени гладкости, бесконечно дифференцируемых АФ и др.

Аппроксимация вращений представляет собой менее изученную проблему. Существуют два основных способа описания вращений: с помощью углов Эйлера и кватернионов. В настоящее время в силу своей большей эффективности все шире применяется последний подход. Первый эффективный метод сферической интерполяции с помощью кватернионов (Slerp) был разработан сравнительно недавно — в середине 80-х гг. XX в. [60]. С тех пор в данной области было предложено большое количество подходов и алгоритмов [59, 61–63]. Далее будет рассмотрен универсальный метод сферической аппроксимации и интерполяции с помощью накопленного базиса. Впервые рассматриваются новые базисы на основе обобщенной теоремы отсчетов УКШ и АФ, показана их эффективность.

Пожалуй, впервые задача аппроксимации вращательного движения тела возникла в сфере анимации. В частности, на студии Уолта Диснея ее основатель занимался лишь созданием так называемых ключевых кадров (*keyframes*), после чего коллектив помощников восстанавливал промежуточные кадры (*in-between frames*). С появлением компьютеров эта задача существенно упростилась, кроме того возникли новые области применения аппарата сферической аппроксимации: космическая навигация, радиолокация, биомедицина, химия и др. В качестве иллюстрации затронута проблема обработки телеметрической информации, получаемой с борта космического летательного аппарата (КЛА), в виде дискретной последовательности кватернионов ориентации [64, 65].

1.11. Методы интерполяции и аппроксимации на сфере

Основные способы представления вращений. Преобразования вращений в трехмерном евклидовом пространстве образуют трехмерную неабелеву (некоммутативную) ортогональную группу $SO(3)$ [66–69]. Существуют два основных способа описания вращений в трехмерном пространстве:

- на основе углов Эйлера и матриц поворота;
- на основе теоремы Эйлера и аппарата кватернионов.

При первом подходе произвольный поворот разбивается на последовательность трех поворотов вокруг осей декартовой системы координат. Каждый из этих элементарных поворотов задается соответствующей ортогональной матрицей вращений, а результирующий поворот описывается произведением этих матриц. Так, последовательные повороты вокруг осей x, y, z на углы ψ, θ, φ выражаются соответственно матрицами

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а общий поворот — матрицей

$$A = \Psi \Theta \Phi. \quad (1.141)$$

С другой стороны, согласно теореме Эйлера, если O и O' — две направленные оси (ориентации) в $\mathbb{R}^3$, то переход от O к O' может быть осуществлен одним единственным поворотом вокруг определенной оси $l \in \mathbb{R}^3$ на угол $\gamma \in [-\pi, \pi]$. Данный поворот реализуется на основе аппарата кватернионов. Пусть ось, вокруг которой вращается векторный кватернион q , определяется единичным кватернионом $p = \cos \gamma + r \sin \gamma$, где r — единичный вектор. Тогда кватернион

$$r = pq q^{-1} \quad (1.142)$$

получается поворотом q на угол 2γ вокруг r .

Представление вращений при помощи кватернионов единичной нормы представляет собой многообразие, являющееся трехмерной сферой в четырехмерном пространстве. Это многообразие односвязно, но оно не находится во взаимнооднозначном соответствии с группой $SO(3)$: два кватерниона q и $-q$ задают одно и то же положение твердого тела. Группа единичных кватернионов носит название односвязной накрывающей группы вращений.

Основным преимуществом описания вращений с помощью кватернионов является простота алгебраических операций, особенно при выполнении серии последовательных поворотов, что следует из сравнения между собой выражений (1.141) и (1.142). Из общего вида результирующей матрицы поворота трудно также получить выражения для углов элементарных поворотов.

Представление (1.142) зачастую имеет более наглядный физический смысл, поскольку большое число практических задач основано на непосредственном использовании теоремы Эйлера. Такие проблемы, например, возникают в радиолокации при задании координат точечной цели в сферической системе отсчета. Данная цель характеризуется тремя координатами: наклонной дальностью R , углом азимута α и углом места β . При поиске цели по углу места точка A , соответствующая максимуму диаграммы

направленности (ДН) антенны, должна вращаться в угломестной плоскости. В режиме сопровождения цели по угловым координатам α и β радиолокационная станция с конической разверткой ДН вращает диаграмму вокруг оси OO' , соответствующей равносигнальному направлению. В результате точка A переходит в точку A' , когда радиус-вектор $\vec{OA}$ перемещается по окружности основания конуса по дуге AA' . Еще одним примером является стабилизация положения летательного аппарата (ЛА) после серии беспорядочных вращений в нештатных ситуациях при отказе системы ориентации [68]. В этом случае промежуточная траектория ЛА обычно не представляет интереса, и для решения задачи ориентации по изображениям светил необходимо лишь идентифицировать произвольную звезду, визируемую астродатчиком. Решение связано с совмещением двух кватернионов p и q .

Среди других недостатков представления вращений с помощью углов Эйлера и матриц поворота укажем также на существенное влияние порядка вращений на конечный результат. Это может привести к так называемому эффекту “блокировки гироскопа”, заключающемуся в потере одной из степеней свободы. Кватернионное представление вращений не зависит от выбора системы координат, а одному и тому же повороту соответствуют лишь два кватерниона вращения. Кроме того, аппарат кватернионов позволяет реализовать значительно большее количество методов аппроксимации и интерполяции дискретных поворотов.

Наиболее часто упоминаемым в литературе недостатком использования кватернионов является более сложное (неэлементарное) описание их математического аппарата по сравнению с теорией ортогональных матриц вращений.

Помимо матриц поворота и кватернионов существуют и другие способы представления вращений, например, гибридные. Однако, данные подходы сравнительно редко упоминаются в литературе и используются на практике, поэтому в данном обзоре они не рассматриваются.

Методы сферической аппроксимации. До использования кватернионов в работах по сферической интерполяции и аппроксимации применялись те или иные способы отображения пространственных сплайн-кривых на поверхность сферы, либо искусственные методы построения сплайнов на ней, что приводило к большим искажениям и трудностям в физической интерпретации результатов. С момента появления первых работ по кватернионной интерполяции появилось большое число методов и алгоритмов, посвященных этому вопросу. Рассмотрим кратко основные из них [61].

Наиболее простой подход заключается в линейной интерполяции дискретной последовательности кватернионов (Lerp — Linear quaternion intERPolation). Интерполянт между двумя единичными кватернионами q , $p \in H_1$ имеет вид

$$\text{Lerp}(q, p, h) = q(1 - h) + ph, \quad h \in [0, 1]. \quad (1.143)$$

Данная зависимость есть прямая в пространстве кватернионов H , следовательно, промежуточные точки (когда $h \in (0, 1)$) не соответствуют

единичным кватернионам и лежат внутри единичной сферы, что требует введения дополнительной нормализации.

Такая нормализация выполняется автоматически в методе сферической линейной интерполяции (Slerp – Spherical Linear intERPolation). При $q, p \in H_1$, $h \in [0, 1]$ Slerp может определяться различным образом:

$$\text{Slerp}(q, p, h) = q(q^*p)^h = (qp^*)^{1-h}p = (pq^*)^h q = p(p^*q)^{1-h}. \quad (1.144)$$

На практике также широко используется представление

$$\text{Slerp}(q, p, h) = \frac{q \sin((1-h)\theta) + p \sin(h\theta)}{\sin \theta}, \quad \cos \theta = q \cdot p. \quad (1.145)$$

Кривая интерполяции совпадает с геодезической линией на поверхности единичной сферы, проходящей через кватернионы q, p . Поэтому Slerp обеспечивает оптимальную интерполяцию двух кватернионов. В случае, когда необходимо интерполировать последовательность из более чем двух кватернионов, Slerp приводит к недифференцируемой кривой, угловая скорость которой в узлах обращается в бесконечность.

Ряд методов построения более гладких интерполяционных кривых на сфере основана на использовании так называемых сплайнов Катмюля–Рома либо сплайнов Кочанека–Бартельса. При этом сферический сплайн определенной степени гладкости определяется путем некой рекуррентной процедуры с использованием Slerp. Так, сглаживающий сплайн Безье для последовательности кватернионов $q_{i-1}, q_i, q_{i+1}, q_{i+2}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} Bz(q_{i-1}, q_i, q_{i+1}, q_{i+2}, h) = \\ \text{Slerp} \{ \text{Slerp} [\text{Slerp}(q_{i-1}, q_i, h), \text{Slerp}(q_i, q_{i+1}, h), h], \\ \text{Slerp} [\text{Slerp}(q_i, q_{i+1}, h), \text{Slerp}(q_{i+1}, q_{i+2}, h), h], h \}, \end{aligned} \quad (1.146)$$

а кубический B -сплайн:

$$\begin{aligned} B_3(q_{i-1}, q_i, q_{i+1}, q_{i+2}, h) = \\ \text{Slerp} \left\{ \text{Slerp} \left[\text{Slerp} \left(q_{i-1}, q_i, \frac{h+2}{3} \right), \text{Slerp} \left(q_i, q_{i+1}, \frac{h+1}{3} \right), \frac{h+1}{2} \right], \right. \\ \left. \text{Slerp} \left[\text{Slerp} \left(q_i, q_{i+1}, \frac{h+1}{3} \right), \text{Slerp} \left(q_{i+1}, q_{i+2}, \frac{h}{3} \right), \frac{h}{2} \right], h \right\}. \end{aligned} \quad (1.147)$$

К данному классу методов относится и известный алгоритм Squad (Spherical and QUADrangle) для последовательности кватернионов q_{i-1}, q_i, q_{i+1} :

$$\begin{aligned} \text{Squad}(q_i, q_{i+1}, s_i, s_{i+1}, h) = \\ = \text{Slerp}(\text{Slerp}(q_i, q_{i+1}, h), \text{Slerp}(s_i, s_{i+1}, h), 2h(1-h)), \\ s_i = q_i \exp \left(-\frac{\log(q_i^{-1}q_{i+1}) + \log(q_i^{-1}q_{i-1})}{4} \right). \end{aligned} \quad (1.148)$$

Кроме обеспечения необходимой степени гладкости рассматривались другие критерии оптимальности интерполирующей кривой: минимизация кривизны, угловых ускорений и др. В частности, глубокое теоретическое

обоснование получил эффективный метод Spring [61]. Однако, как правило данные подходы достаточно сложны и громоздки в аналитическом плане. Рассмотрим один из наиболее простых и универсальных методов построения кватернионных кривых на единичной сфере — метод накопленных базисов [62, 63].

1.12. Метод накопленных базисов

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ функция $f(t)$ множеством способов может быть аппроксимирована дискретным набором координатных функций $\{\varphi_i\}$:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{i=0}^N p_i \varphi_i(t), \quad (1.149)$$

где веса $\{p_i\}$ определяются значениями $f_i \equiv f(t_i)$ на множестве узлов $\{t_i\}$. В качестве функций $\{\varphi_i\}$ обычно выбираются полиномы, сплайны и др.

Рассмотрим следующую схему, позволяющую на основе (1.149) легко конструировать единичные кватернионные кривые $q(t)$, аппроксимирующие заданную дискретную последовательность кватернионов $\{q_i\}$. Для этого представим (1.149) в виде

$$\tilde{f}(t) = p_0 \tilde{\varphi}_0(t) + \sum_{i=1}^N \Delta p_i \tilde{\varphi}_i(t), \quad (1.150)$$

где

$$\Delta p_i = p_i - p_{i-1}, \quad \tilde{\varphi}_i(t) = \sum_{j=i}^N \varphi_j(t).$$

Далее заменим в последнем выражении соответственно $\tilde{f}(t)$ на $q(t)$, p_0 на q_0 , Δp_i на $\omega_i = \log(q_{i-1}^{-1} q_i)$, а сумму векторов на произведение кватернионов. В итоге получим

$$q(t) = \exp(\tilde{\varphi}_0(t) \log q_0) \prod_{i=1}^N \exp(\tilde{\varphi}_i(t) \log(q_{i-1}^{-1} q_i)) = q_0^{\tilde{\varphi}_0(t)} \prod_{i=1}^N (q_{i-1}^{-1} q_i)^{\tilde{\varphi}_i(t)}. \quad (1.151)$$

Новый базис $\{\tilde{\varphi}_i\}$ называется *накопленным* или “*кумулянтным*” (от *англ.* *cumulative*). Данный базис позволяет строить в $SO(3)$ различные кватернионные кривые, свойства которых определяются выбором исходных координатных функций $\{\varphi_i\}$.

В основном рассматриваются следующие типы накопленных базисов:

— базис Безье на основе полиномов Бернштейна

$$Br_{i,N}(t) = \binom{N}{i} (1-t)^{N-i} t^i, \quad (1.152)$$

- базис Эрмита, строящийся с помощью базиса Безье;
- базисы на основе B -сплайнов Шенберга n -го порядка

$$B_n(t) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} (t-j)_+^n, \quad (1.153)$$

где

$$t_+^r = \begin{cases} t^r, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Одно из преимуществ накопленного базиса заключается в легкости дифференцирования выражения (1.151):

$$\frac{d}{dt} q(t) = q(t) \sum_{i=0}^N \omega_i \frac{d}{dt} \tilde{\varphi}_i(t), \quad (1.154)$$

где $\omega_0 = \log q_0$. Аналогичным образом последовательно находятся производные высших порядков.

Легко проверить, что накопленный базис является интерполяционным, т. е.

$$q(t_j) = q_j, \quad (1.155)$$

лишь в случае, когда

$$\tilde{\varphi}_i(t_j) = \begin{cases} 1, & t_j \geq t_i, \\ 0, & t_j \leq t_{i-1}. \end{cases} \quad (1.156)$$

Однако уже для кубических B -сплайнов

$$B_3(t) = \frac{1}{6} \left[(t+2)_+^3 - 4(t+1)_+^3 + 6t_+^3 - 4(t-1)_+^3 + (t-2)_+^3 \right]$$

вместо (1.156) имеем

$$\tilde{\varphi}_i(t_j) = \begin{cases} 1, & t_j \geq t_{i+1}, \\ 0, & t_j \leq t_{i-2}. \end{cases} \quad (1.157)$$

В данном случае накопленный базис является не интерполяционным, а сглаживающим. Чтобы получить интерполяционную кривую, вместо весов $\{q_i\}$ в (1.151) следует взять неопределенные коэффициенты $\{r_i\}$. Условие интерполяции (1.155) приводит к системе нелинейных уравнений для их нахождения:

$$r_{j-1} (r_{j-1}^{-1} r_j)^{5/6} (r_j^{-1} r_{j+1})^{1/6} = q_j, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (1.158)$$

которая может быть решена лишь численно с помощью итерационных процедур.

Среди недостатков накопленного базиса отмечается тот факт, что форма кватернионной кривой зависит от выбранного направления обхода. Вместе с тем, данный способ обладает существенными преимуществами перед другими алгоритмами, особенно в случаях, когда узлы расположены на единичной сфере не слишком далеко друг от друга, а функции исходного базиса $\{\varphi_i\}$ финитны и обладают достаточно малым носителем.

Далее рассмотрим новые типы накопленных базисов, в том числе на основе АФ.

Накопленный интерполяционный базис на основе АФ $\text{up}(t)$. Пусть узлы интерполяции $\{t_i\}$ расположены равномерно с шагом $t_{i+1} - t_i = h$. Положим в (1.151)

$$\tilde{\varphi}_i(t) = \sum_{j=i}^N \text{up} \left(\frac{t}{h} - j \right). \quad (1.159)$$

В силу выполнения условия (1.156) данный базис является интерполяционным. Кроме того, в силу свойств АФ $\text{up}(t)$ разложение (1.151) бесконечно дифференцируемо, а выражение для производной кватернионной кривой (1.154) принимает вид

$$\frac{d}{dt} q(t) = \frac{2}{h} q(t) \sum_{i=0}^N \omega_i \text{up} \left(\frac{2t}{h} - i + 1 \right). \quad (1.160)$$

Накопленный сглаживающий базис на основе АФ $\text{fup}_2(t)$. Запишем разложение (1.151) в виде

$$q(t) = q_{-1}^{\tilde{\varphi}_{-1}(t)} \prod_{i=0}^{N+1} \left(q_{i-1}^{-1} q_i \right)^{\tilde{\varphi}_i(t)}, \quad (1.161)$$

где накопленный базис

$$\tilde{\varphi}_i(t) = \sum_{j=i}^{N+1} \text{fup}_2 \left(\frac{t}{h} - j \right), \quad i = \overline{-1, N+1}. \quad (1.162)$$

Производная выражения (1.161) также легко определяется с помощью (1.154) и функционально-дифференциального уравнения для АФ $\text{fup}_2(t)$.

Поскольку $\text{supp fup}_2(t) = (-2, 2)$, выполняется условие (1.157) и базис (1.162) является сглаживающим. Для получения интерполяционной кривой вместо (1.161) следует взять выражение

$$q(t) = r_{-1}^{\tilde{\varphi}_{-1}(t)} \prod_{i=0}^{N+1} \left(r_{i-1}^{-1} r_i \right)^{\tilde{\varphi}_i(t)}, \quad (1.163)$$

коэффициенты которого находятся из системы уравнений

$$r_{j-1} (r_{j-1}^{-1} r_j)^{13/18} \left(r_j^{-1} r_{j+1} \right)^{5/36} = q_j, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (1.164)$$

решаемой аналогично (1.158).

Кроме функций $\text{up}(t)$, $\text{fup}_2(t)$, подобным образом возможно использование и других АФ. Можно заметить, что построение интерполяционного накопленного базиса не обязательно осуществлять на основе исходного набора координатных функций $\{\varphi_i\}$. Достаточно лишь подобрать функции $\{\tilde{\varphi}_i\}$ такие, чтобы удовлетворялось условие (1.156). В этой связи удобным может оказаться использование АФ $h_a(t)$, постоянной на интервале

$|t| \leq \frac{a-2}{a(a-1)}$ при $a > 2$, а также функции $\int_{-1}^t \text{up}(x) dx$ и ей аналогичных на базе других АФ.

Накопленный интерполяционный базис на основе ряда Уиттекера–Котельникова–Шеннона. Выберем в качестве исходного базиса $\{\varphi_i\}$ сдвиги–сжатия функции

$$\text{sinc}(t) \equiv \frac{\sin t}{t}. \quad (1.165)$$

Так как в данном случае выполняется условие (1.156), приближение с помощью данного базиса УКШ обеспечивает интерполяцию кватернионной последовательности. Разложение (1.151) имеет вид

$$q(t) = q_0^{\tilde{\varphi}_0(t)} \prod_{i=1}^N (q_{i-1}^{-1} q_i)^{\tilde{\varphi}_i(t)}, \quad (1.166)$$

где

$$\tilde{\varphi}_i(t) = \sum_{j=i}^N \text{sinc} \left[\frac{\pi}{h} (t - jh) \right], \quad i = \overline{0, N}. \quad (1.167)$$

Недостатком данного накопленного базиса является то, что функция (1.165) обладает сравнительно высоким уровнем боковых лепестков (около -13 дБ), что может привести к сильным осцилляциям, особенно вблизи краев интервала аппроксимации. Дополнительная погрешность может быть обусловлена и тем, что ряд УКШ является интерполяционным в пространстве $\mathbb{R}$ лишь для функций с финитным спектром, а в остальных случаях возникает ошибка аппроксимации в интервалах между узлами интерполяции. Однако данный факт может и не играть существенной роли при интерполяции в $\text{SO}(3)$.

Накопленный интерполяционный базис на основе обобщенного ряда УКШ. Вместо функций (1.165) в обобщенном ряде УКШ используются преобразования Фурье АФ $h_a(x)$:

$$\hat{h}_a(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{t}{a^k} \right), \quad (1.168)$$

обладающие значительно меньшим уровнем боковых лепестков (от -23 дБ при $a = 2$ до -13 дБ при $a \rightarrow \infty$). Функции накопленного базиса в представлении (1.166) имеют вид

$$\tilde{\varphi}_i(t) = \sum_{j=i}^N \prod_{k=1}^{\infty} \text{sinc} \left[\frac{\pi}{a^{k-1}h} (t - jh) \right], \quad i = \overline{0, N}. \quad (1.169)$$

В выражении (1.169) без существенной погрешности достаточно взять конечное (порядка 5–10) число членов произведения. Данный базис удобен тем, что позволяет управлять поведением кватернионной кривой с помощью параметра a . При дифференцировании выражения (1.169) следует учесть,

что

$$\frac{d}{dt} \hat{h}_a(t) = \hat{h}_a(t) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{ctg}(ta^{-k})}{a^k} - \frac{1}{t} \right).$$

Целесообразно сравнить предложенные накопленные базисы между собой, а также с обычными базисами. Существует ряд критериев оценки качества кватернионных кривых. Среди них выделим гладкость кривой, поведение угловой скорости и обеспечение минимальной кривизны. Первый критерий очевиден: все новые предложенные накопленные базисы обеспечивают бесконечную дифференцируемость кватернионной кривой. Выражение для угловой скорости получается из соотношения

$$q'(t) = q(t)\omega(t). \quad (1.170)$$

С учетом (1.154) для модуля угловой скорости имеем

$$\|\omega(t)\| = \left\| \sum_{i=0}^N \omega_i \frac{d}{dt} \tilde{\varphi}_i(t) \right\|. \quad (1.171)$$

Рассмотрим понятие кривизны в $SO(3)$. Локальная кривизна кватернионной кривой $q(t)$ в $SO(3)$ определяется как

$$\kappa(q, t) = \|q''(t) - (q''(t) \cdot q(t)) q(t)\|, \quad (1.172)$$

где $(\cdot)$ — скалярное произведение кватернионов. Общая кривизна на интервале аппроксимации (a, b) имеет вид

$$K(q) = \int_a^b \|\kappa(q, t)\|^2 dt. \quad (1.173)$$

При численной реализации допустимо использование конечно-разностной аппроксимации второй производной в (1.172) и приближенное вычисление интеграла (1.173).

В качестве примера рассмотрим интерполяцию последовательности единичных кватернионов $\{q_i\}$, $i = \overline{0, 5}$, на интервале $(0, 1)$ (табл. 1.10), с помощью рассмотренных выше интерполяционных накопленных базисов. Весь интервал разбит на сетку из 120 узлов.

Таблица 1.10. Компоненты кватернионов ориентации

s	0	1	2	3
$q_0^{(s)}$	-0,1	-0,6	0,3	0,735
$q_1^{(s)}$	-0,2	-0,4	-0,1	0,889
$q_2^{(s)}$	-0,1	-0,15	0,2	0,963
$q_3^{(s)}$	-0,3	-0,12	0,2	0,925
$q_4^{(s)}$	-0,5	-0,1	-0,1	0,854
$q_5^{(s)}$	-0,1	-0,5	0,4	0,762

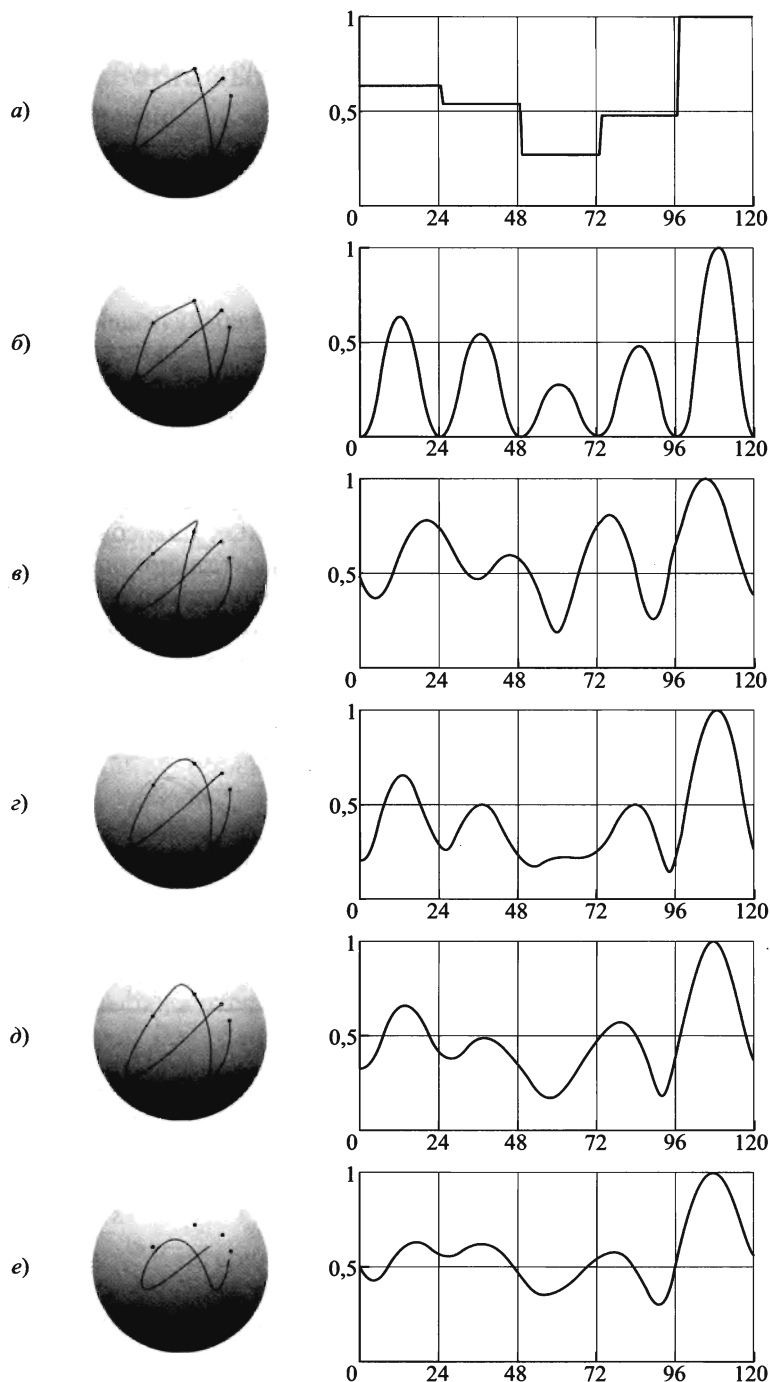


Рис. 1.17. Слева: проекции интерполяционных кривых на базе B_1 -сплайнов (а), функций up (б), sinc (в), $\hat{h}_2$ (г), $\hat{h}_3$ (д), fur_2 (е) (сглаживающая кривая); справа: графики угловых скоростей

На рис. 1.17 показаны проекции кватернионных кривых на единичную сферу в $\mathbb{R}^3$ и графики соответствующих угловых скоростей. Уравнения кривых в параметрической форме имеют вид

$$x_i(t) = \frac{q^{(i)}(t)}{\sqrt{(q^{(1)}(t))^2 + (q^{(2)}(t))^2 + (q^{(3)}(t))^2}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

В табл. 1.11 приведены значения кривизны, полученные по формуле (1.173).

Таблица 1.11. Кривизна интерполяционных и сглаживающей (fur_2) кривых

Базисная функция	B_1	up	sinc	$\hat{h}_2$	$\hat{h}_3$	fur_2
Кривизна	—	45,17	37,48	29,94	29,58	13,65

Анализ данных рис. 1.17 и табл. 1.11 позволяет сделать вывод об эффективности использования новых накопленных базисов на основе АФ. В частности, оказалось возможным экспериментально определить оптимальный параметр функции h_a ($a \approx 3$), минимизирующий кривизну интерполанта. Кривые на сфере (рис. 1.17, a и b) выглядят идентичными, однако при этом не учитывается вклад “вращательной” компоненты кватерниона q_0 . Различие интерполяции с помощью накопленных базисов на основе функции up и B_1 -сплайнов показано на рис. 1.18.

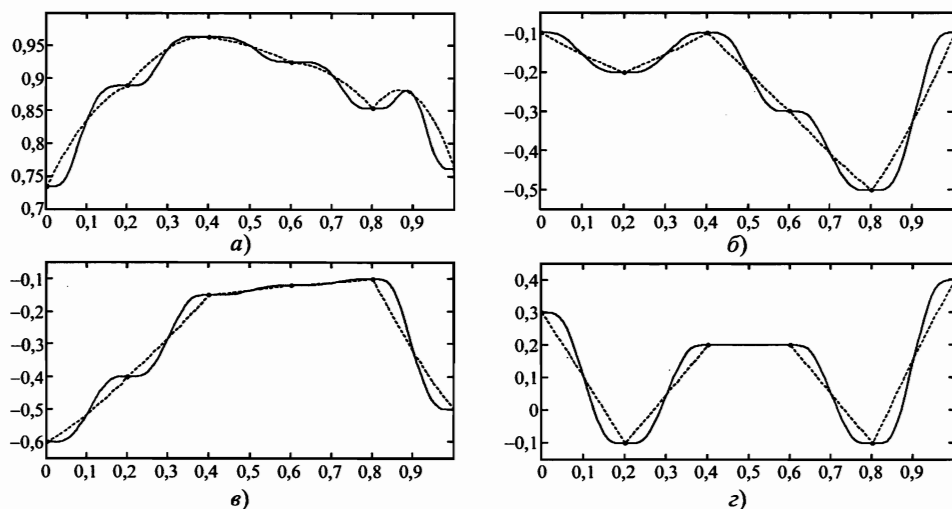


Рис. 1.18. Интерполяция компонентов кватерниона с помощью накопленных базисов на основе АФ up (сплошная линия) и B_1 -сплайнов (пунктирная линия)

Что касается сглаживающей кривой на базе АФ fur_2 (рис. 1.17, e), то она практически совпадает с кривой, получаемой с использованием кубических B -сплайнов или Безье-сплайнов (1.154), однако, в отличие от последних обладает бесконечной дифференцируемостью.

1.13. Обработка выходной телеметрической информации космического летательного аппарата (КЛА)

Пусть используемая телеметрическая информация представляет собой значения в дискретные моменты времени t_i кватерниона ориентации и вектора угловой скорости объекта (например, КЛА). В режиме сброса информации указанные значения получаются с шагом h в течение интервала времени T , поэтому возникает задача восстановления фактического вращательного движения объекта по значениям кватерниона, задающего его ориентацию относительно инерциальной системы координат. Пусть на каком-либо временном интервале моменты со значениями такого кватерниона расположены достаточно часто. Эти значения должны быть сглажены кватернионной функцией времени, имеющей непрерывную вторую производную. Дифференцированием этой функции находятся угловая скорость ω и угловое ускорение $d\omega/dt$, в результате чего получается аппроксимация вращательного движения объекта.

В качестве инерциальной системы координат, относительно которой задается ориентация объекта, используется правая система $EY_1Y_2Y_3$, связанная с земным экватором. Точка E — центр Земли, ось EY_1 направлена в точку весеннего равноденствия эпохи 2000,0, ось EY_3 направлена в соответствующий северный полюс мира.

Под ориентацией объекта понимается ориентация жестко связанной с его корпусом правой системы координат $Oy_1y_2y_3$. Точка O является центром масс объекта, а ось Oy_1 параллельна его продольной оси. Положение системы $Oy_1y_2y_3$ относительно системы $EY_1Y_2Y_3$ задается с помощью кватерниона $q = (q^{(0)}, q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)})$, имеющего единичную норму: $\|q\| = 1$.

Матрицу перехода от системы $Oy_1y_2y_3$ к системе $EY_1Y_2Y_3$ обозначим $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$, где a_{ij} — косинус угла между осями EY_i и Oy_j . Элементы этой матрицы выражаются через компоненты кватерниона q с помощью известных формул. Далее компоненты векторов и координаты точек указываются в системе $Oy_1y_2y_3$.

Телеметрическая информация собирается на временном интервале $T = (a, b)$ и содержит последовательность моментов времени и кватернионов

$$t_i, \quad q_i = (q_i^{(0)}, q_i^{(1)}, q_i^{(2)}, q_i^{(3)}), \quad (i = \overline{0, N}). \quad (1.175)$$

Здесь $t_0 < t_1 < \dots < t_N$, q_i — значение кватерниона q , вычисленное в момент времени t_i . Кватернион, задающий ориентацию объекта, определен с точностью до знака. Знаки q_i и момент t_0 в (1.175) выбираются из условия

$$q_0^{(0)} > 0, \quad \sum_{s=0}^3 q_{i-1}^{(s)} q_i^{(s)} > 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (1.176)$$

Один из способов реализации гладкого приближения основан на аппроксимации компонентов кватерниона $q_i^{(s)}$ ($s = 0, 1, 2, 3$) по отдельности

традиционными методами сплайн-аппроксимации с последующей нормализацией результирующего кватерниона к единичной норме. Так, в [64, 65] при обработке данных для определения компонент микроускорений сегмента Международной космической станции (МКС) использованы кубические сплайны, обладающие непрерывными первой и второй производными.

Недостатки данного подхода следующие.

1. Для определения коэффициентов разложения необходимо решить 4 системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для каждого компонента кватернионной функции при сферической интерполяции. Процесс еще более усложняется в реальном масштабе времени, когда на каждом шаге требуется решать новую СЛАУ. Если N — количество узлов интерполяции, то для построения интерполяционного сплайна порядка $2n$ количество арифметических операций пропорционально величине nN^2 .

2. Нелокальность аппроксимации, т.е. зависимость поведения интерполирующей функции в произвольной точке от возмущений значений аппроксимируемой функции в достаточно удаленных узлах, в том числе и на концах рассматриваемого интервала.

3. Конечная дифференцируемость. Для увеличения гладкости аппроксимации требуются сплайны высоких степеней, что существенно усложняет численную реализацию.

4. Использование сплайнов различных порядков для аппроксимации функции и ее производных (неуниверсальность аппроксимации).

Обойти первые две сложности можно, используя явные (локальные) методы аппроксимации с помощью B -сплайнов Шенберга. При этом коэффициенты каждого B -сплайна вычисляются по явным формулам через значения приближаемой функции лишь в определенной степени близких узлах.

Однако полностью исключить указанные выше недостатки позволяет использование финитных бесконечно дифференцируемых АФ. Исследуем возможности атомарной квазиинтерполяции применительно к аппроксимации кватернионной функции на сфере.

Требуется интерполировать функцию $f(t) \in W_p^r(a, b)$ на равномерной сетке

$$\Delta_N: t_i = ih, \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad i = \overline{0, N}. \quad (1.177)$$

В пространстве $W_p^r(a, b)$ выберем базис сдвигов-сжатий некоторой финитной функции $F_r(t)$ с носителем $\text{supp } F_r(t) = (-M, M)$, где $M = [(r+1)/2]$, а $[\cdot]$ — целая часть числа. В качестве $F_r(t)$, в частности, можно выбрать сплайны Шенберга $B_r(t) \in C^{r-1}$ или АФ $\text{fup}_{r-1}(t) \in C^\infty$.

Интерполяция r -го порядка функции f на сетке Δ_N осуществляется с помощью разложения

$$\Phi_{N,r}(f; t) = \sum_{j=-N-M}^{N+M} c_j \varphi_{r,j}(t). \quad (1.178)$$

Тогда

$$\Phi_{N,r}(f; t_i) = f(t_i). \quad (1.179)$$

Здесь

$$\varphi_{r,j}(t) \equiv F_r \left(\frac{t}{h} - j + \frac{1 + (-1)^r}{4} h \right),$$

а носитель $\varphi_{r,j}$ определяется неравенством $|t - t_j| \leq (r+1)h/2$.

Считаем, что базисные функции $\varphi_{r,j}$ образуют разбиение единицы:

$$\sum_k \varphi_{r,j}(t) \equiv 1. \quad (1.180)$$

Точное выражение для коэффициентов интерполянта $\Phi_{N,r}$ имеет вид

$$c_j = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\sum_{m=1}^M a_m \Delta^{2m} \right)^s f_j, \quad j = \overline{0, N}, \quad (1.181)$$

где Δ^{2m} — центральная разделенная разность порядка $2m$:

$$\Delta^{2m} c_i = \sum_{l=-m}^m \binom{m}{l} (-1)^l c_{i+l}.$$

Из (1.181) следует необходимость определения f за пределами интервала (a, b) . Это можно осуществить, например, с помощью численной экстраполяции.

Далее обозначим через $\Phi_{N,r,k}(f; t)$ квазиинтерполянт, соответствующий коэффициентам, определяемым конечным числом членов ряда в (1.181):

$$c_{j,k} = \sum_{s=0}^k (-1)^s \left(\sum_{m=1}^M a_m \Delta^{2m} \right)^s f_j, \quad j = \overline{0, N}. \quad (1.182)$$

Выражение (1.182) можно оптимизировать так, чтобы квазиинтерполянт $\Phi_{N,r,k}$ был точен на многочленах степени r :

$$c_{j,k} = \sum_{s=0}^M (-1)^s \sum_{\{p_m\}} \left(\prod_{l=1}^M a_l^{p_l} \right) \Delta^{(2 \sum_{n=1}^M n p_n)} f_j, \quad (1.183)$$

где $\sum_{m=1}^M p_m = s$, $\sum_{m=1}^M m p_m \leq M$.

Норма результирующего кватерниона, который образован сплайнами либо АФ, сглаживающими компоненты кватернионов (1.175), уже не равна единице, но будет мало отличаться от нее. Полученная кватернионная функция в итоге будет служить аппроксимацией вращения системы $Oy_1y_2y_3$ относительно системы $EY_1Y_2Y_3$ на интервале $t_0 \leq t \leq t_N$. Проекции абсолютной угловой скорости ω системы $Oy_1y_2y_3$ на ее собственные оси находятся с помощью производной этой функции и кинематических

уравнений

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2 \left(q^{(0)} \frac{dq^{(1)}}{dt} - q^{(1)} \frac{dq^{(0)}}{dt} + q^{(3)} \frac{dq^{(2)}}{dt} - q^{(2)} \frac{dq^{(3)}}{dt} \right), \\ \omega_2 &= 2 \left(q^{(0)} \frac{dq^{(2)}}{dt} - q^{(2)} \frac{dq^{(0)}}{dt} + q^{(1)} \frac{dq^{(3)}}{dt} - q^{(3)} \frac{dq^{(1)}}{dt} \right), \\ \omega_3 &= 2 \left(q^{(0)} \frac{dq^{(3)}}{dt} - q^{(3)} \frac{dq^{(0)}}{dt} + q^{(2)} \frac{dq^{(1)}}{dt} - q^{(1)} \frac{dq^{(2)}}{dt} \right); \end{aligned} \quad (1.184)$$

компоненты угловых ускорений имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dt} &= 2 \left(q^{(0)} \frac{d^2 q^{(1)}}{dt^2} - q^{(1)} \frac{d^2 q^{(0)}}{dt^2} + q^{(3)} \frac{d^2 q^{(2)}}{dt^2} - q^{(2)} \frac{d^2 q^{(3)}}{dt^2} \right), \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= 2 \left(q^{(0)} \frac{d^2 q^{(2)}}{dt^2} - q^{(2)} \frac{d^2 q^{(0)}}{dt^2} + q^{(1)} \frac{d^2 q^{(3)}}{dt^2} - q^{(3)} \frac{d^2 q^{(1)}}{dt^2} \right), \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= 2 \left(q^{(0)} \frac{d^2 q^{(3)}}{dt^2} - q^{(3)} \frac{d^2 q^{(0)}}{dt^2} + q^{(2)} \frac{d^2 q^{(1)}}{dt^2} - q^{(1)} \frac{d^2 q^{(2)}}{dt^2} \right). \end{aligned} \quad (1.185)$$

В качестве модельной рассмотрим задачу определения квазистатистических компонент угловых скоростей и ускорений российского сегмента международной космической станции (МКС) весной-летом 2001 г. по данным [64, 65]. Полет МКС после пристыковки к ней служебного модуля практически неизменно проходил в ориентированном состоянии. В основном поддерживалась неизменная ориентация станции либо в орбитальной системе координат, либо в абсолютном пространстве. Система управления ориентацией работала непрерывно, в БЦВМ имела полную информация о вращательном движении станции. Несколько раз в сутки часть этой информации передавалась на Землю. Используемая телеметрическая информация представляла собой значения в дискретные моменты времени кватерниона ориентации, вектора угловой скорости станции, а также моменты включения и продолжительность работы реактивных двигателей системы управления ориентацией. При пролете станции вблизи одного из наземных приемных пунктов указанные значения получались с шагом около 1 с в течение не более 10 мин (режим непосредственного сброса информации). Измерительная информация также записывалась в течение продолжительного времени (обычно около витка) в специальное запоминающее устройство и потом в удобной ситуации сбрасывалась на Землю. При этом шаг по времени перечисленных выше величин составлял 1,5 – 2 мин. Значения кватерниона являлись наиболее точными данными и были достаточны, в частности, для расчета квазистатистической составляющей микроускорений служебного модуля.

На рис. 1.19 маркерами обозначены значения компонент кватерниона ориентации (1.175), близкие к данным [64]. Постоянный шаг между по-

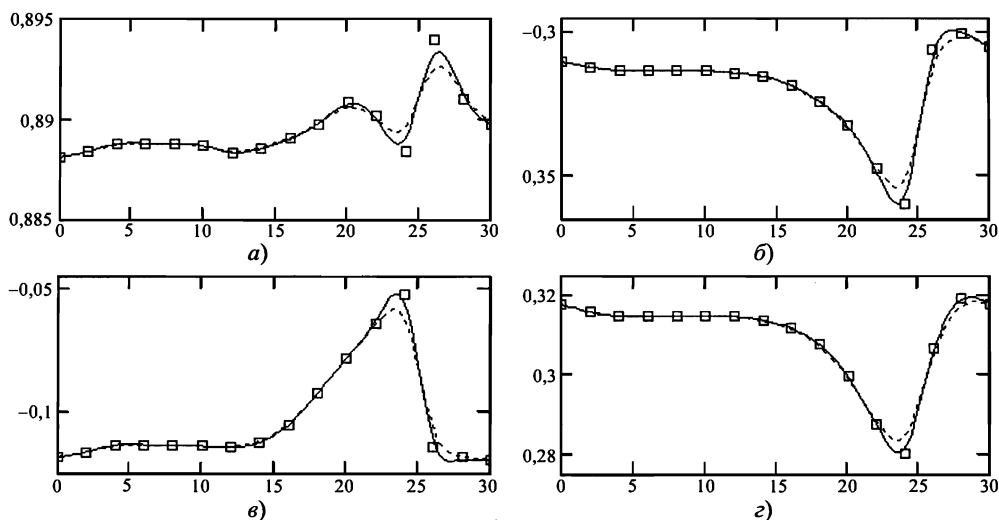


Рис. 1.19. Измеренные значения компонент кватерниона $q^{(0)}$ (а), $q^{(1)}$ (б), $q^{(2)}$ (в), $q^{(3)}$ (г) (маркеры) и квазиинтерполяция 0-го (пунктир), 1-го порядков (сплошная линия)

следовательными измерениями $h = 2$ мин, общий интервал измерений $T = 30$ мин. Квазиинтерполяция каждой компоненты кватерниона выполнялась с помощью базиса сдвигов сжатий АФ $\text{fup}_2(t)$:

$$\Phi_{N,3,k}(q_s; t) = \sum_{j=-1}^{N+1} c_{j,k}^{(s)} \text{fup}_2 \left(\frac{t}{h} - j \right), \quad (s = 0, 1, 2, 3).$$

На рис. 1.19 пунктирными линиями обозначена квазиинтерполяция нулевого порядка:

$$c_{j,0} = f_j,$$

а сплошной линией — квазиинтерполяция 1-го порядка:

$$c_{j,1} = f_j - \frac{5}{36} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) = \frac{23}{18} f_j - \frac{5}{36} (f_{j-1} + f_{j+1}).$$

Для удовлетворения результирующего кватерниона условию нормирования применялся следующий подход. Интерполяция применялась только к компонентам кватерниона $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$, а компонента $q^{(0)}$ вычислялась из соотношения $q^{(0)} = \sqrt{1 - (q^{(1)})^2 - (q^{(2)})^2 - (q^{(3)})^2}$.

На рис. 1.20 приведены соответствующие графики угловых скоростей и ускорений.

Для сравнения, на рис. 1.21 показаны аналогичные зависимости, полученные с использованием кубических В-сплайнов. При этом реализовался итерационный алгоритм квазиинтерполяции 1-го порядка. Коэффициенты квазиинтерполяции имеют вид

$$c_{j,k} = \sum_{m=0}^k \left(-\frac{1}{6} \right)^m \Delta^{2m} f_j.$$

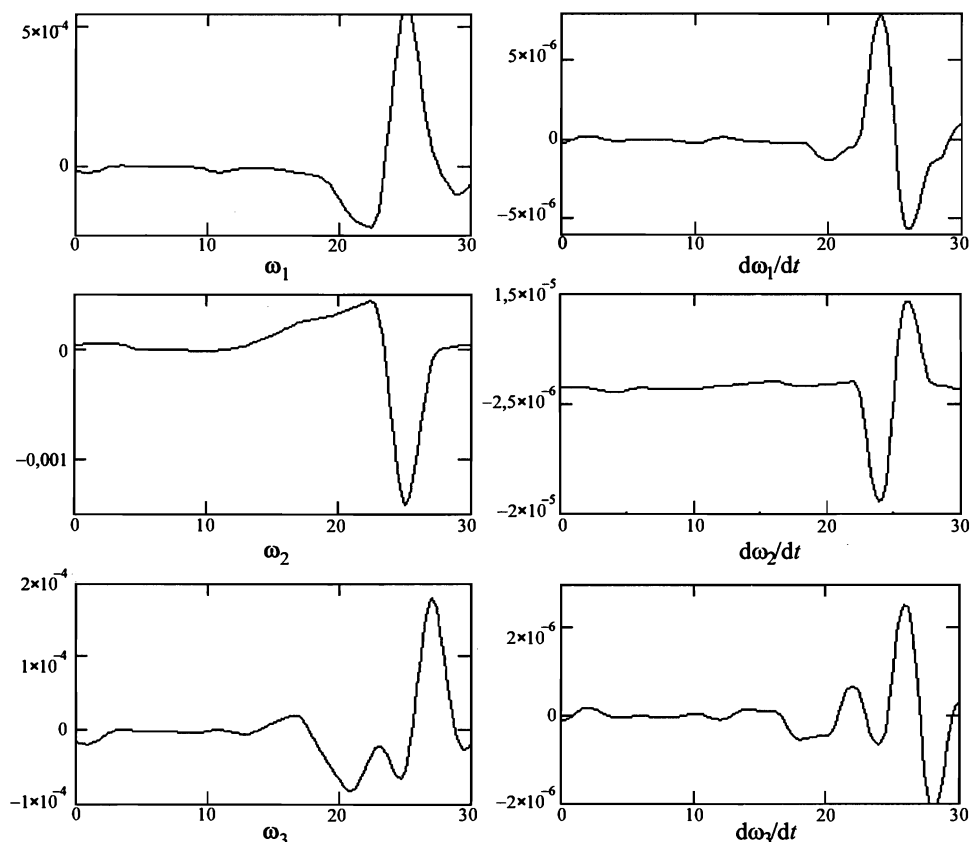


Рис. 1.20. Рассчитанные значения компонент угловых скоростей (с^{-1}) и ускорений (с^{-2}) (квазиинтерполяция базисом АФ $\text{fur}_2(t)$)

Основное отличие полученных результатов заключается в аппроксимации второй производной, которая в случае сплайнов представляется ломаными, а в случае АФ $\text{fur}_2(t)$ принадлежит классу C^∞ . Кроме того, для вычисления угловых скоростей и ускорений необходимо было прибегать к сплайнам 1-го и 2-го порядка, в то время, как производные АФ $\text{fur}_2(t)$ выражаются через саму функцию.

В целом алгоритм квазиинтерполяции (как атомарными функциями, так и В-сплайнами) позволяет реализовать эффективный процесс приближения и сглаживания экспериментальной телеметрической информации с высокой точностью и быстродействием. Среди преимуществ нового подхода следует отметить следующие.

1. Применение явного алгоритма атомарной квазиинтерполяции позволяет существенно повысить быстродействие сферической аппроксимации кватерниона ориентации, в частности, реализовать эффективное восстановление значений кватерниона в реальном масштабе времени. При этом нет необходимости решения СЛАУ на каждом временном шаге.

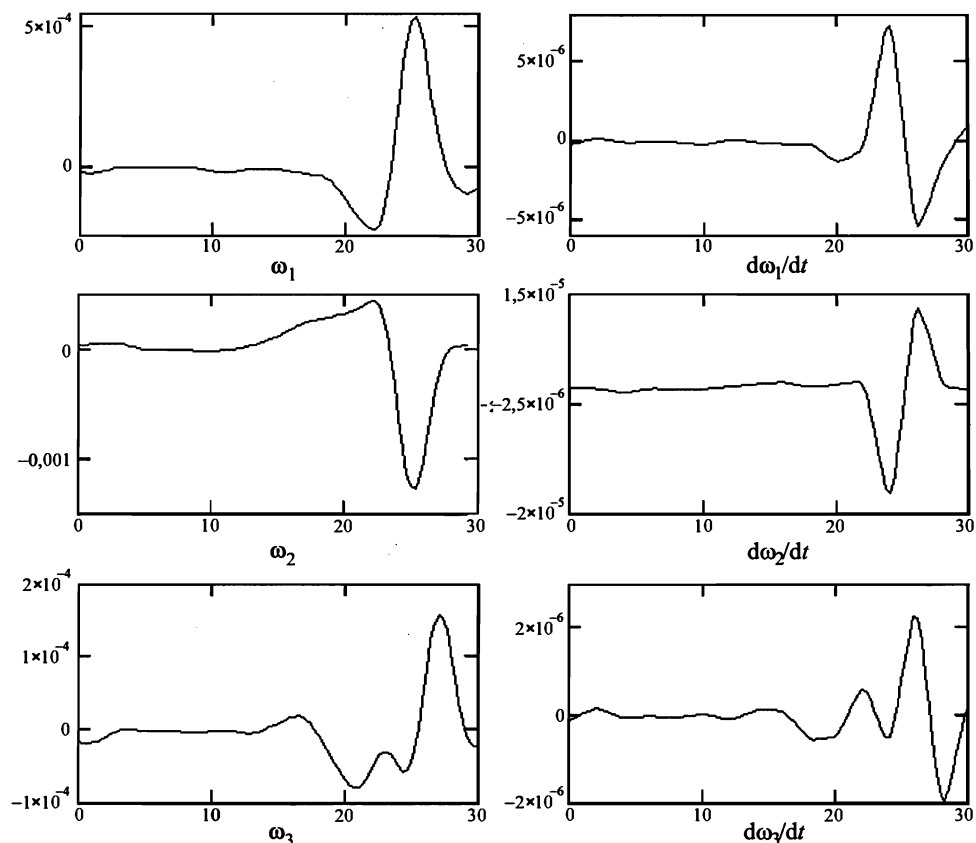


Рис. 1.21. Рассчитанные значения компонент угловых скоростей (с^{-1}) и ускорений (с^{-2}) (квазиинтерполяция базисом кубических B -сплайнов)

2. Точность аппроксимации компонент кватерниона ориентации зависит от порядка квазиинтерполяции АФ $\text{fur}_n(t)$ и достигает величины $O(h^{n+1})$, где h — шаг дискретизации по времени; точность приближения компонент угловой скорости ω и углового ускорения $d\omega/dt$ достигает величин $O(h^n)$ и $O(h^{n-1})$, соответственно.

3. За счет локальности процесса квазиинтерполяции возникновение единичных случайных сбоев в последовательности данных не влечет за собой искажений значений результирующего кватерниона в целом на всем интервале аппроксимации.

4. Выбор порядка квазиинтерполяции позволяет управлять степенью сглаживания полученных данных из условия подавления широкополосных помех.

В заключение рассмотрим применение накопленных базисов для интерполяции телеметрических данных. На рис. 1.22 приведены результаты интерполяции на основе обычного и обобщенного базисов УКШ. Очевидно, что в первом случае качество приближения неудовлетворительно.

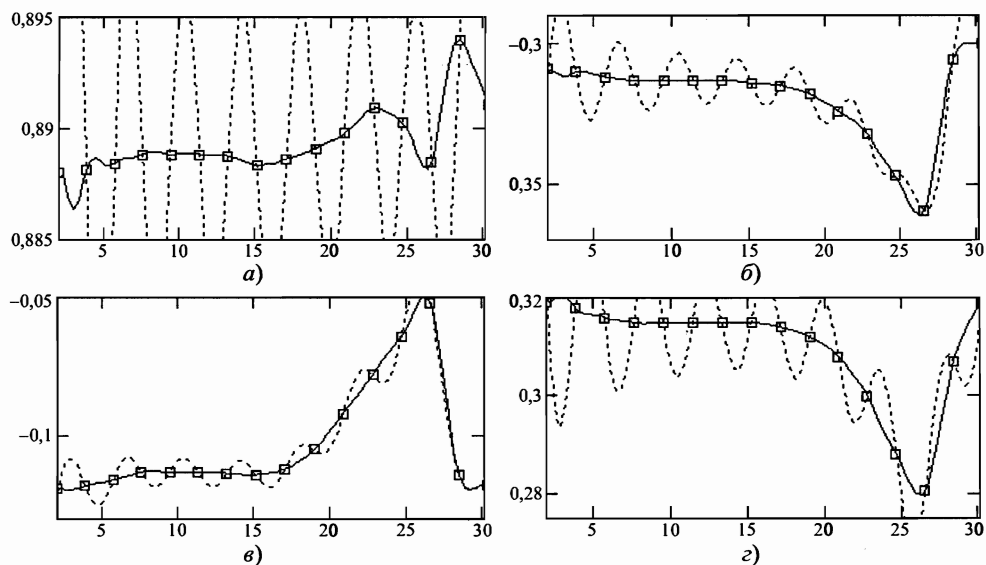


Рис. 1.22. Интерполяция компонент кватерниона $q^{(0)}$ (а), $q^{(1)}$ (б), $q^{(2)}$ (в), $q^{(3)}$ (г) с помощью накопленного базиса на основе функций $\hat{h}_2$ (сплошная линия) и sinc (пунктирная линия)

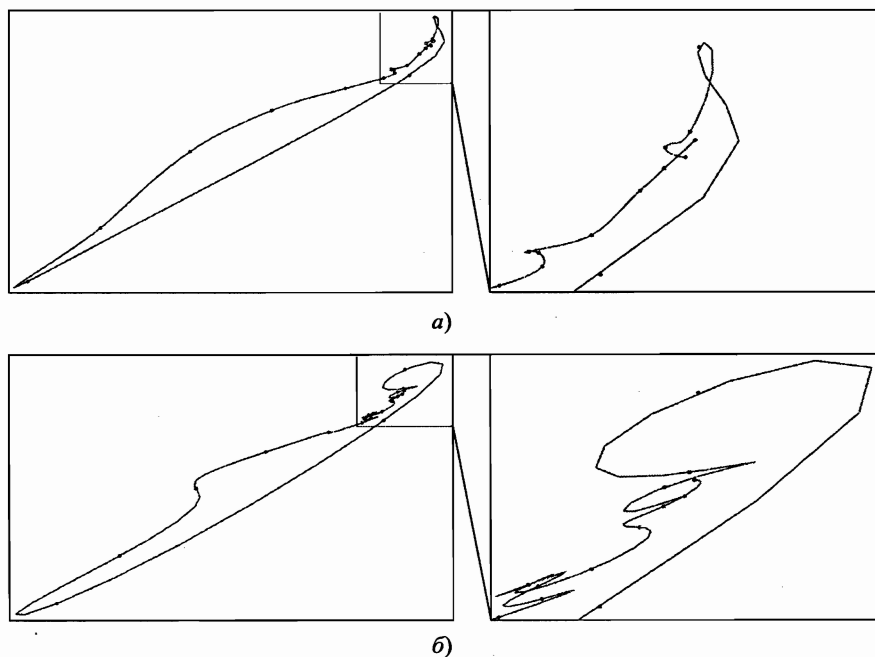


Рис. 1.23. Проекция интерполяционных кривых на сферу в $\mathbb{R}^3$, построенных с помощью накопленного базиса на основе функций $\hat{h}_2$ (а) и sinc (б)

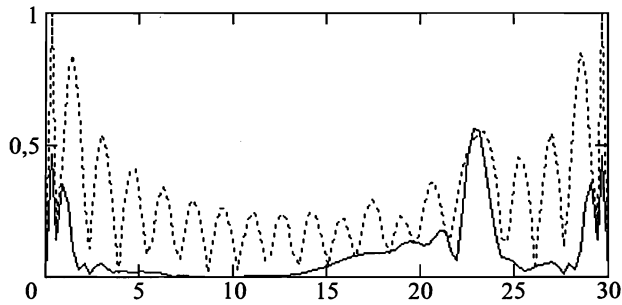


Рис. 1.24. Относительная угловая скорость при интерполяции накопленным базисом на основе функций $\hat{h}_2$ (сплошная линия) и sinc (пунктирная линия)

Что касается функций $\hat{h}_a$, то в рассматриваемом примере наилучшее качество аппроксимации достигается при значениях параметра $a \approx 2$.

На рис. 1.23 приведены проекции соответствующих кватернионных кривых на единичную сферу в $\mathbb{R}^3$, а рис. 1.24 иллюстрирует поведение угловых скоростей при обоих видах аппроксимации.

Заключение

Рассмотренные выше результаты не охватывают всего круга проблем, относящихся к теореме УКШ и ее применениям в современных методах цифровой обработки сигналов различной физической природы. Тем не менее, с нашей точки зрения, многие из этих вопросов изложены, например, в [46, 57]. В данной главе основное внимание было уделено использованию новых математических средств теории аппроксимации, основанных на активно развивающихся в последние годы теориях атомарных и R-функций [24, 32]. Вопросы интерполяции на сфере рассмотрены в основном в контексте возможного использования теоремы УКШ для решения этой задачи. Более полную информацию о методах кватернионной аппроксимации можно получить из соответствующих библиографических ссылок, приведенных в частности в [59, 61]. В качестве перспективы дальнейших исследований следует выделить переход от эвристических подходов построения интерполяционных и сглаживающих кривых к аналитическим зависимостям, основанным на оптимизации кривой согласно определенному критерию качества. Большой интерес представляет также применение разработанных методов в задачах оптимального управления ориентацией и движением твердого тела, дифференциальных играх преследования и др. [70–72].

Список литературы

1. Котельников В. А. О пропускной способности “эфира” и проволоки в электросвязи. Всесоюзный энергетический комитет. Материалы к Всесоюзному съезду по вопросам реконструкции связи и развития слаботочной промышленности, 1933.

2. *Wiener N.* Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. — New York: John Wiley, 1949.
3. *Шеннон К.* Статистическая теория передачи электрических сигналов при наличии помех. — М.: ИЛ, 1953.
4. *Колмогоров А. Н.* Теория передачи информации. — АН СССР, 1956.
5. *Агеев Д. В.* Доклад на сессии НТОРЭС им. А. С. Попова // Аннотации докладов, 1957.
6. *Slepian D.* IEEE Transactions Inform. Theory, IT-4. — 1958. — № 2. — P. 650–668.
7. *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. — М.: Физматгиз, 1962.
8. *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Финитные функции в физике и технике. — М.: Наука, 1971.
9. *Цыбаков Б. С., Яковлев В. П.* Структура функций с ограниченным спектром и связанные с этим вопросы теории связи // Труды МФТИ. — Вып. 2. — М.: Оборонгиз, 1959. — С. 13.
10. *Ефимов С. П., Яковлев В. П.* Методы представления полей с финитным спектром // VIII Всесоюзный симпозиум “Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей”. Секция III. Тезисы докладов, Ленинград, 1975. — С. 105–110.
11. *Яковлев В. П.* Филтрация сигнала на выходе аналого-цифрового преобразования // Проблемы передачи информации. — 1988. — Т. 24, № 2. — С. 51–58.
12. *Пилипчук Н. И., Яковлев В. П.* Адаптивная импульсно-кодированная модуляция. — М.: Радио и связь, 1986.
13. *Минкович Б. М., Яковлев В. П.* Теория синтеза антенн. — М.: Сов. Радио, 1969.
14. *Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике / Под ред. М. К. Размахнина, В. П. Яковлева.* — М.: Сов. Радио, 1971.
15. *Цыбаков Б. С., Яковлев В. П.* О подобии объекта и его оптического изображения // Труды МФТИ. — Вып. 4. — М.: Оборонгиз, 1959. — С. 25–27.
16. *Ефимов С. П.* Согласование апертур оптического фильтра // Труды Радиотехнического института АН СССР. — 1973. — Вып. 13. — С. 92–96.
17. *Тартаковский Л. Б.* Синтез линейного излучателя и его аналогии в задаче широкополосного согласования // Радиотехника и электроника. — 1958. — Т. 3, № 12. — С. 1464.
18. *Папулис А.* Теория систем и преобразований в оптике. — М.: Мир, 1971.
19. *Яковлев В. П.* Некоторые особенности функций с финитным спектром // Электромагнитные волны и электронные системы. — 1998, № 3. — С. 46–56.
20. *Яковлев В. П.* Оценка протяженности финитного входа // Известия вузов. Радиофизика. — 1978. — Т. 21, № 4. — С. 523–532.
21. *Аветисян Д. О.* О представлении непрерывных функций одного класса дискретным множеством их значений // Проблемы передачи информации. — 1984. — Т. 20. — Вып. 3.
22. *Романовский П. И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. — М.: Физматгиз, 1959.
23. *Анго Андре.* Математика для электро- и радиоинженеров. — М.: Наука. 1967.
24. *Кравченко В. Ф.* Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. — М.: Радиотехника, 2003.

25. Кравченко В. Ф., Басараб М. А. Применение атомарных функций для восстановления сигналов с финитным спектром // Доклады РАН. — 2002. — Т. 385, № 1. — С. 36–40.
26. Зелкин Е. Г., Кравченко В. Ф., Басараб М. А. Интерполяция сигналов с финитным спектром с помощью преобразований Фурье атомарных функций и ее применение в задачах синтеза антенн // Радиотехника и электроника. — 2002. — Т. 47, № 4. — С. 461–468.
27. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. — М.: Мир, 1974.
28. Зелкин Е. Г. Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности. — М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963.
29. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965.
30. Басараб М. А., Кравченко В. Ф. Конструктивные методы аппроксимации целых функций экспоненциального типа с использованием атомарных функций // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2002. — Т. 7, № 8. — С. 4–13.
31. Басараб М. А., Кравченко В. Ф. R-функции и соотношение неопределенности для пространственных сигналов с финитным носителем // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2003. — Т. 8, № 1. — С. 16–25.
32. Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. — М.: Физматлит, 2006.
33. Кравченко В. Ф., Басараб М. А. Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики. — М.: Физматлит, 2004.
34. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной плоскости. — М.: Наука, 1964.
35. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. — М.: Наука, 1966.
36. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
37. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981.
38. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Физматгиз, 1963.
39. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. — М.: Наука, 1984.
40. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999.
41. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М.-Л.: Физматгиз, 1962.
42. Slepian D., Pollak H. O. Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty, I // Bell Syst. Tech. J. — 1961. — Vol. 40, № 1. — P. 43–64.
43. Landau H. J., Pollak H. O. Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty, II // Bell Syst. Tech. J. — 1961. — Vol. 40, № 1. — P. 65–84.
44. Красичков И. Ф. Системы функций со свойством двойной ортогональности // Матем. заметки. — 1968. — Вып. 4, 5.
45. Крейн М. Г., Нудельман П. Я. О некоторых новых задачах для функций класса Харди и континуальных семействах функций с двойной ортогональностью // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 209, № 3. — С. 537–540.
46. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Прогресс в Советском Союзе в области теории финитных функций и ее применений в физике и технике // ТИИЭР. — 1977. — Т. 65, № 7. — С. 16–45.

47. Комаров И. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. — М.: Наука, 1976.
48. Фламммер К. Таблицы волновых сфероидальных функций. — М.: ВЦ АН СССР, 1962.
49. Slepian D. Prolate Spheroidal Wave Functions. Fourier Analysis and Uncertainty IV. Extension to Many Dimensions // Bell Syst. Tech. J. — 1964. — Vol. 43, № 6. — P. 3009–3057.
50. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. — Киев: Наукова думка, 1978.
51. Виленчик Л. С., Катулев А. Н., Малевинский М. Ф. Метод вычисления вытянутых волновых сфероидальных функций на основе ряда Котельникова // Электромагнитные волны и электронные системы. — 1997. — Т. 2, № 4. С. 5–9.
52. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. — М., 1976.
53. Кравченко В. Ф., Басараб М. А. Приближение атомарными функциями и численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Дифференциальные уравнения. — 2001. Т. 37. — № 10. — С. 1406–1414.
54. Котельников В. А. Сигналы с минимальной энергией вредного спектра // Радиотехника и электроника. — 1996. — Т. 41, № 7. — С. 773–780.
55. Котельников В. А. Импульсы с наименьшей энергией в спектре за пределами заданной полосы // Радиотехника и электроника. — 1997. — Т. 42, № 4. — С. 436–441.
56. Голд В., Райзер Н. Цифровая обработка сигналов. — М.: Сов. радио, 1973.
57. Джерри А. Дж. Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и приложения // Обзор. ТИИЭР. — 1977. — Т. 65, № 11. — С. 53–89.
58. Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. — М.: Энергия, 1956.
59. Басараб М. А., Кравченко В. Ф., Матвеев В. А. Кватернионы и атомарные функции в задачах сферической интерполяции и аппроксимации // Успехи современной радиоэлектроники. — 2006. — № 8. — С. 5–24.
60. Shoetake K. Animating Rotation with Quaternion Curves // Computer Graphics. — 1985. — Vol. 19, № 3. — P. 245–254.
61. Dam E., Koch M., and Lillholm M. Technical Report DIKU-TR-98/5. Department of Computer Science, University of Copenhagen, July 17, 1998.
62. Kim M.-J., Kim M.-S., and Shin S. Y. A General Construction Scheme for Unit Quaternion Curves with Simple High Order Derivatives // Proc. of SIGGRAPH'95, Los Angeles, August 6–11, 1995. — P. 369–376.
63. Kim M.-J., Kim M.-S., and Shin S. Y. A C^2 -continuous B-spline Quaternion Curve Interpolating a Given Sequence of Solid Orientations // Proc. of Computer Animation'95, 1995. — P. 72–80.
64. Бабкин Е. В., Беляев М. Ю., Ефимов Н. И. и др. Первые результаты определения микроускорений на российском сегменте Международной космической станции // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2001.
65. Сазонов В. В., Беляев М. Ю., Ефимов Н. И., Стажков В. М., Бабкин Е. В. Определение квазистатической компоненты микроускорения на станции “Мир” // Космические исследования. — 2001. — Т. 39, № 2. — С. 136–147.
66. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. — М.: Наука, 1973.

67. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. — М.: Физматлит, 2001.
68. Комплекснозначные и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов / Под ред. Я. А. Фурмана. — М.: Физматлит, 2004.
69. Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. — М.: Едиториал УРСС, 2002.
70. Басараб М. А., Кравченко В. Ф., Матвеев В. А. Математическое моделирование физических процессов в гироскопии. — М.: Радиотехника, 2005.
71. Маланин В. В., Стрелкова Н. А. Оптимальное управление ориентацией и винтовым движением твердого тела. — Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004.
72. Salychev O. S. Applied Inertial Navigation: Problems and Solutions. — Moscow: BMSTU Press, 2004.

ГЛАВА 2

БИСПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В ПРИЛОЖЕНИИ К ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Введение

Обработка сигналов с использованием корреляционных функций третьего порядка (КФТП) и биспектрального анализа (биспектр, по определению, — это двумерное преобразование Фурье КФТП) позволяет узнать о свойствах сигнала гораздо больше, чем применение обычных корреляционных функций. В частности, биспектральный анализ в задачах обработки сигналов позволяет сохранить информацию о фазовом Фурье-спектре исходного сигнала и, следовательно, появляется возможность восстановления априорно неизвестной формы сигнала. Кроме этого, оценка биспектра мало чувствительна к аддитивной помехе с симметричным законом изменения плотности вероятности, а также данная оценка нечувствительна к случайным смещениям обрабатываемого сигнала. Оценка биспектральной плотности (спектральной плотности третьего порядка) в отличие от оценки энергетического спектра позволяет не только правильно описать характеристики наблюдаемого процесса, но и определить наличие фазовых связей спектральных компонент, а также сохранить, а при необходимости и восстановить фазовые характеристики составляющей, содержащейся в наблюдаемом процессе. Биспектральный анализ может также служить чувствительным и точным средством, позволяющим выявить и измерить отклонения исследуемого процесса от нормального закона распределения. Поэтому в ряде прикладных задач радиолокации, гидролокации, астрономии, технической диагностики машин и механизмов, медицинской диагностики и других биспектральный анализ часто служит единственным эффективным средством обработки сигналов и оценки параметров исследуемых процессов.

2.1. Математические основы биспектральной обработки стохастических сигналов и полей

2.1.1. Анализ свойств корреляционных функций третьего порядка и биспектров. В последние несколько десятилетий широкое практическое распространение в цифровой обработке сигналов получили методы оценивания спектральной плотности мощности или энергетического спектра. Для центрированных случайных процессов усредненная спектральная плотность амплитуды не содержит никакой информации о характере поведения

процесса в частотной области, так как спектральные компоненты статистически независимы в различных реализациях процесса. В этом случае оценивают распределение энергии статистически независимых частотных гармоник наблюдаемого процесса, поскольку энергия не зависит от фазовых соотношений спектральных компонент. Для процессов, у которых спектральные компоненты статистически независимы, оценка энергетического спектра является исчерпывающей характеристикой при традиционном спектральном анализе свойств таких процессов.

В ряде практических приложений цифровой обработки сигналов исследуемый процесс может содержать коррелированные спектральные компоненты в различных реализациях. Определение корреляционных связей может дать очень важную информацию для правильного понимания, анализа и описания свойств физических явлений, порождающих данные процессы. Однако такая информация безвозвратно теряется в обычном энергетическом спектре.

Оценка биспектральной плотности (спектральной плотности третьего порядка) в отличие от оценки энергетического спектра позволяет не только правильно описать статистические характеристики наблюдаемого процесса, но и определить наличие корреляционных связей спектральных компонент, а также восстановить фазовые соотношения спектральных компонент наблюдаемого процесса. Следовательно, основное отличие биспектра от энергетического спектра (спектральной плотности второго порядка) заключается в сохранении фазовой информации и возможности ее восстановления. Уже только эта отмеченная отличительная особенность биспектра способствовала широкому распространению методов биспектрального анализа и оценивания в цифровой обработке сигналов. Непрерывный рост интереса к биспектральному анализу сопровождается появлением большого количества публикаций в данном направлении. В связи с этим достаточно отметить ряд фундаментальных обзорных статей, основное внимание в которых посвящено приложению биспектров к цифровой обработке сигналов и изображений [1–4], а также статью [5], в которой представлен обширный классифицированный список из более чем 1700 трудов по биспектральной анализу в различных приложениях.

Остановимся на анализе других не менее важных преимуществ биспектра по отношению к энергетическому спектру, которые представляются полезными и находят широкое использование в цифровой обработке сигналов.

В цифровых измерительных системах для выделения полезного сигнала, искаженного аддитивным гауссовым (нормальным) шумом, важным представляется свойство стремления биспектральной плотности помехи с симметричной функцией плотности вероятности к нулю. Данное свойство биспектра обеспечивает робастность алгоритмов фильтрации сигналов в отношении нормальной аддитивной помехи в системах цифровой обработки радиолокационных [6–9], астрономических [10–13], гидроакустических [14–16] и биомедицинских [17, 18] сигналов, а также в системах обработки изображений [19–22].

Биспектральный анализ может служить чувствительным и точным инструментом, позволяющим выявить и измерить отклонения исследуемого процесса от нормального закона распределения. Это свойство биспектра может быть полезным для точного анализа шумоподобных процессов в системах диагностики машин и механизмов [23], в гидроакустике [14], в неразрушающем контроле [24], а также в системах медицинской диагностики [18].

С помощью оценок биспектральной плотности удастся выявить и исследовать нелинейные эффекты, возникающие в работе механических систем и содержащиеся в сигналах, порождаемых такими системами.

Многие годы диагностика линейных систем в условиях прохождения стохастических стационарных процессов через такие системы основывалась на анализе энергетических спектров. Биспектральный анализ позволяет обнаружить и описать нелинейные явления в системе по непараметрическим оценкам биспектральной плотности случайного стационарного процесса [25].

Для математического описания свойств биспектра будем рассматривать вещественный стационарный дискретный процесс, заданный конечной совокупностью отсчетов во временной или в пространственной области. Рассмотрим вещественный стационарный одномерный процесс $\{x^{(m)}(i)\}$, наблюдаемый в виде дискретной последовательности из $i = 0, 1, 2, \dots, I - 1$ отсчетов в виде набора $m = 1, 2, \dots, M$ независимых реализаций $x^{(m)}(i)$.

Широкое распространение в общепринятой теории и технике обработки стационарных процессов получила статистика второго порядка – автокорреляционная функция $R_x(k)$ (одномерная функция), которая для рассматриваемого процесса $\{x^{(m)}(i)\}$ в предположении бесконечно большого объема реализаций $M \rightarrow \infty$ равна

$$R_x(k) = \left\langle \sum_{i=0}^{I-1} [x^{(m)}(i) - E][x^{(m)}(i+k) - E] \right\rangle_{\infty}, \quad (2.1)$$

где $k = -I + 1, \dots, I - 1$ — индекс отсчета дискретного временного или пространственного сдвига; $\langle \dots \rangle_{\infty}$ — операция усреднения по бесконечному ансамблю реализаций; $E = \left\langle \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} x^{(m)}(i) \right\rangle_{\infty}$ — среднее значение

и $R_x(0) = \sigma_x^2 = \left\langle \sum_{i=0}^{I-1} [x^{(m)}(i) - E]^2 \right\rangle_{\infty}$ — дисперсия. Обычная автокорреляционная функция $R_x(k)$ вида (2.1) отличается свойством симметрии вида

$$R_x(k) = R_x(-k). \quad (2.2)$$

В соответствии с теоремой Винера–Хинчина спектральная плотность $P_x(p)$ рассматриваемого процесса определяется в виде дискретного

одномерного преобразования Фурье автокорреляционной функции (2.1)

$$P_x(p) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} R_x(k) \exp(-j2\pi kp), \quad (2.3)$$

или

$$P_x(p) = \left\langle \dot{X}^{(m)}(p) \dot{X}^{*(m)}(p) \right\rangle_{\infty}, \quad (2.4)$$

где $p = -I + 1, \dots, I - 1$ — индекс отсчета в частотной области; $\dot{X}^{(m)}(p) = \sum_{i=0}^{I-1} x^{(m)}(i) \exp(-j2\pi ip)$ — дискретное преобразование Фурье m -й реализации $\{x^{(m)}(i)\}$; положительно определенная спектральная плотность $P_x(p) \geq 0$ для рассматриваемого вещественного процесса описывается симметричной функцией относительно нулевой частоты $P_x(p) = P_x(-p)$ вследствие уравнения симметрии (2.2); символ $*$ означает комплексно сопряженную величину.

Отметим, что фазовая информация, которая может содержаться в наблюдаемом процессе, теряется в функции спектральной плотности (2.4) из-за перемножения комплексно-сопряженных величин.

Тройную автокорреляционную функцию (ТАКФ) — двумерную статистику третьего порядка $R_x(k, l)$ рассматриваемого процесса $\{x^{(m)}(i)\}$ представим как

$$R_x(k, l) = \left\langle \sum_{i=0}^{I-1} [x^{(m)}(i) - E][x^{(m)}(i+k) - E][x^{(m)}(i+l) - E] \right\rangle_{\infty}, \quad (2.5)$$

где независимые сдвиги исходного процесса k и l принимают целочисленные значения, равные $k = -I + 1, \dots, I - 1$, $l = -I + 1, \dots, I - 1$.

При этом ТАКФ вида (2.5) обладает следующими важными для практических приложений в обработке сигналов свойствами симметрии [2]

$$R_x(k, l) = R_x(l, k) = R_x(l - k, -k) = R_x(k - l, -l) = R_x(-k, l - k). \quad (2.6)$$

По определению, сформулированному в фундаментальных работах по биспектральному анализу [1, 2], биспектр — это преобразование Фурье ТАКФ. Биспектр (биспектральная плотность) в отличие от спектральной плотности (см. выражения (2.3) и (2.4)) описывается комплексной функцией двух переменных — двух независимых частот. Запишем выражение для биспектра $\dot{B}_x(p, q)$ в виде следующего двумерного дискретного преобразования Фурье ТАКФ вида (2.5)

$$\dot{B}_x(p, q) = \sum_{k=-I+1}^{I-1} \sum_{l=-I+1}^{I-1} R_x(k, l) \exp[-j2\pi(kp + lq)], \quad (2.7a)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{B}_x(p, q) &= \left\langle \dot{X}^{(m)}(p) \dot{X}^{(m)}(q) \dot{X}^{*(m)}(p+q) \right\rangle_{\infty} = \\ &= \left\langle \dot{X}^{(m)}(p) \dot{X}^{(m)}(q) \dot{X}^{(m)}(-p-q) \right\rangle_{\infty}, \end{aligned} \quad (2.7b)$$

где биспектр $\dot{B}_x(p, q) = |\dot{B}_x(p, q)| \exp[j\gamma_x(p, q)]$ — это комплексная функция двух частотных переменных; $|\dot{B}_x(p, q)|$ и $\gamma_x(p, q)$ — соответственно амплитудный (биамплитуда) и фазовый (бифаза) биспектр рассматриваемого процесса; $p = -I + 1, \dots, I - 1$, $q = -I + 1, \dots, I - 1$ — индексы отсчетов независимых частот.

Сравнение спектральной (2.4) и биспектральной (2.7б) плотностей позволяет отметить, что функция (2.4) представляется статистическим средним значением результата произведения двух спектральных компонент Фурье на одной и той же частоте p , а биспектр (2.7б) — это статистическое среднее результата произведения трех спектральных компонент Фурье на частотах p , q и $p + q$.

Перечислим и кратко прокомментируем основные математические свойства биспектра.

1. Для стационарного гауссова процесса с нулевым средним значением ТАКФ и, следовательно, биспектр равняются нулю

$$R_x(m, n) = 0, \quad \dot{B}_x(p, q) = 0. \quad (2.8)$$

Кроме того, для детерминированных сигналов с нулевой асимметрией, например, для обычного гармонического колебания $x(i) = A_0 \cos(2\pi f i)$ ТАКФ и биспектр равны нулю (f — частота в данном примере). Однако, при появлении слабых нелинейных искажений или при наличии в сигнале отличной от нуля постоянной составляющей его ТАКФ и биспектр становятся отличными от нуля. Данное свойство может служить весьма чувствительным инструментом для обнаружения и измерения нелинейных искажений сигналов с помощью биспектрального оценивания.

2. Биспектр — это двумерно периодическая функция с периодом, равным 2π :

$$\dot{B}_x(p, q) = \dot{B}_x(p + 2\pi, q + 2\pi). \quad (2.9)$$

3. Биспектральная плотность — это симметричная комплексная функция двух независимых частотных переменных p и q

$$\begin{aligned} \dot{B}(p, q) &= \dot{B}(q, p) = \dot{B}^*(-p, -q) = \dot{B}^*(-q, -p) = \\ &= \dot{B}(-p - q, q) = \dot{B}(p, -p - q) = \dot{B}(-p - q, p) = \dot{B}(q, -p - q). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Соотношения симметрии (2.10) ограничивают шестиугольную область определения биспектра на частотной плоскости.

Анализ соотношений симметрии (2.10) показывает, что для полного описания биспектра вещественного процесса на биспектральной плоскости его достаточно определить лишь только в пределах ограниченной главной треугольной области

$$q \geq 0, \quad p \geq q, \quad p + q \leq I - 1. \quad (2.11)$$

Во всех остальных частях шестиугольной области определения биспектра для расчетов биспектральной плотности достаточно воспользоваться соотношениями симметрии (2.10) и условиями (2.11).

Условия (2.11), ограничивающие массив отсчетов биспектра главной треугольной областью, позволяют значительно сократить объем памяти и время вычислений при практических расчетах биспектральной плотности.

4. В отличие от энергетического спектра, который содержит информацию только о поведении модуля Фурье-спектра, биспектр позволяет сохранить информацию не только об амплитудном, но и о фазовом Фурье-спектре исследуемого процесса. Данное свойство биспектра следует из выражений (2.7а) и (2.7б).

5. Из выражения (2.7б) вытекает важное свойство инвариантности биспектра к временному (пространственному) сдвигу исходного процесса. Это свойство можно легко пояснить с помощью следующего соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{B}_{x\tau}(p, q) &= \dot{X}_{\tau}(p) \dot{X}_{\tau}(q) \dot{X}_{\tau}(-p - q) = \\ &= \dot{X}(p) \dot{X}(q) \dot{X}(-p - q) \exp(-j2\pi\tau p) \exp(-j2\pi\tau q) \exp[-j2\pi\tau(-p - q)] = \\ &= \dot{B}_x(p, q), \quad (2.12) \end{aligned}$$

где $\dot{X}_{\tau}(p) = \dot{X}(p) \exp(-j2\pi\tau)$ — Фурье-преобразование процесса, который сдвинут на вещественную величину τ во временной (пространственной области). Из выражения (2.12) следует, что для процесса $x^{(m)}(i)$ и его копии $x^{(m)}(i - \tau)$, сдвинутой на величину τ , биспектры совпадают. Эта важная особенность биспектра представляется полезной при решении задач восстановления сигнала со случайным искажающим временным сдвигом. Однако, в то же самое время, инвариантность биспектра по отношению к сдвигу исходного сигнала (2.12) может создать проблемы в некоторых приложениях биспектральной обработки данных. В частности, при биспектральном способе восстановления изображений (более подробно биспектральное восстановление изображений будет рассмотрено ниже) могут возникать искажения в виде нежелательных смещений и заворотов строк.

6. Спектральные компоненты процесса в результате его прохождения через нелинейный элемент, имеющий, например, квадратичную передаточную характеристику, могут создать на выходе такого элемента в энергетическом спектре суммарную или разностную частотные составляющие. При этом характерно возникновение квадратичных фазовых связей на выходе нелинейного элемента. В ряде практических приложений обработки сигналов требуется обнаружить и оценить именно те частотные компоненты, которые содержат отмеченные квадратичные фазовые связи. Поскольку в энергетическом спектре фазовые соотношения безвозвратно утеряны, то из энергетического спектра в отличие от биспектра невозможно извлечь информацию о квадратичных фазовых связях.

Данное свойство биспектра поясним с помощью следующего простого примера. Для этого рассмотрим два процесса

$$x_1(i) = \cos(2\pi f_1 i + \varphi_1) + \cos(2\pi f_2 i + \varphi_2) + \cos(2\pi f_3 i + \varphi_3), \quad (2.13a)$$

$$x_2(i) = \cos(2\pi f_1 i + \varphi_1) + \cos(2\pi f_2 i + \varphi_2) + \cos[2\pi f_3 i + (\varphi_1 + \varphi_2)], \quad (2.13б)$$

где $f_3 = f_1 + f_2$ — частоты и $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — фазы, которые полагаются независимыми случайными величинами с равномерным законом распределения в интервале $[0, 2\pi]$.

Анализ выражения (2.13а) показывает, что величина f_3 является независимой частотной компонентой, поскольку фаза φ_3 данной частотной компоненты — это независимая случайная величина. С другой стороны, предположим, что в выражении (2.13б) частотная составляющая f_3 — это результат наличия квадратичных фазовых связей.

Очевидно, что энергетические спектры рассматриваемых процессов равны, т.е. $P_{x1}(p) = P_{x2}(p)$. В то же самое время, амплитудный биспектр процесса (2.13а) равен нулю $|\dot{B}_{x1}(p, q)| = 0$, а амплитудный биспектр процесса (2.13б) отличается от нуля $|\dot{B}_{x2}(p, q)| \neq 0$. Иными словами, биспектр служит чувствительным индикатором наличия квадратичных фазовых связей в исследуемом процессе.

Рассмотрев основные свойства корреляционных функций третьего порядка и биспектров, которые будут использованы в последующем изложении, перейдем к описанию современных методов оценивания биспектральной плотности.

2.1.2. Методы оценивания биспектральной плотности. Используемые в современной практике цифровой обработки сигналов подходы к оцениванию биспектральной плотности делятся на два класса: косвенный и прямой методы оценивания [2]. Рассмотрим подробно каждый из этих подходов.

Косвенный метод оценивания биспектральной плотности содержит следующую последовательность процедур.

1. Расчет совокупности M выборочных оценок ТАКФ (выборочных моментов третьего порядка) $\hat{R}_x^{(m)}(k, l)$, для каждой из $m = 1, 2, \dots, M$ реализаций наблюдаемой временной последовательности вещественных отсчетов $\{x^{(m)}(0), x^{(m)}(1), x^{(m)}(2), \dots, x^{(m)}(I-1)\}$ в виде

$$\hat{R}_x^{(m)}(k, l) = \sum_{i=0}^{I-1} x^{(m)}(i) x^{(m)}(i+k) x^{(m)}(i+l). \quad (2.14)$$

При этом предполагается, что рассматриваемый процесс $\{x^{(m)}(i)\}$ в (2.14) имеет нулевое среднее значение $E = 0$.

2. Статистическое усреднение выборочных оценок (2.14) по ансамблю из M реализаций, в результате которого получают выборочную оценку ТАКФ $\hat{R}_M(k, l)$ вида

$$\hat{R}_M(k, l) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \hat{R}_x^{(m)}(k, l). \quad (2.15)$$

Отметим, что для эргодического процесса процедура статистического усреднения по ансамблю реализаций (2.15) может быть заменена процедурой усреднения во временной области, например, по M сегментам, на которые разбивают наблюдаемую временную последовательность $\{x^{(m)}(i)\}$.

3. Формирование оценки биспектральной плотности в виде двумерного массива комплексных отсчетов $\hat{B}_{x \text{ ind}}(p, q) = |\hat{B}_{x \text{ ind}}(p, q)| e^{j\hat{\gamma}_{x \text{ ind}}(p, q)}$ с помощью процедуры прямого дискретного двумерного преобразования Фурье оценки $\hat{R}_M(k, l)$ (2.15), которую с учетом соотношений симметрии биспектра можно записать как

$$\hat{B}_{x \text{ ind}}(p, q) = \sum_{k=0}^{I-1} \sum_{l=0}^{I-1} \hat{R}_M(k, l) W(k, l) \exp[-j2\pi(kp + lq)], \quad (2.16)$$

где $|\hat{B}_{x \text{ ind}}(p, q)|$ и $\hat{\gamma}_{x \text{ ind}}(p, q)$ — двумерные оценки амплитудного и фазового биспектра, соответственно; $W(k, l)$ — двумерная функция взвешивающего окна, которую вводят для улучшения устойчивости и обеспечения состоятельности оценки биспектральной плотности [2, 25]. Применение определенных весовых функций $W(k, l)$ может привести к требуемому выигрышу в точности получения биспектральной оценки (2.16) [25]. Вопросы, связанные с оптимизацией функции взвешивающего окна для получения состоятельных оценок биспектральной плотности, выходят за рамки настоящей работы, и поэтому заинтересованные читатели могут обратиться к уже упомянутым статьям [2, 25], а также к работе [26], специально посвященной проблеме оконного сглаживания оценок биспектральной плотности.

Прямой метод оценивания биспектральной плотности, который по сравнению с косвенным методом отличается более высоким быстродействием за счет применения быстрых алгоритмов дискретного преобразования Фурье и исключения трудоемких расчетов оценок ТАКФ (2.14), сводится к выполнению следующей совокупности процедур.

1. Прямое преобразование Фурье каждой m -й реализации процесса $\{x^{(m)}(i)\}$

$$\dot{X}^{(m)}(p) = \sum_{i=0}^{I-1} x^{(m)}(i) \exp(-j2\pi ip), \quad p = 0, 1, 2, \dots, I-1. \quad (2.17)$$

2. Формирование m -й выборочной оценки биспектра с помощью тройного произведения функций (2.17) на частотах p , q , и $p+q$

$$\hat{B}_{x \text{ dir}}^{(m)}(p, q) = \dot{X}^{(m)}(p) \dot{X}^{(m)}(q) \dot{X}^{*(m)}(p+q), \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (2.18)$$

3. Расчет усредненной оценки биспектра, равной

$$\hat{B}_{x \text{ dir}}(p, q) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \hat{B}_{x \text{ dir}}^{(m)}(p, q). \quad (2.19)$$

Сравнение рассмотренных выше косвенного и прямого методов оценивания биспектральной плотности свидетельствует об их различии. Оценки биспектральной плотности, полученные этими методами, совпадают, если функция окна в косвенном методе $W(k, l) = 1$ (см. выражение (2.16)). В работе [27] доказано, что для бесконечно больших величин I и M оценки биспектральной плотности, полученные косвенным и прямым методами, сходятся в среднем к истинной биспектральной плотности, т. е. эти оценки

являются асимптотически несмещенными и состоятельными

$$\langle \hat{B}_{x \text{ dir}}(p, q) \rangle = \langle \hat{B}_{x \text{ ind}}(p, q) \rangle \cong \dot{B}_x(p, q), \quad I, M \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

В работе [2] получены следующие асимптотические выражения для дисперсии оценок биспектральной плотности для косвенного и прямого методов, соответственно, в виде:

$$\begin{aligned} \text{var} \left\{ \text{Re} \hat{B}_{x \text{ ind}}(p, q) \right\} &= \text{var} \left\{ \text{Im} \hat{B}_{x \text{ ind}}(p, q) \right\} \cong \\ &\cong \frac{V}{(2L+1)^2 M} P(p)P(q)P(p+q) \end{aligned} \quad (2.21a)$$

и

$$\begin{aligned} \text{var} \left\{ \text{Re} \hat{B}_{x \text{ dir}}(p, q) \right\} &= \text{var} \left\{ \text{Im} \hat{B}_{x \text{ dir}}(p, q) \right\} \cong \\ &\cong \frac{1}{M} P(p)P(q)P(p+q), \end{aligned} \quad (2.21b)$$

где символами Re и Im обозначены вещественная и мнимая части оценки биспектральной плотности, соответственно; $V = \sum_{k=-L}^L \sum_{l=-L}^L |W(k, l)|^2$ — энергетический параметр взвешивающего окна; $L = I - 1$ — величина, определяющая размер взвешивающего окна; $P(\dots)$ — энергетический спектр наблюдаемого процесса $\{x^{(m)}(i)\}$; $\text{var} \{\dots\}$ — дисперсия оценки.

Следует подчеркнуть, что при использовании двумерного окна Дирихле $W(k, l) = 1$ в оценке биспектральной плотности для прямого метода величина $V/(2L+1)^2 = 1$ в формуле (2.21a) и, как следствие, выражения (2.21a) и (2.21b) при этом становятся идентичными.

Анализ асимптотических выражений (2.20), (2.21a), (2.21b) показывает, что для получения несмещенных оценок биспектральной плотности с малой величиной дисперсии оценки требуется наблюдать очень большое количество реализаций процесса M (дисперсия оценки биспектральной плотности убывает обратно пропорционально M). Однако в практике обработки реальных сигналов величина M , как правило, невелика. Поэтому одной из важных задач представляется улучшение оценок биспектральной плотности, полученных на ограниченной выборке реализаций наблюдаемого процесса.

2.1.3. Цифровые методы биспектрального анализа в задачах фильтрации и восстановления сигналов. В цифровых измерительных оцениваниях параметров сигналов входное воздействие часто представляет собой случайный процесс. При этом возникает задача оценки процессов/полей или задача фильтрации процессов/полей, которая сводится к восстановлению на выходе фильтра формы информационного сигнала в присутствии помех различного происхождения и уровня с высокой (в статистическом смысле) точностью [28–30].

Успешное решение данной задачи с использованием оптимальных, например, по критерию минимума среднеквадратичной ошибки фильтров

Винера и Калмана [30] обязательно требует наличия априорных сведений о средних значениях сигнала и шума, знания их корреляционных и взаимно корреляционной функций, которые, однако, во многих случаях неизвестны, а при наличии неизвестной постоянной составляющей оптимальные фильтры Калмана и Винера дают на выходе расходящийся результат [30].

Вероятностные фильтры [30], оптимальные по критерию максимума вероятности попадания ошибки фильтрации в заданную область, требуют не только априорных сведений о свойствах сигнала и помехи, но и строго заданных априорно границ, в которых должна лежать суммарная (флуктуационная и динамическая) ошибка. Поэтому, практическая ценность оптимальных фильтров в условиях априорной неопределенности в отношении статистических свойств сигнала и помехи невысока [27–30].

Отметим также, что точность и границы применимости традиционных методов фильтрации и восстановления сигналов [27–30] сильно зависят от отношений сигнал–шум на входе измерительной системы. Часто требуемую на практике точность оценивания параметров сигнала удается реализовать только для больших (значительно больше единицы) отношениях сигнал–шум. Так, например, методы, использующие принцип регуляризации решения обратной задачи [28], обеспечивают восстановление сигналов в сложной помеховой обстановке, но при этом с уменьшением отношения сигнал–шум одновременно ухудшается разрешение системы восстановления из-за подавления высокочастотных компонент обрабатываемого сигнала.

Привлекательность биспектрального анализа в приложениях к задачам фильтрации и восстановления сигналов–полей связана, в первую очередь, с возможностью восстановления и оценки формы случайных негауссовых процессов в условиях практически полной априорной неопределенности в отношении статистических свойств исходного сигнала и помехи при малых отношениях сигнал–помеха.

Рассмотрим методы фильтрации, основанные на восстановлении из оценки биспектральной плотности наблюдаемой смеси полезного сигнала и помехи комплексного спектра Фурье сигнала.

Предположим, что на входе цифровой системы фильтрации регистрируют совокупность из конечного набора M реализаций аддитивной смеси полезного сигнала и шума с неизвестными характеристиками. При этом m -я наблюдаемая реализация $x^{(m)}(i)$ ($m = 1, 2, \dots, M$), поступающая на вход измерительной системы (системы восстановления и оценивания формы полезного сигнала с неизвестными параметрами) представляет собой сумму полезного сигнала $s(i)$ и гауссова шума $n_G(i)$. Наряду с воздействием гауссова шума полезный сигнал может быть также искажен временными сдвигами, величина которых меняется от реализации к реализации по случайному закону.

Пусть исходный информационный сигнал $s(i)$ задан одномерной совокупностью вещественных временных (или в некоторых случаях — пространственных) отсчетов, количество которых $i = 0, 1, 2, \dots, I - 1$ ограничено интервалом наблюдения в измерительной системе. При этом ТАКФ исходного информационного сигнала полагается отличной от нуля.

В рамках рассматриваемой модели m -я реализация $x^{(m)}(i)$ может быть представлена в виде дискретной вещественной последовательности

$$x^{(m)}(i) = s(i - \tau^{(m)}) + n_G^{(m)}(i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, I; \quad m = 1, 2, 3, \dots, M, \quad (2.22)$$

где $n_G^{(m)}$ — m -я реализация белого аддитивного стационарного гауссова шума с нулевым средним значением $\langle n_G(i) \rangle = 0$ и выборочной дисперсией, величина которой $\sigma_G^{(m)2}$ полагается априорно неизвестной; $\tau^{(m)}$ — принимающий целочисленные значения случайный сдвиг исходного полезного сигнала $s(i)$, причем максимальная девиация данного сдвига не превышает I . Компонента гауссова шума $n_G^{(m)}(i)$ полагается некоррелированной с полезным сигналом $s(i)$.

На основе уравнения наблюдения (2.22) оцениванию подлежит априорно неизвестная форма сигнал $s(i)$.

Существующие в настоящее время подходы к проблеме биспектрального восстановления вещественного сигнала (задаче оценки процесса или задаче фильтрации) основаны на следующей паре фундаментальных уравнений связи между комплексным биспектром сигнала $\dot{B}_s(p, q)$ и комплексным Фурье-спектром сигнала $\dot{S}(p)$, впервые использованной в работах [10, 11] для практического восстановления одномерных астрономических изображений по биспектральным данным:

$$|\dot{B}_s(p, q)| = |\dot{S}(p)| |\dot{S}(q)| |\dot{S}^*(p + q)|, \quad (2.23)$$

$$\gamma_s(p, q) = \varphi(p) + \varphi(q) - \varphi(p + q), \quad [-\pi, \pi], \quad (2.24)$$

где пределы изменения фазового биспектра ограничены интервалом $[-\pi, \pi]$.

Уравнения (2.23) и (2.24), связывающие, соответственно, амплитудный биспектр с амплитудным Фурье-спектром и фазовый биспектр с фазовым Фурье-спектром, справедливы для эрмитово-сопряженного Фурье-спектра вещественного сигнала, для которого $\dot{S}(p) = \dot{S}^*(-p)$ и $\varphi(p) = -\varphi(-p)$.

Формулы (2.23) и (2.24) лежат в основе рекурсивных алгоритмов восстановления фазового и амплитудного Фурье-спектра вещественного сигнала по биспектру [11]

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(p + q) &= \widehat{\varphi}(p) + \widehat{\varphi}(q) - \widehat{\gamma}_s(p, q), \quad p = 0, \dots, I - 1; \\ 0 &\leq q \leq p; \quad p + q \leq I - 1, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$|\widehat{\dot{S}}(p + q)| = \frac{|\widehat{\dot{B}}_s(p, q)|}{|\widehat{\dot{S}}(p)| |\widehat{\dot{S}}(q)|}, \quad p = 0, \dots, I - 1; \quad 0 \leq q \leq p; \quad p + q \leq I - 1, \quad (2.26)$$

где $|\widehat{\dot{B}}_s(p, q)|$ и $\widehat{\gamma}_s(p, q)$ — выборочные оценки амплитудного $|\dot{B}_s(p, q)|$ и фазового $\gamma_s(p, q)$ биспектров, соответственно, которые рассчитаны по конечному набору реализаций; $|\widehat{\dot{S}}(\dots)|$ и $\widehat{\varphi}(\dots)$ — оценки амплитудного

$|\hat{S}(p)|$ и фазового $\varphi(p)$ Фурье-спектров, соответственно, восстановленные из оценок амплитудного и фазового биспектров.

Рекурсивные алгоритмы восстановления фазового и амплитудного Фурье-спектров сигнала [11] сводятся к выполнению следующей последовательности шагов:

$$\begin{aligned}
 \hat{\varphi}(0) &= 0, \\
 \hat{\varphi}(1) &= \hat{\varphi}(1) + \hat{\varphi}(0) - \hat{\gamma}_s(1, 0), \\
 \hat{\varphi}(2) &= 2\hat{\varphi}(1) - \hat{\gamma}_s(1, 1), \\
 \hat{\varphi}(3) &= \hat{\varphi}(2) + \hat{\varphi}(1) - \hat{\gamma}_s(2, 1), \\
 \hat{\varphi}(4) &= 2\hat{\varphi}(2) - \hat{\gamma}_s(2, 2), \\
 \hat{\varphi}(4) &= \hat{\varphi}(3) + \hat{\varphi}(1) - \hat{\gamma}_s(3, 1), \\
 \hat{\varphi}(5) &= \hat{\varphi}(3) + \hat{\varphi}(2) - \hat{\gamma}_s(3, 2), \\
 \hat{\varphi}(6) &= \hat{\varphi}(3) + \hat{\varphi}(3) - \hat{\gamma}_s(3, 3), \\
 \hat{\varphi}(5) &= \hat{\varphi}(4) + \hat{\varphi}(1) - \hat{\gamma}_s(4, 1), \\
 &\dots, \\
 \hat{\varphi}(I-1) &= \hat{\varphi}(I-1) + \hat{\varphi}(0) - \hat{\gamma}_s(I-1, 0).
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
 |\hat{S}(0)| &= \sqrt[3]{|\hat{B}_s(0, 0)|}, \\
 |\hat{S}(1)| &= |\hat{B}_s(1, 0)| / (|\hat{S}(1)| |\hat{S}(0)|), \\
 |\hat{S}(2)| &= |\hat{B}_s(1, 1)| / (|\hat{S}(1)|^2), \\
 |\hat{S}(3)| &= |\hat{B}_s(2, 1)| / (|\hat{S}(2)| |\hat{S}(1)|), \\
 |\hat{S}(4)| &= |\hat{B}_s(2, 2)| / (|\hat{S}(2)|^2), \\
 |\hat{S}(3)| &= |\hat{B}_s(3, 0)| / (|\hat{S}(3)| |\hat{S}(0)|), \\
 |\hat{S}(4)| &= |\hat{B}_s(3, 1)| / (|\hat{S}(3)| |\hat{S}(1)|), \\
 |\hat{S}(5)| &= |\hat{B}_s(3, 2)| / (|\hat{S}(3)| |\hat{S}(2)|), \\
 |\hat{S}(6)| &= |\hat{B}_s(3, 3)| / (|\hat{S}(3)|^2), \\
 &\dots, \\
 |\hat{S}(I-1)| &= |\hat{B}_s(I-1, 0)| / (|\hat{S}(I-1)| |\hat{S}(0)|).
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Отметим следующие важные особенности алгоритмов (2.27) и (2.28).

1) Анализ (2.27) показывает, что отсчет фазы $\hat{\varphi}(1)$ не определен. Эта принципиальная особенность следует из рассмотренного выше свойства инвариантности биспектра по отношению к сдвигу исходного сигнала, который порождает линейный фазовый множитель в спектре сигнала. В силу данной принципиальной неопределенности в отношении линейного фазо-

вого множителя обычно полагают $\hat{\varphi}(1) = 0$, что, естественно, сопряжено с появлением фазовой ошибки уже на первом рекурсивном шаге. Эта фазовая ошибка может быть существенной или не существенной. Фазовые искажения, возникающие при биспектральном восстановлении сигналов, будут рассмотрены более подробно в последующих разделах. На данном этапе анализа отметим, что, если величина $\hat{\varphi}(1)$ кратна 2π , то фазовые искажения в восстановленном сигнале отсутствуют. В противном случае систематическая фазовая ошибка, связанная с достаточно произвольным выбором $\hat{\varphi}(1) = 0$, накапливается последовательно с ростом порядкового номера рекурсивного шага.

2) Значения фазового биспектра $\hat{\gamma}_s(p, q)$, рассчитываемые на практике в пределах главного значения функции арктангенс как $\hat{\gamma}_s(p, q) = \text{Arc tan} \{ \text{Im } \hat{B}_s(p, q) / \text{Re } \hat{B}_s(p, q) \}$, не однозначны в том смысле, что любое кратное 2π значение, добавленное к фазовому биспектру в произвольной точке области его определения, не изменяет значения комплексного биспектра. Поэтому отсчеты фазового биспектра могут сопровождаться характерными для фазовых измерений циклическими заворотами биспектральных фаз, и, как следствие, фазовый биспектр может отличаться от истинного фазового биспектра, в котором фаза изменяется непрерывно, т.е. без заворотов и скачков. На данную особенность всегда следует обращать особое внимание при анализе однозначности решения задачи биспектрального восстановления сигнала.

3) Вследствие отмеченных ранее свойств симметрии биспектра (2.10), для восстановления Фурье-спектра сигнала достаточно выполнить вычисления на частотах, лежащих только в пределах главной треугольной области $0 \leq q \leq p$ и $p + q \leq I - 1$ (см. условие (2.11)). Попутно отметим, что данная особенность позволяет на практике существенно сократить объем памяти и уменьшить время обработки, требуемое для восстановления сигнала.

4) Каждый из отсчетов фазового (2.27) и каждый из отсчетов амплитудного (2.28) Фурье-спектров сигнала представлен в рекурсивных шагах $(p - 1)/2$ раз при нечетном значении p и $p/2$ раз, если индекс p принимает четное значение. Наличие таких избыточных данных позволяет с помощью усреднения соответствующих одноименных отсчетов фазы и амплитуды улучшить отношение сигнал-шум биспектральной системы восстановления сигналов. При этом, поскольку значения фазы $\varphi(p)$ определены однозначно только в пределах интервала $[-\pi, \pi]$, достаточно выполнить усреднение соответствующих экспоненциальных величин $\exp[\varphi(p)]$ во избежание заворотов фазы. После процедуры усреднения значения фазы и амплитуды обычно подставляют в каждый последующий шаг рекурсивных процедур [11].

5) Поскольку величины коэффициентов корреляции между отмеченными одноименными отсчетами отличны от нуля и их значения в каждом конкретном примере определяются характеристиками сигнала и шума, то эффективность процедуры сглаживания шумов с помощью усреднения одноименных отсчетов фазы и амплитуды зависит от степени их коррелированности.

6) Улучшение отношения сигнал–шум за счет усреднения одноименных отсчетов оказывается, в принципе, неодинаковым в пределах главной треугольной расчетной области. Для низких частот (малые значения индексов p и q) сглаживание шума значительно хуже, чем для высоких частот (большие значения индексов, а значит, и большее количество усредняемых одноименных величин).

Перейдем теперь к анализу точности получения оценки биспектральной плотности сигнала, искаженного аддитивным шумом и случайными временными сдвигами. Для этого на основании уравнения наблюдения (2.22) рассмотрим выражение для оценки биспектральной плотности, определяемой прямым методом оценки биспектра (2.17)–(2.19). Данное выражение при условии некоррелированности сигнала и помехи имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{B}_{s \text{ dir}}(p, q) = & \dot{B}_s(p, q) + \dot{S}(p)\dot{S}(q) \left\langle \dot{N}^{(m)*}(p+q)e^{-j\tau^{(m)}p} \right\rangle + \\ & + \dot{S}(p)\dot{S}^*(p+q) \left\langle \dot{N}^{(m)}(q)e^{j\tau^{(m)}q} \right\rangle + \\ & + \dot{S}(q)\dot{S}^*(p+q) \left\langle \dot{N}^{(m)}(p)e^{j\tau^{(m)}p} \right\rangle + \\ & + \dot{S}(p) \left\langle \dot{N}^{(m)}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q)e^{-j\tau^{(m)}p} \right\rangle + \\ & + \dot{S}(q) \left\langle \dot{N}^{(m)}(p)\dot{N}^{(m)*}(p+q)e^{-j\tau^{(m)}q} \right\rangle + \\ & + \dot{S}^*(p+q) \left\langle \dot{N}^{(m)}(p)\dot{N}^{(m)}(q)e^{j\tau^{(m)}(p+q)} \right\rangle + \\ & + \left\langle \dot{N}^{(m)}(p)\dot{N}^{(m)}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q) \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где $\dot{B}_s(p, q)$ — биспектр исходного сигнала $s(i)$, а остальные семь членов описывают помеху, искажающую оценку биспектральной плотности в измерительной системе.

Оценка ТАКФ, полученная в соответствии с косвенным методом (см. формулы (2.14)–(2.16)) в рамках рассматриваемой модели некоррелированных сигнала и помехи в (2.22), может быть определена как

$$\begin{aligned} \hat{R}_M(k, l) = & \left\langle \hat{R}^{(m)}(k, l) \right\rangle = R_s(k, l) + \left\langle n^{(m)}(i) \right\rangle [R_s(k) + R_s(l) + R_s(k+l)] + \\ & + \bar{s}_M(i) [\hat{R}_{nM}^{(2)}(k) + \hat{R}_{nM}^{(2)}(l) + \hat{R}_{nM}^{(2)}(k+l)] + \hat{R}_{nM}(k, l), \end{aligned} \quad (2.30)$$

где $R_s(k, l)$ — ТАКФ исходного сигнала $s(i)$; $R_s(\dots)$ — автокорреляционная функция сигнала; $\hat{R}_{nM}^{(2)}(\dots)$ — оценки автокорреляционной функции шума; $\bar{s}_M(i)$ — среднее значение сигнала; $\hat{R}_{nM}^{(m)}(k, l)$ — оценка тройной корреляции шума.

Анализ (2.30) показывает, что оценка $\hat{R}_M(k, l)$ равна ТАКФ сигнала $R_s(k, l)$ тогда и только тогда, если одновременно выполняются три следующие условия:

$$\left\langle n^{(m)}(i) \right\rangle = 0; \quad \bar{s}(i) = 0; \quad \hat{R}_{nM}(k, l) = 0. \quad (2.31)$$

Отметим также и то, что оценки (2.29) и (2.30) являются асимптотически несмещенными и состоятельными в главной треугольной области симметрии ($p = 0, \dots, I-1$; $0 \leq q \leq p$; $p+q \leq I-1$) тогда и только тогда, когда [20]

$$|\hat{S}(0)| = \bar{s}(i) = 0. \quad (2.32)$$

Следовательно, необходимым условием несмещенности оценки биспектра сигнала согласно (2.32) является требование равенства нулю среднего значения сигнала (или равенство нулю амплитудного Фурье-спектра на нулевой частоте).

В случаях, когда среднее значение сигнала отличается от нуля или $|\hat{S}(0)| \neq 0$, оценка биспектра стремится асимптотически к несмещенной оценке в главной треугольной области за исключением отсчетов, лежащих на осях частот,

$$p = 0 \quad \text{или} \quad q = 0 \quad \text{или} \quad p + q = 0. \quad (2.33)$$

Анализ выражений (2.29) и (2.30) показывает, что присутствие помех на входе измерительной системы приводит к искажению получаемых оценок биспектра или ТАКФ, следствием которого являются помехи и искажения восстановленного сигнала. Очевидно, что чем в меньшей степени искажены оценки биспектра или ТАКФ, тем более высокое качество восстановления может быть достигнуто. Ниже в данном параграфе рассмотрены некоторые известные методы улучшения оценок биспектра или ТАКФ, а в разделе 2.2 более подробно проанализированы особенности подходов к решению этой задачи, предложенные авторами.

Для улучшения оценки биспектра в работе [20] предложено для восстановления амплитудного Фурье-спектра исключать отсчеты биспектра, лежащие на осях (2.33). В отличие от метода восстановления [11] с использованием отсчетов биспектра, лежащих на отмеченных осях (см. выражение (2.28)), алгоритм восстановления амплитудного Фурье-спектра [20] имеет вид

$$\begin{aligned} |\hat{S}(0)| &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{i=0}^{I-1} x^{(m)}(i), \quad p = 0, \quad q = 0, \\ |\hat{S}(1)| &= \left[\frac{|\hat{B}_s(1, 1)|^3 |\hat{B}_s(3, 1)|}{|\hat{B}_s(2, 1)| |\hat{B}_s(2, 2)|} \right]^{1/6}, \quad \begin{matrix} p = 1, \dots, I-1; & 1 \leq q \leq p; \\ p+q \leq I-1, \end{matrix} \\ |\hat{S}(2)| &= |\hat{B}_s(1, 1)| |\hat{S}(1)|^2, \\ &\dots\dots\dots, \\ |\hat{S}(I-1)| &= |\hat{B}_s(I-2, 1)| |\hat{S}(I-2)| |\hat{S}(1)|. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Следует, однако, отметить, что исключение из расчетов биспектральных отсчетов, лежащих на осях (2.33), приводит к потере части информации,

которая может быть весьма полезной в условиях работы при малых отношениях сигнал–шум. Поэтому, в случае малых отношений сигнал–шум использование рекурсивного алгоритма восстановления [11] представляется предпочтительным по сравнению с алгоритмом [20].

В работе [31] рассмотрен иной подход к задаче восстановления фазового спектра сигнала по оценке биспектра. В основе этого подхода по-прежнему лежит фундаментальное уравнение связи фазового биспектра и Фурье-спектра восстанавливаемого сигнала (2.24), однако, решение получают с помощью нерекурсивного метода наименьших квадратов с использованием абсолютно всех значений биспектра в главной треугольной области. Для решения задачи восстановления оценки Фурье-спектра по оценке фазового биспектра уравнение (2.24) представляют в следующем матричном виде

$$A\varphi = \gamma, \quad (2.35)$$

где φ — вектор неизвестных значений Фурье-фаз, равный

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N)^T, \quad (2.36)$$

где N — полное количество неизвестных Фурье-фаз; символ T обозначает операцию транспонирования; γ — вектор значений фазового биспектра, определяемый как

$$\gamma = (\gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \dots, \gamma_{1,N-1}, \gamma_{2,2}, \gamma_{2,3}, \dots, \gamma_{2,N-2}, \dots, \gamma_{N/2, N/2})^T. \quad (2.37)$$

Матрица коэффициентов A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Размерность матрицы (2.38) равна $(N/2)^2 x (N-1)$ при N четном и $[(N-1)(N+1)/4] x (N-1)$ при N нечетном.

Восстановление оценки фазового Фурье-спектра сигнала по методу, изложенному в [31], сводится к решению методом наименьших квадратов уравнения

$$\varphi = (A^T A)^{-1} A^T \gamma. \quad (2.39)$$

На практике при решении уравнения (2.39) методом наименьших квадратов возникают две основные трудности. Первая из них — проведение сложных операций обращения матриц большого размера. Вторая связана с неоднозначностью решения и, как следствие, возникают недопустимо большие фазовые ошибки, вызванные циклическими заворотами фазы биспектра, однозначно определенной только в пределах интервала от $-\pi$ до $+\pi$.

Для устранения последнего недостатка в работе [32] предложен метод разворачивания фазы биспектра, суть которого заключается в следующем. Фазовый биспектр определяется как

$$\gamma_{i,j} = \gamma'_{i,j} + 2\pi k_{i,j}, \quad (2.40)$$

где $\gamma'_{i,j}$ — главное значение аргумента комплексного биспектра, заданное на интервале $[0, 2\pi)$ и $k_{i,j}$ — целое число, которое определяет количество циклических заворотов фазы биспектра в произвольной точке биспектральной плоскости (i, j) .

При этом матричное уравнение (2.35) преобразовывается к виду

$$A\varphi = \gamma' + 2\pi \mathbf{k}, \quad (2.41)$$

где $\gamma' = (\gamma'_{1,1}, \gamma'_{1,2}, \dots, \gamma'_{1,N-1}, \gamma'_{2,2}, \gamma'_{2,3}, \dots, \gamma'_{2,N-2}, \dots, \gamma'_{N/2,N/2})^T$ — вектор главных значений фазового биспектра и вектор $\mathbf{k} = (k_{1,1}, k_{1,2}, \dots, k_{1,N-1}, k_{2,2}, k_{2,3}, \dots, k_{2,N-2}, \dots, k_{N/2,N/2})^T$.

В дополнение к уравнению (2.41) вводится также матрица C такая, чтобы обеспечить выполнение условия

$$CA = 0. \quad (2.42)$$

Умножив обе части уравнения (2.41) на матрицу C , получаем уравнения

$$CA\varphi = C(\gamma' + 2\pi \mathbf{k}), \quad (2.43)$$

$$C\mathbf{k} = (-1/2\pi)C\gamma'. \quad (2.44)$$

Решение уравнения (2.44) относительно $\mathbf{k}$ и подстановка решения в уравнение (2.41) позволяют реализовать процедуру развертывания фазы биспектра.

К основному недостатку метода [32] следует отнести его слабую помехоустойчивость, которая проявляется в возникновении фазовых ошибок при наличии шума, в результате чего правая часть уравнения (2.44) содержит вещественные величины, которые предлагается округлять до ближайших целых чисел, вводя тем самым погрешность в фазовую функцию.

Имеется и другой, принципиально отличающийся от рассмотренных выше, подход к биспектральному восстановлению сигналов, который предложен в работе [33]. Этот подход основан на соотношениях, связывающих биспектр сигнала со значениями нулей и полюсов минимально- и максимально-фазовой компоненты сигнала. Более подробное рассмотрение биспектрального подхода к задаче восстановления сигналов начнем именно с анализа данных соотношений.

Для этого вначале определим z -преобразование некоторой смешанно-фазовой авторегрессионной вещественной последовательности со скользящим средним $\{x(n)\}$ в виде следующей функции комплексной переменной $z = e^{j\omega}$:

$$\tilde{X}(z) = A_1 z^{-r} I(z^{-1}) O(z), \quad (2.45)$$

где A_1 — константа; r — целое число; $I(z^{-1})$ — минимально-фазовая компонента, равная

$$I(z^{-1}) = \frac{\prod_{i=1}^{L_1} (1 - a_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{L_3} (1 - c_i z^{-1})}, \quad (2.46)$$

где a_i ($|a_i| < 1$) и c_i ($|c_i| < 1$) — нули и полюсы наблюдаемой последовательности $\{x(n)\}$, соответственно; $O(z)$ — максимально-фазовая компонента, определяемая выражением

$$O(z) = \prod_i^{L_2} (1 - b_i z), \quad (2.47)$$

где b_i ($|b_i| < 1$) — нули наблюдаемой последовательности $\{x(n)\}$, соответствующие максимально-фазовой компоненте $O(z)$.

Бикепстр последовательности $\{x(n)\}$ в [33] определен в виде обратного преобразования Фурье натурального логарифма биспектра $B_x(\omega_1, \omega_2)$, т. е. есть бикепстр $c_x(m, n)$ равен

$$c_x(m, n) = F^{-1}[B_x(\omega_1, \omega_2)] = F^{-1}\{\ln [X(\omega_1)X(\omega_2)X^*(\omega_1 + \omega_2)]\}, \quad (2.48)$$

где F^{-1} — оператор обратного преобразования Фурье; $X(\omega) = \tilde{X}(e^{j\omega})$ — преобразование Фурье последовательности $\{x(n)\}$; здесь ω — частота.

При этом бикепстр $c_x(m, n)$ равен

$$c_x(m, n) = \begin{cases} \ln |A_1|, & m = 0, \quad n = 0, \\ -\frac{1}{n} A(n), & m = 0, \quad n > 0, \\ -\frac{1}{m} A(m), & n = 0, \quad m > 0, \\ \frac{1}{m} B(-m), & n = 0, \quad m < 0, \\ \frac{1}{n} B(-n), & m = 0, \quad n < 0, \\ -\frac{1}{n} B(n), & m = n > 0, \\ \frac{1}{n} A(-n), & m = n < 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.49)$$

где

$$A(k) = \sum_{i=1}^{L_1} a_i^k - \sum_{i=1}^{L_3} c_i^k, \quad (2.50)$$

$$B(k) = \sum_{i=1}^{L_2} b_i^k, \quad (2.51)$$

бикепстральные коэффициенты, которые содержат информацию о соответственно минимально- и максимально-фазовой компоненте наблюдаемой смешанно-фазовой последовательности.

Уравнения (2.45)–(2.51) лежат в основе параметрического метода восстановления сигнала. В соответствии с этим методом фазовый Фурье-спектр $\varphi_x(\omega)$ последовательности $\{x(n)\}$ определяют с помощью следующей процедуры прямого преобразования Фурье [33]

$$\varphi_x = F\{d(m)\}, \quad (2.52)$$

где F — оператор прямого преобразования Фурье;

$$d(m) = \begin{cases} j \frac{1}{2} [A(|m|) - B(|m|)], & m \neq 0, \\ 0, & m = 0. \end{cases} \quad (2.53)$$

Обратим внимание на следующую важную для ряда практических приложений особенность метода восстановления фазового Фурье-спектра (2.52)–(2.53). Вследствие того, что биспектр подавляет линейный фазовый сдвиг (см. выражение (2.12)), восстановленный фазовый Фурье-спектр (2.52) будет соответствовать смещенной версии исходной последовательности $\{x(n)\}$, сдвинутой на некоторую величину.

Амплитудный Фурье спектр $|X(\omega)|$ наблюдаемой последовательности $\{x(n)\}$ можно представить [33] с помощью следующей процедуры прямого преобразования Фурье

$$\ln |X(\omega)|^2 = F\{c_{P_x}(m)\}, \quad (2.54)$$

где

$$c_{P_x}(m) = \begin{cases} -\frac{1}{m} [A(m) + B(m)], & m > 0, \\ \frac{1}{m} [A(-m) + B(-m)], & m < 0. \end{cases} \quad (2.55)$$

Следует особо отметить, что в параметрическом методе восстановления сигналов (2.52)–(2.55) кепстральные коэффициенты (2.50) и (2.51) становятся неопределенными в случае, когда нули или полюсы наблюдаемой последовательности $\{x(n)\}$ (см. (2.46) и (2.47)) находятся на окружности единичного радиуса на комплексной плоскости. Если данные нули и полюсы располагаются в непосредственной близости к окружности единичного радиуса, то количество членов ряда кепстральных коэффициентов $A(m)$ и $B(m)$ резко возрастает и автоматически возрастает до практически недопустимых пределов размерность двумерного преобразования Фурье в (2.52) и в (2.54).

Для смещения нулей на достаточное удаление от единичной окружности можно умножить $x(n)$ на степенную функцию a^n [33]. При этом в случае отсутствия аддитивного шума, если величина $a < 1$, то нули, оставаясь на комплексной плоскости в пределах окружности единичного

радиуса, смещаются к началу координат, а если $a > 1$, то нули смещаются за пределы данной окружности, удаляясь от нее. Однако процедура умножения наблюдаемой последовательности на функцию a^n при наличии в системе аддитивного шума может спровоцировать серьезную проблему — шум после данного перемножения может стать нестационарным процессом.

Поэтому для практического применения бикепстрального метода восстановления сигналов [33] в присутствии шума предложена процедура оконного взвешивания ТАКФ, которую представляют в виде

$$R_z(m, n) = a^{m+n} R_y(m, n), \quad (2.56)$$

где $R_z(m, n)$ — ТАКФ, полученная в результате операции взвешивания двумерным окном типа a^{m+n} ТАКФ аддитивной смеси информационной последовательности $x(n)$ и гауссова шума $w(n)$ с нулевым средним значением, равной $y(n) = x(n) + w(n)$. Оконное взвешивание (2.56) позволяет переместить нули и полюсы $x(n)$, которые находятся на окружности единичного радиуса или в непосредственной близости от нее, внутрь ($a < 1$) или за пределы ($a > 1$) данной окружности на комплексной плоскости. Поэтому соответствующим подбором величины a можно преобразовать обрабатываемый сигнал к минимально- или максимально-фазовому сигналу, для которых кепстральные коэффициенты определены и их количество ограничено величиной, приемлемой для практических расчетов.

Следует, однако, помнить, что из-за отмеченной ранее инвариантности биспектра (бикепстра) по отношению к смещению исходного сигнала, восстановленный с помощью (2.56) сигнал будет смещен по отношению к исходному сигналу $x(n)$, т. е. восстановленный сигнал можно записать в виде выражения

$$a^{-n} z(n) = c x(n - n_0), \quad (2.57)$$

где $z(n)$ — восстановленная последовательность; n_0 — целое число, которое определяет смещение исходного сигнала; c — масштабный коэффициент.

В качестве иллюстрации бикепстрального метода, рассмотренного выше, в [33] описан бикепстральный итерационный алгоритм восстановления сигнала $\{x(n)\}$, который не имеет нулей на окружности единичного радиуса на комплексной плоскости. Приведем подробное описание этого итерационного алгоритма восстановления сигналов, который сводится к следующей последовательности шагов.

ШАГ 1. Инициализация кепстра мощности $c_{P_x}^{(0)}(m)$ в виде некоторой произвольной величины, равной

$$c_{P_x}^{(0)}(m) = 1, \quad m = 1, \dots, r, \quad (2.58)$$

где значение r определяет необходимый для практической реализации алгоритма предел размера области “срезания” (ограничения) бикепстральных коэффициентов $\{A(m)\}$ и $\{B(m)\}$, которые определены формулами (2.50) и (2.51).

Расчет коэффициента бикогерентности по формуле

$$b_x(\omega_1, \omega_2) = \frac{B_x(\omega_1, \omega_2)}{|B_x(\omega_1, \omega_2)|} = e^{j\Phi_B(\omega_1, \omega_2)}, \quad (2.59)$$

где $\Phi_B(\omega_1, \omega_2)$ — фазовый биспектр сигнала $\{x(n)\}$.

Расчет кепстра бикогерентности в соответствии с обратным преобразованием Фурье фазового биспектра (2.59).

$$c_{b_x}(m, n) = jF^{-1}\{\Phi_B(\omega_1, \omega_2)\}. \quad (2.60)$$

Использование следующего соотношения связи сечения кепстра $c_{b_x}(m, 0)$ с разностью бикепстральных коэффициентов

$$c_{b_x}(m, 0) = -\frac{1}{2m} [A(m) - B(m)], \quad m > 0 \quad (2.61)$$

для определения разности бикепстральных коэффициентов

$$A(m) - B(m) = D(m), \quad m = 1, \dots, r. \quad (2.62)$$

ШАГ 2. Вычисление бикепстральных коэффициентов

$$A^{(i)}(m) = \frac{-mc_{P_x}^{(i)}(m) + D(m)}{2}, \quad (2.63)$$

$$B^{(i)}(m) = \frac{-mc_{P_x}^{(i)}(m) - D(m)}{2}, \quad r > m > 0, \quad (2.64)$$

где i — индекс шага итерации и

$$c_{P_x}(m) = \begin{cases} -(1/m)[A(m) + B(m)], & m > 0, \\ \ln |A_1|^2, & m = 0, \\ (1/m)[A(-m) + B(-m)], & m < 0, \end{cases}$$

— кепстр мощности, соответствующий кепстру энергетического спектра сигнала.

ШАГ 3. Восстановление сигнала $x^{(i)}(n)$ в i -й итерации с помощью следующих уравнений

$$x^{(i)}(n) = F^{-1}\{e^{c_x^{(i)}(m)}\}, \quad n = 0, \dots, L-1, \quad (2.65)$$

где

$$c_x^{(i)}(m) = \begin{cases} -(1/m)A^{(i)}(m), & m > 0, \\ 0, & m = 0, \\ (1/m)B^{(i)}(-m), & m < 0. \end{cases} \quad (2.66)$$

ШАГ 4. Определение функции $y^{(i)}(n) = x^{(i)}(n)R_N(n)$, где

$$R_N(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } N - n_0 \leq n \leq L - n_0 - 1, \\ 1, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и L — размерность преобразования Фурье в (2.65), n_0 — смещение исходного сигнала, введенное в (2.57). Вследствие данного смещения восстановленный в соответствии с (2.65) после i -й итерации сигнал $x^{(i)}(n)$ будет находиться в интервале $[-n_0, N - n_0 - 1]$.

Данная особенность кепстрального восстановления сигнала требует более детального разъяснения. Дело в том, что после процедуры восстановления (2.65) сигнал $x^{(i)}(n)$ появится в положении $L - n$ при $L > 2N$, что подтверждается следующим уравнением:

$$\begin{aligned} x^{(i)}(L - n) &= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X^{(i)}(k) e^{i(2\pi/L)k(L-n)} = \\ &= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X^{(i)}(k) e^{i(2\pi/L)k(-n)} = x^{(i)}(-n), \end{aligned} \quad (2.67)$$

где

$$X^{(i)}(k) = e^{F\{c_x^{(i)}(k)\}}, \quad k = 0, \dots, L - 1. \quad (2.68)$$

ШАГ 5. Расчет энергетического спектра сигнала $y^{(i)}(n)$ и итерационное обновление массива кепстра мощности $c_{P_x}(m)$, т. е. выполнение процедуры

$$c_{P_x}^{(i+1)} = F^{-1} \{\ln |Y^{(i)}(\omega)|^2\}. \quad (2.69)$$

Повторение шагов 2–5 до тех пор, пока восстановленный сигнал $x^{(i)}(n)$ на последующих шагах итерации перестанет изменяться. Иначе говоря, после наступления момента, когда величина

$$E_i = \sum_{n=0}^{L-1} \{x^{(i)}(n) - x^{(i-1)}(n)\}^2 \quad (2.70)$$

примет значения $E_i < \delta$ (δ — малая величина), процедуру восстановления останавливают на итерации под номером i . Таким образом, на i -й итерации восстановленный сигнал $x^{(i)}(n)$ будет приблизительно равен исходному сигналу $x(n)$ с точностью до масштабного коэффициента, определенного в (2.57).

Отметим, что поскольку величина смещения n_0 восстановленного сигнала априорно неизвестна, то остается только надеяться, что величина n_0 попадет в интервал $[0, N - 1]$. Поэтому сходимость алгоритма наступит только тогда, когда величина n_0 будет подобрана верной. Для неправильных значений n_0 величина ошибки E_i (2.70) будет увеличиваться при $i > I$. Для проверки сходимости алгоритма в [33] сравнивают начальные (выбранные в начале итерационной процедуры) разности кепстральных коэффициентов $D(m) = A(m) - B(m)$, $m = 1, \dots, r$ с разностью кепстральных коэффициентов, которая соответствует восстановленному сигналу $y^{(I)}(n)$, — т. е.

с $\hat{D}(m)$, $m = 1, \dots, r$. Если $D(m) \neq \hat{D}(m)$, $m = 1, \dots, r$, то величина n_0 считается неверной и итерационная процедура повторяется для нового значения n_0 . В противном случае $x^{(I)}(n)$ соответствует сходимости решения.

Анализ биекстрального итерационного алгоритма восстановления сигналов [33] позволяет отметить его следующие особенности, которые необходимо учитывать на практике:

1) требование отсутствия нулей обрабатываемого сигнала на окружности единичного радиуса на комплексной плоскости (отсутствия нулей в Фурье-спектре сигнала) может ограничивать применимость метода для многих практических приложений;

2) сходимость итерационной процедуры непредсказуема и в большой степени зависит от правильности выбора начальных условий, которые, в свою очередь, определяются априорными сведениями о характеристиках обрабатываемого сигнала;

3) следует относиться с осторожностью к процедуре оконного взвешивания (2.56), которая корректна при больших отношениях сигнал–шум или при наличии бесконечно большого количества обрабатываемых реализаций. В противном случае точность метода восстановления резко снижается из-за возникновения нестационарного шума, вызванного умножением зашумленной оценки ТАКФ на степенную функцию.

Таким образом, для всех рассмотренных выше методов биспектральной и биекстральной обработки сигналов характерен ряд ограничений и принципиальных недостатков, которые сдерживают их применение для решения практически важных задач оценки процессов и задач фильтрации.

Для ряда прикладных задач обработки сигналов, например, для задач обнаружения слабых целей в системах радиолокации и гидролокации, а также при получении изображений объектов слабой интенсивности в астрономии отношение сигнал–шум часто не превышает единицу или имеет значение, не намного превышающее единицу. При этом количество реализаций, наблюдаемых на входе системы обработки на практике, как правило, недостаточно велико.

Практические точность и помехоустойчивость биспектральных методов фильтрации, достигаемые при конечном наборе наблюдаемых реализаций исследуемого процесса, ограничены из-за наличия больших флуктуационных ошибок в оценках биспектров при малых входных отношениях сигнал–шум; из-за динамических ошибок в оценках биспектров, обусловленных присутствием на входе системы обработки априорно неизвестной постоянной составляющей наблюдаемого процесса и сигнально-зависимым характером помеховой составляющей в оценке биспектра, а также, из-за отличия закона распределения аддитивной помехи от нормального. Особо следует отметить, что малоизученными остаются проблемы биспектрального восстановления сигналов в условиях воздействия негауссовых помех.

Поэтому, основное наше внимание в дальнейшем будет уделено разработке и исследованию биспектральных методов фильтрации, направленных на преодоление отмеченных выше недостатков.

2.2. Восстановление одномерных вещественных сигналов по оценкам биспектральной плотности в присутствии гауссовых и импульсных помех

2.2.1. Алгоритмы сглаживания восстановленных по биспектральным данным фазового и амплитудного Фурье-спектров одномерными линейными и нелинейными фильтрами. Рассмотрим алгоритмы восстановления сигналов неизвестной формы по искаженным гауссовым и импульсным шумом биспектральным данным, зарегистрированным на ограниченной конечным ансамблем реализаций выборке [9, 34].

Предположим, что на входе системы обработки регистрируется совокупность конечного набора M искаженных помехой реализаций наблюдаемого сигнала. При этом m -я реализация $x^{(m)}(i)$ ($m = 1, 2, \dots, M$), поступающая на вход измерительной системы (системе оценивания неизвестной формы сигнала), представляет собой аддитивную смесь полезного детерминированного сигнала $s(i)$ и шума, содержащего компоненту гауссова $n_G(i)$ и компоненту импульсного $n_{\text{imp}}(i)$ шума. Наряду с воздействием смеси гауссова и импульсного шума полезный сигнал может быть также искажен случайными временными сдвигами.

Будем полагать также, что исходный неискаженный сигнал $s(i)$ задан одномерной совокупностью вещественных временных или пространственных отсчетов, количество которых $i = 0, 1, 2, \dots, I - 1$ ограничено конечным интервалом наблюдения в измерительной системе. При этом ТАКФ исходного информационного сигнала предполагается отличной от нуля.

В рамках рассматриваемой модели m -я реализация $x^{(m)}(i)$ может быть представлена как

$$x^{(m)}(i) = s(i - \tau^{(m)}) + n^{(m)}(i), \quad (2.71)$$

где $n^{(m)}(i) = n_G^{(m)}(i) + n_{\text{imp}}^{(m)}(i)$; $n_G^{(m)}(i)$ — m -я реализация белого аддитивного стационарного гауссова шума с нулевым средним значением $\langle n_G(i) \rangle = 0$ и выборочной дисперсией, равной $\sigma_G^{(m)2}$; $n_{\text{imp}}^{(m)}(i)$ — m -я реализация импульсного шума, значения которого для любого отсчета отличны от нуля с вероятностью P_{imp} ; $\tau^{(m)}$ — случайный (меняющийся от реализации к реализации) сдвиг исходного информационного сигнала $s(i)$.

Компонента гауссова шума $n_G^{(m)}(i)$ и компонента импульсного шума $n_{\text{imp}}^{(m)}(i)$ полагаются некоррелированными с исходным сигналом $s(i)$.

В соответствии с моделью (2.71) рассматриваются три основных источника искажений. Первый из них — это аддитивный белый гауссов шум, происхождение которого связано обычно с собственными аппаратными шумами измерительной системы, а также с влиянием аддитивных шумов среды распространения сигналов. Второй источник искажений — это импульсный шум, который может возникать, например, вследствие влияния промышленных помех. Наконец, третий источник — это случайный сдвиг

сигнала, величина которого может меняться от реализации к реализации, например, под воздействием задержек сигнала в случайно-неоднородной среде распространения, а также в результате случайных взаимных перемещений наблюдаемого объекта и антенны измерительной системы.

Согласно выбранной модели сигнала и помех (2.71) оцениванию подлежит форма сигнала, который маскирован помехами.

Воспользуемся косвенным методом оценки биспектральной плотности (2.14)–(2.16) и сформируем из конечного набора наблюдаемых на входе измерительной системы реализаций (2.71) оценку ТАКФ сигнала неизвестной формы вида

$$\hat{R}_s(k, l) = \left\langle \sum_{i=0}^{I-1} x^{(m)}(i) x^{(m)}(i+k) x^{(m)}(i+l) \right\rangle_M. \quad (2.72)$$

С учетом аддитивной модели помех двумерная оценка ТАКФ может быть описана суммой сигнальной составляющей ТАКФ и семи помеховых членов (см. выражение (2.30). При этом оценка (2.72) совпадает с сигнальной составляющей $R_s(k, l)$ ТАКФ при одновременном выполнении трех условий (2.31). Отметим, что на практике одновременное выполнение данных условий имеет место весьма редко. Поэтому, практически всегда оценка ТАКФ, а следовательно, и оценка биспектральной плотности обрабатываемого сигнала оказываются искаженными шумом, который в конечном итоге “просачивается” в Фурье-спектр сигнала, восстанавливаемого по оценке биспектральной плотности, а также в выходной сигнал, восстанавливаемый в виде модуля дискретного преобразования Фурье

$$\hat{s}_{\text{rest}}(i) = \left| IFT \left\{ \left| \hat{S}_{\text{bisp}}(r) \right| e^{j\hat{\varphi}_{\text{bisp}}(r)} \right\} \right|, \quad r = 0, 1, \dots, I-1, \quad (2.73)$$

где $IFT\{\dots\}$ означает процедуру обратного преобразования Фурье; $\hat{\varphi}_{\text{bisp}}(r)$ и $\left| \hat{S}_{\text{bisp}}(r) \right|$ — оценки фазового и амплитудного Фурье-спектра сигнала, которые восстановлены по оценке биспектральной плотности, например, при использовании рекурсивных алгоритмов (2.27) и (2.28).

Использование модульного значения оценки в (2.73) сопряжено с особенностями практического оценивания формы огибающей восстанавливаемого сигнала на выходе амплитудного детектора.

Отметим, что в условиях малых (близких к единице) входных отношений сигнал–шум представляется целесообразным использование рекурсивных алгоритмов (см. раздел 1). Однако, проведенные авторами исследования рекурсивных алгоритмов восстановления сигнала [10, 11] показали, что, несмотря на отмеченную в предыдущем разделе возможность сглаживания шума с помощью усреднения соответствующих значений отсчетов фазового и амплитудного Фурье-спектра, точность системы восстановления сигнала остается невысокой из-за просачивания аддитивного гауссова шума в оценку ТАКФ (а также в оценку биспектра) при ограниченном на практике объеме выборки. Кроме того, при воздействии смеси гауссова

и импульсного шума ошибки на выходе системы биспектрального восстановления резко возрастают.

Поэтому для улучшения точности биспектрального восстановления сигнала в присутствии аддитивного гауссова шума и смеси гауссова и импульсного шума целесообразно использовать алгоритмы восстановления сигнала, основанные на сглаживании зашумленных фазового и амплитудного Фурье-спектров сигнала, восстановленных из оценки биспектральной плотности [9, 34]. Среди разнообразных классов линейных и нелинейных фильтров, применение которых может оказаться для рассматриваемого приложения эффективным, нами ниже исследованы лишь наиболее характерные представители этих классов, а именно усредняющий и медианный фильтры. Это обусловлено двумя обстоятельствами. Во-первых, мы стремились продемонстрировать наличие положительного эффекта даже при использовании таких простых методов сглаживания и проиллюстрировать перспективность проведения дальнейших исследований для предлагаемого комбинированного подхода к биспектрально-фильтровому восстановлению сигналов и изображений. Во-вторых, сложность рекурсивного алгоритма восстановления $|\hat{S}_{\text{bisp}}(r)|$ и $\hat{\varphi}_{\text{bisp}}(r)$ не позволяет аналитически определить статистические характеристики помех и искажений комплексного спектра и, соответственно, дать обоснованные рекомендации для выбора наилучших методов сглаживания (фильтрации) одномерных процессов рассматриваемого класса.

Процедуры сглаживания амплитудного $|\hat{S}_{\text{bisp}}(r)|$ и фазового $\hat{\varphi}_{\text{bisp}}(r)$ Фурье-спектров сигнала с помощью линейного (усредняющего) и нелинейного (медианного) фильтров описываются выражениями

$$|\hat{S}_{\text{bispm}}(r)| = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |\hat{S}_{\text{bisp}}(r+n)|, \quad (2.74)$$

$$\hat{\varphi}_{\text{bispm}}(r) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \hat{\varphi}_{\text{bisp}}(r+n), \quad (2.75)$$

$$|\hat{S}_{\text{bispme}}(r)| = MED \left\{ |\hat{S}_{\text{bisp}}(k)| \right\}, \quad k = r-N, \dots, r+N, \quad (2.76)$$

$$\hat{\varphi}_{\text{bispme}}(r) = MED \left\{ \hat{\varphi}_{\text{bisp}}(k) \right\}, \quad k = r-N, \dots, r+N, \quad (2.77)$$

где $(2N+1)$ — размер скользящего одномерного окна для усредняющего и медианного фильтров; процедура $MED\{\dots\}$ означает расчет медианы.

Подставляя сглаженные оценки амплитудного Фурье-спектра (2.74) или (2.76) и сглаженные оценки фазового Фурье-спектра (2.75) или (2.77) в выражение (2.73), получим оценку сигнала на выходе системы восстановления.

Основанием для ожидаемого улучшения качества восстановления служит тот факт, что для определенных видов информационных сигналов их Фурье-спектры являются более гладкими функциями, чем сами сигналы,

и тогда, соответственно, при фильтрации оценок спектров можно ожидать более эффективного подавления помеховой составляющей, в частности, за счет использования фильтров с размерами скользящего окна, большими, чем размеры скользящего окна фильтров, при которых их применение во временной или пространственной области не приводит к существенному искажению формы сигнала $s(i)$.

Приведем результаты статистических исследований комбинированных биспектрально-фильтровых алгоритмов восстановления сигнала неизвестной формы [9, 34]. Для количественной оценки точности восстановления сигнала и сравнительного анализа эффективности восстановления сигналов различными (известными и предложенными) методами анализировались следующие параметры:

а) усредненные по ансамблю реализаций дисперсия флуктуаций $\bar{\sigma}_{\text{inp}}^2$ и отношение сигнал–шум $\overline{SNR}_{\text{inp}}$ на входе системы обработки

$$\bar{\sigma}_{\text{inp}}^2 = \left\langle \frac{1}{I-1} \sum_{i=0}^{I-1} [x^{(m)}(i) - s(i)]^2 \right\rangle_{M_1}, \quad (2.78)$$

$$\overline{SNR}_{\text{inp}} = P_s / \bar{\sigma}_{\text{inp}}^2, \quad (2.79)$$

где M_1 — количество статистически независимых реализаций, участвующих в усреднении по ансамблю из этих реализаций; $P_s = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} [s(i) - \bar{s}]^2$ — мощность исходного сигнала $s(i)$ и $\bar{s} = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} s(i)$;

б) усредненная по ансамблю реализаций дисперсия флуктуаций $\bar{\sigma}_{\text{out Bisp/Comb}}^2$ на выходе биспектральной системы восстановления сигналов и комбинированной (биспектрально-фильтровой) системы восстановления с усредняющим/медианным фильтром, которые рассчитывались по минимуму функционала

$$\bar{\sigma}_{\text{out Bisp/Comb}}^2 = \left\langle \min_t \left\{ \frac{1}{I-1} \sum_{i=0}^{I-1} [\tilde{s}_{\text{Bisp/Comb}}^{(m)}(i) - s(i-t)]^2 \right\} \right\rangle_{M_1}, \quad (2.80)$$

где $\tilde{s}_{\text{Bisp/Comb}}^{(m)}(i)$ — m -я реализация из M_1 наблюдений на выходах рассматриваемых (традиционной и двух предложенных) систем восстановления сигналов; t — сдвиг, который введен в расчет ошибки (2.80) с учетом отмеченной выше (см. формулу (2.12) инвариантности биспектра к сдвигу восстанавливаемого сигнала;

в) усредненное по ансамблю реализаций отношение сигнал–шум $\overline{SNR}_{\text{out}}$, которое рассчитывалось на выходе традиционной системы для биспектрального восстановления сигнала и для комбинированного метода восстановления сигнала с использованием усредняющего или медианного

фильтра в виде

$$\overline{SNR}_{out} = P_s / \overline{\sigma}_{out}^2 \text{ Bisp/Comb}, \quad (2.81)$$

г) среднеквадратичный критерий качества (точности) восстановления сигнала, позволяющий оценить улучшение отношения сигнал–шум на выходе системы восстановления по сравнению с входом

$$\varepsilon = \overline{SNR}_{out} / \overline{SNR}_{inp}. \quad (2.82)$$

Ниже приведены результаты статистических исследований для трех следующих методов восстановления сигнала:

1) традиционного метода восстановления сигнала из оценки биспектра [10, 11], основанного на рекурсивном алгоритме восстановления фазового и амплитудного Фурье-спектров сигнала по оценкам биспектра;

2) комбинированного метода восстановления сигнала с использованием сглаживающего медианного фильтра [9, 34];

3) комбинированного метода восстановления сигнала с использованием сглаживающего усредняющего фильтра [9, 34].

Результаты численного моделирования восстановления сигналов представлены для двух случаев.

В первом случае (рассматривается единичная выборка и присутствие только аддитивного гауссова шума) значения дисперсии шума на входе и выходе системы восстановления, а также отношения сигнал–шум и оценки ТАКФ рассчитывались для каждой m -й реализации. После этого проводился расчет усредненных величин $\overline{SNR}_{inp}$ и $\overline{SNR}_{out}$ по формулам (2.79) и (2.81), а также величины ε по результатам, полученным для $M_1 = 10$ независимых реализаций (см. формулу (2.82)).

Во втором случае (исследуется выборка из 200 реализаций и наличие смеси аддитивного гауссова и импульсного шумов) статистические исследования и сравнительный анализ проводились для традиционного метода 1 и для комбинированных методов 2 и 3. В отличие от первого случая оценки ТАКФ рассчитываются на основе формулы (2.72) для большого ансамбля из $M = 200$ независимых реализаций. Величины $\overline{SNR}_{inp}$, $\overline{SNR}_{out}$ и ε рассчитывались с использованием формул (2.79), (2.80) и (2.82), соответственно, причем в последних формулах величина $M_1 = 200$.

На рис. 2.1 приведен исходный тестовый сигнал, наблюдаемый на сетке $I = 256$ отсчетов в виде совокупности двух близко расположенных импульсов прямоугольной формы с различными амплитудами и относительным сдвигом между импульсами, равным $\Delta t_{12} = 9$ отсчетам. Амплитуды сигнальных импульсов выбирались равными $A_1 = 2$ и $A_2 = 6$, причем длительности импульсов выбирались короткими и равными $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 2$ отсчетам. Нормированная мощность данного исходного тестового сигнала равна $P_s = 0,9549$. На данном графике представлена зависимость нормированной амплитуды тестового сигнала от номера отсчета в условиях отсутствия помех.

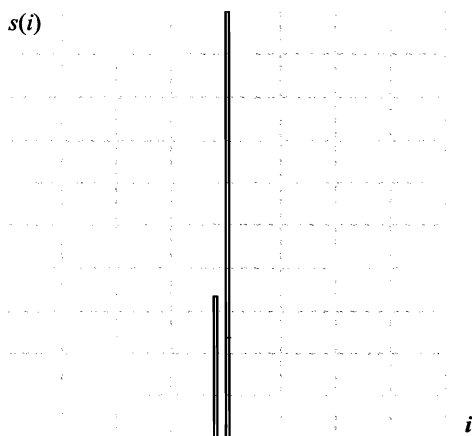


Рис. 2.1. Исходный тестовый сигнал (помехи отсутствуют): амплитуда сигнала как функция номера отсчета

Для ряда практических приложений импульс с амплитудой A_1 можно трактовать как “информационный”, в то время, как наличие второго импульса может быть обусловлено, например, активной помехой, при этом именно выявление импульса с амплитудой A_1 на фоне помех является основной задачей. Рассматриваемая модель тестового сигнала и цель вторичной обработки принятых сигналов типичны для задач обнаружения малоразмерных объектов на фоне мощной активной помехи, например, в радиолокации, или для задач идентификации звезды слабой интенсивности, наблюдаемой на фоне близко расположенной мощной звезды в астрономии.

Очевидно, что для рассматриваемой модели применение усредняющего фильтра непосредственно во временной (пространственной) области с целью подавления помех неизбежно приведет к большим динамическим ошибкам, проявляющимся в “размытии” сигнальных импульсов, причем степень “размытия” возрастает при увеличении размера скользящего окна. Медианный фильтр при его применении во временной (пространственной) области для рассматриваемой модели информационной составляющей способен “сохранить” сигнальные импульсы только тогда, когда размер его апертуры не больше трех отсчетов, но при этом и эффективность подавления помех очень низкая. С другой стороны, медианный фильтр с размером скользящего окна, большим, чем три отсчета, вообще неприменим, так как он устранил сигнальные импульсы, “воспринимая” их, как импульсную помеху.

На рис. 2.2–2.4 приведены соответственно график ТАКФ, а также графики амплитудного и фазового биспектров исходного тестового сигнала, изображенного на рис. 2.1 (количество отсчетов по обеим горизонтальным осям равно 256). Хорошо видно, что амплитудный и фазовый биспектры являются достаточно гладкими функциями, хотя фазовый биспектр и имеет резкие скачки (завороты) значений в области высоких частот, наличие которых обусловлено спецификой расчета фазы при условии, что ее значения должны находиться в пределах интервала $[-\pi; \pi]$.

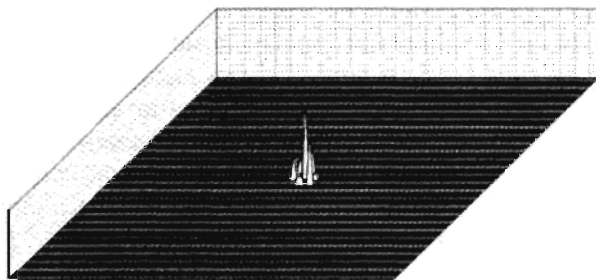


Рис. 2.2. Тройная автокорреляционная функция тестового сигнала (в отсутствие помех): зависимость величины ТАКФ от индексов сдвига k и l

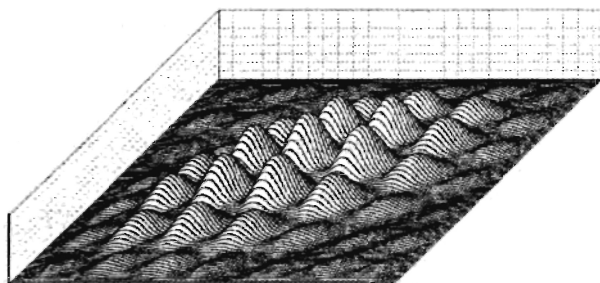


Рис. 2.3. Амплитудный биспектр тестового сигнала (в отсутствие помех): зависимость биамплитуды от частотных индексов p и q

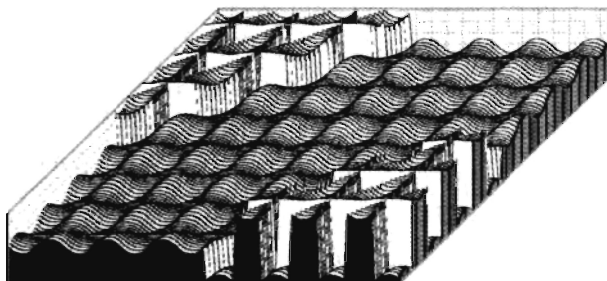


Рис. 2.4. Фазовый биспектр тестового сигнала (в отсутствие помех): зависимость бифазы от частотных индексов p и q

Дисперсия гауссова шума, искажающего информационный сигнал, задавалась равной трем фиксированным значениям $\bar{\sigma}_{\text{inp}}^2 = 0,3; 0,5$ и $1,0$, т. е. моделировались входные отношения сигнал-помеха, близкие к единице. Для импульсного шума типа “соль и перец” были выбраны следующие исходные параметры: амплитуды положительных и отрицательных импульсных выбросов: соответственно $A_{\text{pos}} = 2$ (амплитуды положительных импульсных выбросов выбирались равными амплитуде информационного импульса) и $A_{\text{neg}} = 0$; вероятности появления отрицательных P_{neg} и положительных P_{pos} импульсных выбросов принимали три значения $P_{\text{neg}} = P_{\text{pos}} = 5\%, 10\%$ и 30% (при этом $P_{\text{neg}} = P_{\text{pos}}$ и суммарная вероятность $P_{\text{imp}} = P_{\text{neg}} + P_{\text{pos}}$, см. табл. 2.2). Для случая смешанного шума дисперсия компоненты гауссового шума фиксировалась, $\bar{\sigma}_{\text{inp}}^2 = 0,3$.

Во всех расчетах тестовый сигнал, исходное положение которого показано на рис. 2.1, подвергался случайным сдвигам, которые менялись от реализации к реализации с девиацией, равной 24 отсчетам, в соответствии с равномерным законом распределения.

В табл. 2.1 и 2.2 приведены результаты численных расчетов для первого случая, т. е. при обработке единичных реализаций наблюдаемых процессов. Исследовалась устойчивость методов восстановления к гауссовым и негауссовым шумам с получением последующих усредненных оценок точности

Таблица 2.1. Характеристики точности восстановления сигнала неизвестной формы при наличии гауссова шума с нулевым средним значением

Метод	$\overline{SNR}_{\text{inp}}$	$\overline{SNR}_{\text{out}}$	ε	$\overline{SNR}_{\text{inp}}$	$\overline{SNR}_{\text{out}}$	ε	$\overline{SNR}_{\text{inp}}$	$\overline{SNR}_{\text{out}}$	ε
Размер скользящего окна $2N + 1 = 3$									
1	3,166	5,898	1,863	1,907	3,989	2,092	0,947	1,948	2,056
2		7,887	2,491		5,343	2,802		2,644	2,792
3		8,368	2,643		5,767	3,024		2,829	2,987
Размер скользящего окна $2N + 1 = 5$									
1	3,238	5,343	1,650	1,979	3,699	1,869	0,939	1,838	1,957
2		7,324	2,262		5,917	2,990		3,816	3,393
3		8,085	2,497		7,239	3,658		3,617	3,852
Размер скользящего окна $2N + 1 = 7$									
1	3,142	5,458	1,737	1,945	3,390	1,743	0,993	2,038	2,052
2		9,605	3,057		5,934	3,051		4,027	4,055
3		11,063	3,521		6,518	3,351		4,611	4,644
Размер скользящего окна $2N + 1 = 9$									
1	3,245	6,146	1,894	1,908	4,449	2,332	0,953	2,038	2,139
2		10,731	3,307		9,626	5,045		4,380	4,596
3		12,72	3,920		11,675	6,119		4,927	5,170

Таблица 2.2. Характеристики точности восстановления сигнала неизвестной формы при наличии гауссова шума с нулевым средним значением и фиксированной величиной дисперсии $\bar{\sigma}_{\text{inp}}^2 = 0,3 = \text{const}$ и импульсного шума $P_{\text{pos}} = P_{\text{neg}} = 5\%$; 10%; 30 %)

Метод	$\overline{SNR}_{\text{inp}}$	$\overline{SNR}_{\text{out}}$	ε	$\overline{SNR}_{\text{inp}}$	$\overline{SNR}_{\text{out}}$	ε	$\overline{SNR}_{\text{inp}}$	$\overline{SNR}_{\text{out}}$	ε
Размер скользящего окна $2N + 1 = 3$									
1	2,030	3,110	1,532	1,553	2,729	1,757	0,991	1,794	1,810
2		4,413	2,174		4,319	2,781		2,910	2,936
3		4,498	2,211		4,338	2,793		2,478	2,501
Размер скользящего окна $2N + 1 = 5$									
1	2,008	3,032	1,510	1,767	2,070	1,774	0,910	1,675	1,841
2		5,012	2,496		5,660	3,203		3,274	3,598
3		5,012	2,496		6,121	3,464		3,226	3,545
Размер скользящего окна $2N + 1 = 7$									
1	1,950	3,050	1,564	1,709	3,114	1,822	1,077	2,070	1,922
2		5,146	2,639		5,952	3,483		4,056	4,184
3		5,581	2,862		6,953	3,858		4,962	4,607
Размер скользящего окна $2N + 1 = 9$									
1	1,871	3,314	1,771	1,749	3,232	1,848	1,074	1,939	1,805
2		6,971	3,726		6,576	3,760		4,039	3,761
3		7,475	3,995		7,132	4,078		4,219	3,928

по 10 независимым реализациям. Для предлагаемых комбинированных методов 2 и 3 размер скользящего окна выбирался равным $(2N + 1) = 3; 5; 7$ и 9 отсчетов.

Анализ данных табл. 2.1 позволяет отметить следующее:

1) значения отношений сигнал–шум на выходе $\overline{SNR}_{\text{out}}$ и значения показателей качества восстановления ε , рассчитанные с использованием предлагаемых комбинированных методов 2 и 3, превышают соответствующие величины, полученные традиционным методом 1, как при больших ($\overline{SNR}_{\text{inp}} \approx 3$), так и при малых ($\overline{SNR}_{\text{inp}} \approx 1$) значениях отношений сигнал–помеха на входе;

2) для рассмотренных пределов изменения входного отношения сигнал–шум (в 3 раза) эффективность методов 2 и 3 (см. значения ε) по отношению к воздействию гауссова шума сохраняется; значения ε для методов 2 и 3 больше, чем для метода 1 в 1.5 раза (для размера скользящего окна $2N + 1 = 3$) и в 2 раза (для размера скользящего окна $2N + 1 = 9$);

3) с увеличением размера скользящего окна от $2N + 1 = 3$ до $2N + 1 = 9$ наблюдается более эффективное сглаживание аддитивного гауссова шума;

4) все три исследуемых метода отличаются инвариантностью к случайному сдвигу тестового сигнала.

Результаты, приведенные в табл. 2.2, позволяют отметить следующие закономерности:

1) в целом, все три исследуемых метода отличаются худшим (по критерию ϵ) подавлением смешанного шума по сравнению с подавлением гауссова шума (см. табл. 2.1); тем не менее, как показал проведенный анализ, методы биспектральной обработки являются применимыми и для восстановления сигналов, искаженных помехами смешанного вида, что, по имеющейся у нас информации, ранее не исследовалось и не отмечалось в литературе;

2) в условиях воздействия смешанного шума с увеличением размера скользящего окна показатели эффективности комбинированных методов улучшаются;

3) комбинированные методы 2 и 3 отличаются устойчивым качеством восстановления сигналов при изменении вероятности импульсных выбросов $P_{\text{imp}} = P_{\text{pos}} + P_{\text{neg}}$ в широких пределах от 10 % до 60 %.

Таким образом, предлагаемые методы 2 и 3 могут быть рекомендованы не только для традиционно используемого в практике биспектральной обработки подавления гауссова шума, но представляются также перспективным инструментом подавления смешанного негауссова шума. Вместе с тем, актуальным остается вопрос выбора типа и параметров фильтра, применение которого позволило бы достигать высокой эффективности комбинированной обработки в условиях варьирования в широких пределах характеристик информационной составляющей сигнала и свойств помех.

Перейдем к сравнительному анализу результатов, полученных для второго случая, т. е. при усреднении данных по достаточно большой выборке ($M=200$ независимых реализаций) наблюдаемого процесса, искаженного гауссовым шумом или смешанным — негауссовым шумом. Для каждой реализации также моделировался случайный сдвиг сигнальной составляющей. Отметим, что наличие таких случайных сдвигов существенно затрудняет “когерентное” накопление сигналов при наблюдении нескольких реализаций для многих методов обработки процессов. В то же время, при использовании биспектральных методов в силу отмеченного ранее свойства инвариантности биспектра к сдвигу, “квазикогерентное” накопление осуществляется практически автоматически.

Визуальный анализ восстановленных сигналов начнем с рассмотрения воздействия на систему восстановления сигналов аддитивного гауссова шума. На рис. 2.5 показана зависимость нормированного модульного значения амплитуды наблюдаемого колебания от номера отсчета (дисперсия шума в этом случае равна $\sigma_{\text{inp}}^{(m)2} = \frac{1}{I-1} \sum_{i=0}^{I-1} [x^{(m)}(i) - s(i)]^2 = 0,4969$).

Случайный сдвиг тестового сигнала относительно исходного положения, показанного на рис. 2.1, равен в данном случае 24 отсчетам.

Отметим, что интерфейс системы визуализации обрабатываемых сигналов настроен на графическое отображение модульных величин.

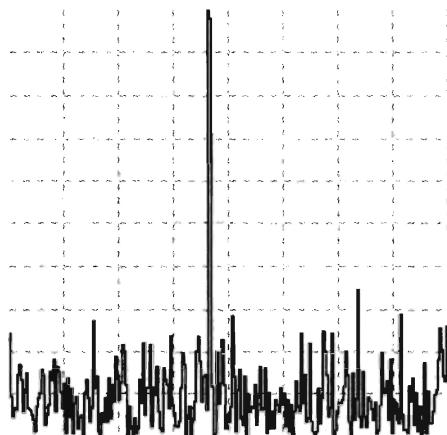


Рис. 2.5. Реализация тестового сигнала, искаженного аддитивным гауссовым шумом с дисперсией $\sigma_{\text{inp}}^{(m)2} = 0,492$ и случайным сдвигом исходного сигнала

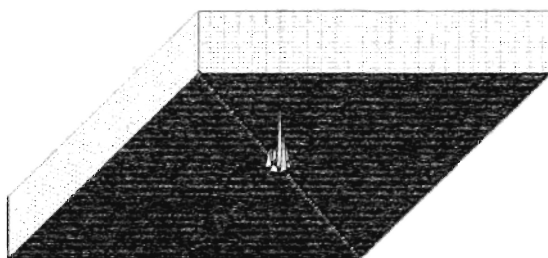


Рис. 2.6. Оценка ТАКФ сигнала, искаженного аддитивным гауссовым шумом с дисперсией $\bar{\sigma}_{\text{inp}}^2 = 0,5$ и случайным сдвигом относительно исходного сигнала

На рис. 2.6 представлен график оценки ТАКФ, полученной в результате усреднения по ансамблю из $M = 200$ реализаций. Анализ этого графика показывает, что данная оценка ТАКФ сильно искажена шумом (по сравнению с рис. 2.2), который затем просачивается в оценку биспектра, соответственно искажая и восстановленные по оценке биспектра оценки фазового и амплитудного Фурье-спектров сигнала, что, в конечном итоге, приводит и к заметным остаточным искажениям сигнала, восстановленного с помощью известного метода 1 (см. рис. 2.7).

Графики сигналов, восстановленных комбинированными методами 2 и 3, в присутствии аддитивного гауссова шума, полученные для размера скользящего окна размером $2N + 1 = 9$ отсчетов, представлены соответственно на рис. 2.8 и 2.9. Сравнение результатов восстановления методом 1 (рис. 2.7) и результатов, полученных с помощью комбинированных методов 2 (рис. 2.8) и 3 (рис. 2.9), позволяет отметить лучшее подавление

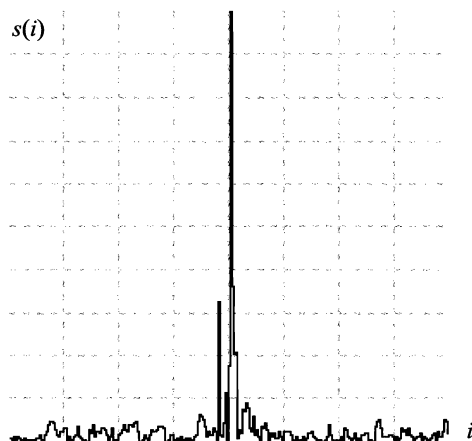


Рис. 2.7. Сигнал, восстановленный методом 1: $\overline{SNR}_{\text{inp}} = 1,92$; $\overline{SNR}_{\text{out}} = 5,61$ и $\varepsilon = 2,921$

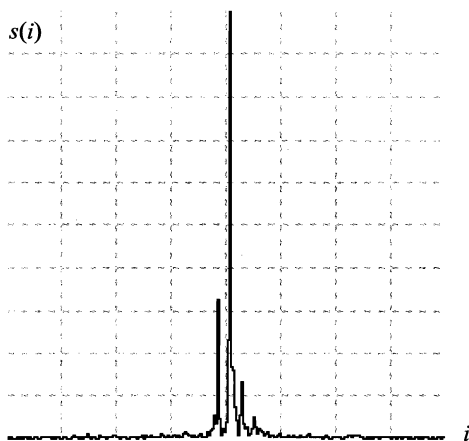


Рис. 2.8. Сигнал, восстановленный комбинированным методом 2: $\overline{SNR}_{\text{inp}} = 1,91$; $\overline{SNR}_{\text{out}} = 5,07$; $\varepsilon = 2,65$ и $2N + 1 = 9$

гауссова шума для сигналов, восстановленных комбинированными методами по сравнению с традиционным методом. Особенно заметны различия в степени подавления помех вне области локализации сигнальных импульсов с амплитудами A_1 и A_2 . При этом следует отметить, что с точки зрения величины ε метод 2 и метод 1 дают приблизительно одинаковые результаты. В связи с этим, при решении конкретных прикладных задач (обнаружения сигнальных импульсов, определения их амплитуд и т. п.) кроме количественных критериев эффективности обработки, использованных нами при проведении исследований в рамках данной работы, целесообразно использовать и другие критерии.

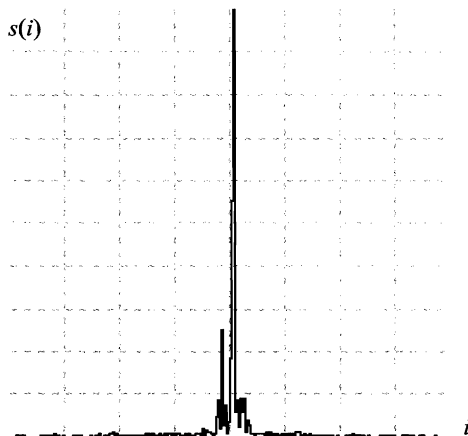


Рис. 2.9. Сигнал, восстановленный методом 3: $\overline{SNR}_{\text{inp}} = 1,92$; $\overline{SNR}_{\text{out}} = 9,73$; $\varepsilon = 5,07$ и $2N + 1 = 9$

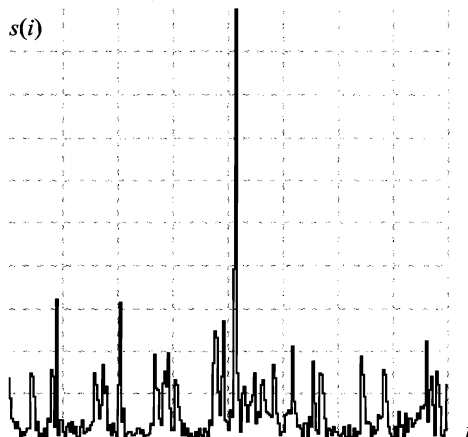


Рис. 2.10. Сигнал, восстановленный методом 1: $\overline{SNR}_{\text{inp}} = 1,4$; $\overline{SNR}_{\text{out}} = 2,75$; $\varepsilon = 1,97$; $A_{\text{pos}} = 2$; $A_{\text{neg}} = 0$; $P_{\text{pos}} = P_{\text{neg}} = 10\%$

На рис. 2.10–2.12 приведены графики сигналов, восстановленных методом 1, а также методами 2 и 3 в случае воздействия на вход системы наблюдения смеси аддитивного гауссового и импульсного шума, а также при наличии случайного сдвига исходного сигнала.

Нетрудно видеть (рис. 2.10), что при использовании метода 1 наблюдается заметное просачивание импульсной компоненты шума на выход системы восстановления. Наличие импульсного шума полностью маскирует “информационный” импульс сигнальной составляющей, обнаружение которого для полученного выходного (восстановленного) сигнала практически невозможно.

В то же самое время комбинированные методы 2 и 3 обеспечивают гораздо лучшее подавление импульсной компоненты шума и тем самым дают возможность более надежного обнаружения и распознавания инфор-

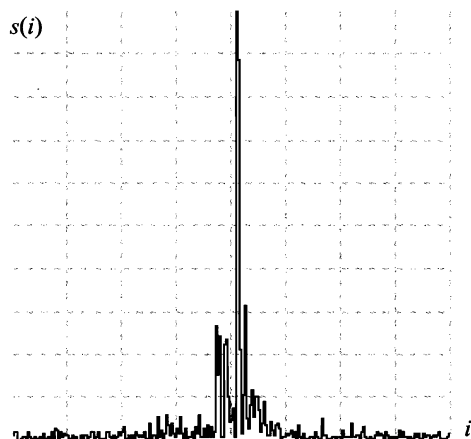


Рис. 2.11. Сигнал, восстановленный комбинированным методом 2: $\overline{SNR}_{\text{inp}} = 1,39$; $\overline{SNR}_{\text{out}} = 8,84$; $\varepsilon = 6,34$; $A_{\text{pos}} = 2$; $A_{\text{neg}} = 0$; $P_{\text{pos}} = P_{\text{neg}} = 10\%$; $2N + 1 = 9$

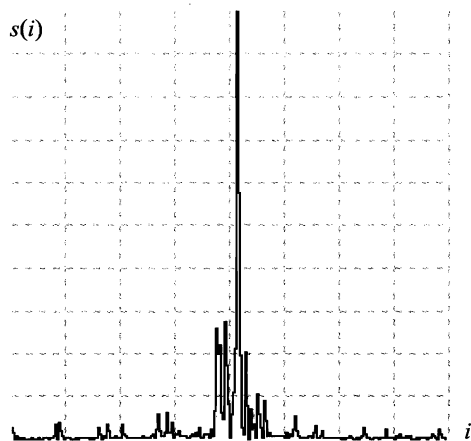


Рис. 2.12. Сигнал, восстановленный комбинированным методом 3: $\overline{SNR}_{\text{inp}} = 1,38$; $\overline{SNR}_{\text{out}} = 8,77$; $\varepsilon = 6,35$; $A_{\text{pos}} = 2$; $A_{\text{neg}} = 0$; $P_{\text{pos}} = P_{\text{neg}} = 10\%$; $2N + 1 = 9$

мационного импульса $A1$. Это позволяет сделать важное заключение об эффективности предложенных биспектрально-фильтровых методов не только для обработки сигналов на фоне гауссовых шумов, но и для решения задач обнаружения и распознавания слабых сигналов в условиях воздействия интенсивного смешанного шума.

Результаты численного моделирования и проведенный сравнительный анализ демонстрируют улучшение устойчивости (по сравнению с традиционной биспектральной обработкой) предложенных комбинированных методов восстановления сигналов по отношению как к шумам с нормальным (симметричным) законом распределения, так и по отношению к негауссовым шумам смешанного типа. Предложенный подход [9, 34] позволяет реализовать метод восстановления сигналов, в котором интегрированы пре-

имущества биспектрального анализа и достоинства линейной и нелинейной фильтрации в скользящем окне.

Рассмотренные комбинированные методы могут быть рекомендованы также для обработки сигналов в системах, подверженных воздействию интенсивных гауссовых и негауссовых шумов в условиях априорной неопределенности о количественных статистических характеристиках сигналов и шумов, например, для радиолокационных или гидролокационных систем, а также для астрономических систем при решении задач обнаружения и распознавания малоразмерных объектов.

2.2.2. Сглаживание оценок биспектральной плотности двумерными линейными и нелинейными фильтрами со скользящими окнами. Точность и помехоустойчивость биспектральных методов восстановления сигналов, достигаемые при конечном наборе наблюдаемых реализаций исследуемого процесса, ограничены из-за наличия больших флуктуационных ошибок в оценках биспектров при малых входных отношениях сигнал–шум; из-за динамических ошибок в оценках биспектров, обусловленных присутствием на входе системы обработки априорно неизвестной постоянной составляющей наблюдаемого процесса и сигнально-зависимым характером помеховой составляющей в оценке биспектра и, из-за отличия закона распределения аддитивной помехи от нормального. Однако, как показывает анализ [35–38] улучшение оценок биспектральной плотности может быть достигнуто также в результате сглаживания оценок амплитудного и фазового биспектров, а также оценок реальной и мнимой компонент биспектра с помощью двумерных линейных и нелинейных фильтров со скользящими окнами.

Вначале рассмотрим биспектрально-фильтровый метод восстановления сигналов неизвестной формы [38], используя уравнение наблюдения (2.22) и прямой метод оценки биспектральной плотности (2.17)–(2.19). В этом случае искаженная оценка биспектральной плотности описывается выражением (2.29), анализ которого позволяет отметить следующее:

а) с ростом количества обрабатываемых реализаций M член $\left\langle \dot{N}^{(m)}(p)\dot{N}^{(m)}(q)\dot{N}^{(m)*}(p+q) \right\rangle_M$ в (2.29) стремится к нулю, так как момент нечетного — третьего порядка гауссова процесса с нулевым средним значением стремится к нулю;

б) закон распределения, полученный для вещественной и мнимой частей этого члена (комплексного случайного двумерного поля) существенно отличается от нормального при малых объемах выборки (см. гистограмму на рис. 2.13, а) и приближается к нормальному (см. гистограмму на рис. 2.13, б) при увеличении объема выборки вследствие центральной предельной теоремы (гистограммы, представленные на рис. 2.13, а, б получены при отсутствии полезного сигнала, т. е. при входном отношении сигнал–шум $SNR_{\text{inp}} = 0$).

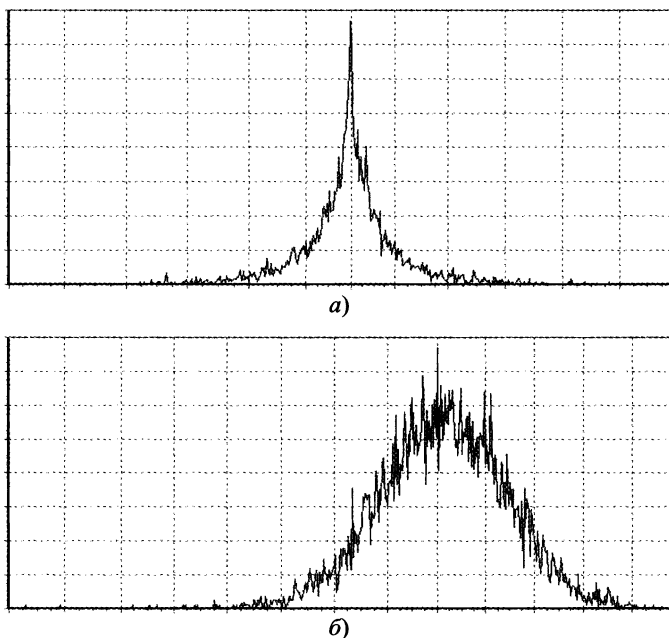


Рис. 2.13. Гистограмма вещественной части оценки биспектральной плотности шума (полезный сигнал отсутствует): размер выборки $M = 1$ (а) и $M = 50$ (б)

в) поскольку рассматривается случай воздействия гауссова шума с нулевым средним значением на биспектральную систему, то при достаточно больших M выполняется условие

$$\left\langle \dot{N}^{(m)*}(p+q)e^{-j\tau^{(m)}(p+q)} \right\rangle \cong \left\langle \dot{N}^{(m)}(q)e^{j\tau^{(m)}q} \right\rangle \cong \left\langle \dot{N}^{(m)}(p)e^{j\tau^{(m)}p} \right\rangle_M \cong 0,$$

и в результате члены в (2.29), содержащие соответствующие множители, также имеют нулевые математические ожидания (за исключением горизонтальной, вертикальной и диагональной осей на биспектральной плоскости).

г) эти помеховые члены в выражении (2.29) представляют собой мультипликативную (сигнально-зависимую) биспектральную помеху, статистические характеристики которой зависят от поведения комплексного Фурье-спектра полезного сигнала, а также и от случайного сдвига $\tau^{(m)}$ исходного сигнала.

Таким образом, помеховая составляющая в (2.29) содержит аддитивную компоненту с негауссовым распределением (даже при гауссовом характере помех) и сигнально-зависимую компоненту, которая является таковой как в смысле зависимости статистических характеристик от вида истинной оценки биспектра, так и, соответственно, вида истинного сигнала и его формы в наблюдаемом входном процессе. Такие свойства помех существенно затрудняют улучшение оценок биспектров, особенно при небольшом количестве наблюдаемых реализаций.

Принимая во внимание результаты выше проведенного анализа, рассмотрим более подробно поведение оценки биспектральной плотности на

осях $q = 0$ и $p = q$ биспектральной плоскости. Для этого воспользуемся соотношениями вида

$$\begin{aligned} \dot{N}(p, 0) = \dot{S}(p) \left\langle \dot{N}^{(m)}(0) \dot{N}^{(m)*}(p) e^{-j\tau^{(m)}p} \right\rangle_M + \\ + \dot{S}(0) \left\langle \dot{N}^{(m)}(p) \dot{N}^{(m)*}(p) \right\rangle_M + \\ + \dot{S}^*(p) \left\langle \dot{N}^{(m)}(p) \dot{N}^{(m)}(0) e^{j\tau^{(m)}(p)} \right\rangle_M, \quad q = 0, \quad (2.83a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{N}(p, p) = \dot{N}(q, q) = \dot{S}(p) \left\langle \dot{N}^{(m)}(p) \dot{N}^{(m)*}(2p) e^{-j\tau^{(m)}p} \right\rangle_M + \\ + \dot{S}(p) \left\langle \dot{N}^{(m)}(p) \dot{N}^{(m)*}(2p) e^{-j\tau^{(m)}p} \right\rangle_M + \\ + \dot{S}^*(2p) \left\langle \dot{N}^{(m)}(p) \dot{N}^{(m)}(p) e^{j\tau^{(m)}(p)} \right\rangle_M, \quad q = p. \quad (2.83б) \end{aligned}$$

Если аддитивный шум полагается δ -коррелированным, то его вклад в оценку биспектральной плотности максимален на частотной осях $q = 0$ и $p = q$ вследствие концентрации отсчетов автокорреляционной функции шума именно на этих осях (см. второй член в (2.83а) и третий член в (2.83б)). На практике, например, в цифровых радиолокационных системах, когда объем выборки M часто ограничен и отношение сигнал-шум мало, в оценке биспектральной плотности (2.29) присутствует шум достаточно большого уровня и асимптотическое приближение биспектральной оценки (2.20) не выполняется. Поэтому, оценки биспектральной плотности в реальной ситуации могут оказаться смещенными.

Следовательно, возникает задача фильтрации оценки биспектральной плотности, которая необходима для повышения точности восстановления сигнала неизвестной формы из биспектральных данных. Отметим, что сигналам малой длительности во временной области, в частности импульсным сигналам, соответствуют достаточно гладкие функции амплитудного $|\hat{B}_s(p, q)|$ и фазового $\hat{\gamma}_s(p, q)$ биспектров, а также вещественной $\text{Re}\{\hat{B}_s(p, q)\}$ и мнимой $\text{Im}\{\hat{B}_s(p, q)\}$ части биспектра, что создает благоприятные предпосылки для обработки этих гладких функций с помощью двумерных фильтров со скользящими окнами (подавления гауссовых и негауссовых шумов), которые широко используются для сглаживания изображений [39].

Возможны различные подходы к применению двумерных фильтров для обработки оценок биспектров: сглаживание оценок амплитудного и фазового (Am & Ph) биспектров, а также сглаживание оценок вещественной и мнимой (Re & Im) компонент биспектров. При проведении первого этапа исследований нами были рассмотрены простейшие линейный усредняющий (Mean) и нелинейный медианный (Median) фильтры [39]. Выбор именно этих фильтров обусловлен двумя причинами. Во-первых, наша цель состояла в том, чтобы определить, способны ли предлагаемые комбинированные биспектрально-фильтровые методы обработки обеспечить положительный

эффект, то есть улучшить качество восстановления формы сигнала. Во-вторых, вследствие отмеченных выше свойств помеховой составляющей в (2.29) выбор или разработка более эффективных для рассматриваемой ситуации методов фильтрации является нестандартной и нетривиальной задачей.

Таким образом, можно реализовать восемь различных вариантов получения биспектрально-фильтровых оценок. Для сравнения их эффективности ниже приведены результаты исследования десяти методов восстановления сигнала импульсной формы: известные биспектральные методы [11] (Т#1) и [20] (Т#2) и разработанные авторами восемь комбинированных биспектрально-фильтровых методов: сглаживание Am & Ph оценки биспектра [11] Mean фильтром (Т#3); сглаживание Am & Ph оценки биспектра [11] Median фильтром (Т#4); сглаживание Am & Ph оценки биспектра [20] Mean фильтром (Т#5); сглаживание Am & Ph оценки биспектра [20] Median фильтром (Т#6); сглаживание Re & Im оценки биспектра [11] Mean фильтром (Т#7); сглаживание Re & Im оценки биспектра [11] Median фильтром (Т#8); сглаживание Re & Im оценки биспектра [20] Mean фильтром (Т#9); сглаживание Re & Im оценки биспектра [20] Median фильтром (Т#10).

В основе методов Т#1, Т#3, Т#4, Т#7 и Т#8 лежат рекурсивные процедуры [11] восстановления оценок фазового $\widehat{\varphi}(p+q)$ (2.27) и амплитудного $|\widehat{S}(p+q)|$ (2.28) Фурье спектра сигнала из оценок биспектров. В основе методов Т#2, Т#5, Т#6, Т#9 и Т#10 лежит процедура восстановления фазового Фурье-спектра сигнала (2.27), а амплитудный Фурье-спектр восстанавливают в соответствии с [20], исключая отсчеты амплитудного биспектра, лежащие на нулевой оси частот (см. алгоритм (2.34)).

Оценки амплитудного $|\widehat{B}_{s\text{ind}}(p, q)|$ и фазового $\widetilde{\gamma}_{s\text{ind}}(p, q)$ биспектра или вещественная $\widetilde{\text{Re}}\{\widehat{B}_{s\text{ind}}(p, q)\}$ и мнимая $\widetilde{\text{Im}}\{\widehat{B}_{s\text{ind}}(p, q)\}$ части оценки биспектра, сглаженные линейным усредняющим и нелинейным медианным фильтрами, могут быть описаны, соответственно, с помощью выражений:

$$|\widehat{B}_{\text{Mean}}(p, q)| = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N |\widehat{B}_{s\text{ind}}(p+n_1, q+n_2)|, \quad (2.84)$$

$$\widetilde{\gamma}_{\text{Mean}}(p, q) = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N \widehat{\gamma}_{s\text{ind}}(p+n_1, q+n_2), \quad (2.85)$$

$$|\widehat{B}_{\text{Median}}(p, q)| = \text{MED}\{|\widehat{B}_{s\text{ind}}(p_1, q_1)|\}, \quad (2.86)$$

$$p_1 = p - N, \dots, p + N; \quad q_1 = q - N, \dots, q + N,$$

$$\widetilde{\gamma}_{\text{Median}}(p, q) = \text{MED}\{\widehat{\gamma}_{s\text{ind}}(p_1, q_1)\}, \quad (2.87)$$

$$p_1 = p - N, \dots, p + N; \quad q_1 = q - N, \dots, q + N,$$

$$\widetilde{\text{Re}}_{\text{Mean}}\{\hat{B}_{s\text{ind}}(p, q)\} = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N \text{Re}\{\hat{B}_{s\text{ind}}(p+n_1, q+n_2)\} \quad (2.88)$$

$$\widetilde{\text{Im}}_{\text{Mean}}\{\hat{B}_{s\text{ind}}(p, q)\} = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N \text{Im}\{\hat{B}_{s\text{ind}}(p+n_1, q+n_2)\} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Re}}_{\text{Median}}\{\hat{B}_{s\text{ind}}(p, q)\} &= \text{MED}\{\text{Re}\{\hat{B}_{s\text{ind}}(p_1, q_1)\}\}, \\ p_1 &= p-N, \dots, p+N; \quad q_1 = q-N, \dots, q+N, \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Im}}_{\text{Median}}\{\hat{B}_{s\text{ind}}(p, q)\} &= \text{MED}\{\text{Im}\{\hat{B}_{s\text{ind}}(p_1, q_1)\}\}, \\ p_1 &= p-N, \dots, p+N; \quad q_1 = q-N, \dots, q+N, \end{aligned} \quad (2.91)$$

где $(2N+1)(2N+1)$ — размер скользящего двумерного окна.

Сигнал, восстановленный по сглаженным биспектральным оценкам (2.84)–(2.91), представим в виде следующего одномерного обратного преобразования Фурье:

$$\hat{s}_{\text{rest}}(i) = \left| IFT\left\{\left|\tilde{S}(r)\right|e^{j\tilde{\varphi}(r)}\right\}\right|, \quad r = 0, \dots, I-1, \quad (2.92)$$

где $IFT\{\dots\}$ — означает процедуру обратного Фурье-преобразования; соответственно $\left|\tilde{S}(r)\right|$ и $\tilde{\varphi}(r)$ — амплитудный и фазовый Фурье-спектры, восстановленные с помощью рекурсивных алгоритмов (2.27), (2.28) или (2.27), (2.34).

Для количественного анализа точности восстановления сигналов по сглаженным оценкам биспектра (2.84)–(2.91) будем использовать усредненную по ансамблю дисперсию $\bar{\sigma}_{\text{out } T\#1\dots T\#10}^2$, которая характеризует флуктуационную составляющую ошибки в восстановленном сигнале, равную для исследуемых десяти методов $T\#\#1\dots 10$

$$\bar{\sigma}_{\text{out } T\#1\dots T\#10}^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} [\hat{s}_{kT\#1\dots\#10}(i) - \bar{\hat{s}}_{T\#1\dots\#10}(i)]^2, \quad (2.93)$$

где $\hat{s}_{kT\#1\dots T\#10}(i)$ — оценка сигнала, полученная в k -м эксперименте; $\bar{\hat{s}}_{T\#1\dots T\#10}(i) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{s}_{kT\#1\dots\#10}(i)$; K — количество повторений эксперимента, выполняемых при статистических исследованиях точности алгоритмов восстановления сигналов, и среднеквадратичное смещение оценки $\delta_{\text{out } T\#1\dots T\#10}^2$ восстановленного сигнала (динамическую ошибку), равную

$$\delta_{\text{out } T\#1\dots T\#10}^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} [s(i) - \bar{\hat{s}}_{T\#1\dots\#10}(i)]^2. \quad (2.94)$$

Ниже приведены результаты восстановления тестового импульсного сигнала, модель которого рассмотрена ранее (см. выражение (2.71) и рис. 2.1).

График зависимости нормированной модульной амплитуды наблюдаемого колебания от номера отсчета показан на рис. 2.14.

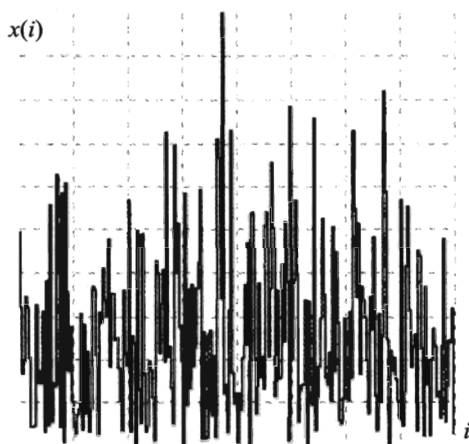


Рис. 2.14. Тестовый сигнал, искаженный гауссовым шумом ($\overline{SNR}_{\text{inp}} = 0,5$) и случайным сдвигом

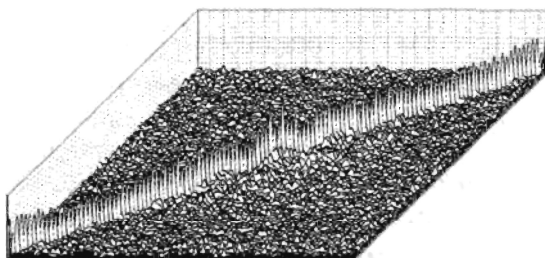


Рис. 2.15. Оценка амплитудного биспектра ($\overline{SNR}_{\text{inp}} = 0,5$; $M = 256$)

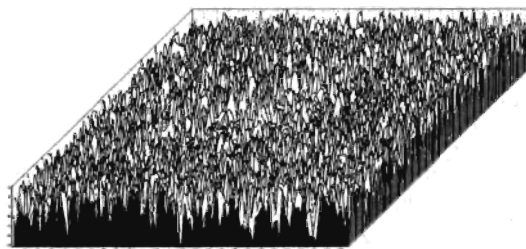


Рис. 2.16. Оценка фазового биспектра ($\overline{SNR}_{\text{inp}} = 0,5$; $M = 256$)

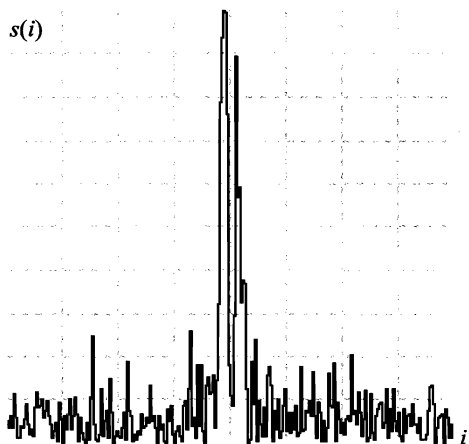


Рис. 2.17. Нормированный сигнал, восстановленный методом Т#1

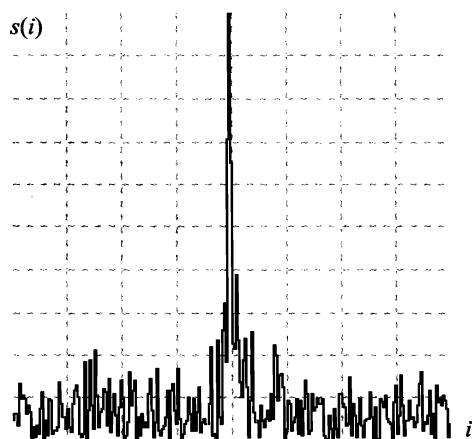


Рис. 2.18. Нормированный сигнал, восстановленный методом Т#2

Оценки амплитудного и фазового биспектров, полученные в результате усреднения по ансамблю из $M = 256$ реализаций, представлены на рис. 2.15 и 2.16. Из приведенных на рисунках данных хорошо видно, что оценки амплитудного и фазового биспектров существенно искажены шумом при малых входных отношениях сигнал-шум $\overline{SNR}_{\text{inp}} = 0,5$ даже при достаточно большом объеме выборки. При этом на рис. 2.15 явно просматривается отмеченный выше всплеск шума на диагональной оси $p = q$.

Графики сигналов, восстановленных по представленным на рис. 2.15 и 2.16 биспектральным оценкам методами Т#1 и Т#2, иллюстрируются соответственно на рис. 2.17 и 2.18. Анализ графиков свидетельствует о подавлении шума в восстановленных сигналах по сравнению с шумом, наблюдаемым на входе — рис. 2.14. Однако информационный импульс меньшей амплитуды не удастся выделить визуально из графика на рис. 2.18. Этот импульс можно распознать на рис. 2.17, однако исходное соотношение между амплитудами импульсов искажено.

Оценки амплитудного и фазового биспектров, полученные в результате сглаживания вещественной и мнимой (Re & Im) частей двумерным усредняющим фильтром с размером скользящего окна 7×7 отсчетов, приведены соответственно на рис. 2.19 и 2.20 для $\overline{SNR}_{\text{inp}} = 0,5$. Как следствие сравнительного анализа этих данных с графиками, представленными на рис. 2.15 и 2.16, отметим, что в результате фильтрации информационные составляющие в оценках амплитудного и фазового биспектров выделены на фоне шума.

Графики сигналов, восстановленных по сглаженным биспектральным оценкам с помощью методов Т#7 и Т#9, демонстрируются соответственно на рис. 2.21 и 2.22.

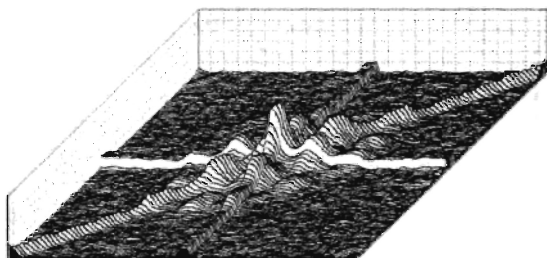


Рис. 2.19. Оценка амплитудного биспектра после сглаживания усредняющим фильтром вещественной и мнимой (Re & Im) компонент

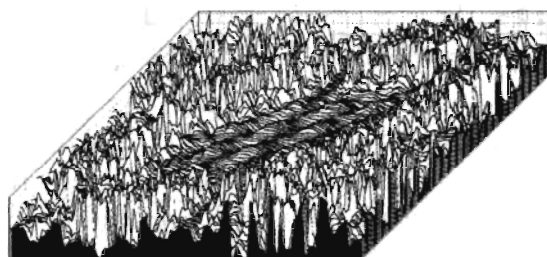


Рис. 2.20. Оценка фазового биспектра после сглаживания усредняющим фильтром вещественной и мнимой (Re & Im) компонент

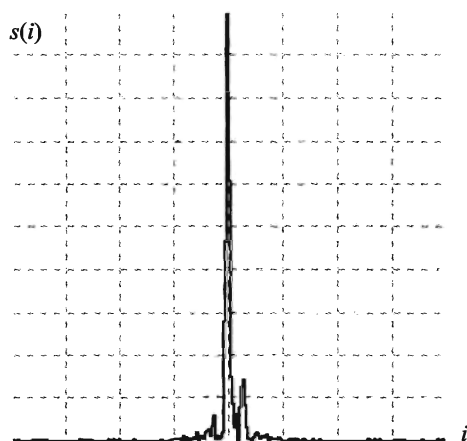


Рис. 2.21. Нормированный сигнал, восстановленный методом Т#7

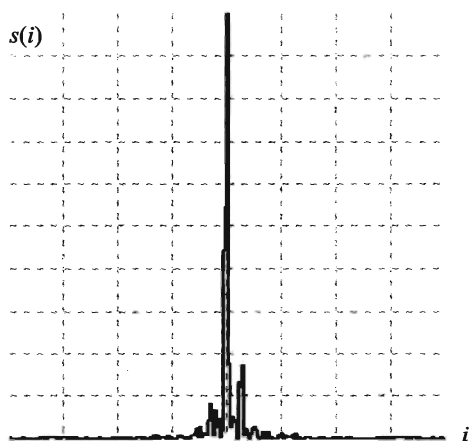


Рис. 2.22. Нормированный сигнал, восстановленный методом Т#9

Сравнение последних графиков с графиками, представленными на рис. 2.17 и 2.18, свидетельствует о достаточно хорошей робастности биспектрально-фильтровых методов восстановления сигналов Т#7 и Т#9 по отношению к аддитивному гауссову шуму, поскольку информационные импульсы малой амплитуды уверенно разрешаются и форма восстановленных сигналов приблизительно соответствует форме исходного тестового сигнала.



Рис. 2.23. Нормированный тестовый сигнал, искаженный импульсным шумом и случайным сдвигом

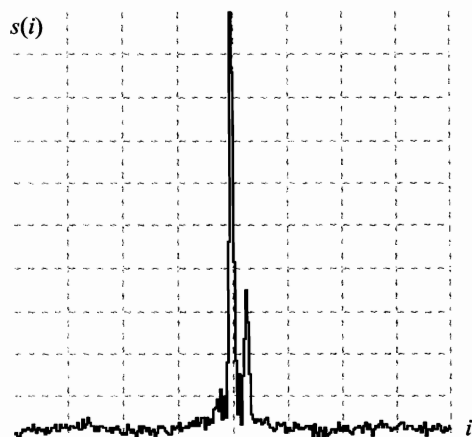


Рис. 2.24. Нормированный сигнал, восстановленный методом Т#1

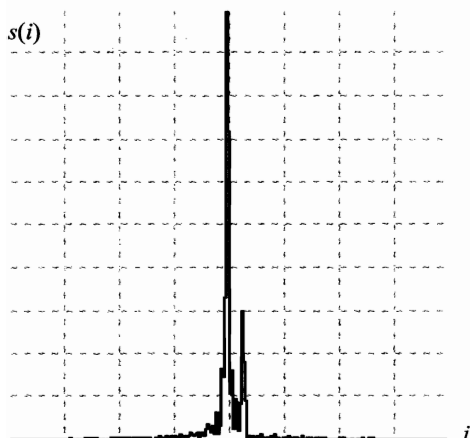


Рис. 2.25. Нормированный сигнал, восстановленный методом Т#4

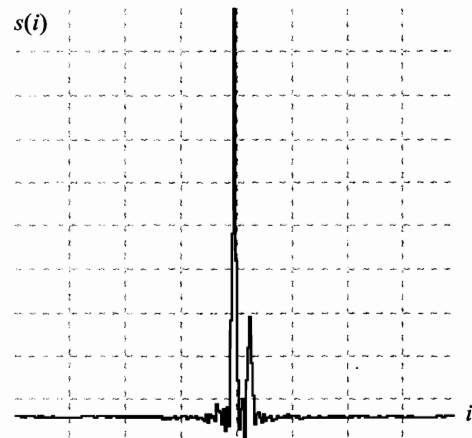


Рис. 2.26. Нормированный сигнал, восстановленный методом Т#10

На рис. 2.23 приведена реализация тестового сигнала, искаженного случайным сдвигом и импульсным шумом с вероятностями появления положительных и отрицательных помеховых импульсов $P_{\text{pos}} = P_{\text{neg}} = 30\%$ и их амплитудами $A_{\text{pos}} = A_{\text{neg}} = 1$, такими, что помеховые импульсы маскируют информационный импульс малой амплитуда $A_2 = 1$. На графике отображены модульные значения положительных и отрицательных помеховых импульсов, что связано с особенностью настройки интерфейса отображения данных.

Результат биспектрального восстановления сигнала, искаженного импульсной помехой, с использованием метода Т#1 представлен на рис. 2.24. Данный пример иллюстрирует эффективность применения биспектрального

восстановления сигнала, искаженного импульсным (негауссовым) шумом. Однако, заметим, что импульсный шум “просачивается” на выход системы восстановления и наблюдается на рис. 2.24 в виде равномерного фона.

Анализ результатов, представленных на рис. 2.25 (метод Т#4 с использованием медианного фильтра с окном 5×5 отсчетов) и рис. 2.26 (метод Т#10 с использованием медианного фильтра с окном 5×5 отсчетов), позволяет сделать заключение о значительном подавлении импульсного шума, просачивающегося на выход системы восстановления, с одной стороны, и о сохранении формы восстановленного сигнала, с другой стороны.

Следует также обратить внимание на важную особенность биспектрального восстановления сигналов, которая касается инвариантности рассматриваемых методов восстановления по отношению к случайным сдвигам сигнала в наблюдаемых на входе реализациях. Анализ графиков восстановленных сигналов на рис. 2.21, 2.22 и рис. 2.24–2.26 свидетельствует о том, что биспектральные методы восстановления не чувствительны к упомянутым выше случайным сдвигам $\tau^{(m)}$ исходного сигнала.

Графики зависимостей величины дисперсии флуктуаций $\bar{\sigma}_{out T\#1...10}^2$ (2.23), а также величины среднеквадратичного смещения $\delta_{out T\#1...10}^2$ (2.24) восстановленного сигнала от входного отношения сигнал–шум $\overline{SNR}_{inp}$, а также графики зависимостей $\bar{\sigma}_{out T\#1...10}^2$ от вероятности импульсных выбросов помехи $P_{imp} = P_{pos} + P_{neg}$, рассчитанные для $K = 30$ экспериментов по $M = 256$ реализациям аддитивной смеси сигнала и шума и для различных размеров скользящего окна фильтра (размер двумерного скользящего окна обозначен на графиках символом WS), приведены на рис. 2.27–2.40. Величина дисперсии $\bar{\sigma}_{inp}^2$ аддитивного гауссова шума на входе (см. формулу (2.78)), используемая для построения графиков, принимает значения 1,12; 0,56; 0,28; 0,11 и 0,056, что соответствует значениям входного отношения сигнал–шум 0,5; 1,0; 2,0; 5,0; 10,0 и 20,0. При воздействии импульсного шума, его параметры на графиках соответствуют: $A_{pos} = A_{neg} = 1$; $P_{pos} = P_{neg} = 30\%$; 15%; 10%; 5%; 3% и 1%; $P_{imp} = P_{pos} + P_{neg}$.

Анализ результатов, полученных в рамках проведенных нами статистических исследований, позволяет отметить следующее:

1) дисперсия флуктуаций $\bar{\sigma}_{out T\#1-3,5,6,7,9,10}^2$ уменьшается при увеличении входного отношения сигнал–шум $\overline{SNR}_{inp}$ (см. рис. 2.27–2.31) и дисперсия флуктуаций $\bar{\sigma}_{out T\#1,2,5,6,9,10}^2$ уменьшается с уменьшением вероятности помеховых импульсных выбросов P_{imp} (см. рис. 2.32–2.36);

2) преимущества предложенных методов по сравнению с традиционными методами проявляются особенно отчетливо при малых входных отношениях сигнал–шум $\overline{SNR}_{inp}$ и при больших величинах вероятности помеховых импульсных выбросов P_{imp} , т. е. в сложной помеховой обстановке. Непосредственные величины дисперсии флуктуаций восстановленного сигнала, а также изменения крутизны кривых, описывающих на графиках поведение дисперсии, зависят от метода восстановления сигнала и от размера скользящего окна фильтра;

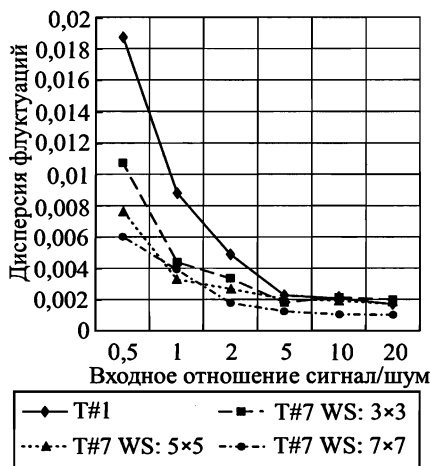


Рис. 2.27. Зависимости $\bar{\sigma}_{\text{out } T\#1}^2$ и $\bar{\sigma}_{\text{out } T\#7}^2$ от $\overline{SNR}_{\text{inp}}$

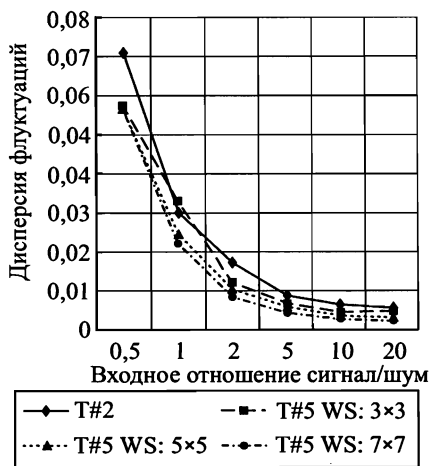


Рис. 2.28. Зависимости $\bar{\sigma}_{\text{out } T\#2}^2$ и $\bar{\sigma}_{\text{out } T\#5}^2$ от $\overline{SNR}_{\text{inp}}$

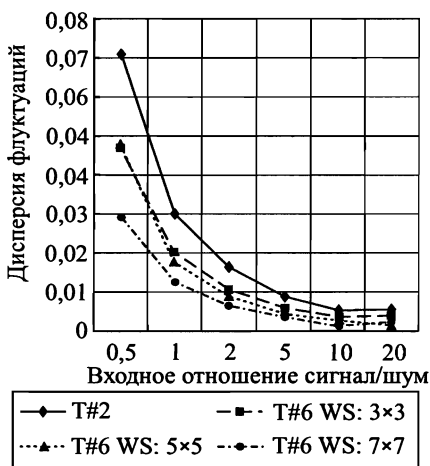


Рис. 2.29. Зависимости $\bar{\sigma}_{\text{out } T\#2}^2$ и $\bar{\sigma}_{\text{out } T\#6}^2$ от $\overline{SNR}_{\text{inp}}$

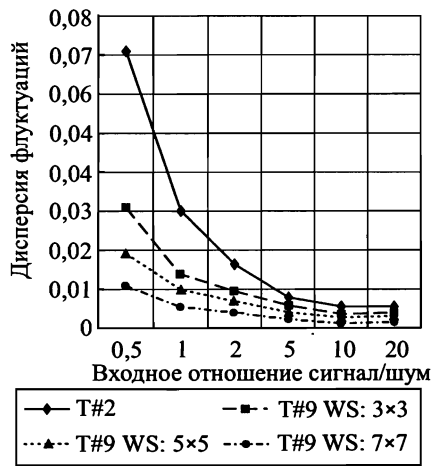


Рис. 2.30. Зависимости $\bar{\sigma}_{\text{out } T\#2}^2$ и $\bar{\sigma}_{\text{out } T\#9}^2$ от $\overline{SNR}_{\text{inp}}$

3) предложенный метод Т#7 по сравнению с традиционным методом Т#1 обеспечивает уменьшение дисперсии флуктуаций более, чем в 3 раза, при $\overline{SNR}_{\text{inp}} = 0,5$ в результате сглаживания вещественной и мнимой компоненты оценки биспектральной плотности усредняющим фильтром с размером скользящего окна $WS = 7 \times 7$ отсчетов (см. рис. 2.27);

4) в условиях воздействия аддитивного гауссова шума дисперсия флуктуаций сигнала, восстановленного методом Т#2 [20] превышает дисперсию флуктуаций сигнала, восстановленного методом Т#1 [11] вследствие того, что в последнем методе в обработке использованы все отсчеты биспектра

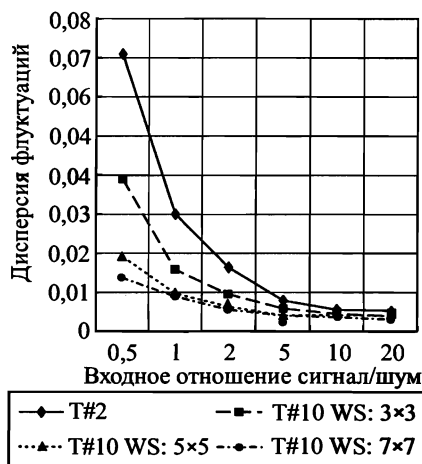


Рис. 2.31. Зависимости $\bar{\sigma}_{out T\#2}^2$ и $\bar{\sigma}_{out T\#10}^2$ от $\overline{SNR}_{inp}$

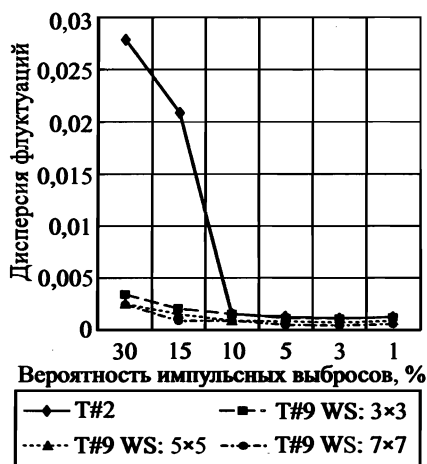


Рис. 2.32. Зависимость $\bar{\sigma}_{out T\#1}^2$ и $\bar{\sigma}_{out T\#3}^2$ от P_{imp}

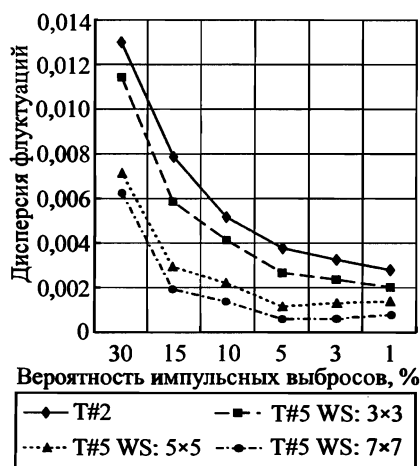


Рис. 2.33. Зависимость $\bar{\sigma}_{out T\#2}^2$ и $\bar{\sigma}_{out T\#5}^2$ от P_{imp}

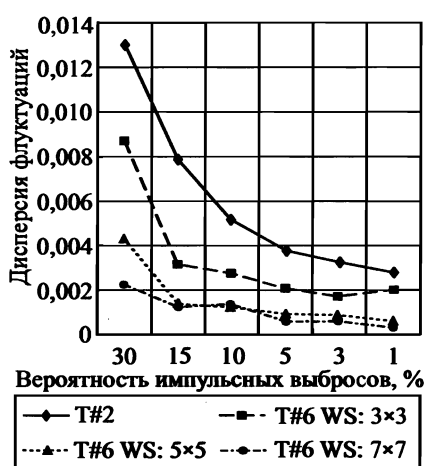


Рис. 2.34. Зависимость $\bar{\sigma}_{out T\#2}^2$ и $\bar{\sigma}_{out T\#6}^2$ от P_{imp}

в главной треугольной области (см. формулы (2.27)–(2.28)), а в методе [20] из обработки исключены отсчеты биспектра, лежащие на осях $q = 0$ и $p = q$ (см. формулу (2.34));

5) существенное улучшение показателей восстановления сигнал в условиях воздействия аддитивного гауссова шума достигнуто в предлагаемых методах T#9 и T#10 по сравнению с известным методом T#2. Предлагаемые методы в этом случае обеспечивают уменьшение дисперсии флуктуаций более чем в 7 раз при сглаживании вещественной и мнимой части оценки биспектральной плотности усредняющим (см. рис. 2.30) и меди-

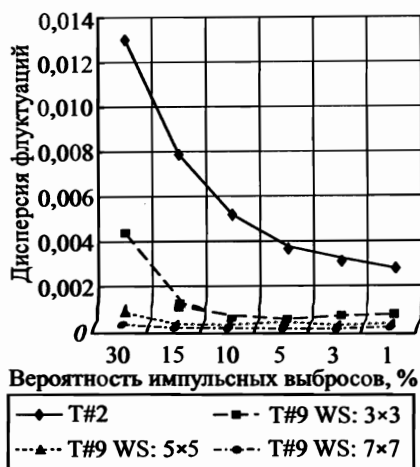


Рис. 2.35. Зависимость $\sigma_{out T\#2}^2$ и $\sigma_{out T\#9}^2$ от P_{imp}

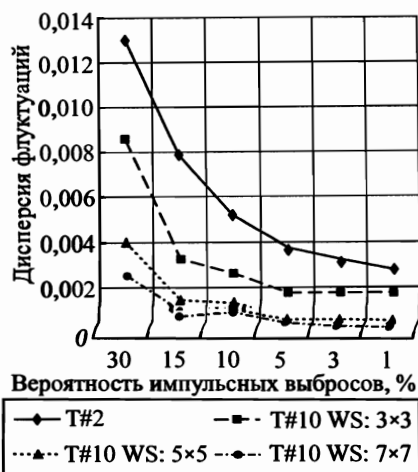


Рис. 2.36. Зависимость $\sigma_{out T\#2}^2$ и $\sigma_{out T\#10}^2$ от P_{imp}

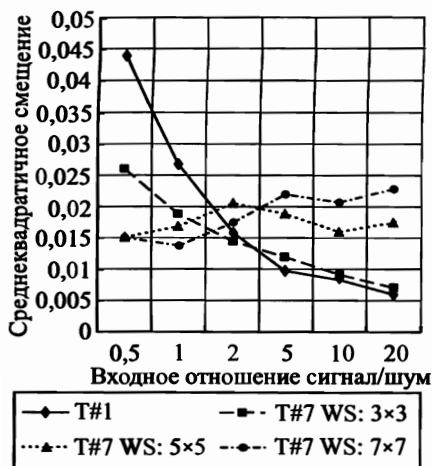


Рис. 2.37. Зависимость $\delta_{out T\#1}^2$ и $\delta_{out T\#7}^2$ от $\overline{SNR}_{inp}$

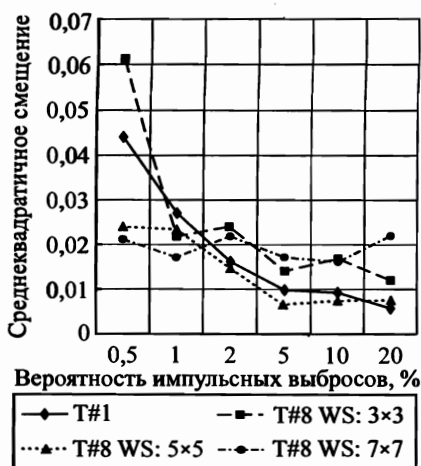


Рис. 2.38. Зависимость $\delta_{out T\#1}^2$ и $\delta_{out T\#8}^2$ от $\overline{SNR}_{inp}$

анным (см. рис. 2.31) фильтрами с размером скользящего окна $WS = 7 \times 7$ отсчетов при малой величине $\overline{SNR}_{inp} = 0,5$; при этом сглаживание усредняющим фильтром дает немного лучший результат по сравнению с медианным фильтром;

б) сглаживание вещественной и мнимой частей оценки биспектральной плотности в предлагаемых методах T#9 и T#10 (рис. 2.30–2.31) подавляют в восстановленном сигнале гауссов шум лучше по сравнению со сглаживанием модуля и фазы оценки биспектральной плотности в предлагаемых методах T#5 и T#6 (рис. 2.28–2.29);

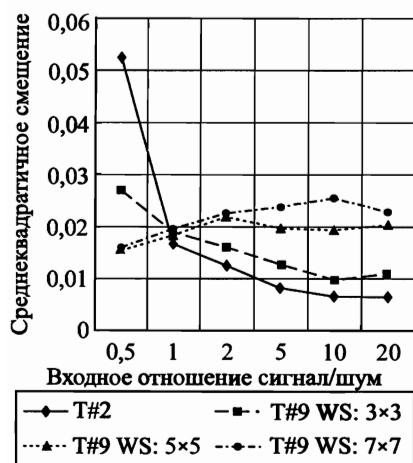


Рис. 2.39. Зависимость $\delta_{\text{out } T\#2}^2$ и $\delta_{\text{out } T\#9}^2$ от $\overline{SNR}_{\text{inp}}$

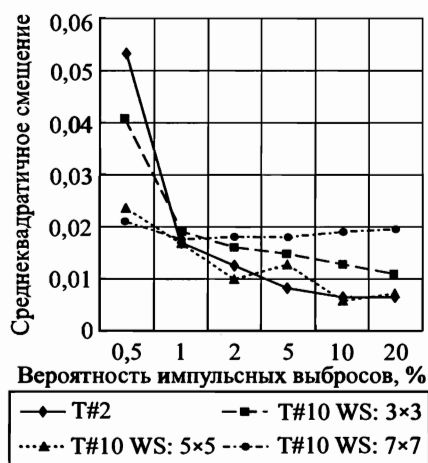


Рис. 2.40. Зависимость $\delta_{\text{out } T\#2}^2$ и $\delta_{\text{out } T\#10}^2$ от $\overline{SNR}_{\text{inp}}$

7) метод T#2 представляется более устойчивым к воздействию импульсного шума по сравнению с методом T#1 (см. рис. 2.32–2.34). Скачок дисперсии флуктуаций на графике рис. 2.32 может быть объяснен вероятностью появления аномальных ошибок, которые могут проявляться в статистических исследованиях;

8) в рамках проведенных исследований оценки восстановленных сигналов отличаются наличием незначительного по величине среднеквадратичного смещения, проявляемого как в условиях воздействия гауссова, так и импульсного шума. Максимальная величина среднеквадратичного смещения, нормированная на величину мощности сигнала $P_s = 0,558$, не превышает 4,5 % для предлагаемых методов T#7–10 (см. рис. 2.37–2.40) при размере скользящего окна более чем 3×3 отсчета (случай аддитивного гауссова шума). Однако, в то же самое время, нормированная на P_s величина среднеквадратичного смещения не превосходит 10 % для методов T#7–10 в случае использования скользящего окна размером 7×7 отсчетов в случае импульсного шума. В целом, воздействие импульсного шума, особенно при больших значениях P_{imp} может приводить к росту величины среднеквадратичного смещения;

9) величины среднеквадратичного смещения оценки восстановленного известными методами T#1 и T#2 сигнала в присутствии импульсного шума оказалась меньше по сравнению с предложенными методами;

10) исследования, проведенные для различных размеров скользящих окон — от 3×3 до 11×11 отсчетов, позволяют отметить улучшение показателей методов восстановления в рамках конкретной модели сигнала при использовании фильтров с размером окна не более 7×7 отсчетов.

Результаты анализа точности оценок восстановления сигналов по количественным критериям (2.78)–(2.82) позволяют сделать следующие выводы:

— наименьшую дисперсию флуктуаций оценки восстановленного сигнала ($\bar{\sigma}_{\text{out } T\#6}^2 = 0,002$) на фоне импульсной (негауссовой) помехи ($P_{\text{imp}} = 30\%$) обеспечивает сглаживание оценок амплитудного и фазового биспектра медианным фильтром ($T\#6$) с размером скользящего окна, равным 7×7 отсчетов;

— наименьшая дисперсия флуктуаций оценки ($\bar{\sigma}_{\text{out } T\#7}^2 = 0,006$) восстановленного сигнала на фоне гауссова шума ($\overline{SNR}_{\text{inp}} = 0,5$) получена при сглаживании оценок реальной и мнимой компонент биспектра усредняющим фильтром ($T\#7$) с размером скользящего окна, равным 7×7 отсчетов;

— преимущества предлагаемых биспектрально-фильтровых методов по сравнению с известными методами в максимальной степени проявляются при малых $\overline{SNR}_{\text{inp}} \leq 1$;

— динамическая ошибка $\delta_{\text{out } T\#7}^2$ убывает от величины 0,025 до 0,005 при возрастании $\overline{SNR}_{\text{inp}}$ от 0,5 до 20 при минимальных размерах скользящего окна (3×3 отсчета) и в то же самое время динамическая ошибка остается практически неизменной ($\delta_{\text{out } T\#7}^2 \approx 0,02$) в пределах всего диапазона изменения $\overline{SNR}_{\text{inp}}$ от 0,5 до 20 при размерах скользящих окон 5×5 и 7×7 отсчетов; при этом биспектрально-фильтровые методы обеспечивают уменьшение динамической ошибки приблизительно в 2 раза по сравнению с известными методами;

— в целом, сглаживание вещественной и мнимой компонент оценки биспектра обеспечивает более высокую точность восстановления сигналов по сравнению с фильтрацией оценок амплитудного и фазового биспектров.

Таким образом, результаты численного моделирования свидетельствуют об улучшении робастности биспектрально-фильтровых методов по сравнению с известными при восстановлении сигналов на фоне аддитивных гауссовых и негауссовых помех. Выбор соответствующего биспектрально-фильтрового метода зависит от конкретных требований, предъявляемых к точности системы восстановления сигнала.

2.2.3. Векторная фильтрация оценки биспектральной плотности восстанавливаемого сигнала. Рассмотрим метод улучшения оценки биспектра с помощью двумерной векторной фильтрации отсчетов биспектральной плотности для повышения точности восстановления сигнала неизвестной формы в смысле уменьшения флуктуационной и динамической ошибок [40].

Воспользуемся одномерной моделью сигнала и помехи вида (2.71) и прямым методом оценки биспектральной плотности (2.17)–(2.19). При ограниченном конечной величиной M объеме выборки оценка биспектральной плотности, искаженная аддитивным гауссовым шумом, описывается выражением (2.29). При анализе данного выражения обращает на себя внимание наличие в нем сигнально-зависимой помеховой компоненты. Данная особенность служит предпосылкой использования векторных фильтров со скользящим окном для сглаживания искаженной помехой оценки биспектральной плотности. Подход, основанный на применении векторных филь-

тров, опирается на то, что оценка биспектра — это комплексная двумерная функция, которую можно представить в виде двух двумерных массивов отсчетов вещественной и мнимой частей оценки биспектра. Поскольку статистические характеристики помехи в оценке биспектра априорно неизвестны, то априорный выбор определенного типа векторного фильтра ограничен. Рассмотрим три различных типа векторных фильтров для сглаживания оценки биспектральной плотности.

Первый — стандартный векторный медианный фильтр (VMF) [41], на выходе которого получают векторный отсчет, равный

$$\mathbf{x}_i = \left\{ \operatorname{Re}(\hat{B}_x(p_i, q_j)); \operatorname{Im}(\hat{B}_x(p_i, q_j)) \right\}, \quad i = 1, \dots, NxN, \quad (2.95)$$

где p_i меняется от $p - (N - 1)/2$ до $p + (N - 1)/2$, а q_j — от $q - (N - 1)/2$ до $q + (N - 1)/2$ при размере скользящего окна, равном $N \times N$ отсчетов и центрировании данного окна на pq -й отсчет биспектра.

Два других фильтра представляют собой направленные векторные фильтры, принцип работы которых [42] основан на упорядочивании векторных отсчетов в соответствии с угловыми положениями, которые принимают векторы, находящиеся в пределах скользящего окна. В этом случае векторная направленная медиана может быть рассчитана как

$$\mathbf{x}_{vdm} = \left\{ \sum_{k=1}^N A(\mathbf{x}_{vdm}, \mathbf{x}_k) \leq \sum_{k=1}^N A(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k); m = \overline{1, N}; vdm \in \overline{1, N} \right\}, \quad (2.96)$$

где $A(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k)$ определяет абсолютное значение угла между векторами $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{x}_k$.

Для повышения эффективности вычислительных процедур целесообразно использовать меру, пропорциональную, но не равную, углам между векторными отсчетами. Такая мера может быть рассчитана в виде расстояния между векторами, нормированными на их длины, и представлена в виде

$$D_{k,m}^{ph} = \sum_{m=1}^N \left\| \frac{\mathbf{x}_k}{|\mathbf{x}_k|} - \frac{\mathbf{x}_m}{|\mathbf{x}_m|} \right\|, \quad (2.97)$$

где $\|\cdot\|$ — норма L_1 или L_2^2 ; $|\mathbf{x}|$ — длина вектора $\mathbf{x}$.

Хотя векторный направленный медианный фильтр использует только информацию о направлениях для упорядочивания векторных отсчетов, данная обработка предполагает также изменение амплитуды фильтруемых векторов. Полагая, что на выходе фильтра амплитуда отсчета в центре окна не меняется и, используя меру (2.97) для упорядочивания, медианный фазовый фильтр (MPF) можно определить как

$$\mathbf{x}_{mpf} = |\mathbf{x}_c| \cdot \frac{\mathbf{x}_p}{|\mathbf{x}_p|}, \quad (2.98)$$

где $\mathbf{x}_c$ — отсчет в центре окна; $\mathbf{x}_p$ — соответствует векторной медиане, которую рассчитывают из упорядоченных по направлениям отсчетов как

$$\mathbf{x}_p = \left\{ D_{p,k}^{ph} \leq D_{m,k}^{ph}; m = \overline{1, N}; p \in \overline{1, N} \right\}. \quad (2.99)$$

Применяя подобного рода подход к α -урезанному векторному фильтру [43], определим α -урезанный фазовый фильтр (TPF) с помощью выражения

$$\mathbf{x}_{apf} = |\mathbf{x}_c| \cdot \frac{\mathbf{x}_{pa}}{|\mathbf{x}_{pa}|}, \quad (2.100)$$

где $\mathbf{x}_{pa}$ — α -урезанный средний выход, рассчитываемый как

$$\mathbf{x}_{pa} = \frac{1}{N(1-\alpha)} \cdot \sum_{k=1}^{N(1-\alpha)} \mathbf{x}_p^{(k)}, \quad (2.101)$$

где $\mathbf{x}_p^{(k)}$ — k -й векторный отсчет, упорядоченный в соответствии с расстоянием $D_{k,m}^{ph}$ вида (2.97).

Параметр α позволяет варьировать уровень подавления шума и робастные свойства подобно обычному векторному α -урезанному фильтру. Ниже мы рассмотрим случай $\alpha = 0,5$.

Следует отметить, что показатели всех рассматриваемых нами векторных фильтров зависят от размера скользящего окна и выбранной нормы L_1 и L_2^2 .

При анализе точности восстановления сигналов с использованием сглаживания оценок биспектров векторными фильтрами исследовались дисперсия флуктуаций и смещение (динамическая ошибка) оценки восстановленного сигнала, которые рассчитывались с помощью формул (2.93) и (2.94), соответственно, для трех типов предложенных выше векторных фильтров (VMF, MPF и TPF), а также для рекурсивного алгоритма Бартелта, Ломана и Вирницера (BLW) [11].

Отметим, что в идеальном случае желательно получить такую сглаженную оценку биспектральной плотности, которая отличается одновременным минимумом дисперсии флуктуаций и смещения оценки восстановленного сигнала или, по крайней мере, ошибки восстановления должны быть меньше ошибок в сигнале, восстановленном по несглаженной оценке биспектральной плотности. Однако, обычно задача одновременной минимизации флуктуационной и динамической ошибки представляется взаимно конфликтной.

Для удобства сравнительного анализа в табл. 2.3 сведены результаты расчетов дисперсии флуктуаций $\bar{\sigma}_{out}^2$ и динамической ошибки δ_{out}^2 в зависимости от входного отношения сигнал-шум $\overline{SNR}_{inr}$. Данные в таблице получены для трех типов векторных фильтров VMF, MPF и TPF и для рекурсивного алгоритма восстановления сигнала BLW. Размер скользящего окна для рассматриваемых трех типов векторных фильтров одинаков и равен 5×5 отсчетов. При численном моделировании тестовый сигнал генерировался в виде двух импульсов треугольной формы с различными амплитудами. Количество повторений эксперимента при статистических исследованиях точности восстановления сигнала полагалось равным $K = 30$.

Таблица 2.3. Показатели исследуемых фильтров

Фильтр	$\overline{SNR}_{\text{inp}}$	$\overline{\sigma}_{\text{out}}^2$	δ_{out}^2
VMF, норма L_1	0,25	0,0724	0,0633
	0,5	0,0285	0,0226
	1,0	0,0132	0,0170
	2,0	0,0072	0,0129
	5,0	0,0039	0,0104
MPF, норма L_1	0,25	0,0371	0,0573
	0,5	0,0094	0,0256
	1,0	0,0046	0,0225
	2,0	0,0031	0,0215
	5,0	0,0030	0,0111
MPF, норма L_2^2	0,25	0,0371	0,0573
	0,5	0,0174	0,0391
	1,0	0,0114	0,0307
	2,0	0,0031	0,0173
	5,0	0,0030	0,0162
TPF, норма L_1	0,25	0,0280	0,0373
	0,5	0,0089	0,0228
	1,0	0,0039	0,0195
	2,0	0,0020	0,0178
	5,0	0,0015	0,0174
TPF, норма L_2^2	0,25	0,0314	0,0417
	0,5	0,0119	0,0317
	1,0	0,0061	0,0213
	2,0	0,0045	0,0164
	5,0	0,0026	0,0107
BLW	0,25	0,0343	0,0632
	0,5	0,0152	0,0381
	1,0	0,0077	0,0243
	2,0	0,0054	0,0155
	5,0	0,0022	0,0102

Анализ результатов, приведенных в табл. 2.3, позволяет отметить следующее:

1. В связи с отмеченным противоречием, возникающим при попытке одновременной минимизации флуктуационной и динамической ошибки, векторная фильтрация может привести к уменьшению дисперсии флуктуации ошибки, но к увеличению динамической ошибки и наоборот. В частности, VMF фильтр дает большие значения $\overline{\sigma}_{\text{out}}^2$ по сравнению с алгоритмом BLW. В то же самое время, VMF фильтр обеспечивает меньшую величину ошибки δ_{out}^2 по сравнению с алгоритмом BLW.

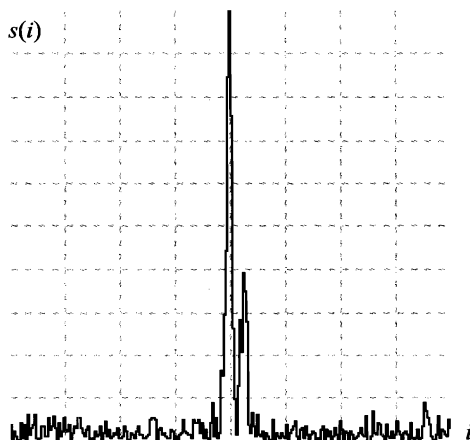


Рис. 2.41. Нормированный сигнал, восстановленный по алгоритму BLW ($SNR_{\text{inp}} = 1$)

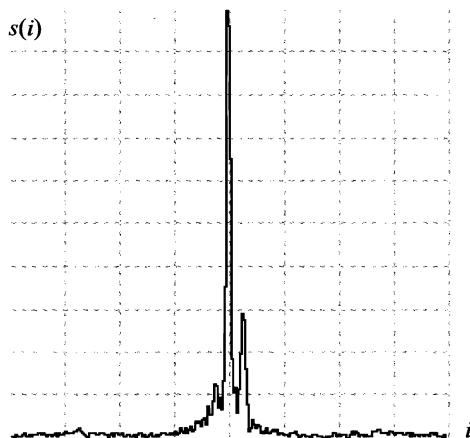


Рис. 2.42. Нормированный сигнал, восстановленный с использованием векторного фильтра TPF типа ($SNR_{\text{inp}} = 1$)

2. Результаты использования MPF фильтра (норма L_1), судя по величинам $\bar{\sigma}_{\text{out}}^2$ и δ_{out}^2 , лучше, чем для алгоритма BLW. В целом норма L_1 для фильтров типов MPF и TPF обеспечивает получение лучших результатов, чем норма L_2^2 . Это объясняется, по-видимому, тем, что векторный фильтр с использованием нормы L_1 в меньшей степени искажает детали в функции оценки биспектральной плотности и работает более эффективно в условиях фильтрации негауссовой помехи.

3. Показатели, которые обеспечивает векторный фильтр TPF, занимают “промежуточное место” между показателями, обеспечиваемыми фильтрами VMF и MPF типов. Отметим, что использование векторного TPF фильтра для сглаживания оценки биспектральной плотности дает определенный выигрыш по сравнению с алгоритмом BLW в отношении дисперсии флук-

туаций восстановленного сигнала, проявляющийся при малых входных отношениях сигнал–шум.

На рис. 2.41–2.42 показаны графики сигналов, восстановленных с использованием алгоритма BLW и векторного фильтра TPF типа с окном 5×5 отсчетов, соответственно. Из сравнения графиков следует, что уровень помех на рис. 2.41 больше, чем на рис. 2.42. В то же самое время, векторная фильтрация обеспечивает лучшие показатели в отношении сохранения формы восстановленного сигнала. В данном примере отношение амплитуд импульсов $A1/A2$ на рис. 2.42 более близко к исходному отношению амплитуд, равному $A1/A2 = 3$.

2.3. Примеры практического применения биспектрального анализа в задачах оценивания радиолокационных дальностных портретов и реставрации изображений

2.3.1. Оценивание радиолокационного дальностного портрета объекта на фоне помех, вызванных рассеянием от морской поверхности. Настоящий параграф посвящен экспериментальным исследованиям восстановления радиолокационного дальностного портрета (РДП) по оценке биспектральной плотности последетекторного отклика, соответствующего объекту, находящемуся на морской поверхности. Для сравнения мы будем анализировать экспериментальные данные оценок РДП, которые получены обычным последетекторным накоплением принимаемого поляриметрического сигнала и РДП, восстановленного по оценке биспектральной плотности.

Качественные показатели методов и систем автоматического распознавания объектов по оценкам РДП [44–48] зависят от ряда факторов, среди которых, в первую очередь, выделим вращение и перемещения объекта в течение интервала времени обнаружения и сопровождения, влияние шума, отражений от подстилающей поверхности, а также неоднородные свойства среды распространения радиолокационных сигналов.

В случае надводных объектов особо следует отметить влияние помехи, случайный характер которой вызван рассеиванием электромагнитных волн от взволнованной морской поверхности. Уровень данной помехи зависит от волнения моря, угла скольжения зондирующей электромагнитной волны, частоты и поляризации. В этой связи возникает задача выделения полезно-го РДП на фоне отражений от морской поверхности.

Вначале определим пространственно-временную модель принимаемого сигнала, в которой необходимо учесть отражения от надводного объекта (сигнальную составляющую) и рассеяния от морской поверхности (помеховую составляющую). При этом будем полагать, что размеры объекта значительно больше рабочей длины волны РЛС. Расположение береговой приемно-передающей антенны РЛС, надводного объекта и область рассеяния Ω , пределы которой ограничены шириной диаграммы направленности (ДН) антенны, обозначены на рис. 2.43.

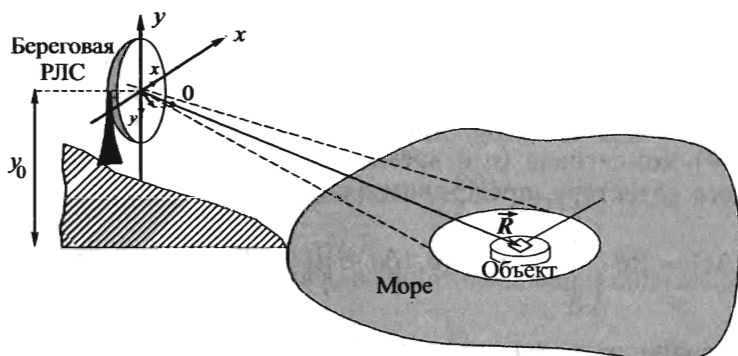


Рис. 2.43. Геометрические соотношения в системе “береговая РЛС — объект”

Плоскость прямоугольной декартовой системы координат XOY полагаем совмещенной с плоскостью раскрыва антенны, а начало системы координат — совпадающим с центром апертуры антенны. Вся область рассеяния Ω может быть поделена на совокупность элементов $\Delta\theta$ поверхности с коэффициентами отражения, величины которых для объекта и морской поверхности отличаются друг от друга. Предположим, что антенна РЛС фиксирована и максимум ее ДН ориентирован на эффективный центр рассеяния объекта, обозначенный символом θ_0 .

Координаты элементов $\Delta\theta$ зададим с помощью вектора $\theta = (\theta_x, \theta_y)$ с направляющими косинусами θ_x и θ_y .

Предположим, что излучаемый антенной узкополосный сигнал представляет собой пачку M радиоимпульсов прямоугольной формы без использования какой-либо модуляции несущей. Принимаемый антенной сигнал $\dot{s}_{ik}(t)$ определяется выражением вида

$$\dot{s}_{ik}(t) = \dot{S}_{ik}(t) \exp(j2\pi f_0 t), \quad (2.102)$$

где $t \in [-T/2, T/2]$ — время;

$i, k = \{H, V\}$ — индексы, соответствующие горизонтальной и вертикальной поляризации;

$$\dot{S}_{ik}(t - m\tau_p) = \begin{cases} 1, & |t - mT_r| \leq \tau_p/2 \\ 0, & |t - mT_r| > \tau_p/2 \end{cases} \quad \text{— комплексная огибающая;}$$

τ_p — длительность импульса;

$T = T_r M$ — полный интервал времени наблюдения, T_r период повторения импульсов;

$m = 1, 2, 3, \dots, M$ — номер индекса импульса в пачке (серии);

f_0 — центральная частота; $f \in [f_0 - \Delta F/2, f_0 + \Delta F/2]$;

полоса частот $\Delta F \ll f_0$;

$j = \sqrt{-1}$.

В течение интервала времени T положение объекта, его ракурс и степень видимости на морской поверхности могут меняться. Вследствие этого для получения сглаженной оценки РДП взволнованную морскую поверхность обычно пытаются “заморозить” с помощью разбиения полного интервала времени наблюдения T на N более коротких временных отрезков

(временных сканов). Это позволяет осуществить процедуру статистического усреднения (накопления) принятого колебания по этим N сканам [48].

Полагая, что аддитивный шум (собственный внутренний шум аппаратуры, а также внешний шум) пренебрежимо мал, n -ю реализацию ($n = 1, 2, \dots, N$) эхо-сигнала (n -й временной скан), наблюдаемую на выходе амплитудного детектора, представим как:

$$S_{ik}^{(n)}(l\Delta t) = \text{Re} \left\{ \int_{\Omega} \dot{F}(\theta) \dot{\varepsilon}_{ik}^{(n)}(\theta, l\Delta t) \dot{S}[l(\Delta t + T_r) - \tau(\theta)] d\theta \right\}, \quad (2.103)$$

где $\dot{F}(\theta)$ — функция, описывающая комплексную ДН антенны;

$\dot{\varepsilon}_{ik}^{(n)}(\theta)$ — n -й относительный (нормированный на единичную поверхность площадью 1 м^2) комплексный коэффициент рассеяния;

$\tau(\theta) = 2R(\theta)/c$ — время задержки;

$R(\theta)$ и c — наклонная дальность и скорость света, соответственно;

$l = 1, 2, \dots, L$ — индекс отсчета в скане; $L = M/N$ — полное количество отсчетов в одном скане;

Δt — временной интервал дискретизации, которому соответствует элемент пространственного разрешения по дальности $\Delta R = c\Delta t$.

Отметим, что уравнение (2.103) справедливо при выполнении условия пространственно-временной узкополосности $2\Delta F/f_0 < \lambda_0/D$, $\lambda_0 = c/f_0$, где D — размер апертуры антенны.

Комплексные коэффициенты $\dot{\varepsilon}_{ik}^{(n)}(\theta, l\Delta t)$ в (2.103) могут быть представлены суммой случайной компоненты $\dot{\varepsilon}_{Tik}^{(n)}(\theta, \Delta t)$, которая соответствует эхо-сигналам, отраженным от элементарных площадок $\Delta\theta$, принадлежащих поверхности случайно перемещающегося на морских волнах объекта, и случайной компоненты $\dot{\varepsilon}_{Sik}^{(n)}(\theta, l\Delta t)$, вызванной рассеянием морской поверхностью. Эти две компоненты статистически независимы, поскольку их происхождение вызвано принципиально различными радиофизическими явлениями. Следовательно, коэффициент отражения $\dot{\varepsilon}_{ik}^{(n)}(\theta, \Delta t)$ равен

$$\dot{\varepsilon}_{ik}^{(n)}(\theta, l\Delta t) = \dot{\varepsilon}_{Tik}^{(n)}(\theta, l\Delta t) + \dot{\varepsilon}_{Sik}^{(n)}(\theta, l\Delta t), \quad (2.104)$$

где первый член суммы определяется комплексными сигнальными коэффициентами поляризационной матрицы $\dot{\varepsilon}_{Tik}^{(n)}(\theta, \Delta t) = |\dot{\varepsilon}_{Tik}^{(n)}(\theta, \Delta t)| \exp[j\xi_{Tik}^{(n)}(\theta, \Delta t)]$, а второй член описывается комплексными помеховыми (рассеиванием морской поверхностью) коэффициентами поляризационной матрицы $\dot{\varepsilon}_{Sik}^{(n)}(\theta, \Delta t) = |\dot{\varepsilon}_{Sik}^{(n)}(\theta, \Delta t)| \exp[j\xi_{Sik}^{(n)}(\theta, \Delta t)]$.

Отметим также, что помеховая компонента $\dot{\varepsilon}_{Sik}^{(n)}(\theta, \Delta t)$, в свою очередь, содержит вклады, вызванные следующими возможными комбинациями путей распространения электромагнитных волн:

- антенна — морская поверхность — антенна;
- антенна — морская поверхность — объект — антенна;
- антенна — объект — морская поверхность — антенна;

— антенна — морская поверхность — объект — морская поверхность — антенна.

При обычном методе статистического накопления радиолокационных данных по N реализациям оценка РДП определяется как

$$\hat{S}_{ik}(l\Delta t) = \left\langle S_{ik}^{(n)}(l\Delta t) \right\rangle = \left\langle \tilde{S}_T^{(n)}[l\Delta t - \bar{\tau}_T^{(n)}] \right\rangle + \left\langle \tilde{S}_S^{(n)}[l\Delta t - \bar{\tau}_S^{(n)}] \right\rangle, \quad (2.105)$$

где $\tilde{S}_T^{(n)}(\dots)$ и $\tilde{S}_S^{(n)}(\dots)$ — n -я реализация огибающей сигнальной и помеховой компонент, соответственно;

$\bar{\tau}_T^{(n)}$ — сигнальная временная задержка, присутствующая в n -м скане;

$\bar{\tau}_S^{(n)}$ — помеховая (соответствующая рассеянию морской поверхностью) временная задержка, наблюдаемая в n -м скане;

$\langle \dots \rangle$ означает процедуру статистического усреднения по N реализациям (по N наблюдаемым сканам). Подчеркнем, что величины $\bar{\tau}_T^{(n)}$ и $\bar{\tau}_S^{(n)}$ меняются по случайному закону от реализации к реализации.

Анализ выражений (2.103)–(2.105) позволяет отметить следующие особенности:

1) в результате случайных перемещений объекта на морской поверхности сигнальная составляющая огибающей представляет собой случайный процесс, закон изменения которого во времени меняется от скана к скану.

2) различные пути распространения излучаемых и отраженных электромагнитных волн приводят к различным временным задержкам $\bar{\tau}_T^{(n)}$ и $\bar{\tau}_S^{(n)}$, которые присутствуют в выражении (2.105), и эти временные задержки меняются по случайному закону от одного скана к другому.

Сигнальная и помеховая составляющие описываются независимыми процессами со своими характерными законами распределения и интервалами корреляции, отличающимися друг от друга. Интервал корреляции помеховой составляющей в рамках нашего рассмотрения оказывается сравнимым со временем обработки одного скана. Следовательно, помеховая составляющая описывается быстро флуктуирующим процессом, меняющимся от скана к скану.

Рассмотрим метод восстановления РДП, основанный на биспектральном оценивании. В основе применения биспектрального анализа к задаче оценки РДП, в первую очередь, лежит свойство инвариантности биспектра к временным сдвигам обрабатываемого сигнала, которое подробно было рассмотрено выше (см. раздел 2.1.1).

Оценку биспектральной плотности РДП, полученную с использованием прямого метода (см. (2.17)–(2.19)), запишем в виде:

$$\hat{B}(p, q) = \left| \hat{B}(p, q) \right| e^{j\hat{\gamma}(p, q)} = \left\langle \dot{X}^{(n)}(p) \dot{X}^{(n)}(q) \dot{X}^{(n)*}(p+q) \right\rangle, \quad (2.106)$$

где $\dot{X}^{(n)}(\dots)$ — прямое преобразование Фурье, сформированное по n -му скану и равное $\dot{X}^{(n)}(p) = \dot{S}_T^{(n)}(p) e^{j2\pi\tau_T^{(n)}p} + \dot{S}_S^{(n)}(p) e^{j2\pi\tau_S^{(n)}p}$; $\dot{S}_T^{(n)}(p)$

и $\dot{S}_S^{(n)}(p)$ — преобразования Фурье сигнальной $\tilde{S}_T^{(n)}(\dots)$ и помеховой $\tilde{S}_S^{(n)}(\dots)$ компонент, соответственно, представленных в выражении (2.105).

С учетом обозначений, принятых в формуле (2.105), оценку биспектра (2.106) определим в виде

$$\begin{aligned} \hat{B}(p, q) = & \hat{B}_T(p, q) + \left\langle \dot{S}_T^{(n)}(p) \dot{S}_T^{(n)}(q) e^{-j2\pi\tau_T^{(n)}(p+q)} \right\rangle \left\langle \dot{S}_S^{(n)*}(p+q) e^{j2\pi\tau_S^{(n)}(p+q)} \right\rangle + \\ & + \left\langle \dot{S}_T^{(n)}(p) \dot{S}_T^{(n)*}(p+q) e^{j2\pi\tau_T^{(n)}q} \right\rangle \left\langle \dot{S}_S^{(n)}(q) e^{-j2\pi\tau_S^{(n)}q} \right\rangle + \\ & + \left\langle \dot{S}_T^{(n)}(q) \dot{S}_T^{(n)*}(p+q) e^{j2\pi\tau_T^{(n)}q} \right\rangle \left\langle \dot{S}_S^{(n)}(p) e^{-j2\pi\tau_S^{(n)}p} \right\rangle + \\ & + \left\langle \dot{S}_T^{(n)}(p) e^{-j2\pi\tau_T^{(n)}p} \right\rangle \left\langle \dot{S}_S^{(n)}(q) \dot{S}_S^{(n)*}(p+q) e^{j2\pi\tau_S^{(n)}p} \right\rangle + \\ & + \left\langle \dot{S}_T^{(n)}(q) e^{-j2\pi\tau_T^{(n)}q} \right\rangle \left\langle \dot{S}_S^{(n)}(p) \dot{S}_S^{(n)*}(p+q) e^{j2\pi\tau_S^{(n)}q} \right\rangle + \\ & + \left\langle \dot{S}_T^{(n)*}(p+q) e^{j2\pi\tau_T^{(n)}(p+q)} \right\rangle \left\langle \dot{S}_S^{(n)}(p) \dot{S}_S^{(n)}(q) e^{-j2\pi\tau_S^{(n)}(p+q)} \right\rangle + \hat{B}_S(p, q) \end{aligned} \quad (2.107)$$

Первый член в (2.107), равный $\hat{B}_T(p, q) = \left\langle \dot{S}_T^{(n)}(p) \dot{S}_T^{(n)}(q) \dot{S}_T^{(n)*}(p+q) \right\rangle$ представляет собой оценку биспектральной плотности РДП объекта, а остальные члены описывают вклад помехи. Ранее, в предыдущих разделах настоящей главы было отмечено, что потенциально высокая точность оценивания $\hat{B}_T(p, q)$ может быть достигнута при условии, что помеха с нулевым средним значением описывается симметричной функцией плотности распределения вероятности. Однако, на практике закон распределения помехи, вызванной рассеиванием морской поверхностью, характеризуется существенной асимметрией функции плотности распределения вероятности [49]. Поэтому, в оценке биспектральной плотности (2.107) даже асимптотически, т.е. при неограниченном увеличении количества сканов $N \rightarrow \infty$ будет присутствовать некоторая помеховая составляющая.

С помощью одного из известных биспектральных алгоритмов восстановления сигналов (например, с использованием рекурсивного алгоритма [11]) по биспектральной оценке (2.107) может быть восстановлена оценка Фурье-спектра РДП объекта и, в конечном итоге, — сформирована оценка РДП, вычисляемая с помощью следующей процедуры обратного дискретного преобразования Фурье

$$\hat{S}_{\text{range}}(l) = \left| IFT \left\{ \left| \hat{S}_{\text{bisp}}(r) \right| e^{j\hat{\varphi}_{\text{bisp}}(r)} \right\} \right|, \quad r = 1, 2, \dots, L, \quad (2.108)$$

где $IFT(\dots)$ — процедура обратного Фурье-преобразования; $|\hat{S}_{\text{bisp}}(r)|$ — амплитудный и $\hat{\varphi}_{\text{bisp}}(r)$ фазовый Фурье-спектры РДП объекта, соответственно.

Отметим, что модульное значение в выражении (2.108) соответствует характеру поведения последетекторной огибающей в условиях проведения физического эксперимента.

Экспериментальные исследования биспектрального метода восстановления оценки РДП, проводились в летний период в прибрежной зоне Черного моря. Приемно-передающая параболическая антенна РЛС располагалась на высоте $y_0 = 8$ м над уровнем моря (см. рис. 2.43). Экспериментальные данные были получены на поляриметрической РЛС X-диапазона ($f_0 = 9370$ МГц) со следующими основными техническими характеристиками: ширина ДН антенны по азимуту и углу места равна $3,0^\circ$; мощность излучения в импульсе 10 кВт; длительность излучаемого импульса 3 мкс; частота повторения импульсов 400 Гц для всей совокупности типов поляризации, т. е. для НН, НV, VН и VV поляризации (первый символ в обозначении типа поляризации соответствует поляризации излучаемой, а второй символ — поляризации принимаемой волны), следовательно, частота смены поляризации равна 100 Гц; РЛС содержит два приемных канала по Н и по V поляризации (развязка между каналами 30 дБ); динамический диапазон приемного тракта РЛС равен 120 дБ; разрядность АЦП — 10 бит; длительность импульса выборки равна 50 нс; такт повторения импульса выборки равен 250 мс, что соответствует элементу разрешения по дальности 75 м.

Цифровые данные регистрировались в виде отдельных сканов, каждый из которых содержит $L = 32$ отсчета для всех комбинаций типов поляризации НН, НV, VН и VV. Полная длительность одного скана для определенного типа поляризации равна 320 мс.

Наведение антенны на объект проводилось с помощью видеокамеры, совмещенной с антенной системой. В качестве объекта исследовался заякоренный металлический буй, размеры которого были существенно меньше элемента разрешения по дальности.

Сравним экспериментально полученные оценки РДП, сформированные с помощью простого накопления сканов (см. выражение (2.105)) и оценки РДП, восстановленные из оценок биспектральной плотности в соответствии с формулами (2.106)–(2.108). Для сравнения воспользуемся радиолокационными данными, зарегистрированными для каждого из четырех типов поляризации в выборке, содержащей $N = 256$ сканов.

На рис. 2.24, а–е приведены графики зависимостей нормированных на единицу площади отражения радиолокационных дальностных портретов (НРДП) от номера отсчета по дальности l . В качестве характерного примера выбрана последовательность из шести сканов, следующих друг за другом, для случая НН поляризации. Наклонная дальность до буя в данном эксперименте равна $R = 1500$ м (угол скольжения равен $0,4^\circ$). Такая величина наклонной дальности должна соответствовать отсчету l на графиках оцифрованных НРДП под номером 26. Длительность временного интервала регистрации данных шести сканов равна 6×320 мс = 1920 мс. При этом достаточно длительном временном интервале случайные перемещения буя на морской поверхности порождают случайные изменения углов отражения электромагнитных волн, как от поверхности буя, так и от взволнованной

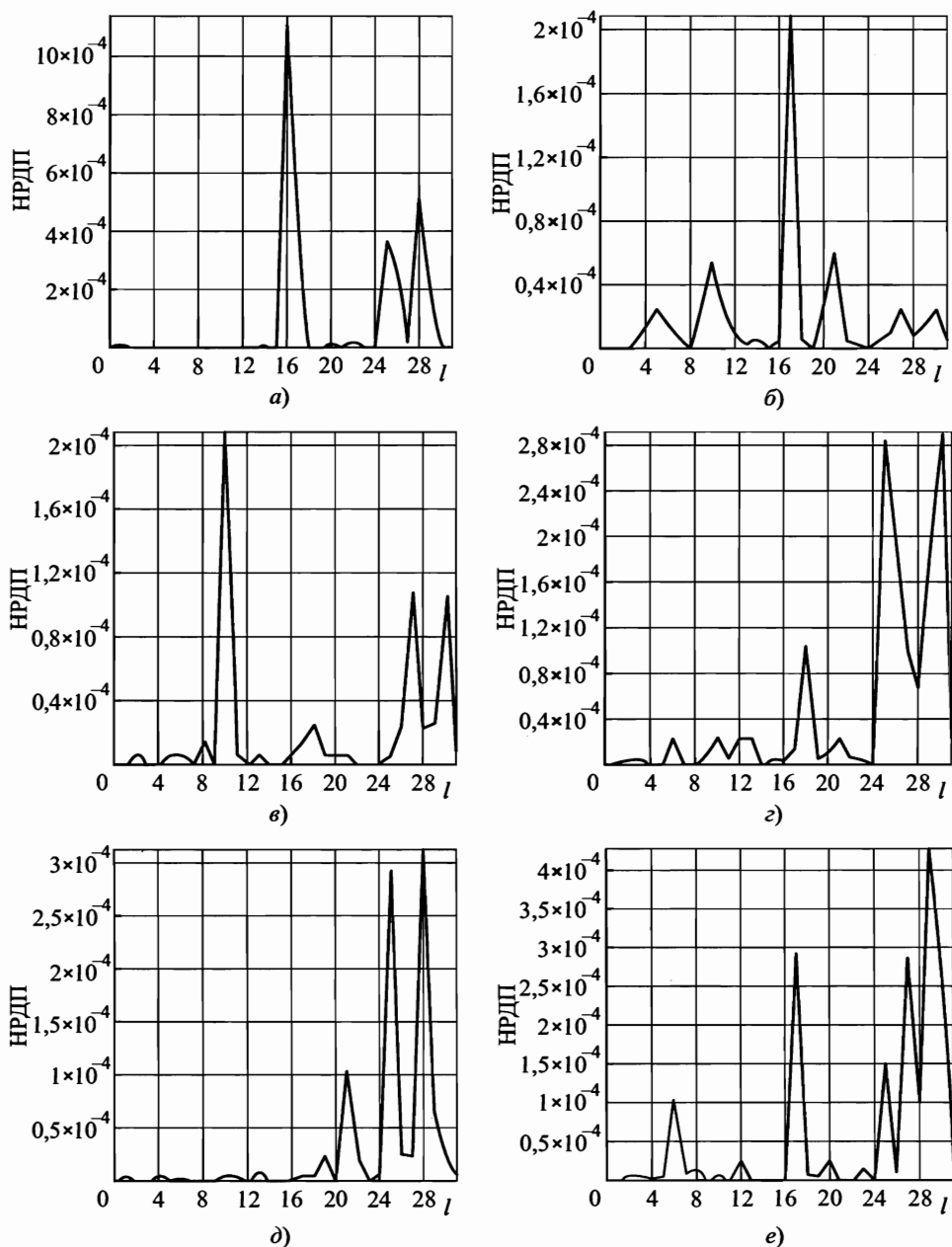


Рис. 2.44. Графики нормированных радиолокационных дальностных портретов (пример последовательности шести произвольных сканов, полученных для НН поляризации)

морской поверхности, и, следовательно, сигнальная $\dot{\varepsilon}_{Tik}^{(n)}(\theta, \Delta t)$ и помеховая $\dot{\varepsilon}_{Sik}^{(n)}(\theta, l\Delta t)$ компоненты в приведенной выше модели (2.104) действительно меняются по случайному закону.

Из графиков, представленных на рис. 2.44, явно виден случайный характер появления откликов в различных сканах, соответствующих отражениям от буя и от морской поверхности. Подчеркнем, что в некоторых сканах объект практически совсем не просматривается (см. рис. 2.44, б). Обращает на себя внимание также и то, что объектный отклик сам по себе существенно искажен, хотя вследствие малых размеров объекта (размеры объекта в несколько раз меньше элемента разрешения по дальности), форма НРДП должна проявляться в виде ярко выраженного мощного (единичного) пика. Вследствие вклада, который вносит помеховая составляющая, вблизи “объектного” отсчета $l = 26$ наблюдаются помеховые отклики (см. рис. 2.44, в, г, д, е). Появление таких помеховых откликов, естественно, ухудшает правильность классификации объекта по РДП.

Рассмотрим теперь оценки РДП, каждая из которых получена с помощью усреднения данных по выборке из $N = 256$ сканов. Графики усредненных НРДП, зарегистрированных для различных типов поляризации, представлены на рис. 2.45–2.50. Отметим, что рис. 2.45–2.47 соответствуют спокойному состоянию моря, наблюдаемому в отсутствие ветра, а рис. 2.48–2.50 — волнению моря в 2...2,5 балла при скорости ветра $V_w = 7...10$ м/с.

Как видно из рис. 2.45–2.47, даже в случае спокойного моря ($V_w \approx 0$) усредненные НРДП искажены для разных типов поляризации. Ширина откликов, наблюдаемых на рис. 2.45–2.47 и определяемых на уровне половинной амплитуды функции НРДП, достаточно большая и изменяется в пределах приблизительно от 300 м (рис. 2.46 и 2.47) до 450 м (рис. 2.45). Эти величины значительно (в несколько раз) превышают величину потенциального элемента разрешения по дальности, равную 75 м.

Данная особенность объясняется влиянием рассеяния от морской поверхности и суперпозицией откликов, соответствующих распространению отраженных электромагнитных волн по перечисленным выше четырем трассам. В дополнение отметим, что уширение функции НРДП связано со случайными перемещениями объекта на морской поверхности, в результате чего НРДП в отдельных сканах смещены друг относительно друга и после “некогерентного” накопления таких сканов (см. формулу (2.105)) имеет место “размытие” функции НРДП.

Уровень помехи, создаваемой отражениями от морской поверхности и наблюдаемой на рис. 2.45–2.47, зависит от типа поляризации, и максимальный уровень данной помехи меняется от –6 дБ (рис. 2.46 и 2.47) до –13 дБ (рис. 2.45).

При наличии ветра и волнении моря в 2...2,5 балла (см. рис. 2.48–2.50) ширина НРДП на уровне половинной амплитуды находится в пределах от 900 до 300 м для различных типов поляризации. В данных условиях максимальный уровень помехи от морской поверхности для разных типов поляризации меняется от –13 дБ (рис. 2.48 и 2.50) до –8 дБ (рис. 2.49).

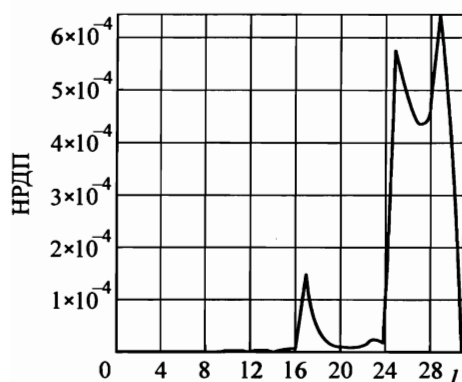


Рис. 2.45. Усредненный НРДП
(НН поляризация, $V_w \approx 0$)

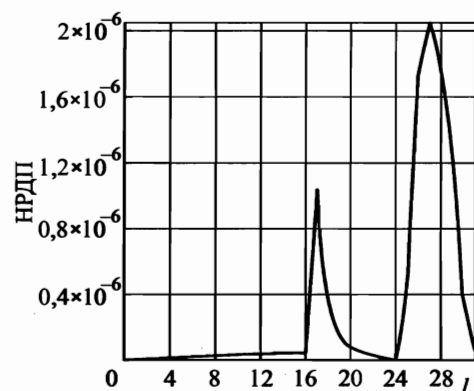


Рис. 2.46. Усредненный НРДП
(НV поляризация, $V_w \approx 0$)

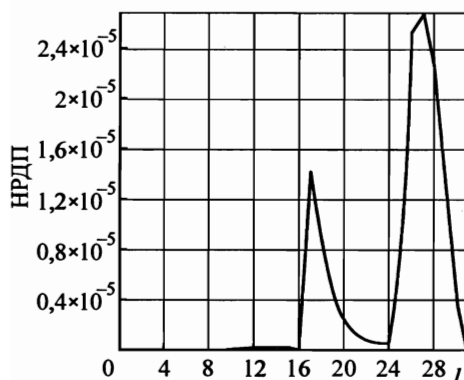


Рис. 2.47. Усредненный НРДП
(VВ поляризация, $V_w \approx 0$)

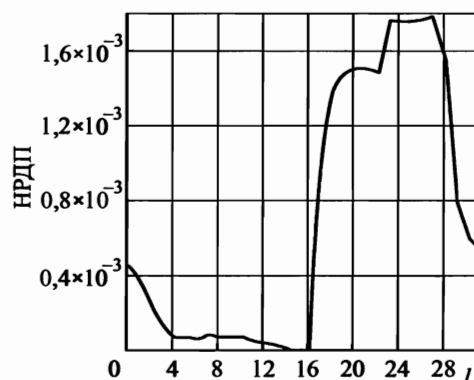


Рис. 2.48. Усредненный НРДП
(НН поляризация, $V_w = 7 \dots 10$ м/с,
волнение моря 2...2,5 балла)

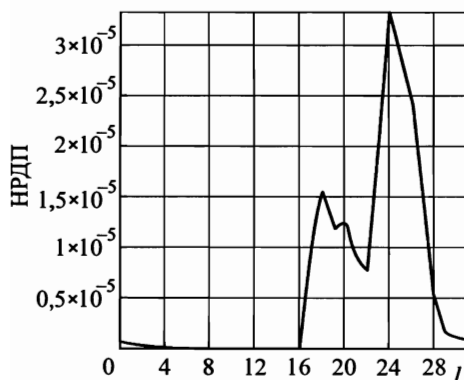


Рис. 2.49. Усредненный НРДП
(НV поляризация, $V_w = 7 \dots 10$ м/с,
волнение моря 2...2,5 балла)

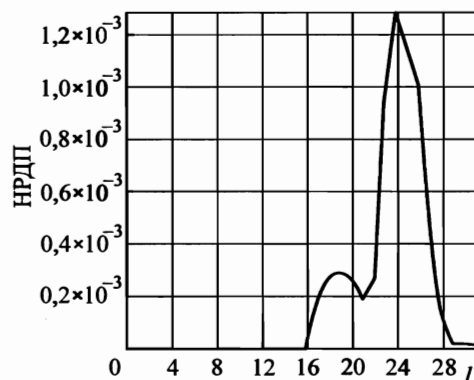


Рис. 2.50. Усредненный НРДП
(VВ поляризация, $V_w = 7 \dots 10$ м/с,
волнение моря 2...2,5 балла)

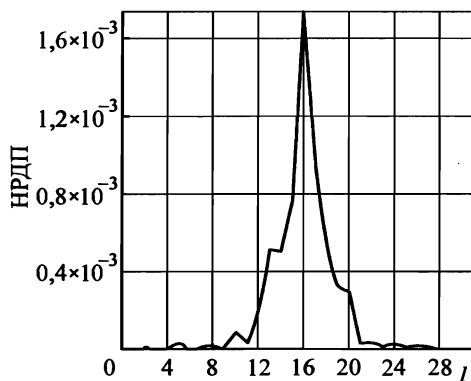


Рис. 2.51. Биспектральный НРДП
(НН поляризация, $V_w \approx 0$)

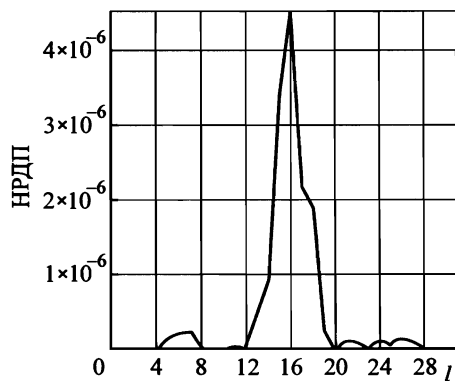


Рис. 2.52. Биспектральный НРДП
(НВ поляризация, $V_w \approx 0$)

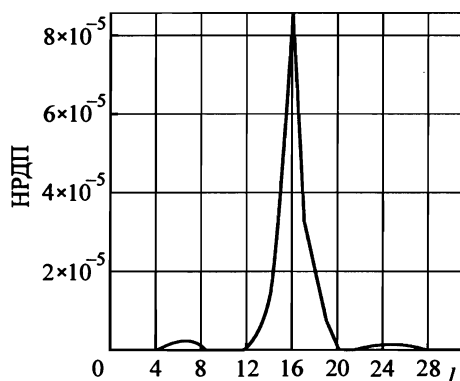


Рис. 2.53. Биспектральный НРДП
(ВВ поляризация, $V_w \approx 0$)

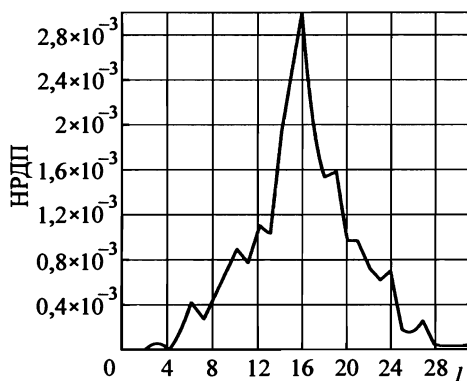


Рис. 2.54. Биспектральный НРДП
(НН поляризация, $V_w = 7 \dots 10$ м/с,
волнение моря 2...2,5 балла)

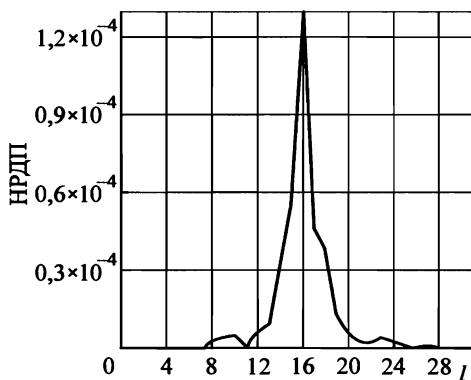


Рис. 2.55. Биспектральный НРДП
(НВ поляризация, $V_w = 7 \dots 10$ м/с,
волнение моря 2...2,5 балла)

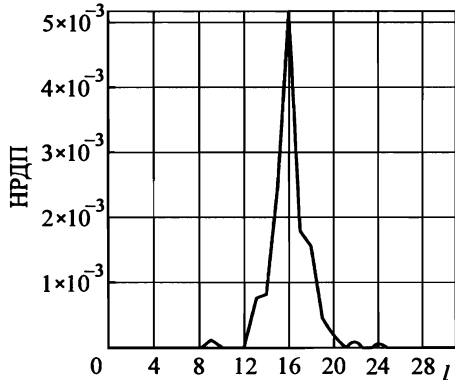


Рис. 2.56. Биспектральный НРДП
(ВВ поляризация, $V_w = 7 \dots 10$ м/с,
волнение моря 2...2,5 балла)

Проведенный анализ усредненных НРДП, представленных на рис. 2.45–2.51, а также анализ большого объема экспериментальных данных, позволяет отметить следующие закономерности:

- форма каждого усредненного НРДП искажена вследствие накопления совокупности смещенных друг относительно друга НРПЗ отдельных сканов (см. рис. 2.44);

- уровень помехи от морской поверхности даже при незначительном волнении моря может быть достаточно большим, и в отдельных случаях (см., например, рис. 2.48) эта помеха полностью маскирует объектный отклик;

- метод получения НРДП накоплением отдельных сканов отличается низким разрешением и слабой робастностью по отношению к помехам, создаваемым отражениями от морской поверхности.

Графики НРДП, которые восстановлены по оценкам биспектральной плотности в соответствии с алгоритмом (2.106)–(2.108), приведены на рис. 2.51–2.56. Отметим, что вследствие ранее описанного свойства инвариантности оценки биспектра к смещению обрабатываемого сигнала, функции НРДП, представленные на графиках, центрированы в соответствии с координатой центра тяжести отклика (индекс под номером $l = 16$ соответствует положению объекта на графиках на рис. 2.51–2.56).

В отсутствие ветра ширина биспектрального НРДП на уровне половинной амплитуды равна приблизительно 150 м и максимальный уровень помехи от морской поверхности равен –20 дБ (рис. 2.52), –24 дБ (рис. 2.51) и –26 дБ (рис. 2.53). Показатели биспектрального метода восстановления РДП в присутствии ветра силой 7...10 м/с и при волнении моря 2...2,5 балла (рис. 2.54–2.56) немного хуже по сравнению с данными, представленными на рис. 2.51–2.53. Ширина биспектрального НРДП на уровне половинной амплитуды равна приблизительно 150 м (рис. 2.55 и 2.56) и 450 м (рис. 2.54), максимальный уровень помехи от морской поверхности равен –17 дБ (рис. 2.54), –28 дБ (рис. 2.55) и –26 дБ (рис. 2.56).

В табл. 2.4 и 2.5 сведены основные показатели точности (разрешение по дальности, определяемое шириной функции НРДП на уровне половинной мощности, и максимальный уровень помехи от морской поверхности), экспериментально полученные для усредненных и биспектральных оценок РДП.

Как следует из табл. 2.4, разрешение по дальности оказывается хуже от 2 до 12 раз по сравнению с величиной теоретической предельной разрешающей способности по дальности, равной 75 м.

Результаты, представленные в табл. 2.5, свидетельствует, что при оценке РДП биспектральным методом разрешение по дальности хуже приблизительно в 2 раза теоретического разрешения по дальности за исключением случая скорости ветра $V_w = 7...10$ м/с и НН поляризации.

Из табл. 2.4 и 2.5 следует, что величины максимального уровня помехи от моря зависят от типа поляризации и состояния моря. Сравнение данных таблиц показывает, что биспектральный метод оценивания позволяет снизить уровень помехи от моря на 11 дБ (НН поляризация)

Таблица 2.4. Показатели, полученные для усредненного РДП

$V_w \approx 0$			$V_w = 7 \dots 10$ м/с		
НН	НВ	ВВ	НН	НВ	ВВ
Ширина НРДП на уровне половинной амплитуды, м					
450	300	300	900	300	300
Максимальный уровень помехи от морской поверхности, дБ					
-13	-6	-6	-13	-8	-13

Таблица 2.5. Показатели, полученные для биспектрального РДП

$V_w \approx 0$			$V_w = 7 \dots 10$ м/с		
НН	НВ	ВВ	НН	НВ	ВВ
Ширина НРДП на уровне половинной амплитуды, м					
150	150	150	450	150	150
Максимальный уровень помехи от морской поверхности, дБ					
-24	-20	-26	-17	-28	-26

и на 20 дБ (ВВ поляризация) при отсутствии ветра, а также на 4 дБ (НН поляризация) и на 20 дБ (НВ поляризация) при наличии ветра, скорость которого равна $V_w = 7 \dots 10$ м/с.

Таким образом, результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о том, что биспектральный метод оценки РДП характеризуется улучшением разрешающих свойств в присутствии помех, вызванных рассеянием от морской поверхности при различном состоянии моря. Отметим, что данный метод не требует априорных сведений о характеристиках принимаемого колебания и помехи, что выгодно отличает метод биспектральной обработки от методов оптимальной фильтрации.

Следует также особо подчеркнуть, что обычно методы биспектрального анализа успешно применяют для подавления помех с симметричной функцией плотности распределения вероятности. Результаты проведенных экспериментальных исследований свидетельствуют о том, что для рассмотренного приложения биспектральный анализ обеспечивает хорошие робастные свойства в отношении помехи от морской поверхности, закон распределения которой отличается существенной асимметрией.

2.3.2. Восстановление изображения по оценкам биспектральной плотности строк с предыскажениями. Данный параграф посвящен исследованию биспектрального метода восстановления цифровых изображений (двумерных вещественных неотрицательных сигналов), искаженных случайными сдвигами строк и аддитивным гауссовым шумом в условиях ограниченного количества наблюдаемых коротких экспозиций.

Подавляющее большинство публикаций по биспектральному анализу посвящено методам и алгоритмам обработки одномерных сигналов [5]. Гораздо меньше внимания уделено биспектральным методам обработки двумерных сигналов (изображений), что связано, в первую очередь, с увеличением вычислительных затрат, в частности, — с резким возрастанием объема памяти, требуемого для реализации алгоритмов восстановления изображений по оценкам комплексной четырехмерной биспектральной плотности изображения. В последние годы в научно-технической литературе появились публикации, в которых представлены результаты восстановления изображений с использованием биспектральной обработки одномерных сигналов, на которые различными способами разбивают двумерные изображения [20–22, 33, 50].

Однако, вместе с тем, следует также обратить внимание на принципиальные ограничения, характерные для биспектральной обработки одномерных сигналов и сдерживающие широкое практическое применение биспектральных методов восстановления изображений. Во-первых, поскольку линейный член фазового Фурье-спектра сигнала принципиально невозможно восстановить из биспектра или, иными словами, биспектр не чувствителен к пространственному (временному) сдвигу исходного сигнала (см. свойство биспектра (2.12)), то восстановленный по биспектру Фурье-спектр будет соответствовать версии сигнала, сдвинутой относительно его исходного положения на величину, соответствующую центру тяжести такого сигнала. Это свойство инвариантности биспектра к сдвигу сигнала создает серьезные ограничения и требует введения соответствующей коррекции в изображение, восстанавливаемое по биспектру. Во-вторых, при расчетах фазового биспектра для подавляющего большинства цифровых изображений возникает проблема циклического заворота фазы биспектра (перескока фазы через пределы главного значения, которые ограничены интервалом $[-\pi, \pi]$). Если истинные значения фазы выходят за указанные пределы, то наблюдается скачок фазы и закон изменения фазы приобретает разрывный характер. Правильный результат при построении усредненной оценки биспектральной плотности, восстановлении по ней Фурье-спектра сигнала и восстановлении сигнала по его Фурье-спектру будет получен только в случае непрерывной фазы, а не ее главного значения. Поэтому, однозначное восстановление фазового Фурье-спектра сигнала по биспектру возможно только в пределах главного значения, а при наличии циклических заворотов фазы требуются специальные алгоритмы разворачивания фазы (см., например, метод разворачивания фазы [32]). Однако эффективность процедуры разворачивания фазы снижается при наличии шума в изображении, а точность оценивания фазовой характеристики после использования процедуры разворачивания фазы резко падает в случаях, когда отношение сигнал–шум мало.

Для того чтобы скорректировать положение строк, восстанавливаемых по оценкам их биспектральных плотностей, и, одновременно, избежать процедуры разворачивания фазы в оценке биспектра, в работе [50] предложен метод восстановления изображений, суть которого состоит в следующем.

Рассмотрим изображение априорно неизвестного объекта, которое искажено аддитивным гауссовым шумом с нулевым средним значением и случайным сдвигом строк. Предположим, что каждая k -я строка ($k = 1, 2, 3, \dots, I$) искаженного изображения, наблюдаемого в виде M коротких экспозиций, определяется в m -й реализации ($m = 1, 2, 3, \dots, M$) последовательностью вещественных неотрицательных чисел $\{x_k^{(m)}(i)\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, I$). Тогда входное воздействие системы восстановления изображения и распознавания объекта может быть описано уравнением наблюдения вида

$$x_k^{(m)}(i) = s_k(i - \tau_k^{(m)}) + n_k^{(m)}(i), \quad (2.109)$$

где $\tau_k^{(m)}$ — случайный сдвиг исходного (неискаженного) одномерного изображения строки $s_k(i)$, биспектр которого отличен от нуля; $n_k^{(m)}(i)$ — m -я реализация гауссова шума, выборочная дисперсия которого равна σ_m^2 .

Искажения строк изображения, описываемые моделью (2.109), могут возникать на практике при наблюдении изображений через турбулентную среду [29]; из-за возникновения ошибок в механических устройствах сканирования изображений (например, в радиометрических системах), а также вследствие случайных (или искусственно создаваемых в телекоммуникационных системах кодирования изображений) сбоев в системе синхронизации [20].

Задача формулируется следующим образом. На основе уравнения наблюдения (2.109) необходимо восстановить по строкам двумерное изображение априорно неизвестного объекта, достаточное для его надежного визуального распознавания.

Построчное восстановление изображения неизвестного объекта, который согласно уравнения наблюдения (2.109) может быть маскирован аддитивным шумом и случайным циклическим сдвигом (заворотом) строк, в соответствии с методом, предложенным в [50], включает два нижеследующих этапа обработки.

Этап 1. Устранение случайного сдвига строк с помощью корреляционной и биспектральной обработки на основе последовательности описанных ниже процедур.

1.1. Формирование выборочных оценок взаимных корреляционных функций между соседними одномерными реализациями искаженных строк (2.109), которые рассчитывают по формуле

$$\hat{R}_{k,k+1}^{(m)}(l) = \sum_{i=1}^I x_k^{(m)}(i) x_{k+1}^{(m)}(i + l), \quad m = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (2.110)$$

Заметим, что в пределах одного целого кадра изображения, содержащего I строк, полное количество функций $\hat{R}_{k,k+1}^{(m)}(l)$ вида (2.110) равно $I - 1$ для каждой m -й реализации.

1.2. Нахождение и запоминание координат максимумов $\{l_{\max k}^{(m)}\}_{\text{jittered}}$ взаимных корреляционных функций (2.110):

$$\{\hat{R}_{k,k+1}^{(m)}(l)\}_{\max} \Rightarrow \{l_{\max k}^{(m)}\}_{\text{jittered}}. \quad (2.111)$$

1.3. Формирование усредненной по M реализациям оценки биспектра межстрочной взаимной корреляционной функции, выполняемое, например, прямым методом (2.17)–(2.19), и восстановление оценки взаимной корреляционной функции $\{\hat{R}_{k,k+1}^{(l)}\}_{BR}$ с помощью, например, рекурсивного алгоритма (2.27)–(2.28).

1.4. Нахождение и запоминание координат центров тяжести $\{l_{CGk}\}_{BR}$, восстановленных по оценке биспектральной плотности оценок корреляционных функций $\{\hat{R}_{k,k+1}^{(l)}\}_{BR}$:

$$\{\hat{R}_{k,k+1}^{(l)}\}_{BR CG} \Rightarrow \{l_{CGk}\}_{BR}. \quad (2.112)$$

Поскольку биспектральное восстановление сигнала (в данном случае “сигналом” служит одномерная функция $\hat{R}_{k,k+1}^{(m)}(l)$) сопровождается подавлением линейного фазового члена, то восстановленный по биспектру сигнал при потере данного фазового члена будет смещен относительно исходного сигнала на величину $\{l_{CGk}\}_{BR}$.

Для доказательства этого рассмотрим преобразование Фурье оценки корреляционной функции, которое определим выражением

$$\dot{X}_R(f) = |\dot{X}_R(f)| \exp[j\varphi_R(f)] = \sum_{l=1}^I \hat{R}_{k,k+1}(l) \exp(-j2\pi fl), \quad (2.113)$$

где $|\dot{X}_R(f)|$ и $\varphi_R(f)$ — амплитудный и фазовый Фурье-спектр оценки корреляционной функции, соответственно; f — частота.

Продифференцировав обе части выражения (2.113) по переменной f , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{X}_R(f)}{\partial f} &= \exp[j\varphi_R(f)] \left\{ \frac{\partial |\dot{X}_R(f)|}{\partial f} + j|\dot{X}_R(f)| \frac{\partial \varphi_R(f)}{\partial f} \right\} = \\ &= \sum_{l=1}^I (-j2\pi l) \hat{R}_{k,k+1}(l) \exp(-j2\pi fl). \end{aligned} \quad (2.114)$$

Частная производная (2.114), вычисленная на нулевой частоте $f = 0$, с учетом того, что значение фазы на нулевой частоте эрмитово-сопряженного спектра вещественной функции равно нулю

$$\varphi_R = 0, \quad (115a)$$

определяется как

$$\left. \frac{\partial |\dot{X}_R(f)|}{\partial f} \right|_{f=0} = 0, \quad (115b)$$

поскольку Фурье-спектр вещественной функции — четная функция.

С учетом соотношений (115а), (115б) уравнение (2.114) при $f = 0$ удобно записать как

$$j|\dot{X}_R(0)| \left. \frac{\partial \varphi_R(f)}{\partial f} \right|_{f=0} = -j2\pi \sum_{l=1}^I l \hat{R}_{k,k+1}(l). \quad (2.116)$$

Принимая во внимание, что значение амплитудного Фурье-спектра (2.113) при $f = 0$, равно

$$|\dot{X}_R(0)| = \sum_{l=1}^I \hat{R}_{k,k+1}(l), \quad (2.117)$$

находим

$$\frac{1}{2\pi} \left. \frac{\partial \varphi_R(f)}{\partial f} \right|_{f=0} = \frac{\sum_{l=1}^I l \hat{R}_{k,k+1}(l)}{\sum_{l=1}^I \hat{R}_{k,k+1}(l)} = \{l_{CGk}\}_{BR}, \quad (2.118)$$

где $\{l_{CGk}\}_{BR}$ — координата центра тяжести оценки корреляционной функции, которая использована в формуле (2.112).

Раскладывая фазовый Фурье-спектр $\varphi_R(f)$ в ряд Маклорена и учитывая (2.118), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_R(f) &= \varphi_R(0) + \frac{\varphi'_R(0)}{1!} f + \frac{\varphi''_R(0)}{2!} f^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}_R(0)}{n!} f^n + \dots = \\ &= \frac{\partial \varphi_R(f)}{\partial f} f + \psi(f) = -2\pi \{l_{CGk}\}_{BR} f + \psi(f). \end{aligned} \quad (2.119)$$

Используя уравнение (2.24), которое связывает фазовый биспектр $\gamma_R(f_1, f_2)$ с фазовым Фурье-спектром $\varphi_R(f)$, запишем

$$\gamma_R(f_1, f_2) = \psi(f_1) + \psi(f_2) - \psi(f_1 + f_2). \quad (2.120)$$

Анализ последнего выражения показывает, что величина $\{l_{CGk}\}_{BR}$ пропала. Поэтому, оценка корреляционной функции $\{\hat{R}_{k,k+1}(l)\}_{BR}$, восстановленная по биспектру, центрирована относительно координаты центра тяжести $\{l_{CGk}\}_{BR}$. Следовательно, если исходная корреляционная функция равна $\hat{R}_{k,k+1}(l)$, то после восстановления по биспектру получим центрированную относительно центра тяжести версию этой функции $\{\hat{R}_{k,k+1}(l - l_{CGk})\}_{BR}$.

Таким образом, анализ формул (2.113)–(2.120) свидетельствует о центрировании оценки корреляционной функции, восстановленной по оценке биспектральной плотности строки изображения в соответствии с величиной

$$\{l_{CGk}\}_{BR} = \frac{\sum_{l=1}^I l \hat{R}_{k,k+1}(l)}{\sum_{l=1}^I \hat{R}_{k,k+1}(l)}. \quad (2.121)$$

Вследствие ранее отмеченной низкой чувствительности биспектрального метода восстановления к аддитивному гауссовому шуму величина (2.121) слабо подвержена влиянию шума и, поэтому может служить своего рода надежной “опорой” для коррекции строк восстановленного изображения, описанного ниже.

1.5. Коррекция случайного сдвига строк в изображении (2.109), которая основана на двух следующих процедурах.

Первая процедура заключается в вычислении поправочных коэффициентов сдвига строк в виде разностей величин (2.111) и (2.112):

$$\Delta_k^{(m)} = \{l_{\max k}^{(m)}\}_{\text{jittered}} - \{l_{CGk}\}_{BR}. \quad (2.122)$$

Вторая процедура — сдвиг (коррекция) строк в изображении (2.109) в соответствии с величинами поправочных коэффициентов (2.122). После коррекции случайно смещенных строк изображение (2.109) примет вид

$$x_{k \text{ corrected}}^{(m)}(i) \cong s_k(i) + n_k^{(m)}(i). \quad (2.123)$$

Таким образом, скорректированное по строкам согласно (2.123) изображение подготовлено ко второму этапу обработки.

Этап 2. Биспектральное восстановление изображения с введением предскажений в строках.

2.1. Введение в каждую строку (2.123) такой дополнительной функции (функции предскажений), чтобы амплитудный Фурье спектр суммарной функции не содержал нулей. В простейшем случае функция предскажений может быть задана в форме двух δ -импульсов, первый из которых помещают в начало, а второй — в конец каждой строки (2.123) обрабатываемого изображения.

Тогда после введения предскажений модифицированное (предскаженное) изображение строки представим в виде:

$$f_k^{(m)}(i) = A_0 \delta(i-1) + x_{k \text{ corrected}}^{(m)}(i) + A_0 \delta(i-I), \quad (2.124)$$

где A_0 — амплитуда функции предскажений, выбор которой определяется выполнением условия

$$A_0 \gg \sum_{i=1}^I x_k^{(m)}(i). \quad (2.125)$$

Отметим, что условие (2.125) обеспечивает преобразование смешанно-фазового сигнала (2.123) в максимально-фазовый сигнал (2.124), т.е. сигнал, у которого все нули сдвинуты достаточно далеко от окружности единичного радиуса на комплексной z -плоскости. При этом важно подчеркнуть, что предлагаемый способ введения аддитивных предскажений в отличие от мультипликативного способа [33] не нарушает свойств шума, который присутствует в обрабатываемом изображении. Напомним (см. раздел 2.1.3), что введение мультипликативных предскажений в форме степенной функции может спровоцировать серьезную проблему — шум после такого перемножения может стать нестационарным процессом.

В результате предлагаемого преобразования смешанно-фазового сигнала в максимально-фазовый сигнал изменения фазы в оценке биспектра не

выходят за пределы, ограниченные пределами главного значения $[-\pi, \pi]$, и поэтому отпадает необходимость в выше отмеченной процедуре разворачивания фазы. Следовательно, фазовый Фурье-спектр строки изображения можно однозначно восстановить из оценки биспектральной плотности строки.

В то же самое время, важно отметить, что центр тяжести “предыскаженной” строки (2.124) становится фиксированной величиной вследствие, во-первых, выполнения условия (2.125) и, во-вторых, благодаря робастным свойствам оценки биспектра по отношению к воздействию аддитивного гауссова шума.

2.2. Расчет оценок биспектральной плотности “предыскаженных” строк (2.124) с помощью прямого метода (см. процедуры (2.17)–(2.19)).

2.3. Восстановление амплитудного и фазового Фурье-спектров строк изображения с помощью рекурсивного алгоритма [11].

2.4. Построчное восстановление изображений строк с помощью вычисления модуля обратного преобразования Фурье комплексного Фурье-спектра каждой строки, рассчитанного в предыдущем пункте.

Рассмотрим пример восстановления изображения на основе выше описанного метода. Исходное тестовое 8-битное изображение размером $I \times I = 256 \times 256$ пикселей при моделировании подвергалось искажениям для каждой m -й реализации добавлением аддитивного гауссова шума с нулевым средним значением и с выборочной дисперсией, равной $\sigma_m^2 = 100$. Аддитивный шум и случайный сдвиг $\tau_k^{(m)}$ с девиацией, равной ± 20 пикселям, вводились независимо в каждую строку изображения. Вследствие этого каждая k -я ($k = 1, 2, 3, \dots, 256$) строка изображения становилась искаженной случайным сдвигом, сопровождаемым циклическим заворотом строки и аддитивным шумом. Амплитуда δ -импульсов функции предыскажений выбиралась равной $A_0 = 50000$, чтобы гарантированно обеспечить выполнение условия (2.125) с учетом различного динамического диапазона изменения интенсивности в произвольной строке восстанавливаемого двумерного изображения, для того чтобы, с одной стороны, избежать выше отмеченных заворотов фазы биспектра и, с другой стороны, зафиксировать величину центра тяжести различных строк. При численных расчетах рассматривалась практически важная ситуация малого объема выборки из $M = 5$ реализаций.

На рис. 2.57 представлено исходное (неискаженное) тестовое изображение, а на рис. 2.58 — m -я реализация этого изображения, искаженного аддитивным гауссовым шумом с выборочной дисперсией $\sigma_m^2 = 100$ и случайным сдвигом строк с максимальной девиацией сдвига, равной ± 20 пикселям.

Изображение, приведенное на рис. 2.58, сильно искажено и распознавание априорно неизвестного объекта (в нашем примере — это “Барбара”) по такому изображению практически не представляется возможным.

Результат расчета выборочных взаимных корреляционных функций $\hat{R}_{k,k+1}^{(m)}(l)$ между соседними искаженными строками в m -й реализации



Рис. 2.57. Исходное неискаженное изображение

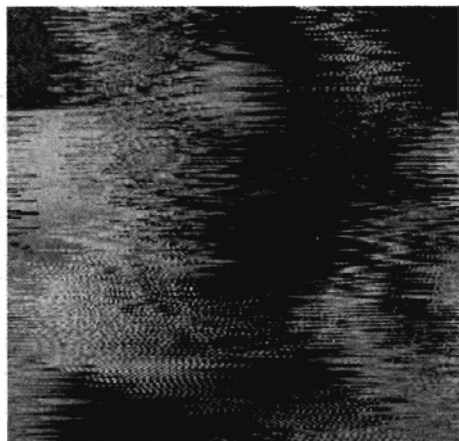


Рис. 2.58. Реализация изображения (кадр), искаженного случайным сдвигом строк и аддитивным шумом

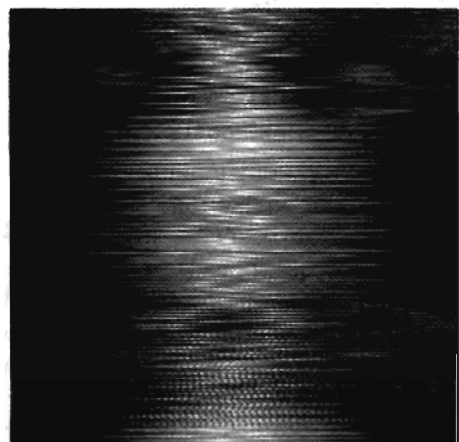


Рис. 2.59. Выборочные межстрочные взаимные корреляционные функции искаженного изображения

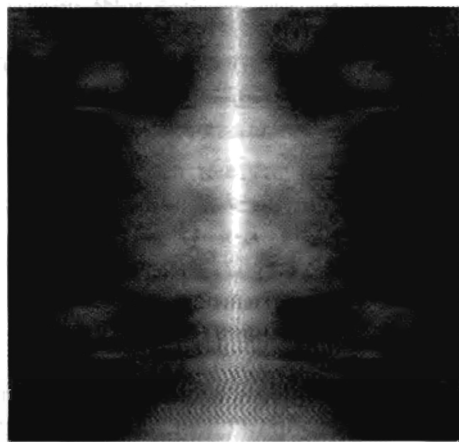


Рис. 2.60. Оценки межстрочных взаимных корреляционных функций искаженного изображения, восстановленные по биспектру

(см. выражение (2.59)) представлен на рис. 2.59 в виде корреляционного портрета из 255 “строк”. Как видно из рис. 2.59, максимумы корреляционных функций (большим значениям $\hat{R}_{k,k+1}^{(m)}(l)$ соответствуют более светлый тон) распределены по случайному закону от “строки к строке”.

Оценки межстрочных взаимных корреляционных функций $\{\hat{R}_{k,k+1}(l)\}_{BR}$, восстановленные по оценкам биспектральной плотности, представлены на рис. 2.60. Как следует из рис. 2.60 максимумы выстроены в практически ровную вертикальную линию. Данная особенность служит

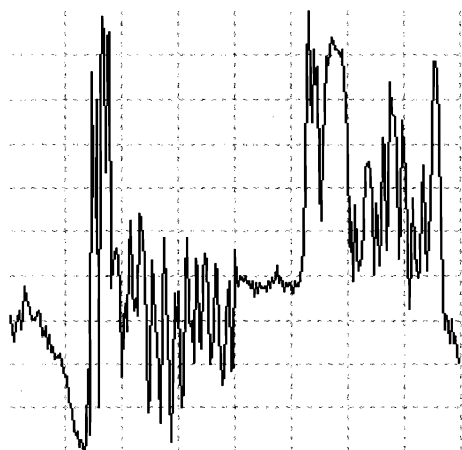


Рис. 2.61. Распределение интенсивности в произвольной строке неискаженного изображения на рис. 2.57

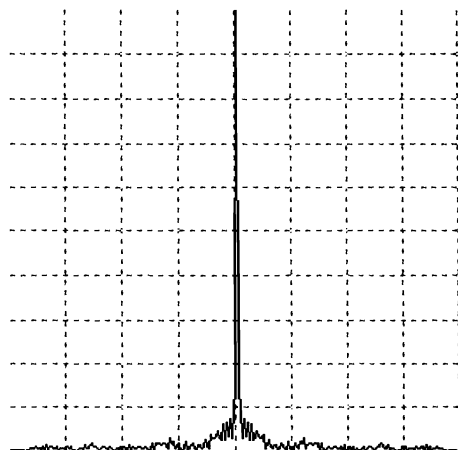


Рис. 2.62. Амплитудный Фурье-спектр строки на рис. 2.61

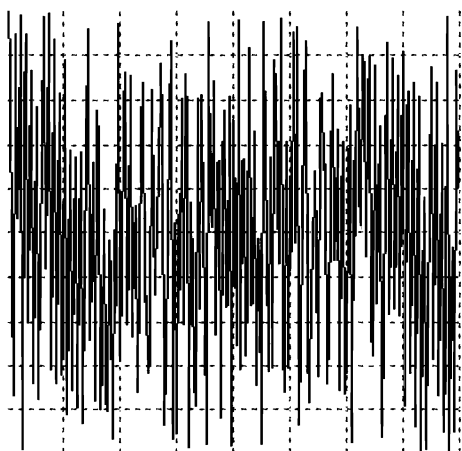


Рис. 2.63. Фазовый Фурье-спектр строки на рис. 2.61

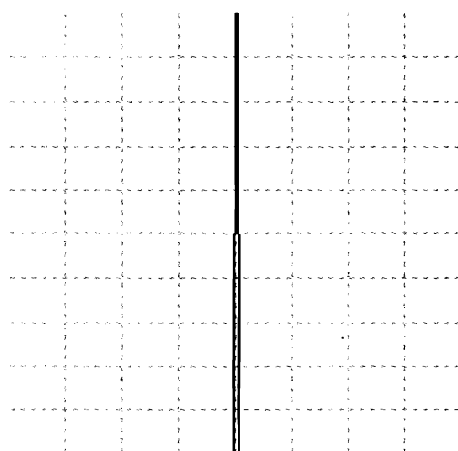


Рис. 2.64. Распределение интенсивности в произвольной строке неискаженного изображения на рис. 2.57 после введения предискажений

нам основанием при выборе координат данных максимумов для расчета корректирующих поправок (2.122).

Для иллюстрации поведения функции распределения интенсивности в произвольной строке неискаженного изображения, а также для анализа поведения соответствующих амплитудного и фазового Фурье-спектров на рис. 2.61–2.63 представлены их графики. Наличие многочисленных нулей в амплитудном Фурье-спектре (рис. 2.62) вызывает соответствующие многочисленные циклические завороты фазы в фазовом Фурье-спектре

(см. рис. 2.61, на котором максимумы и минимумы фазы соответствуют пределам π и $-\pi$).

Для однозначного восстановления фазового Фурье-спектра по оценке биспектральной плотности строки в смешанно-фазовый сигнал (рис. 2.61) вводят предскажения, в результате которых получают максимально-фазовый сигнал (рис. 2.64). Распределение интенсивности в произвольной строке после введения предскажений, амплитудный и фазовый Фурье-спектры “предскаженной” строки представлены на рис. 2.64–2.66, соответственно. В амплитудном спектре (рис. 2.65) нули отсутствуют, а фазовый спектр (рис. 2.66) описывается квазилинейной функцией без заворотов (скачков) фазы.

Для иллюстрации характера поведения амплитудного и фазового биспектров до и после введения предскажений на рис. 2.67–2.70 приведены соответствующие графики. В отличие от фазового биспектра, полученного без предскажений (см. рис. 2.68), в котором наблюдаются завороты фазы на всей биспектральной плоскости, фазовый биспектр после введения предскажений (см. рис. 2.70) не содержит заворотов фазы в пределах главной треугольной расчетной области на биспектральной плоскости.

Следовательно, в результате введения предскажений становится возможным однозначное восстановление изображения строки с помощью рекурсивного алгоритма [11]. В случае введения предлагаемых предскажений данный алгоритм позволяет однозначно восстановить фазовый Фурье спектр строки.

На рис. 2.71 представлен результат построчного восстановления изображения с использованием предскажений строк. Распознавание объекта (“Барбара”) может быть выполнено по этому изображению достаточно надежно.

Следует, однако, отметить, что восстановленное изображение на рис. 2.71 искажено по краям: на левый и правый края восстановленного изображения накладывается периодическая функция вида $|\sin x/x|$, которая является результатом восстановления предскажающих δ -импульсов. Дальнейшее повышение качества восстановленного изображения в случае необходимости может быть достигнуто с помощью оконного сглаживания таких искажений и при увеличении объема выборки.

Таким образом, предлагаемый метод реставрации изображений позволяет решить задачу распознавания неизвестного объекта без наличия априорных сведений о характеристиках объекта и помех, маскирующих данный объект. Благодаря введению предскажений изменения фазы в оценке фазового биспектра не превышают границ, определенных главным интервалом изменений фазы $[-\pi, \pi]$. Поэтому отпадает необходимость в процедуре разворота фазы и обеспечивается однозначное решение задачи восстановления комплексного Фурье-спектра по оценке биспектральной плотности.

Приведенные выше результаты математического моделирования свидетельствуют о достаточно высоких для надежного распознавания объекта

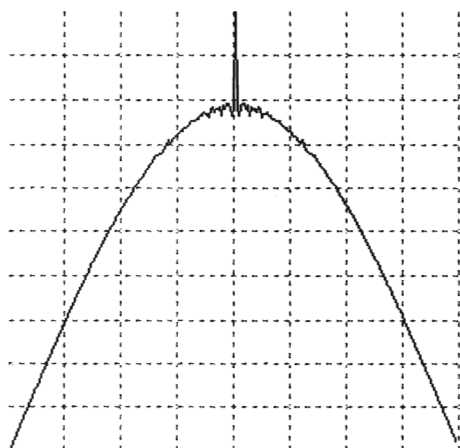


Рис. 2.65. Амплитудный Фурье-спектр строки на рис. 2.64

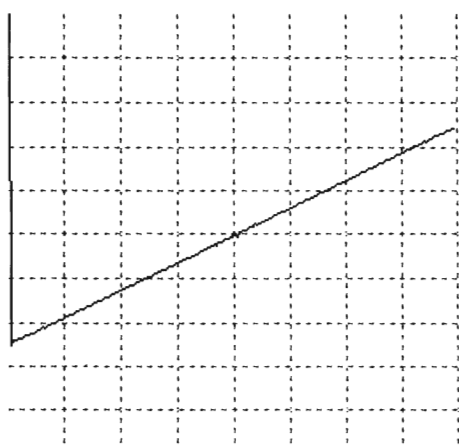


Рис. 2.66. Фазовый Фурье-спектр строки на рис. 2.64

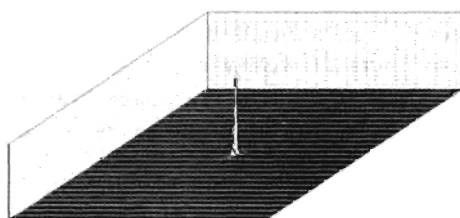


Рис. 2.67. Оценка амплитудного биспектра строки искаженного изображения (предыскажения отсутствуют)

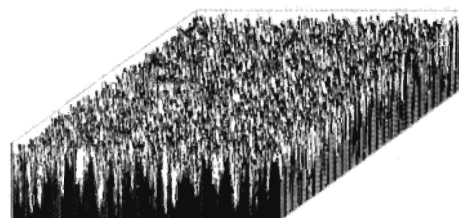


Рис. 2.68. Оценка фазового биспектра строки искаженного изображения (предыскажения отсутствуют)

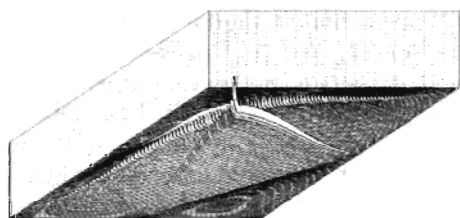


Рис. 2.69. Оценка амплитудного биспектра строки искаженного изображения (предыскажения введены)

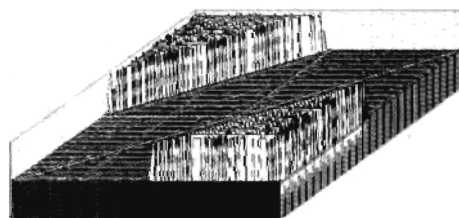


Рис. 2.70. Оценка фазового биспектра строки искаженного изображения (предыскажения введены)

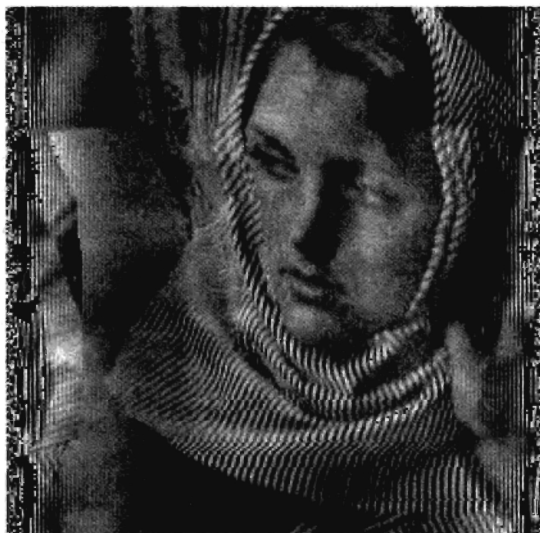


Рис. 2.71. Изображение, восстановленное с помощью предскажений строк робастных показателей предложенного метода по отношению к случайному сдвигу строк в присутствии аддитивного шума. Предложенный метод может быть полезным применительно к автоматическим системам распознавания образов, работающим в условиях отсутствия априорных сведений о характеристиках объекта и помех.

Список литературы

1. *Lohmann A. W., and Wirnitzer B.* Triple correlations // *Proc. IEEE.* — 1984. — Vol. 72, № 7. — P. 889–901.
2. *Nikias C. L., and Raghuvver M. R.* Bispectral estimation: A digital signal processing framework *Proc // IEEE.* — July 1987. — Vol. 75, № 7. — P. 869–891.
3. *Mendel J. M.* Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and system theory: Theoretical results and some applications // *Proc. IEEE.* — March 1991. — Vol. 79, № 3. — P. 278–305.
4. *Важинский В. Н., Тетерин В. В.* Корреляционная функция третьего порядка и биспектр в задачах обработки сигналов // *ОМП.* — 1991. — № 4. С. 4–14.
5. *Swami A., Giannakis G. B. and Zhou G.* Bibliography on higher-order statistics // *Signal Processing (Elsevier).* — 1997. Vol. 60, № 1. — P. 65–126.
6. *Jouny I.* Description of radar targets using bispectrum // *IEE Proc.-Radar, Sonar, Navigation.* — June 1994. — Vol. 141, № 3. — P. 159–163.
7. *Totsky A. V. and Gorbunenko B. F.* Investigations of the synthetic aperture radar images formed by processing of bispectral data // *International Journal of Electronics and Communications, (AEÜ).* — 1999. — Vol. 53, № 3. — P. 146–150.
8. *Pei B., Bao Z., Xing M.* Logarithm bispectrum-based approach to radar range profile for automatic target recognition // *The Journal of the Pattern Recognition Society.* — 2002. Vol. 35. — P. 2643–2651.

9. Тоцкий А. В., Астола Я., Егиазарян К. О., Зеленский А. А., Курбатов И. В., Лукин В. В. Восстановление сигналов по оценкам биспектров в присутствии гауссовых и негауссовых помех // Успехи современной радиоэлектроники. — 2002. — № 11. С. 44–58.
10. Lohmann A. W., Weigelt G. and Wirnitzer B. Speckle masking in astronomy: Triple correlation theory and applications // Applied Optics. — December 1983. — Vol. 22. — P. 4028–4037.
11. Bartelt H., Lohmann A. W. and Wirnitzer B. Phase and amplitude recovery from bispectra // Applied Optics. — September 1984. — Vol. 23. — P. 3121–3129.
12. Бакут П. А., Плотников И. П., Ряхин А. Д., Свиридов К. Н. О восстановлении астрономического изображения по тройным корреляциям // ОМП. — 1991. — № 4. — С. 52–54.
13. Reinheimer T., Hofmann K.-H., Schöller M. and Weigelt G. Speckle masking interferometry with Large Binocular Telescope // Astron. Astrophys. Suppl. Series. — January 1997. — Vol. 121. — P. 191–199.
14. Sasaki K., Sato T., and Nakamura Y. Holographic passive sonar // IEEE Trans. Sonics Ultrasonics, SU-24. — May 1977. — P. 193–200.
15. Giannakis G. B. and Tsatsanis M. K., Signal detection and classification using matched filtering and higher order statistics // IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing. — 1990. — Vol. 38, № 7. — P. 1284–1296.
16. Trucco A. Detection of objects buried in the seafloor by a pattern-recognition approach // IEEE Journal of Oceanic Engineering. — 2001. — Vol. 26, № 4. — P. 769–782.
17. Nakamura M. Waveform estimation from noisy signals with variable signal delay using bispectrum averaging // IEEE Trans. on Biomedical Engineering. — February 1993. — Vol. 40, № 2. — P. 118–127.
18. Zhang Ji-Wu, Zheng Chong-Xun and Xie Au. Bispectrum analysis of focal ischemic cerebral EEG signal using third-order recursion method // IEE Trans. Biomedical Engineering. — March 2000. — Vol. 47, № 3. — P. 352–359.
19. Токки А. В., Пежина Я. и Забуга С. Я. Super-resolution in incoherent systems of image restoration with noise by bispectral data processing // Optik. — 1988. — Vol. 83, № 3. — P. 85–87.
20. Sundaramoorthy G., Raghuveer M. R. and Dianat S. A. Bispectral reconstruction of signals in noise: Amplitude reconstruction issues // IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing. — July 1990. — Vol. 38, № 7. — P. 1297–1306.
21. Dianat S. A. and Raghuveer M. R. Fast algorithms for phase and magnitude reconstruction from bispectra // Optical Engineering. May 1990. — Vol. 29, № 5. — P. 504–512.
22. Kang M. G., Lay K. T. and Katsaggelos A. K. Phase estimation using the bispectrum and its application to image restoration, Optical Engineering. — July 1991. — Vol. 30, № 7. — P. 976–985.
23. Rivola A. and White P. R. Use of higher order spectra monitoring: simulation and experiments // Proc. of the DETC99: 1999 ASME Design Engineering Technical Conferences, Las Vegas, Nevada, 12–15 September, 1999. http://s360.ing.unibo.it/appl_mec/rivola/publ6
24. Jhang K.-Y. Applications of nonlinear ultrasonics to the NDE of material degradation // IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics, and frequency Control. — 2000. — Vol. 47, № 3. — P. 540–548,

25. *Алексеев В. Г.* Непараметрический биспектральный анализ стационарных случайных процессов // *Успехи современной радиоэлектроники*. — 2003. — № 5. — С. 40–47.
26. *Sasaki K., Sato T. and Yamashita Y.* Minimum bias windows for bispectral estimation // *Journal of Sound and Vibrations*. — 1975. — Vol. 40, № 1. — P. 139–148.
27. *Brillinger D. R.* An introduction to polyspectra // *Ann. Math. Statist.* — 1965. — Vol. 36. — P. 1351–1374.
28. *Фалькович С. Е.*, Оценка параметров сигнала. — М.: Радио и связь, 1970.
29. *Василенко Г. И., Тараторин А. М.* Восстановление изображений. — М.: Радио и связь, 1986.
30. *Коростелев А. А.* Пространственно-временная теория радиосистем. — М.: Радио и связь, 1987.
31. *Мацуока Т., Ульрих Т. Дж.* Оценивание фазового спектра сигнала по биспектру сейсмической записи // *ТИИЭР*. — Октябрь 1984. — Т. 72, № 10. — С. 200–209.
32. *Marron J. C., Sanchez P. P. and Sullivan R. C.* Unwrapping algorithm for least-squares phase recovery from the modulo 2π bispectrum phase // *Journal of the Optical Society of America*. — January 1990. — Vol. 7, № 1. — P. 14–20.
33. *Petropulu A. P. and Nikias C. L.* Signal reconstruction from the phase of the bispectrum // *IEEE Transactions on Signal Processing*. — March 1992. — Vol. 40, № 3. — P. 601–610.
34. *Totsky A. V., Krylov O. V., Kurbatov I. V., Lukin V. V., Egiazarian K. O., Astola J.* Statistical investigations of bispectral signal and image restoration for Gaussian and non-Gaussian noise environment // *Proc. of International TICSP Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing SMMSP'2001*, Pula, Croatia, June 16–18. — 2001. — P. 231–241.
35. *Totsky A., Kurbatov I., Lukin V., Zelensky A.* Use of 2-D filtering of bispectrum estimations for 1-D signal reconstruction in mixed noise environment, *Proc. Second International Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing SMMSP'2002*, Toulouse, France, September 7–8. — 2002. — P. 171–178.
36. *Тоцкий А. В., Зеленский А. А., Лукин В. В.* Восстановление изображений радиоастрономических объектов по биспектральным оценкам, искаженным гауссовыми и негауссовыми помехами // *Вестник Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина*. — 2002. — № 570. — Радиофизика и электроника. — Выпуск 2. С. 224–227.
37. *Тоцкий А. В., Курбатов И. В.* Оценка неизвестной формы сигнала методом биспектрально-фильтровой обработки в условиях воздействия аддитивных гауссовых и негауссовых помех // *Авиационно-космическая техника и технология*. — 2002. — Выпуск 35. — С. 77–82.
38. *Totsky A. V., Kurbatov I. V., Lukin V. V., Egiazarian K. O., Astola J. T.* Combined bispectrum-filtering techniques for radar output signal reconstruction in ATR applications, *Proceedings of International Conference "Automatic Target Recognition XIII"* / Ed. Firooz A. Sadjadi. — Orlando (USA). — April 2003. — SPIE Vol. 5094. — P. 301–312.
39. *Astola J., Kuosmanen P.* Fundamentals of Nonlinear Digital Filtering. — Boca Raton N.Y.: CRC Press LLC. 1997.

40. *Lukin V. V., Totsky A. V., Kurekin A. A., Kurbatov I. V., Astola J. T., Egiazarian K. O.* Signal waveform reconstruction from noisy bispectrum estimations pre-processed by vector filters // Proc. Seventh International Symposium on Signal Processing and its Applications, 1–4 July 2003, Paris, France. — P. 169–172.
41. *Astola J., Haavisto P. and Neuvo Y.* Vector median filters // Proc. IEEE. — April 1990. — Vol. 78. — P. 678–689.
42. *Trahanias P. E., Karakos D., Venetsanopoulos A. N.* Directional processing of color images: theory and experimental results, IEEE Transactions on Image Processing. — June 1996. — Vol. 5. — P. 868–880.
43. *Kurekin A. A., Lukin V. V., Zelensky A. A., Astola J., Saarinen K. and Kuosmanen P.* Adaptive vector LQ-filters for color image processing // Proc. Conf. SPIE on Statistical and Stochastic Methods in Image Processing II. — San-Diego (California, USA), SPIE. — August, 1997. — Vol. 3167. — P. 46–56.
44. *Gorshkov S. A., Leschenko S. P., Orlenko V. M. and Shirman Ya. D.* Radar target backscattering simulation software and user's guide. — Norwood, MA: Artech House, 2002.
45. *Jouny I., Garber F. D., Moses R. I.* Radar target identification using the bispectrum: a comparative study // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. — 1995. — Vol. 31, № 1. — P. 69–77.
46. *Zhang X. D., Shi Y., Bao, Z.* A new feature vector using selected bispectra for signal classification with application in radar target recognition // IEEE Trans. on Signal Processing. — 2001. — Vol. 49, № 9. — P. 1875–1885.
47. *Pei B., Bao Z., Xing M.* Logarithm bispectrum-based approach to radar range profile for automatic target recognition // The Journal of the Pattern Recognition Society. — 2002. — Vol. 35. — P. 2643–2651.
48. *Inngs M. R., Robinson A. D.* Ship target recognition using low resolution radar and neural networks // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. — 1999. — Vol. 35, № 2. — P. 386–393.
49. *Sayama S., Sekine M.* Log-normal, log-Weibull and K-distributed sea clutter // IEICE Trans. Commun. — 2002. — Vol. E85-B, № 7. — P. 1375–1381.
50. *Astola J. T., Egiazarian K. O., Kurbatov I. V. and Totsky A. V.* Object recognition by bispectrum based image reconstruction in additive noise and line jitter environment, Proceedings of a Workshop on Computational Intelligence and Information Technologies, Niš, Yugoslavia, October 13, 2003. — P. 131–134.

ГЛАВА 3

МНОГОПОЗИЦИОННЫЕ РАДИОЛОКАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ С СИНТЕЗИРОВАНИЕМ АПЕРТУРЫ АНТЕННЫ

Введение

Системы дистанционного зондирования (ДЗ) используются для решения множества научно-практических задач: при мониторинге существующих природных ресурсов и разработке новых, обеспечении безопасности судоходства и транспортных перевозок, исследовании экологической обстановки, а также в метеорологии, сельском хозяйстве и для многих других применений в народном хозяйстве. При этом важным составным элементом таких систем ДЗ являются радиолокационные системы дистанционного зондирования, в том числе и с синтезированием апертуры антенны (РСА), которые могут работать в сложных погодных условиях, в любое время суток, что особенно важно при исследовании экологически опасных районов, в областях задымления, при наличии тумана, осадков, облачности и других факторов, препятствующих использованию других средств ДЗ.

К настоящему времени эксплуатировалось, эксплуатируется, а также находится в стадии разработки значительное количество космических аппаратов (КА) и авиационных систем дистанционного зондирования Земли и околоземного пространства среднего и высокого разрешения. Среди радиолокационных систем дистанционного зондирования наибольшее практическое распространение получили моностатические (состоящие из одного носителя) системы с синтезированием апертуры авиационного и космического базирования.

Моностатические системы не всегда удовлетворяют требованиям к качеству формируемых данных. Основные их недостатки:

1) относительно низкая точность получаемых оценок, вызванная присутствием мультипликативного шума (спекл-шума), и, как следствие, необходимость сглаживания радиолокационных изображений операторами вторичной обработки, снижающими результирующую разрешающую способность;

2) вероятность пропуска точечных и протяженных объектов при определенной геометрии наблюдения;

3) низкая оперативность и частота получения информации для космических систем с малым числом носителей в группировке и другие.

Необходимость их устранения обуславливает совершенствование аппаратуры и алгоритмов обработки в РСА. Однако устранить большинство из указанных недостатков исключительно за счет совершенствования моностатических систем невозможно.

Постоянное повышение требований к системам дистанционного зондирования (ДЗ) и, в частности, к точности, надежности, оперативности, частоте наблюдений, возможности получения данных при условии минимального размера зон затенений привели к необходимости создания системы глобального мониторинга земной поверхности [1]. Такой глобальной системой ДЗ аэрокосмического базирования, которая способна удовлетворить самые высокие требования к качеству получаемых данных, является многопозиционная система с синтезированием апертуры антенны (МПРСА — термин, который впервые был введен в работах А. В. Ксендука [1–3]). Приведенный здесь материал является обобщением работ [1–4, 13–35, 37, 40–47, 49–52], а в его изложении выделены методы и алгоритмы обработки, которые могут быть легко интегрированы в цифровом виде или в виде программ в системы дистанционного зондирования или наземные станции обработки.

3.1. Потенциал многопозиционных РСА при решении задач дистанционного зондирования

Многопозиционная система с синтезированием апертуры антенны — это многопозиционная радиолокационная система с разнесенными в пространстве передающими и приемными позициями, в которой извлечение полезной информации осуществляется с использованием алгоритмов синтеза апертуры [3].

По пространственной конфигурации МПРСА могут быть разделены на:

- системы с большой базой (расстояние между отдельными элементами существенно больше длины волн);
- системы с средней и малой базой;
- системы с постоянной относительной пространственной конфигурацией (расстояние между отдельными элементами МПРСА постоянно во времени);
- системы с изменяющейся относительной пространственной конфигурацией (расстояние между отдельными элементами МПРСА изменяется во времени).

По способу извлечения информации многопозиционные системы можно разделить на:

- активные системы (приемные и передающие пункты совмещены в пространстве);
- полуактивные системы (приемные и передающие элементы разнесены в пространстве, причем нет совмещенных приемников и передатчиков);
- пассивные системы (в составе МПРСА присутствуют только пункты приема информации);
- смешанные системы (в составе МПРСА имеется часть совмещенных в пространстве пунктов излучения и приема информации, часть приемных или передающих пунктов, не совмещенных между собой).

По месту базирования МПРСА можно разделить на системы космического, авиационного, наземного, морского и смешанного базирования. Здесь основное внимание уделяется многопозиционным системам с синтезированием апертуры авиационно-космического базирования с большими и средними базами и изменяющейся пространственной конфигурацией. Варианты смешанного размещения (в том числе и при наличии неподвижных излучателей или приемников) являются частным случаем, который несложно получить из полученных общих соотношений. Также частным случаем являются моностатическая и бистатическая РСА и стационарные многопозиционные радиолокационные системы.

Многопозиционная радиолокационная система с синтезированием апертуры антенны, созданная на основании разработанных методов оптимальной совместной обработки, обладает всеми преимуществами существующих радиолокационных систем: функционирует в любое время года, днем и ночью, в сложных метеорологических условиях, при наличии осадков, облачности, тумана и т.д. Помимо этого МПРСА имеет ряд существенных преимуществ по отношению к однопозиционным системам [4]:

- высокая точность картографирования поверхности за счет совместной обработки результатов, полученных различными бистатическими парами;
- возможность более длительного наблюдения за отдельными участками поверхности (отдельными объектами), более частый мониторинг одних и тех же участков поверхности, т.е. высокая оперативность получения информации;
- более высокое эквивалентное разрешение по сравнению с аналогичными однопозиционными системами (под эквивалентным разрешением будем понимать разрешающую способность радиолокационных изображений при заданном отношении сигнал–помеха);
- возможность картографирования с минимальным размером зон затенения за счет оптимизации пространственной конфигурации и алгоритмов совместной обработки;
- более высокая надежность и достоверность интерпретации радиолокационных данных за счет обработки информации, полученной на различных углах, поляризациях, частотах;
- высокая вероятность правильного обнаружения точечных и протяженных объектов при низкой вероятности ложной тревоги даже при условии затенения этих объектов для некоторых элементов системы;
- увеличение области обзора радиолокационной системы вплоть до мониторинга всей поверхности Земли в реальном масштабе времени как за счет увеличения числа радиолокационных спутников, так и за счет увеличения области обзора каждого спутника при сохранении однозначности измерений;
- высокая разрешающая способность и точность построения цифровых карт рельефа поверхности с возможностью определения зон затенения;
- возможность развертывания многобазовых интерферометрических систем, которые позволяют осуществлять построение топографических карт

с высокой разрешающей способностью и большим интервалом однозначных измерений за счет использования различных баз/несущих частот;

- возможность построения трехмерных радиолокационных изображений природных и искусственных объектов за счет обработки данных, полученных с различных ракурсов;

- более эффективное обнаружение и сопровождение объектов, движущихся с широким диапазоном скоростей в различных направлениях, за счет наблюдения под различными углами, с различных расстояний;

- возможность использования ряда режимов радиолокационной съемки, недоступных либо неэффективных в моностатических конфигурациях;

- возможность использования микроспутников и наноспутников, позволяющих существенно уменьшить стоимость системы в целом с сохранением высоких качественных показателей ее функционирования;

- низкая стоимость изготовления одного носителя вследствие их технологической повторяемости;

- возможность использования непрерывных сигналов для моноапертурных РСА, что позволяет существенно снизить требования к мощностным характеристикам передающих элементов, использовать шумоподобные и широкополосные/сверхширокополосные сигналы;

- МПРСА обладает высокой реконфигурируемостью, т. е. возможностью изменения параметров наблюдения (взаимного пространственного положения и направления векторов скорости, частотного диапазона, поляризации, законов модуляции сигналов) и алгоритмов обработки с целью наиболее эффективного решения поставленных задач;

- возможность оптимизации пространственной конфигурации позволяет уменьшить требования к энергетическому потенциалу МПРСА, использовать ансамбли квазиортогональные, неортогональные и даже одинаковые сигналы при сохранении высокого качества решения задач дистанционного зондирования;

- высокая помехозащищенность по отношению к естественным и искусственным шумовым процессам позволяет осуществлять дистанционное зондирование при неблагоприятной помеховой обстановке;

- высокая живучесть — система способна эффективно решать задачи ДЗ даже при выходе из строя ряда ее элементов;

Недостатки многопозиционных систем, такие как необходимость взаимной временной и фазовой синхронизации [5], необходимость использования высокопроизводительных вычислительных устройств и определения взаимных векторов положения, на данном этапе развития техники и технологии могут быть устранены.

Для построения многопозиционных РСА необходимо технологическое (возможность построения на данном этапе развития техники и технологии космических систем и элементов ИСЗ при приемлемом уровне затрат) и методологическое (теория, методы и алгоритмы оптимальной и квазиоптимальной пространственно-временной обработки многомерных полей в таких системах) обеспечение.

Развитие технологии создания авиационно-космических систем привело к возможности вывода на орбиту искусственных спутников Земли (ИСЗ), вес которых не превышает сотен килограмм. Использование таких микро-спутников позволяет существенно снизить затраты вывода их на орбиту и использовать перспективные технологии запуска. По прогнозам экспертов в течение ближайших десяти лет средний вес ИСЗ, способного с высокой эффективностью решать задачи дистанционного зондирования, составит десятки килограмм.

Развитие технологии создания микро и наноспутников, а также миниатюризация устройств цифровой обработки и повышение их вычислительной мощности обуславливают возможность и актуальность создания бистатических и многопозиционных систем дистанционного зондирования, которые способны удовлетворить самые высокие требования к качеству получаемых при дистанционном зондировании данных. Преимущества таких систем над существующими однопозиционными были подробно перечислены ранее.

Таким образом, в настоящее время существует необходимое технологическое обеспечение для создания многопозиционных радиолокационных систем дистанционного зондирования с синтезированием апертуры антенны.

С другой стороны, для МПРСА со сложной динамической пространственной конфигурацией необходима разработка теории и методов совместной обработки групп различных сигналов с учетом особенностей алгоритмов синтеза апертуры. Эти методы являются обобщением существующей статистической теории оптимизации обработки сигналов в измерительных системах, представленной в работах [7, 8] и др., учитывающей особенности функционирования систем с синтезированной апертурой [9, 10] и существующие методы обработки в многопозиционных системах [11, 12]. С целью создания многофункциональной системы, позволяющей решать задачи картографирования, обнаружения объектов и построения карт высот рельефа поверхности, необходимо создать соответствующую теорию и методы обработки и интерпретации наблюдаемых пространственно-временных полей. Такая теория была предложена в работах А. В. Ксендзука [1–3, 13], она позволяет создать многопозиционную РСА, являющуюся следующим этапом развития средств ДЗ. Полученные в результате исследований методы обладают большой общностью, так как их частные случаи являются алгоритмами оптимальной обработки в многопозиционных стационарных системах без синтеза апертуры, стационарных системах инверсного синтеза апертуры, многоканальных системах, многополяризационных, многочастотных РСА и обзорных радиолокаторах. Здесь приведен ряд основных результатов, причем основной акцент сделан на описании методов, которые могут быть использованы при создании элементов спутников зондирования или наземных станций, в виде цифровых схем или в виде программного обеспечения.

Рассмотрим основные пространственные конфигурации многопозиционных РСА и сравним их потенциал при решении задач дистанционного зондирования с моностатическими системами.

Специализированная глобальная система радиолокационного наблюдения, которая состоит из набора активных, пассивных и полуактивных элементов, является полностью независимой и позволяет решать широкий спектр задач дистанционного зондирования с высокой эффективностью. Помимо этого МПРСА способна осуществлять широкоэmissiveльную либо адресную передачу данных, передачу данных по межспутниковым каналам и др.

В режиме обзора с высокой разрешающей способностью больших пространственных областей следы диаграмм направленности передатчиков не перекрываются в пространстве и расположены таким образом, что нет перекрытия при относительно небольших временных сдвигах, рис. 3.1. В таком режиме обеспечивается максимальный размер области обзора при сохранении высокой разрешающей способности (определяемой характеристиками отдельных спутников) и оперативности, а также при низких требованиях к мощностным характеристикам отдельных передатчиков. Движение спутников не обязательно должно быть согласованным, они могут перемещаться по собственным независимым траекториям, рис. 3.1.

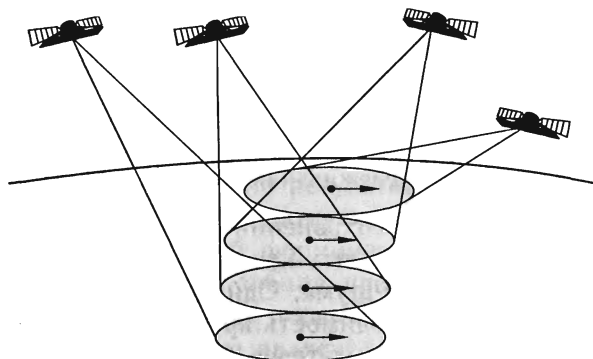


Рис. 3.1. Режим обзора больших областей

Одним из перспективных вариантов такой системы является ее модификация с наличием пересечений следов диаграмм направленности (ДН) в относительно короткие промежутки времени, причем области таких пересечений постоянно перемещаются по земной поверхности (выбор периодичности и скорости движения области пересечения определяется параметрами орбит носителей). При этом сохраняется высокая оперативность обзора с номинальным разрешением, а при пересечении следов диаграмм направленности (с более низкой оперативностью и частотой по отношению к номинальному режиму работы) увеличивается разрешающая способность, появляется возможность интерферометрической съемки, обнаружения скрытых объектов и др.

Качественные характеристики оценок в номинальном режиме совпадают с получаемыми в однопозиционной системе, однако за счет более частого зондирования одних и тех же участков появляется возможность комплексирования данных при использовании временной декорреляции измерений.

Для получения аналогичных характеристик в однопозиционных РСА необходимо использовать передатчики с высоким энергетическим потенциалом, большими интервалами синтеза апертуры и сложными сигналами для сохранения однозначности измерений при большой полосе обзора.

В режиме обзора больших и средних областей пространства с возможностью отслеживания локальных изменений на небольших интервалах времени следы диаграмм направленности передатчиков перекрываются при относительно небольших интервалах времени, что позволяет выполнять радиолокационную съемку одних и тех же элементов поверхности с временной задержкой, определяемой скоростью движения носителей и расстояниями между следами фазовых центров их антенн, рис. 3.2.

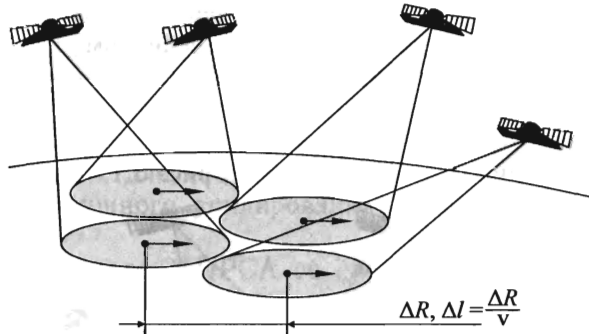


Рис. 3.2. Режим отслеживания локальных изменений

Данный режим обзора при сохранении высокой оперативности и большой зоны обзора позволяет повысить качественные показатели системы за счет уменьшения уровня спекл-шума. Однако в алгоритмах комплексирования необходимо учесть необходимость временной декорреляции характеристик поверхности и атмосферных трасс.

В моностатических системах для обеспечения того же режима работы необходимо использовать различные витки орбиты (при этом теряется оперативность работы и усложняется механизм управления носителем) либо антенну с возможностью сканирования/многолучевую антенну. Если же интервалы времени, через которые отслеживаются изменения зондируемой поверхности относительно велики, возникает необходимость расположения носителя на больших высотах и, как следствие, необходимость существенного увеличения мощности передающего тракта.

В режиме высокоточной съемки носители с небольшими интервалами времени одновременно облучают один и тот же участок поверхности. При этом в результате комплексирования полученных данных дисперсия спекл-шума уменьшается при сохранении высокого разрешения, рис. 3.3. При одновременном обзоре поверхности такой режим может быть организован как для группировки “один передатчик — набор приемников” (рис. 3.3, а), так и для набора приемопередающих элементов при полном (рис. 3.3, в) или частичном (рис. 3.3, б) перекрытии диаграмм направленности. В режиме последовательного обзора (рис. 3.3, б) носители принимают сигнал

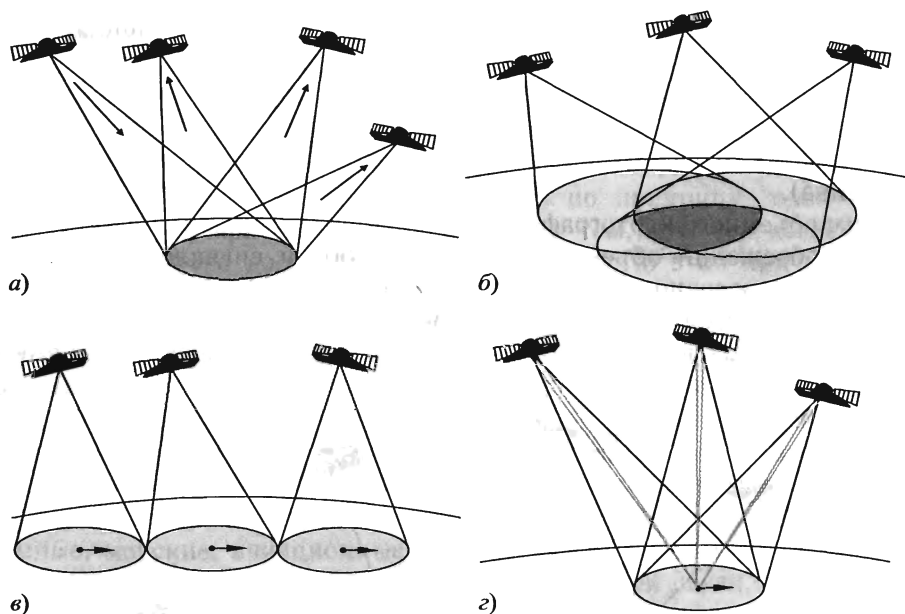


Рис. 3.3. Режимы высокоточной съемки

от поверхности с относительно небольшими временными сдвигами, что упрощает алгоритмы комплексирования.

Так как при комплексировании результатов наблюдений одного и того же участка местности существенно уменьшается дисперсия мультипликативной помехи, такой способ формирования РЛИ является одним из наиболее приемлемых с точки зрения увеличения эквивалентного разрешения, отношения сигнал–помеха и качественных показателей дальнейшей интерпретации. Его недостатком является необходимость увеличения численности группировки спутников для сохранения большой области обзора.

При использовании режима одновременного обзора одного участка поверхности целесообразно обеспечить ортогональность сигналов различных передатчиков. При этом обработка в каждом из приемников сигналов всех передатчиков позволяет существенно увеличить количество независимых измерений параметров зондируемого участка поверхности и, как следствие, существенно уменьшить уровень мультипликативного шума.

Также в этом режиме обзора можно уменьшить размер зоны затенения путем учета геометрических параметров наблюдения для каждого из элементов МПРСА при зондировании участка с различных углов.

В однопозиционных системах для уменьшения спекл-шума на РЛИ используются алгоритмы вторичной обработки, приводящие к уменьшению разрешающей способности (увеличению динамических ошибок). Для улучшения качества оценок (устранения мультипликативного шума) при одновременном сохранении высокой четкости РЛИ необходимо повышать разрешающую способность систем с учетом последующего сглаживания операторами вторичной обработки. Так, например, для обеспечения высо-

ких разрешений в азимутальной плоскости необходимо увеличивать время синтеза апертуры (основная сложность при этом заключается в сохранении когерентности на большом интервале обработки), в дальномерной — уменьшать длительность одиночных импульсов (соответственно, усложнять передающую аппаратуру и повышать требования к импульсной мощности передатчика).

Режим объемного картографирования используется для получения трехмерных изображений объектов за счет обработки сигналов, отраженных от элементов поверхности по различным направлениям, а также за счет использования методов томографии. При отсутствии затенения число объектов, для которых возможен режим 3D-съемки, ограничен размерами области пересечения диаграмм направленности передающих антенн, рис. 3.4.

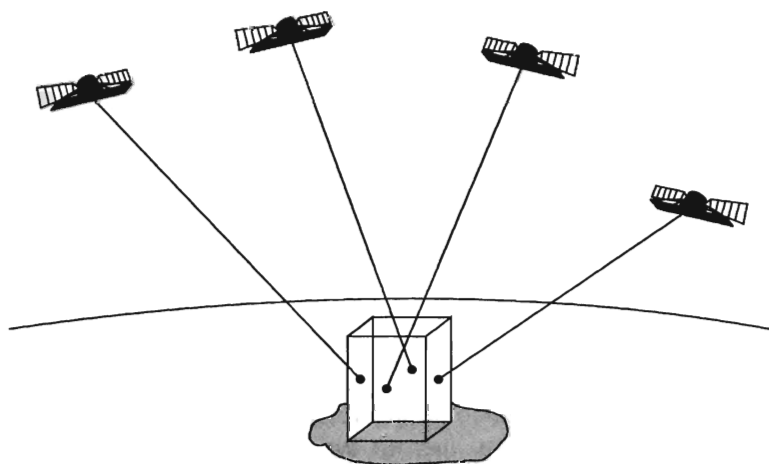


Рис. 3.4. Режим 3D-съемки

Модификацией данного режима являются высокоточные измерения путем использования интерферометрических систем. При этом достигается высокая точность построения трехмерных изображений с одновременной оценкой их электрофизических параметров.

В однопозиционных системах для обеспечения режима 3D-съемки необходимо использовать измерения на различных витках орбит, определенным образом ориентированных по отношению к заданному объекту (объектам). Такое изменение параметров движения носителей в случае космического базирования является достаточно сложной задачей и, кроме того, получаемые результаты будут неоперативными.

Отдельно необходимо отметить возможность использования специализированных передающих элементов, расположенных так, чтобы облучать достаточно большие участки земной поверхности (например, геостационарных передатчиков).

При таком построении многопозиционная система состоит из небольшого количества высокоорбитальных излучателей и набора низко- или средне- орбитальных микроспутников, осуществляющих синтез апертуры.

Для уменьшения стоимости эксплуатации МПРСА геостационарные передатчики могут излучать сигналы коммерческим потребителям, например, поправки для систем ГЛОНАСС/GPS, метеоинформацию и т.д. [13]; эти же сигналы должны использоваться для картографирования поверхности (рис. 3.5 на цветной вклейке).

Построение многопозиционной системы по принципу “один передатчик — несколько приемников” основано на том, что передающий тракт является достаточно дорогостоящим элементом. По этой причине использование набора приемников, принимающих сигнал одного передатчика, позволяет существенно снизить стоимость создания МПРСА [14].

Псевдопассивная МПРСА основана на обработке отраженных от поверхности сигналов, которые излучались другими передатчиками. Использование псевдопассивной системы, состоящей из микроспутников либо авиационных носителей, характеризуется минимальной стоимостью при сохранении высокой функциональности, надежности и скрытности. В качестве излучателей могут быть использованы подвижные и стационарные наземные, морские, авиационные и космические передатчики (радиовещательные и телевизионные станции, системы сотовой связи, навигационные спутники и спутники связи), рис. 3.6. на цветной вклейке.

Одним из наиболее перспективных является использование навигационных систем ГЛОНАСС/GPS в качестве передатчиков системы дистанционного зондирования, [15, 16]. Выбор навигационных систем в качестве активных элементов в составе МПРСА обусловлен тем, что их сигналы принимаются практически на всей земной поверхности, причем при наличии полных группировок наиболее вероятно наблюдение 8–10 спутников. Излучаемое поле является когерентным, а сигналы различных спутников синхронизированы, что упрощает решение задачи синтеза апертуры.

Построение приемника с использованием прямого (навигационный спутник — приемник) и отраженного от поверхности сигнала позволяет упростить алгоритмы синхронизации, уменьшить влияние атмосферных искажений и обеспечить высокоточную географическую привязку радиолокационных изображений в различных системах координат.

С учетом достаточно простого интегрирования системы дистанционного зондирования для носителей, оборудованных навигационной аппаратурой, такое использование навигационных спутников позволяет осуществлять мониторинг земной поверхности с любых авиационных носителей, в том числе с гражданских и транспортных самолетов, беспилотных летательных аппаратов и т. д.

Недостаток пассивных МПРСА заключается в их зависимости от параметров излучающих элементов, что обуславливает необходимость использования систем контроля целостности и работоспособности активных компонентов.

Необходимо отметить, что картографирование поверхности, основанное на приеме отраженных от поверхности сигналов других передатчиков (навигационных систем, систем связи и т.д.), целесообразно применять в качестве дополнительной информации даже при формировании РЛИ

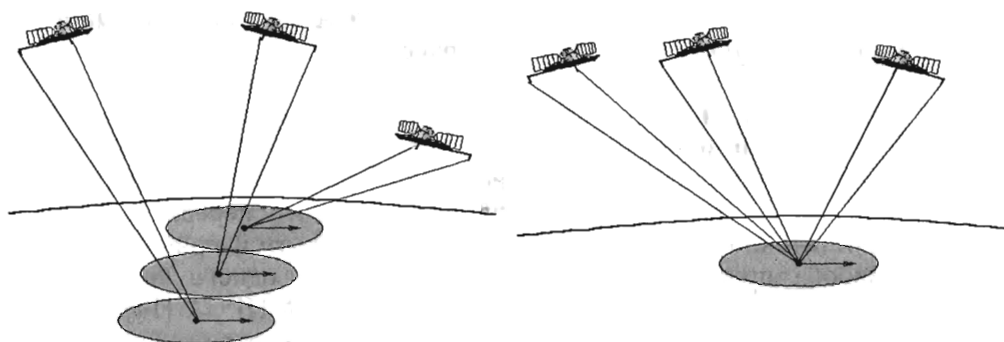


Рис. 3.7. Режим интерферометрической съемки больших пространственных областей (слева) и режим высокоточной интерферометрической съемки (справа)

активными РСА, так как за счет комплексирования можно существенно повысить качественные показатели формируемых оценок.

Многобазовые интерферометрические системы и получаемые ими карты высот рельефа поверхности необходимы для решения многих практических задач и, в частности, для исследования океанских течений, мониторинга горных цепей, исследования промышленных районов, последствий землетрясений, классификации земных покровов, исследования движения льдов, деформации покровов, лесных массивов. Технические сложности, связанные с необходимостью разворачивания двух антенн и использования достаточно сложных алгоритмов оценки и развертки фазы, устраняют путем введения режима интерферометрической съемки одним носителем на различных витках орбиты.

Интерферометрическая съемка в многопозиционной системе возможна как в режиме обзора больших областей, так и в высокоточном режиме (рис. 3.7). При этом предполагается наличие на каждом из приемных элементов МПРСА двух приемных антенн, необходимых для измерения разности фаз сигнала, отраженного от элементов поверхности.

Использование многопозиционных систем позволяет получить большую зону обзора при невысоких требованиях к мощности отдельных передающих устройств и высокую точность получаемых карт высоты рельефа поверхности.

В классических интерферометрических системах база интерферометра определяет точность измерений фазы и интервал однозначности, по отношению к которым действует принцип неопределенности. Так, например, увеличение размера базы приводит к повышению точности измерений и к одновременному уменьшению интервала их однозначности.

Решить проблему получения высокоточных измерений высоты при ее изменении в широком диапазоне позволяет использование многобазовых интерферометров. Причем в многопозиционной системе это возможно даже при наличии одиночных антенн на каждом из носителей (что существенно уменьшает габариты спутников и затраты на их позиционирование

и позволяет использовать микроспутники), рис. 3.8 на цветной вклейке. Данный режим работы требует высокоточной взаимной привязки между различными элементами МПРСА. Многобазовая интерферометрия в однопозиционных РСА возможна либо при наличии нескольких антенн либо при использовании результатов измерений, полученных на различных витках орбиты.

Также может быть создана многоспутниковая система, которая помимо решения задач дистанционного зондирования позволяет решать задачи передачи информации и навигационного обеспечения. В перспективе такая система может стать глобальной системой мониторинга, навигации и связи.

Для решения задач передачи информации (при этом будем подразумевать, что предлагаемая система будет решать задачи обеспечения связи между потребителями и задачи обеспечения собственными навигационными данными, либо корректирующими величинами для систем ГЛОНАСС, GPS, GALILEO) необходимо каждый космический аппарат оснастить аппаратурой связи и навигации. Это эквивалентно созданию подсистем связи, навигации и локации в рамках многопозиционной системы дистанционного зондирования. При этом МПРСА передает сигналы, которые одновременно используются как потребителями для получения/передачи информации (связь), приема и обработки информации (навигация), так и самой системой для построения изображений поверхности.

Выбор несущих частот и вида разделения каналов передачи данных необходимо выполнять с учетом диапазона, выделенного для работы систем связи, локации и навигации; числа обслуживаемых потребителей (для каналов связи); необходимости защиты информации от несанкционированного использования (для навигационного, радиолокационного и связного каналов); особенностей распространения радиоволн и построения приемной аппаратуры (космических аппаратов и аппаратуры потребителей).

При выборе способа разделения каналов целесообразно использовать частотно-кодовое разделение. При этом на каждый канал связи отводится определенная частота и определенный код шумоподобного сигнала, часть каналов отводится под передачу навигационной и служебной информации. Число необходимых каналов связи (соответственно, длина кодовых последовательностей и число несущих частот) определяется требованиями к пропускной способности системы и к защищенности передаваемых данных. Использование шумоподобных сигналов (ШПС) позволяет не только обеспечить многоканальный доступ, но и обеспечить конфиденциальность передаваемой информации.

Для решения задач радиолокационного обзора целесообразно использовать кодовую последовательность произвольного канала передачи информации, например, навигационного или связного. Причем, если планируется создание независимой системы навигации, целесообразно использовать дополнительный канал навигационных данных. Кроме того, такое построение радиолокационного канала позволит упростить схему передающих устройств (путем использования одного блока формирования ШПС),

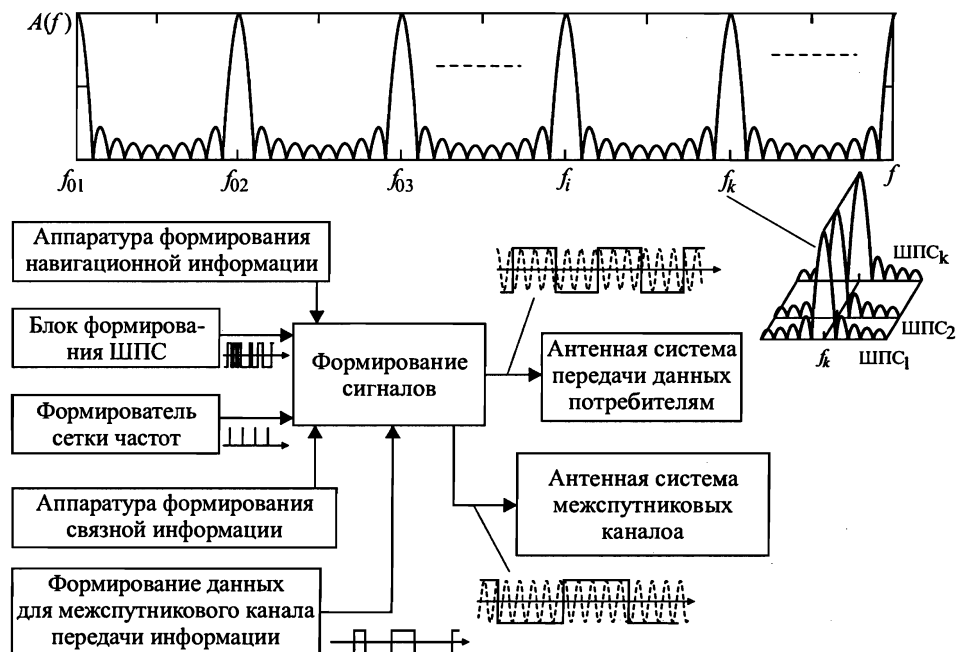


Рис. 3.9. Структура системы и используемых ею сигналов

а также уменьшить ширину полосы частот сигналов, излучаемых системой, рис. 3.9.

Выбор антенных систем предлагаемой МПРСА и, в частности, их диаграмм направленности необходимо осуществлять с учетом требуемой зоны обслуживания одним носителем, обеспечения энергетических показателей аппаратуры, необходимых для уверенного приема при заданных характеристиках помех, а также с учетом массогабаритных параметров антенных систем.

Так как каждый из носителей — космических аппаратов (КА) оснащен связной, навигационной и радиолокационной аппаратурой, необходимо не только обеспечить раздельную передачу данных в сторону земной поверхности, но и предусмотреть возможность построения межспутниковых каналов передачи информации, необходимых, например, для обеспечения глобальной связи, определения работоспособности отдельных КА, синхронизации и организации многопозиционной радиолокационной съемки.

С целью уменьшения требований к мощности передатчиков диаграммы направленности (ДН) связной подсистемы не должны перекрываться в пространстве. При этом необходимо учесть число потребителей, которые могут воспользоваться каналами связи/передачи данных, и пропускную способность как отдельного КА, так и системы в целом.

Выбор диаграмм направленности навигационной подсистемы зависит от ее автономности с точки зрения пользователя. Если навигационная подсистема используется как дополнение к существующим (например, для передачи дифференциальных поправок), то диаграммы направленности

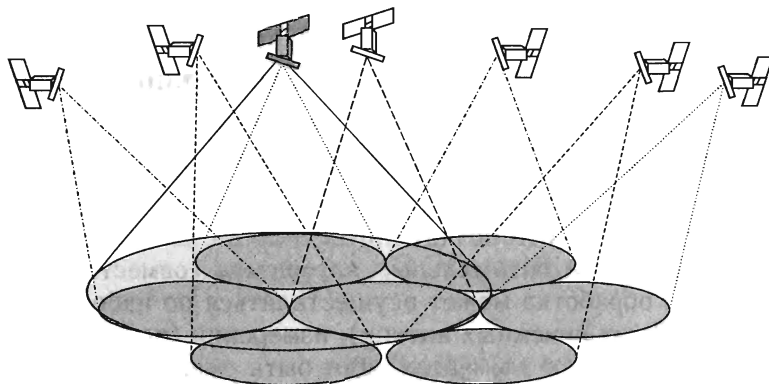


Рис. 3.10. Конфигурация системы для режимов связи и навигации

передатчиков навигационной подсистемы могут совпадать с диаграммами направленности подсистемы связи. При этом каждый потребитель имеет возможность получать широковегательную (передаваемую для всех пользователей в области видимости) информацию для обеспечения более точных навигационных определений. Для обеспечения независимых навигационных измерений с использованием предлагаемой МПРСА необходимо обеспечить возможность местоопределений с использованием собственных сигналов. Для этого необходимо обеспечить видимость как минимум трех навигационных спутников потребителем. С учетом этого диаграмма направленности передающей навигационной подсистемы должна охватывать пространственную область, как минимум в три раза большую, чем охватываемая связной подсистемой.

Положение следов диаграмм направленности на земной поверхности показано на рис. 3.10; здесь темным цветом представлены следы ДН связной подсистемы, светлым — навигационной.

Диаграмма направленности радиолокационной системы определяется видом сигнала, используемого для построения изображений поверхности и параметрами движения носителя. При этом необходимо учесть, что использование периодических сигналов приводит к неоднозначности измерений. Для многоспутниковой радиолокационной подсистемы целесообразно использовать антенную систему, способную изменять пространственное положение следа ДН на подстилающей поверхности. Это позволит оперативно модифицировать режимы радиолокационного обзора, обеспечивая требуемую точность полученной радиолокационной информации. Более того, использование отдельной антенной системы позволяет получить данные о высоте рельефа поверхности (построение топографических карт) путем использования интерферометрического режима работы. В то же время, для решения задач картографирования целесообразно использовать сигнал подсистемы связи или навигации, что предполагает возможность использования совмещенной антенной системы ДЗ.

3.2. Методы оптимальной и квазиоптимальной совместной обработки в многопозиционных системах дистанционного зондирования с синтезированием апертуры антенны

Основой построения многопозиционных систем с синтезированием апертуры антенны являются оптимальные алгоритмы совместной обработки. Такая совместная обработка может осуществляться по набору наблюдений (процессов на выходах приемных антенн), измерений (результатов обработки в отдельных приемных элементах) или быть смешанной [17]. Основой для оптимизации методов обработки являются величины, характеризующие качество функционирования систем ДЗ: точность оценок параметров поверхности, надежность и помехозащищенность, оперативность, время и периодичность обзора определенного участка, вероятностные и точностные характеристики интерпретации, средний размер зон затенения, конфигурируемость при решении определенных задач, возможность получения дополнительной информации (построения трехмерных изображений, карт высот рельефа) и другие [18].

Многопозиционная РСА состоит из набора приемников $i = 1 \dots Rc$ и передатчиков $j = 1 \dots Tr$ (при этом подразумевается, что часть приемников и передатчиков может быть совмещена в пространстве), которые движутся по собственным независимым траекториям и характеризуются пространственными координатами $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$, $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(t)$.

В рамках гауссовской аппроксимации функционал плотности вероятности векторного входного процесса $\mathbf{u}(t)$ определяется вектором средних значений $\mathbf{m}_u(t) = \langle \mathbf{u}(t) \rangle$ и корреляционной матрицей $\mathbf{R}_u(t_1, t_2)$, причем для общепринятой модели уравнения наблюдения (аддитивная смесь векторов сигнала и помехи $\mathbf{u}(t) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{n}(t)$) с учетом того, что от оцениваемых параметров $\lambda(t) = \lambda(t, x, y, z)$ зависит только первый статистический момент наблюдаемого процесса $\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{m}_u = f[\lambda(t)]$, $\mathbf{R}_u(t_1, t_2) \neq f[\lambda(t)]$, $\det \mathbf{R}_u(t_1, t_2) \neq f[\lambda(t)]$, функционал условной плотности записывается так:

$$p[\mathbf{u}(t)/\lambda] = K_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T [\mathbf{u}(t_1) - \mathbf{m}_u(t_1, \lambda)]^T \times \right. \\ \left. \times \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) [\mathbf{u}(t_2) - \mathbf{m}_u(t_2, \lambda)] \right\} dt_1 dt_2. \quad (3.1)$$

Если аддитивная помеха является нестационарным векторным процессом: $\mathbf{m}_n(t) = \beta(t)$, то выражение для оптимальных оценок

$$\int_0^T \int_0^T \left[\frac{\delta \mathbf{S}_D^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \mathbf{u}(t_2) + \mathbf{u}^T(t_1) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \frac{\delta \mathbf{S}_D(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} \right] dt_1 dt_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \int_0^T \left[\frac{\delta \mathbf{S}_D^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \mathbf{S}_D(t_2, \lambda) + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{S}_D^T(t_1, \lambda) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \frac{\delta \mathbf{S}_D(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} \right] dt_1 dt_2 + \\
&\quad + \int_0^T \int_0^T \left[\frac{\delta \mathbf{S}_D^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \boldsymbol{\beta}(t_2) + \right. \\
&\quad \left. + \boldsymbol{\beta}^T(t_1) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \frac{\delta \mathbf{S}_D(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} \right] dt_1 dt_2 \quad (3.2)
\end{aligned}$$

представляет собой равенство результата обработки входного сигнала

$$Y(\mathbf{r}) = \int_0^T \int_0^T \left[\frac{\delta \mathbf{S}_D^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \mathbf{u}(t_2) + \mathbf{u}^T(t_1) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \frac{\delta \mathbf{S}_D(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} \right] dt_1 dt_2$$

с суммой выходного эффекта обработки

$$\begin{aligned}
\mu(\mathbf{r}) = \int_0^T \int_0^T &\left[\frac{\delta \mathbf{S}_D^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \mathbf{S}_D(t_2, \lambda) + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{S}_D^T(t_1, \lambda) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \frac{\delta \mathbf{S}_D(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} \right] dt_1 dt_2
\end{aligned}$$

и смещения, определяемого параметрами сигнала и статистическими характеристиками помехи,

$$\begin{aligned}
b(\mathbf{r}) = \int_0^T \int_0^T &\left[\frac{\delta \mathbf{S}_D^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \boldsymbol{\beta}(t_2) + \right. \\
&\quad \left. + \boldsymbol{\beta}^T(t_1) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \frac{\delta \mathbf{S}_D(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} \right] dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

Частным случаем является смещение помехи на вектор $\boldsymbol{\beta}$

$$\int_0^T \int_0^T \left[\frac{\delta \mathbf{S}_D^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \mathbf{u}(t_2) + \mathbf{u}^T(t_1) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \frac{\delta \mathbf{S}_D(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} \right] dt_1 dt_2 =$$

$$\begin{aligned}
= & \int_0^T \int_0^T \left[\frac{\delta \mathbf{S}_D^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \mathbf{S}_D(t_2, \lambda) + \right. \\
& \left. + \mathbf{S}_D^T(t_1, \lambda) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \frac{\delta \mathbf{S}_D(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} \right] dt_1 dt_2 + \\
& + \left[\int_0^T \int_0^T \frac{\delta \mathbf{S}_D^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right] \beta + \\
& + \beta^T \left[\int_0^T \int_0^T \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \frac{\delta \mathbf{S}_D(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} dt_1 dt_2 \right]. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Для большинства практически важных случаев полагается несмещенность $\mathbf{n}(t)$, по крайней мере, на интервале синтеза апертуры

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^T \left[\frac{\delta \mathbf{S}_D^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \mathbf{u}(t_2) + \mathbf{u}^T(t_1) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \frac{\delta \mathbf{S}_D(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} \right] dt_1 dt_2 = \\
= \int_0^T \int_0^T \left[\frac{\delta \mathbf{S}_D^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \mathbf{S}_D(t_2, \lambda) + \right. \\
\left. + \mathbf{S}_D^T(t_1, \lambda) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \frac{\delta \mathbf{S}_D(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} \right] dt_1 dt_2. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Дальнейшие упрощения получим при выполнении модифицированного условия пространственно-временной узкополосности, которое для МПРСА впервые было введено автором при получении результатов работ [17, 18] и которое является обобщением известных условий пространственно-временной узкополосности:

$$\text{Max}_{k,m} |f_{0k} - f_{0m}| + 2\Delta F < \text{Min}_{k,m} |f_{0k} + f_{0m}|, \quad (3.5)$$

где ΔF — максимальная ширина спектра сигнала, f_{0m} — несущая частота m -го передатчика).

Также положим, что для модели поверхности $\mathbf{m} = M\{\lambda(t), \Theta(t)\}$ как функции оцениваемых параметров $\lambda(t)$, векторов параметров наблюдения и несущественных параметров $\Theta(t)$ особое внимание необходимо обратить на характер зависимости от $\Theta(t)$. Строгое решение можно получить, например, для случая, когда модель поверхности представима в виде разложения функции комплексирования по базисным функциям [19]

$$\dot{\mathbf{F}} = M\{\lambda(t), \Theta(t)\} = \xi[\lambda(t)] \sum_{l=1 \dots L} \eta_l[\gamma(t), \Theta(t)], \quad (3.6)$$

где ξ — функция комплексирования; η — базисные функции; $\lambda(t)$ — вектор параметров комплексирования; $\gamma(t)$ — вектор несущественных параметров.

Решение для статической (во временной области) модели параметра комплексирования $\lambda(t, \mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r})$ упрощается до

$$\int_0^T \int_0^T \mathbf{u}^T(t_1) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \dot{\mathbf{S}}_\lambda^*(t_2, \gamma, \mathbf{r}_1) dt_1 dt_2 = \\ = \frac{1}{2} \int_D \xi[\lambda(\mathbf{r})] \int_0^T \int_0^T \dot{\mathbf{S}}_\lambda^T(t_1, \gamma, \mathbf{r}) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \dot{\mathbf{S}}_\lambda^*(t_2, \gamma, \mathbf{r}_1) dt_1 dt_2 d\mathbf{r}. \quad (3.7)$$

Правая часть последнего уравнения содержит модифицированную пространственную функцию неопределенности для вектора $\lambda(\mathbf{r})$ и соответствующей ему функции комплексирования ξ с учетом модели поверхности (3.6)

$$\Psi_\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \int_0^T \int_0^T \dot{\mathbf{S}}_\lambda^T(t_1, \gamma, \mathbf{r}) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \dot{\mathbf{S}}_\lambda^*(t_2, \gamma, \mathbf{r}_1) dt_1 dt_2, \quad (3.8)$$

которая может быть представлена в виде суммы функций неопределенности по всем комбинациям приемников $\dot{\Psi}_\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \sum_{i,j=1 \dots Rc} \dot{\Psi}_{\lambda_{ij}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$

$$\dot{\Psi}_\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \sum_{i,j=1 \dots Rc} \int_0^T \int_0^T \dot{\mathbf{S}}_{\lambda_i}^T(t_1, \gamma, \mathbf{r}) \mathbf{R}_{ij}^{-1}(t_1, t_2) \dot{\mathbf{S}}_{\lambda_j}^*(t_2, \gamma, \mathbf{r}_1) dt_1 dt_2. \quad (3.9)$$

Левая часть (3.7) содержит в себе операции поворота системы координат (декорреляции) входного векторного процесса $\mathbf{u}^T(t)$ матрицей $\mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2)$ и последующую согласованную фильтрацию с модифицированным опорным сигналом $\dot{\mathbf{S}}_\lambda^{T*}(t_2, \gamma, \mathbf{r}_1)$ для вектора $\lambda(\mathbf{r}_1)$.

Важные практические случаи, которые являются упрощениями приведенного выше выражения и необходимы при создании систем обработки (ортогональность сигналов отдельных передатчиков, статистическая независимость аддитивных шумов в различных каналах приемников, возможность представления аддитивных помех процессами с равномерной спектральной плотностью позволяют создать соответствующие алгоритмы и системы обработки, в том числе и модифицированные для цифрового построения) могут быть получены непосредственно из (3.7)–(3.9).

Для стохастической модели поверхности в общем случае первый и второй статистические моменты зависят от искоемых параметров $\mathbf{m}_u = f[\lambda(\mathbf{t})]$, $\mathbf{R}_u(t_1, t_2) = f[\lambda(\mathbf{t})]$, причем существенное влияние на алгоритмы обработки оказывает характер зависимости определителя корреляционной матрицы от искоемых параметров: $\det \mathbf{R}_u(t_1, t_2) \neq f[\lambda(\mathbf{t})]$, $\det \mathbf{R}_u(t_1, t_2) = f[\lambda(\mathbf{t})]$ [20].

В рамках гауссовской аппроксимации (которая справедлива для большинства практических случаев зондирования системами с синтезированием апертуры антенны) оптимальные оценки определяются из решения

уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\delta \ln K_0(\lambda)}{\delta \lambda(t)} - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T \left[\mathbf{u}^T(t_1) \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{u}(t_2) - \frac{\delta \mathbf{m}_{\mathbf{u}}^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2) \mathbf{u}(t_2) - \right. \\ \left. - \mathbf{m}_{\mathbf{u}}^T(t_1, \lambda) \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{u}(t_2) - \mathbf{u}^T(t_1) \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t_2, \lambda) - \mathbf{u}^T(t_1) \times \right. \\ \left. \times \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2) \frac{\delta \mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} + \frac{\delta \mathbf{m}_{\mathbf{u}}^T(t_1)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2) \mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t_2, \lambda) + \mathbf{m}_{\mathbf{u}}^T(t_1, \lambda) \times \right. \\ \left. \times \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t_2, \lambda) + \mathbf{m}_{\mathbf{u}}^T(t_1, \lambda) \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2) \frac{\delta \mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} \right] dt_1 dt_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для случаев независимости вектора математического ожидания, определителя и обеих величин от оцениваемых параметров выражение для оптимальных оценок примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \ln K_0(\lambda)}{\delta \lambda(t)} - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T \left[\mathbf{u}^T(t_1) \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{u}(t_2) - \mathbf{m}_{\mathbf{u}}^T(t_1) \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{u}(t_2) - \right. \\ \left. - \mathbf{u}^T(t_1) \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t_2) + \mathbf{m}_{\mathbf{u}}^T(t_1) \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t_2) \right] dt_1 dt_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T \left[\mathbf{u}^T(t_1) \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{u}(t_2) - \frac{\delta \mathbf{m}_{\mathbf{u}}^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2) \mathbf{u}(t_2) - \right. \\ \left. - \mathbf{m}_{\mathbf{u}}^T(t_1, \lambda) \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{u}(t_2) - \mathbf{u}^T(t_1) \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t_2, \lambda) - \right. \\ \left. - \mathbf{u}^T(t_1) \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2) \frac{\delta \mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} + \frac{\delta \mathbf{m}_{\mathbf{u}}^T(t_1)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2) \mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t_2, \lambda) + \mathbf{m}_{\mathbf{u}}^T(t_1, \lambda) \times \right. \\ \left. \times \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t_2, \lambda) + \mathbf{m}_{\mathbf{u}}^T(t_1, \lambda) \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2) \frac{\delta \mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} \right] dt_1 dt_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T \left[\mathbf{u}^T(t_1) \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{u}(t_2) - \mathbf{m}_{\mathbf{u}}^T(t_1) \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{u}(t_2) - \right. \\ \left. - \mathbf{u}^T(t_1) \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t_2) + \mathbf{m}_{\mathbf{u}}^T(t_1) \frac{\delta \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_2)}{\delta \lambda} \mathbf{m}_{\mathbf{u}}(t_2) \right] dt_1 dt_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Дальнейшие преобразования выполним при записи корреляционной матрицы в виде суммы трех компонент, зависящих от сигнала, помехи и смещения

$$\mathbf{R}_u(t_1, t_2, \lambda) = \mathbf{R}_S(t_1, t_2, \lambda) + \mathbf{R}_N(t_1, t_2) + \mathbf{M}_u(t_1, t_2, \lambda),$$

что позволяет после ряда несложных преобразований получить следующий вид уравнений для оптимальных оценок при выполнении условий $\mathbf{m}_u, \det \mathbf{R}_u = f(\lambda)$, $\mathbf{m}_u \neq f(\lambda)$, $\det \mathbf{R}_u = f(\lambda)$, $\det \mathbf{R}_u \neq f(\lambda)$, $\mathbf{m}_u = f(\lambda)$, $\mathbf{m}_u \neq f(\lambda)$, $\det \mathbf{R}_u \neq f(\lambda)$ могут быть записаны в виде [20]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \iint_D [\mathbf{u}_R^T(t_3) - \mathbf{m}_R^T(t_3, \lambda)] \left\{ \frac{\delta \mathbf{R}_F(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \lambda)}{\delta \lambda} \dot{\mathbf{X}}(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + \right. \\ & \left. + \frac{\delta \mathbf{M}_u(t_3, t_4, \lambda)}{\delta \lambda} \right\} \mathbf{u}_R(t_4) dt_3 dt_4 d\mathbf{r} d\mathbf{r}' - \int_0^T \int_0^T \frac{\delta \mathbf{m}_u^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2, \lambda) \times \\ & \times \mathbf{u}(t_2) dt_1 dt_2 - \int_0^T \int_0^T \mathbf{u}^T(t_1) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2, \lambda) \frac{\delta \mathbf{m}_u(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} dt_1 dt_2 d\mathbf{r} d\mathbf{r}' = \\ & = \operatorname{Tr} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T \iint_D \left[\frac{\delta \mathbf{R}_F(t_1, t_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \lambda)}{\delta \lambda} \dot{\mathbf{X}}(t_1, t_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + \right. \\ & \left. + \frac{\delta \mathbf{M}_u(t_1, t_2, \lambda)}{\delta \lambda} \right] \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_3, \lambda) \mathbf{R}_u(t_3, t_4, \lambda) \mathbf{R}_u^{-1}(t_4, t_2, \lambda) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 d\mathbf{r} d\mathbf{r}' + \\ & + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \iint_D \mathbf{m}_R^T(t_3, \lambda) \left[\frac{\delta \mathbf{R}_F(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \lambda)}{\delta \lambda} \dot{\mathbf{X}}(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{\delta \mathbf{M}_u(t_3, t_4, \lambda)}{\delta \lambda} \right] \times \\ & \times \mathbf{m}_R(t_4, \lambda) dt_3 dt_4 d\mathbf{r} d\mathbf{r}' + \int_0^T \int_0^T \frac{\delta \mathbf{m}_u^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2, \lambda) \mathbf{m}_u(t_2, \lambda) dt_1 dt_2 + \\ & + \int_0^T \int_0^T \mathbf{m}_u^T(t_1, \lambda) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2, \lambda) \frac{\delta \mathbf{m}_u(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} dt_1 dt_2, \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \int_D [\mathbf{u}_R^T(t_3) - \mathbf{m}_R^T(t_3)] \frac{\delta \mathbf{R}_F(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \lambda)}{\delta \lambda} \dot{\mathbf{X}}(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{u}_R(t_4) dt_3 dt_4 d\mathbf{r} d\mathbf{r}' - \\
& - \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \int_D \mathbf{u}_R^T(t_3) \frac{\delta \mathbf{R}_F(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \lambda)}{\delta \lambda} \dot{\mathbf{X}}(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{m}_R(t_4) dt_3 dt_4 d\mathbf{r} d\mathbf{r}' = \\
& = \operatorname{Tr} \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_D \frac{\delta \mathbf{R}_F(t_1, t_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \lambda)}{\delta \lambda} \dot{\mathbf{X}}(t_1, t_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_3, \lambda) \mathbf{R}_u(t_3, t_4, \lambda) \times \\
& \times \mathbf{R}_u^{-1}(t_4, t_2, \lambda) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 d\mathbf{r} d\mathbf{r}' + \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \int_D \mathbf{m}_R^T(t_3) \frac{\delta \mathbf{R}_F(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \lambda)}{\delta \lambda} \times \\
& \times \dot{\mathbf{X}}(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{m}_R(t_4) dt_3 dt_4 d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \int_D [\mathbf{u}_R^T(t_3) - \mathbf{m}_R^T(t_3, \lambda)] \left\{ \frac{\delta \mathbf{R}_F(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \lambda)}{\delta \lambda} \dot{\mathbf{X}}(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + \right. \\
& + \frac{\delta \mathbf{M}_u(t_3, t_4, \lambda)}{\delta \lambda} \left. \right\} \mathbf{u}_R(t_4) dt_3 dt_4 d\mathbf{r} d\mathbf{r}' - \int_0^T \int_0^T \frac{\delta \mathbf{m}_u^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2, \lambda) \mathbf{u}(t_2) dt_1 dt_2 \\
& - \int_0^T \int_0^T \mathbf{u}^T(t_1) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2, \lambda) \frac{\delta \mathbf{m}_u(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} dt_1 dt_2 d\mathbf{r} d\mathbf{r}' = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \int_D \mathbf{m}_R^T(t_3, \lambda) \times \\
& \times \left[\frac{\delta \mathbf{R}_F(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \lambda)}{\delta \lambda} \dot{\mathbf{X}}(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{\delta \mathbf{m}_u(t_3, t_4, \lambda)}{\delta \lambda} \right] \mathbf{m}_R(t_4, \lambda) dt_3 dt_4 d\mathbf{r} d\mathbf{r}' + \\
& + \int_0^T \int_0^T \frac{\delta \mathbf{m}_u^T(t_1, \lambda)}{\delta \lambda} \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2, \lambda) \mathbf{m}_u(t_2, \lambda) dt_1 dt_2 + \\
& + \int_0^T \int_0^T \mathbf{m}_u^T(t_1, \lambda) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2, \lambda) \frac{\delta \mathbf{m}_u(t_2, \lambda)}{\delta \lambda} dt_1 dt_2, \quad (3.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \iint_D [\mathbf{u}_R^T(t_3) - \mathbf{m}_R^T(t_3, \lambda)] \frac{\delta \mathbf{R}_F(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \lambda)}{\delta \lambda} \times \\
& \quad \times \dot{\mathbf{X}}(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{u}_R(t_4) dt_3 dt_4 d\mathbf{r} d\mathbf{r}' - \\
& - \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \iint_D \mathbf{u}_R^T(t_3) \frac{\delta \mathbf{R}_F(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \lambda)}{\delta \lambda} \dot{\mathbf{X}}(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{m}_R(t_4) dt_3 dt_4 d\mathbf{r} d\mathbf{r}' = \\
& = - \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \iint_D \mathbf{m}_R^T(t_3) \frac{\delta \mathbf{R}_F(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \lambda)}{\delta \lambda} \dot{\mathbf{X}}(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{m}_R(t_4) dt_3 dt_4 d\mathbf{r} d\mathbf{r}'.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Полученные выше алгоритмы оптимальной совместной обработки представляют собой оптимальные оценки параметров, содержащихся в корреляционной функции, следовательно, результат обработки представляет собой расширение РЛИ на большее число размерностей.

Важные с практической точки зрения случаи, которые не приводятся по причине громоздкости выкладок:

- работа в предположении о малом интервале высокой корреляции функции комплексирования по отношению к разрешающей способности;
- независимость помех в отдельных каналах;
- случай, когда помехи в различных каналах имеют равномерную спектральную плотность мощности, по крайней мере, в пределах полосы приема;
- выполнение условия несмещенности среднего вектора наблюдения, ортогональности отдельных в различных бистатистических парах.

Также при ограниченном энергетическом потенциале системы возможна ее оптимизация по энергетическим показателям [21].

Один из наиболее важных результатов относится к случаю, когда матрица корреляционных функций, зависящая от искомым параметров, допускает разложение в ряд вида $\mathbf{R}_F(t_1, t_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \lambda) = R_F^0(t_1, t_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \gamma, \lambda) \sum_{p=1 \dots P} \varepsilon_p(t_1, t_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \gamma)$, где $R_F^0(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \lambda)$ — функция комплексирования, ε — базисные функции, γ — вектор несущественных параметров.

При этом уравнение для оптимальных оценок может быть записано в виде равенства результата обработки

$$Y(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \mathbf{u}_R^T(t_3) \sum_{p=1 \dots P} \varepsilon_p(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \gamma) \dot{\mathbf{X}}(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{u}_R(t_4) dt_3 dt_4 \tag{3.18}$$

функции комплексирования $R_F^0(t_3, t_4, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \lambda)$, сглаженной модифицированной пространственной матрицей функций неопределенности

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) = & \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T \sum_{p=1 \dots P} \epsilon_p(t_1, t_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \gamma) \dot{\mathbf{X}}(t_1, t_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_3, \lambda) \times \\ & \times \sum_{p=1 \dots P} \epsilon_p(t_3, t_4, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \gamma) \dot{\mathbf{X}}(t_3, t_4, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_4, t_2, \lambda) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 \quad (3.19) \end{aligned}$$

и смещенной на величину, зависящую от статистических характеристик отражений от поверхности и аддитивных помех

$$\begin{aligned} b(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \text{Re Tr} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T \sum_{p=1 \dots P} \epsilon_p(t_1, t_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \gamma) \dot{\mathbf{X}}(t_1, t_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \\ \times \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_1, t_3, \lambda) \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(t_3, t_4) \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1}(t_4, t_2, \lambda) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4. \quad (3.20) \end{aligned}$$

При совместных оценках функции комплексирования, интервал существенного изменения которой намного меньше разрешающей способности, выражение оптимальных оценок упростится до

$$Y(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \text{Re} \iint_D R_F^0(\mathbf{r}', \lambda) \times \text{Tr} \dot{\Psi}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' + b(\mathbf{r}). \quad (3.21)$$

Приведенные методы обработки в многопозиционных РСА являются новыми, обладают большой степенью общности и позволяют получить, как вырожденные случаи, оптимальные методы обработки в бистатистических, моностатических, поляризационных и многоканальных РСА, многопозиционных и многоканальных системах без синтеза апертуры.

3.3. Методы обнаружения объектов в многопозиционных РСА на основании совместной обработки наблюдаемых процессов

Задачи определения областей с характерными законами отражения (в более узком понимании — задачи обнаружения объектов) необходимы для решения широкого круга практических задач, таких как обеспечение безопасности транспортных перевозок, управление и сопровождение грузов, для экологического мониторинга, обнаружения районов техногенных катастроф, районов лесных пожаров и других. Вопросам обнаружения объектов моностатическими системами, в том числе и с синтезированием апертуры антенны, посвящено достаточно много работ.

Здесь приведены результаты, которые были представлены в работах [22–24] и которые являются обобщением методов обнаружения в системах дистанционного зондирования на случай многопозиционной системы со сложной пространственной конфигурацией, использующей набор сигналов

и учитывающей характеристики отражения объектов как функции параметров наблюдения (бистатистических углов, несущих частот, поляризаций и др.); эти алгоритмы получены для случаев обнаружения объектов с функционально-детерминированными и стохастическими законами отражения зондируемого сигнала.

Обычно в многопозиционных системах вынесение результата относительно наличия или отсутствия искомого объекта делается на основании комплексирования результатов, полученных в отдельных обнаружителях. Учитывая характеристики РЛИ, рекомендуется выполнять обнаружение после этапа совместной обработки, так как при этом можно не только получить строгие аналитические решения, но и алгоритмы, устойчивые к различного рода нестабильностям и изменениям статистических характеристик помех. По этой причине в [22–25] впервые предложено выполнять обнаружение на основании предварительной совместной обработки данных по различным бистатистическим парам в составе МПРСА.

Как было показано в результате исследований, такой вариант построения позволяет избавиться от приведенных выше недостатков и получить высокоэффективные методы обнаружения, а также обеспечить возможность обнаружения, даже если объект находится в радиолокационной тени, для ряда бистатистических пар; устойчивость характеристик обнаружителей для объектов за счет наблюдения с различных ракурсов, на различных частотах, поляризациях и т. д.; обеспечить возможность идентификации объектов, пространственный размер которых соответствует пространственному разрешению (см. рис. 3.11 на цветной вклейке).

Рассмотрим обнаружение объекта, который задается функционально-детерминированной или стохастической моделью комплексного коэффициента отражения, по результатам наблюдения вектора $\mathbf{u}(t)$, размерность которого определяется числом приемников $i = 1 \dots R_c$ в составе МПРСА. Рассматривается случай, когда как приемники, так и передатчики в составе многопозиционной РСА движутся по собственным независимым траекториям.

При решении задачи обнаружения объектов, заданных функционально-детерминированной моделью коэффициента отражения, на основании предварительного комплексирования данных запишем модель комплексного коэффициента отражения объекта многомерной характеристикой, зависящей, в частности, от бистатистических углов приемника Θ_R , передатчика Θ_T , ориентации объекта Θ_0 :

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = F^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \dot{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\gamma}) = F^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \dot{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\beta}, \Theta_0, \Theta_R, \Theta_T), \quad (3.22)$$

где $F^0(\mathbf{r})$ — среднее значение комплексного коэффициента отражения по $\boldsymbol{\beta}$, Θ_0 , Θ_R , Θ_T (в моностатическом варианте — среднее реальное значение диаграммы обратного рассеяния); $\dot{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}, \Theta_0, \Theta_R, \Theta_T)$ — вектор функций, координаты которого с точностью до нормировки совпадают с амплитудно-фазовой диаграммой отражения от объекта для заданных входных параметров и обычно измеряемой экспериментально, в том числе и с использованием симуляторов либо путем моделирования; $\boldsymbol{\beta}$ — вектор

дополнительных входных параметров электродинамической модели объекта для заданной МПРСА (поляризация, несущая частота и др.), в дальнейшем для сокращения записи будем использовать $\gamma = (\beta, \Theta_0, \Theta_R, \Theta_T)$.

Оптимальный алгоритм обнаружения синтезируем на основании определения отношения правдоподобия по результатам совместной оценки среднего реального значения комплексного коэффициента отражения $F^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ объекта с учетом приведенных ранее методов совместной обработки, модели (3.22) и того, что функция $F^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ — вещественная величина:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \mathbf{u}^T(t_1) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \dot{\mathbf{S}}_\eta^*(t_2, \gamma, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) dt_1 dt_2 &= \frac{1}{2} \int_D F^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \times \\ &\times \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \dot{\mathbf{S}}_\eta^T(t_1, \gamma, \mathbf{r}) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \dot{\mathbf{S}}_\eta^*(t_2, \gamma, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) dt_1 dt_2 d\mathbf{r}, \quad (3.23) \end{aligned}$$

где в координатах вектора модифицированных полезных сигналов $S_{\eta i}(t, \gamma, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ учитываются амплитудно-фазовые множители $\dot{\eta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \beta, \Theta_0, \Theta_R, \Theta_T)$, входящие в электродинамическую модель объекта $\dot{S}_{\eta i}(t, \gamma, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \dot{\eta}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \gamma_i)$, $\dot{S}_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{k=1 \dots Tr} \dot{\eta}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \gamma_{ik}) \dot{S}_{ik}(t, \mathbf{r})$.

Дальнейшие преобразования выполним при использовании модифицированного условия пространственно-временной узкополосности сигнала многопозиционной системы [20]

$$\operatorname{Max}_{k,m} |f_{0k} - f_{0m}| + 2F < \operatorname{Min}_{k,m} |f_{0k} + f_{0m}|.$$

Для использования в обнаружителе последнее уравнение записывается в виде сравнения результата обработки (левая часть) с порогом (правая часть), в котором фигурирует величина l_0 , определяемого из условия обеспечения заданной вероятности ложной тревоги F_G

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_D \int_D \int_D F^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) R_I^{-1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \mathbf{u}^T(t_1) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \dot{\mathbf{S}}_\eta^*(t_2, \gamma, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) dt_1 dt_2 \times \\ \times \int_0^T \int_0^T \dot{\mathbf{S}}_\eta^{T*}(t_1, \gamma, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \dot{\mathbf{S}}_\eta(t_2, \gamma, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) dt_1 dt_2 d\mathbf{r} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \stackrel{\hat{a}=1}{\geq} \stackrel{\hat{a}=0}{\leq} \frac{1}{16} \times \\ \times \int_D \int_D \int_D \int_D F^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) F^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) R_I^{-1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \Re \int_0^T \int_0^T \dot{\mathbf{S}}_\eta^T(t_1, \gamma, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \times \\ \times \dot{\mathbf{S}}_\eta^*(t_2, \gamma, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) dt_1 dt_2 \int_0^T \int_0^T \dot{\mathbf{S}}_\eta^{T*}(t_1, \gamma, \mathbf{r}', \mathbf{r}_0) \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2) \times \\ \times \dot{\mathbf{S}}_\eta(t_2, \gamma, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) dt_1 dt_2 d\mathbf{r} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \ln(l_0). \quad (3.24) \end{aligned}$$

На основании полученного выражения (3.24) несложно получить наиболее важные с практической точки зрения случаи: при ортогональности сигналов передатчиков для заданной группировки и пространственной конфигурации МПРСА; для случая обнаружения точечных объектов; при условии, что модель аддитивных помех предполагает их независимость в различных приемных каналах и модель поверхности характеризуется малым уровнем взаимных корреляционных связей между различными бистатистическими парами; для случая, когда элементы корреляционной функции, зависящие от аддитивного шума $R_{N_{ii}}^{-1}(t_1, t_2)$ и отражения от поверхности (фона) $R_{D_{ii}}^{-1}(t_1, t_2)$, могут быть аппроксимированы “короткими” временными функциями; если наблюдаемые стохастические процессы полагаются стационарными (по крайней мере, на интервале синтеза апертуры); для случая, когда выполняется обнаружение точечных объектов.

Обнаружение объектов, заданных стохастической моделью отражения, основано на предварительной оптимальной совместной оценке статистических характеристик отраженного поля. Здесь приведен наиболее важный с практической точки зрения случай обнаружения объектов, заданных распределением второго статистического момента в виде

$$\mathbf{R}_F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_0) = R_F^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_0) \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_0, \gamma, \Theta_0, \Theta_R, \Theta_T), \quad (3.25)$$

где $R_F^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ — восстанавливаемое значение корреляционной функции комплексного коэффициента отражения (например, среднее значение); $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_0, \gamma, \Theta_0, \Theta_R, \Theta_T)$ — матрица функций, с точностью до нормировки совпадающих с многомерной зависимостью $\mathbf{R}_F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\lambda})$ от параметров наблюдения (бистатистических углов приемника Θ_R , передатчика Θ_T , ориентации объекта Θ_0 , несущих частот, поляризаций).

Алгоритмы оптимальной совместной обработки синтезируем для оценки функции комплексирования $R_F^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}_0)$ на основании полученного ранее общего выражения совместной обработки с учетом модели объекта (3.25)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^T \mathbf{u}_R^T(t_3) \boldsymbol{\xi}(t_1, t_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \gamma) \dot{\mathbf{X}}(t_3, t_4, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{u}_R(t_4) dt_3 dt_4 = \\ = \operatorname{Re} \operatorname{Tr} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T \dot{\boldsymbol{\xi}}(t_1, t_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \gamma) \dot{\mathbf{X}}(t_1, t_2, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_3) \times \\ \times \mathbf{R}_u(t_3, t_4) \mathbf{R}_u^{-1}(t_4, t_2, \boldsymbol{\lambda}) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4, \quad (3.26) \end{aligned}$$

где $\mathbf{R}_u^{-1}(t_1, t_2)$ — обратнo-корреляционная матрица определяется из интегрально-матричного уравнения обращения $\int_0^T \mathbf{R}_u(t_1, t_2) \mathbf{R}_u^{-1}(t_2, t_3) dt_2 = \mathbf{I} \delta(t_1 - t_3)$, $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Результат совместной оптимальной обработки (3.26) представляет собой не просто радиолокационное изображение, а его расширенный аналог: для

одномерной области обзора (например, линии равных дальностей либо линии равного доплеровского сдвига частоты) — это двумерное изображение; для двумерной области обзора — четырехмерное изображение и т.д., на котором объекты представлены своими средними значениями корреляционной функции комплексного коэффициента отражения, а поверхность — взвешенной и искаженной ПФН многомерной функцией.

В результате ряда преобразований при учете возможности представления уравнения наблюдения в виде аддитивной смеси отраженного от поверхности сигнала искомого объекта и аддитивного шума результат совместной обработки (3.26) запишем в виде суммы сигнальной $I^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0)$, фоновой $I^D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0)$ и шумовой $I^N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ компонент с учетом того, что в точках, где присутствует объект $a(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 1$, присутствуют только отражения от объекта и шумовой эффект совместной обработки:

$$I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) = I^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) + I^D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)[1 - a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0)] + I^N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (3.27)$$

Решающее правило запишем так:

$$-\frac{1}{2} \int_D \int_D \int_D \int_D [I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - m_I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)][\mathbf{R}_{I1}^{-1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) - \mathbf{R}_{I0}^{-1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)] \times \\ \times I[I(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) - m_I(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \stackrel{\hat{a}=1}{\gtrsim} \ln(l_0) - \ln\left(\frac{C_{a1}}{C_{a0}}\right). \quad (3.28)$$

Одной из основных операций при обнаружении объектов, заданных пространственным распределением статистических моментов отраженного поля, является оценка статистических характеристик. Полученные при этом выражения весьма громоздки и сложны для понимания, однако их частные случаи, которые интересны с практической точки зрения, например, обнаружение объектов, заданных распределением удельной эффективной поверхности рассеяния, обнаружение малоразмерных объектов и другие имеют ясный физический смысл.

В результате численного исследования разработанных оптимальных алгоритмов, которые частично приведены в работах [25–27], было установлено, что использование оптимального алгоритма обнаружения обеспечивает наибольшее отношение сигнал–помеха на результирующем РЛИ и, соответственно, наивысшее качество обнаружения. Учет в алгоритмах совместной обработки априорной информации относительно характеристик отражения от объекта (амплитудных или фазовых), поверхности, а также статистических характеристик помех приводит к увеличению отношения сигнал–помеха на выходе устройства совместной обработки. Результат формирования РЛИ в приемном устройстве без использования априорной информации относительно характеристик отражения объекта при случайной фазовой структуре полезного сигнала по отношению к бистатистическим парам, участвующим в его формировании, характеризуется низким отношением сигнал–помеха и, соответственно, низким качеством обнаружения. Преобразования процессов, устраняющие фазовую информацию на РЛИ, характеризуются

решениями по результатам оценки статистических характеристик РЛИ и, соответственно, эффективны только при существенном отличии УЭПР объекта от фона. Если пространственная корреляционная функция отражений от объекта имеет протяженность, существенно превосходящую интервал корреляции отражений от поверхности, использование оптимального алгоритма и декорреляции в пространственной области позволяет существенно повысить отношение сигнал–помеха.

Полученные методы обнаружения являются обобщением существующих оптимальных алгоритмов обнаружения в многопозиционных радиолокационных системах без синтеза апертуры, а также однопозиционных РСА и обзорных РЛС. Эти методы могут быть модифицированы для обнаружения движущихся объектов на основании введения в модели зависимостей от времени. Более подробную информацию относительно обнаружения объектов в МПРСА можно найти в [3].

3.4. Принципы и алгоритмы статистического моделирования пространственно-временных процессов и их обработки в МПРСА

При разработке систем дистанционного зондирования (ДЗ), в том числе систем с синтезированием апертуры антенны (РСА), необходимо не только аналитически, но и путем моделирования с помощью специализированных цифровых систем или программных продуктов оценить качество их работы [26].

Эта необходимость обусловлена высокой стоимостью радиолокационных систем, а также рядом других факторов. Так, например, при сравнении различных алгоритмов первичной и вторичной обработки необходимо иметь исходные (истинные) данные, которые не всегда можно получить при использовании результатов физических экспериментов. Использование имитационного моделирования позволяет не только сравнить системы ДЗ, но и получить статистические характеристики ошибок оценки параметров после применения различных алгоритмов первичной и вторичной обработки [3, 27].

При решении задачи цифрового имитационного моделирования процессов формирования и обработки пространственно-временных процессов в системах с синтезированием апертуры антенны (РСА) необходимо выбрать электродинамическую модель поверхности, частоты пространственной и временной дискретизации. Выбор этих параметров необходимо осуществлять с учетом особенностей этапов первичной и вторичной обработки, в противном случае возможно как существенное увеличение вычислительных затрат, так и получение некорректных результатов [28].

На первом этапе необходимо определить геометрические размеры участка поверхности D_M , электрофизические параметры которого используются

при моделировании. При этом важно учесть особенности функционирования систем с синтезированием апертуры антенны, и, в частности тот факт, что изображение точечного элемента поверхности получается путем когерентного суммирования сигналов, принимаемых на заданном интервале наблюдения (интервале синтеза апертуры). В радиолокационных системах с синтезом апертуры антенны размер области определяется параметрами траектории движения носителя, характеристиками его диаграммы направленности и временем синтеза, рис. 3.12.

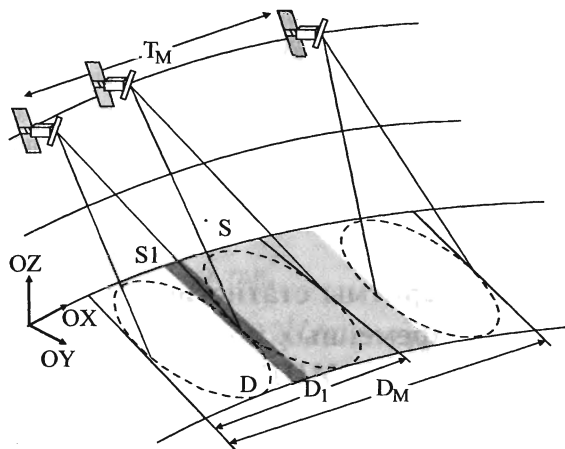


Рис. 3.12. Выбор областей наблюдения

Так, например, для того чтобы получить изображение полосы $S1$ при моделировании необходимо задать распределение электрофизических параметров, входящих в уравнение наблюдения, в пределах области (определяется объединением максимально разнесенных следов диаграмм направленности, пересекающихся в полосе $S1$). Для построения изображения участка подстилающей поверхности S геометрические размеры определяются фигурой, описанной следом ДН антенны за время синтеза T_M .

Интервал пространственной дискретизации в области D_M необходимо задавать, исходя из характера поведения УЭПР (характерного интервала корреляции) и разрешающей способности, полученной после этапа первичной или вторичной обработки. Необходимо учесть, что при использовании алгоритмов сверхразрешения или алгоритмов декорреляции под разрешающей способностью понимается пространственная протяженность функции неопределенности после применения соответствующих методов обработки.

Рекомендуется использовать как минимум 5–10 отсчетов на элемент разрешения по каждой из осей OX и OY . В результате на интервал пространства, ограниченный разрешающей способностью РСА, приходится 25–100 отсчетов, рис. 3.13. С целью унификации вычислений рекомендуется шаг дискретизации по осям OX и OY (ΔX и ΔY) брать одинаковыми, $\Delta R = \Delta X = \Delta Y$.

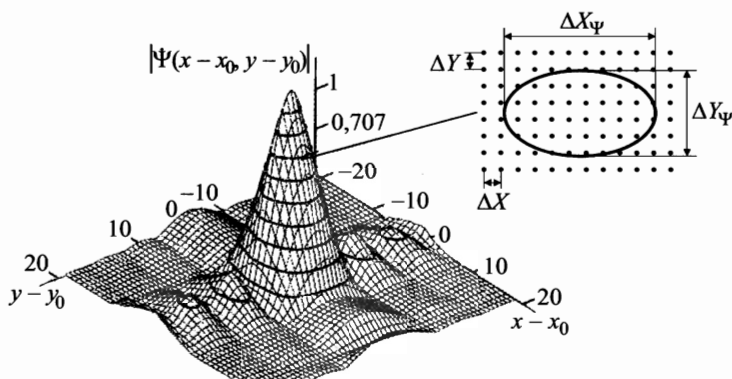


Рис. 3.13. Выбор интервалов пространственной дискретизации

Так как большинство реальных земных покровов характеризуются случайным распределением как геометрических, так и электрофизических параметров, то адекватное описание отраженного электромагнитного поля возможно только статистически, т.е. в рамках стохастических моделей поверхности. Для этих моделей поведение электрофизических параметров и, соответственно, отраженного электромагнитного поля описывается некоторыми случайными пространственно-временными функциями, в общем случае нестационарными во времени и пространстве.

В ряде случаев целесообразно воспользоваться упрощенной моделью поверхности, учитывающей стохастический характер отраженного электромагнитного поля. Упрощенная связь между комплексным коэффициентом отражения и УЭПР при независимости соседних отражателей определяется выражением:

$$R_F(r_1, r_2) = \langle \dot{F}[\vec{r}_1, \vec{p}(\vec{r}_1)] \dot{F}^*[\vec{r}_2, \vec{p}(\vec{r}_2)] \rangle = E^0[\vec{r}_1, \vec{p}(\vec{r}_1)] \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (3.29)$$

где $\vec{r}$ — координаты пространства; $\vec{p}$ — вектор электрофизических параметров поверхности; $\dot{F}[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]$ — комплексный коэффициент отражения; $E^0[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]$ — удельная эффективная поверхность рассеяния; $\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ — дельта-функция (функция Дирака).

В рамках моделирования комплексного коэффициента отражения $\dot{F}[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]$ как нестационарного пространственного процесса необходимо задать его реальную и мнимую части двумя нормальными независимыми стохастическими векторными полями с нулевыми средними $\xi(\vec{r})$ и $\eta(\vec{r})$

$$\text{Re}\{\dot{F}[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]\} = C_R[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]\xi(\vec{r}), \quad \text{Im}\{\dot{F}[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]\} = C_I[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]\eta(\vec{r}). \quad (3.30)$$

Здесь пространственные функции $C_R[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]$ и $C_I[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]$ определяют изменение реальной и мнимой части $\dot{F}[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]$, и, соответственно, нестационарность $\dot{F}[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]$. Их значения определяются на основании выражения для второго статистического момента комплексного коэффициента отражения $\langle \dot{F}[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})] \dot{F}^*[\vec{r}_1, \vec{p}(\vec{r}_1)] \rangle$.

Для упрощенной модели поверхности (3.30), при учете (3.29) должно выполняться равенство $(C_R^2[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]D_\xi + C_I^2[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]D_\eta) = E^0[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]$, либо,

в случае $D_\xi = D_\eta$ — равенство $(C_R^2[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})] + C_I^2[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]) D_\xi = E^0[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]$. При цифровом моделировании целесообразно использовать $D_\xi = D_\eta = 1$ и $C_R[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})] = C_i[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]$, в этом случае $C[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})] = \sqrt{E^0[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]}/2$.

Полученное таким образом пространственное распределение физических величин и результаты оценки его статистических характеристик используются при задании процессов на входе антенной системы радиолокационных систем дистанционного зондирования, а также при задании параметров адаптивных алгоритмов обработки.

Модель уравнения наблюдения определяет связь между сигналом, отраженным от зондируемой поверхности, и помехой. Для радиолокационных систем с синтезированием апертуры антенны уравнение наблюдения представляет собой некоторую композицию полезного (отраженного от земной поверхности) сигнала $S_{\text{пол}}$ и помехи $n(t)$ $u(t) = \{S_{\text{пол}}(t), n(t)\}$.

Наиболее часто используется модель аддитивной помехи, задаваемой нормальным стационарным случайным процессом с равномерной спектральной плотностью мощности $N_0/2$. В общем виде полезный сигнал может быть записан следующим образом:

$$S_D(t) = \text{Re} \int_D \dot{K}(t, r) \dot{F}[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})] \dot{G}(t, \vec{r}) \dot{S}_0[t - t_3(t, \vec{r}) \exp \{j\omega_0[t - t_3(t, \vec{r})]\}] d\vec{r}. \quad (3.31)$$

Частоту дискретизации сигнала при цифровой обработке необходимо выбирать исходя из теоремы Котельникова (теоремы отсчетов). При этом необходимо учесть особенности, связанные с движением носителя в пространстве и, в частности, наличием доплеровского сдвига частоты сигналов,

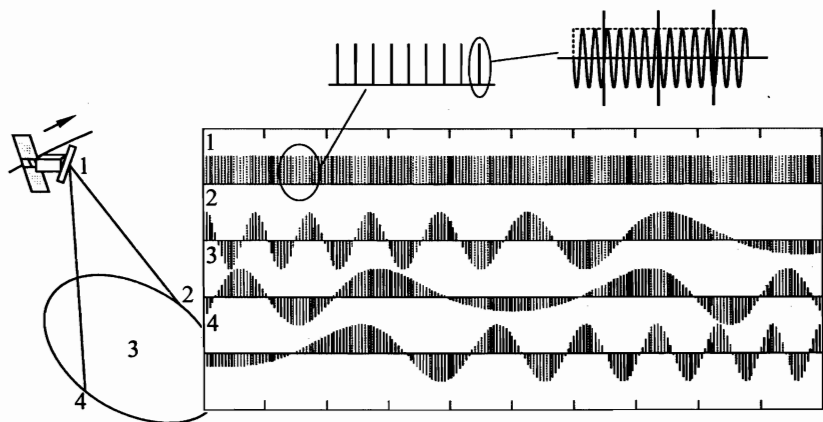


Рис. 3.14. Сигналы в PCA, номер графика соответствует точке

отраженных от различных точек подстилающей поверхности в области "засвеченной" следом ДН антенны, рис. 3.14.

При моделировании сигнала, отраженного от поверхности, для каждого из моментов времени необходимо выполнить суммирование сигналов, отра-

женных от отдельных точек: $S_t = \sum_{x,y \in D} \dot{K}_{t,x,y} \dot{G}_{t,x,y} \dot{F}_{x,y} \dot{S}_{t,x,y}$. Таким образом,

для вычисления значения отраженного от поверхности сигнала в каждый из моментов времени необходимо суммировать $D/\Delta R^2$ сигналов (D — размер следа диаграммы направленности на подстилающей поверхности). Общее число отсчетов сигнала N , используемых при формировании радиолокационного изображения поверхности D_M , определяется величиной $N = Tc'/T_D$, где Tc' — время, необходимое для получения изображения области S , T_D — время дискретизации.

Если система дистанционного зондирования не предусматривает фазовых измерений, то при цифровой обработке целесообразно воспользоваться методом комплексных амплитуд, основанным на том, что вся полезная информация содержится лишь в множителе $\dot{S}_0[t - t_3(t, \vec{r})] \exp \{j\omega_0[t_3(t, \vec{r})]\}$, — в комплексной огибающей сигнала. Это означает, что при выборе интервала дискретизации нет необходимости в учете частоты несущей f_0 , а цифровую обработку целесообразно осуществлять после фазовых детекторов. При этом существенно уменьшаются требования к аппаратуре и объемам памяти, необходимым для обработки, при сохранении всей полезной информации, содержащейся в отраженном сигнале.

При цифровой обработке в РСА значение времени дискретизации и количества бит, приходящихся на каждый из отсчетов (определяется разрядностью АЦП и требованиями к качеству РЛИ), определяют ширину полосы пропускания, необходимую при записи информации или при ее передаче на наземные пункты.

Естественные помехи обычно задаются как аддитивный стационарный или нестационарный случайный процесс. Характер распределения естественных помех можно считать гауссовским при выполнении условий центральной предельной теоремы. Для многих практических применений целесообразно использовать модель естественной помехи, представляемой нормальным стационарным случайным процессом с равномерной спектральной плотностью мощности $\Omega(f) = \begin{cases} N_0/2, & |f| < F \\ 0, & |f| > F \end{cases}$. Частота F может быть выбрана произвольно, но не меньшей верхней частоты полезного сигнала (частоты дискретизации). Эта модель является примером идеализации, хорошо согласующейся с реальным явлением и вместе с тем существенно облегчающей математический анализ.

Использование предложенных рекомендаций позволяет корректно задать уравнение наблюдения с учетом стохастического и нестационарного характера отраженного от поверхности сигнала и при этом избежать значительных вычислительных затрат при исследовании алгоритмов первичной и вторичной обработки.

Определение качественных показателей систем ДЗ путем имитационного моделирования. Как было указано ранее, аналитическая оптимизация алгоритмов обработки для широкого класса моделей поверхности и уравнений наблюдения существенно затруднена. По этой причине в ряде

случаев целесообразно воспользоваться результатами имитационного моделирования с целью сравнения различных методов первичной и вторичной обработки по выбранным критериям качества.

Необходимыми данными являются: модель распределения электрофизических параметров, электродинамическая модель поверхности, параметры системы ДЗ, модель уравнения наблюдения, алгоритмы обработки и выбранные качественные показатели.

Алгоритм численного определения качества работы радиолокационных систем путем статистического моделирования процессов формирования и обработки РЛИ представлен на рис. 3.15.

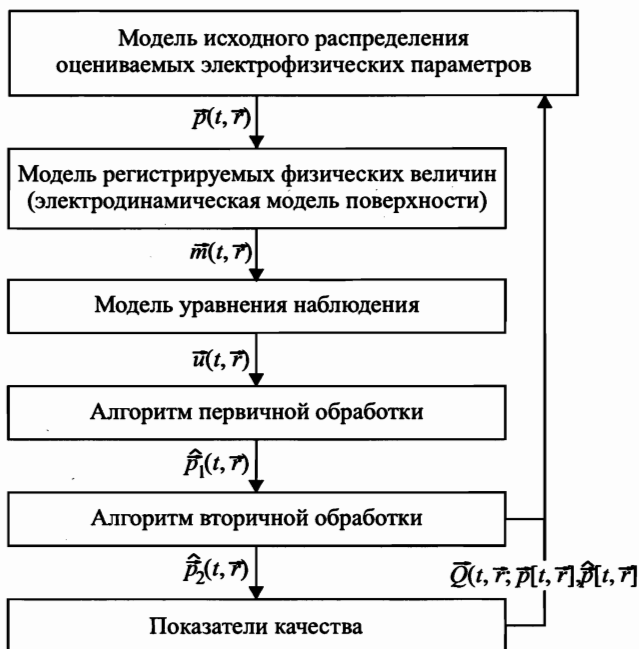


Рис. 3.15. Алгоритм численного определения качественных показателей алгоритмов обработки в системах дистанционного зондирования

В рамках предлагаемого метода численного определения качественных показателей функционирования систем дистанционного зондирования путем моделирования процессов обработки в системах ДЗ истинное пространственно-временное распределение параметров поверхности $\mathbf{p}[t, \mathbf{r}]$ является известным. Таким образом, по результатам оценки параметров $\hat{\mathbf{p}}[t, \mathbf{r}]$ можно определить значения показателей качества. Для этого, как было указано ранее, целесообразно использовать величины динамических, флуктуационных и шумовых ошибок формирования РЛИ.

Для систем дистанционного зондирования поверхности целесообразно разделить ошибки оценки параметров на динамические $\mathbf{E}_D$, флуктуационные $\mathbf{E}_f$, шумовые $\mathbf{E}_N$ и общие $\mathbf{E}_T$. Такое разделение обусловлено их различным характером и причинами возникновения. Динамические ошибки обусловлены сглаживанием оцениваемых параметров функциями

неопределенности и операторами вторичной обработки; флуктуационные — несостоятельностью оценок, полученных по одной реализации стохастического входного процесса; шумовые ошибки обусловлены наличием шума (обычно аддитивного) в системе обработки; общие ошибки представляют собой расхождение между вектором оценок и вектором истинных значений оцениваемых параметров.

Выражения для этих ошибок при оценке пространственно-временных функций следующие:

$$E_D[\mathbf{p}(t, \mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r})] = \mathbf{d}\{\mathbf{p}(t, \mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}) \mid \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}) = \langle W[\mathbf{S}(t, \mathbf{r})] \rangle\},$$

$$E_F[\mathbf{p}(t, \mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r})] = \mathbf{d}\{\mathbf{p}(t, \mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}) \mid \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}) = W[\mathbf{S}(t, \mathbf{r})] \mid_{E_d=0}\},$$

$$E_N[\mathbf{p}(t, \mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r})] = \mathbf{d}\{\mathbf{p}(t, \mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}) \mid \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}) = W[\mathbf{u}(t)]\},$$

$$E_T[\mathbf{p}(t, \mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r})] = \mathbf{d}\{\mathbf{p}(t, \mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}) \mid \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}) = W[\mathbf{u}(t, \mathbf{r})]\},$$

где $\langle \cdot \rangle$ — знак статистического усреднения.

Общие ошибки не могут являться универсальным критерием качества РЛИ так как они не учитывают особенностей дальнейшей интерпретации изображений. Так, например, интегральное значение общей ошибки E_T более чувствительно к незначительному изменению оцениваемого параметра на большом пространственном участке, чем к пропуску короткого "импульсного" сигнала.

По этой причине общий критерий качества радиолокационной системы имеет смысл записать в виде взвешенной суммы динамических, флуктуационных и шумовых ошибок:

$$\begin{aligned} Q(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}[t, \mathbf{r}], \hat{\mathbf{p}}[t, \mathbf{r}]) = \\ = R_S(t, \mathbf{r}) \cdot E_D(t, \mathbf{r}) + R_F(t, \mathbf{r}) \cdot E_F(t, \mathbf{r}) + R_n(t, \mathbf{r}) \cdot E_N(t, \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Пространственно-временные функции $R_D(t, \mathbf{r})$, $R_F(t, \mathbf{r})$, $R_N(t, \mathbf{r})$ характеризуют вес (стоимость) потерь, полученных по причине наличия ошибок E_D , E_F , E_N в заданной точке пространства в заданный момент времени. В ряде случаев необходимо воспользоваться интегральным критерием, ставящим в соответствие $Q(t, \mathbf{p}; \mathbf{p}[t, \mathbf{r}], \hat{\mathbf{p}}[t, \mathbf{r}])$ вектор скалярных значений либо число $Q(t, \mathbf{p}; \mathbf{p}[t, \mathbf{r}], \hat{\mathbf{p}}[t, \mathbf{r}])$.

В зависимости от задач, решаемых системой дистанционного зондирования, необходимо минимизировать вектор Q либо отдельные его компоненты при заданных функциях $R_D(t, \mathbf{r})$, $R_F(t, \mathbf{r})$, $R_N(t, \mathbf{r})$. Именно этот фактор определяет выбор алгоритмов первичной и вторичной обработки.

3.5. Выбор и оптимизация пространственной конфигурации многопозиционных систем в реальном масштабе времени

В многопозиционных системах авиационно-космического базирования качество решения задач дистанционного зондирования существенно зависит от пространственной конфигурации МПРСА. Одним из наиболее общих критериев является исследование пространственных функций неопределенности многопозиционных систем. Такое исследование должно основываться на модели полезных сигналов в многопозиционной системе.

3.5.1. Исследование влияния пространственной конфигурации и характера взаимного движения многопозиционной РСА на структуру пространственно-временных сигналов. Получим общий вид вектора полезных (отраженных от поверхности) сигналов в многопозиционной системе с синтезированием апертуры антенны.

Выделим произвольную бистатистическую пару i -й приемник k -й передатчик, которые в общем случае разнесены в пространстве и движутся по собственным траекториям [29]; сигнал, излучаемый k -м передатчиком представим в виде $\dot{S}_k(t) = \dot{S}_{0k}(t) \exp \{j\omega_{0k}t\}$, где $\dot{S}_{0k}(t)$ — комплексная огибающая; $\omega_{0k} = 2\pi f_k$ — несущая частота излучаемого сигнала.

Полезный сигнал для произвольной точки поверхности $\mathbf{r} \in D$ (точечный сигнал) запишем так [30]:

$$\dot{S}_{ik}^P(t, \mathbf{r}) = \dot{K}_k(t, \mathbf{r}) \dot{K}_i(t, \mathbf{r}) \dot{G}_k(t, \mathbf{r}) \tilde{G}_i(t, \mathbf{r}) \dot{F}_{ik}[\mathbf{r}, \mathbf{p}(\mathbf{r})] \dot{S}_{0k}[t - \tau_k(t, \mathbf{r}) - \tau_i(t, \mathbf{r})] \exp \{j\omega_{0k}[t - \tau_k(t, \mathbf{r}) - \tau_i(t, \mathbf{r})]\} = \dot{F}_{ik}[\mathbf{r}, \mathbf{p}(\mathbf{r})] \dot{S}_{ik}(t, \mathbf{r}), \quad (3.32)$$

где $\dot{K}_k(t, \mathbf{r})$ — коэффициент, учитывающий искажение (в том числе и уменьшение амплитуды) сигнала при распространении от k -го передатчика до точки поверхности $\mathbf{r}$; $\dot{K}_i(t, \mathbf{r})$ — коэффициент, учитывающий искажение сигнала при распространении от точки поверхности $\mathbf{r}$ до приемника; $\dot{G}_k(t, \mathbf{r})$ — амплитудная диаграмма направленности (ДН) антенны передатчика; $\tilde{G}_i(t, \mathbf{r})$ — коэффициент усиления приемной антенны по амплитуде связан с амплитудной ДН и пространственным размером антенны A_i соотношением $A_i \approx \frac{\lambda^2}{4\pi} |\dot{G}_i|^2 = |\tilde{G}_i|^2$; $\dot{F}_{ik}[\mathbf{r}, \mathbf{p}(\mathbf{r})]$ — комплексный коэффициент отражения элемента поверхности $\mathbf{r}$ с вектором электрофизических параметров $\mathbf{p}(\mathbf{r})$, в общем случае зависит от взаимного пространственного положения k -го передатчика, точки поверхности и приемника; $\tau_k(t, \mathbf{r})$ и $\tau_i(t, \mathbf{r})$ — время задержки на распространение сигнала от k -го передатчика до точки поверхности $\mathbf{r}$ и от этой точки до i -го приемника, соответственно.

Сигнал, отраженный от зондируемой поверхности, будет представлять собой предельное значение суммы (интеграл по области D) излученных k -м передатчиком сигналов, отраженных от отдельных элементов поверхности и принятых i -м приемником

$$\dot{S}_{Dik}(t) = \operatorname{Re} \int_D \dot{K}_k(t, \mathbf{r}) \dot{K}_i(t, \mathbf{r}) \dot{G}_k(t, \mathbf{r}) \tilde{G}_i(t, \mathbf{r}) \dot{F}_{ik}[\mathbf{r}, \mathbf{p}(\mathbf{r})] \dot{S}_{0k}^0(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.33)$$

где $\dot{S}_{0k}^0(t, \mathbf{r}) = \dot{S}_{0k}[t - \tau_k(t, \mathbf{r}) - \tau_i(t, \mathbf{r})] \exp \{j\omega_{0k}[t - \tau_k(t, \mathbf{r}) - \tau_i(t, \mathbf{r})]\}$ — идеальный единичный сигнал в бистатистической системе.

Анализ выражения (3.33) позволяет ввести понятие области обзора бистатистической РСА как пересечение на подстилающей поверхности следов диаграмм направленности передатчика и приемника $D = G_{ik} = G_k \cap G_i$. Для многопозиционной системы введем понятие общей

области обзора $D_\Sigma = \sum_{\substack{i=1 \dots Rx \\ k=1 \dots Tr}} G_k \cap G_i$ и пересекающейся области обзора $D_P = \prod_{\substack{i=1 \dots Rx \\ k=1 \dots Tr}} G_k \cap G_i$.

В многопозиционной системе полезный сигнал в i -м приемнике представляет собой сумму сигналов, излученных передатчиками МПРСА,

$$\dot{S}_{Di}(t) = \sum_{k=1 \dots Tr} \operatorname{Re} \int_D \dot{K}_{ik}(t, \mathbf{r}) \dot{F}_{ik}[\mathbf{r}, \mathbf{p}(\mathbf{r})] \dot{S}_{ik}(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.34)$$

где Tr — число передатчиков для которых $G_k \cap G_i \neq 0$.

Для исследования зависимости временной структуры сигнала, принимаемого в бистатической системе с синтезированием апертуры антенны, от параметров наблюдения получим основные геометрические соотношения. Для этого введем систему координат следующим образом: ось OX направлена в сторону движения приемника, ось OZ — по нормали к подстилающей поверхности, ось OY дополняет систему координат до правой тройки векторов. Начало координат совпадает с проекцией положения приемника на подстилающую поверхность, рис. 3.16.

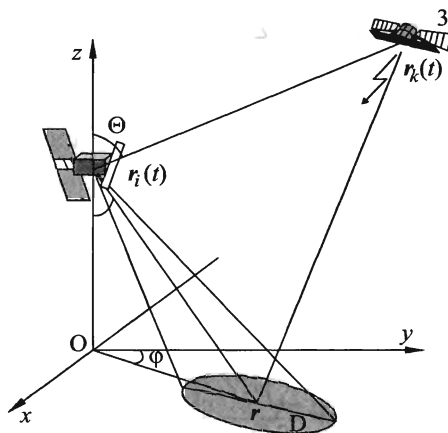


Рис. 3.16. Пространственная конфигурация наблюдения

Расстояния i -й приемник — точка поверхности $R_i(t, \mathbf{r})$ и k -й передатчик — точка поверхности $R_k(t, \mathbf{r})$ запишем с учетом разделения на зависящие и не зависящие от времени компоненты: $R_i(t, \mathbf{r}) = \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}\|$, $R_k(t, \mathbf{r}) = \|\mathbf{r}_k(t) - \mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}_k + \Delta\mathbf{r}_k(t) - \mathbf{r}\|$, где $\|\cdot\|$ — знак нормы; $\mathbf{r}_i(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{r}_k(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{r}$ — координаты передатчика, приемника и точки поверхности, соответственно; $\mathbf{r}_i$, $\Delta\mathbf{r}_i(t)$ — постоянная и изменяющаяся во времени компоненты векторов пространственного положения.

Расстояния $R_i(t, \mathbf{r})$ и $R_k(t, \mathbf{r})$ определяются выражениями

$$\|\mathbf{r}_i(t, \mathbf{r}) - \mathbf{r}\| = R_{i0}(\mathbf{r}) \sqrt{1 + \frac{\Delta R_i^2(t, \mathbf{r})}{R_{i0}^2(\mathbf{r})}},$$

$$\|\mathbf{r}_k(t, \mathbf{r}) - \mathbf{r}\| = R_{k0}(\mathbf{r}) \sqrt{1 + \frac{\Delta R_k^2(t, \mathbf{r})}{R_{k0}^2(\mathbf{r})}}.$$

Разложим $\|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}\|$ и $\|\mathbf{r}_k(t) - \mathbf{r}\|$ в ряд по аргументам $\frac{\Delta R_i^2(t, \mathbf{r})}{R_{i0}^2(\mathbf{r})}$, $\frac{\Delta R_k^2(t, \mathbf{r})}{R_{k0}^2(\mathbf{r})}$, полагая их малость на интервале синтеза апертуры, и ограничимся линейными слагаемыми. В результате этих преобразований общее время запаздывания сигнала $\tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ запишем в следующем виде:

$$\tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \cong \frac{1}{c} \left[R_{i0}(\mathbf{r}) + R_{k0}(\mathbf{r}) + \frac{\Delta R_i^2(t, \mathbf{r})}{2R_{i0}(\mathbf{r})} + \frac{\Delta R_k^2(t, \mathbf{r})}{2R_{k0}(\mathbf{r})} \right], \quad (3.35)$$

где c — скорость света; $R_{i0}(\mathbf{r}) = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\| = \|\Delta \mathbf{r}_{i0}(\mathbf{r})\|$, $R_{k0}(\mathbf{r}) = \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}\| = \|\Delta \mathbf{r}_{k0}(\mathbf{r})\|$ — начальные расстояния; $\Delta R_i^2(t, \mathbf{r})$, $\Delta R_k^2(t, \mathbf{r})$ — изменение расстояний, определяемое скалярным произведением векторов $\Delta \mathbf{r}_i(t)$ и $0,5\Delta \mathbf{r}_i(t) - \Delta \mathbf{r}_{i0}(\mathbf{r})$, $\Delta R_i^2(t, \mathbf{r}) = 2[\Delta \mathbf{r}_i(t), 0,5\Delta \mathbf{r}_i(t) - \Delta \mathbf{r}_{i0}(\mathbf{r})]$, $\Delta R_k^2(t, \mathbf{r}) = 2[\Delta \mathbf{r}_k(t), 0,5\Delta \mathbf{r}_k(t) - \Delta \mathbf{r}_{k0}(\mathbf{r})]$, $[\cdot, \cdot]$ — знак скалярного произведения.

С учетом этих преобразований общее время запаздывания представим в виде суммы постоянной и переменной (во временной области) компонент

$$\tau_3(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \tau_{30}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) + \tau_{3\Delta}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i), \quad (3.36)$$

$$\text{где } \tau_{30}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{c} [R_{i0}(\mathbf{r}) + R_{k0}(\mathbf{r})] = \frac{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\| + \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}\|}{c},$$

$$\begin{aligned} \tau_{3\Delta}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) &= \frac{1}{c} \left[\frac{\Delta R_i^2(t, \mathbf{r})}{2R_{i0}(\mathbf{r})} + \frac{\Delta R_k^2(t, \mathbf{r})}{2R_{k0}(\mathbf{r})} \right] = \frac{1}{c} [\tau_{\Delta i}(t, \mathbf{r}) + \tau_{\Delta k}(t, \mathbf{r})] = \\ &= \frac{1}{c} \left[\frac{[\Delta \mathbf{r}_i(t), 0,5\Delta \mathbf{r}_i(t) - \Delta \mathbf{r}_{i0}(\mathbf{r})]}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|} + \frac{[\Delta \mathbf{r}_k(t), 0,5\Delta \mathbf{r}_k(t) - \Delta \mathbf{r}_{k0}(\mathbf{r})]}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}\|} \right]. \end{aligned}$$

Анализ приведенных выше соотношений показывает, что составляющая $\tau_{30}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ определяется расстоянием по трассе передатчик — точка поверхности — приемник; составляющая $\tau_{3\Delta}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ определяет изменение фазы сигнала, и, соответственно, поведение доплеровской частоты как пространственно-временной функции: $F_D(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{d}{dt} j\omega_0 \tau_{3\Delta}(t, \mathbf{r})$.

Поведение $\tau_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ и $\tau_{\Delta}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ позволяет оценить вид пространственной функции неопределенности $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ для заданного радиолока-

ционного сигнала $\dot{S}(t)$, который может быть представлен в виде $\dot{S}(t) = \dot{S}_0(t) \exp\{j\omega_0 t\}$

$$\dot{\Psi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_0^T \dot{S}_0[t - \tau(t, \mathbf{r}_1)] \dot{S}_0^*[t - \tau(t, \mathbf{r}_2)] \exp\{j\omega_0[\tau(t, \mathbf{r}_2) - \tau(t, \mathbf{r}_1)]\} dt.$$

Модифицируя последнее выражение, несложно увидеть, что полученная формула позволяет установить связь между пространственной функцией неопределенности и классической функцией неопределенности радиолока-

$$\text{ционного сигнала } \dot{\Psi}(\tau, \{a_k\}) = C \int_{-\tau_0(\mathbf{r}_1)}^{T-\tau_0(\mathbf{r}_1)} \dot{S}_0(t') \dot{S}_0^*(t' - \tau) \exp\{j\Phi t\} dt.$$

Определим поле средних запаздываний $\tau_0 = \tau_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ как проекцию трехмерной зависимости постоянной составляющей времени запаздывания на область D [26]. Линии равных дальностей (ЛРД) определим как значения поля $\tau_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \text{const}$, $\mathbf{r} \in D$. Поле градиента к $\tau_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ определяет направление максимального изменения постоянной составляющей времени запаздывания на подстилающей поверхности, $\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\} = \frac{1}{c} \left\{ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} \right\}$, [31].

Как было показано выше, поле средних запаздываний позволяет сопоставить функцию неопределенности радиолокационного сигнала по времени запаздывания с пространственной функцией неопределенности путем определения скорости приращения $\tau_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$.

Результаты моделирования, показывающие пространственную ориентацию линий равных дальностей и градиента к ним для некоторых наиболее важных случаев взаимного расположения приемника и передатчика, показаны на рис. 3.17. При получении результатов полагалось, что приемник находится в точке $(0, 0, h)$, передатчик находится: 1 — над приемником, координаты — $(0, 0, h_1)$; 2 — смещен по оси OX , координаты — $(x_1, 0, h_1)$; 3 — смещен по оси OY , координаты — $(0, y_1, h_1)$; 4 — $(x_1, 0, h_1)$.

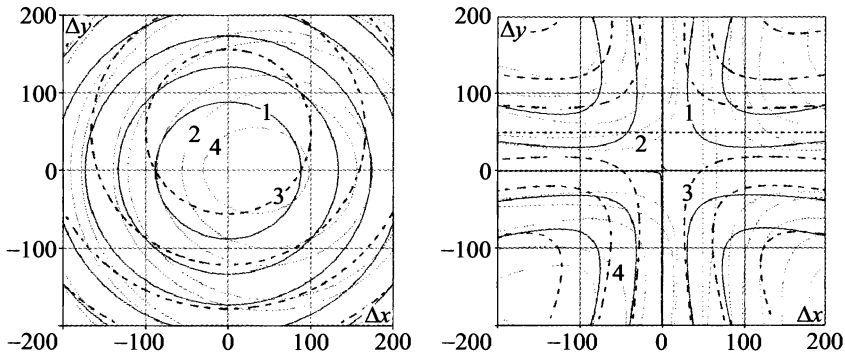


Рис. 3.17. Линии $\tau_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \text{const}$ (слева) и градиент к линиям $\tau_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \text{const}$

Проекцию трехмерной зависимости производной $\tau_{3\Delta}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ на область D назовем полем $\tau_{\Delta}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$

$$\tau_{\Delta}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \left[\frac{[\Delta \mathbf{r}_i(t), 0,5\Delta \mathbf{r}_i(t) - \Delta \mathbf{r}_{i0}(\mathbf{r})]}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|} + \frac{[\Delta \mathbf{r}_k(t), 0,5\Delta \mathbf{r}_k(t) - \Delta \mathbf{r}_{k0}(\mathbf{r})]}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}\|} \right]_{\mathbf{r} \in D}$$

С точностью до константы, определяемой параметрами системы ДЗ, линейный член этого поля $\tau_{\Delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ описывает пространственную зависимость частоты Доплера как функции пространственных координат подстилающей поверхности $F_D(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$. Кривые, для которых $\tau_{\Delta}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \text{const}$ назовем линиями равного доплеровского сдвига частоты. При аппроксимации движения носителей линейным их пространственное положение совпадает с линиями, на которых значение частоты Доплера $F_D(\mathbf{r}/t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \text{const}$

$$F_D(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \frac{2\pi f_0}{c} \left\{ \frac{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i t - \Delta \mathbf{r}_{i0}]}{\|\mathbf{r}_i(\mathbf{r}) - \mathbf{r}\|} + \frac{[\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k t - \Delta \mathbf{r}_{k0}]}{\|\mathbf{r}_k(\mathbf{r}) - \mathbf{r}\|} \right\}. \quad (3.37)$$

Градиент к линиям $\tau_{\Delta}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \text{const}$ позволяет сопоставить разрешающую способность в пространстве с разрешающей способностью радиолокационного сигнала по частоте [32].

Пространственное положение линий равного доплеровского сдвига для некоторых наиболее важных случаев взаимного движения приемника и передатчика показаны на рис. 3.18. При получении результатов, показанных

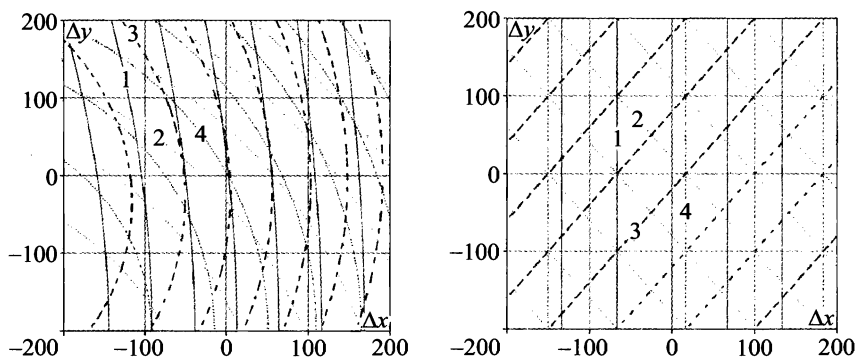


Рис. 3.18. Линии равных доплеровских частот (слева — на большом участке поверхности, справа — в небольшой пространственной области)

на этом рисунке, полагалось, что вектор скорости приемника $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i = (v_{xi}, 0, 0)$; 1 — вектор скорости передатчика $\Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{v}_k = (v_{xk}, 0, 0)$, $v_{yk} > 0$; 2 — вектор скорости передатчика $\mathbf{v}_k = (v_{xk}, v_{yk}, 0)$, $v_{yk} > 0$; 3 — вектор скорости передатчика $\mathbf{v}_k = (v_{xk}, v_{yk}, 0)$, $v_{yk} < 0$; 4 — вектор скорости передатчика $\mathbf{v}_k = (v_{xk}, 0, v_{zk})$, $v_{zk} > 0$.

3.5.2. Оптимизация пространственной конфигурации многопозиционных РСА на основании градиентного анализа полей равного запаздывания и дельта-запаздывания. Ранее было отмечено, что градиенты к полям равных доплеровских частот и равных времен задержки позволяют сопоставить классическую функцию неопределенности в координатах время задержки — частота Доплера и пространственную ФН для РСА. Учитывая данный факт, можно выполнить оптимизацию пространственной конфигурации многопозиционной системы по результатам анализа полей τ_0 , τ_Δ [31, 32]. Ниже приведен ряд критериев, применимых для оптимизации многопозиционных систем.

Обеспечение максимального разрешения в малой окрестности $\mathbf{r}_0$ или точке пространства $\mathbf{r}_0$ за счет выполнения условий

$$|\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}| \geq P, \quad i = 1 \dots R_c, \quad k = 1 \dots T_r,$$

или

$$|\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_\Delta(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}| \geq P, \quad i = 1 \dots R_c, \quad k = 1 \dots T_r,$$

которые гарантируют обеспечение разрешения не меньше требуемого вдоль линий $\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}$ и $\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_\Delta(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}$. Приведенные выше условия оптимизации целесообразно применять для обеспечения высокого разрешения для сигналов с плохой разрешающей способностью по времени запаздывания и по сдвигу частоты, соответственно.

Модификацией этих условий является их выполнение в относительно большой области обзора D_0 (такой, что величина или направление градиента существенно изменяются по отношению к произвольной точке $\mathbf{r}_0 \in D_0$). При этом можно использовать как минимальные

$$|\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}| \geq P, \quad i = 1 \dots R_c, \quad k = 1 \dots T_r, \quad \mathbf{r}_0 \in D_0,$$

$$|\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_\Delta(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}| \geq P, \quad i = 1 \dots R_c, \quad k = 1 \dots T_r, \quad \mathbf{r}_0 \in D_0,$$

так и усредненные в пределах следов диаграмм направленности значения, гарантирующие среднее разрешение не хуже заданного

$$\begin{aligned} \int_{D_0} |\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}| d\mathbf{r}_0 &\geq P, \quad i = 1 \dots R_c, \quad k = 1 \dots T_r, \\ \int_{D_0} |\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_\Delta(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}| d\mathbf{r}_0 &\geq P, \quad i = 1 \dots R_c, \quad k = 1 \dots T_r. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Обеспечение совместного разрешения по градиентам к полям равного запаздывания и равного доплеровского сдвига в области D_0 можно задать с помощью операторов логического умножения

$$|\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}| \geq P \& |\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_\Delta(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}| \geq P, \quad \mathbf{r}_0 \in D_0,$$

гарантирующих, что по обеим координатам функции неопределенности разрешение не будет хуже заданного.

Также можно применять любые операторные связи (логические либо аналитические) для задания условий, аналогичных (3.38), для некоторой области D_0

$$O\{|\text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}|, |\text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_{\Delta}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}| \geq P, \quad \mathbf{r}_0 \in D_0.$$

Угол между линиями градиента важен при обеспечении равномерной области пространственного разрешения. Условия, учитывающие угол между векторами могут быть представлены в виде зависимости от скалярного произведения векторов $(\cdot, \cdot)$ и их нормы $\|\cdot\|$

$$\frac{(\text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}, \text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_{\Delta}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\})}{\|\text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}\| \|\text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_{\Delta}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}\|} \in P_0, \quad \mathbf{r} \in D_0. \quad (3.39)$$

$$\int_{D_0} \frac{(\text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}, \text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_{\Delta}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\})}{\|\text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}\| \|\text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_{\Delta}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}\|} d\mathbf{r}_0.$$

Если критериями оптимизации служат одновременно модули градиентов и величина угла между ними, то необходимо использовать условия

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}, \text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_{\Delta}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\})}{\|\text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}\| \|\text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_{\Delta}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}\|} \in P_0 \\ \left\| \text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\} \right\| > P_1 \\ \left\| \text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_{\Delta}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\} \right\| > P_2 \end{array} \right., \quad \mathbf{r}_0 \in D_0, \quad (3.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{D_0} \frac{(\text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}, \text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_{\Delta}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\})}{\|\text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}\| \|\text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_{\Delta}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}\|} d\mathbf{r}_0 \in P_0 \\ \int_{D_0} \left\| \text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\} \right\| d\mathbf{r}_0 > P_1 \\ \int_{D_0} \left\| \text{grad}_{\mathbf{r}}\{\tau_{\Delta}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\} \right\| d\mathbf{r}_0 > P_2 \end{array} \right., \quad \mathbf{r}_0 \in D_0.$$

Преимущество предложенных методов оптимизации заключается, прежде всего, в небольшом объеме вычислений и, как следствие этого, возможности использования предложенных методов, например, в микроспутниках [30–32].

Так, например, для процессора с 4 MFLOPS вычисления для области 1000×1000 точек займут:

- при вычислении градиентов — 50 с;
- при вычислении пространственных функций неопределенности (10^5 временных дискрет) на интервале синтеза апертуры — 86 дней.

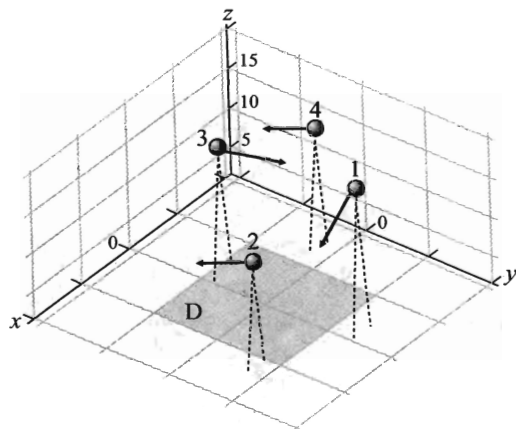


Рис. 3.19. Пространственная конфигурация рассматриваемой МПРСА; приемник находится в центре D

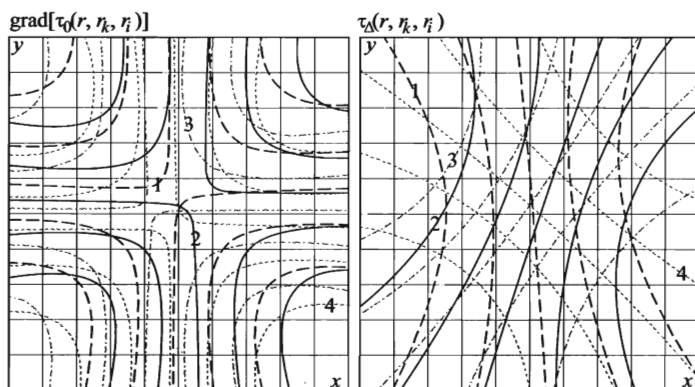


Рис. 3.20. Линии $\text{grad}_{\mathbf{r}} \{ \tau_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \}$, $\tau_{\Delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$, номер графика соответствует номеру излучателя на рис. 3.19

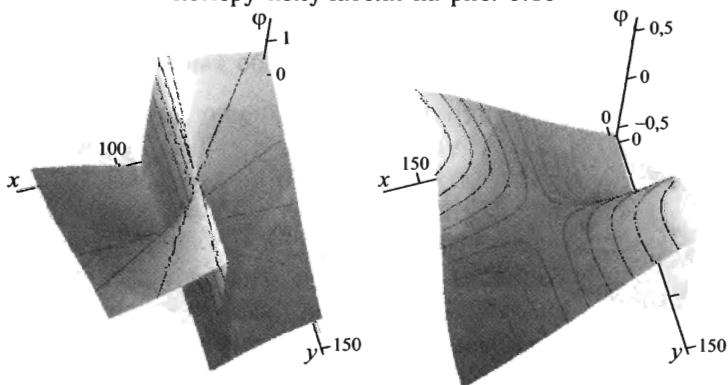


Рис. 3.21. Пространственная зависимость угла $\text{grad}_{\mathbf{r}} \{ \tau_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \}$ и $\text{grad}_{\mathbf{r}} \{ \tau_{\Delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \}$ (слева и справа, соответственно) для бистатической пары приемник — 1-й передатчик

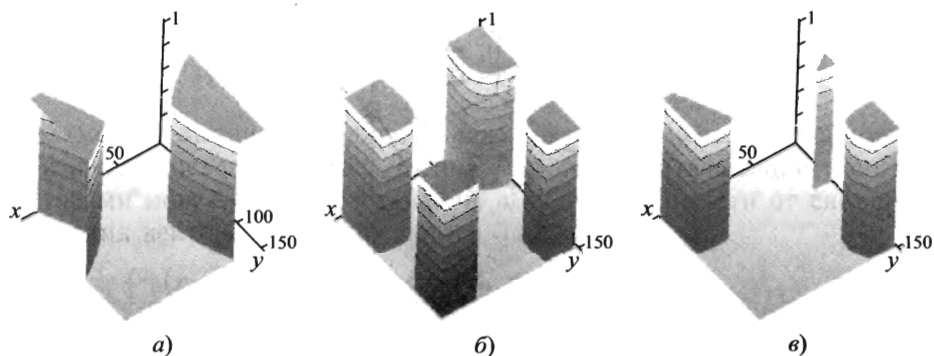


Рис. 3.22. Пространственные области в которых модули $\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}$ (а), $\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_{\Delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}$ (б) и обе величины (в) не меньше заданных

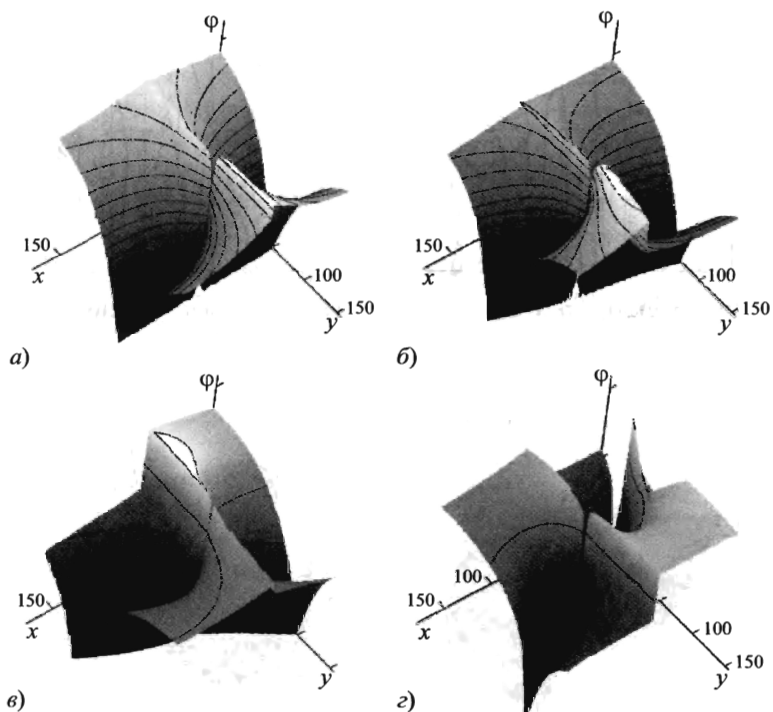


Рис. 3.23. Зависимость нормированного угла между градиентами для бистатических пар приемник-передатчик, номер передатчика соответствует номеру графика

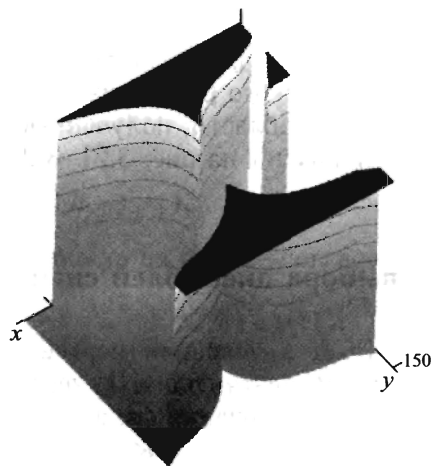


Рис. 3.24. Пространственная область, в которой удовлетворяется условие (3.39)

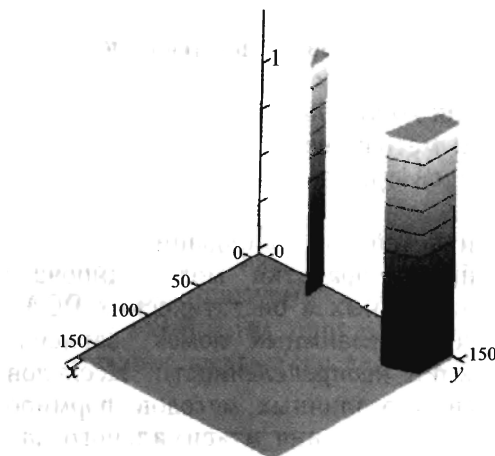


Рис. 3.25. Пространственная область, в которой удовлетворяется условие (3.40)

Таким образом, предложенный алгоритм характеризуется низкими требованиями к объему вычислений. Поэтому такой алгоритм может быть использован для оптимизации в реальном масштабе времени, например, в самоконфигурирующихся системах дистанционного зондирования.

Пример решения задачи оптимизации выбора области обзора для созвездия излучателей и одного приемника показан ниже. Рассматривается многопозиционная система, которая состоит из одного приемника и четырех передатчиков (из четырех бистатических пар), пространственная конфигурация фиксирована, необходимо в потенциальной зоне наблюдения D (в области пересечения диаграмм направленности передатчиков) выбрать область обзора таким образом, чтобы максимизировать качество построения радиолокационных изображений по критериям, описываемым градиентами к полям τ_0 , τ_Δ .

Пространственная конфигурация МПРСА и потенциальная зона наблюдения показаны на рис. 3.19; вид градиента к полю времен равного запаздывания и поля равного доплеровского сдвига частоты для рассматриваемой системы приведен на рис. 3.20; области, полученные в результате решения оптимизационной задачи, показаны на рис. 3.21–3.25.

3.6. Принципы выбора ансамблей сигналов в МПРСА

В многопозиционной РСА в условиях пересечения следов диаграмм направленности различных передатчиков и приемников возникает новая, нехарактерная для систем зондирования задача — выбор группы зондирующих сигналов с учетом сложной пространственной конфигурации в условиях перекрытия зондирующих и отраженных от поверхности сигналов во временной и частотной области. Решение задачи выбора группы сигналов непосредственно связано с задачей выбора пространственной конфигурации МПРСА, так как взаимное расположение и характер перемещения носителей существенным образом влияет на вид отраженных от поверхности сигналов и их доплеровское смещение. Впервые необходимость решения такой задачи и методы ее решения были представлены в работе Ксендзука А. В. [33]. Здесь приведены основные результаты выполненного исследования.

С учетом особенностей формирования сигнальных полей и пространственно-временной обработки модифицировано понятие ортогональности в многопозиционных и бистатистических РСА, а также введены соответствующие величины взаимных помех, зависящих от взаимных пространственных функций неопределенности. Исследована возможность и особенности применения различных методов формирования ансамблей сигналов с точки зрения обеспечения максимального качества совместной обработки.

На основании разработанной модели сигнала обоснован способ обеспечения ортогональности для заданной пространственной конфигурации за счет выбора спектра излучаемого сигнала. Показан пример решения задачи минимизации спектра сигнала, заключенного вне заданной области частот.

3.6.1. Ортогональность сигналов в многопозиционной системе с синтезированием апертуры антенны с учетом их зависимости от пространственных конфигураций МПРСА, а также характера пространственно-временной обработки. В многопозиционной системе с синтезированием апертуры антенны при решении задач выделения радиолокационных изображений по бистатистическим парам $\langle i\text{-й приемник} — k\text{-й передатчик} \rangle$ оптимальный выходной эффект $\dot{Y}_{ik}$ (в рамках функционально-детерминированных моделей поверхности) можно представить в виде суммы сигнальной $\dot{Y}_{Sik}$, помеховой $\dot{Y}_{Nik}$ и межканальной помеховой $\dot{Y}_{ICik}$ компонент $\dot{Y}_{ik}(\mathbf{r}) = \dot{Y}_{Sik}(\mathbf{r}) + \dot{Y}_{Nik}(\mathbf{r}) +$

+ $\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r})$, где $\dot{Y}_{Sik}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{2} \int_D \dot{F}_{ik}(\mathbf{r}) \dot{\Psi}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}$, D — область обзора;
 T — время синтеза; $\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{2} \sum_{j=1..Tr} \int_D \dot{F}_{ij}(\mathbf{r}) \int_0^T S_{ij}(t, \mathbf{r}) S_{ik}^*(t, \mathbf{r}_1) dt d\mathbf{r}$;
 $\dot{Y}_{Nik}(\mathbf{r}_1) = \int_0^T n(t) S_{ik}^*(t, \mathbf{r}_1) dt$, $j = 1 \dots Tr$ — число передатчиков.

Отношение сигнал–помеха на выходе согласованного фильтра

$$\mu_{ik}(\mathbf{r}_1) = \frac{\langle |\dot{Y}_{Sik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle}{\langle |\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle + \langle |\dot{Y}_{Nik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle} \quad (3.41)$$

существенно зависит от величины межканальных помех [33]

$$\langle |\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle = \frac{1}{4} \left[\sum_{j \neq k}^{\text{Tr}} \sum_{m \neq k}^{\text{Tr}} \int_D \int_D \langle \dot{F}_{ij}(\mathbf{r}) \dot{F}_{im}^*(\mathbf{r}') \rangle \dot{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \dot{\Psi}_{imk}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \right], \quad (3.42)$$

которая для упрощенной модели поверхности может быть представлена в виде $\langle |\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle = \frac{1}{4} \left[\sum_{j \neq k}^m \int_D \sigma_{ij}^0(\mathbf{r}) |\dot{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r} \right]$, где $\sigma_{ij}^0(\mathbf{r})$ — значение УЭПР в бистатической паре $\langle i$ -й приемник — j -й передатчик).

После ряда преобразований, полагая, что удельная эффективная поверхность рассеяния является факторизуемой функцией относительно параметров наблюдения $\sigma_{ij}^0(\mathbf{r}) = \sigma^0(\mathbf{r}) \alpha_{ij}(\mathbf{r})$, при равенстве энергий излучаемых сигналов получим следующее выражение для отношения сигнал–помеха

$$\mu_{ik}(\mathbf{r}_1) \cong SNR_{ik}(\mathbf{r}_1) \frac{1}{1 + \left[\frac{X}{\Delta X} \frac{Y}{\Delta Y} \sum_{j \neq k} K_{ijk}^2 \alpha_{ijkD} \chi_{ijk}(\mathbf{r}_1) \right] SNR_{ik}(\mathbf{r}_1)}, \quad (3.43)$$

где $SNR(\mathbf{r}_1)$ — отношение сигнал–помеха в бистатической ПСА $\langle i$ -й приемник — j -й передатчик), определяемое выражением $SNR(\mathbf{r}_1) =$

$$= \frac{\langle |\dot{Y}_{Sik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle}{\langle |\dot{Y}_{Nik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle}; \quad K_{ijk}^2 = \frac{K_{ij}^2}{K_{ik}^2} \text{ — отношение, зависящее от расстояний,}$$

проходимых сигналом в бистатической системе; $\alpha_{ijkD} = \left\langle \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ik}} \right\rangle_D$ — среднее значение по области обзора коэффициента влияния геометрии наблюдения (углов визирования); $\chi_{ijk}(\mathbf{r}_1) = \int_D |\dot{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}$ — среднеквадратический

уровень взаимной корреляционной функции в пространственных координатах; $\frac{X}{\Delta X} \frac{Y}{\Delta Y}$ — размер зоны обзора в элементах разрешения.

В многопозиционных системах выбор группы сигналов существенным образом влияет на качество получаемых оценок электрофизических параметров (на величину искажений, вызванных межканальными помехами). Характер и значение искажений для широкого класса поверхностей можно оценить с помощью взаимной пространственной функции неопределеннос-

ти $\dot{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \int_0^T \dot{S}_{ij}(t, \mathbf{r}) \dot{S}_{ik}^*(t, \mathbf{r}_1) dt$, которая, в свою очередь зависит от вида используемых сигналов и от пространственной конфигурации элементов МПРСА.

Модифицируем понятие ортогональности двух сигналов в многопозиционной РСА с учетом особенностей пространственно-временной обработки [34]. Необходимо отметить, что классическое понятие ортогональности

сигналов в усиленном смысле [7–10] $|\dot{\Psi}_{12}| = \left| \frac{1}{2E} \int_{T_1}^{T_2} \dot{S}_1(t) \dot{S}_2^*(t) dt \right| = 0$ для систем с синтезированием апертуры антенны должно быть модифицировано.

Два сигнала (сигналы k -го и j -го передатчиков, принимаемые i -м приемником) назовем точечно-ортогональными (ортогональными в точке пространства $\mathbf{r}_1$) в усиленном смысле, если для заданных условий наблюдения выполняется равенство

$$|\dot{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}_1)| = \left| \int_0^T \int_D \dot{S}_{ij}(t, \mathbf{r}) \dot{S}_{ik}^*(t, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r} dt \right| = 0, \quad (3.44)$$

где $\dot{S}_{ij}(t, \mathbf{r})$, $\dot{S}_{ik}(t, \mathbf{r})$ — траекторные сигналы в бистатистических парах $i - j$ и $i - k$.

С учетом возможности преобразования пространственных координат подстилающей поверхности $\mathbf{r}$ в координаты время задержки τ — частота Доплера F условие ортогональности в точке может быть записано в виде

$$|\dot{\Psi}_{ijk}(\tau_1, F_1)| = \left| \int_0^{T_C} \int_F \int_\tau \dot{S}_{ij}(t, \tau, F) \dot{S}_{ik}^*(t, \tau_1, F_1) dt d\tau dF \right| = 0.$$

Два сигнала могут быть ортогональны в некоторой области обзора, если для любых $\mathbf{r}_1 \in D1$ выполняется условие

$$|\dot{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}_1 \in D1)| = \left| \int_0^T \int_D \dot{S}_{ij}(t, \mathbf{r}) \dot{S}_{ik}^*(t, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r} dt \right| = 0.$$

Для сигналов, ортогональных в области обзора (т.е. при выполнении равенства $|\dot{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}_1)| \equiv 0, \mathbf{r}_1 \in D$), должно выполняться условие

$$|\dot{\Psi}_{ijk}| = \left| \int_D \dot{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \right| = \left| \int_0^T \int_D \int_D \dot{S}_{ij}(t, \mathbf{r}) \dot{S}_{ik}^*(t, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r} d\mathbf{r}_1 dt \right| = 0, \quad (3.45)$$

или

$$|\dot{\Psi}_{ijk}| = \left| \int_0^T \int_{F'} \int_{\tau'} \int_{F\tau} \dot{S}_{ij}(t, \tau', F') \dot{S}_{ik}^*(t, \tau_1, F_1) dt d\tau dF d\tau' dF' \right| = 0. \quad (3.46)$$

Для заданного приемника группа сигналов передатчиков будет ортогональной в усиленном смысле, если выполняются условия $|\dot{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}_1)| = 0, |\dot{\Psi}_{ij}| = 0$ для произвольных выборок приемников и передатчиков. Для многопозиционной системы группу сигналов назовем ортогональной, если условия ортогональности выполняются для произвольных приемников и передатчиков.

Особенность многопозиционных РСА состоит в том, что использование ортогональных в классическом понимании групп сигналов (т.е. таких, для которых $|\dot{\Psi}_{ij}| = \left| \frac{1}{2E} \int_{T_1}^{T_2} \dot{S}_i(t) \dot{S}_j^*(t) dt \right| = 0$) в общем случае не гарантирует выполнение условий ортогональности (3.44), (3.45) и, соответственно, отсутствие межканальных помех (3.42).

Вместе с тем, правильный выбор пространственной конфигурации МПРСА или вида излучаемых сигналов позволяет обеспечить $|\dot{\Psi}_{ijk}| = 0$ для квазиортогональных и неортогональных групп сигналов. Этот выбор основывается на особенностях пространственно-временной обработки в многопозиционных системах с синтезированием апертуры антенны.

Для оптимизации группы сигналов или пространственной конфигурации по критериям, связанным с величиной межканальных помех, целесообразно использовать как величины, связанные с отношением сигнал-помеха (3.43), так и непосредственно саму величину межканальных помех (3.42).

Аналитическое определение таких показателей качества должно учитывать критерий превышения (3.42), (3.43) порогового уровня для произвольных i, k при заданной конфигурации в точке либо области пространства

$$\begin{aligned} \max_{\substack{i=1\dots R_c \\ k=1\dots Tr}} \left\{ \left\langle |\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1)|^2 \right\rangle \right\} &\leq P, & \max_{\substack{i=1\dots R_c \\ k=1\dots Tr}} \{ \mu_{ik}(\mathbf{r}_1) \} &\geq P, \\ \max_{\substack{i=1\dots R_c \\ k=1\dots Tr}} \left\{ \int_D \left\langle |\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1)|^2 \right\rangle d\mathbf{r}_1 \right\} &\leq P, & \max_{\substack{i=1\dots R_c \\ k=1\dots Tr}} \left\{ \int_D \mu_{ik}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \right\} &\geq P, \end{aligned} \quad (3.47)$$

критерии средних значений по созвездию

$$\begin{aligned} \max_{\substack{i=1\dots R_c \\ k=1\dots Tr}} \left\{ \left\langle |\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1)|^2 \right\rangle \right\} &\geq P, & \max \left\{ \sum_{\substack{i=1\dots R_c \\ k=1\dots Tr}} \mu_{ik}(\mathbf{r}_1) \right\} &\geq P, \\ \max_{\substack{i=1\dots R_c \\ k=1\dots Tr}} \left\{ \int_D \left\langle |\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1)|^2 \right\rangle d\mathbf{r}_1 \right\} &\geq P, & \max_{\substack{i=1\dots R_c \\ k=1\dots Tr}} \left\{ \int_D \mu_{ik}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \right\} &\geq P, \end{aligned} \quad (3.48)$$

либо (3.47), (3.48) при варьировании параметрами созвездия

$$\begin{aligned} \left\langle \max_{\substack{i=1\dots R_c \\ k=1\dots Tr}} \left\{ \int_D \left\langle |\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1)|^2 \right\rangle d\mathbf{r}_1 \right\} \right\rangle_{\mathbf{r}_i(t), \mathbf{r}_k(t)} &\leq P, \\ \left\langle \max_{\substack{i=1\dots R_c \\ k=1\dots Tr}} \left\{ \int_D \mu_{ik}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \right\} \right\rangle_{\mathbf{r}_i(t), \mathbf{r}_k(t)} &\geq P, \\ \left\langle \max_{\substack{i=1\dots R_c \\ k=1\dots Tr}} \left\{ \int_D \left\langle |\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1)|^2 \right\rangle d\mathbf{r}_1 \right\} \right\rangle_{\mathbf{r}_i(t), \mathbf{r}_k(t)} &\geq P, \\ \left\langle \max_{\substack{i=1\dots R_c \\ k=1\dots Tr}} \left\{ \int_D \mu_{ik}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \right\} \right\rangle_{\mathbf{r}_i(t), \mathbf{r}_k(t)} &\geq P. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Использование критериев (3.47)–(3.49) ограничено большим объемом вычислений.

Для систем с возможностью оперативного изменения пространственной конфигурации при оптимизации (3.47)–(3.49) целесообразно использовать оценку степени ортогональности. В рамках аппроксимации пространственно-временных процессов финитными спектрами для обеспечения ортогональности (в усиленном смысле) $S_{ij}(t, \mathbf{r})$, $S_{ik}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in D$ необходимо выполнение условия (при $f_{0k} \geq f_{0j}$) $f_{0j} + 0,5\Delta S_j + F_{Dij \max} \leq f_{0k} - 0,5\Delta S_k - F_{Dik \min}$, где ΔS — ширина спектра сигнала (можно использовать как ширину спектра одиночного импульса, так и их последовательности); $F_{Dik \min}$, $F_{Dij \max}$ — минимальное и максимальное значения частоты Доплера в различных бистатистических парах, отсчитываемые по наибольшей ширине следа диаграммы направленности вдоль градиента к полю дельта-запаздываний. Выполняя разделение доплеровского сдвига частоты на компоненты, вызванные движением приемника F_{Di} и передатчика F_{Dj} , F_{Dk} относительно зондируемой поверхности, запишем условие ортогональности так:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{r} \in D} \left\{ \frac{2\pi f_0}{c} \left(\frac{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i t - \Delta \mathbf{r}_{i0}]}{\|\mathbf{r}_i(\mathbf{r}) - \mathbf{r}\|} + \frac{[\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j t - \Delta \mathbf{r}_{j0}]}{\|\mathbf{r}_j(\mathbf{r}) - \mathbf{r}\|} \right) \right\} + \\ + \min_{\mathbf{r} \in D} \left\{ \frac{2\pi f_0}{c} \left(\frac{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i t - \Delta \mathbf{r}_{i0}]}{\|\mathbf{r}_i(\mathbf{r}) - \mathbf{r}\|} + \frac{[\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k t - \Delta \mathbf{r}_{k0}]}{\|\mathbf{r}_k(\mathbf{r}) - \mathbf{r}\|} \right) \right\} \leq f_{0k} - f_{0j} - \Delta S_k. \end{aligned}$$

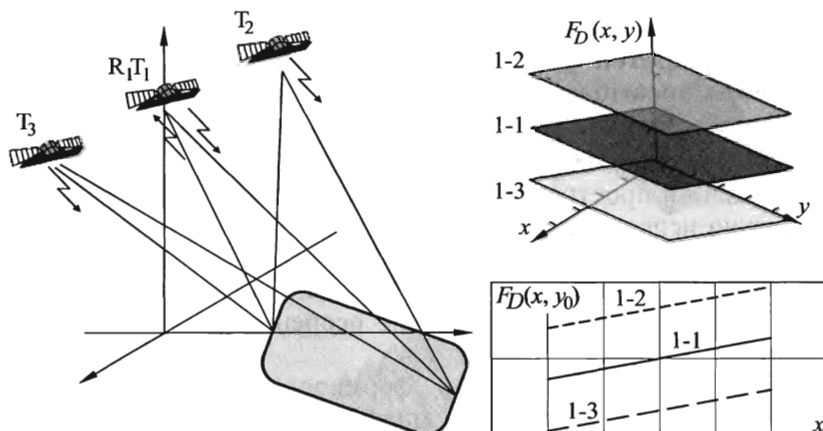


Рис. 3.26. Пространственная конфигурация МПРСА

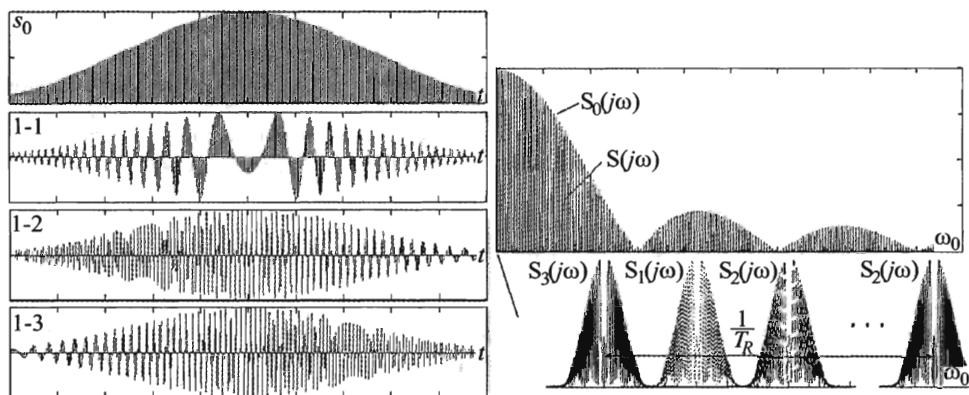


Рис. 3.27. Вид сигналов для системы, показанной на рис. 3.26; S_0 — излучаемый сигнал, цифрами обозначены сигналы, отраженные от центральной точки области обзора, во временной (слева) и спектральной (справа) областях

Таким образом, оптимизация пространственной конфигурации или вида используемых сигналов по критериям, связанным с величиной межканальных помех (3.42), может быть выполнена путем анализа введенного ранее поля дельта-запаздываний при учете ширины спектра излучаемых сигналов и их несущих частот.

Анализ (3.50) показывает, что для ортогональных в классическом понимании сигналов условие (3.45) может не выполняться из-за наличия частотного сдвига, вызванного движением носителей относительно поверхности. И, напротив, в многопозиционной системе с синтезированием апертуры антенны возможно обеспечение ортогональности сигналов путем выбора пространственного положения ее элементов даже при идентичности сигналов, излучаемых различными передатчиками.

Пример, иллюстрирующий ортогонализацию идентичных сигналов за счет выбора пространственной конфигурации, показан на рис. 3.26, 3.27.

3.6.2. Анализ взаимных пространственных функций неопределенности и возможностей уменьшения межканальных помех в МПРСА за счет выбора ансамблей сигналов. Уменьшить степень межканальных помех и, соответственно, увеличить отношение сигнал–помеха целесообразно за счет уменьшения $|\dot{\Psi}_{ijk}|$ путем выбора сигнальных групп или путем оптимизации пространственной конфигурации МПРСА. При выборе сигналов можно использовать разделение по виду комплексной огибающей (для дискретных систем — кодовое разделение), по несущей частоте и совместное по несущей частоте и комплексной огибающей (временное разделение обычно невозможно вследствие особенностей функционирования РСА).

Рассмотрим различные методы формирования ансамблей сигналов и сравним их эффективность для многопозиционных систем ДЗ путем анализа взаимных пространственных функций неопределенности.

При частотном разделении все передатчики (или, по крайней мере, те, диаграммы направленности которых пересекаются в пространстве) излучают сигналы

$$\dot{S}_k(t) = \dot{S}_0(t)e^{j\omega_{0k}t} \quad (3.50)$$

с различными несущими частотами ω_{0k} и одинаковой огибающей $\dot{S}_0(t)$.

Модуль функции неопределенности (ПФН) для группы сигналов (3.50)

$$\dot{\Psi}_{ijk} = \int_0^T e^{j(\omega_{0j} - \omega_{0k})t} \left[\int_D \dot{S}_{0ij}(t, \mathbf{r}) e^{-j\omega_{0j}\tau_{ij}(t, \mathbf{r})} d\mathbf{r} \int_D \dot{S}_{0ik}^* e^{j\omega_{0k}\tau_{ik}} d\mathbf{r} \right] dt \quad (3.51)$$

в соответствии с леммой Римана уменьшается при увеличении разности $\Delta\omega_{0kj} = \omega_{0k} - \omega_{0j}$.

Пример поведения пространственных функций неопределенности для сигналов с частотным разделением показан на рис. 3.28.

Из результатов моделирования, а также из анализа выражения для взаимной функции неопределенности видно, что чем больше разнос несущих частот, тем меньше величина межканальных помех.

Для большинства практических случаев необходимо обеспечить ограниченность полосы частот сигналов системы дистанционного зондирования. Получим условия ортогональности сигналов с учетом указанного ограничения.

Полезный сигнал, отраженный от всей зондируемой поверхности D , имеет спектр (в рамках аппроксимации финитными функциями), показанный на рис. 3.29. Здесь обозначены $E(t, r), E(j\omega)$ — огибающая на интервале синтеза апертуры и ее спектр; $\dot{S}_0(t, r), \dot{S}_0(j\omega)$ — комплексная огибающая и спектр одиночного импульса; $S(j\omega)$ — спектр сигнала, отраженного от зондируемой поверхности; $F_{D\min}, F_{D\max}$ — максимальная и минимальная частоты Доплера, обусловленные движением бистатической пары относительно поверхности (отсчитываются по максимальной ширине следа диаграммы направленности вдоль линий равного доплеровского сдвига частоты).

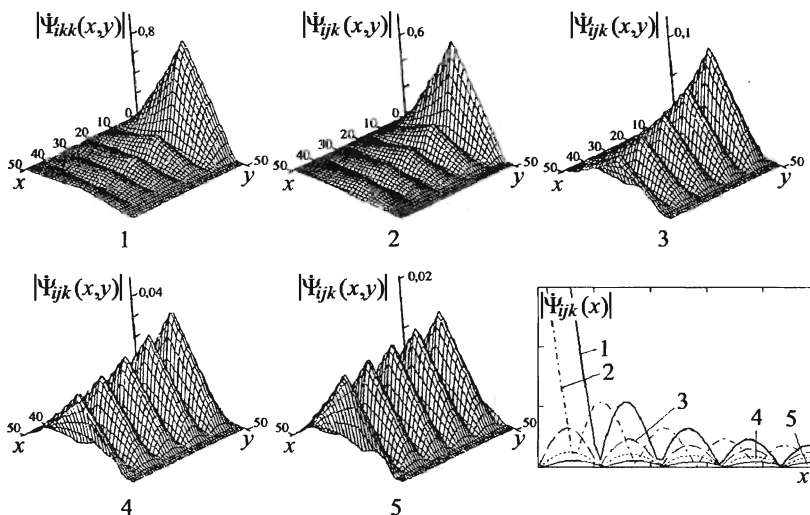


Рис. 3.28. Вид функций неопределенности $|\dot{\Psi}_{ijk}|$ для сигналов с различным значением $\Delta f_{0kj} = f_{0k} - f_{0j}$ (1 — $\Delta f_{0kj} = 0$, 2 — $\Delta f_{0kj} = 2/T_C$, 3 — $\Delta f_{0kj} = 5/T_C$, 4 — $\Delta f_{0kj} = 10/T_C$, 5 — $\Delta f_{0kj} = 50/T_C$, T_C — время синтеза апертуры)

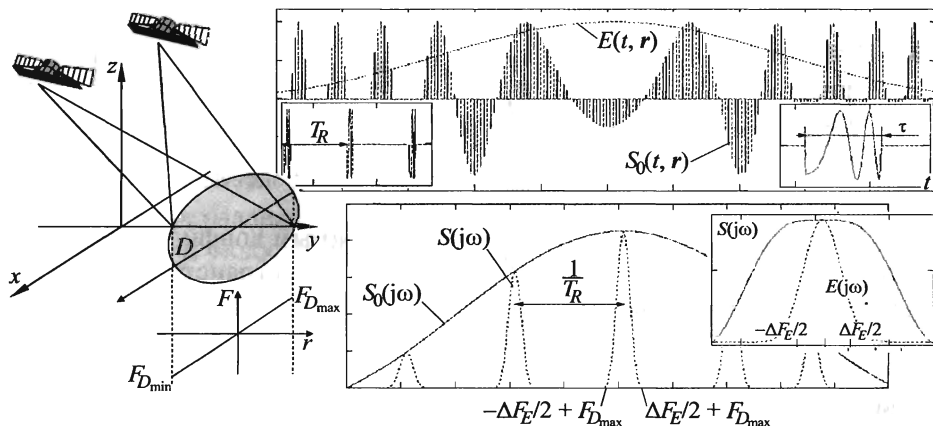


Рис. 3.29. Сигнал, отраженный от точки поверхности (вверху) и спектр сигнала, отраженного от области D (внизу)

Для обеспечения ортогональности $|\dot{\Psi}_{ijk}| = 0$ достаточно потребовать выполнения условия $\Delta f_{0kj} = f_{0k} - f_{0j} \geq \Delta F_0 + \Delta F_D$, где ΔF_0 — ширина спектра одиночного импульса, ΔF_D — размах частоты Доплера. Если $\frac{1}{T_R} \gg \Delta F_E + \Delta F_D$, можно уменьшить полосу частот, занимаемую МПРСА, за счет уменьшения Δf_{0kj} до величины $\Delta f_{0kj} \geq \Delta F_E + \Delta F_D$, рис. 3.30 [33].

Использование сложных огибающих одиночных импульсов и их последовательности позволяет уменьшить ширину спектра сигнала, отраженного от поверхности. Решение задач синтеза радиолокационных сигналов на основе детерминированных (для заданной пространственной конфигурации

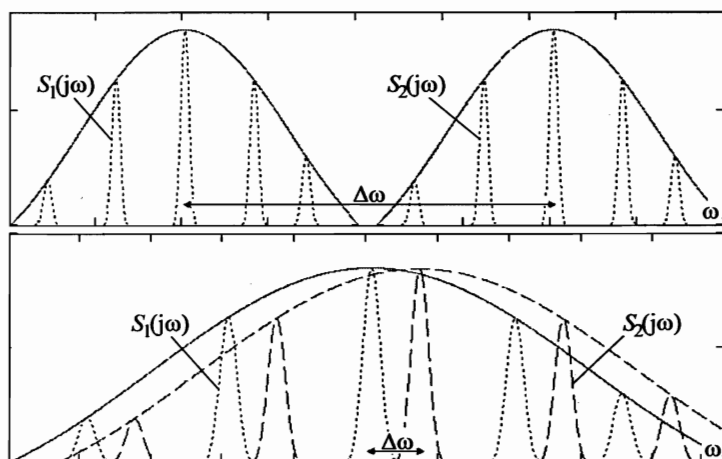
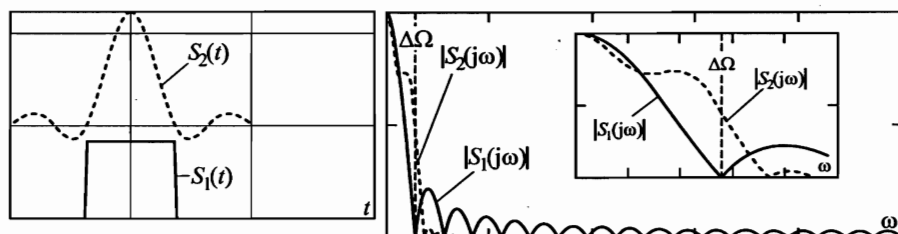
Рис. 3.30. Выбор несущих частот ω_{0k} , ω_{0j} 

Рис. 3.31. Пример сигналов с малой величиной боковых лепестков

и области обзора), усредненных (по всем возможным конфигурациям) либо вероятностных (для вероятностного описания пространственных конфигураций и области обзора) критериев является отдельным направлением, которое детально в работе не рассматривается.

Пример, показывающий возможность и целесообразность такой оптимизации вида сигналов для многопозиционных РСА с частотным разделением, приведен на рис. 3.31. Решение было получено путем аппроксимации требуемого спектра сигнала передатчика прямоугольной функцией. Результат обратного преобразования Фурье с ограничением длительности получившегося импульса позволяет существенно уменьшить отношение энергии сигнала, заключенного в заданной полосе $\Delta\Omega$, к энергии остальной части спектра — ΔE за счет расширения импульса во временной области. Для полученного таким образом сигнала S_2 , рис. 3.31, ΔE по отношению к ΔE сигнала S_1 (прямоугольному импульсу) увеличивается в 8,8 раз.

Используя различные оптимизационные задачи формирования огибающей одиночного сигнала, последовательности импульсов/диаграммы направленности антенны, можно существенно уменьшить ширину спектра по отношению к прямоугольным сигналам и, соответственно, требуемый для обеспечения $|\dot{\Psi}_{ijk}| = 0$ интервал Δf_{0kj} .

Таким образом, для частотного разделения каналов можно добиться (по крайней мере, в рамках финитной аппроксимации спектров) сколь угодно малого значения $|\dot{\Psi}_{ijk}|$ за счет увеличения $\Delta f_{0ik} = f_{0i} - f_{0k}$.

Для реальных (ограниченных во времени) сигналов помехи, вносимые из-за перекрытия спектров, при их обработке в РСА с ограниченной полосой пропускания $[-F \dots F]$ определяются суммой ошибок, возникающих из-за проникания мешающих сигналов и обрезания полезного:

$$E_{ik} = \int_{-F}^F \sum_{k \neq j} S_{ij}(f) df + \int_{f \notin [-F \dots F]} S_{ik}(f) df.$$

Разделение по виду комплексных огибающих (кодовое разделение для дискретных систем) осуществляется путем использования групп сигналов [35]

$$\dot{S}_k(t) = \dot{S}_{0k}(t)e^{j\omega_0 t} \quad (3.52)$$

с одинаковыми несущими частотами, но различными комплексными огибающими (кодowymi последовательностями).

Величина $\dot{\Psi}_{ijk}$ для сигналов (3.52) определяется выражением

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_{ijk} &= \int_0^T \int_D \dot{S}_{0ij}(t, \mathbf{r}) e^{-j\omega_0 \tau_{ij}(t, \mathbf{r})} d\mathbf{r} \int_D \dot{S}_{0ik}^*(t, \mathbf{r}) e^{j\omega_0 \tau_{ik}(t, \mathbf{r})} d\mathbf{r} dt = \\ &= \int_0^T \int_D \int_D S_{0ij}(t, \mathbf{r}) S_{0ik}^*(t, \mathbf{r}_1) e^{-j\omega_0 [\tau_{ij}(t, \mathbf{r}) - \tau_{ik}(t, \mathbf{r}_1)]} dt d\mathbf{r} d\mathbf{r}_1. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Данный вид разделения целесообразно использовать для кодовых последовательностей, модулированных по амплитуде, фазе или частоте. Аналитический либо численный выбор различных кодовых последовательностей позволяет оптимизировать группы сигналов по различным критериям [36].

Для такого вида разделения величина межканальной помеховой компоненты не может быть сколь угодно уменьшена исключительно за счет выбора комплексных огибающих, что делает нецелесообразным его применение в многоканальных РСА [35].

Преимуществом ансамбля (3.52) является возможность получения узкой полосы частот, занимаемой сигналами системы дистанционного зондирования, при небольших величинах взаимной помеховой составляющей выходного эффекта относительно сигналов без кодового разделения.

Разделение по несущей частоте и комплексной огибающей (кодочастотное разделение для дискретных систем) осуществляется путем использования сигналов вида $\dot{S}_k(t) = \dot{S}_{0k}(t)e^{j\omega_{0k} t}$. Взаимная корреляционная функция определяется выражением

$$\Psi_{ijk} = \int_0^T e^{j(\omega_{0j} - \omega_{0k})t} \left[\int_D S_{0ij}(t, \mathbf{r}) e^{-j\omega_{0j} \tau_{ij}(t, \mathbf{r})} d\mathbf{r} \int_D S_{0ik}(t, \mathbf{r}) e^{j\omega_{0k} \tau_{ik}(t, \mathbf{r})} d\mathbf{r} \right] dt. \quad (3.54)$$

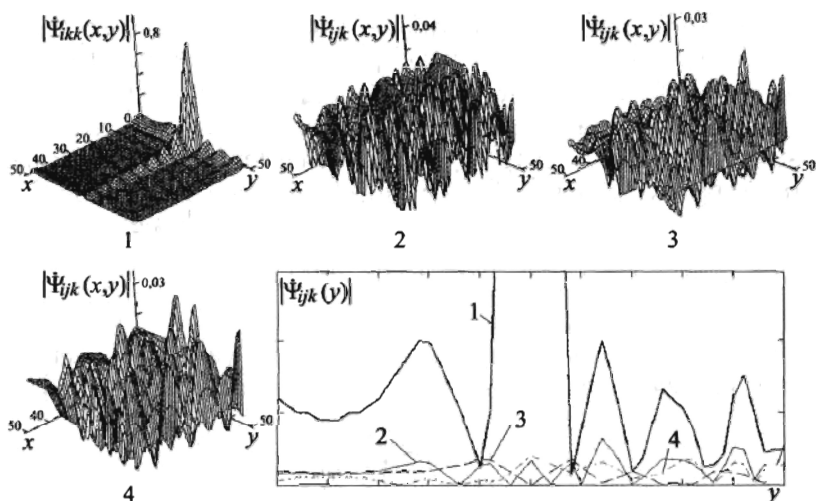


Рис. 3.32. Вид функций неопределенности $|\Psi_{ijk}|$ для ФМ сигналов

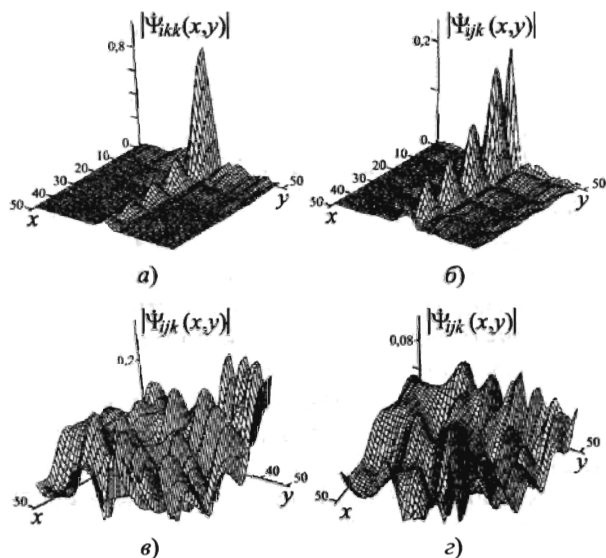


Рис. 3.33. Пространственные функции неопределенности ФМ сигнала (1) при частотном (2), кодовом (3) и кодо-частотном разделении (4)

Такой вид сигналов позволяет более эффективно уменьшить межканальные помехи, чем кодовое разделение, и в то же время сузить занимаемую полосу частот по отношению к частотному разделению за счет частичного перекрытия спектров при сохранении малых значений $|\Psi_{ijk}|$.

Пример поведения взаимных пространственных функций неопределенности для ФМ сигналов (длительность 64 символа) при кодовом и кодо-частотном разделении показан на рис. 3.32, 3.33, соответственно.

Таким образом, по результатам анализа можно сделать вывод о том, что выбор групп сигналов в многопозиционных системах дистанционного зондирования с синтезированием апертуры антенны является задачей, при решении которой необходимо учитывать пространственное расположение носителей и характер их взаимного движения, а также ограничения на полосу частот, занимаемую сигналами.

В качестве критериев при выборе ансамбля сигналов необходимо использовать взаимные пространственные функции неопределенности либо их преобразования (например, интегральное значение модуля в области обзора), а также величину сигнал–помеха с учетом межканальных помех.

Для эффективного уменьшения величины межканальных помех при сохранении малой полосы частот, занимаемой сигналами многопозиционной системы, рекомендуется использовать кодо-частотное разделение.

3.7. Исследование особенностей применения шумоподобных сигналов в системах дистанционного зондирования

Исследование целесообразности и возможностей использования шумоподобных сигналов в системах ДЗ, в том числе и в многопозиционных с синтезом апертуры, представлена в [35, 37, 40–44]. На основании аналитического определения отношения сигнал–помеха, а также обширного статистического моделирования показана перспективность использования шумоподобных сигналов в многопозиционных, бистатистических и моностатистических РСА. Показаны особенности использования шумоподобных сигналов и, в частности, возможность увеличения интервалов однозначности при формировании РЛИ, возможность использования сигнала системы ДЗ для передачи информации.

К современным системам дистанционного зондирования предъявляются высокие требования относительно качества получаемых оценок и точности интерпретации радиолокационных данных. Одним из основных параметров, определяющих качественные характеристики работы систем ДЗ, является форма радиолокационного сигнала.

Радиолокационные сигналы (так же как и сигналы, используемые в произвольной радиотехнической системе) можно разделить на детерминированные и случайные. Случайными сигналами назовем такие функции времени, которые принимают с некоторой вероятностью конкретный вид (реализацию) из множества возможных (пространства значений). Значение такой функции в произвольный момент времени представляет собой случайную величину.

Использование случайных сигналов, особенно в многопозиционных радиолокационных системах и системах с синтезированием апертуры антенны, затруднено вследствие особенностей обработки. По этой причине для решения задач дистанционного зондирования целесообразно применять

определенные реализации случайных процессов с заданными функционалами плотности вероятности (сюда же отнесем и вектора, полученные детерминированными методами, но обладающие свойствами шума), — псевдослучайные последовательности (ПСП).

Для ПСП и для соответствующего ей шумоподобного сигнала можно ввести характеристики, которые используются для описания случайных процессов: нестационарность/стационарность (эргодичность), плотность вероятности, характеристическая функция, моменты (центрированные) N -го порядка, кумулянты и т.д. Для рассматриваемых задач наиболее существенными являются спектр ПСП (спектральная плотность мощности) и соответствующий ему ШПС, автокорреляционная функция в параметрах: время задержки Δt — смещение по частоте ΔF , а для многопозиционных систем — взаимокорреляционная функция и её характеристики.

Шумоподобный сигнал $S(t)$ может быть модулирован по амплитуде, частоте или фазе заданной (порождающей) псевдослучайной последовательности $P(t)$: $\dot{S}(t) = P(t) \exp \{j\omega_0 t\}$, $\dot{S}(t) = A_0 \exp \{j(\omega_0 + F[P(t)])t\}$, $\dot{S}(t) = A_0 \exp \{j(\omega_0 t + \varphi[P(t)])\}$. Возможна также смешанная амплитудно-частотная, амплитудно-фазовая модуляция: $\dot{S}(t) = P_0(t) \exp \{j(\omega_0 + F[P_1(t)])t\}$.

Спектры шумоподобных сигналов достаточно хорошо изучены для различных видов модуляции в случае периодических и непериодических ПСП [38]. По этой причине в данной работе лишь приведен пример поведения случайной последовательности и соответствующих ей шумоподобных сигналов и их спектров при амплитудной, частотной и фазовой модуляции, рис. 3.34.

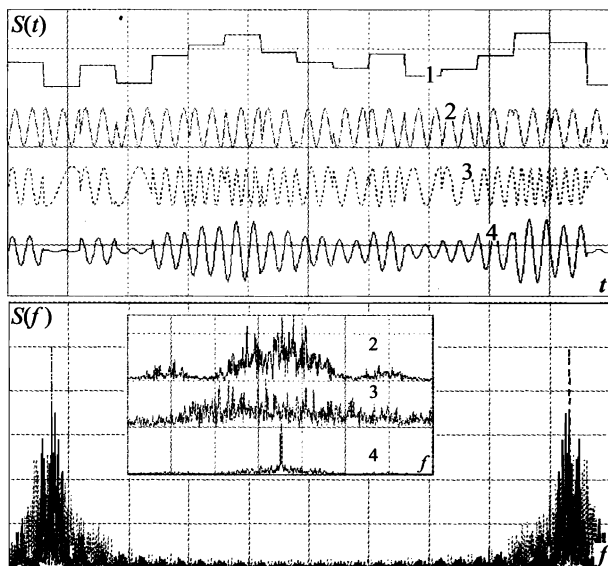


Рис. 3.34. Псевдослучайная последовательность (1), соответствующие ей ШПС и их спектры для случаев фазовой (2), частотной (3) и амплитудной (4) модуляции

Выбор порождающей последовательности и вида модуляции при получении ШПС необходимо осуществлять с учетом вида автокорреляционных (для моностатических) и взаимокорреляционных (для многопозиционных систем) функций, ширины спектра сигнала, особенностей аппаратной реализации схем обработки и других факторов.

При выборе исходной ПСП необходимо учесть, что для цифровых и аналоговых псевдослучайных последовательностей можно найти такие, у которых потенциальные возможности по выбранным критериям (например, по максимальному уровню боковых лепестков) лучше, чем для бинарных (двузначных) ПСП. Однако увеличение числа дискрет модулирующей последовательности связано с усложнением аппаратной реализации систем обработки. По этой причине наибольшее распространение получили именно бинарные последовательности. Свойства таких порождающих ПСП (коды Баркера, М-последовательности, последовательности Лежандра, Якоби, коды Риды-Мюллера, Стиффлера, Диджилок и другие) достаточно хорошо изучены [38, 39]. По этой причине конкретные последовательности и вид модуляции рассматриваются только при моделировании, а большинство выводов и аналитические выражения получены независимо от вида шумоподобного сигнала.

При выборе закона модуляции необходимо учитывать простоту аппаратной реализации системы ДЗ, помехоустойчивость и т.д. Для многопозиционных систем дополнительно необходимо выбирать механизм разделения между различными пунктами излучения (кодовое, частотное, кодово-частотное), характеристики которого существенно влияют на качество оценки электрофизических параметров поверхности. Наибольшее распространение получили фазоманипулированные (ФМ) шумоподобные сигналы (ФМШПС) с изменением фазы на π в зависимости от значения символа порождающей ПСП. Использование именно такого вида манипуляции объясняется тем, что для двоичных сигналов наилучшее значение коэффициента взаимной корреляции получается при ФМ на величину π (сигналы при этом являются противоположными). Другое важное преимущество ФМ-сигналов состоит в простоте их формирования, а также в постоянстве амплитуды их огибающей, что позволяет при сохранении требуемых значений энергетического отношения сигнал-помеха существенно уменьшить величину пик-фактора.

3.7.1. Исследование качественных показателей формирования РЛИ в обзорных РЛС с шумоподобными сигналами. Рассмотрим одиночную РЛС, облучающую участок поверхности $[R_{\min} R_{\max}]$ сигналом, представляющим собой последовательность немодулированных импульсов с прямоугольными огибающими длительностью τ и периодом повторения T_R (далее простой импульсный сигнал). Для упрощения аппаратной реализации алгоритмов обработки желательно помимо выполнения условия однозначности $t_{d\max} + \tau - t_{d\min} \leq T_R$, где $t_{d\max}$, $t_{d\min}$ — максимальное и минимальное время задержки, потребовать выполнения условия несовпадения во времени моментов излучения и приема. Функция неопределенности рассматриваемой РЛС хорошо известна и представляет

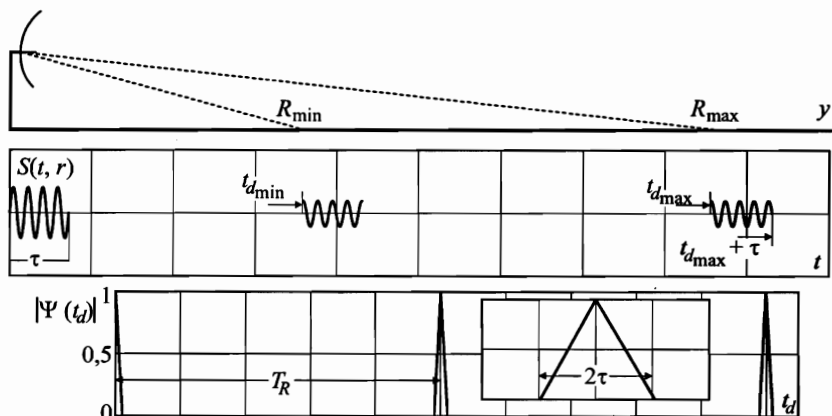


Рис. 3.35. Обзорная РЛС

собой последовательность ФН отдельных импульсов, сдвинутых на интервал $\Delta R_R (T_R)$, рис. 3.35.

Пусть в рассмотренной системе вместо простого радиолокационного сигнала излучается периодический шумоподобный сигнал с периодом T_R . Необходимо отметить, что если интервал корреляции ПСП (либо длительность одиночного символа при манипуляции) равен τ , то условие однозначности измерения по дальности не изменяется. Однако, если длительность ПСП превышает минимальное время задержки импульса (с учетом центрирования на время повторения T_R) необходимо предусмотреть механизм развязки сигнала в приеме-передающем тракте.

Сравним результаты оптимальной обработки для функционально-детерминированной модели отраженного от поверхности сигнала.

Уравнение наблюдения $u(t)$ запишем в виде аддитивной смеси отраженного от поверхности сигнала и помехи $n(t)$, которую будем полагать нормальным стационарным процессом с равномерной спектральной плотностью мощности и нулевым средним.

При оценке комплексного коэффициента отражения оптимальным выходным эффектом является результат согласованной фильтрации, который для РЛС с простым импульсным сигналом может быть представлен

$$\text{в виде суммы помеховой } \dot{Y}_N(\mathbf{r}_1) = \int_0^T n(t) \dot{S}_R^*(t, \mathbf{r}_1) dt \text{ и сигнальной } \dot{Y}_S(\mathbf{r}_1) = \\ = \frac{1}{2} \int_D \int_0^T \dot{F}(\mathbf{r}) \dot{S}(t, \mathbf{r}) \dot{S}_R^*(t, \mathbf{r}_1) dt d\mathbf{r} \text{ компонент [40].}$$

Для системы с шумоподобным сигналом выделим дополнительно интерференционную составляющую путем разделения пространственной функции неопределенности $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ (ПФН) на сигнальную $\dot{\Psi}_S$ (главный максимум) и интерференционную $\dot{\Psi}_I$ (боковые лепестки) составляющие $\dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \dot{\Psi}_I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) + \dot{\Psi}_S(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$, либо разделяя область определения $\dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ на сигнальную D' и интерференционную D'' области. С учетом этого

выражение для сигнальной части выходного эффекта будет иметь вид

$$\dot{Y}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{D'} \dot{F}(\mathbf{r}) \dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int_{D''} \dot{F}(\mathbf{r}) \dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}.$$

Смещение оценки для функционально-детерминированной модели сигнала определяется характером поведения боковых лепестков функции неопределенности и комплексного коэффициента отражения. Для большинства практически важных случаев можно полагать, что оценка является несмещенной [203]. Однако, если комплексный коэффициент отражения в пределах области обзора является медленно изменяющейся функцией, для несмещенности оценки необходимо обеспечить равенство нулю среднего значения боковых лепестков ПФН.

Оценим изменение отношения сигнал–помеха $\mu(\mathbf{r}_1)$ при использовании ШПС в рассматриваемой РЛС. Для простого радиоимпульса $\mu(\mathbf{r}_1)$ определяется выражением

$$\frac{\langle |Y_S(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle}{\langle |Y_N(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle}, \quad \text{где} \quad \langle |Y_S(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle = K^2 E_S E_R \int_D \sigma^0(\mathbf{r}) |\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}, \quad \langle |Y_N(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle = \frac{N_0}{2} \int_0^T |S_R(t, \mathbf{r}_1)|^2 dt = N_0 E_R.$$

Используя выбранную модель шума и упрощенную электродинамическую модель поверхности [41], несложно убедиться, что отношение сигнал–помеха будет иметь вид

$$\mu(\mathbf{r}_1) = \frac{K^2 E_S}{N_0} \int_D \sigma^0(\mathbf{r}) |\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r} \cong K^2 \frac{E_S}{N_0} \sigma_A^0(\mathbf{r}_1) \Delta Y, \quad (3.55)$$

где используются понятия нормированной функции неопределенности $\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$, энергии принимаемого и опорного сигналов E_S , E_R , коэффициента затухания K и удельной эффективной поверхности рассеяния $\sigma^0(\mathbf{r})$, среднее значение удельной эффективной поверхности рассеяния σ_A^0 и размер элемента разрешения ΔY .

При использовании шумоподобных сигналов с учетом разделения выходного эффекта на сигнальную, помеховую и интерференционную составляющие отношение сигнал–помеха будет

$$\mu(\mathbf{r}_1) = \frac{\langle |Y_S(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle}{\langle |Y_N(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle + \langle |Y_I(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle}, \quad (3.56)$$

где значения $\langle |Y_S(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle$, $\langle |Y_N(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle$ и $\langle |Y_I(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle$ определяются выражениями:

$$\langle |Y_S(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle = K^2 E_S E_R \int_{D'} \sigma^0(\mathbf{r}) |\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}, \quad (3.57)$$

$$\langle |\dot{Y}_N(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle = \frac{N_0}{2} \int_0^T |S_R(t, \mathbf{r}_1)|^2 dt = N_0 E_R, \quad (3.58)$$

$$\langle |Y_I(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle = \left\langle \left| \frac{1}{2} K \int_{D''} \dot{F}(\mathbf{r}) \dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r} \right|^2 \right\rangle = K^2 E_S E_R \int_{D''} \sigma^0(\mathbf{r}) |\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}. \quad (3.59)$$

Таким образом, величину $\mu(\mathbf{r}_1)$ можно записать в виде

$$\mu(\mathbf{r}_1) = K^2 \frac{E_S}{N_0} \sigma_A^0(\mathbf{r}_1) \Delta Y \frac{1}{1 + \frac{E_S}{N_0} K^2 \int_{D''} \sigma^0(\mathbf{r}) |\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}}.$$

Для дальнейшего сравнения радиолокационных систем положим, что при переходе от простого сигнала к шумоподобному энергия сигнала и разрешающая способность в пределах главного лепестка сохраняются (что соответствует, например, использованию фазовой манипуляции с длительностью символа равной длительности одиночного радиоимпульса).

Обозначим $SNR(\mathbf{r}_1)$ отношение сигнал-помеха в обзорной РЛС для простого импульсного сигнала, при этом (3.59) можно записать так

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{r}_1) &= \frac{K^2 \frac{E_S}{N_0} \sigma_A^0(\mathbf{r}_1) \Delta Y}{1 + K^2 \frac{E_S}{N_0} \sigma_A^0(\mathbf{r}_1) \Delta Y \frac{\int_{D''} \sigma^0(\mathbf{r}) |\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}}{\int_{D'} \sigma^0(\mathbf{r}) |\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}}} = \\ &= SNR(\mathbf{r}_1) \left[\frac{1}{1 + SNR(\mathbf{r}_1) \xi(\mathbf{r}_1)} \right]. \quad (3.60) \end{aligned}$$

В случае, когда $\sigma^0(\mathbf{r}) = \sigma^0$ величина $\xi(\mathbf{r}_1)$ будет

$$\xi(\mathbf{r}_1) = \frac{\int_{D''} \sigma^0(\mathbf{r}) |\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}}{\int_{D'} \sigma^0(\mathbf{r}) |\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}} = \frac{\chi(D - 2\Delta Y)}{\Delta Y},$$

где χ — среднеквадратический уровень боковых лепестков, $\int_{D''} |\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r} = \chi D''$, величина $\xi \approx \chi N$.

Для шумоподобных сигналов с большой базой в случае, когда период повторения ПСП выбирается исходя из выполнения условия однозначности, $\tau_{\max} + \tau - \tau_{\min} = T_R$.

Таким образом, отношение сигнал-помеха для обзорной РЛС в случае использования шумоподобного сигнала существенно зависит от среднеквадратического уровня боковых лепестков. Высокий уровень боковых ле-

пестков неприемлем не только по причине уменьшения отношения сигнал-помеха по сравнению с сигналом конечной длительности, но и по причине ухудшения вероятностных характеристик интерпретации изображений (например, при обнаружении малоразмерных и протяженных объектов).

Пусть РЛС восстанавливает удельную эффективную поверхность рассеяния (УЭПР) по результатам согласованной фильтрации в соответствии с выражением $\hat{\sigma}^0(\mathbf{r}_1) = \langle |\hat{F}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle = \langle \hat{F}(\mathbf{r}_1) \hat{F}^*(\mathbf{r}_1) \rangle$. Найдем характеристики таких оценок для различных моделей сигнала.

Для последовательности немодулированных радиолокационных импульсов оценка УЭПР

$$\hat{\sigma}^0(\mathbf{r}_1) = K^2 E_S E_R \int_D \sigma^0(\mathbf{r}) |\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r} + N_0 E_R \quad (3.61)$$

будет смещена на величину $N_0 E_R$.

Для шумоподобного сигнала с учетом разделения оптимального выходного эффекта на сигнальную, интерференционную и помеховую составляющие значение оценки удельной эффективной поверхности рассеяния

$$\hat{\sigma}^0(\mathbf{r}_1) = K^2 E_S E_R \int_{D'} \sigma^0(\mathbf{r}) |\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r} + K^2 E_S E_R \int_{D''} \sigma^0(\mathbf{r}) |\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r} + N_0 E_R, \quad (3.62)$$

дополнительно смещено на величину $\sigma_I^0(\mathbf{r}_1) = K^2 E_S E_R \int_{D''} \sigma^0(\mathbf{r}) |\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}$

В случае когда $\sigma^0(\mathbf{r}) = \sigma_D^0$, $\sigma_I^0(\mathbf{r}_1) = K^2 E_S E_R \sigma_D^0 D'' \chi$, величину смещения несложно оценить, зная характеристики опорного и излученного сигналов, путем измерения среднего квадрата мощности входного сигнала.

Для сравнения результатов формирования радиолокационных изображений при использовании различных сигналов было выполнено статистическое моделирование первичной и вторичной обработки сигналов в обзорных радиолокационных системах. При этом энергии простого импульсного и шумоподобного сигналов выбирались равными, ШПС представляет собой фазоманипулированную периодическую последовательность (период повторения равен периоду повторения для простого импульсного сигнала), длительности одиночного символа ПСП и одиночного радиоимпульса совпадали. Псевдослучайная последовательность формировалась как нелинейное преобразование равномерно распределенного стационарного случайного процесса. Вид сигналов и соответствующих им функций неопределенности в дальномерной плоскости показан на рис. 3.36.

При моделировании алгоритмов первичной и вторичной обработки используется стохастическая модель поверхности [41], причем интервал характерной корреляции полагается намного меньше разрешающей способности. Поведение удельной эффективной поверхности рассеяния и соответствующей ей модели комплексного коэффициента отражения, результатов оценки комплексного коэффициента отражения и удельной эффективной

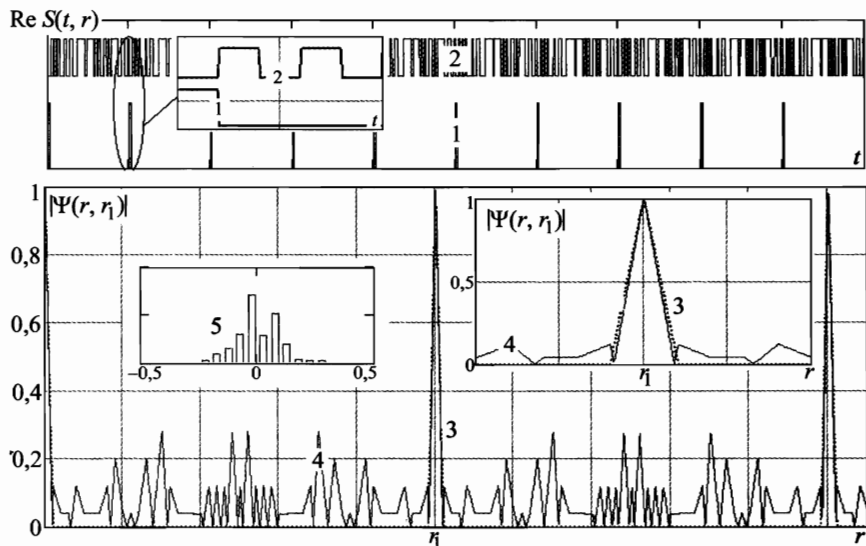


Рис. 3.36. Вид огибающих сигналов для радиопульса (1), ШПС (2) и соответствующих им пространственных функций неопределенности в дальномерной плоскости (3), (4), а также гистограмма распределения уровней боковых лепестков (5)

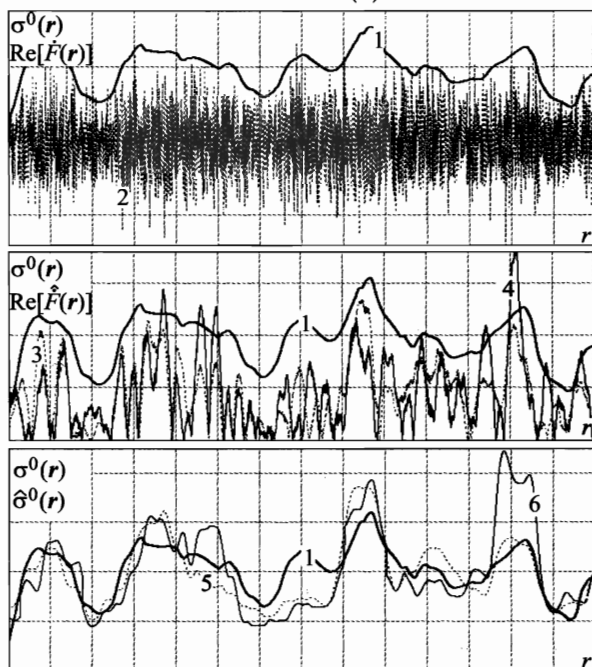


Рис. 3.37. Результаты оценки комплексного коэффициента рассеяния (2) при использовании простого радиолокационного сигнала (3) и ШПС (4) и оценка УЭПР (1) для ШПС (6) и радиопульса (5)

поверхности рассеяния (после этапов первичной и вторичной обработки) для случаев, когда используются радиопульсы с прямоугольными огибающими и шумоподобный сигнал, показаны на рис. 3.36.

По результатам моделирования установлено, что использование шумоподобных сигналов при картографировании радиолокационными системами поверхности, представимой стохастической моделью, в целом практически не отличается от оценки, полученной при использовании простых радиопульсов.

Однако при использовании шумоподобных сигналов возможно существенное искажение в случае, когда согласованные изменения УЭПР попадают в область с высоким уровнем боковых лепестков, рис. 3.37. Данный факт препятствует применению таких сигналов при обнаружении мало-размерных целей, так как при наличии “сильных” отражателей, расположенных в области “высоких” боковых лепестков существенно ухудшаются характеристики обнаружителя.

3.7.2. Сравнение пространственных функций неопределенности и качества формирования радиолокационных изображений в РСА с различными видами сигналов. В отличие от неподвижной обзорной РЛС в системе с синтезированием апертуры разрешение по пространственным координатам соответствует разрешению в плоскости (τ, F) , где τ — время запаздывания, F — доплеровский сдвиг частоты.

Для РСА вид функций неопределенности для различных видов излучаемых сигналов достаточно хорошо изучен [7–10]. В рамках данной работы приведен вид ФН для ШПС и простого импульсного сигнала в моностатической РСА бокового обзора, рис. 3.38, 3.39.

Для дальнейшего исследования отметим лишь тот факт, что для нормированной ФН основной принцип неопределенности в радиолокации

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\Psi}(\tau, F)|^2 d\tau dF = \text{const} \quad \text{для РСА, как системы с}$$

пространственно-временной обработкой, может быть представлен в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\Psi}(x, y)|^2 dx dy = \text{const}.$$

Введем отношение сигнал–помеха μ_{SI} так

$$\mu_{SI}[R/\dot{F}(\mathbf{r})] = \frac{\left\langle \left| \frac{1}{2} K \int_R \dot{F}(\mathbf{r}) \dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r} \right|^2 \right\rangle}{\left\langle \left| \frac{1}{2} K \int_{D-R} \dot{F}(\mathbf{r}) \dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r} \right|^2 \right\rangle} = \frac{\langle |\dot{Y}_S[R/\dot{F}(\mathbf{r})]|^2 \rangle}{\langle |\dot{Y}_I[R/\dot{F}(\mathbf{r})]|^2 \rangle}, \quad (3.63)$$

где R — некоторая окрестность точки абсолютного максимума функции неопределенности; $\langle |\dot{Y}_I[R/\dot{F}(\mathbf{r})]|^2 \rangle$ — значение УЭПР, полученное по боковым лепесткам; $\langle |\dot{Y}_S[R/\dot{F}(\mathbf{r})]|^2 \rangle$ — по главному максимуму.

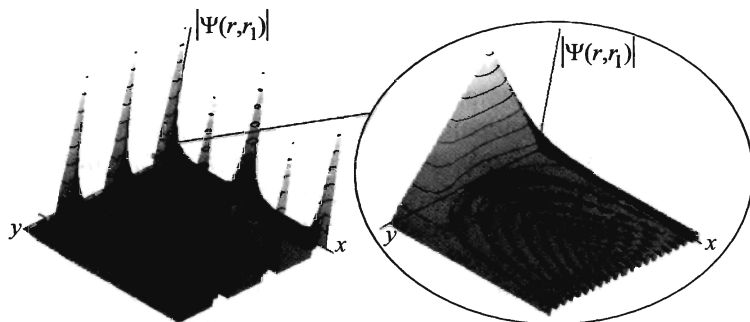


Рис. 3.38. Функция неопределенности для простого радиолокационного сигнала в системе с синтезированием апертуры антенны

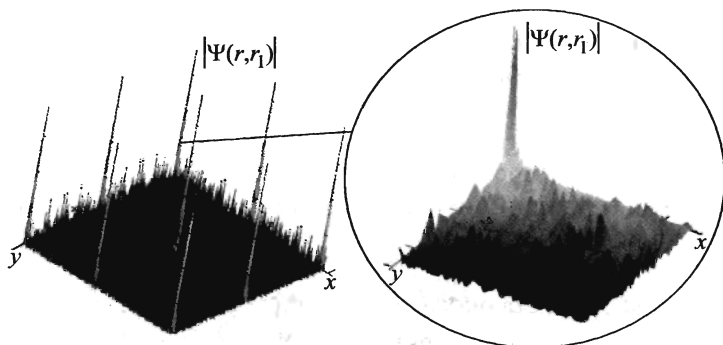


Рис. 3.39. Функция неопределенности для шумоподобного сигнала в системе с синтезированием апертуры антенны

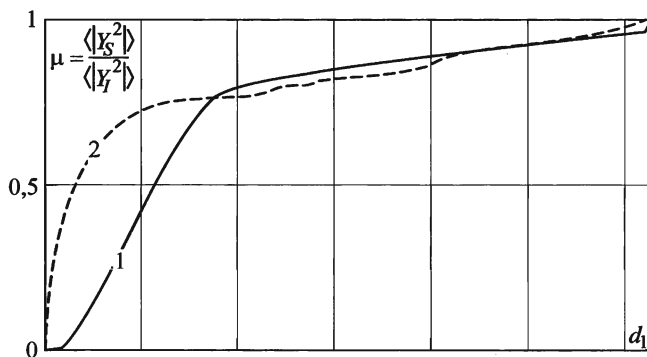


Рис. 3.40. Отношение сигнал–помеха μ_{SI} для различных сигналов в РСА. 1 — для простого импульсного сигнала, 2 — для шумоподобного сигнала

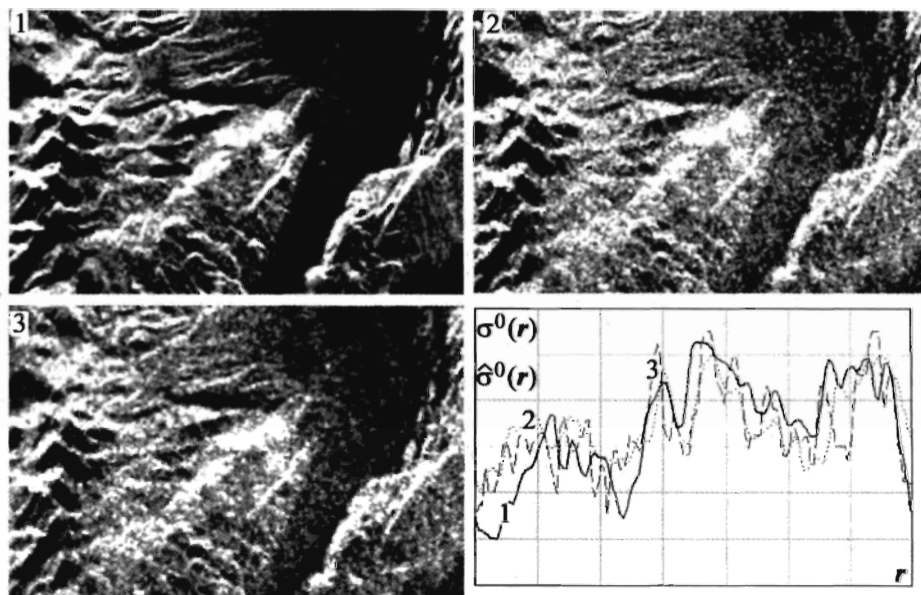


Рис. 3.41. Результаты формирования радиолокационных изображений в РСА. 1 — поведение УЭПР, 2 — результат вторичной обработки в РСА с простым импульсным сигналом, 3 — результат вторичной обработки в РСА с шумоподобным сигналом

Вследствие большей концентрированности пространственной функции неопределенности вблизи главного максимума отношение сигнал–помеха μ_{SI} в общем случае меньше, чем для ШПС. Пример поведения отношения $\frac{\langle |\dot{Y}_S[R/\dot{F}(\mathbf{r})]|^2 \rangle}{\langle |\dot{Y}_I[R/\dot{F}(\mathbf{r})]|^2 \rangle}$ для сигналов, которые были исследованы в обзорной РЛС, показан на рис. 3.40 [42].

Результаты моделирования алгоритмов первичной и вторичной обработки в моностатической РСА для различных видов излучаемых сигналов в рамках стохастических моделей поверхности приведены на рис. 3.41. При этом полагалось, что энергии простого импульсного сигнала и ШПС равны, ШПС представляет собой фазоманипулированную периодическую последовательность, период повторения равен периоду повторения простого импульсного сигнала, длительности одиночного символа ПСП и одиночного радиоимпульса совпадают, условия однозначного отсчета выполняются.

Таким образом, в моностатических и бистатических системах с синтезированием апертуры антенны применение шумоподобных сигналов не приводит к ухудшению характеристик оценок и качества интерпретации полученных радиолокационных изображений [43]. Основной недостаток — некоторое усложнение аппаратуры обработки.

3.7.3. Использование ШПС в МПРСА. Уравнение наблюдения для произвольного i -го приемника запишем в виде

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{\text{Tr}} \text{Re} \int_D \dot{F}_{ij}(\mathbf{r}) \dot{S}_j(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r} + n_i(t),$$

где Tr — число передатчиков в составе МПРСА.

При обработке согласованным фильтром сигнала k -го передатчика в i -ом приемнике выходной эффект

$$\dot{Y}_{ik}(\mathbf{r}_1) = \dot{Y}_{Sik}(\mathbf{r}_1) + \dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1) + \dot{Y}_{Nik}(\mathbf{r}_1)$$

можно представить в виде суммы сигнальной

$$\dot{Y}_{Sik}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{2} \int_D \dot{F}_{ik}(\mathbf{r}) \int_0^T \dot{S}_{ik}(t, \mathbf{r}) \dot{S}_{Rik}^*(t, \mathbf{r}_1) dt d\mathbf{r},$$

помеховой

$$\dot{Y}_{Nik}(\mathbf{r}_1) = \int_0^T n_i(t) \dot{S}_{Rik}^*(t, \mathbf{r}_1) dt$$

и межканальной помеховой

$$\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k}^{\text{Tr}} \int_D \dot{F}_{ij}(\mathbf{r}) \int_0^T \dot{S}_{ij}(t, \mathbf{r}) \dot{S}_{Rik}^*(t, \mathbf{r}_1) dt d\mathbf{r}$$

компонент.

Для многопозиционной системы отношение сигнал–помеха при обработке сигнала в бистатической паре i – k будет

$$\mu_{ik}(\mathbf{r}_1) = \frac{\langle |\dot{Y}_{Sik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle}{\langle |\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle + \langle |\dot{Y}_{Nik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle},$$

где

$$\langle |\dot{Y}_{Sik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle = K_{ik}^2 E_{ik} E_{Rik} \int_D \sigma_{ik}^0(\mathbf{r}) |\tilde{\Psi}_{ikk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r},$$

$$\langle |\dot{Y}_{Nik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle = N_{0i} E_{Rik};$$

$$\langle |\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\sum_{j \neq k}^{\text{Tr}} \sum_{m \neq k}^{\text{Tr}} \int_D \int_D \langle \dot{F}_{ij}(\mathbf{r}) \dot{F}_{im}^*(\mathbf{r}') \rangle \langle \dot{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \dot{\Psi}_{imk}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) \rangle d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \right],$$

$$\dot{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \int_0^T \dot{S}_{ij}(t, \mathbf{r}) \dot{S}_{Rik}^*(t, \mathbf{r}_1) dt, \quad \dot{\Psi}_{ikk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \int_0^T \dot{S}_{ik}(t, \mathbf{r}) \dot{S}_{Rik}^*(t, \mathbf{r}_1) dt.$$

Величина $\langle |\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle$ при использовании упрощенной модели поверхности может быть записана в виде

$$\langle |\dot{Y}_{ICik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle = \frac{1}{4} \left[\sum_{j \neq k}^m \int_D \sigma_{ij}^0(\mathbf{r}) < |\dot{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 > d\mathbf{r} \right],$$

где $\langle |\dot{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 \rangle$ — среднеквадратическое значение взаимной пространственной функции неопределенности (знак статистического усреднения используется при стохастической структуре МПРСА, учете случайных взаимных перемещений элементов, рассогласования в синхронизации и др.); $\sigma_{ij}^0(\mathbf{r})$ — значение УЭПР в бистатической паре (i -й приемник — j -й передатчик).

С учетом этих выражений отношение сигнал–помеха запишем так:

$$\mu_{ik}(\mathbf{r}_1) = \frac{K_{ik}^2 E_{ik} E_{Rik} \int_D \sigma_{ik}^0(\mathbf{r}) \langle |\tilde{\Psi}_{ikk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 \rangle d\mathbf{r}}{\sum_{j \neq k} K_{ij}^2 E_{ij} E_{Rik} \int_D \sigma_{ij}^0(\mathbf{r}) < |\tilde{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 > d\mathbf{r} + N_{0i} E_{Rik}},$$

или

$$\mu_{ik}(\mathbf{r}_1) = SNR_{ik}(\mathbf{r}_1) \frac{1}{1 + SNR_{ik}(\mathbf{r}_1) \frac{\sum_{j \neq k} \frac{K_{ij}^2}{K_{ik}^2} \frac{E_{ij}}{E_{ik}} \int_D \sigma_{ij}^0(\mathbf{r}) \langle |\tilde{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 \rangle d\mathbf{r}}{\int_D \sigma_{ik}^0(\mathbf{r}) \langle |\tilde{\Psi}_{ikk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 \rangle d\mathbf{r}}}, \quad (3.64)$$

где $SNR_{ik}(\mathbf{r}_1)$ отношение сигнал–помеха в бистатической РСА (i -й приемник — k -й передатчик), определяемое выражением

$$SNR_{ik}(\mathbf{r}_1) = \frac{\langle |\dot{Y}_{Sik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle}{\langle |\dot{Y}_{Nik}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle} = K_{ik}^2 \frac{E_{ik}}{N_{0i}} \int_D \sigma_{ik}^0(\mathbf{r}) |\tilde{\Psi}_{ikk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}.$$

После ряда преобразований, полагая, что УЭПР является факторизуемой функцией относительно параметров наблюдения $\sigma_{ij}^0(\mathbf{r}) = \sigma^0(\mathbf{r}) \alpha_{ij}(\mathbf{r})$, при аппроксимации $\sigma^0(\mathbf{r})$ ее средним значением, а также при равенстве энергии излучаемых сигналов получим следующее выражение для оценки

сигнал–помеха в многопозиционной системе [37]:

$$\mu_{ik}(\mathbf{r}_1) \cong SNR_{ik}(\mathbf{r}_1) \frac{1}{1 + \left[\frac{X}{\Delta X} \frac{Y}{\Delta Y} \sum_{j \neq k} K_{ijk}^2 \alpha_{ijkD} \chi_{ijk} \right] SNR_{ik}(\mathbf{r}_1)}, \quad (3.65)$$

где $K_{ijk}^2 = \frac{K_{ij}^2}{K_{ik}^2}$ — отношение, зависящее от расстояний, проходимых сигналом в бистатистической системе; $\alpha_{ijkD} = \left\langle \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ik}} \right\rangle_D$ — среднее значение по области обзора коэффициента влияния геометрии наблюдения (углов визирования); χ_{ijk} — среднеквадратический уровень боковых лепестков взаимной корреляционной функции в пространственных координатах.

В простейшем случае для бинарной последовательности длины N оценку можно осуществлять в соответствии с выражением

$$\mu_{ik}(\mathbf{r}_1) \cong SNR_{ik}(\mathbf{r}_1) \frac{1}{1 + \left[N^2 \sum_{j \neq k} K_{ijk}^2 \alpha_{ijkD} \chi_{ijk} \right] SNR_{ik}(\mathbf{r}_1)}. \quad (3.66)$$

Таким образом, для многопозиционных систем дистанционного зондирования существенное влияние на качество получаемых оценок имеет степень ортогональности сигналов, излучаемых различными передающими элементами.

Если сигналы являются квазиортогональными и пространственная конфигурация не обеспечивает выполнение условия (3.46), необходимо использовать модифицированные алгоритмы обработки, полученные с учетом характера взаимной корреляции между различными элементами МПРСА. Так, например, можно использовать оптимизацию по максимальному значению отношения сигнал–помеха как для каждой бистатистической пары $\langle i$ -й приемник — k -й передатчик)

$$H_{t,r} \{u_{ik}(t)\} \rightarrow \text{Max}_H \frac{\left\langle \left| H \left\{ \text{Re} \int_D \dot{F}_{ik}(\mathbf{r}) \dot{S}_{ik}(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r} \right\} \right|^2 \right\rangle}{\left\langle \left| H \left\{ \text{Re} \sum_{j \neq k} \int_D \dot{F}_{ij}(\mathbf{r}) \dot{S}_{ij}(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r} \right\} \right|^2 \right\rangle + \langle |H \{n_i(t)\}|^2 \rangle}, \quad (3.67)$$

где $H\{ \}$ — некоторый оператор обработки входного процесса, так и для всего созвездия путем решения интегрально-матричного уравнения, приводящего к оптимальным операторам комплексирования.

Выбор оператора $H\{ \}$ необходимо выполнять с использованием детерминированного подхода по отношению к функциям $\dot{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ для МПРСА с взаимной временной синхронизацией и заданной (известной) пространственной конфигурацией, либо с использованием статистических методов, когда моменты излучения сигналов отдельными элементами либо их пространственная конфигурация являются стохастическими функциями.

3.7.4. Выбор шумоподобных сигналов и алгоритмов их обработки с учетом особенностей решения задач ДЗ. Выбор шумоподобных сигналов в многопозиционных РСА должен учитывать особенности пространственно-временной обработки. Для сигналов большой длины существуют эвристические алгоритмы, а также различные квазиоптимальные методы выбора псевдослучайных последовательностей и специализированные пакеты (GALib).

Введем показатели качества, которые могут являться основой для выбора псевдослучайных последовательностей в многопозиционных, бистатистических и моностатистических РСА. При этом учтем особенности применения таких сигналов в системах дистанционного зондирования для данной пространственной конфигурации РСА путем использования пространственных функций неопределенности для определения критериев качества.

Критерий максимального отношения сигнал-помеха в области обзора для фиксированной точки и всей области обзора определим как отношение квадратов модулей функции неопределенности в сигнальной D_0 и интерференционной D_1 областях для заданной точки:

$$\mu(\mathbf{r}_1) = \left[\int_{D_0} |\dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r} \right] / \left[\int_{D_1} |\dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r} \right], \quad (3.68)$$

$$\mu = \int_D \left[\int_{D_0} |\dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}|^2 \right] / \left[\int_{D_1} |\dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}|^2 \right] d\mathbf{r}_1. \quad (3.69)$$

Кроме того, можно использовать критерии, связанные с максимальным значением боковых лепестков либо их модулей в пределах области обзора [43]

$$\text{Max}\{|\dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in D_1\} \leq A, \quad (3.70)$$

что соответствует ограничению допустимого ансамбля псевдослучайных последовательностей до обладающих заданным уровнем максимальных значений автокорреляционной функции и ее преобразования Фурье.

Кроме того, можно применять смешанные критерии, задаваемые, например, следующим образом:

$$\mu_{SI}(\mathbf{r}_1) = \left[\int_{D_0} |\dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r} \right] \times \left[\int_{D_1} |\dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r} \right]^{-1} \Big|_{\text{Max}\{|\dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in D_1\} \leq A}.$$

В общем случае критерии выбора псевдослучайных последовательностей могут задаваться с помощью произвольных функциональных преобразований от пространственной функции неопределенности, соответствующей данной псевдослучайной последовательности и заданной пространственной конфигурации систем дистанционного зондирования $\chi\{\dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1), \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in D\}$.

При обработке сигналов имеет смысл оценить целесообразность применения алгоритмов решения обратных задач с целью повышения разрешающей способности. Как было показано в [44], решение обратных задач

для систем с ШПС позволяет в 2–4 раза уменьшить область высокого разрешения.

Особый интерес представляет решение задачи выбора формы опорного сигнала для удовлетворения приведенным выше критериям при фиксированной форме излучаемого сигнала. В качестве примера ниже показана оптимизация опорного сигнала по критериям, связанным с поведением функции неопределенности вдоль градиента к полю средних запаздываний. Полагается, что в системе ДЗ излучаемая ПСП является 20 символьной бинарной последовательностью. Вид исходного сигнала и соответствующие сечения модуля функции неопределенности по направлению градиента к линиям равного запаздывания приведены на рис. 3.42.

Результат выбора опорного сигнала по критерию максимального отношения сигнал–помеха в области обзора (3.69) приведен на рис. 3.43. Кроме того, приведен результат определения “наихудшего” опорного сигнала — т. е. такого, который обеспечивает минимальное значение критерия качества (3.69).

Результат определения опорного сигнала, обеспечивающего минимальный уровень боковых лепестков, может привести как к определению ортогонального сигнала (если это возможно при заданном виде модуляции и обработки), так и сигнала с недопустимо низким отношением сигнал–помеха (3.69). Пример определения наилучшего и наихудшего сигнала по критерию (3.70) показан на рис. 3.44.

Результат определения опорного сигнала, обеспечивающего максимальное и минимальное отношение сигнал–помеха при условии, что уровень боковых лепестков находится ниже заданного, показан на рис. 3.45.

Сравнение функций неопределенности, полученных в результате выбора опорного сигнала по различным критериям качества, приведен на рис. 3.46.

Таким образом, на основании материалов [37, 40–44] показана необходимость модификации понятия ортогональности сигналов в многопозиционных РСА с учетом особенностей пространственно-временной обработки; введены понятия ортогональности сигналов в точке и в области.

Показано, что ортогональные в классическом понимании сигналы могут быть непригодны для их использования в МПРСА по причине больших значений межканальных помех. В то же время казиортогональные и неортогональные (и даже одинаковые) в классическом понимании сигналы могут обеспечивать малые величины межканальных помех и, соответственно, высокое качество решения задач дистанционного зондирования за счет выбора пространственной конфигурации МПРСА. Эти факты показывают необходимость совместной оптимизации выбора групп сигналов и пространственной конфигурации многопозиционной системы с синтезированием апертуры антенны.

Результаты исследования групп сигналов с частотным, кодовым и кодо-частотным разделением являются основой для решения задач построения групп сигналов, оптимальных по критериям обеспечиваемой разрешающей способности, занимаемой полосы частот и величины межканальных помех.

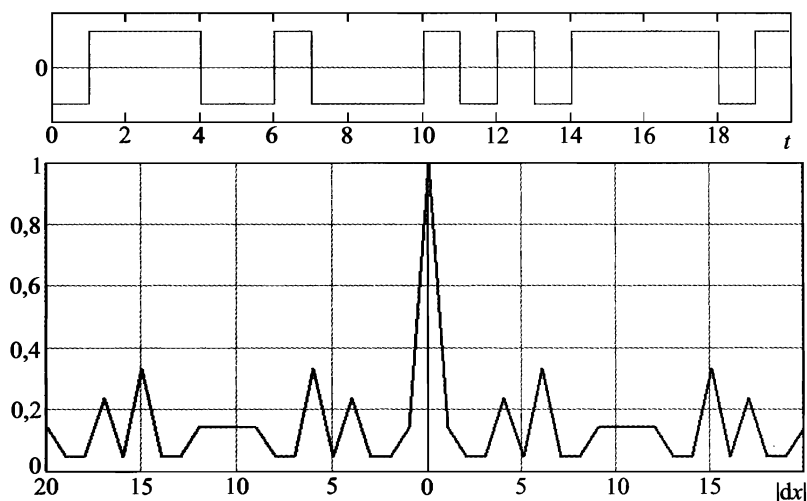


Рис. 3.42. Вид исходной псевдослучайной последовательности и соответствующего ей сечения функции неопределенности по направлению градиента к $\tau_0(\mathbf{r}) = \text{const}$

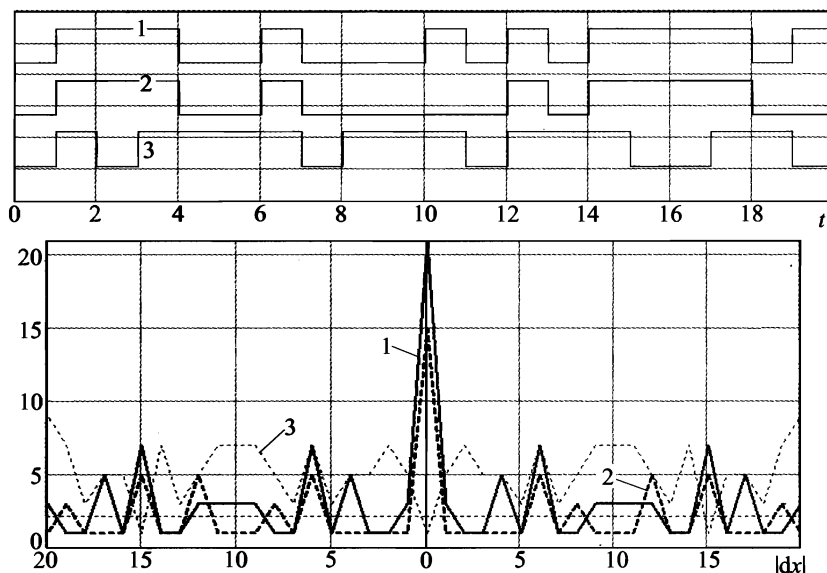


Рис. 3.43. Результат оптимального выбора опорного сигнала по критерию максимального отношения сигнал–помеха в области обзора. 1 — исходный опорный сигнал, 2, 3 — опорные сигналы, обеспечивающие максимальное и минимальное значение μ (3.69); номера функций неопределенности соответствуют номеру сигнала

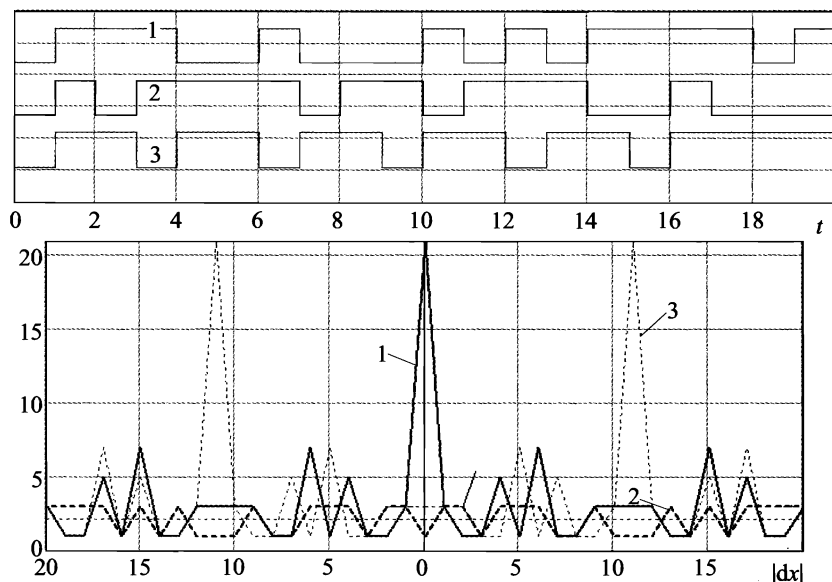


Рис. 3.44. Результат оптимального выбора опорного сигнала по критерию минимизации уровня боковых лепестков. 1 — исходный опорный сигнал, 2, 3 — опорные сигналы, обеспечивающие максимальное и минимальное значение критерия (3.70); номера функций неопределенности соответствуют номеру сигнала

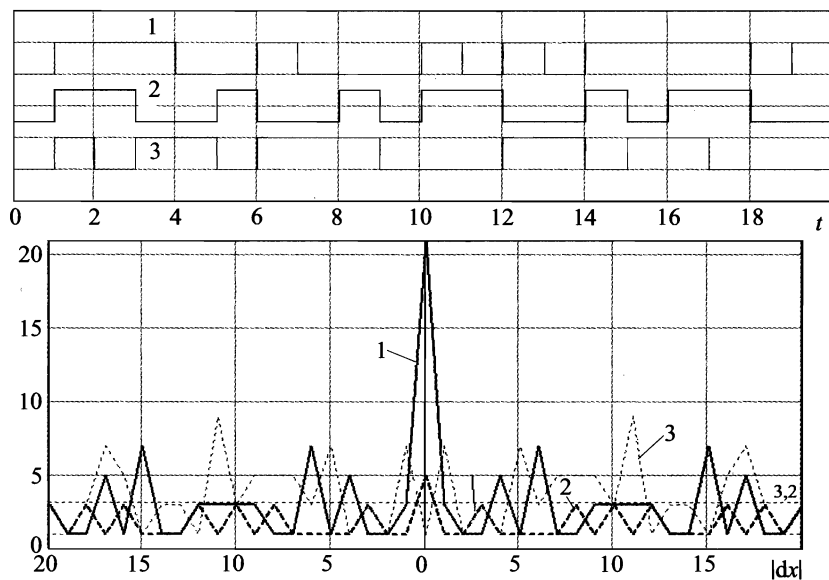


Рис. 3.45. Результат оптимального выбора опорного сигнала по критерию максимизации отношения сигнал-помеха при условии того, что уровень боковых лепестков находится ниже заданного. 1 — исходный опорный сигнал, 2, 3 — опорные сигналы, обеспечивающие максимальное и минимальное значение критерия (3.70); номера функций неопределенности соответствуют номеру сигнала

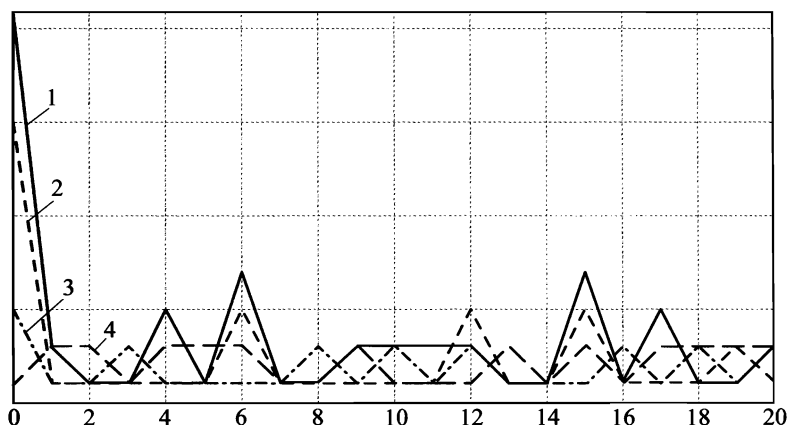


Рис. 3.46. Сравнение сечения функций неопределенности при использовании исходного опорного сигнала и сигналов, определенных в соответствии с критериями (3.68), (3.69), (3.70), — функции 1–4, соответственно. Отношение сигнал–помеха для этих сигналов будет 1,404, 1,417, 1,05 и 1,147, соответственно

Исследована возможность и целесообразность использования шумоподобных сигналов в обзорных, моностатических, бистатических и многопозиционных системах дистанционного зондирования, в том числе и с синтезированием апертуры антенны. В результате аналитического исследования и обширного статистического моделирования показано, что использование шумоподобных сигналов в многопозиционных, бистатических и моностатических системах с синтезированием апертуры антенны не приводит к существенному искажению результатов обработки по сравнению со случаем использования классических импульсных сигналов.

Для многопозиционных систем дополнительно получены аналитические зависимости, позволяющие оптимизировать форму сигналов по величине взаимных пространственных функций неопределенности. Приведены принципы оптимизации формы опорного сигнала с целью обеспечения требуемых характеристик качества функционирования МПРСА.

3.8. Исследование возможности построения многопозиционных РСА, основанных на приеме сигналов навигационных систем ГЛОНАСС/GPS

Как было указано ранее, многопозиционные системы характеризуются относительно высокой стоимостью развертывания, по этой причине одним из перспективных направлений, в том числе и для существующих моностатических систем, является обработка отраженных от поверхности сигналов, которые были излучены передатчиками, не входящими в состав системы ДЗ. В качестве таких передатчиков могут выступать стационарные (телевизионные станции, сотовая связь, радиомаяки) и движущиеся (спутники

связи, навигации) излучатели. Если в составе системы ДЗ отсутствуют передатчики, то такую систему назовем псевдопассивной.

Ряд наиболее важных с практической точки зрения пространственных конфигураций многопозиционных или бистатических псевдопассивных и комбинированных систем зондирования приведен на рис. 3.47 (см. цветную вклейку).

Один специализированный передатчик и набор приемников, рис. 3.47, а, могут быть использованы для расширения возможностей существующих систем дистанционного зондирования путем добавления группировки приемников (например, микроспутников) на синхронную/несинхронную с передатчиком орбиту.

Стационарный приемник сигналов движущихся излучателей позволяет осуществлять наблюдение за определенными участками земной поверхности, выполнять слежение за экологически опасными участками, зонами вулканической активности без внесения помех другим радиолокационным средством.

Обработка сигналов от неподвижных излучателей — радиовышек, телевизионных станций, вышек сотовой связи специализированным малогабаритным носителем (например, беспилотным сверхлегким многофункциональным летательным аппаратом) может быть использована для дистанционного зондирования городских и пригородных зон, рис. 3.47, в.

Использование приемного устройства, принимающего сигналы группировки спутников, не предназначенных для решения задач дистанционного зондирования (телевизионных, связных, навигационных спутников), рис. 3.47, г, позволяет создать многофункциональную многопозиционную систему путем минимальных затрат. К недостаткам таких систем следует отнести невозможность полного изменения их пространственной конфигурации с целью более эффективного решения задач картографирования.

Для рассмотренных вариантов практического построения МПРСА алгоритмы оптимального совместного формирования радиолокационных изображений поверхности, решение задач обнаружения пространственно-протяженных и малоразмерных областей с характерными законами отражения, а также алгоритмы построения карт высот рельефа могут быть получены на основании синтезированных в работе методов обработки в многопозиционных РСА.

Одним из наиболее перспективных вариантов построения МПРСА является использование навигационных спутников ГЛОНАСС/GPS для дистанционного зондирования земной и морской поверхности.

Обычно спутниковые навигационные системы используются для определения координат воздушных, космических, морских и наземных объектов. Однако спектр использования спутниковых радионавигационных систем (СРНС) не ограничивается решением задач навигации. Одной из возможных областей применения навигационных систем является дистанционное зондирование поверхности [45]. При этом навигационные спутники используются как в качестве передающих элементов многопозиционной радиолокационной системы с синтезированием апертуры антенны (МПРСА), так

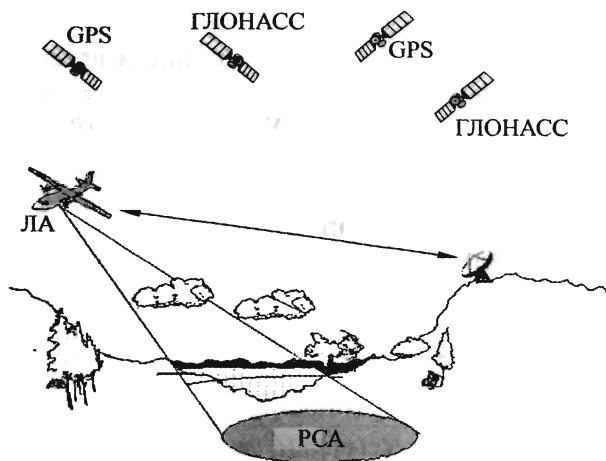


Рис. 3.48. Пространственная конфигурация многопозиционной системы, основанная на приеме сигналов НС ГЛОНАСС/GPS

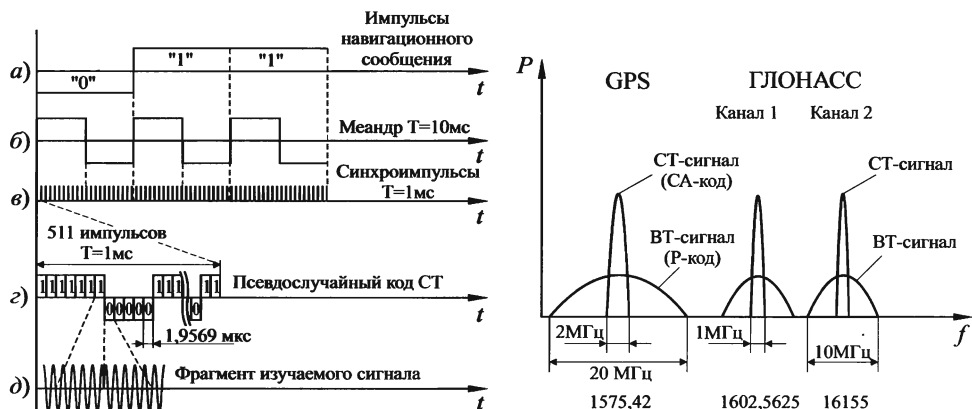


Рис. 3.49. Вид сигналов навигационных систем

и для определения местоположения приемных элементов в пространстве и координат картографируемых объектов [46].

Здесь рассматривается следующая конфигурация: многопозиционная система с синтезированием апертуры антенны состоит из набора передатчиков (навигационных спутников ГЛОНАСС/GPS) и одного приемника — специализированного носителя, выполняющего картографирование по отраженным от поверхности сигналам НС, рис. 3.48. Синтез апертуры выполняется за счет взаимного движения передатчиков и приемника. Так как диаграммы направленности НС таковы, что охватывают значительную часть земной поверхности, область обзора будет определяться ДН приемной антенны.

Выбор навигационных систем для создания МПРСА обуславливается тем, что они являются доступными (т.е. в произвольный момент времени

в области обзора находится достаточное для местоопределения число спутников), работающими круглосуточно, всепогоднo и независимо от времени суток; излучаемые сигналы пригодны для решения задач дистанционного зондирования и содержат в себе информацию относительно пространственных координат и вектора скорости каждого навигационного спутника, рис. 3.49.

3.8.1. Энергетический потенциал навигационных систем для решения задач дистанционного зондирования. С учетом вида сигналов в навигационных системах (непрерывные фазоманипулированные последовательности) для определения отношения сигнал–помеха в МПРСА необходимо использовать выражение

$$\mu_{ik}(\mathbf{r}_1) = \frac{E_{ik}(\mathbf{r}_1)}{2N_0} \frac{\lambda_k^2}{(4\pi)^3} \frac{G_k^P(\mathbf{r}_1)}{R_k^2(\mathbf{r}_1)} \frac{G_i^P(\mathbf{r}_1)}{R_i^2(\mathbf{r}_1)} \sigma_{Aik}^0(\mathbf{r}_1) \Delta X_{ik} \Delta Y_{ik}. \quad (3.71)$$

Для исследования зависимости μ от параметров, входящих в уравнение (3.71), было проведено статистическое моделирование приема и обработки навигационных спутников систем с использованием реальных данных об орбитальной группировке, полученных с помощью навигационной аппаратуры [15]. Для системы ГЛОНАСС излучаемые спутниками сигналы имеют одинаковую комплексную огибающую, рис. 3.50, и различные несущие частоты. В ходе моделирования формировался наблюдаемый векторный процесс как сумма аддитивной помехи и отраженного от поверхности сигнала, представляющего собой псевдослучайную фазоманипулированную последовательность, дополнительно промодулированную по частоте [46]. Вид модуляции и ширина спектра сигнала определялись взаимным положением и характером движения передатчика и приемника [47], рис. 3.51.

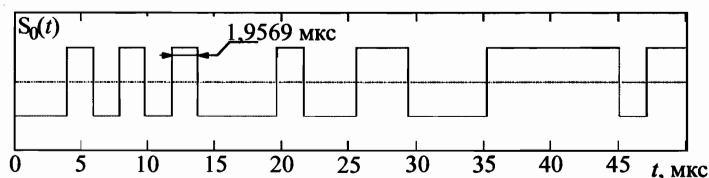


Рис. 3.50. Вид комплексной огибающей излучаемого сигнала для одного навигационного спутника системы ГЛОНАСС

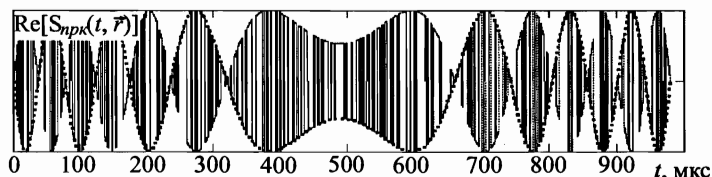


Рис. 3.51. Принимаемый полезный сигнал для одного навигационного спутника (штриховой линией показан сигнал при $\dot{S}_{0k}(t) = 1$)

Для полученного вектора сигналов формировался вектор оптимальных выходных эффектов в предположении о некоррелированности помех в различных каналах, после чего определялась сигнальная $\dot{Y}_{Sk}(r_1)$ и помеховая $\dot{Y}_{Nk}(r_1)$ составляющие на выходе согласованного фильтра. При расчетах полагалось, что величина $N_0 = 4,003908 \cdot 10^{-21}$, размер реальной апертуры приемной антенны $2 \times 0,5$ метров, величина $\sigma_A^0(r_1) = 0,05$, время синтезирования — 1 с.

Результаты определения отношения сигнал–помеха μ для маловысотных приемных систем в составе МПРСА при различных разрешающих способностях и различном числе видимых НС, сигналы которых используются при формировании радиолокационного изображения, показаны на рис. 3.52–3.54. Здесь кривые 1–3 показывают отношение сигнал–помеха на выходе согласованного фильтра при разрешающей способности 25×25 , 50×50 и 100×100 м как функций наклонной дальности R_{np} , соответственно.

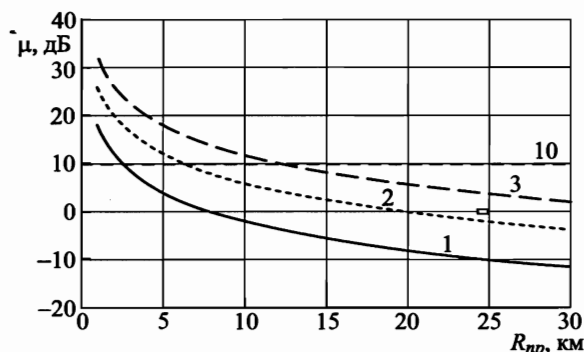


Рис. 3.52. Величина μ при использовании 1-го навигационного спутника

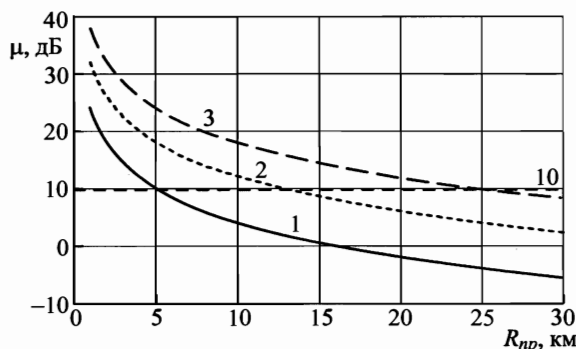


Рис. 3.53. Величина μ при использовании 4-х навигационных спутников

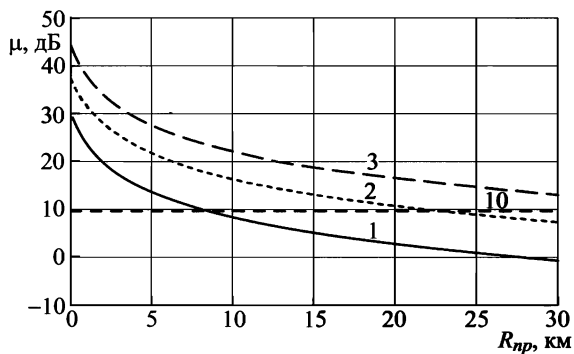
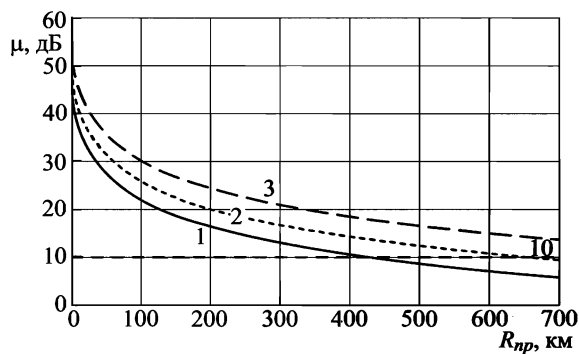
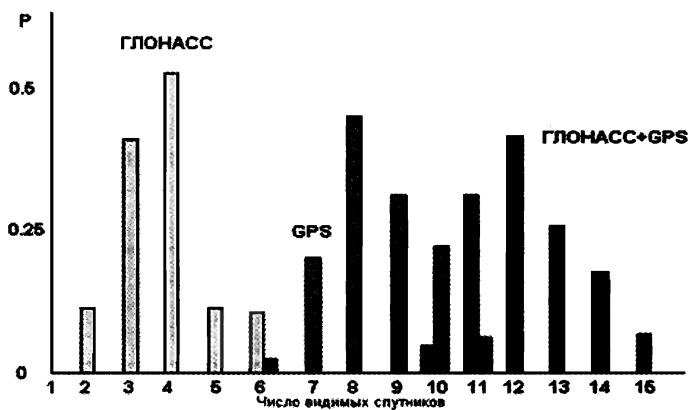
Рис. 3.54. Величина μ при использовании 10-ти навигационных спутниковРис. 3.55. Величина μ при использовании 10-ти навигационных спутников

Рис. 3.56. Вероятность нахождения определенного числа навигационных спутников в области обзора

Для среднеорбитальной спутниковой системы дистанционного зондирования (приемника) принимались аналогичные параметры за исключением того, что размер апертуры приемной антенны полагался равным 10×3 м. Результаты определения отношения сигнал–помеха при разрешающей способности 200×200 м (кривая 1), 300×300 м (кривая 2) и 500×500 м (кривая 3) показаны на рис. 3.55.

Для надежной работы системы дистанционного зондирования значение отношения сигнал–помеха должно превышать $10 \dots 12$ дБ [58, 87, 88]. Таким образом, по результатам моделирования можно утверждать, что навигационные системы ГЛОНАСС/GPS могут быть использованы для создания авиационных РСА дистанционного зондирования с высокой и средней разрешающей способностью и низкоорбитальных космических РСА с низкой разрешающей способностью [15, 16, 46].

При картографировании поверхности по сигналам навигационных систем целесообразно использовать и ГЛОНАСС и GPS, особенно при необходимости получения изображений с высоким разрешением. Как будет показано далее, оптимальная для навигационных определений пространственная конфигурация созвездия навигационных спутников не всегда является оптимальной для решения задач дистанционного зондирования. Вероятности нахождения определенного числа НС в пределах области обзора показаны на рис. 3.56.

3.8.2. Пространственные функции неопределенности и разрешающая способность многопозиционных РСА, основанных на приеме сигналов ГЛОНАСС/GPS. Одной из наиболее важных характеристик радиолокационных систем и, в частности, систем дистанционного зондирования являются пространственные функции неопределенности, анализ которых позволяет не только определить разрешающую способность в пространстве, но и выбрать оптимальные с точки зрения энергетики и качества получаемых результатов условия радиолокационного наблюдения [7–11].

Ниже приведено исследование функций неопределенности многопозиционной системы дистанционного зондирования, основанной на приеме сигналов навигационных систем ГЛОНАСС и GPS, по результатам, опубликованным в работах Ксендзука А.В. [16, 30, 46, 47]. Моделирование основывалось на данных о конфигурации созвездий НС, полученных с помощью навигационной аппаратуры и на основании данных о НС [49]. Для приемника использовались следующие параметры: время синтеза апертуры 0,5 с, пространственные координаты (0, 0, 5000 м), вектор скорости (300 м/с, 0, 0) область обзора расположена перпендикулярно вектору скорости и находится на расстоянии 2000 м, рис. 3.57.

По результатам моделирования было установлено, что авиационный приемник, работающий по коду стандартной точности может получить пространственное разрешение 150×40 м и 80×40 м в направлении градиентов к линиям равной дальности и равного доплеровского сдвига частоты для систем ГЛОНАСС и GPS, соответственно. Такая разрешающая способность

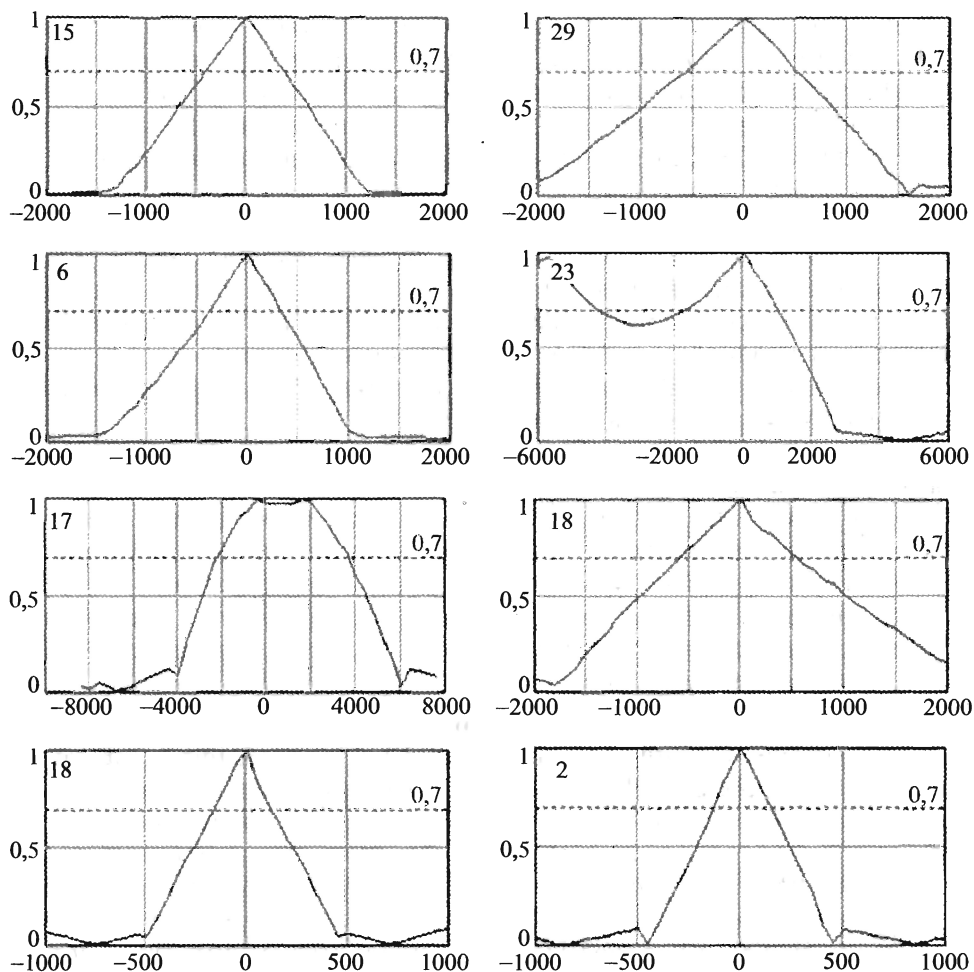
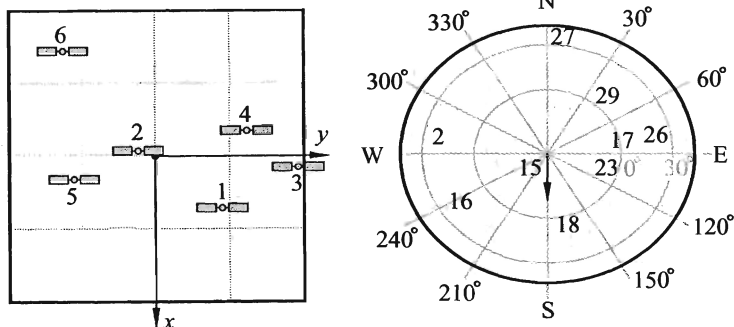


Рис. 3.57. Местоположение навигационных спутников ГЛОНАСС (слева) и GPS



3.58. Модули сечения функций неопределенности в направлении оси Ox для различных навигационных спутников GPS, код стандартной точности

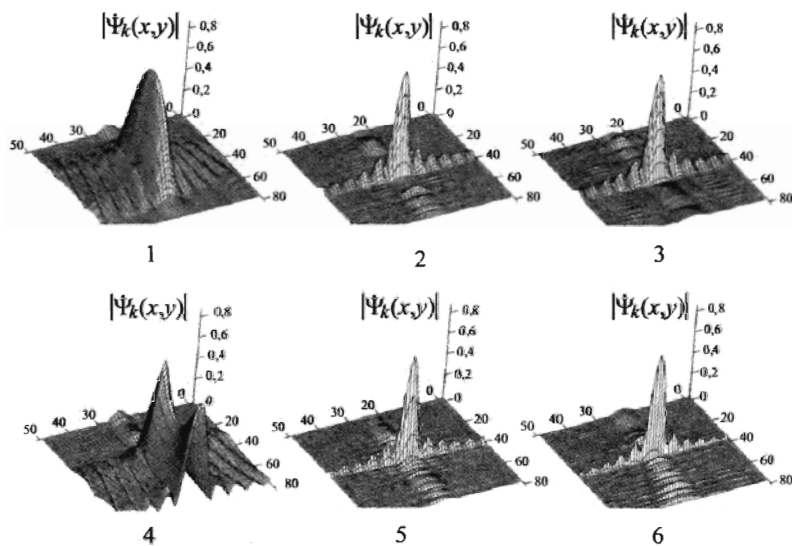


Рис. 3.59. Модули пространственных функций неопределенности для различных навигационных спутников ГЛОНАСС, боковой обзор, код стандартной точности

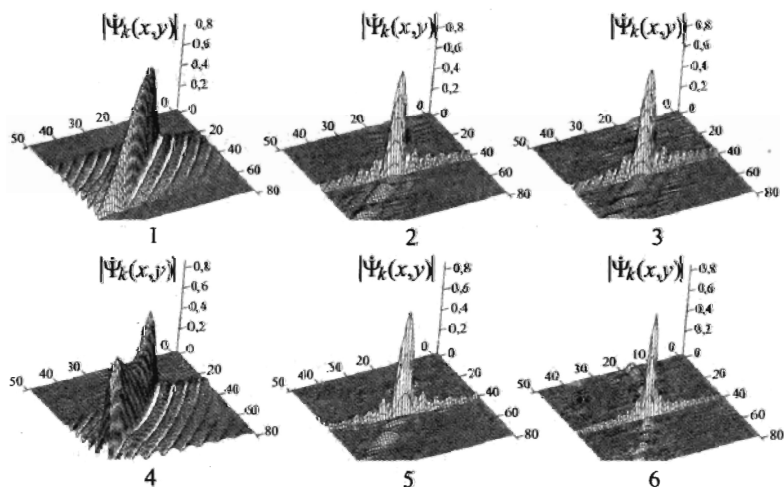


Рис. 3.60. Модули пространственных функций неопределенности для различных навигационных спутников, переднебоковой обзор, код стандартной точности

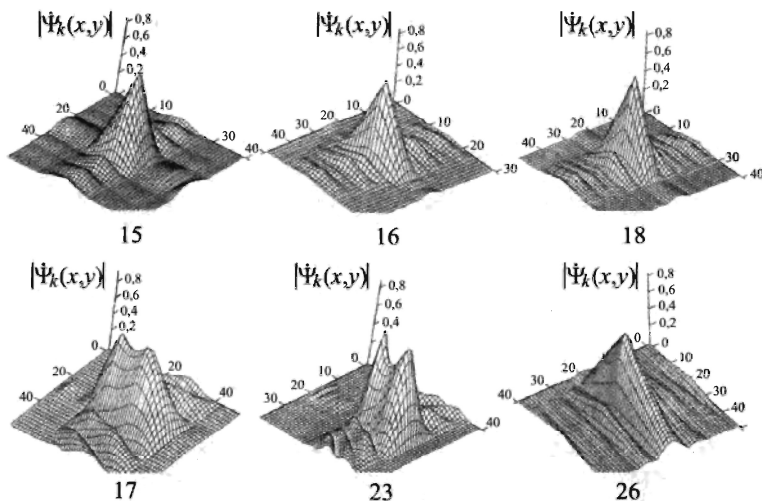


Рис. 3.61. Модули пространственных функций неопределенности для различных навигационных спутников GPS, боковой обзор, код стандартной точности

является достаточной для решения многих задач дистанционного зондирования.

Использование кода высокой точности позволяет существенно повысить разрешающую способность в дальномерной плоскости. Если при этом энергетический потенциал системы дистанционного зондирования будет недостаточен для картографирования поверхности с требуемым качеством измерений, на этапе вторичной обработки можно прибегнуть к сглаживанию полученных результатов окнами, предназначенными для подавления аддитивного и/или мультипликативного шума.

Исследование поведения пространственного интервала однозначных измерений показывает, что для системы ГЛОНАСС в дальномерной плоскости она составляет 512 элементов разрешения, а для GPS — 1024. С учетом особенностей структуры сигналов этих систем необходимо отметить, что интервал однозначных измерений в пространстве будет одинаков при прочих равных условиях. В азимутальной плоскости интервал однозначных измерений в основном определяется параметрами движения носителя.

3.8.3. Оптимизация радиолокационного наблюдения псевдопассивными МПРСА. В качестве примера практической реализации предложенных в работе критериев оптимизации многопозиционных систем рассмотрим задачу выбора области обзора приемника в многопозиционной радиолокационной системе, состоящей из специализированного приемника — летательного аппарата, расположенного на высоте 5 км и движущегося со скоростью 300 м/с, и набора навигационных спутников GPS, координаты и векторы скорости которых задаются на основании информации, полученной с помощью реальных навигационных устройств. Для удобства дальнейшей визуализации навигационные спутники пронумерованы не в соответствии с системными данными. Пространственная конфигурация анализируемой системы приведена на рис. 3.62 (см. цветную вклейку).

Оптимизация области обзора по критериям, связанным с градиентами к полям среднего запаздывания и дельта-запаздывания. Непосредственное применение выражения, которое гарантирует обеспечение разрешения не меньше требуемого вдоль линий $\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}$ и $\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau'_\Delta(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}$ в случае существенно разнесенной пространственной конфигурации будет давать нулевые области при больших ограничениях и широкие области — при малых. Это объясняется тем, что часть излучателей (спутников) может находиться в пространственных зонах, характеризующихся низким качеством измерений [49]. Для таких пространственных конфигураций целесообразно модифицировать, например, выражение $|\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}| \geq P, i = 1 \dots R_c, k = 1 \dots T_r$, до неравенства, выполняющегося для определенного числа $T_r 1$ передатчиков:

$$|\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}| \geq P, \quad k1 = 1 \dots T_r 1. \quad (3.72)$$

Вид пространственных зон, полученных по этому критерию, показан на рис. 3.63 (см. цветную вклейку).

На рис. 3.64 (см. цветную вклейку) показана пространственная зависимость угла между градиентами к линиям равного запаздывания и линиям равного доплеровского сдвига частоты. Для систем с большой базой непосредственное применение критерия

$$\frac{(\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}, \text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau'_\Delta(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\})}{\|\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}\| \|\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau'_\Delta(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}\|} \in P_0, \quad \mathbf{r} \in D_0, \quad (3.73)$$

может приводить к неудовлетворительным результатам. По этой причине необходимо использовать (3.73) не для всех, а лишь для части видимых спутников, рис. 3.65 (см. цветную вклейку).

Результат выбора области обзора по критериям, связанным с градиентами,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}, \text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau'_\Delta(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\})}{\|\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}\| \|\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau'_\Delta(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}\|} \in P_0 \\ \|\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}\| > P_1 \\ \|\text{grad}_{\mathbf{r}} \{\tau'_\Delta(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}\| > P_2 \end{array} \right. \quad \mathbf{r}_0 \in D_0 \quad (3.74)$$

дает физически понятный результат: для показанной на рис. 3.66 группировки область наблюдения должна быть выбрана так, чтобы максимальное число спутников находилось в зоне, обеспечивающей высокое разрешение.

Оптимизация, выполняемая путем градиентного анализа, не позволяет определить величину межканальных помех для произвольной группы сигналов. Так как данный вид помехи может существенно ухудшить качество результатов совместной обработки, в большинстве практически важных случаев целесообразно воспользоваться оптимизацией, учитывающей величины межканальных помех.

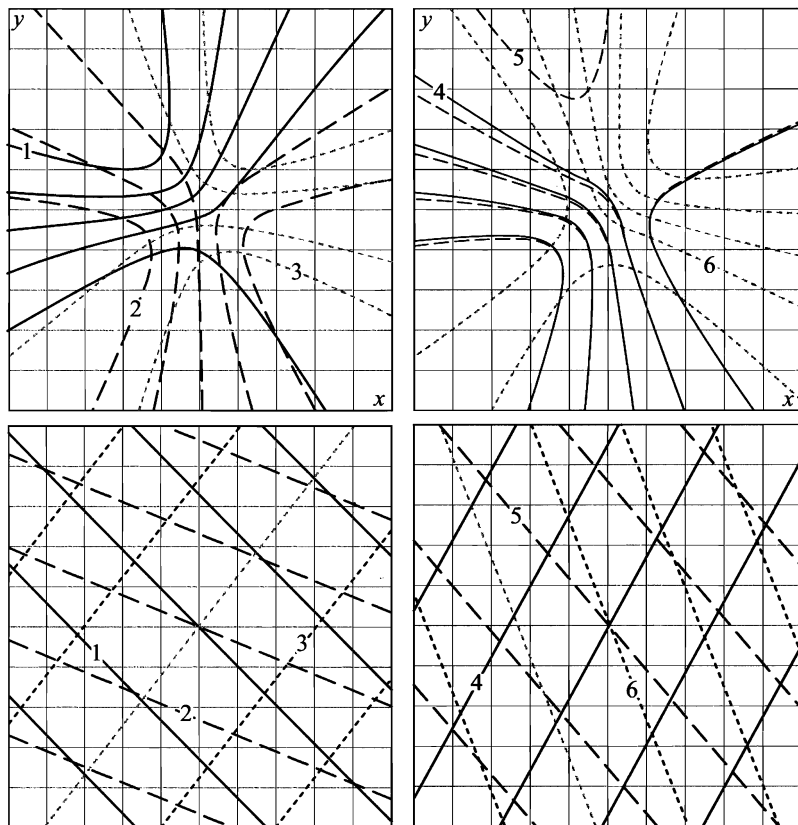


Рис. 3.66. Градиент к линиям равных запаздываний (вверху) и линии равной доплеровской частоты для спутников 1–6

При выборе зоны обзора с учетом величины межканальных помех необходимо использовать следующее выражение $|\dot{\Psi}_{ijk}| =$

$$= \left| \int_0^T \int_D \int_D \dot{S}_{ij}(t, \mathbf{r}) \dot{S}_{ik}^*(t, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r} d\mathbf{r}_1 dt \right|, \text{ которое, в частности, зависит от}$$

структуры излучаемых сигналов, векторов скорости носителей $\mathbf{v}$ и взаимной пространственной конфигурации элементов.

Более хорошие результаты дает учет зависимости удельной эффективной поверхности рассеяния и энергии сигналов для различных излучателей (навигационных спутников). При упрощенных расчетах целесообразно предположить, что УЭПР является факторизуемой функцией относительно параметров наблюдения (в частности, бистатических углов) $\sigma_{ij}^0(\mathbf{r}) = \sigma^0(\mathbf{r})\alpha_{ij}(\mathbf{r})$, спектральная плотность мощности помех в различных каналах одинакова. При этом функционал, подлежащий оптимизации, примет

вид

$$\mu_{Dik} = \int_D \frac{\int_D |\tilde{\Psi}_{ikk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}}{\sum_{j \neq k} \frac{K_{ij}^2(\mathbf{r}_1)}{K_{ik}^2(\mathbf{r}_1)} \frac{\alpha_{ij}(\mathbf{r}_1)}{\alpha_{ik}(\mathbf{r}_1)} \int_D |\tilde{\Psi}_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r} + \frac{N_0}{E(\mathbf{r}_1)}} d\mathbf{r}_1,$$

где $E(\mathbf{r}_1)$ — произведение энергий опорного и отраженного от поверхности D сигнала.

В качестве примера выбора пространственной конфигурации для случая использования квазиортогональных сигналов ниже показана пространственная зависимость μ_{Σ} для полуактивной многопозиционной системы, излучателями в которой являются навигационные спутники GPS. Пространственная конфигурация излучателей задана и соответствует реальным данным, полученным при помощи навигационных приемников; модель поверхности представлена зависимостью удельной ЭПР от бистатических углов, область зондирования D считается заданной, рис. 3.67 (см. цветную вклейку).

Так как конфигурация передающих элементов, группа сигналов и положение области зондирования являются заданными, под выбором пространственной конфигурации многопозиционной системы следует понимать выбор положения и скорости приемного элемента.

Как видно из результатов моделирования, выбор зоны обзора в рассматриваемой пассивной многопозиционной системе дистанционного зондирования позволяет увеличить отношение сигнал–помеха в 2–4 раза.

3.9. Когерентный режим работы бистатических систем с синтезированием апертуры антенны

В радиолокационных системах дистанционного зондирования наиболее часто используются периодические импульсные сигналы, начальные фазы которых являются случайной величиной [50]. Для функционирования РСА необходимо обеспечить когерентный режим накопления импульсов. В однопозиционных системах эта задача решается путем использования различных методов, среди которых наиболее широкое распространение получили схемы, основанные на использовании когерентного гетеродина. В бистатических РСА для обеспечения накопления сигналов в пределах каждого периода повторения с учетом случайного характера фазы излученного сигнала нужно учитывать тот факт, что приемник и передатчик размещены в пространстве и движутся по собственным траекториям.

Синтезируем алгоритм когерентного приема для таких систем. Для этого сигнал, излучаемый передатчиком, $\dot{S}_k(t) = \dot{S}_{0k}(t) \exp \{j\omega_{0k}t + \varphi_k\}$ (где $\dot{S}_{0k}(t)$ — комплексная огибающая; $\omega_{0k} = 2\pi f_k$ — несущая частота излучаемого сигнала, φ_k — фаза, которая в общем случае может быть функцией времени) представим в виде последовательности импульсов путем введения

переменной $t = t' + t_0 + mT_R$:

$$\dot{S}_k(t', \varphi_{km}) = \sum_{m=-\infty \dots \infty} \dot{S}_{0k}(t' + t_0 + mT_R) \exp \{j\omega_{0k}(t' + t_0 + mT_R) + \varphi_{km}\}, \quad (3.75)$$

где t_0 — начальный отсчет времени; T_R — интервал повторения импульсов.

Такая запись позволяет ввести аналитическое описание начальной фазы излучаемого сигнала в m -м периоде повторения φ_{km} , которая в общем случае может быть случайной величиной со своим законом распределения. В дальнейшем, без ограничения общности результатов, положим, что начальный отсчет времени $t_0 = 0$.

Сигнал, отраженный от произвольной точки поверхности $\mathbf{r} \in D$, запишем с учетом модели (3.75) в виде

$$\begin{aligned} \dot{S}_{ik}^P(t, \mathbf{r}) = & \dot{F}_{ik}[\mathbf{r}, \lambda(\mathbf{r})] \dot{K}_{ik}(t, \mathbf{r}) \dot{G}_{ik}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \times \\ & \times \sum_{m=-\infty \dots \infty} \dot{S}_{0ik}[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \times \\ & \times \exp \{j\omega_{0k}(t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)) + \varphi_{km}\}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

где $\dot{F}_{ik}[\mathbf{r}, \lambda(\mathbf{r})]$ — комплексный коэффициент отражения элемента $\mathbf{r}$; $\dot{G}()$ — коэффициент учета влияния диаграмм направленности приемника и передатчика; $\dot{K}_{ik}(t, \mathbf{r})$ — коэффициент, учитывающий влияние искажений сигнала при его распространении; $\tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ — полное время задержки сигнала на трассе распространения.

Полезная часть результата согласованной фильтрации принимаемого сигнала, записанного аналогично (3.76) для опорного генератора приемника, представимого моделью $\dot{S}_i(t) = \exp \{j\omega_{0i}t + \varphi_{i0}\}$, записывается в виде свертки

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{ik}(\mathbf{r}_1) = & \int_D \dot{F}_{ik}[\mathbf{r}, \lambda(\mathbf{r})] \sum_{m=-\infty \dots \infty} \exp \{j[\varphi_{km} - \varphi_{i0}]\} \int_0^T \dot{S}_{ik}[t' + mT_R - \\ & - \tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \dot{S}_{ik}^*[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] dt d\mathbf{r}, \end{aligned}$$

подынтегральное значение которой для совпадающих точек $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ представляет собой идеальный (в смысле разрешения) оптимальный выходной эффект для $\mathbf{r} \in D$. Результат такой идеальной обработки можно записать как сумму оптимальных выходных эффектов внутри каждого периода повторения, умноженных на случайный комплексный вектор, зависящий от разности начальных фаз опорных генераторов приемника и передатчика

$$\begin{aligned} \dot{F}_{ik}[\mathbf{r}, \lambda(\mathbf{r})] \sum_{m=-\infty \dots \infty} \exp \{j[\varphi_{km} - \varphi_{i0}]\} \int_0^T \dot{S}_{ik}[t' + mT_R - \\ - \tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \dot{S}_{ik}^*[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] dt. \end{aligned}$$

Из приведенных выше выражений видно, что для периодического сигнала со случайной начальной фазой обеспечить когерентный прием полезного

сигнала без дополнительной информации невозможно [51]. Для обеспечения когерентного режима работы РСА будем использовать информацию, содержащуюся в прямом сигнале; под прямым сигналом понимается сигнал, излученный передатчиком, принятый приемником и задержанный на $\tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$

$$\dot{S}_{ik}^d(t) = \dot{K}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \dot{G}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \sum_{m=-\infty \dots \infty} \dot{S}_{0ik}[t' + mT_R - \tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \times \\ \times \exp\{j\omega_{0k}(t' + mT_R - \tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)) + j\varphi_{km}\}, \quad (3.77)$$

где $\dot{G}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$, $\dot{K}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ — функции, учитывающие влияние диаграмм направленности антенн и искажений, вносимых на трассе распространения прямого сигнала.

Произведение сигнала в прямом канале и напряжения опорного генератора

$$\dot{S}_{ik}^{dR}(t) = \dot{K}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \dot{G}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \sum_{m=-\infty \dots \infty} \dot{S}_{0ik}[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \times \\ \times \exp\{j(\omega_{0k} - \omega_{0i})(t' + mT_R)\} \exp\{-j\omega_{0k}\tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\} \exp\{j(\varphi_{km} - \varphi_{i0})\} \quad (3.78)$$

после интерполяции по времени относительно дискретной области существования $\dot{S}_{ik}^d(t)$ будет содержать в себе информацию относительно разности фаз генераторов приемника и передатчика

$$\dot{S}_{ik}^{dR}(t) = \dot{K}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \dot{G}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \sum_{m=-\infty \dots \infty} \exp\{j(\omega_{0k} - \omega_{0i})(t' + mT_R)\} \times \\ \times \exp\{-j\omega_{0k}\tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\} \exp\{j(\varphi_{km} - \varphi_{i0})\}. \quad (3.79)$$

Рассмотрим различные варианты формирования модифицированных опорных сигналов при использовании (3.79); при этом будем использовать понятие идеального (с точки зрения обеспечения когерентного режима) результата обработки в бистатической РСА

$$\dot{Y}_{Sik}(\mathbf{r}_1) = \int_0^T \int_D \dot{F}_{ik}[\mathbf{r}, \lambda(\mathbf{r})] \dot{K}_{ik}(t, \mathbf{r}) \dot{G}_{ik}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \times \\ \times \sum_{m=-\infty \dots \infty} \dot{S}_{0ik}[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \dot{S}_{0ik}^*[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \times \\ \times \exp\{j[-\omega_{0k}\tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) + \omega_{0i}\tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)]\} dt d\mathbf{r}.$$

Так как для обеспечения когерентного режима накопления важна фазовая информация, в канале прямого сигнала целесообразно исключить влияние модульных частей пространственно-временных функций $\dot{G}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$, $\dot{K}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ известными методами выделения фазы с последующим расширением области существования из дискретной в континуальную.

Если функции $\dot{G}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$, $\dot{K}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ известны, из (3.79) можно выделить

$$\dot{S}_{ik}^{dR}(t) = \exp \{j(\omega_{0k} - \omega_{0i})(t' + mT_R)\} \times \\ \times \exp \{-j\omega_{0k}\tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\} \exp \{j(\varphi_{km} - \varphi_{i0})\}$$

и сформировать модифицированный опорный сигнал в виде

$$\dot{S}_{ik}^R(\mathbf{r}_1) = \sum_{m=-\infty \dots \infty} \dot{S}_{0ik}^*[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \times \\ \times \exp \{-j\omega_{0i}[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] - j\varphi_{i0}\} \times \\ \times \exp \{-j(\omega_{0k} - \omega_{0i})(t' + mT_R)\} \exp \{j\omega_{0k}\tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\} \exp \{-j(\varphi_{km} - \varphi_{i0})\}. \quad (3.80)$$

Результат обработки с использованием (3.80)

$$\dot{Y}_{Sik}(\mathbf{r}_1) = \int_0^T \int_D \dot{F}_{ik}[\mathbf{r}, \lambda(\mathbf{r})] \dot{K}_{ik}(t, \mathbf{r}) \dot{G}_{ik}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \times \\ \times \sum_{m=-\infty \dots \infty} \dot{S}_{0ik}[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \dot{S}_{0ik}^*[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \times \\ \times \exp \{j[-\omega_{0k}\tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) + \omega_{0i}\tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)]\} \exp \{-j\omega_{0k}\tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\} dt d\mathbf{r}, \quad (3.81)$$

будет отличаться от идеального случая наличием под знаком интеграла искажающей функции $\chi(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \exp \{-j\omega_{0k}\tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}$, определяющей расхождением частот опорных генераторов и величиной задержки прямого сигнала.

Как было указано ранее, для синтеза апертуры в бистатической РСА необходимо априорно знать векторы положения носителей; это означает, что в случае (3.81) влияние $\chi(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ на результат обработки может быть устранено. В дальнейшем учтем расхождение опорных частот передатчика и приемника путем модификации $\chi(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ до $\chi(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \exp \{-j(\omega_{0k} - \omega_{0i})\tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}$.

Так как фазовые характеристики коэффициента искажений сигнала на трассе его распространения обычно неизвестны, в прямом канале выделяется величина

$$\dot{S}_{ik}^{dR}(t) = \exp \{j(\omega_{0k} - \omega_{0i})(t' + mT_R)\} \times \\ \times \exp \{-j(\omega_{0k} - \omega_{0i})\tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\} \exp \{j(\varphi_{km} - \varphi_{i0}) + j\varphi_K^d\}.$$

При этом модифицированный опорный сигнал и результат обработки будут описываться следующими выражениями:

$$\dot{S}_{ik}^R(\mathbf{r}_1) = \sum_{m=-\infty \dots \infty} \dot{S}_{0ik}^*[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \exp\{-j\omega_{0i}[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] - j\varphi_{i0}\} \exp\{-j(\omega_{0k} - \omega_{0i})(t' + mT_R) + (\omega_{0k} - \omega_{0i}) \times \tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) - j(\varphi_{km} - \varphi_{i0}) + j\varphi_K^d\}, \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{Sik}(\mathbf{r}_1) = & \int_0^T \int_D \dot{F}_{ik}[\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})] \dot{K}_{ik}(t, \mathbf{r}) \dot{G}_{ik}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \times \\ & \times \sum_{m=-\infty \dots \infty} \dot{S}_{0ik}[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \dot{S}_{0ik}^*[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \times \\ & \times \exp\{j[-\omega_{0k}\tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) + \omega_{0i}\tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)]\} \times \\ & \times \exp\{-j(\omega_{0k} - \omega_{0i})\tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\} \exp\{j\varphi_K^d\} dt d\mathbf{r}, \quad (3.83) \end{aligned}$$

где используется выражение $\dot{K}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = |\dot{K}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)| \exp\{j\varphi_K^d\}$.

Искажающая функция

$$\chi(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \exp\{-j(\omega_{0k} - \omega_{0i})\tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\} \exp\{j\varphi_K^d\}$$

будет зависеть от условий распространения, по этой причине добиться отсутствия искажений без определения, как минимум, фазовой структуры $\dot{K}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ не удастся.

Если $\dot{K}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ и $\dot{G}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ — неизвестные пространственно-временные функции, то модифицированный опорный сигнал и результат обработки будут зависеть от фазовой структуры коэффициентов, учитывающих особенности трассы распространения, и диаграмм направленности антенн по прямому каналу $\exp\{j\varphi_K^d\}$, $\exp\{j\varphi_G^d\}$:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{ik}^R(\mathbf{r}_1) = & \sum_{m=-\infty \dots \infty} \dot{S}_{0ik}^*[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \times \\ & \times \exp\{-j\omega_{0i}[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] - j\varphi_{i0}\} \times \\ & \times \exp\{-j(\omega_{0k} - \omega_{0i})(t' + mT_R) + j(\omega_{0k} - \omega_{0i})\tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) - \\ & - j(\varphi_{km} - \varphi_{i0}) + j(\varphi_K^d + \varphi_G^d)\}, \\ \dot{Y}_{Sik}(\mathbf{r}_1) = & \int_0^T \int_D \dot{F}_{ik}[\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})] \dot{K}_{ik}(t, \mathbf{r}) \dot{G}_{ik}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \times \\ & \times \sum_{m=-\infty \dots \infty} \dot{S}_{0ik}[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \dot{S}_{0ik}^*[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \times \\ & \times \exp\{j[-\omega_{0k}\tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) + \omega_{0i}\tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)]\} \times \\ & \times \exp\{-j(\omega_{0k} - \omega_{0i})\tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \exp\{j(\varphi_K^d + \varphi_G^d)\} dt d\mathbf{r}. \quad (3.84) \end{aligned}$$

Использование исключительно фазовой структуры сигнала обусловлено меньшими искажениями результата оптимальной обработки по отношению к случаю использования амплитудной и фазовой информации. Однако, как будет показано далее, в ряде случаев амплитудная информация позволяет уменьшить искажения при обработке, особенно для бистатистических пар с большой базой.

Выбор механизма формирования модифицированного опорного сигнала и выделения информации из прямого сигнала необходимо осуществлять с учетом ряда особенностей. Для обеспечения когерентного режима важным является не полное отсутствие сдвига фаз между опорным и принимаемым сигналом, а отсутствие флуктуирующей случайной компоненты. По этой причине использование любого из предложенных методов формирования опорного сигнала позволяет обеспечить режим когерентного накопления импульсов. Основное различие в использовании (3.80)–(3.84) будет заключаться в степени искажения фазовой компоненты оценки комплексного коэффициента отражения.

Влияние различного рода нестабильностей на работу предложенного алгоритма обеспечения когерентного приема можно выполнять путем анализа искажений по отношению к идеальной оценке комплексного коэффициента отражения либо его модуля, удельной эффективной поверхности рассеяния, по искажению принимаемого сигнала и результата оптимальной обработки [52]. В данной работе основное внимание уделяется влиянию искажений на вид модуля пространственной функции неопределенности бистатистической РСА и сравнению полученных результатов с однопозиционными системами.

В рамках исследования будем полагать, что отклонения параметров, влияющих на синтез апертуры, могут быть описаны некоторыми случайными процессами. При этом выделим два основных типа искажений – статические и динамические. Под статическими будем понимать нестабильности, значение которых может полагаться постоянным на интервале синтеза апертуры антенны (например, ошибки измерения векторов положения носителей). Под динамическими искажениями будут пониматься процессы, корреляционная функция которых намного меньше интервала синтеза апертуры.

С учетом разделения времени запаздывания на постоянную и изменяющуюся во времени компоненты можно определить компоненты, которые будут влиять на функцию неопределенности в дальномерной (вдоль линий равного времени задержки) и азимутальной (вдоль градиента к линиям равного доплеровского смещения) плоскости.

Нестабильность частот опорных генераторов. Известно, что изменения несущей частоты опорных генераторов можно описать двумя случайными процессами с различными корреляционными функциями $f = f_0 + n_1(t) + n_2(t)$, первый из которых описывает долговременную нестабильность, а второй — кратковременную.

В однопозиционных РСА при использовании когерентного гетеродина (и аналогичных ему схем обеспечения когерентного приема) основные искажения вносит кратковременная нестабильность частоты (на интервале повторения импульсов).

В бистатистических РСА существенное влияние оказывают обе компоненты. При использовании предложенного алгоритма обеспечения когерентного накопления для различных видов опорных сигналов (3.80)–(3.84) увеличение искажений по отношению к однопозиционной РСА либо по отношению к идеальному случаю происходит исключительно за счет функции $\chi(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \exp \{-j(\omega_{0k} - \omega_{0i})\tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}$.

Изменение характеристик трассы распространения сигналов.

Вследствие изменений условий распространения сигнала на протяжении времени синтеза апертуры в приемном устройстве возникают амплитудно-фазовые флуктуации, определяемые $K_{ik}(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$. Влияние такого рода искажений на работу моностатических РСА достаточно хорошо изучено. В бистатистических системах с синтезированием апертуры для случая (3.84) величина искажений будет такой же, как и в моностатической РСА при прочих равных условиях.

При использовании предложенного алгоритма для случая неизвестных характеристик трассы “передатчик–приемник” искажения будут больше за счет наличия в выходном эффекте произведения $\dot{K}_{ik}(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \dot{K}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$. При плотной пространственной конфигурации бистатистической РСА влиянием $\dot{K}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)$ можно пренебречь и, соответственно, полагать, что они соответствуют однопозиционной РСА.

Если пространственная конфигурация бистатистической пары такова, что расстояние между передатчиком и приемником намного больше расстояния от приемника до поверхности, при формировании модифицированного опорного сигнала целесообразно использовать амплитудно-фазовую информацию, полученную по каналу прямого сигнала за счет выделения функции (при известной $\exp \{j\omega_{0i}\tau^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)\}$)

$$\frac{1}{\dot{K}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \dot{G}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)} \exp \{-j\omega_{0i}(t' + mT_R) + \varphi_{i0}\}. \quad (3.85)$$

При этом результат согласованной фильтрации

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{Sik}(\mathbf{r}_1) = & \int_0^T \int_D \dot{F}_{ik}[\mathbf{r}, \lambda(\mathbf{r})] \dot{A}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \sum_{m=-\infty \dots \infty} \dot{S}_{0ik}[t' + mT_R - \\ & - \tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \dot{S}_{0ik}^*[t' + mT_R - \tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)] \times \exp \{j[-\omega_{0k} \times \\ & \times \tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) + \omega_{0i}\tau(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)]\} dt d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.86)$$

позволяет существенно упростить требования к калибровке радиолокатора, так как пространственно-временная функция $\dot{A}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) =$

$= \frac{\dot{K}_{ik}(t, \mathbf{r}) \dot{G}_{ik}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)}{\dot{K}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \dot{G}_{ik}^d(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i)}$ для такой конфигурации в общем случае имеет намного больший интервал корреляции и меньшую интенсивность флуктуаций. Величина искажений в этом случае примерно соответствует однопозиционной РСА, расположенной в $\mathbf{r}_i$.

Траекторная нестабильность носителей. Разделим времена задержки в прямом и отраженном каналах приема на постоянную и переменную во времени составляющие, $\tau_{ik}^d(t) = \tau(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \cong \frac{R_{ki0}(\mathbf{r})}{c} + \frac{\Delta R_{ik}^2(t)}{c 2R_{ki0}(\mathbf{r})}$, $\tau(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \cong \frac{R_{i0}(\mathbf{r}) + R_{k0}(\mathbf{r})}{c} + \frac{1}{c} \left[\frac{\Delta R_i^2(t, \mathbf{r})}{2R_{i0}(\mathbf{r})} + \frac{\Delta R_k^2(t, \mathbf{r})}{2R_{k0}(\mathbf{r})} \right]$. Погрешность определения начальных координат передатчика/приемника $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}'_i$, $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k + \mathbf{r}'_k$ приводит к изменению постоянной и переменной частей времени задержки в прямом и отраженном каналах

$$\tau'_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \frac{\|\mathbf{r}_i + \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}\| + \|\mathbf{r}_k + \mathbf{r}'_k - \mathbf{r}\|}{c}, \quad (3.87)$$

$$\tau'_\Delta(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{c} \left[\frac{[\Delta \mathbf{r}_i(t), 0,5\Delta \mathbf{r}_i(t) - \Delta \mathbf{r}_{i0}(\mathbf{r})]}{\|\mathbf{r}_i + \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}\|} + \frac{[\Delta \mathbf{r}_k(t), 0,5\Delta \mathbf{r}_k(t) - \Delta \mathbf{r}_{k0}(\mathbf{r})]}{\|\mathbf{r}_k + \mathbf{r}'_k - \mathbf{r}\|} \right], \quad (3.88)$$

$$\tau'^d_{0'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \frac{\|\mathbf{r}_i + \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_k - \mathbf{r}'_k\|}{c}, \quad (3.89)$$

$$\tau'^d_{\Delta'}(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{c} \left[\frac{[\Delta \mathbf{r}_{ik}^d(t), 0,5\Delta \mathbf{r}_{ik}^d(t) - \Delta \mathbf{r}_{ik0}^d]}{\|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_k\|} \right]. \quad (3.90)$$

Погрешность определения скоростей (в рамках аппроксимации закона движения носителей на интервале синтеза апертуры линейным) влияет исключительно на величины $\tau_\Delta(t)$:

$$\tau'_\Delta(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{c} \left[\frac{[\mathbf{v}'_i t, 0,5\mathbf{v}'_i t - \Delta \mathbf{r}_{i0}(\mathbf{r})]}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|} + \frac{[\mathbf{v}'_k t, 0,5\mathbf{v}'_k t - \Delta \mathbf{r}_{k0}(\mathbf{r})]}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}\|} \right], \quad (3.91)$$

$$\tau'^d_{\Delta'}(t, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{c} \left[\frac{[\mathbf{v}'^d_{ik} t, 0,5\mathbf{v}'^d_{ik} t - \Delta \mathbf{r}_{ik0}^d]}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k\|} \right]. \quad (3.92)$$

Изменения величин (3.87)–(3.92) приводят к смещению и/или искажению пространственных функций неопределенности при синтезе апертуры. Как показывает анализ этих выражений, ошибки определения времени задержки в канале отраженного сигнала, вызванные нестабильностью траектории носителей, неточностью определения их координат и/или скоростей, оказывают на оценки комплексного коэффициента отражения такое же влияние, как и в случае однопозиционной системы. При этом полагается,

что характер этих нестабильностей близок или одинаков для передатчика и приемника. Отличие вызвано в основном тем, что в однопозиционной РСА нестабильность частоты в выражении (3.81) относится к одному генератору в пределах одного периода повторения зондирующего сигнала, а для случая бистатической системы — это нестабильность опорных генераторов приемника и передатчика.

Дополнительная компонента, определяющая ошибки формирования радиолокационных изображений, связана с предложенным алгоритмом когерентной обработки и определяется неточностью определения времени задержки по прямому каналу $\exp \{j[\omega_{0k}\tau_{ik}^d(t) - \omega_{0i}\hat{\tau}_{ik}^d(t)]\} dt$. Наиболее существенна такая ошибка в случае близкого расположения приемника и передатчика, при выполнении условия $\text{Max}\{\tau_{ik}^d(t)\} \ll \text{Max}\{\tau_{ik}(t, \mathbf{r})\}$.

Величина этой ошибки может быть уменьшена за счет слежения за временем задержки и частотой Доплера $S_{ik}^d(t, \mathbf{r}; \varphi_k)$. Точность определения этих величин в случае некогерентной обработки ЛЧМ-сигнала (при несогласованном движении приемника и передатчика прямой сигнал будет модулирован по частоте) определяется матрицей, обратной информационной матрице дисперсии ошибок

$$\Sigma = \begin{pmatrix} (1 + 4d^2)/2\mu \cdot (2\pi F_{СК})^2 & T_{\Theta}(1 + 4d^2)/2\mu \cdot (2\pi T_{СК})^2 2F_m \\ T_{\Theta}(1 + 4d^2)/2\mu \cdot (2\pi T_{СК})^2 2F_m & (1 + 4d^2)/2\mu \cdot (2\pi F_{СК})^2 \end{pmatrix},$$

где $T_{СК}$ — среднеквадратичная длительность сигнала; $2F_{СК}$ — среднеквадратичная ширина спектра сигнала; μ — отношение сигнал–помеха; $d = 2F_m T_{\Theta}$ — произведение эффективной длительности сигнала на максимальную частоту доплеровского сдвига.

Исследование влияния погрешностей определения пространственного положения приемника и передатчика, изменения частот опорных генераторов, а также неконтролируемых колебаний траектории выполнялось путем моделирования пространственных функций неопределенности для бистатической системы, обработка в которой ведется в соответствии с предложенным алгоритмом.

Для верификации возможности построения приемных устройств, соответствующих предложенным алгоритмам когерентного приема периодических сигналов со случайными начальными фазами, было выполнено моделирование процессов обработки прямого $S_{ik}^d(t, \mathbf{r}; \varphi_k)$ и отраженного сигнала $S_{ik}(t, \mathbf{r}; \varphi_k)$. В результате было показано, что использование предложенного алгоритма обработки позволяет обеспечить когерентный прием в бистатических системах с синтезированием апертуры антенны и построить комплексные радиолокационные изображения поверхности с точностью до калибровочных величин.

Предложенный алгоритм формирования радиолокационных изображений был исследован с учетом различного рода дестабилизирующих факторов (неточностей определения координат и скоростей приемника и передатчика, неконтролируемых изменений траектории носителей, изменений частот опорных генераторов).

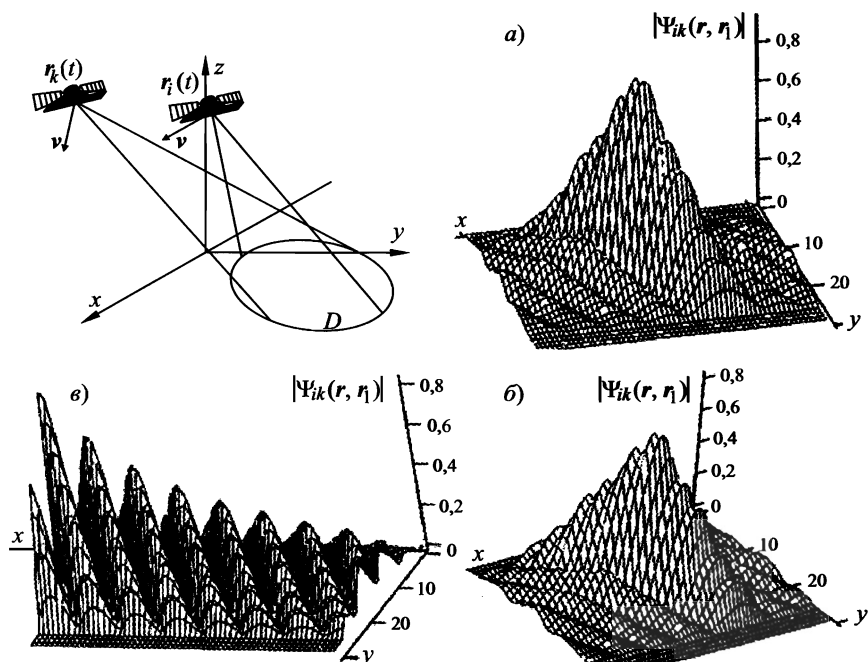


Рис. 3.68. Пространственная конфигурация РСА и соответствующие ПФН. 1 — в идеальном случае, 2, 3 — при неточности определения координат и в случаях $\text{Max}\{\tau_{ik}^d(t)\} \ll \text{Max}\{\tau_{ik}(t, \mathbf{r})\}$, $\text{Max}\{\tau_{ik}^d(t)\} \sim \text{Max}\{\tau_{ik}(t, \mathbf{r})\}$, соответственно

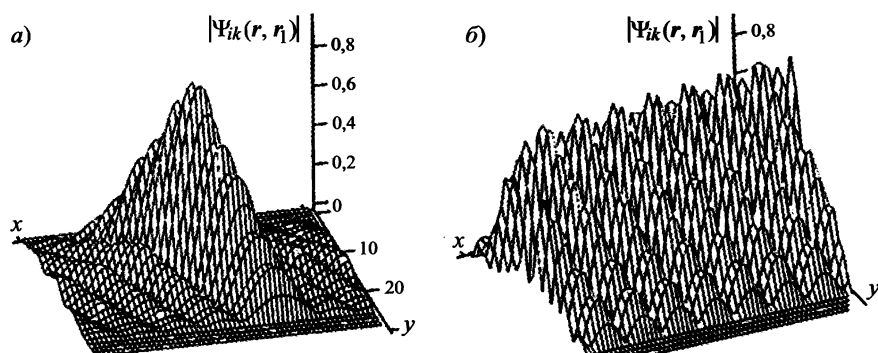


Рис. 3.69. Вид функции неопределенности при отсутствии рассинхронизации времен опорных генераторов и при рассинхронизации 10 %

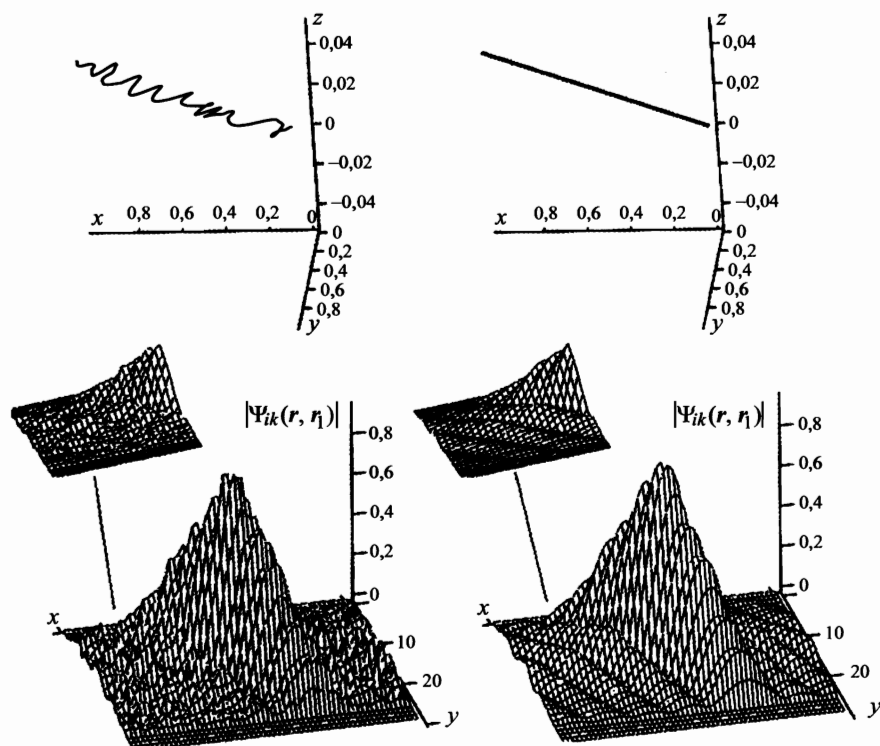


Рис. 3.70. Вид модуля ПФН как функций, зависящих от траектории носителя

Из представленных результатов моделирования видно, что существенное влияние на поведение ПФН при “плотной” конфигурации элементов бистатической РСА оказывает ошибка в прямом канале. Для ее уменьшения при $\text{Max}\{\tau_{ik}^d(t)\} \ll \text{Max}\{\tau_{ik}(t, \mathbf{r})\}$ целесообразно использовать дополнительные средства определения вектора состояния и синхронизации шкал времени, например, спутниковые навигационные системы. При обработке радиолокационной информации $S_{ik}^d(t, \mathbf{r}; \varphi_k)$ на наземных станциях возможно использование данных определения.

Список литературы

1. Ксендзук А. В. Принципы создания, преимущества и характеристики многопозиционных радиолокационных систем с синтезированием апертуры антенны // Радиоэлектронные и компьютерные системы. — Вып. 3. — Харьков: “ХАИ”, Украина, 2003. — С. 35–41.
2. Ксендзук А. В. Оптимизация обработки в многопозиционной системе с синтезированием апертуры антенны при факторизации комплексного коэффициента отражения // Измерительная и вычислительная техника в технологических процессах. — 2002. — № 2. — Хмельницкий, Украина. — С. 52–56.

3. Веб-сайт по многопозиционным PCA. <http://mpsar.narod.ru>.
4. *Ksendzук A. V., Volosyuk V. K., Sologub N. S.* Perspectives, principles of creation and advantages of multiposition radiolocation system with synthetic aperture // 15 International Crimean Conference Microwave & Telecommunication Technology, Sept. 12–16, 2005. — P. 945–947.
5. *Krieger G., Fiedler H., Moreira A.* Bi- and Multi-Static SAR: Potentials and Challenges // 5th European Conference on Synthetic Aperture Radar EUSAR 2004, Ulm, Germany. — 2004. — Vol. 2. — P. 365–371.
6. *Boerner W.* Recent Developments of Radar Remote Sensing // Proceeding of 6th European Conference on Synthetic Aperture Radar EUSAR 2006. — Dresden, Germany.
7. *Фалькович С. Е.* Прием радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех. — М.: Советское радио, 1961. — 312 с.
8. *Бакут П. А., Большаков Б. И., Герасимов Б. М.* Вопросы статистической теории радиолокации — М.: Советское радио, 1963. — Т. 1. — 424 с.
9. Радиолокационные станции с синтезированием апертуры антенны / Антипов В. Н., Горянинов В. Т., Кулин А. Н. и др. — М.: Радио и связь, 1988. — 304 с.
10. *Кондратенков Г. С., Фролов А. Ю.* Радиовидение. Радиолокационные системы дистанционного зондирования Земли. — М.: Радиотехника, 2005. — 368 с.
11. Многопозиционные радиотехнические системы / Кондратьев В. С., Котов А. Ф., Марков Л. Н. и др. — М.: Радио и связь, 1986. — 164 с.
12. *Черняк Я. С.* Многопозиционная радиолокация. — М.: Радио и связь, 1993.
13. *Ксэндзук А. В.* Комплексная система мониторинга районов экологических катастроф // 3-я Международная научно-практическая конференция “Проблемы разработки и внедрения современных информационных технологий мониторинга окружающей среды и управления экологической и информационной безопасностью в регионах”. — Киев–Харьков–Крым: Украинский институт исследований окружающей среды и ресурсов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”, Украина. — 2004. — С. 152–154.
14. *Ксэндзук А. В.* Использование полуактивных многопозиционных радиолокационных систем // Міжнародна науково-практична конференція “Інтегровані комп’ютерні технології в машинобудуванні ІКТМ — 2003”. — Харків: НАУ „ХАИ”, 2003. — С. 209.
15. *Ксэндзук А. В.* Энергетический потенциал ГЛОНАСС/GPS для решения задач ДЗ // Тезисы докладов III-й научно-практической конференции “Применение спутниковых радионавигационных систем (GNSS) в Украине”. — Харьков, Украина. — 2002. — С. 123–126.
16. *Ксэндзук А. В.* Использование навигационных систем как элементов глобальной многопозиционной системы картографирования поверхности // Тезисы докладов III-й научно-практической конференции “Применение спутниковых радионавигационных систем (GNSS) в Украине”. — Харьков, Украина. — 2002. — С. 121–122.
17. *Ксэндзук А. В.* Оптимизация обработки в многопозиционной системе с синтезированием апертуры антенны при факторизации комплексного коэффициента отражения // Измерительная и вычислительная техника в технологических процессах. — Хмельницкий, Украина. — 2002. — № 2. — С. 52–56.

18. Ксендзук А. В. Критерии и алгоритмы оптимизации обработки в системах дистанционного зондирования // Вестник харьковского национального университета имени В. Н. Каразина. — Харьков, Украина. — 2004. — № 646. — С. 116–119.
19. Ксендзук А. В. Методы комплексирования в многопозиционных радиолокационных системах с синтезированием апертуры антенны // Третья Харьковская конференция молодых ученых “Микроволновая электроника и радиолокация”. — Харьков, Украина. — 2004. — С. 39–40.
20. Ксендзук А. В. Оптимальная обработка стохастических полей в МПРСА // Вестник харьковского национального университета имени В. Н. Каразина. — Харьков, Украина. — 2006. — № 712. — С. 30–32.
21. Ксендзук А. В. Оптимизация многопозиционных систем дистанционного мониторинга по энергетическим показателям // 2-я Международная научно-практическая конференция “Современные информационные технологии управления экологической безопасностью регионов, природопользованием и действиями в чрезвычайных ситуациях”. — Киев–Харьков–Крым: Украинский институт исследований окружающей среды и ресурсов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”, Украина. — 2003. — С. 64–65.
22. Ксендзук А. В., Жеребятнев Д. П. Метод адаптивного обнаружения протяженных объектов на фоне мультипликативных помех // Вестник Восточноукраинского национального университета имени Владимира Даля. — Луганск, Украина. — 2004. — № 12 (82). — С. 125–129.
23. Ксендзук А. В. Алгоритмы оптимального и квазиоптимального обнаружения пространственных областей с характерными законами отражения в МПРСА // Системи обробки інформації. — Харків ХУ ПС. — 2005 Вип. 9(49). — С. 87–93.
24. Ксендзук А. В., Евсеев И. А. Особенности обнаружения объектов в бистатистических и многопозиционных РСА // Авиационно-космическая техника и технология. — Харьков, ХАИ. — 2005. — № 2. — С. 62–68.
25. Ксендзук А. В. Алгоритмы обнаружения и идентификации точечных целей в многопозиционных РСА // XXIII всероссийского симпозиума “Радиолокационное исследование природных сред”. — Вып. 5. — СПб., 2005. — С. 133–139.
26. Ксендзук А. В. Учет особенностей интерпретации изображений при формировании критериев качества функционирования систем ДЗ // Перша науково-технічна конференція Харківського університету Повітряних Сил, 16–17 лютого 2005 р. Тези доповідей. — Харків : Харківського університету Повітряних Сил, 2005. — С. 164.
27. Ksendzук A. V., Volosyuk V. K., Sologub N. S. Modeling SAR primary and secondary processing algorithms. Estimating quality of the processing techniques // 5th European Conference on Synthetic Aperture Radar EUSAR 2004. — Vol. 2. — Ulm, Germany, 2004. — P. 1013–1016.
28. Ксендзук А. В. Принципы и алгоритмы имитационного статистического моделирования пространственно-временных процессов и их обработки в радиолокационных системах с синтезированием апертуры антенны // Вестник Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина. — Харьков, Украина. — 2004. — № 622. — С. 102–105.
29. Ksendzук A. V., Volosyuk V. K., Sologub N. S. Perspectives, principles of creation and advantages of multiposition radiolocation system with synthetic aperture // 15 International Crimean Conference Microwave & Telecommunication Technology, Sept. 12–16, 2005. — P. 945–947.

30. Ксендзук А. В. Использование спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС/GPS для дистанционного зондирования поверхности // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2003. — Т. 8, № 5. — С. 8–15.
31. Ксендзук А. В. Градиентная оптимизация многопозиционных радиолокационных систем с синтезированием апертуры антенны // Радиоэлектронные и компьютерные системы. — Харьков “ХАИ”, Украина. — 2006. — Вып. 1(13). — С. 28–30.
32. Ksendzук A. V. Optimisation transmitter-receiver location in bistatic SAR // Microwave and Telecommunication Technology, 2003. CriMiCo 2003 // 13th International Crimean Conference, 8–12 Sept., 2003. — P. 763–766.
33. Ксендзук А. В. Методика и особенности выбора пространственных конфигураций и сигнальных групп в МПРСА // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2005. — Т. 10, № 7. — С. 61–69.
34. Ксендзук А. В. Выбор групп сигналов в многопозиционных РСА // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. — Харків, 2006. — Вип. 1(7). — С. 60–63.
35. Ксендзук А. В. Кодовые сигнальные группы в многопозиционных системах дистанционного зондирования // Защита информации, сборник научных трудов НАУ. — Киев, Украина. — 2003. — Вып. 10. — С. 193–200.
36. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы / Пер. с англ. под ред. В. С. Кельзона. — М.: Советское радио, 1971. — 312 с.
37. Ксендзук А. В. Использование шумоподобных сигналов в радиолокационных системах дистанционного зондирования // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2004. — Т. 9, № 9–10. — С. 62–72.
38. Теория и применение псевдослучайных сигналов / А. И. Алексеев, А. Г. Шереметьев и др. — М.: Наука, 1969. — 437 с.
39. Варакин Л. Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. — М.: Радио и связь, 1985. — 217 с.
40. Ksendzук A. V., Volosyuk V. K. Some aspects of usage of the pseudo noise sequences in the radiolocation systems // Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals. — Sevastopol, Ukraine. — 2004. — P. 234–236.
41. Ксендзук А. В. Использование стохастических моделей поверхности при активном дистанционном зондировании земли // Вестник ХГПУ. — 2000. — Вып. 128. — С. 6–12.
42. Ксендзук А. В. Исследование функций неопределенности в радиосистемах с синтезированием апертуры // Авиационно-космическая техника и технология. — Харьков: ХАИ. — 2000. — Вып. 21. — С. 148–152.
43. Ксендзук А. В., Евсеев И. А., Клевец С. И. Особенности применения шумоподобных сигналов в моностатических и бистатических РЛС // Системи обробки інформації. Збірник наукових праць. — Харків: ХВУ, 2004. — Вип. 12 (40). — С. 104–110.
44. Ксендзук А. В., Волосюк В. К., Евсеев И. А. Повышение разрешающей способности РСА при использовании шумоподобных сигналов с учетом стохастического характера отражающей поверхности // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: Сборник научных трудов. — Вып. 26. — Харьков: Национальный аэрокосмический университет ХАИ, 2005. — С. 133–138.

45. *Ксендзук А. В.* Использование навигационных систем как элементов глобальной многопозиционной системы картографирования поверхности // Тезисы докладов III-й научно-практической конференции "Применение спутниковых радионавигационных систем (GNSS) в Украине". — Харьков, Украина. — 2002. — С. 121–122.
46. *Ксендзук А. В.* Использование спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС/GPS для дистанционного зондирования поверхности // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2003. — Т. 8, № 5. — С. 8–15.
47. *Ксендзук А. В.* Пространственные функции неопределенности многопозиционных систем дистанционного зондирования, основанных на использовании спутников GPS // Радиоэлектронные и компьютерные системы. — Харьков "ХАИ", Украина. — Вып. 1. — 2003. — С. 26–32.
48. Глобальная навигационная система ГЛОНАСС / Болдин В.А., Зубинский В.И., Зурабов Ю.Г., Иванов Н.Е. и др. / Под ред. В.Н. Харисова, А.И. Перова, В.А. Болдина. — М.: ИПРЖР, 1998. — 400 с.
49. *Ксендзук А. В.* Оптимизация обзора в многопозиционных РСА с фиксированной пространственной конфигурацией // Тезисы докладов XXIII Всероссийского симпозиума "Радиолокационное исследование природных сред". — СПб., 2005. — Вып. 5. — С. 123–128.
50. *Ксендзук А. В., Волосюк В. К., Евсеев И. А.* Особенности формирования выходных эффектов в бистатических РСА // Тезисы докладов XXIII Всероссийского симпозиума "Радиолокационное исследование природных сред". — СПб., 2005. — Вып. 5. — С. 128–133.
51. *Ксендзук А. В.* Алгоритмы когерентной обработки в многопозиционных и бистатических РСА // Авиационно-космическая техника и технология. — Харьков, ХАИ. — 2005. — № 1 (17). — С. 67–70.
52. *Ксендзук А. В., Евсеев И. А., Кухарчук Б. Н.* Исследование влияния нестабильностей на работу бистатической РСА // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: Сб. научн. трудов. Вып. 30. — Харьков: Нац. аэрокосмический ун-т "ХАИ", 2006. — С. 130–134.

ГЛАВА 4

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В ОБЗОРНЫХ РЛС И РСА

Аэрокосмические исследования атмосферы, земной поверхности и ее подповерхностных слоев являются одним из приоритетных направлений в развитии авиационно-космической техники. Решение этих задач необходимо для широкого круга практических применений: при мониторинге существующих природных ресурсов и разработке новых, исследовании экологической обстановки, обеспечении безопасности судоходства и транспортных перевозок, а также для метеорологии, сельского хозяйства и многих других народно-хозяйственных задач.

Наибольшее практическое применение находят системы с цифровой обработкой сигналов, так как именно такой вид обработки позволяет существенно улучшить точность измерений, а также повысить гибкость и надежность аппаратуры обработки РСА при одновременном уменьшении габаритов и потребляемой мощности.

В рамках данной главы рассмотрены особенности первичной и вторичной цифровой обработки процессов в РСА с учетом их стохастического и нестационарного характера, предложены методы создания цифровой аппаратуры аттестации, разработаны и исследованы качественные показатели систем ДЗ, показаны особенности вторичной цифровой обработки радиолокационных изображений и механизм определения динамических, флуктуационных, шумовых и общих ошибок оценки УЭПР в скаттерометрических РСА, исследованы некоторые алгоритмы интерпретации РЛИ (обнаружение протяженных объектов по результатам радиолокационного наблюдения), а также разработаны и исследованы цифровые методы развертки фазы в интерферометрических системах с синтезированием апертуры антенны.

4.1. Модифицированный метод синтезирования апертуры. Особенности цифровой реализации

Приведенный ниже материал является обобщением работ [1–7, 12–28]. Кроме того, здесь выполнено численное моделирование основных аналоговых алгоритмов, полученных ранее, и приведены их цифровые реализации, которые могут быть применены при формировании изображений как в радиолокационных системах обзора поверхностей наземного базирования, в частности в системах обзора морской поверхности, так и в современных бортовых радиолокационных станциях с синтезированной апертурой

(РСА). Основной особенностью как аналоговых так и цифровых алгоритмов является введение операции декоррелирующего (выбеливающего) преобразования, позволяющей существенно повысить их разрешающую способность. Предложенные методы формирования изображений в РСА, включающие в себя операции таких декоррелирующих преобразований, по существу являются модифицированными алгоритмами синтеза апертуры. Их использование в некотором смысле позволяет решить обратную задачу восстановления изображения поверхности, но не по отношению к комплексному коэффициенту отражения или его модулю, а по отношению к удельной ЭПР, являющейся статистической характеристикой принимаемого сигнала как нестационарного случайного процесса.

В дальнейшем основное внимание будет уделяться обработке сигналов в радиолокационных системах типа РСА. Однако полученные результаты вполне применимы для обзорных РЛС наземного базирования.

Физическая интерпретация традиционных алгоритмов синтеза апертуры может быть осуществлена с двух точек зрения. В первом случае считается, что на некотором пространственном интервале движения летательного аппарата осуществляется синфазное сложение сигналов, как и в реальной антенне, в результате чего формируется искусственная апертура, длина которой равна произведению скорости летательного аппарата и времени синтеза апертуры. Во втором случае к этой операции относятся как к процессу корреляционной обработки ЛЧМ сигналов, образующихся естественным путем за счет доплеровского сдвига частоты, обусловленного наличием радиальной составляющей скорости относительно каждой рассеивающей точки. Оба подхода к объяснению физической сущности синтеза апертуры эквивалентны [7].

Однако, как при одном подходе, так и при другом не всегда четко определяется, что подразумевается под формируемым изображением. Лоцируемая поверхность — это достаточно сложный объект в плане ее электродинамического описания и расчета создаваемого ею поля. Расчет поля, рассеянного поверхностью и наблюдаемого в точке приема, обычно осуществляется по скалярным или векторным формулам Кирхгофа [6, 8] при заданных граничных условиях. Однако, для многих поверхностей и, тем более, растительных покровов строго задать эти условия практически невозможно.

Приближенно для монохроматического сигнала формулы Кирхгофа сводятся к упрощенной формуле [10]

$$\dot{s}(t) = \dot{s}_o \int_D \dot{F}(\mathbf{r}) \cdot \frac{e^{j[\omega_0 t - kR(\mathbf{r})]}}{R^2(\mathbf{r})} d\mathbf{r},$$

если ввести в рассмотрение комплексный коэффициент рассеяния элемента поверхности $d\mathbf{r} = dx dy$

$$dF(\mathbf{r}) = \dot{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = (x, y) \in D,$$

где D — подстилающая поверхность, плоская или сферическая, проходящая на некотором среднем уровне относительно своих неровностей; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; $R(\mathbf{r})$ — расстояние до точек поверхности с координатами $\mathbf{r}$. $\hat{F}(\mathbf{r})$ можно рассматривать как удельный коэффициент рассеяния некоторой достаточно малой единичной площадки $d\mathbf{r}$. Тогда в качестве изображения поверхности можно принять либо его действительную и мнимую части, либо модуль, либо квадрат модуля, а элемент поверхности $d\mathbf{r}$ считать точечным рассеивателем. В классических РСА в большинстве случаев именно эти характеристики, являющиеся функциями пространственных координат, восстанавливаются из квадратурных компонент комплексной огибающей принятого сигнала и считаются первичными изображениями.

Однако, корреляционная функция этого коэффициента как случайного процесса для большинства видов земных покровов является очень узкой и даже при высокой разрешающей способности РСА она значительно уже ширины ее функции неопределенности.

В этом случае изображение имеет ярко выраженную пятнистую структуру (спекл-структуру) и не совсем понятно, что следует понимать под изображением и какие его элементы являются полезными, а какие — помеховыми. Ширина отдельного спекла на изображении приблизительно совпадает с шириной функции неопределенности РСА как по азимуту, так и по дальности.

Другой характеристикой поверхности, которую можно рассматривать как ее изображение и к которой приближаются при сглаживании квадрата модуля выходного эффекта РСА, является удельная ЭПР. Можно рассматривать удельную ЭПР как случайную величину, характеризующую степень отражения сигнала по мощности от некоторой элементарной площадки единичной площади. Однако в этом случае она пропорциональна квадрату модуля выходного эффекта РСА и соответствующее изображение содержит указанные спеклы. Можно рассматривать удельную ЭПР как эффективное сечение обратного рассеяния [9], которое является статистической характеристикой поверхности и характеризует степень отражения сигнала по мощности от элементарной площадки единичной площади в среднем. Теоретически удельная ЭПР определяется для некоторой статистически однородной поверхности. Однако, если предположить, что статистическая однородность является локальной, т. е. имеет место на сравнительно небольшой площади, то при сглаживании спекл-структуры квадрата модуля выходного эффекта РСА получают оценку именно этой характеристики как изображения поверхности (если, конечно, речь не идет об обнаружении малоразмерных объектов). В этом случае удельную ЭПР следует рассматривать как статистическую характеристику пространственно-нестационарного (неоднородного) процесса, аналогичную изменяющейся во времени дисперсии для временного нестационарного случайного процесса.

Радиолокационные системы картографирования удельной ЭПР, в том числе и РСА, как известно [11], относят к классу скаттерометрических. Формируемые ими изображения являются оценками удельных ЭПР как

функций пространственных координат. Так как практически в большинстве случаев изображения, формируемые РСА, подвергают сглаживанию различными окнами, то они близки к оценкам удельных ЭПР.

В этом случае к интерпретации понятия синтезирования апертуры как алгоритма формирования изображения с высокой разрешающей способностью за счет межпериодного накопления сигнала на трассе полета можно подойти иным образом. Приведенный ниже анализ справедлив не только непосредственно для азимутальной обработки сигнала, но и для его обработки по дальности.

4.1.1. Синтез апертуры как оптимальная оценка коэффициента рассеяния в рамках метода максимального правдоподобия. В качестве уравнения наблюдения примем простейшую аддитивную смесь сигнала, отраженного от поверхности, и помехи типа белого шума с корреляционной функцией $R_u(t_1, t_2) = \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2)$

$$u(t) = s(t, \dot{F}(\mathbf{r})) + n(t), \quad (4.1)$$

где $s(t, \dot{F}(\mathbf{r}))$ — полезный сигнал, отраженный от поверхности и принимаемый вдольфюзеляжной антенной

$$s(t, \dot{F}(\mathbf{r})) = \operatorname{Re} \int_D \dot{F}(\mathbf{r}) \dot{s}_{\text{ед}}(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.2)$$

Этот сигнал явно зависит только от времени. Связь с коэффициентом рассеяния является операторной (как отображение множества функций $\dot{F}(\mathbf{r})$ во множество сигналов $s(t)$). Сигнал $\dot{s}_{\text{ед}}(t, \mathbf{r})$ является единичным [4]. Это сигнал, который был бы рассеян элементом поверхности $d\mathbf{r}$ с коэффициентом рассеяния $\dot{F}(\mathbf{r}) = 1$.

Для строгого бокового обзора

$$\dot{s}_{\text{ед}}(t, \mathbf{r}) = \dot{G}\left(t - \frac{x}{v}\right) \dot{B}\left(t - \frac{2R}{C}\right) \exp \left\{ j [\omega_0 t - 2kR] - jk \frac{(x - vt)^2}{R} \right\},$$

$$\mathbf{r} = (x, R) \in D.$$

Координаты элементов подстилающей поверхности D здесь характеризуются дальностью R в строго боковой плоскости (вместо y) и азимутальной переменной x вдоль направления полета. В этой формуле $\dot{G}\left(t - \frac{x}{v}\right)$ — диаграмма направленности вдоль фюзеляжной антенны в азимутальном направлении, пересчитанная к координатам x ; $\dot{B}(\cdot)$ — комплексная огибающая зондирующего сигнала. Квадратичный набег фазы $k(x - vt)^2/R_0$ соответствует доплеровскому сдвигу частоты, обусловленному движением летательного аппарата относительно точки $\mathbf{r} = (x, R)$.

Оптимальную оценку коэффициента $\dot{F}(\mathbf{r})$ находим из условия максимума функционала правдоподобия

$$p[u(t) | \dot{F}(\mathbf{r})] = k \exp \left\{ -\frac{2}{N_0} \int_0^T \left[u(t) - \operatorname{Re} \int_D \dot{F}(\mathbf{r}) s_{\text{ед}}(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r} \right]^2 dt \right\}.$$

Поскольку речь идет об оценке функции $\dot{F}(\mathbf{r})$, то задача имеет вариационный характер.

Приравнявая первую вариационную производную нулю, получим интегральное уравнение такого вида

$$\dot{Y}(\mathbf{r}) = \int_0^T u(t) \dot{s}_{\text{ед}}^*(t, \mathbf{r}) dt = \frac{1}{2} \int_D \dot{F}(\mathbf{r}_1) \dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1, \quad (4.3)$$

где

$$\dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \int_0^T \dot{s}_{\text{ед}}(t, \mathbf{r}) \dot{s}_{\text{ед}}^*(t, \mathbf{r}_1) dt = \int_0^T \dot{S}_{\text{ор}}(t, \mathbf{r}) \dot{S}_{\text{ор}}^*(t, \mathbf{r}_1) dt \quad (4.4)$$

— функция неопределенности РЛС, совпадающая с функцией неопределенности РСА с фокусированной обработкой принятых сигналов. Здесь $\dot{S}_{\text{ор}}(t, \mathbf{r})$ — комплексная огибающая единичного сигнала, отличающаяся от единичного сигнала отсутствием множителя $\exp(j\omega_0 t)$. В интегральном уравнении (4.3) $u(t)$ — вещественная функция. Представляя входящие под знак интеграла в левой части уравнения функции $u(t)$ и $\dot{s}_{\text{ед}}(t, \mathbf{r})$ в виде

$$u(t) = \operatorname{Re} \dot{U}_{\text{ор}}(t) e^{j\omega_0 t}, \quad \dot{s}_{\text{ед}}(t, \mathbf{r}) = \dot{S}_{\text{ор}}(t, \mathbf{r}) e^{j\omega_0 t},$$

получим, что

$$\dot{Y}(\mathbf{r}) = \int_0^T \dot{U}_{\text{ор}}(t) \dot{S}_{\text{ор}}^*(t, \mathbf{r}) dt. \quad (4.5)$$

Эти интегралы соответствуют классическому алгоритму синтеза апертур с фокусированной обработкой принимаемого сигнала $u(t)$.

Оптимальная оценка коэффициента рассеяния должна находиться в результате решения задачи обращения интегрального уравнения (4.3)

$$\hat{F}(\mathbf{r}) = L_{\psi}^{-1} \{ \dot{Y}(\mathbf{r}) \}, \quad (4.6)$$

где L_{ψ}^{-1} — обратный оператор с компактным ядром $\dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$.

Такая задача является некорректной и ее решение требует определенной регуляризации, например, статистической, за счет введения априорных сведений о поведении коэффициента $\dot{F}(\mathbf{r})$. Однако, это мало что дает, так как обычно характерный интервал корреляции комплексного процесса $\dot{F}(\mathbf{r})$ значительно меньше ширины функции неопределенности даже для РСА с очень высоким разрешением и в азимутальном направлении, и по дальности. Поэтому, чаще всего, в качестве оценки коэффициента $\dot{F}(\mathbf{r})$

принимают значение $\dot{Y}(\mathbf{r})$

$$\hat{F}(\mathbf{r}) = \dot{Y}(\mathbf{r}). \quad (4.7)$$

Это равенство будет точным, если отсутствуют шумы и коэффициент $\dot{F}(\mathbf{r})$ постоянен в пределах функции неопределенности $\dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$. Однако, на практике имеет место обратная ситуация. В пределах функции неопределенности этот коэффициент меняется достаточно быстро, что и является причиной появления спеклов и трудности определения понятия самого изображения поверхности.

Тем не менее в качестве первичных изображений поверхности обычно принимают либо действительную и мнимую часть комплексного выходного эффекта РСА, т.е. $\text{Re } \dot{Y}(\mathbf{r})$ и $\text{Im } \dot{Y}(\mathbf{r})$, либо модуль этой функции

$$|\dot{Y}(\mathbf{r})| = \sqrt{[\text{Re } \dot{Y}(\mathbf{r})]^2 + [\text{Im } \dot{Y}(\mathbf{r})]^2},$$

либо квадрат модуля $|\dot{Y}(\mathbf{r})|^2$.

Модуль или квадрат модуля затем подвергают сглаживанию различными фильтрами (медианными фильтрами, Ли, фильтрами Фроста и др.).

При сглаживании величин $|\dot{Y}(\mathbf{r})|^2$ полученные изображения будут близки к зависимостям удельных ЭПР $\sigma^0(\mathbf{r})$ от пространственных координат $\mathbf{r}$. Поэтому, если не рассматриваются задачи обнаружения малоразмерных целей, требующие специфических методов фильтрации изображений или задачи подчеркивания контуров, то в качестве искомого изображения в РСА можно принять зависимость

$$\hat{\sigma}^0(\mathbf{r}) = \langle |\dot{Y}(\mathbf{r})|^2 \rangle, \quad (4.8)$$

где $\langle \cdot \rangle$ — знак усреднения.

В этом случае оценка удельной ЭПР $\hat{\sigma}^0(\mathbf{r})$ — это статистическая характеристика случайного нестационарного комплексного процесса $\dot{Y}(\mathbf{r})$

$$\hat{\sigma}^0(\mathbf{r}) = \langle [(\text{Re } \dot{Y}(\mathbf{r}))^2 + (\text{Im } \dot{Y}(\mathbf{r}))^2] \rangle = 2\sigma_Y^2(\mathbf{r}),$$

где $\sigma_Y^2(\mathbf{r})$ — дисперсии квадратурных компонент $\dot{Y}(\mathbf{r})$. Для простоты здесь полагаем, что квадратурные компоненты независимы, имеют одинаковые дисперсии и средние значения, равные нулю.

Однако, хотя $\hat{\sigma}^0(\mathbf{r})$ является в такой постановке искомым изображением поверхности, оценка удельной ЭПР $\hat{\sigma}^0(\mathbf{r})$, выполненная на основе классической операции синтеза апертуры (4.5), является далеко не оптимальной.

Дальнейшее улучшение этой оценки может быть выполнено на пути обращения интегрального уравнения (4.3) с последующим нахождением оценки $\hat{\sigma}^0(\mathbf{r})$ такого вида

$$\hat{\sigma}^0(\mathbf{r}) = \langle |L_{\psi}^{-1}[\dot{Y}(\mathbf{r})]|^2 \rangle, \quad (4.9)$$

либо на пути решения оптимизационной задачи по восстановлению функции $\hat{\sigma}^0(\mathbf{r})$. При этом полученные оценки будут практически одинаковыми.

Решение оптимизационной задачи по отношению к восстановлению функции $\hat{\sigma}^0(\mathbf{r})$ приведет к необходимости реализации модифицированного алгоритма синтеза апертуры, отличающегося от традиционного (4.5) и позволяющего получить изображение поверхности, т. е. функции $\hat{\sigma}^0(\mathbf{r})$, с существенно большим разрешением.

4.1.2. Модифицированный алгоритм синтеза апертуры.

Для получения состоятельной оптимальной оценки функции $\hat{\sigma}^0(\mathbf{r})$ необходимо находить ее в рамках байесовских критериев качества с учетом априорных сведений, регуляризующих решение этой обратной задачи. Однако, первичные, основные операции, необходимые для оценки этой функции, можно получить и в рамках метода максимального правдоподобия. Полученная оценка будет несостоятельной. Ее можно сгладить на этапе вторичной обработки всеми известными методами оконного усреднения (медианными фильтрами, сигма-фильтрами, фильтрами Ли, Фроста и др.).

Будем считать, что в уравнении (4.1) сигнал $s(t, \dot{F}(\mathbf{r}))$ является стохастическим за счет случайного характера коэффициента рассеяния $\dot{F}(\mathbf{r})$. Тогда корреляционная функция для всего уравнения наблюдения будет иметь вид [6]

$$R_u(t_1, t_2) = \langle u(t_1)u(t_2) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_D \sigma^0(\mathbf{r}) \dot{S}_{\text{ор}}(t_1, \mathbf{r}) \dot{S}_{\text{ор}}^*(t_2, \mathbf{r}) d\mathbf{r} + \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2), \quad (4.10)$$

где

$$\sigma^0(\mathbf{r}) = \int_D \left\langle \dot{F}(\mathbf{r}) \dot{F}^*(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) \right\rangle e^{-j\vec{q}_\perp \Delta\mathbf{r}} d\Delta\mathbf{r}.$$

В случае обратного рассеяния $\vec{q}_\perp = (q_x, q_y) = (2k \sin \theta, \theta)$, где θ — угол между нормалью к поверхности и направлением рассеяния. Это выражение при малом интервале корреляции функции $\dot{F}(\mathbf{r})$ по сравнению с площадью D практически совпадает с преобразованием Фурье и свидетельствует о резонансном характере рассеяния. Удельная ЭПР $\sigma^0(\mathbf{r})$ соответствует значению величины спектральной линии энергетического спектра коэффициента рассеяния $\dot{F}(\mathbf{r})$ на пространственной частоте $2 \sin \theta / \lambda$.

Если предположить, что случайный процесс $u(t)$ является гауссовским с нулевым математическим ожиданием, то функционал правдоподобия относительно параметра $\sigma^0(\mathbf{r})$ можно записать в таком виде [1, 13, 15]:

$$p[u(t) | \sigma^0(\mathbf{r})] = k[\sigma^0(\mathbf{r})] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T u(t_1) W[t_1, t_2, \sigma^0(\mathbf{r})] u(t_2) dt_1 dt_2 \right\}, \quad (4.11)$$

где обратная корреляционная функция находится из уравнения обращения

$$\int_0^T W(t_1, t_2, \sigma^0(\mathbf{r})) \cdot R[t_2, t_3, \sigma^0(\mathbf{r})] dt_2 = \delta(t_1 - t_3).$$

Искомый параметр $\sigma^0(\mathbf{r})$ является функцией $\mathbf{r}$. Поэтому задача поиска максимума функционала (4.11) является вариационной. В результате нахождения первой вариационной производной функционала (4.11) по функции $\sigma^0(\mathbf{r})$ и приравнявая ее к нулю получим интегральное уравнение вида

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^T \frac{\delta R[t_1, t_2, \sigma^0(\mathbf{r})]}{\delta \sigma^0(\mathbf{r})} W[t_1, t_2, \sigma^0(\mathbf{r})] dt_1 dt_2 = \\ = \int_0^T \int_0^T u(t_1) \frac{\delta W[t_1, t_2, \sigma^0(\mathbf{r})]}{\delta \sigma^0(\mathbf{r})} u(t_2) dt_1 dt_2. \quad (4.12) \end{aligned}$$

Вариационную производную от обратной корреляционной функции целесообразно записать следующим образом:

$$\frac{\delta W[t_1, t_2, \sigma^0(\mathbf{r})]}{\delta \sigma^0(\mathbf{r})} = \int_0^T \int_0^T W[t_1, t_2, \sigma^0(\mathbf{r})] \frac{\delta R[t_3, t_4, \sigma^0(\mathbf{r})]}{\delta \sigma^0(\mathbf{r})} W[t_4, t_2, \sigma^0(\mathbf{r})] dt_3 dt_4.$$

Подставляя правые части этого равенства и очевидного тождества

$$W[t_1, t_2, \sigma^0(\mathbf{r})] = \int_0^T \int_0^T W[t_1, t_3, \sigma^0(\mathbf{r})] R[t_3, t_4, \sigma^0(\mathbf{r})] W[t_4, t_2, \sigma^0(\mathbf{r})] dt_3 dt_4$$

в уравнение (4.12) и вычисляя соответствующие вариационные производные, получим интегральное уравнение для нахождения оценки удельной ЭПР

$$|\dot{Y}_{\text{вых}}(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{4} \int_D \sigma^0(\mathbf{r}_1) |\dot{\Psi}_w(\mathbf{r}_1, \mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}_1 + \frac{N_0}{2} \Theta_w(\mathbf{r}), \quad (4.13)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{\text{вых}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T \dot{U}_{\text{ор}}(t_1, \mathbf{r}) W[t_1, t_2, \sigma^0(\mathbf{r})] S_{\text{ор}}^*(t_2, \mathbf{r}) dt_1 dt_2 = \\ = \frac{1}{2} \int_0^T \dot{U}_{\text{ор}}(t_1) S_w^*(t_1, \mathbf{r}) dt_1 \quad (4.14) \end{aligned}$$

— комплексный выходной эффект системы оптимальной обработки принятых колебаний;

$$\dot{S}_w(t, \mathbf{r}) = \int_0^T W[t_1, t_2, \sigma^0(\mathbf{r})] \dot{S}_{\text{ор}}^*(t_2, \mathbf{r}) dt_2 - \text{опорный сигнал};$$

$$\mathfrak{E}_w(\mathbf{r}) = \int_0^T |\dot{S}_w(t, \mathbf{r})|^2 dt - \text{энергия опорного сигнала}.$$

Как видно, функция $|\dot{Y}_{\text{вых}}(\mathbf{r})|^2$ является несостоятельной и смещенной оценкой (смещение устранимо) удельной ЭПР. Левая и правая часть равенства (4.13) будут строго равными, если вычислить от левой части математическое ожидание $\langle |\dot{Y}_{\text{вых}}(\mathbf{r})|^2 \rangle$. Приближенное усреднение левой части может быть выполнено на этапе вторичной обработки с учетом априорных данных о поведении функции $\sigma^0(\mathbf{r})$. Это усреднение (сглаживание) может быть выполнено с помощью указанных выше окон, либо путем суммирования изображений полученных на различных частотах, либо под различными углами зондирования, либо за счет использования субапертур.

Выражение (4.14) можно рассматривать как модифицированный алгоритм синтезирования апертуры. В отличие от классического алгоритма синтезирования апертуры, осуществляющего согласованную фильтрацию принятого сигнала с опорным сигналом, равным единичному сигналу, в модифицированном алгоритме дополнительно осуществляется декорреляция отраженных от земной поверхности сигналов, заключающаяся в их интегрировании с весом $W[t_1, t_2, \sigma^0(\mathbf{r})]$. В результате такой декорреляции характерные интервалы спеклов (размеры пятен) будут значительно меньше, чем при согласованной фильтрации. Поэтому их последующее сглаживание с той же эффективностью может быть выполнено окнами меньшей ширины, что в конечном итоге позволяет повысить разрешающую способность РСА. Функция неопределенности такой РСА

$$\Psi_w(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_0^T \int_0^T \dot{S}_{\text{ор}}(t_1, \mathbf{r}_1) W[t_1, t_2, \sigma^0(\mathbf{r}_2)] \dot{S}^*(t_2, \mathbf{r}_2) dt_1 dt_2 \quad (4.15)$$

существенно уже. Размеры спеклов будут определяться именно этой функцией неопределенности. Следует отметить, что алгоритм (4.14) включает в себя не только модифицированный синтез апертуры, но и модифицированную оптимальную обработку сигналов по дальности (при строго боковом обзоре в боковой плоскости). Все сказанное относительно ширины спеклов относится и к обработке принятых сигналов по дальности. Ширина функции неопределенности (4.15), определяющая разрешающую способность РСА, существенно зависит от отношения сигнал-шум, [24, 25], в том числе и при использовании сложных шумоподобных сигналов [26].

Вид ПФН в зависимости от параметров РСА при различных алгоритмах первичной обработки был впервые исследован в работе [24], полученные результаты показаны на рис. 4.1–4.4.

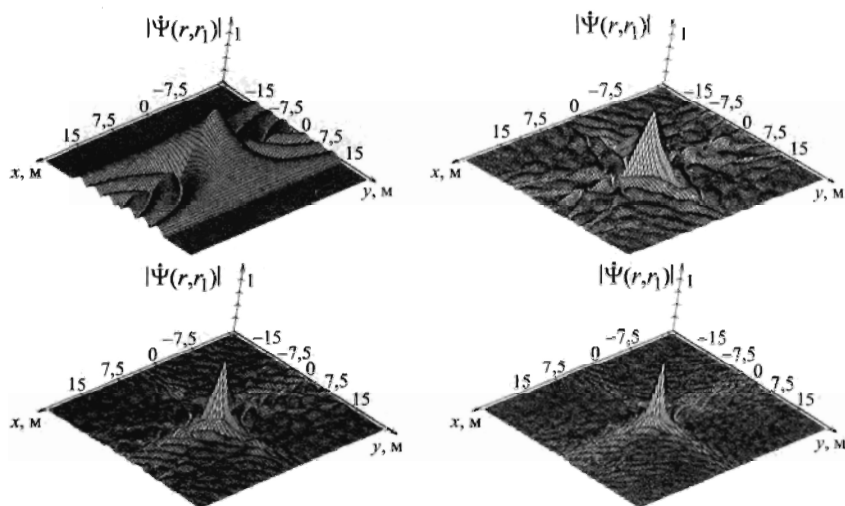


Рис. 4.1. Модуль нормированных пространственных функций неопределенности для импульсного режима работы (одиночный сигнал — синусоидальный импульс с прямоугольной огибающей), равномерной ДН в пределах области обзора. 1 — при согласованной фильтрации; 2–4 при использовании алгоритмов декорреляции, среднее отношение сигнал–помеха 10, 25, 50

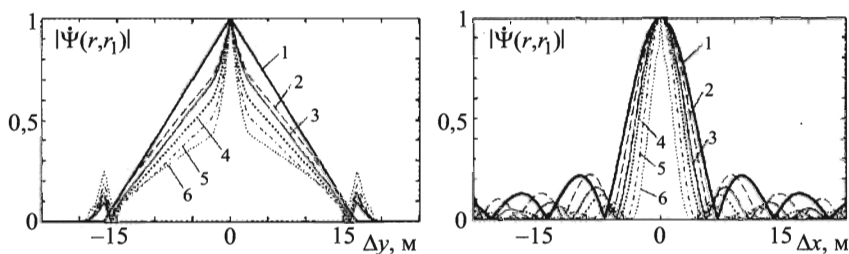


Рис. 4.2. Сечение модуля нормированных пространственных функций неопределенности в дальномерной (слева) и азимутальной (справа) плоскости: 1 — функция неопределенности при согласованной фильтрации; 2–6 функции неопределенности при декорреляции принимаемого сигнала, отношение сигнал–помеха 5, 10, 15, 20, 25

Зависимость ширины ФН от помеховой обстановки легко объяснить, если для описания функции неопределенности перейти в спектральную область. Это можно легко объяснить, если для описания функции неопределенности перейти в спектральную область. Предположим, что $u(t)$ — стационарный процесс и обратная корреляционная функция зависит от разности аргументов, а также учесть, что функция Ψ_w неявно зависит

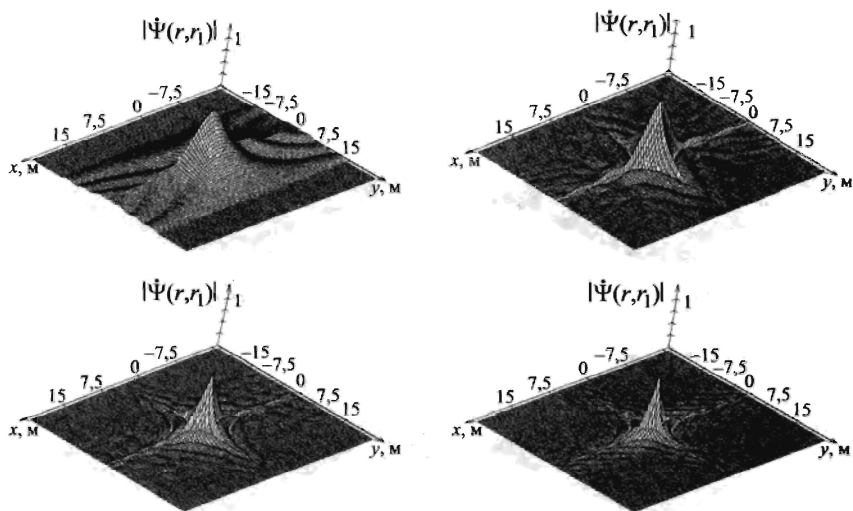


Рис. 4.3. Модуль нормированных пространственных функций неопределенности для импульсного режима работы (одиночный сигнал – синусоидальный импульс с прямоугольной огибающей), “синковой” ДН в пределах области обзора. 1 — при согласованной фильтрации; 2–4 при использовании алгоритмов декорреляции, среднее отношение сигнал–помеха 10, 25, 50

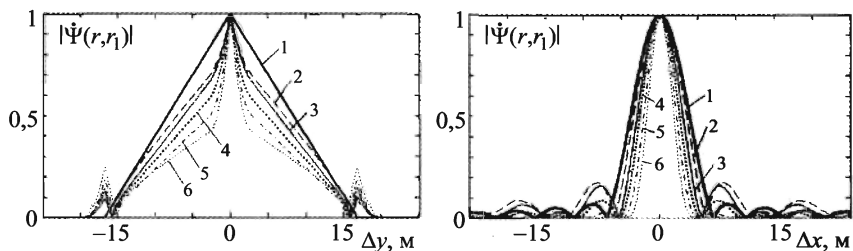


Рис. 4.4. Сечение модуля нормированных пространственных функций неопределенности в дальномерной (слева) и азимутальной (справа) плоскости: 1 — функция неопределенности при согласованной фильтрации; 2–6 функции неопределенности при декорреляции принимаемого сигнала, отношение сигнал–помеха 5, 10, 15, 20, 25

от времени τ . Тогда, переходя к бесконечным пределам интегрирования, получим

$$\dot{\Psi}_w(\tau) = F^{-1} \left[\frac{|\dot{S}(j\omega)|^2}{\sigma_{(r)}^0 |\dot{S}(j\omega)|^2 + \frac{N_0}{2}} \right], \quad (4.16)$$

где $\dot{S}(j\omega)$ — спектр единичного сигнала; F^{-1} — знак обратного преобразования Фурье.

Если $N_0 = 0$, то $\dot{\Psi}(\tau) = \frac{1}{\sigma_0^0(\mathbf{r})} \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

Если N_0 существенно превышает в знаменателе левое слагаемое, то $\dot{\Psi}_w(\tau) \approx F \left[\alpha |S(j\omega)|^2 \right] = \dot{\Psi}(\tau)$, функция неопределенности будет такой же как и у классической РСА. Спектр опорного сигнала $\dot{S}_w(t, \mathbf{r})$ будет равным

$$\dot{S}_w(j\omega, \mathbf{r}) = \frac{\dot{S}^*(j\omega)}{\sigma_0^0(\mathbf{r}) |\dot{S}(j\omega)|^2 + \frac{N_0}{2}}, \quad (4.17)$$

т.е. вид опорного сигнала также зависит от отношения сигнал–шум (от соотношения левого и правого слагаемого в знаменателе). При введении опорного сигнала в алгоритм (4.14) целесообразно ориентироваться на некоторое среднее отношение сигнал–шум. В противном случае опорный сигнал должен адаптивно изменяться в соответствии с изменением величины $\sigma_0^0(\mathbf{r})$. Следует отметить, что формулы (4.16), (4.17) являются приближенными и приведены лишь для пояснения физической сущности модифицированного алгоритма синтеза апертуры. При их выводе не учитывались свойства комплексных огибающих как аналитических процессов.

При решении задач исследования и аттестации цифровых радиолокационных систем необходимо корректно задавать уравнение наблюдения с учетом стохастического характера отраженного от поверхности электромагнитного поля. Для этого целесообразно воспользоваться упрощенной электродинамической моделью поверхности, учитывающей стохастический характер отраженного электромагнитного поля [21]. Связь между комплексным коэффициентом отражения и УЭПР при независимости соседних отражателей определяется выражением

$$R_{\mathbf{r}1, \mathbf{r}2} = \langle \dot{F}_{\mathbf{r}1} \dot{F}_{\mathbf{r}2}^* \rangle = \sigma_{\mathbf{r}1}^0 \delta_{\mathbf{r}1 - \mathbf{r}2}, \quad (4.18)$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$ — дискретные координаты пространства; $\dot{F}_{\mathbf{r}}$ — комплексный коэффициент отражения; $\sigma_{\mathbf{r}}^0$ — удельная эффективная поверхность рассеяния; $\delta_{\mathbf{r}1 - \mathbf{r}2}$ — дельта-функция (функция Дирака).

Модель (4.18) можно получить путем использования двух пространственных цифровых независимых дельта-коррелированных нормальных процессов $\eta_{\mathbf{r}}, \xi_{\mathbf{r}}$, дисперсия которых зависит от поведения УЭПР, рис. 4.5.

В дальнейшем, если не оговорено особо, при визуализации результатов применения алгоритмов первичной и вторичной обработки используется именно модель (4.18). Результат цифровой обработки сигнала, полученного с учетом выражений (4.1), (4.2), (4.5), (4.14) при различной помеховой обстановке (различном среднем отношении сигнал–помеха) показан ниже на рис. 4.7, 4.8.

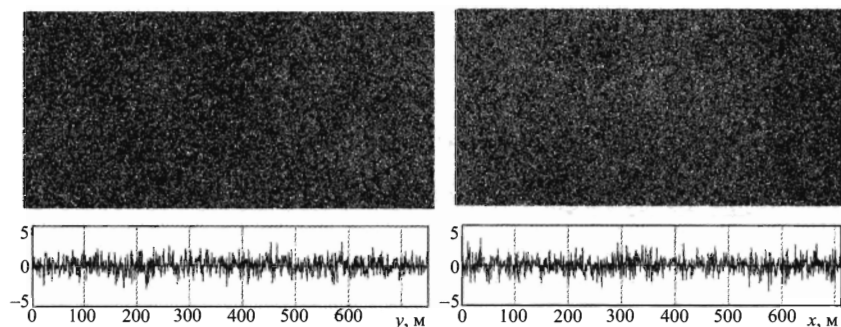


Рис. 4.5. Реальная часть пространственных случайных процессов η_r (слева) и ξ_r (справа), под двумерными изображениями показаны сечения в дальномерной плоскости

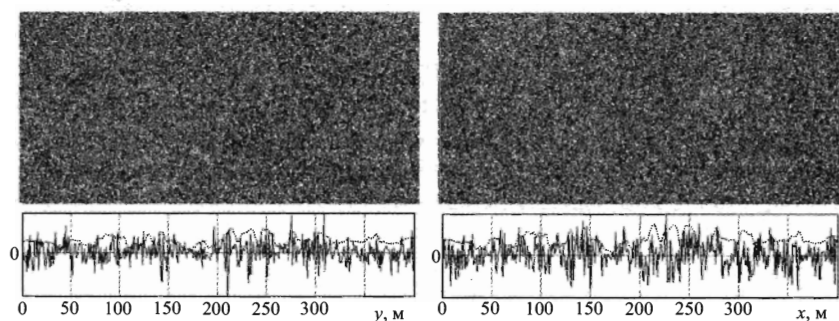


Рис. 4.6. Реальная и мнимая части комплексного коэффициента отражения для модели (4.18)

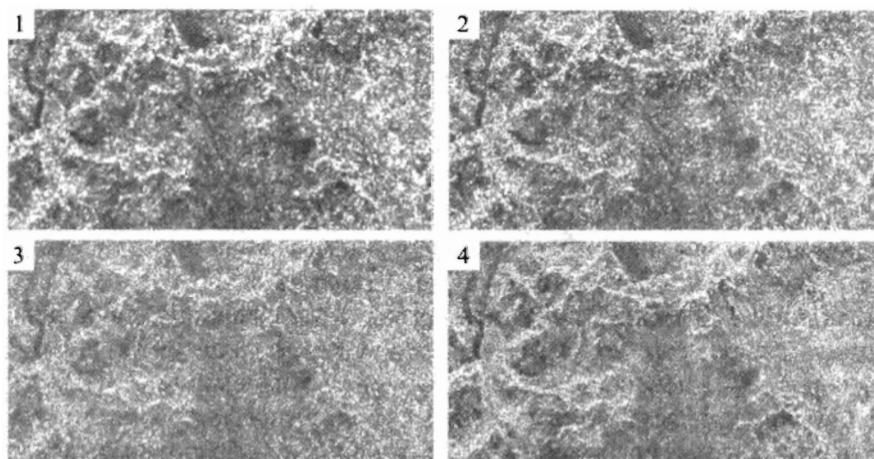


Рис. 4.7. Радиолокационные изображения, полученные после этапа первичной обработки: 1 — при согласованной фильтрации принимаемого сигнала, 2–4 с декорреляцией входного сигнала, среднее отношение сигнал–помеха 25, 50, 75

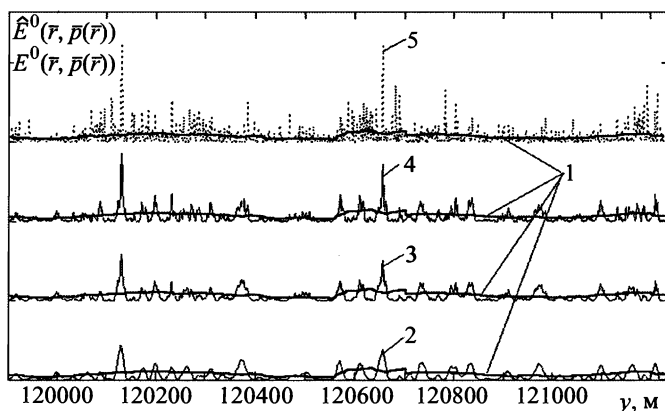


Рис. 4.8. Сечение в дальномерной плоскости радиолокационных изображений, показанных на рис. 4.7. Здесь 1 — поведение удельной ЭПР; 2 — РЛИ при обработке принимаемых сигналов методом согласованной фильтрации; 3–5 — РЛИ при обработке сигнала с декорреляцией, среднее отношение сигнал–помеха 25, 50, и 75

Из представленных результатов видно, что изображения, полученные после этапа первичной обработки, характеризуются высоким уровнем спекл-шума. Поэтому необходимо воспользоваться операциями вторичной обработки для оценки качества РЛИ, выделения протяженных и точечных объектов, оконтуривания пространственных областей, оценивания электрофизических параметров и др.

4.2. Качественные показатели алгоритмов формирования и цифровой обработки первичных радиолокационных изображений в обзорных РЛС и РСА

Как указано ранее, для радиолокационных систем характерен стохастический и нестационарный характер отраженного от поверхности электромагнитного поля, что определяет сложность аналитической оптимизации и обуславливает применение субоптимальных методов первичной и вторичной обработки, полученных при ряде упрощений.

Эти упрощения для большинства практически важных случаев не позволяют аналитически оценить качество различных алгоритмов. По этой причине для их сравнения часто используются результаты цифрового численного имитационного моделирования, принципы которого описаны в работах [27, 28].

Важным фактором при таком сравнении является задание количественных мер, характеризующих точность измерений и, соответственно, целесообразность использования тех или иных алгоритмов первичной или вторичной обработки. При задании этих количественных мер необходимо учесть особенности дальнейшей интерпретации полученных изображений

(обнаружение протяженных и точечных объектов, определение однородных областей и другие). В общем случае целесообразно задать такие показатели качества, которые позволяют выполнить сравнение или оптимизацию РСА для широкого круга научно-практических применений.

В данном разделе предложены критерии сравнения различных алгоритмов обработки в РСА, приведены методы их численного и аналитического определения с учетом стохастического характера принимаемого сигнала. Основное внимание уделяется сравнению ошибок оценки УЭПР в скаттерометрических системах с синтезированием апертуры при использовании различных методов первичной обработки, соответствующих выражениям (4.5) и (4.14).

В качестве количественных величин при задании показателей качества целесообразно использовать функции, зависящие от расстояния между истинным значением вектора параметров поверхности $\mathbf{p}(t, \mathbf{r})$ и его оценкой $\hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r})$. Для этого можно использовать как обычные операторы $\mathbf{d}(t, \mathbf{r}) = \chi\{\mathbf{p}(t, \mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r})\}$, так и их предельные значения в пространственно-временной области, например $\mathbf{d}(t, \mathbf{r}) = \text{Max}_{t, \mathbf{r}} \chi\{\mathbf{p}(t, \mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r})\}$. Наиболее часто используются расстояния, определяемые выражениями [29]:

$$\mathbf{d}_1(t, \mathbf{r}) = |\mathbf{p}(t, \mathbf{r}) - \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r})|, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{d}_2(t, \mathbf{r}) = (\mathbf{p}(t, \mathbf{r}) - \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}))^2, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{d}_3(t, \mathbf{r}) = \text{Max}_{t, \mathbf{r}} \{\mathbf{p}(t, \mathbf{r}) - \hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r})\}. \quad (4.21)$$

В этих выражениях $\mathbf{d}_k(t, \mathbf{r})$ — вектор, каждая из координат которого является пространственно-временной функцией, определяющей ошибку оценки $\mathbf{p}(t, \mathbf{r})$ в точках $\mathbf{r} \in D, t \in (0 \dots T)$.

В ряде случаев целесообразно воспользоваться интегральными значениями ошибок, которые ставят в соответствие $\mathbf{d}_k(t, \mathbf{r})$ вектор скалярных значений $\mathbf{d}_i$

$$\mathbf{d}_i = I_{t, \mathbf{r}} \{\mathbf{d}_k(t, \mathbf{r})\}$$

с помощью интегрального оператора $I_{t, \mathbf{r}}\{\}$, либо число d :

$$d = f \{I_{t, \mathbf{r}} \{\mathbf{d}_k(t, \mathbf{r})\}\} = f\{\mathbf{d}_i\}.$$

Так как вектор наблюдения $\mathbf{u}(t)$ является случайным процессом, то и вектор оценок $\hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r})$ и расстояния (4.19)–(4.21) являются случайными вектор-функциями (величинами). По этой причине для численного определения значений $\mathbf{d}_k(t, \mathbf{r})$ необходимо использовать ансамбль стохастических входных процессов, а окончательные результаты получать путем статистического усреднения. При аналитической оптимизации необходимо использовать статистическое усреднение значений (4.19)–(4.21) по всем возможным значениям функций параметров и их оценок:

$$\rho[t, \mathbf{r}] = \int_P \int_{\hat{P}} \mathbf{d}(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}[t, \mathbf{r}], \hat{\mathbf{p}}[t, \mathbf{r}]) \mathbf{f}\{\hat{\mathbf{p}}[t, \mathbf{r}] | \mathbf{p}[t, \mathbf{r}]\} d\mathbf{p} d\hat{\mathbf{p}}, \quad (4.22)$$

где $\mathbf{f}\{\hat{\mathbf{p}}[t, \mathbf{r}] | \mathbf{p}[t, \mathbf{r}]\}$ — вектор условных плотностей вероятности формирования оценки $\hat{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r})$ при ее истинном значении $\mathbf{p}(t, \mathbf{r})$.

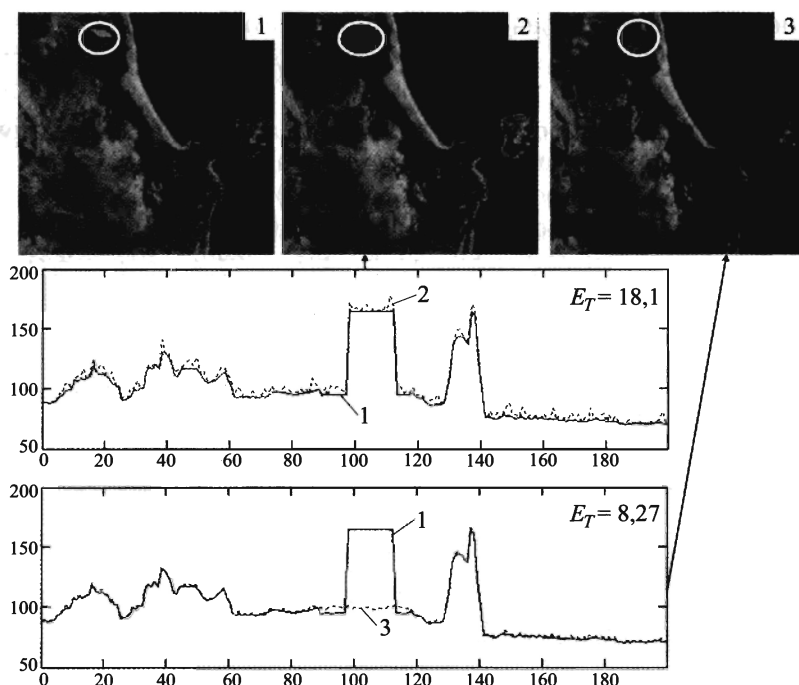


Рис. 4.9. Величина общих ошибок в норме L_2 (положение малоразмерного объекта выделено белой окружностью): 1 — исходное радиолокационное изображение, 2, 3 — искаженное РЛИ; на сечениях показано сравнение искаженных и истинного изображений и величина общих ошибок E_T в норме L_2

В дальнейшем при исследовании радиолокационных изображений будут использоваться нормы L_2 и C_0 , определяемые выражениями

$$D_{L2} = \frac{1}{D} \int_D [\sigma^0(\mathbf{r}) - \hat{\sigma}^0(\mathbf{r})]^2 d\mathbf{r}, \quad (4.23)$$

$$D_{C0} = \text{Max}_D |\sigma^0(\mathbf{r}) - \hat{\sigma}^0(\mathbf{r})|. \quad (4.24)$$

Для систем дистанционного зондирования поверхности целесообразно разделить ошибки на динамические E_D , флуктуационные E_F , шумовые E_N и общие E_T [23, 28, 29]. Такое разделение обусловлено различными причинами их возникновения. Исследование этих ошибок позволяет не только оценить качество функционирования тех или иных алгоритмов, но и оценить целесообразность их использования при решении большинства задач интерпретации.

Использование именно этих ошибок для оценки качества РЛИ обусловлено тем, что наиболее часто применяемый критерий качества — расстояние в норме L_2 между РЛИ и его оценкой (среднеквадратичное отклонение) не может являться универсальным критерием, так как он не учитывает особенностей дальнейшей интерпретации изображений. Так, например, интегральное значение общей ошибки E_T более чувствитель-

но к незначительному изменению оцениваемого параметра на большом пространственном участке, чем к пропуску короткого пространственного импульса (малоразмерного объекта), рис. 4.9.

4.2.1. Динамические ошибки формирования РЛИ. Динамические ошибки в цифровых системах ДЗ обуславливаются искажением оцениваемых параметров (в частности, удельной ЭПР) пространственными функциями неопределенности и операторами вторичной обработки. При определении E_D для скаттерометрических РСА предположим, что имеется набор реализаций стохастического входного процесса $u(t)$

$$\{u(t)\} = \left\{ \operatorname{Re} \int_D \dot{F}(\mathbf{r}) \dot{S}(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r} + n(t) \right\}. \quad (4.25)$$

В случае независимости отдельных реализаций будут выполняться следующие соотношения:

$$\langle \dot{F}_j(\mathbf{r}) \dot{F}_i(\mathbf{r}) \rangle = 0, \quad \langle n_j(t) n_i(t) \rangle = 0. \quad (4.26)$$

Если все измерения равноточны и оценка удельной ЭПР осуществляется путем невзвешенного суммирования:

$$\hat{\sigma}^0(\mathbf{r}) = \langle \{|Y(\mathbf{r})|^2\} \rangle = \frac{1}{N} \sum_i |Y_i(\mathbf{r})|^2, \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_W^0(\mathbf{r}) &= \left\langle \left\{ |Y_W(\mathbf{r})|^2 - \frac{N_0}{2} E_W(\mathbf{r}) \right\} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{N} \sum_i \left(|Y_{Wi}(\mathbf{r})|^2 - \frac{N_{0i}}{2} E_{Wi}(\mathbf{r}) \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

то после ряда несложных преобразований получим, что выражения для сформированных изображений УЭПР, как статистических характеристик нестационарных и неоднородных случайных процессов, можно записать так:

$$\hat{\sigma}^0(\mathbf{r}) = \int_D \sigma^0(\mathbf{r}_1) \cdot |\dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}_1, \quad (4.29)$$

$$\hat{\sigma}_W^0(\mathbf{r}) = \int_D \sigma^0(\mathbf{r}_1) \cdot |\dot{\Psi}_W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}_1. \quad (4.30)$$

Количественно динамические ошибки для норм L_2 и C_0 , позволяющих сравнить РЛИ после цифровой обработки, определим так:

$$E_{L2} = \frac{1}{D} \int_D [\sigma^0(\mathbf{r}) - \hat{\sigma}^0(\mathbf{r})]^2 d\mathbf{r}, \quad (4.31)$$

$$E_{C0} = \operatorname{Max}_D |\sigma^0(\mathbf{r}) - \hat{\sigma}^0(\mathbf{r})|. \quad (4.32)$$

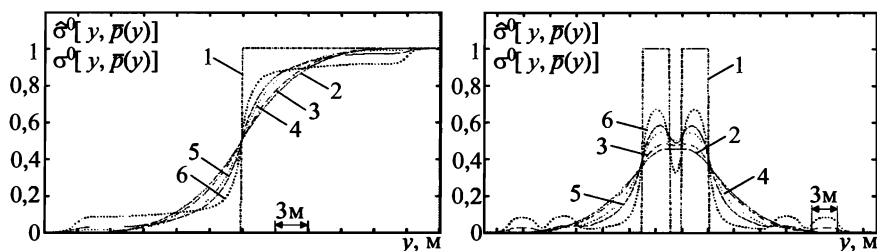


Рис. 4.10. Оценки удельных ЭПР: 1 — поведение нормированной удельной ЭПР; 2 — оценки УЭПР при согласованной фильтрации принимаемого сигнала; 3–6 — оценки УЭПР при обработке входного сигнала алгоритмом с декорреляцией, среднее отношение сигнал–помеха 5, 10, 15, 25

Из выражений (4.31), (4.32) несложно заметить, что чем меньше ширина пространственной функции неопределенности системы ДЗ и чем меньше сглаживающее действие операторов вторичной обработки, тем меньше величина E_D . Таким образом, в системе, использующей при обработке входного процесса алгоритмы декорреляции, при повышении отношения сигнал–помеха динамическая ошибка должна уменьшаться.

Для исследования поведения E_D в скаттерометрических РСА при обработке входного сигнала алгоритмом с декорреляцией и при его согласованной фильтрации было проведено статистическое моделирование процессов формирования РЛИ. Для получения корректных результатов оптимальные выходные эффекты нормировались исходя из условия несмещенности оценок. При определении отношения сигнал–помеха используется среднее значение УЭПР в области D .

Результаты расчета динамических ошибок, как реакции цифровых систем формирования изображений на пространственный скачок (аналог функции Хевисайда) и на пространственную функцию, в виде двух близкорасположенных импульсов показаны на рис. 4.10.

Как видно из результатов моделирования, обработка входного сигнала с учетом стохастического характера отраженного сигнала (графики 3–6 на рис. 4.10) более точно передает контуры на РЛИ, повышает вероятность раздельного наблюдения близких объектов. Точность сохранения деталей РЛИ повышается при увеличении отношения сигнал–помеха.

Пример поведения радиолокационных изображений поверхности после этапа первичной обработки различными алгоритмами приведен на рис. 4.11.

Как видно из рисунка 4.11, при формировании изображений поверхности в соответствии с (4.14) разрешающая способность динамически изменяется при изменении отношения сигнал–помеха (изменении величины σ^0). В областях с большими значениями УЭПР разрешающая способность выше, в областях с малыми значениями УЭПР — ниже. Однако при этом динамические ошибки формирования изображений при обработке принимаемого сигнала алгоритмом с декорреляцией меньше чем динамические ошибки при согласованной фильтрации принимаемого сигнала.

При исследовании зависимости E_D от среднего отношения сигнал–помеха использовался набор из 300 различных радиолокационных изоб-

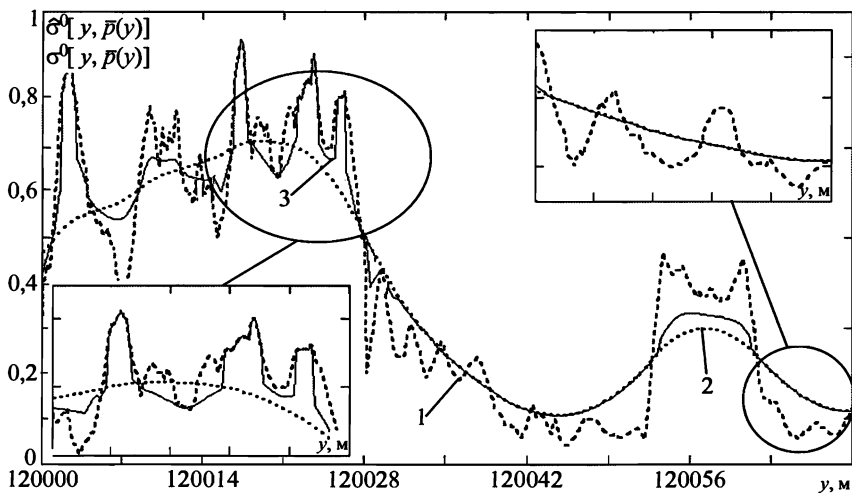


Рис. 4.11. Оценки удельных ЭПР поверхности для различных алгоритмов обработки входного сигнала: 1 — поведение нормированной удельной ЭПР; 2 — оценки УЭПР при согласованной фильтрации принимаемого сигнала; 3–6 — оценки УЭПР при обработке входного сигнала алгоритмом (4.14), среднее отношение сигнал-помеха 5, 10, 15, 25

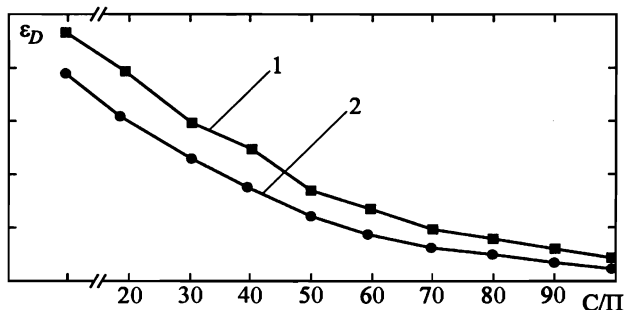


Рис. 4.12. Статистическая зависимость динамических ошибок формирования РЛИ после этапа первичной обработки алгоритмами с декорреляцией входного сигнала как функция среднего отношения сигнал-помеха (1 — для нормы L_2 , 2 — для нормы C_0)

ражений. Значение ошибки при заданном отношении сигнал-помеха определялось путем статистического усреднения значений ошибок, полученных для различных реализаций УЭПР [23]. Результаты расчета приведены на рис. 4.12, здесь первый отсчет по оси ординат соответствует динамическим ошибкам при согласованной фильтрации принимаемого сигнала.

Таким образом, динамические ошибки формирования изображений в скаттерометрических системах при обработке входного сигнала с декорреляцией меньше динамических ошибок при согласованной фильтрации принимаемого сигнала; их уменьшение происходит пропорционально увеличению отношения сигнал-помеха.

4.2.2. Флуктуационные ошибки, обусловленные спекл-структурой РЛИ. Эти флуктуационные ошибки формирования изображений, как статистических характеристик пространственно-временных неоднородных и нестационарных процессов, обусловлены ограниченностью ансамбля реализаций стохастических входных сигналов. Эти ошибки часто называют спекл-шумом; устранение спекл-структуры РЛИ при сохранении высоких качественных показателей является одной из основных задач вторичной обработки [27, 29]. В этом подразделе основное внимание уделяется флуктуационным ошибкам после этапа первичной обработки, т. е. ошибкам для неглаженных (необработанных) РЛИ.

Для определения флуктуационных ошибок, связанных с наличием спекл-шума, предположим, что на входе системы дистанционного зондирования отсутствует аддитивный шум, а оценки удельных ЭПР определяются в соответствии с выражениями:

$$\hat{\sigma}^0(\mathbf{r}) = |\dot{Y}(\mathbf{r})|^2 = \left| \int_0^T u(t) \dot{S}^*(t, \mathbf{r}) dt \right|^2,$$

$$\hat{\sigma}_W^0(\mathbf{r}) = |\dot{Y}_W(\mathbf{r})|^2 = \left| \int_0^T \int_0^T u(t_1) W[t_1, t_2] \dot{S}^*(t_2, \mathbf{r}) dt_1 dt_2 \right|^2.$$

В этом случае флуктуационные ошибки формирования изображений в системах ДЗ при согласованной фильтрации принимаемого сигнала и при его обработке с декорреляцией определяются выражениями:

$$E(\mathbf{r}) = \hat{\sigma}^0(\mathbf{r}) - \sigma^0(\mathbf{r}) = |\dot{Y}(\mathbf{r})|^2 - \langle |\dot{Y}(\mathbf{r})|^2 \rangle, \quad (4.33)$$

$$E_W(\mathbf{r}) = \hat{\sigma}_W^0(\mathbf{r}) - \sigma^0(\mathbf{r}) = |\dot{Y}_W(\mathbf{r})|^2 - \langle |\dot{Y}_W(\mathbf{r})|^2 \rangle. \quad (4.34)$$

После ряда преобразований (4.33), (4.34) несложно получить, что

$$E(\mathbf{r}) = \int_D \left[\int_D \dot{F}[\mathbf{r}_1] \dot{F}^*[\mathbf{r}_2] \dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) - \sigma^0[\mathbf{r}_2] \dot{\Psi}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \right] \dot{\Psi}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2,$$

$$E_W(\mathbf{r}) = \int_D \left[\int_D \dot{F}[\mathbf{r}_1] \dot{F}^*[\mathbf{r}_2] \dot{\Psi}_W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) - \sigma^0[\mathbf{r}_2] \dot{\Psi}_W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \right] \dot{\Psi}_W^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2.$$

Численно величину флуктуационных ошибок формирования изображений в скаттерометрических РСА для норм L_2 и C_0 определим следующим образом:

$$E_{L2} = \frac{1}{D} \int_D E^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (4.35)$$

$$E_{C0} = \text{Max}_D |E(\mathbf{r})|. \quad (4.36)$$

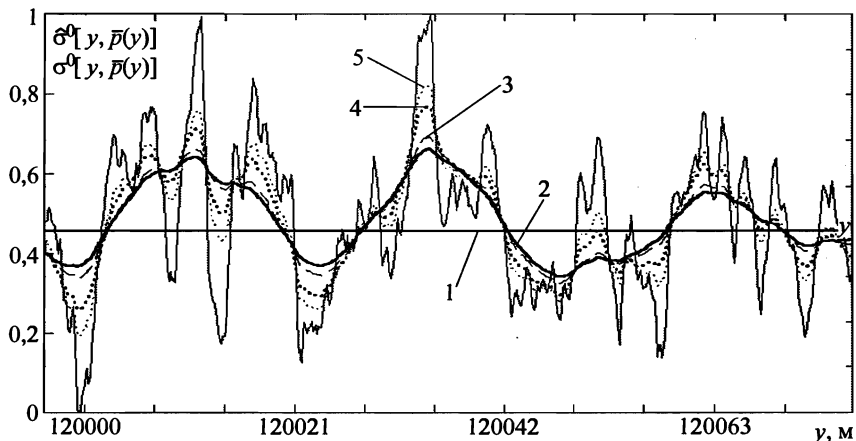


Рис. 4.13. Поведение нормированных флуктуационных ошибок формирования радиолокационных изображений: 1 — поведение нормированной удельной ЭПР; 2 — оценки УЭПР при согласованной фильтрации принимаемого сигнала; 3–6 — оценки УЭПР при обработке входного сигнала разработанным алгоритмом (4.14), среднее отношение сигнал–помеха 5, 10, 15, 25

Так как при определении флуктуационных ошибок полагалось, что аддитивная помеха на входе системы отсутствует, то понятие “отношение сигнал–помеха” некорректно. В дальнейшем при обработке сигналов оптимальными алгоритмами с декорреляцией под флуктуационной ошибкой при заданном отношении сигнал–помеха будем подразумевать ошибку в такой системе, пространственная функция неопределенности которой совпадает с функцией неопределенности системы (4.14) при заданном отношении сигнал–помеха.

Пример поведения флуктуационных ошибок при обработке входного сигнала различными алгоритмами при различной помеховой обстановке показан на рис. 4.13.

При вычислении зависимости флуктуационных ошибок от отношения сигнал–помеха для участков поверхности, в пределах которых изменение УЭПР незначительно (величиной динамической ошибки можно пренебречь), генерировался ансамбль из 500 независимых реализаций комплексного коэффициента отражения в рамках стохастических моделей поверхности. Для каждой реализации $\hat{F}(\mathbf{r})$ определялась флуктуационная ошибка формирования РЛИ как статистической характеристики случайного процесса. Значение E_F при заданном отношении сигнал–помеха определялось путем статистического усреднения этих ошибок по различным реализациям $\hat{F}(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{p}}(\vec{\mathbf{r}}))$.

Результаты исследования зависимости флуктуационных ошибок от помеховой обстановки представлены на рис. 4.14. На этом рисунке первый отсчет по оси ординат соответствует динамическим ошибкам при согласованной фильтрации принимаемого сигнала.

По результатам исследования можно сделать вывод о том, что в системе дистанционного зондирования, осуществляющей обработку входного сигнала

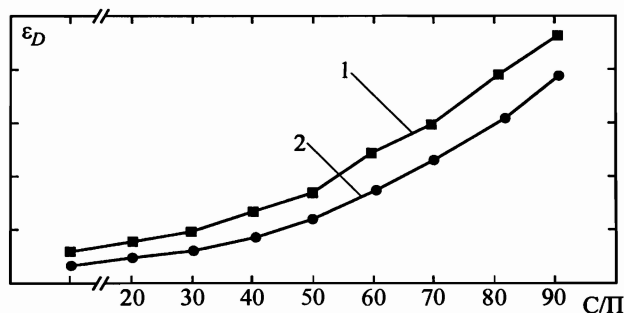


Рис. 4.14. Поведение флуктуационных ошибок формирования РЛИ после этапа первичной обработки алгоритмами с декорреляцией входного сигнала в зависимости от среднего отношения сигнал-помеха в пределах зоны обзора (1 — для нормы L_2 , 2 — для нормы C_0)

ла с декорреляцией, при увеличении отношения сигнал-помеха происходит увеличение флуктуационных ошибок формирования изображений. В общем случае при использовании алгоритма (4.14) флуктуационные ошибки больше, чем в системе, осуществляющей согласованную фильтрацию принимаемого сигнала.

Однако при дальнейшем сглаживании (вторичной обработке) эти ошибки для РЛИ, полученного в системе с декорреляцией входного сигнала, будут подавляться сильнее, чем на РЛИ, полученном при согласованной фильтрации принимаемого сигнала (при одинаковых параметрах сглаживающих операторов). Это обусловлено тем, что характерная ширина спеклов после процедуры адаптивного выбеливания (4.14) будет иметь меньший пространственный размер.

4.2.3. Шумовые ошибки формирования РЛИ, обусловленные наличием аддитивной помехи. Шумовые ошибки E_N определим как помехи, возникающие на изображении по причине существования аддитивного шума на входе системы дистанционного зондирования [23, 27]. Выражения для шумовых составляющих оптимальных выходных эффектов при согласованной фильтрации принимаемого сигнала и при его обработке алгоритмом с декорреляцией будут следующими:

$$\dot{n}(\mathbf{r}) = \int_0^T n(t) \dot{S}^*(t, \mathbf{r}) dt, \quad (4.37)$$

$$\dot{n}_W(\mathbf{r}) = \int_0^T \int_0^T n(t_1) V[t_1, t_3] \dot{S}^*(t_3, \mathbf{r}) dt_3 dt_1, \quad (4.38)$$

где $n(t)$ — аддитивный шум.

Количественно зададим шумовые ошибки в нормах L_2 и C_0 так

$$E_{L2} = \frac{1}{D} \int_D [\text{Re} \{ \dot{n}(\mathbf{r}) \}]^2 d\mathbf{r}, \quad E_{C0} = \text{Max}_D |\text{Re} \{ \dot{n}(\mathbf{r}) \}|.$$

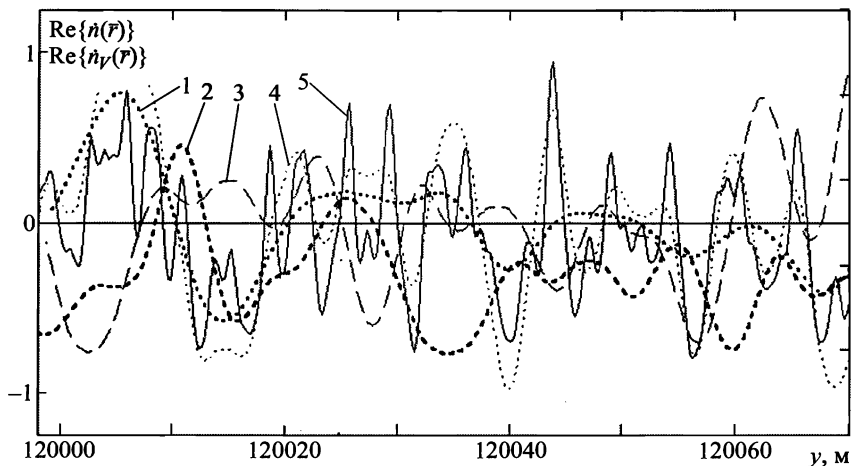


Рис. 4.15. Поведение нормированных шумовых ошибок формирования изображений: 1 — шумовые ошибки формирования изображений при согласованной фильтрации принимаемого сигнала; 2–5 — шумовые ошибки при обработке сигнала алгоритмом модифицированного синтеза апертуры, отношение сигнал–помеха 5, 10, 15, 25

Так как ранее было оговорено, что аддитивный шум является нормальным процессом с нулевым средним и равномерной спектральной плотностью мощности, то и его преобразования (4.37) и (4.38) также будут нормальными процессами. Такие процессы полностью задаются двумя статистическими моментами — средним и корреляционной функцией:

$$\langle n(\mathbf{r}) \rangle = \langle n_W(\mathbf{r}) \rangle = 0,$$

$$R_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{N_0}{2} \int_0^T \dot{S}(t, \mathbf{r}_1) \dot{S}^*(t, \mathbf{r}_2) dt,$$

$$R_{NW}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \int_0^T W[t_1, t_2] \cdot W[t_1, t_3] \dot{S}(t_2, \mathbf{r}_1) \dot{S}^*(t_3, \mathbf{r}_2) dt_1 dt_2 dt_3.$$

Результаты статистического моделирования поведения шумовых ошибок при различных отношениях сигнал–помеха приведены на рис. 4.15.

4.3. Сравнение алгоритмов вторичной цифровой обработки радиолокационных изображений

Как было указано ранее, вторичная обработка необходима для повышения качества радиолокационных изображений. Ее основной задачей является подавление спекл-шума и аддитивных помех при сохранении геометрической конфигурации, контуров и текстурной информации на РЛИ. На основании введенных ранее критериев качества можно сказать, что

целью вторичной обработки является обеспечение требуемого значения динамических, флуктуационных и шумовых ошибок. Выбор конкретных значений E_D , E_F , E_N и E_T должен осуществляться с учетом особенностей дальнейшей интерпретации изображений.

В общем виде сглаживание РЛИ можно представить как применение некоторых операторов к необработанному РЛИ. Выбор этих операторов необходимо осуществлять с учетом особенностей этапа первичной обработки траекторных сигналов и статистических характеристик УЭПР. Однако так как эти характеристики обычно неизвестны, целесообразно исследовать несколько наиболее часто применяемых методов обработки радиолокационных изображений и показать механизм сравнения различных алгоритмов путем определения и сравнения предложенных качественных показателей [28].

Для того чтобы унифицировать результаты применения операторов вторичной обработки, в [21, 30] впервые предложено задавать размеры операторов вторичной обработки ΔW по отношению к эффективной ширине пространственной функции неопределенности Ψ_E

$$\Delta W = K \cdot \Psi_E,$$

где K — коэффициент сжатия/расширения.

Механизм сравнения различных цифровых алгоритмов следующий [27]: для исходного РЛИ (априорно известного распределения УЭПР в пространстве) выполняется оценка $\sigma_{x,y}^0$ по результатам обработки реальных данных либо результатам моделирования. После этого к необработанным РЛИ применяются различные пространственные фильтры и оцениваются величины ошибок E_D , E_F , E_N и E_T . Полученные в результате выполнения этих операций данные позволяют судить о целесообразности применения исследуемых операторов и выполнять их статистическую численную оптимизацию.

В рамках данного раздела в качестве примера особенностей исследования цифровых методов вторичной обработки показаны результаты сравнения (в норме L_2) адаптивных и неадаптивных методов обработки РЛИ, полученного в системе с синтезированием апертуры антенны путем применения различных алгоритмов оценки УЭПР по наблюдению нестационарных стохастических временных процессов.

4.3.1. Методы оконного сглаживания, качественные показатели РЛИ после обработки. Данный метод вторичной обработки является, фактически, применением к необработанному РЛИ оператора типа свертки [30]:

$$I_{x,y} = \sum_{dx,dy \in D} h_{dx,dy} \hat{\sigma}_{x+dx,y+dy}^0 = \sum_{dx,dy \in D} h_{dx,dy} |Y_{x+dx,y+dy}|^2, \quad (4.39)$$

где $I_{x,y}$ — сглаженное радиолокационное изображение; $h_{dx,dy}$ — импульсная характеристика фильтра (ядро оператора); $\hat{\sigma}_{x,y}^0$ — оценки удельных ЭПР поверхности, полученные после первичной обработки принимаемого сигнала.

При использовании алгоритма (4.39) дисперсия сглаженного изображения определяется выражением:

$$D(E_A^0[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]) = \left\langle \left(\int_D \hat{E}^0[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})] h(\vec{r}, \vec{r}_1) d\vec{r}_1 - E^0[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})] \right)^2 \right\rangle =$$

$$= \iint_D \left\langle \hat{E}^0[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})] \hat{E}^0[\vec{r}', \vec{p}(\vec{r}')] \right\rangle h(\vec{r}, \vec{r}_1) h(\vec{r}', \vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 -$$

$$- (E^0[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})])^2 \left[2 \int_D h(\vec{r}, \vec{r}_1) d\vec{r}_1 - 1 \right]. \quad (4.40)$$

Вид оператора $h_{dx,dy}$ необходимо выбирать исходя из несмещенности и минимума дисперсии обработанного радиолокационного изображения. Однако на практике обычно используют простые окна (прямоугольное, треугольное, экспоненциальное, гауссовское). Проведенные исследования показали, что форма $h_{dx,dy}$ не оказывает существенного влияния на качественные показатели сглаженного РЛИ. Ниже показаны радиолокационные изображения, полученные при различных методах первичной оценки УЭПР с последующим сглаживанием прямоугольными пространственными окнами (см. рис. 4.16–4.18).

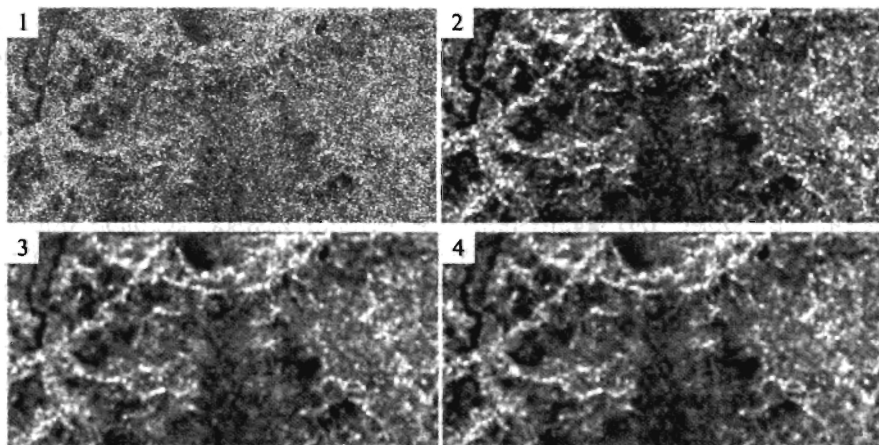


Рис. 4.16, а. Результаты вторичной обработки РЛИ, полученного при согласованной фильтрации, среднее отношение сигнал–помеха 50: 1 — исходное изображение; 2–4 — результат сглаживания прямоугольным окном шириной 5, 10, 15 Ψ_E

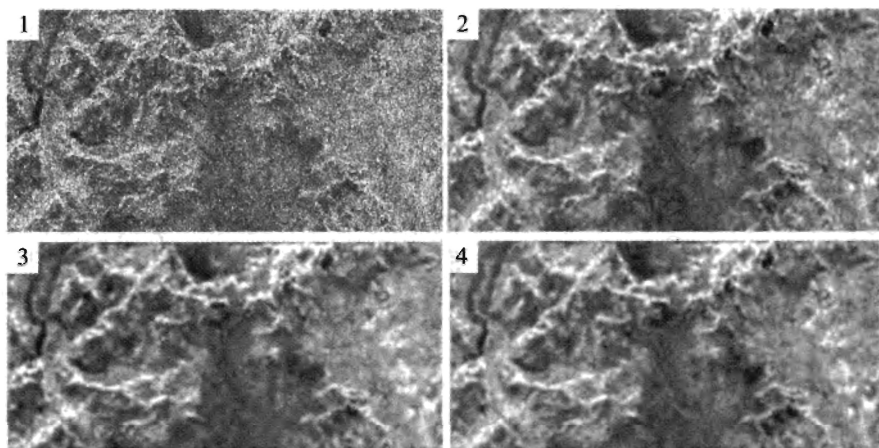


Рис. 4.16, б. Результаты вторичной обработки РЛИ, полученного при декорреляции входного сигнала, среднее отношение сигнал–помеха 25: 1 — исходное изображение; 2–4 — результат сглаживания прямоугольным окном шириной 5, 10, 15 Ψ_E

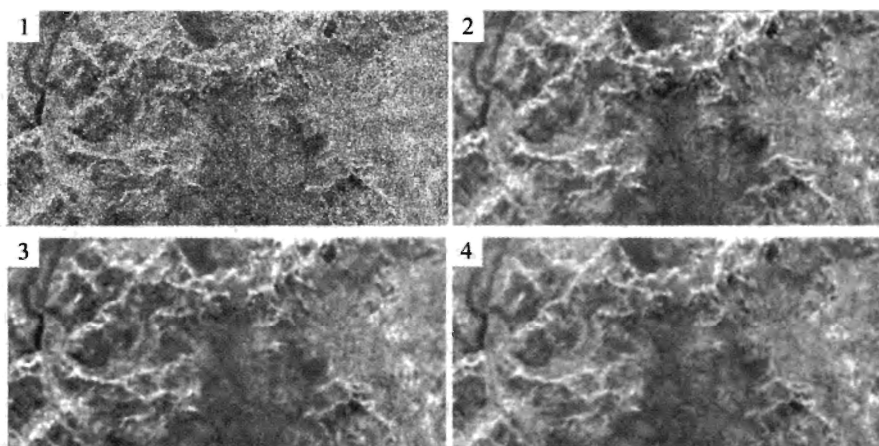


Рис. 4.17. Результаты вторичной обработки РЛИ, полученного при декорреляции входного сигнала, среднее отношение сигнал–помеха 50: 1 — исходное изображение; 2–4 — результат сглаживания прямоугольным окном шириной 5, 10, 15 Ψ_E

Визуально видно, что сглаживание простыми окнами улучшает изображения, однако для определения качества радиолокационных изображений после применения оператора $h_{dx,dy}$ необходимо оценить величины динамических, флуктуационных и шумовых ошибок при различных алгоритмах первичной обработки и при различных размерах сглаживающих окон. Как было указано ранее, для статистической устойчивости полученных результатов оценки E_D , E_F и E_T необходимо использовать ансамбли реализаций

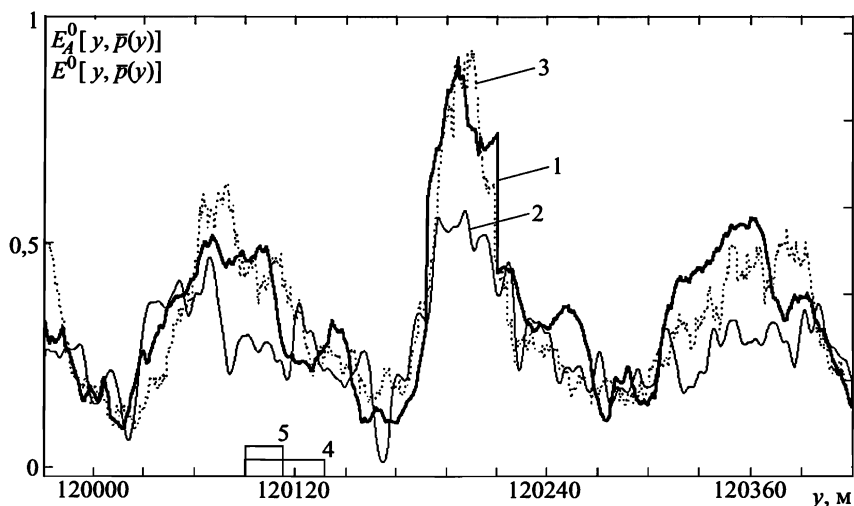


Рис. 4.18. Сравнение результатов вторичной обработки (4.39): 1 — поведение УЭПР; 2 — результат сглаживания окном 4 изображения, полученного при согласованной фильтрации принимаемого сигнала, среднее отношение сигнал–помеха $SNR_A = 50$ (average signal-to-noise ratio); 3 — результат фильтрации окном 5 изображения, полученного при обработке сигнала синтезированным алгоритмом, среднее отношение сигнал–помеха $SNR_A = 50$

как удельной эффективной поверхности рассеяния, так и комплексного коэффициента отражения. Величины ошибок рассчитываются путем статистического усреднения результатов, полученных по отдельным реализациям. Для случая усреднения изображений прямоугольными пространственными окнами значения полученных таким образом динамических, флуктуационных и общих ошибок приведены в табл. 4.1–4.3.

Из приведенных выше данных видно, что при корректном выборе размеров оператора вторичной обработки $h_{dx, dy}$ наименьшая величина общей ошибки после применения (4.39) к изображению, полученному при использовании алгоритма с декорреляцией, меньше наименьшей общей ошибки E_T обработанного изображения, полученного при согласованной фильтрации принимаемого сигнала. Таким образом, применение даже таких простых методов сглаживания РЛИ показывает преимущества алгоритма, учитывающего стохастический характер отраженного сигнала.

Как видно из представленных результатов, алгоритм (4.39) достаточно прост в цифровой реализации, однако при его использовании уменьшение спекл-шума (флуктуационных ошибок) влечет за собой пропорциональное увеличение динамических ошибок, что приводит к сглаживанию контуров объектов, нарушению текстурной информации. Недостатки этого метода препятствуют его применению в системах, требования к разрешающей способности в которых достаточно высоки.

Таблица 4.1. Динамические ошибки обработанных изображений

Ширина окна прямоугольного фильтра при обработке (4.39)	Алгоритм первичной обработки			
	Согласованная фильтрация	Алгоритм с декорреляцией, среднее отношение сигнал-помеха		
		10	25	50
Без обработки изображения	1	0,937	0,733	0,178
$\Delta W = 2\Psi_E$	1,233	1,171	1,038	0,447
$\Delta W = 4\Psi_E$	1,567	1,363	1,211	0,768
$\Delta W = 8\Psi_E$	1,974	1,796	1,436	1,083
$\Delta W = 10\Psi_E$	2,219	1,926	1,501	1,201

Таблица 4.2. Флуктуационные ошибки обработанных изображений

Ширина окна прямоугольного фильтра при обработке (4.39)	Алгоритм первичной обработки			
	Согласованная фильтрация	Алгоритм с декорреляцией, среднее отношение сигнал-помеха		
		10	25	50
Без обработки изображения	1	1,155	2,378	11,248
$\Delta W = 2\Psi_E$	0,743	0,897	1,218	2,463
$\Delta W = 4\Psi_E$	0,396	0,621	0,862	1,017
$\Delta W = 8\Psi_E$	0,276	0,467	0,514	0,816
$\Delta W = 10\Psi_E$	0,201	0,321	0,438	0,673

Таблица 4.3. Общие ошибки обработанных изображений

Ширина окна прямоугольного фильтра при обработке (4.39)	Алгоритм первичной обработки			
	Согласованная фильтрация	Алгоритм с декорреляцией, среднее отношение сигнал-помеха		
		10	25	50
Без обработки изображения	1	1,053	1,381	1,938
$\Delta W = 2\Psi_E$	0,743	0,836	0,869	0,933
$\Delta W = 4\Psi_E$	0,316	0,328	0,624	0,762
$\Delta W = 8\Psi_E$	0,147	0,168	0,311	0,369
$\Delta W = 10\Psi_E$	0,291	0,267	0,248	0,254

4.3.2. Цифровые фильтры на порядковых статистиках, особенности применения для обработки изображений в системах с синтезированием апертуры. Фильтры на порядковых статистиках являются одним из наиболее широко применяемых в классе нелинейных операторов вторичной обработки. Наиболее распространенными являются медианный фильтр, фильтр Вилконсона, L- и Lpq-фильтры, центрально взвешенный медианный фильтр и другие. Характеристики и свойства этих фильтров достаточно хорошо изучены, поэтому для исследования методов вторичной обработки, с учетом введенных критериев качества, а также для сравнения результатов, полученных при обработке сигнала различными алгоритмами первичной обработки при различной помеховой обстановке, используется медианный фильтр.

Медианная фильтрация — метод нелинейной обработки, разработанный Тююки; одномерный медианный фильтр представляет собой окно, охватывающее нечетное число элементов, центральный отсчет которого заменяется медианой элементов этого окна (медианой последовательности $\{a_j\}$, $j \in (0 \dots N)$ называется такой элемент, для которого существует $\frac{N-1}{2}$ отсчетов меньших или равных ему и $\frac{N-1}{2}$ больших или равных ему). На практике обычно рекомендуется сглаживать изображения медианными окнами малой ширины, постепенно расширяя их.

Рассмотрим качественные характеристики РЛИ после медианной обработки фильтрами различного пространственного размера, примененными к оценке УЭПР, полученной при использовании различных оптимальных алгоритмов (см. рис. 4.19–4.22).

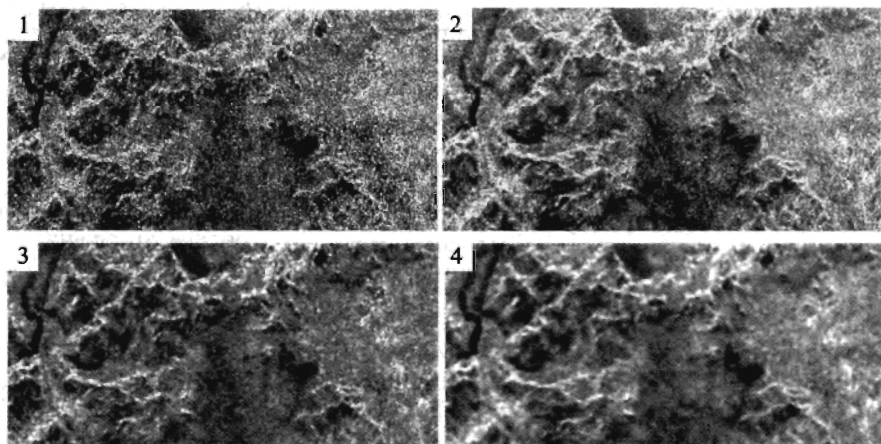


Рис. 4.19. Результат сглаживания медианным фильтром РЛИ, полученного при согласованной фильтрации, среднее отношение сигнал–помеха 50: 1 — исходное изображение; 2–4 — результат сглаживания окном шириной 7, 15, 20 Ψ_E

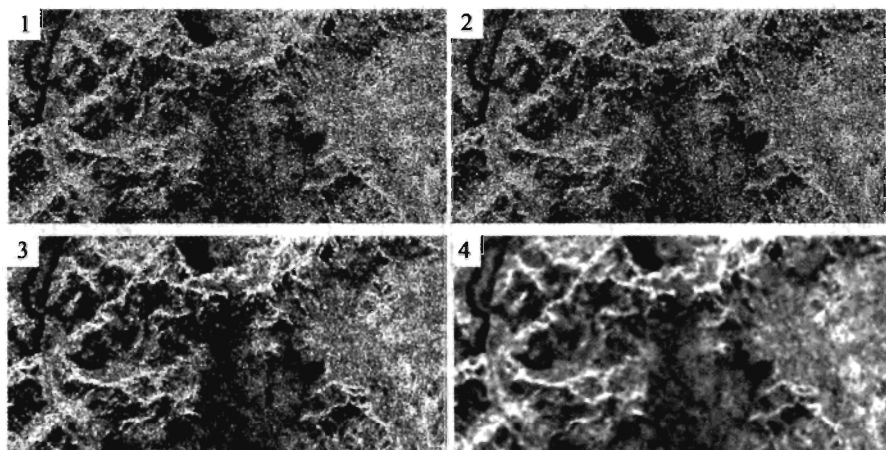


Рис. 4.20. Результат сглаживания медианным фильтром РЛИ, полученного при декорреляции входного сигнала, среднее отношение сигнал–помеха 25: 1 — исходное изображение; 2–4 — результат сглаживания окном шириной 7, 15, 20 Ψ_E

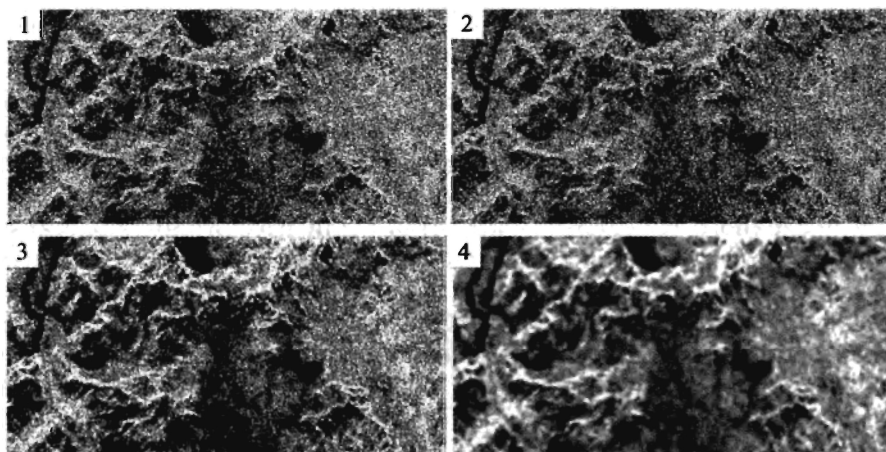


Рис. 4.21. Результат сглаживания медианным фильтром РЛИ, полученного при декорреляции входного сигнала, среднее отношение сигнал–помеха 50: 1 — исходное изображение; 2–4 — результат сглаживания прямоугольным окном шириной 7, 15, 20 Ψ_E

Из анализа представленных выше изображений до и после вторичной обработки несложно увидеть, что применение медианной фильтрации позволяет повысить качество РЛИ. При этом наряду с эффективным подавлением спекл-шума сохраняются контуры объектов, текстурная информация нарушается в меньшей степени, чем при обработке (4.39). Однако при больших размерах окон возможно сглаживание малоразмерных объектов. Визуально результат медианной фильтрации радиолокационного изобра-

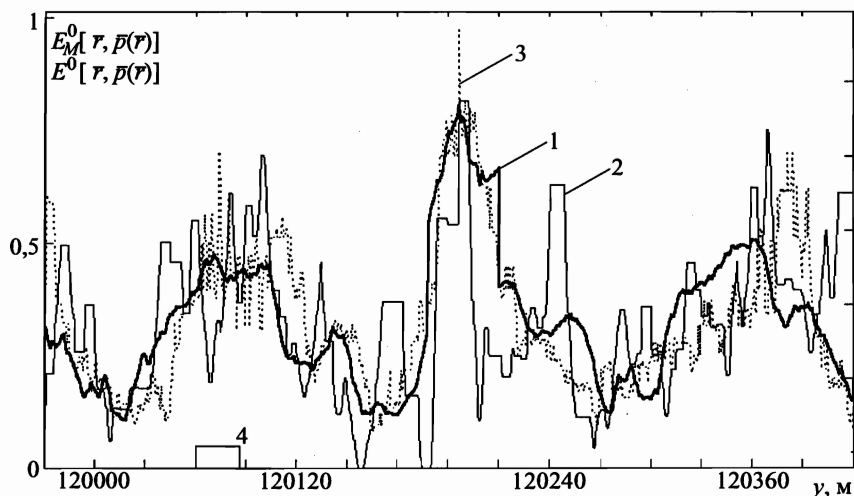


Рис. 4.22. Сравнение результатов медианной фильтрации РЛИ: 1 — поведение УЭПР; 2 — результат обработки медианным фильтром с размером окна 4 изображения, полученного при согласованной фильтрации принимаемого сигнала, среднее отношение сигнал–помеха $SNR_A = 50$; 3 — результат фильтрации окном 4 изображения, полученного при обработке сигнала разработанным алгоритмом, среднее отношение сигнал–помеха $SNR_A = 50$

жения, полученного при обработке с декорреляцией, лучше чем результат вторичной обработки изображения, полученного при согласованной фильтрации сигнала. Необходимо отметить характерные искажения типа “ступенька”, которые хорошо заметны на рис. 4.22.

Для численного определения качества были рассчитаны величины динамических, флуктуационных и общих ошибок до и после медианной фильтрации окнами различного пространственного размера [23, 30]. Для этого использовался ансамбль из 200 реализаций удельной эффективной поверхности рассеяния и ансамбль реализации комплексного коэффициента отражения (в рамках стохастических моделей поверхности). Результаты определения качественных показателей обработанных РЛИ представлены в табл. 4.4–4.6.

Таблица 4.4. Динамические ошибки обработанных изображений

Медианная фильтрация РЛИ, размер окна фильтра	Алгоритм первичной обработки			
	Согласованная фильтрация	Алгоритм с декорреляцией, среднее отношение сигнал–помеха		
		10	25	50
Без обработки изображения	1	0,937	0,733	0,178
$\Delta W = 2\Psi_E$	1,124	1,086	1,978	0,299
$\Delta W = 4\Psi_E$	1,380	1,248	1,114	0,301
$\Delta W = 8\Psi_E$	1,548	1,493	1,339	1,006
$\Delta W = 10\Psi_E$	1,839	1,514	1,494	1,131

Таблица 4.5. Флуктуационные ошибки обработанных изображений

Медианная фильтрация РЛИ, размер окна фильтра	Алгоритм первичной обработки			
	Согласованная фильтрация	Алгоритм с декорреляцией, среднее отношение сигнал–помеха		
		10	25	50
Без обработки изображения	1	1,155	2,378	11,248
$\Delta W = 2\Psi_E$	0,710	0,906	0,781	1,171
$\Delta W = 4\Psi_E$	0,671	0,880	0,767	1,170
$\Delta W = 8\Psi_E$	0,658	0,771	0,755	1,110
$\Delta W = 10\Psi_E$	0,551	0,678	0,740	1,019

Таблица 4.6. Общие ошибки обработанных изображений

Медианная фильтрация РЛИ, размер окна фильтра	Алгоритм первичной обработки			
	Согласованная фильтрация	Алгоритм с декорреляцией, среднее отношение сигнал–помеха		
		10	25	50
Без обработки изображения	1	1,053	1,381	1,938
$\Delta W = 2\Psi_E$	0,507	0,721	0,813	0,837
$\Delta W = 4\Psi_E$	0,145	0,291	0,505	0,834
$\Delta W = 8\Psi_E$	0,088	0,126	0,175	0,271
$\Delta W = 10\Psi_E$	0,089	0,114	0,120	0,215

Из представленных результатов исследования видно, что при корректном выборе размера окна медианного фильтра наименьшая величина общей ошибки после вторичной обработки изображения, полученного при использовании алгоритма с декорреляцией, меньше минимальной ошибки E_T обработанного изображения, полученного при согласованной фильтрации принимаемого сигнала. Таким образом, применение медианной фильтрации показывает преимущества учета нестационарного и стохастического характера отраженного от поверхности сигнала при оптимизации алгоритмов первичной обработки.

4.3.3. Адаптивные цифровые алгоритмы обработки радиолокационных изображений. Фильтры, основанные на формировании локальных статистик, значения которых связаны с характеристиками обрабатываемого фрагмента РЛИ, достаточно часто используются при обработке изображений. Одни из первых теоретически обоснованных алгоритмов были разработаны Ли и Фростом (при этом учитывалось наличие только мультипликативного шума), выходные эффекты этих фильтров записываются

следующим образом:

$$\hat{I}_{i,j} = \langle I \rangle + \frac{\sigma_S^2}{\langle I \rangle^2 \sigma_N^2 + \sigma_S^2} (I_{i,j} - \langle I \rangle), \quad (4.41)$$

$$\hat{I}_{i,j} = \sum_{l,k} K \cdot a \cdot \exp \{-a \cdot (|l - i| + |k - j|)\} I_{l,k}, \quad (4.42)$$

где $\hat{I}_L$ — результат обработки; $\langle I \rangle$ — среднее значение интенсивности изображения в заданной области; σ_S^2 — дисперсия неискаженного шума-ми изображения; σ_N^2 — дисперсия шума, которая может быть получена по однородному фрагменту РЛИ; K — нормирующий коэффициент; $a = \frac{4}{\sigma_N^2 \sqrt{N}} \frac{\sigma_S^2}{\langle I^2 \rangle}$.

В дальнейшем развитии алгоритмов локальной адаптивной обработки учитываются более сложные модели помех на изображениях. Примерами могут служить фильтры, созданные Куаном, Бернштейном и т.д. При использовании конкретного фильтра нужно учитывать статистические характеристики наблюдаемых процессов и алгоритмы их первичной обработки [31].

В рамках данного раздела рассмотрено применение цифрового фильтра Ли к обработке РЛИ, полученных после этапа первичной обработки методом согласованной фильтрации и при декорреляции принимаемого сигнала. Смысл работы данного фильтра очевиден: сглаживание отклонений текущего значения оценок удельных ЭПР относительно их среднего уровня $\Delta I_{i,j} = I_{i,j} - \langle I \rangle$ в окне размера L происходит пропорционально отношению $\frac{\sigma_N^2}{\sigma_I^2}$. Так, например, при большой разности $\Delta I_{i,j} = I_{i,j} - \langle I \rangle$ и малой

флуктуационной ошибке значения $\Delta I_{i,j}$ остаются практически неизменными. Напротив, если отклонения от среднего уровня в окне приближаются к E_F ошибке, происходит их значительное подавление.

Результаты обработки изображений оператором (4.41) представлены ниже на рис. 4.23–4.26.

Для численного определения эффективности адаптивных алгоритмов вторичной обработки, как и ранее, оценивались величины динамических, флуктуационных и общих ошибок формирования РЛИ по ансамблям реализаций УЭПР и комплексного коэффициента отражения. Результаты представлены в табл. 4.7–4.9.

Из представленных выше результатов видно, что применение адаптивной фильтрации позволяет значительно повысить качество радиолокационных изображений, так как наряду с эффективным подавлением спекл-шума сохраняются контуры объектов и практически не разрушается текстурная информация. Недостатком алгоритма (4.41) является необходимость наличия априорной информации (статистических характеристик ошибок формирования изображений поверхности).

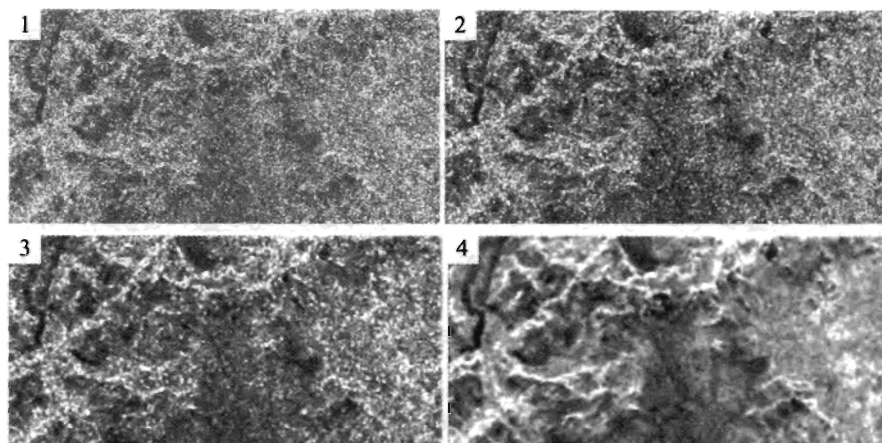


Рис. 4.23. Результат сглаживания адаптивным фильтром изображения, полученного при согласованной фильтрации, среднее отношение сигнал–помеха 50: 1 — исходное РЛИ; 2–4 — результат сглаживания прямоугольным окном шириной 7, 15, 20 Ψ_E

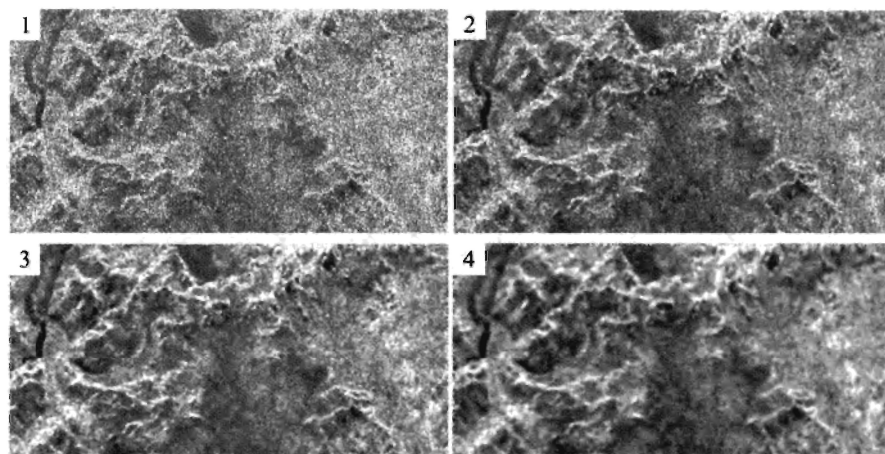


Рис. 4.24. Результат сглаживания адаптивным фильтром изображения, полученного при декорреляции входного сигнала, среднее отношение сигнал–помеха 25: 1 — исходное РЛИ; 2–4 — результат сглаживания прямоугольным окном шириной 7, 15, 20 Ψ_E

В данном разделе показана методика исследования алгоритмов цифровой обработки и методика определения качественных показателей при обработке входных процессов и радиолокационных изображений. Как частный результат продемонстрировано, что при корректном выборе размеров операторов вторичной обработки качество сглаженных радиолокационных изображений при первичной обработке входного сигнала алгоритмами с декорреляцией входных процессов выше, чем качество радиолокационных изображений при согласованной фильтрации принимаемого сигнала.

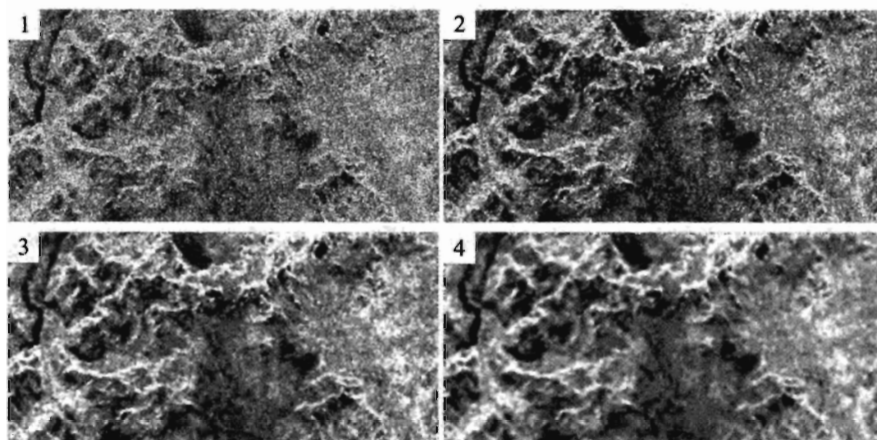


Рис. 4.25. Результат сглаживания адаптивным фильтром изображения, полученного при декорреляции входного сигнала, среднее отношение сигнал–помеха 50: 1 — исходное РЛИ; 2–4 — результат сглаживания прямоугольным окном шириной 7, 15, 20 Ψ_E

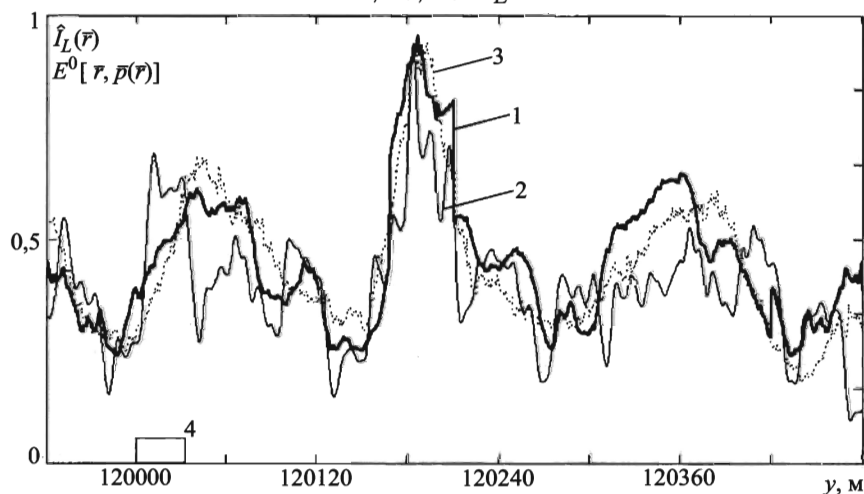


Рис. 4.26. Сравнение результатов адаптивной фильтрации РЛИ. 1 — поведение УЭПР; 2 — результат обработки окном 4 изображения, полученного при согласованной фильтрации принимаемого сигнала, среднее отношение сигнал–помеха $SNR_A = 50$; 3 — результат фильтрации окном 4 изображения, полученного при обработке сигнала разработанным алгоритмом, среднее отношение сигнал–помеха $SNR_A = 50$

Полученные в соответствии с предложенной методикой результаты позволяют не только численно определить качество РЛИ, но и выбрать такие операторы вторичной обработки, которые обеспечат требуемые величины динамических, флуктуационных, шумовых и общих ошибок.

Таблица 4.7. Динамические ошибки обработанных изображений

Алгоритм вторичной обработки фильтром Ли, размер окна сглаживающего оператора	Алгоритм первичной обработки			
	Согласованная фильтрация	Алгоритм с декорреляцией, среднее отношение сигнал–помеха		
		10	25	50
Без обработки изображения	1	0,937	0,733	0,178
$\Delta W = 2\Psi_E$	1,124	1,042	0,997	0,214
$\Delta W = 4\Psi_E$	1,259	1,173	1,102	0,987
$\Delta W = 8\Psi_E$	1,387	1,264	1,205	1,045
$\Delta W = 10\Psi_E$	1,537	1,329	1,284	1,183

Таблица 4.8. Флуктуационные ошибки обработанных изображений

Алгоритм вторичной обработки фильтром Ли, размер окна сглаживающего оператора	Алгоритм первичной обработки			
	Согласованная фильтрация	Алгоритм с декорреляцией, среднее отношение сигнал–помеха		
		10	25	50
Без обработки изображения	1	1,155	2,378	11,248
$\Delta W = 2\Psi_E$	0,275	0,322	0,438	0,962
$\Delta W = 4\Psi_E$	0,247	0,283	0,258	0,611
$\Delta W = 8\Psi_E$	0,208	0,217	0,220	0,501
$\Delta W = 10\Psi_E$	0,205	0,207	0,195	0,412

Таблица 4.9. Общие ошибки обработанных изображений

Алгоритм вторичной обработки фильтром Ли, размер окна сглаживающего оператора	Алгоритм первичной обработки			
	Согласованная фильтрация	Алгоритм с декорреляцией, среднее отношение сигнал–помеха		
		10	25	50
Без обработки изображения	1	1,053	1,381	1,938
$\Delta W = 2\Psi_E$	0,096	0,145	0,159	0,194
$\Delta W = 4\Psi_E$	0,066	0,069	0,054	0,072
$\Delta W = 8\Psi_E$	0,074	0,067	0,045	0,055
$\Delta W = 10\Psi_E$	0,085	0,069	0,042	0,043

4.4. Адаптивные и неадаптивные цифровые алгоритмы селекции протяженных объектов на радиолокационных изображениях земной поверхности

Одной из задач интерпретации изображений, решаемой в радиолокационных системах, является задача обнаружения протяженных объектов (ПО) и оценки их местоположения [32, 33]. Понятие ПО дадим с учетом разрешающей способности РЛС: под протяженным будем понимать такой объект, размеры которого в 3 и более раз превышают размеры пространственной функции неопределенности, а УЭПР существенно отличается от соседних элементов (подстилающей поверхности).

Строгое аналитическое решение задачи обнаружения при учете нестационарного и стохастического характера отраженного сигнала существенно затруднено по причине отсутствия единой электродинамической модели протяженных объектов. Известно, что отраженный от ПО сигнал флуктуирует, характер этих флуктуаций зависит от параметров визирования, геометрических характеристик и других факторов.

Оптимальные алгоритмы обнаружения предполагают вычисление корреляционного интеграла с ядром, совпадающим с ожидаемым отражением от протяженного объекта; при этом для каждого вида ядра (образа, подлежащего обнаружению) необходимо перебирать все возможные положения в пространстве и ориентацию [34]. Оптимальные операции обнаружения требуют существенных вычислительных затрат, что неприемлемо для большинства практических применений.

По этой причине целесообразно использовать субоптимальные или эмпирические алгоритмы, обеспечивающие требуемые характеристики обнаружения и оптимизированные с точки зрения простоты реализации для цифровых обзорных радиолокационных систем или систем обработки РЛИ [33]. В качестве этих характеристик будем использовать вероятности правильного и ложного обнаружения, а также степень сохранения пространственной конфигурации протяженных объектов и, в частности, их контуров и внутренней текстуры.

При исследовании различных алгоритмов обнаружения сравниваются результаты, полученные при первичной обработке методом согласованной фильтрации и при декорреляции принимаемого сигнала. Полученные результаты позволяют судить о целесообразности применения более сложных, с точки зрения аппаратной и программной реализации, алгоритмов, учитывающих стохастический характер отраженного от поверхности электромагнитного поля.

При сравнении различных алгоритмов обнаружения основное внимание уделяется методам их аппаратной реализации в обзорных радиолокаторах; однако полученные результаты справедливы и для систем обработки изображений.

4.4.1. Особенности цифровой обработки сигналов при решении задач обнаружения. Схемная реализация систем аттестации радиолокационных систем. Для сравнения различных цифровых алгоритмов обнаружения протяженных объектов на радиолокационных изображениях рассмотрим упрощенную модель уравнения наблюдения. Это уравнение задается как аддитивная смесь полезного сигнала и гауссовского шума с равномерной спектральной плотностью мощности. Как показано ранее, такая модель является удовлетворительной для широкого круга радиотехнических систем.

Модель поведения удельной эффективной поверхности рассеяния $\sigma_{x,y}^0$, которая используется здесь для визуальной интерпретации результатов применения различных цифровых алгоритмов первичной и вторичной обработки, задается в виде пространственной функции, представленной на рис. 4.27.

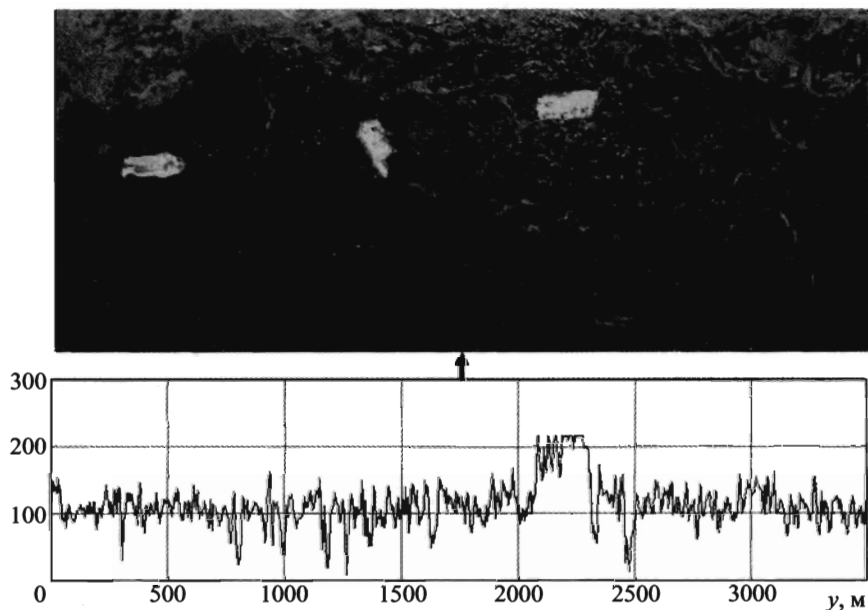


Рис. 4.27. УЭПР поверхности с протяженными объектами и ее сечение в дальностной плоскости

Модель комплексного коэффициента отражения $\dot{F}[\vec{r}, \vec{p}(\vec{r})]$ в рамках стохастических моделей поверхности представляет собой пространственный случайный процесс, изменение момента которого определяется изменением УЭПР

$$\operatorname{Re} \{\dot{F}[\mathbf{r}, \mathbf{p}(\mathbf{r})]\} = C_R[\mathbf{r}, \mathbf{p}(\mathbf{r})]\xi(\mathbf{r}), \quad \operatorname{Im} \{\dot{F}[\mathbf{r}, \vec{p}(\mathbf{r})]\} = C_I[\mathbf{r}, \mathbf{p}(\mathbf{r})]\eta(\mathbf{r}), \quad (4.43)$$

где $C_R[\mathbf{r}, \mathbf{p}(\mathbf{r})] = C_I[\mathbf{r}, \mathbf{p}(\mathbf{r})] = C[\mathbf{r}, \mathbf{p}(\mathbf{r})] = \sqrt{\frac{\sigma^0[\mathbf{r}, \mathbf{p}(\mathbf{r})]}{2}}$.

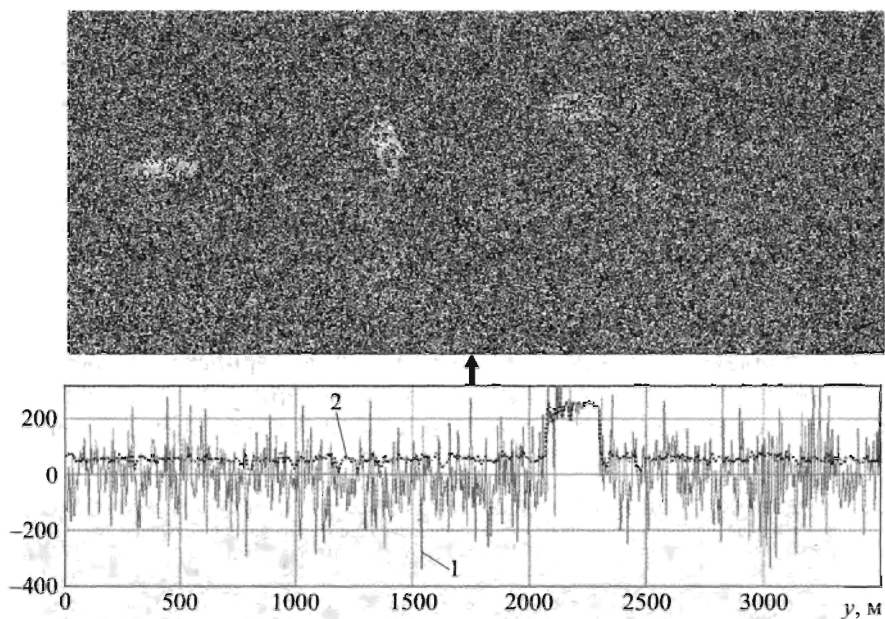


Рис. 4.28. Распределение реальной части отраженного от поверхности электромагнитного поля: 1 — поведение $\text{Re}\{\dot{F}_{x,y}\}$; 2 — поведение $\sigma_{x,y}^0$

При задании $\dot{F}[\mathbf{r}, \mathbf{p}(\mathbf{r})]$ для элементов подстилающей поверхности используется выражение $R_F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \dot{F}[\mathbf{r}_1, \mathbf{p}(\mathbf{r}_1)] \dot{F}^*[\mathbf{r}_2, \mathbf{p}(\mathbf{r}_2)] \rangle = \sigma^0[\mathbf{r}_1, \mathbf{p}(\mathbf{r}_1)] \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, для модели комплексного коэффициента отражения протяженных объектов — выражение $R_F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sigma^0[\mathbf{r}_1, \mathbf{p}(\mathbf{r}_1)] R(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, где пространственный размер функции $R(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ больше элемента разрешения. Полученное пространственное распределение реальной части комплексного коэффициента отражения для модели поведения УЭПР, представленной на рис. 4.1, показано на рис. 4.28.

Видно, что отраженное от поверхности электромагнитное поле характеризуется спекл-структурой. Принимаемый антенной сигнал и соответствующее ему изображение зондируемой поверхности можно записать следующим образом:

$$u_t = \sum_{x,y \in D} F_{x,y} s_t + n_t \Leftrightarrow U_{x,y} = \tilde{F}_{x,y} + n_{x,y}, \quad (4.44)$$

где u_t — принимаемый антенной сигнал в дискретный момент времени t ; $F_{x,y}$ — комплексный коэффициент отражения элемента поверхности; n_t — аддитивный шум; D — область обзора; $\Leftrightarrow$ — знак соответствия (пространственно-временного преобразования); $U_{x,y}$ — цифровое изображение зондируемой поверхности, соответствующее принимаемому временному сигналу u_t ; $\tilde{F}_{x,y}$, $n_{x,y}$ — сигнальная и помеховая части РЛИ, соответственно.

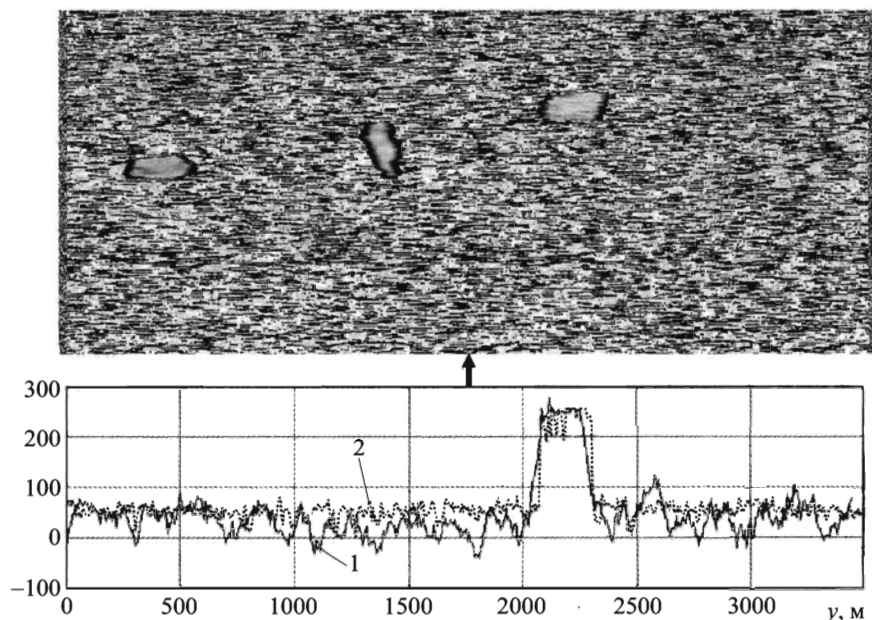


Рис. 4.29. Пространственная зависимость отсчетов изображения с учетом свертки с пространственным импульсом и влиянием аддитивного шума: 1 — поведение $U_{x,y}$; 2 — поведение удельной эффективной поверхности рассеяния

Выражение (4.44) задает модель изображения с учетом свертки с пространственным импульсом и влиянием аддитивного шума. Результаты цифровой реализации поведения $U_{x,y}$ (при среднем отношении сигнал-помеха 75 в области обзора) представлены на рис. 4.29.

В ряде случаев аттестацию радиолокационных систем и, в частности, систем обнаружения протяженных объектов целесообразно выполнять с использованием цифровых имитаторов, генерирующих сигнал, отраженный от поверхности обзора. Схема такого цифрового имитатора, полученного при учете стохастического характера поведения отраженного от поверхности электромагнитного поля, приведена на рис. 4.30. Он состоит из двух основных блоков — блока формирования сигнала, отраженного от поверхности, и блока формирования сигнала, отраженного от протяженных объектов. Соответствующие исходные распределения УЭПР занесены в ПЗУ1 и ПЗУ2, соответственно. Для учета стохастического характера отраженных сигналов используются схемы перемножения УЭПР с коррелированными случайными процессами (соответствующие корреляционные функции определяются значениями $\dot{K}1(jw)$ и $\dot{K}2(jw)$). Полученная в результате суммирования изображений подстилающей поверхности и ПО матрица отсчетов $U_{x,y}$ хранится в ОЗУ. На соответствующие цепи тестируемого радиолокатора поступают отсчеты, определяемые состоянием счетчика (характером пространственно-временного преобразования, осуществляемого радиолокационной системой).

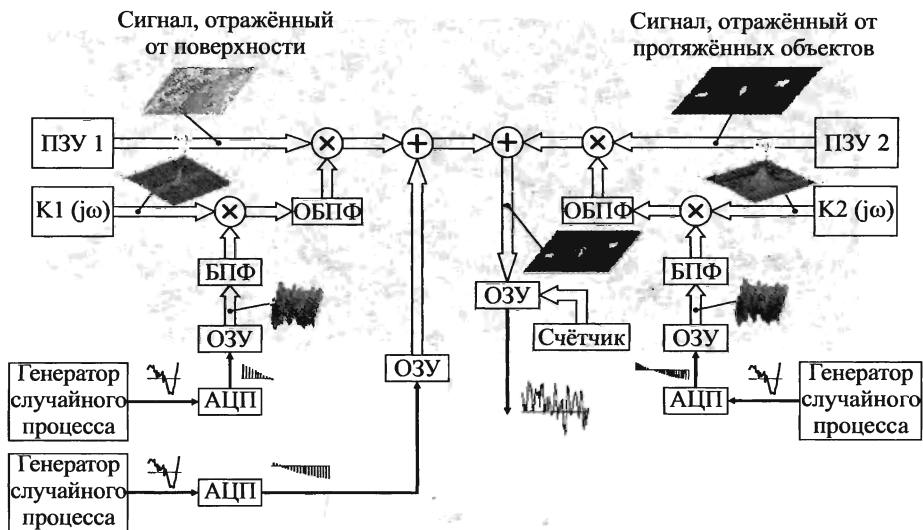


Рис. 4.30. Цифровой имитатор сигнала, отраженного от поверхности и протяженных объектов

Принятый процесс поступает на систему обработки, после которой формируется первичное (несглаженное) радиолокационное изображение поверхности

$$I_{x,y} = \sum_t u_t S_{t,x,y} = U_{x,y} * \Psi_{x,y} + n_{x,y}, \quad (4.45)$$

где u_t — отсчеты входного процесса; $S_{t,x,y}$ — опорный сигнал для точки пространства (x,y) и момента времени t ; $U_{x,y}$ — отсчеты изображения (4.44); $\Psi_{x,y}$ — отсчеты пространственной функции неопределенности; $*$ — операция свертки; $n_{x,y}$ — шум.

Как показано ранее, основным различием между системами первичной обработки, осуществляющими согласованную фильтрацию принимаемого сигнала и его декорреляцию, является вид опорного сигнала, изменяющегося, в последнем случае, при изменении отношения сигнал–помеха.

Для упрощения аппаратной реализации систем, учитывающих при обработке стохастический характер отраженного сигнала, целесообразно использовать решение уравнения обращения путем взятия преобразования Фурье от обеих частей (причем полагать, что $\sigma_{x,y}^0 = \text{const}$). Это позволяет при достаточно хороших результатах оценки существенно упростить процедуру формирования опорного сигнала.

Обобщенная схема цифровой системы первичной обработки приведена на рис. 4.31.

Для упрощенного осуществления процедуры декорреляции можно воспользоваться выбеливающим фильтром до АЦП, а в качестве опорного использовать тот же сигнал, что и при согласованной фильтрации. Использование этого фильтра и будет определять алгоритм первичной обработки. Вид характеристик выбеливающего фильтра в частотной области, а также

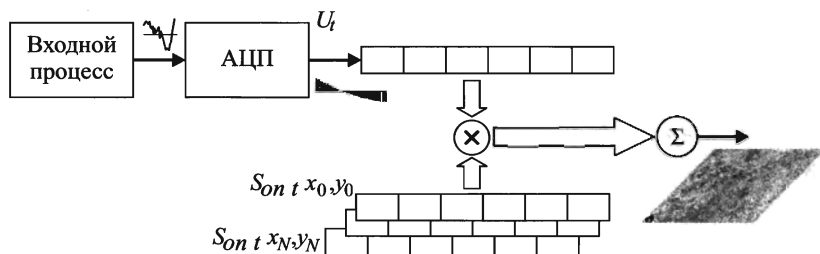


Рис. 4.31. Цифровая схема формирования радиолокационного изображения

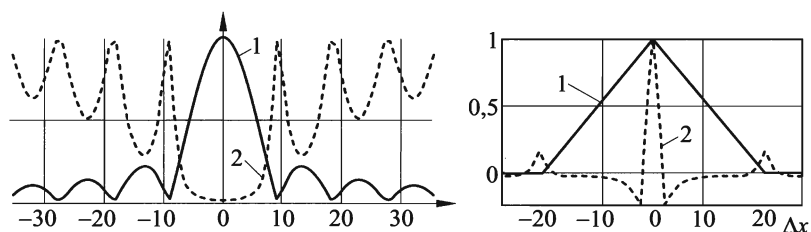


Рис. 4.32. Амплитудная характеристика согласованного (1) и выбеливающего (2) фильтров в частотной области (слева) и сечения пространственных функций неопределенности при согласованной фильтрации и при декорреляции принимаемого сигнала (справа), отношение сигнал–помеха 75

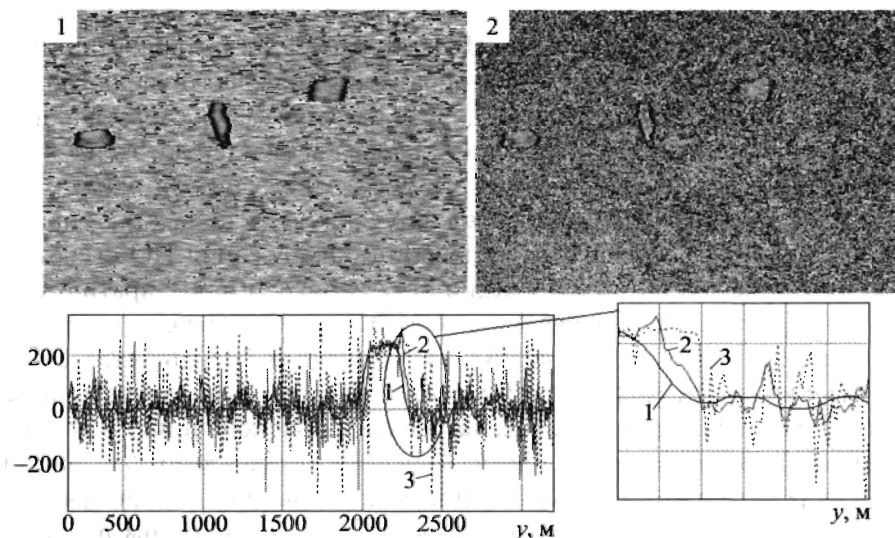


Рис. 4.33. Изображения после этапа первичной обработки при согласованной фильтрации (1) и декорреляции принимаемого сигнала (2), в сравнении с поведением удельной эффективной поверхности рассеяния (3)

пространственных функций неопределенности, полученной при его использовании в алгоритме обработки, показан на рис. 4.32.

Результаты моделирования, позволяющие визуально сравнить радиолокационные изображения, полученные при различных алгоритмах первичной обработки для выбранной модели поведения УЭПР (рис. 4.27), показаны на рис. 4.33.

Приведенные выше результаты моделирования визуально должны совпадать с изображениями, полученными на экране обзорного радиолокатора при использовании в качестве генератора сигналов аттестационной системы (рис. 4.30).

4.4.2. Исследование неадаптивных методов обнаружения при различных алгоритмах первичной и вторичной обработки. Характеристики обнаружителей.

Простое пороговое сравнение. Этот метод основывается на сравнении результатов первичной/вторичной обработки с некоторым пороговым значением, постоянным для всего РЛИ. Если отсчеты радиолокационного изображения превышают порог P , принимается решение о наличии протяженного объекта:

$$T_{x,y} = \begin{cases} 1, & I_{x,y} \geq P, \\ 0, & I_{x,y} < P, \end{cases} \quad (4.46)$$

где $T_{x,y}$ — функция, индицирующая наличие ПО; $I_{x,y}$ — изображение, полученное после этапа первичной или вторичной обработки; P — величина порога.

Если $I_{x,y}$ — это несглаженное РЛИ, то результат интерпретации (4.4) будет зависеть от спекл-структуры изображения (большого числа “ложных” объектов). По этой причине при обнаружении путем простого порогового сравнения целесообразно использовать изображения после этапа вторичной обработки (сглаженные некоторыми пространственными окнами $H_{x,y}$). Именно это позволяет использовать полученную информацию наиболее полно и, в частности, производить операции обнаружения ПО с учетом их положения и ориентации. Вид функции $H_{x,y}$ необходимо выбирать с учетом характеристик сигнала, отраженного как от подстилающей поверхности, так и от протяженных объектов [30, 34]. Однако в большинстве случаев, с точки зрения простоты реализации, целесообразно использовать простые окна (прямоугольные, треугольные, гауссовские, экспоненциальные, синковые и другие). В результате исследования [30] установлено, что вид сглаживающей функции не оказывает существенного влияния на полученные в соответствии с (4.46) результаты обнаружения, определяющим параметром является пространственный размер $H_{x,y}$.

Результаты моделирования, иллюстрирующие использование метода простого порогового обнаружения (4.46), приведены на рис. 4.34.

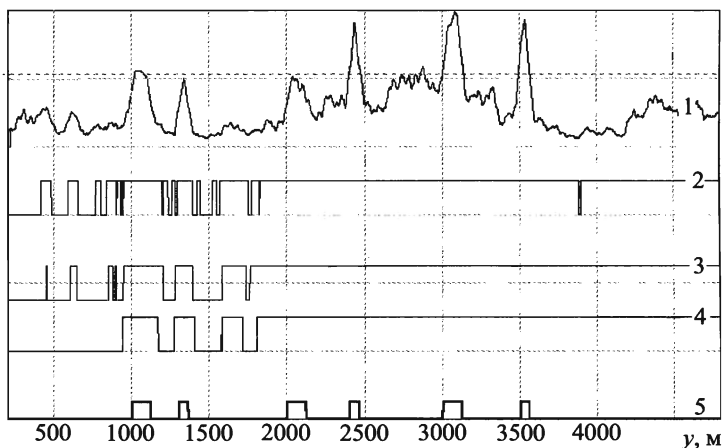


Рис. 4.34. Результаты простого порогового обнаружения: 1 — поведение сглаженной оценки УЭПР; 2–4 — результаты обнаружения (4.4) после сглаживания входного сигнала пространственными прямоугольными окнами различной длины; 5 — истинное положение ПО

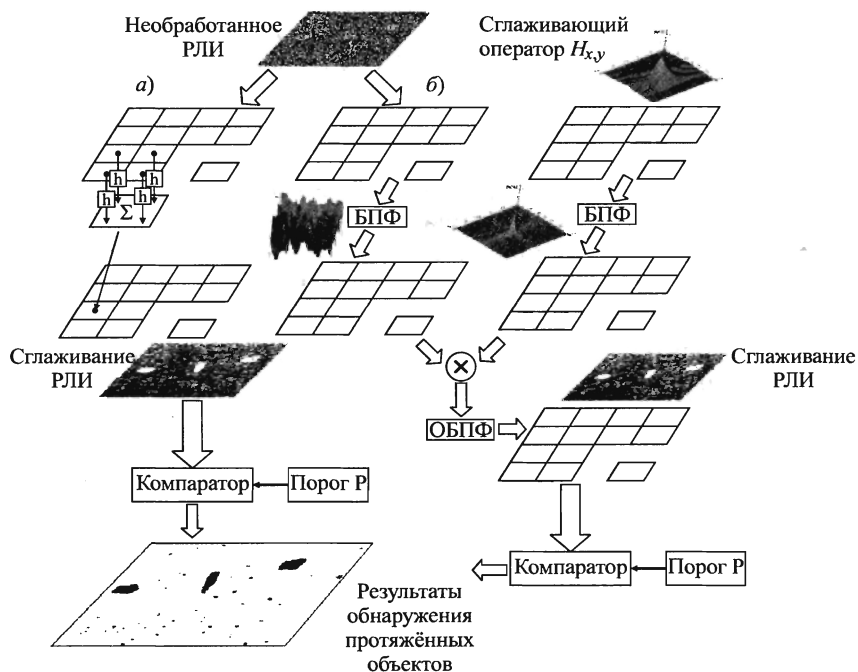


Рис. 4.35. Реализация алгоритма (4.4) в цифровых РЛС; а — путем непосредственного вычисления свертки; б — с помощью быстрого прямого (БПФ) и обратного (ОБПФ) преобразований Фурье

Величина порога P определяет не только характеристики обнаружителя, но и точность определения контуров протяженных объектов. Уменьшение P в алгоритме (4.46) влечет за собой уменьшение вероятности пропуска ПО, повышение точности сохранения контуров, однако одновременно увеличивает число “ложных засветок” на экране радиолокатора.

Выбор пространственного размера сглаживающего оператора $H_{x,y}$ необходимо осуществлять с учетом того, что при постоянном значении P и увеличении размера $H_{x,y}$ может произойти пропуск объекта, а при уменьшении — увеличение числа “ложных целей”. В общем случае длительность должна быть близкой к минимальному пространственному размеру объекта, подлежащего обнаружению. Схемная реализация алгоритма обнаружения путем порогового сравнения приведена на рис. 4.35.

Очевидны недостатки метода простого порогового обнаружения — сложность подбора порога P , при котором как происходит надежное обнаружение, так и отсутствуют “ложные цели”. К тому же данный метод не учитывает пространственной протяженности объекта, подлежащего выделению.

Пороговое обнаружение с учетом длительности сигнала. Несложная модификация алгоритма (4.46) позволяет учесть пространственную протяженность объектов, подлежащих выделению:

$$T_{x,y} = \begin{cases} 1, & h \left\{ T_{x,y} = \begin{cases} 1, & I_{x,y} \geq P \\ 0, & I_{x,y} < P \end{cases} \in [P_{\text{MIN}} \dots P_{\text{MAX}}] \right. \\ 0, & h \left\{ T_{x,y} = \begin{cases} 1, & I_{x,y} \geq P \\ 0, & I_{x,y} < P \end{cases} \notin [P_{\text{MIN}} \dots P_{\text{MAX}}] \right. \end{cases} \quad (4.47)$$

где h — интегральный оператор (суммирования отсчетов в пространственном окне); $[P_{\text{MIN}} \dots P_{\text{MAX}}]$ — интервал значений порога, принимаемых за индикацию наличия протяженного объекта.

Применение оператора h позволяет выделить те ПО, пространственные размеры которых находятся в заданном интервале. При этом необходимо отметить одну характерную особенность — если размер объекта превышает заданный величиной P_{MAX} , то он будет идентифицироваться как объект максимальной длины, рис. 4.36.

Структурная схема цифровой системы, осуществляющей обработку (4.47) по полученным результатам простого порогового обнаружения (4.46), приведена на рис. 4.37.

Для этого метода характерен тот же недостаток, что и для предыдущего — нечувствительность к изменению среднего уровня УЭПР, что обуславливает сложность подбора такого интервала $[P_{\text{MIN}} \dots P_{\text{MAX}}]$, при котором будет обеспечена как высокая вероятность правильного обнаружения, так и низкая вероятность ложного. Устранить этот недостаток можно путем применения фильтров высоких частот на входе РЛС или при дифференцировании входного сигнала. Однако при этом происходит искажение формы пространственных импульсов и уменьшение отношения сигнал-помеха, что в большинстве случаев неприемлемо.

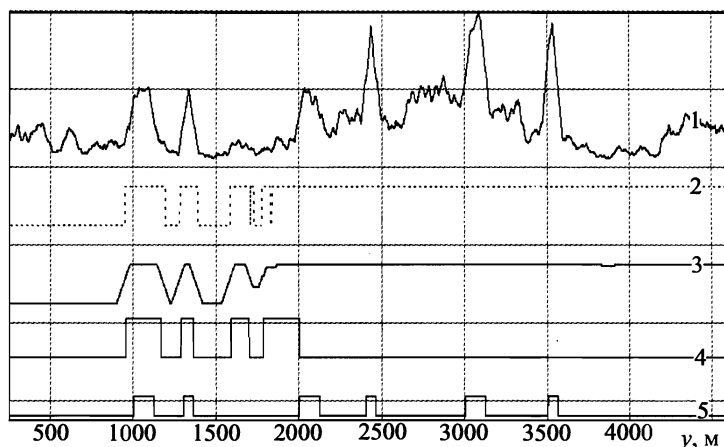


Рис. 4.36. Результат использования метода (4.5): 1 — входной эффект, сглаженный прямоугольным пространственным окном; 2, 3 — результат применения алгоритма (4.46) и его интегрирования пространственным окном h ; 4 — результат применения алгоритма (4.47); 5 — истинное пространственное положение протяженных объектов

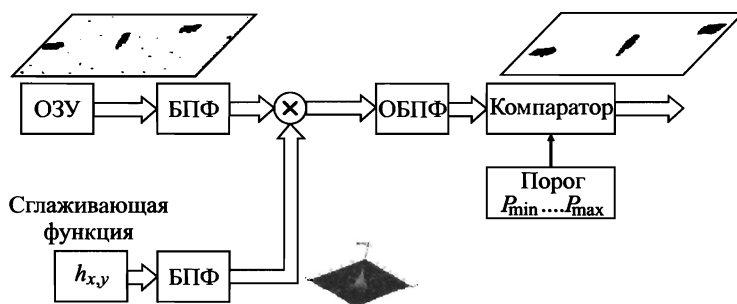


Рис. 4.37. Цифровая реализация алгоритма (4.47)

Достаточно простым методом (как с аппаратной, так и с программной точки зрения) устранения “нечувствительности” к медленным изменениям средней УЭПР алгоритмов (4.46), (4.47) является использование сглаживающих окон с “отрицательными выбросами”, $h^{\pm}(\cdot)$. Если среднее значение импульсной характеристики равно нулю, а длительность положительной согласована со средней длительностью отражений от объекта, то при сглаживании таким окном $h^{\pm}(\cdot)$ происходит эффективное подавление изменений среднего уровня УЭПР и выделение объектов, рис. 4.38.

Из результатов моделирования видно, что такие окна действительно обеспечивают удовлетворительные характеристики обнаружения, которые достаточно просто реализуются как аппаратно, так и программно. К тому же их применение позволяет отказаться от использования схем временной автоматической регулировки усиления в обзорных РЛС. Однако данный

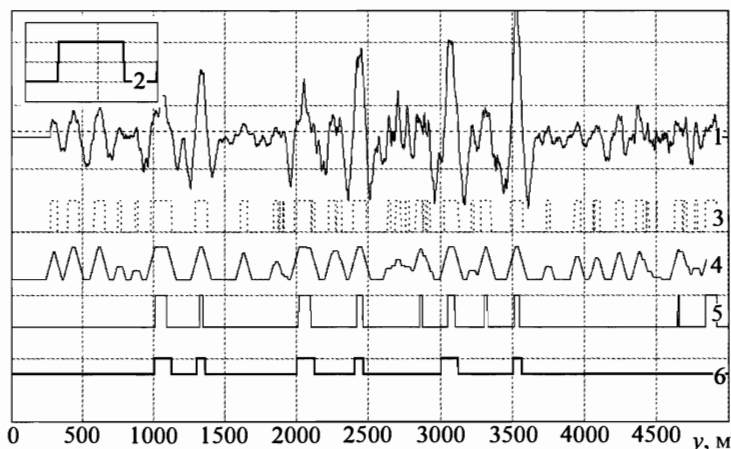


Рис. 4.38. Результаты обнаружения: 1 — поведение входного сигнала после сглаживания окном 2; 3, 4 — результат применения к 1 алгоритма (4.46) и результат его сглаживания прямоугольным окном; 5 — результат применения алгоритма (4.47); 6 — истинное положение протяженных объектов

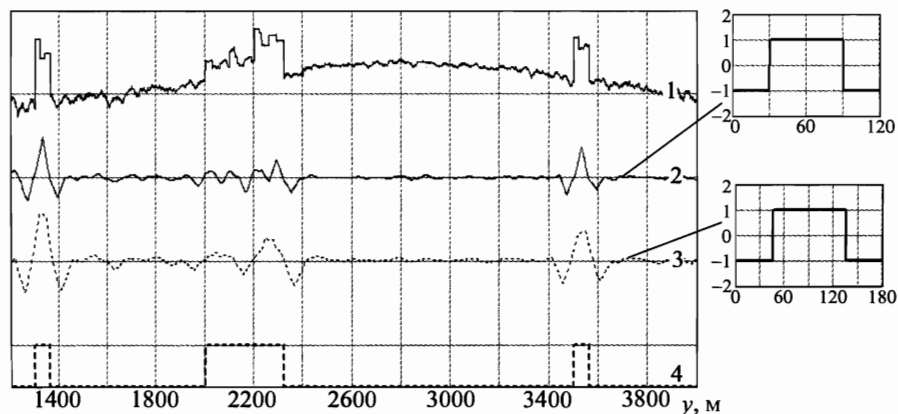


Рис. 4.39. Результаты обработки: 1 — входное воздействие; 2, 3 — результат сглаживания соответствующими окнами, 4 — истинное положение протяженных объектов

метод имеет существенный недостаток — если отраженный от объекта сигнал превышает длительность функции $h^{\pm}(\cdot)$, то при обработке будет наблюдаться эффект “провалов”, рис. 4.39.

Медианная фильтрация. Медианная фильтрация позволяет эффективно устранять помехи, длительность которых меньше половины ширины окна фильтра. Пример поведения входного эффекта, сглаженного медианными окнами различной длины, показан на рис. 4.40.

Применение алгоритмов обнаружения (4.46), (4.47) к радиолокационным изображениям, полученным после медианной фильтрации, показано на рис. 4.41.

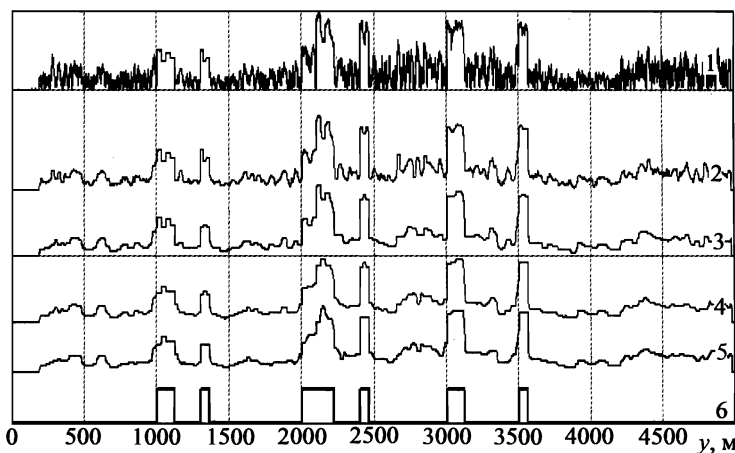


Рис. 4.40. Обработка медианными фильтрами. 1 — поведение оценки УЭПР после этапа первичной обработки; 2–5 — результат сглаживания окнами 30, 50, 75 и 90 метров; 6 — истинное положение протяженных объектов

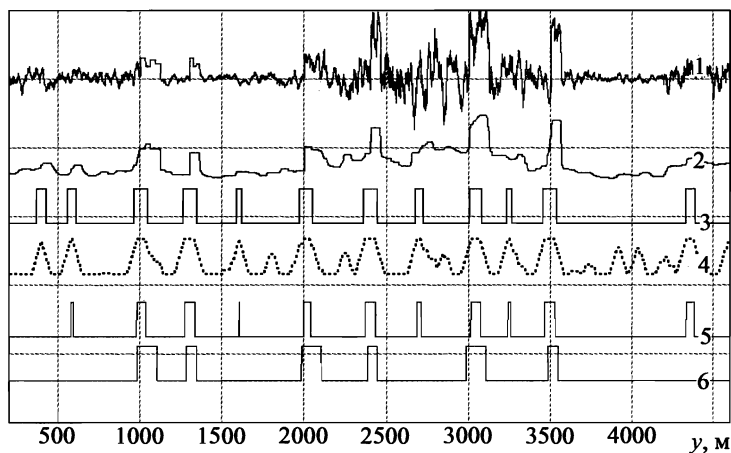


Рис. 4.41. Результаты обнаружения после медианной фильтрации: 1 — входной процесс; 2 — сигнал после медианной фильтрации окном шириной 50 м; 3 — простое пороговое обнаружение (4.46); 4 — результат сглаживания (3) прямоугольным окном; 5 — пороговое обнаружение с учетом длительности импульса (4.47); 6 — истинное положение ПО

Как видно из представленных выше результатов обработки, медианная фильтрация дает достаточно хорошие результаты при обнаружении протяженных объектов. Однако существенный недостаток такой обработки — сложность аппаратной и программной реализации, большой объем вычислений и нечувствительность к среднему изменению УЭПР.

По результатам моделирования рекомендуется выбирать размеры окон медианных фильтров порядка $0,8 \dots 1,6$ от минимального размера протяженного объекта. При меньших размерах происходит недостаточно эффективное подавление мультипликативных и аддитивных помех, при боль-

ших — увеличивается вероятность пропуска и происходит существенное искажение формы протяженных объектов.

Всем рассмотренным неадаптивным методам свойственен существенный недостаток — их нечувствительность к изменению среднего уровня эффективной поверхности рассеяния и, как следствие, сложность выбора такого значения порога, при котором обеспечиваются качественные характеристики обнаружения. По этой причине для решения задач обнаружения протяженных объектов в обзорных радиолокационных системах целесообразно применять адаптивные алгоритмы.

4.4.3. Синтез адаптивных систем обнаружения. Исследование качества обнаружения для различных методов первичной обработки входных процессов и изображений. Как было указано ранее, одним из параметров, определяющих целесообразность применения алгоритмов интерпретации в обзорных РЛС, является простота их программной или аппаратной реализации. С учетом этого требования предложен адаптивный алгоритм обнаружения протяженных объектов, принцип действия которого заключается в формировании локальных статистик (локальных средних или дисперсий) в окнах $h1$ и $h2$ (полагаем, что $h1 < h2$) [33].

Выбор статистики, по которой выполняется решение о наличии или отсутствии объекта, обуславливается характером первичной обработки и моделью поверхности. В большинстве практически важных случаев целесообразно воспользоваться вычислением локальных средних. С учетом этого, аналитическое выражение для адаптивного цифрового алгоритма обнаружения протяженных объектов будет следующим:

$$T_{x,y} = \begin{cases} 1, & \left(\sum_{x,y \in h1} I_{x,y} \right) \geq K \left(\sum_{x,y \in h2} I_{x,y} \right) \\ 0, & \left(\sum_{x,y \in h1} I_{x,y} \right) < K \left(\sum_{x,y \in h2} I_{x,y} \right), \end{cases} \quad (4.48)$$

где T — результат обнаружения объектов; K — пороговый коэффициент, определяющий вероятность правильного обнаружения и ложной тревоги; I — изображение после этапа первичной обработки.

Размеры окон $h1$ и $h2$ необходимо выбрать, исходя из минимального пространственного размера ПО, подлежащего выделению, и минимального допустимого расстояния между двумя объектами, соответственно. Пороговый коэффициент выбирался на основании результатов моделирования для различных реализаций стохастических входных сигналов. Структурная схема цифровой системы адаптивного обнаружения показана на рис. 4.42.

Для исследования зависимости результатов обнаружения (4.46) от размеров пространственных окон $h1$ и $h2$ было выполнено моделирование процессов формирования и обработки сигналов в цифровых обзорных РЛС. В рамках этого исследования существенное внимание уделяется сравнению результатов применения предложенного алгоритма, полученных при первичной обработке методом согласованной фильтрации, и при декорреляции

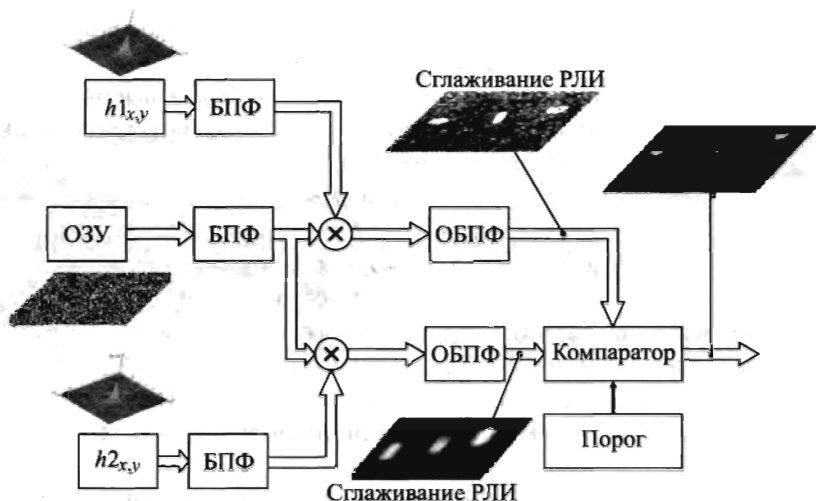


Рис. 4.42. Цифровая реализация алгоритма адаптивного обнаружения

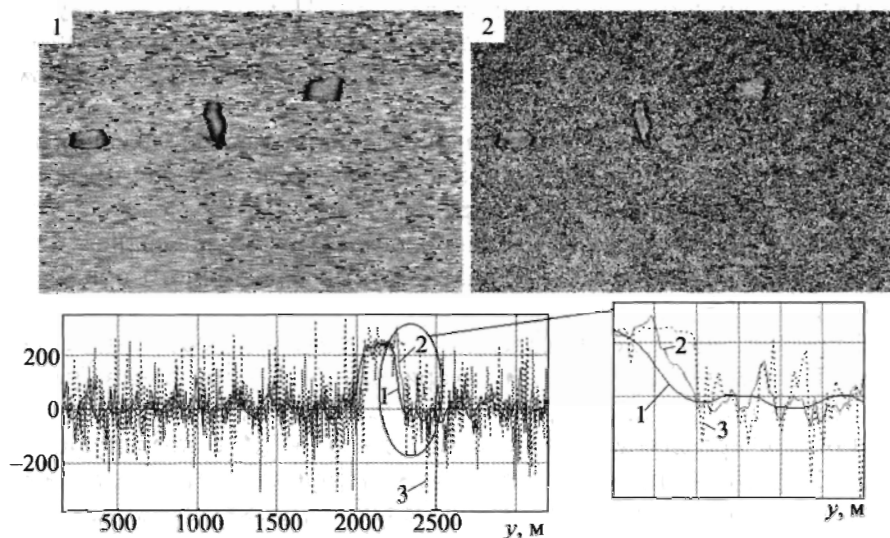


Рис. 4.43. Сравнение результатов первичной обработки. 1 — при согласованной фильтрации; 2 — при декорреляции принимаемого сигнала (среднее отношение сигнал-помеха 50); исходное поведение УЭПР (3) показано на рис. 4.27

входного сигнала. Такое сравнение позволяет оценить целесообразность применения алгоритмов учета стохастического характера отраженного от поверхности сигнала при решении задачи обнаружения протяженных объектов, рис. 4.43.

Из представленных результатов видно, что необработанные изображения существенно искажены спекл-шумом, корреляционная характеристика которого зависит от алгоритма первичной обработки. При согласованной фильтрации пространственный размер корреляционной функции больше,

при обработке с декорреляцией — меньше, уменьшение происходит пропорционально увеличению отношения сигнал–помеха.

В качестве частного результата можно указать более высокую точность оценки удельной эффективной поверхности рассеяния при первичной обработке с декорреляцией с последующим сглаживанием окнами небольшого размера по отношению к точности оценки УЭПР при первичной обработке методом согласованной фильтрации с последующим сглаживанием. Этот факт определяет более высокую достоверность обнаружения, распознавания и сохранения структуры протяженных объектов при обработке, учитывающей стохастический характер отраженного сигнала.

Представленные выше результаты обработки пространственными окнами различной длины используются при решении задачи обнаружения протяженных объектов путем применения адаптивного алгоритма (4.48), рис. 4.50.

Для визуальной оценки точности определения местоположения протяженных объектов и степени сохранения их контуров и текстуры конфигурации используется исходное положение ПО с учетом результатов определения области, где $T_{x,y} = 1$, алгоритм (4.48). Для этого данные, показанные на рис. 4.20, используются как маска для исходного изображения (рис. 4.27), рис. 4.51.

Для визуальной оценки точности определения местоположения протяженных объектов, как и в предыдущем случае, используется их истинное положение с учетом результатов определения области, где $T_{x,y} = 1$. Для этого исходное распределение удельной эффективной поверхности рассеяния (рис. 4.27) перемножается с результатами адаптивного обнаружения объектов, рис. 4.53.

Укрупненное изображение отдельных протяженных объектов и результаты их обнаружения адаптивным алгоритмом (4.48) при различных методах первичной и вторичной обработки показаны на рис. 4.54.

Из анализа процессов цифровой обработки РЛИ с последующим обнаружением протяженных объектов можно увидеть, что предложенный адаптивный алгоритм, несмотря на простоту его реализации, дает вполне удовлетворительные характеристики обнаружения. При этом малые пространственные размеры окон h_1 и h_2 приводят к большому числу ложно обнаруженных ПО. Варьирование порогом K в алгоритме (4.48) позволяет устранить этот недостаток, однако существенно искажает контуры и текстуру объектов.

По результатам статистического и аналитического исследования предложенного адаптивного алгоритма рекомендуется выбирать размер окна h_1 равным минимальному размеру объекта, подлежащего обнаружению, а размер h_2 — соответствующим минимальному допустимому расстоянию между различными протяженными объектами, в противном случае вероятность раздельного обнаружения двух близкорасположенных ПО существенно уменьшается.

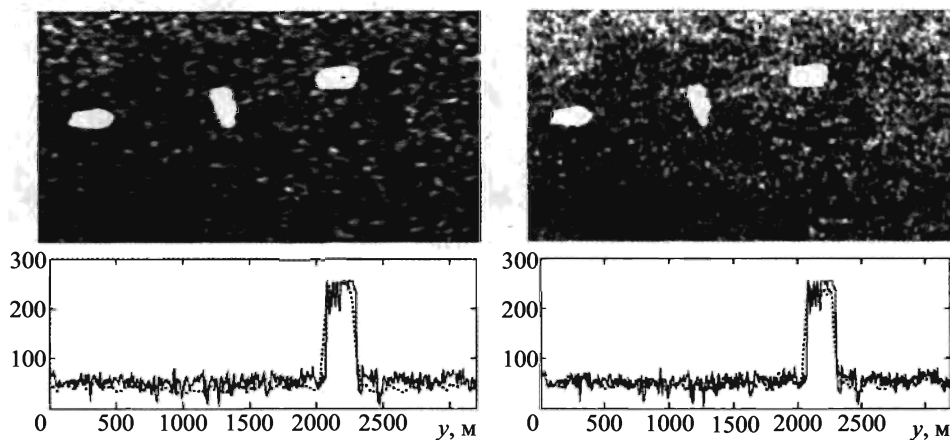


Рис. 4.44. Результаты сглаживания пространственным окном 25×25 м, слева — после согласованной фильтрации, справа — после декорреляции

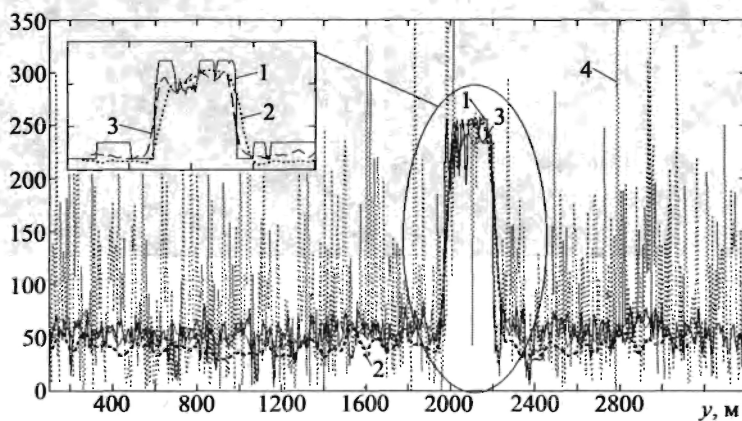


Рис. 4.45. Сравнение результатов сглаживания необработанного РЛИ окном 25×25 м: 2 — при согласованной фильтрации; 3 — при декорреляции принимаемого сигнала (среднее отношение сигнал-помеха 50); 1 — исходное поведение УЭПР (задается моделью, представленной на рис. 4.27)

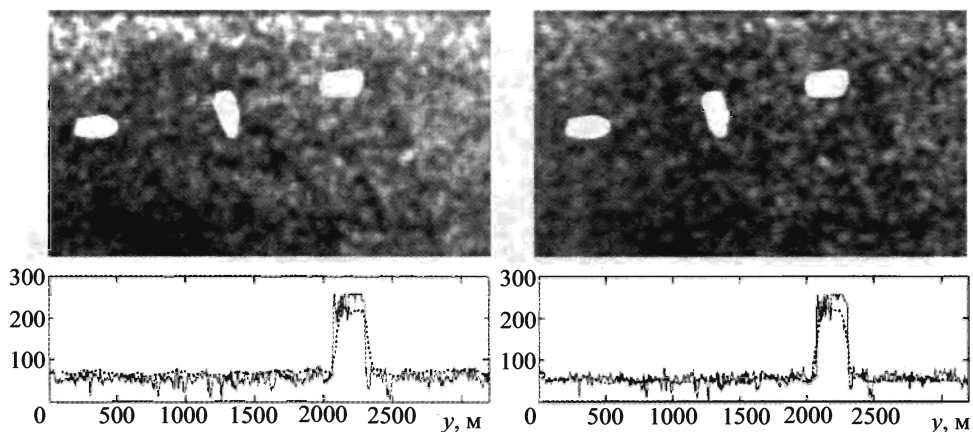


Рис. 4.46. Результаты сглаживания пространственным окном 50×50 м, слева — после согласованной фильтрации, справа — после декорреляции: 1 — истинное поведение УЭПР, 2 — результат оконного сглаживания

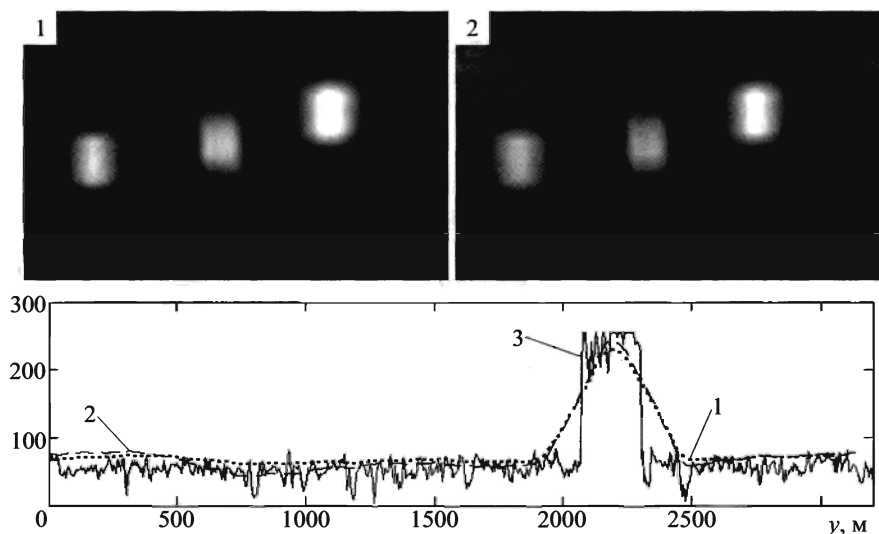


Рис. 4.47. Результаты сглаживания пространственным окном 300×300 м, слева — после согласованной фильтрации, справа - после декорреляции: 1 — результат сглаживания при согласованной фильтрации; 2 — при декорреляции принимаемого сигнала (среднее отношение сигнал-помеха 50); 3 — исходное поведение УЭПР (задается моделью, представленной на рис. 4.27)

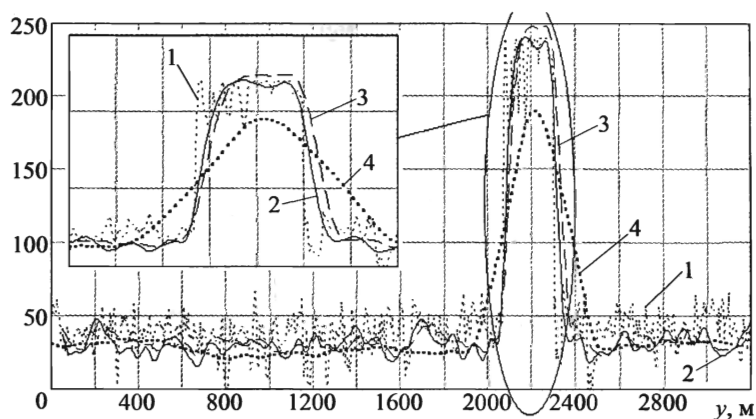


Рис. 4.48. Сравнение результатов обработки сигнала после согласованной фильтрации: 1 — поведение УЭПР, 2 — РЛИ после сглаживания окном 25×25 м, 3 — РЛИ после сглаживания окном 50×50 м, 4 — РЛИ после сглаживания окном 300×300 м

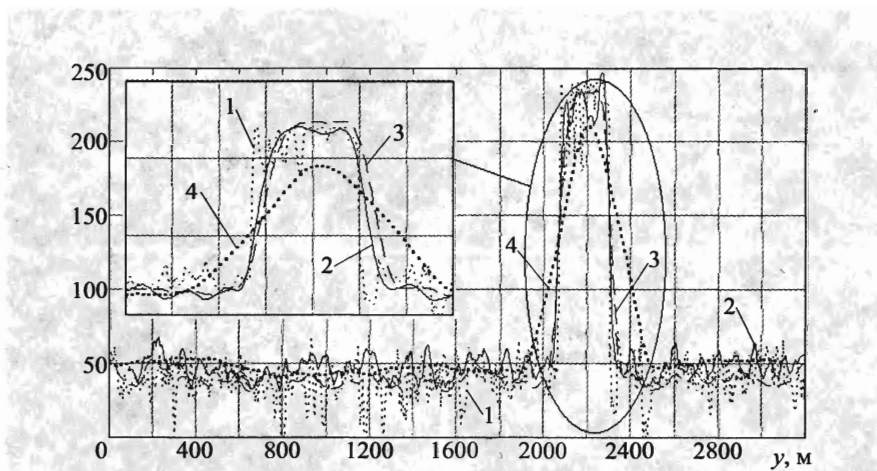


Рис. 4.49. Сравнение результатов обработки сигнала с декорреляцией: 1 — поведение УЭПР, 2 — РЛИ после сглаживания окном 25×25 м, 3 — РЛИ после сглаживания окном 50×50 м, 4 — РЛИ после сглаживания окном 300×300 м

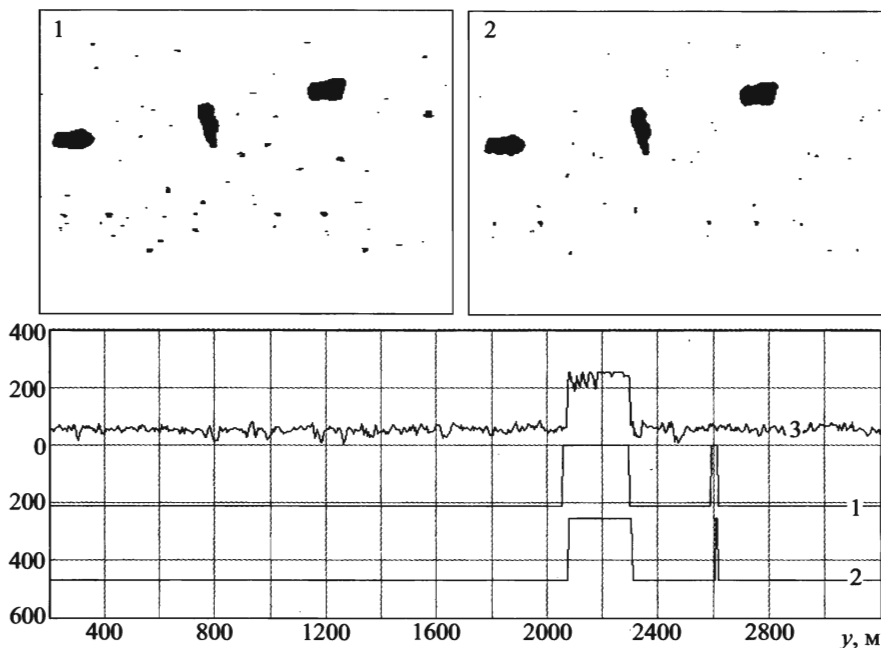


Рис. 4.50. Результаты адаптивного обнаружения (4.6) при $h_1 = 25$ м, $h_2 = 50$ м: 1 — результаты, полученные при согласованной фильтрации; 2 — результаты, полученные при декорреляции входного сигнала; 3 — исходное поведение УЭПР (рис. 4.27), сечение в дальномерной плоскости

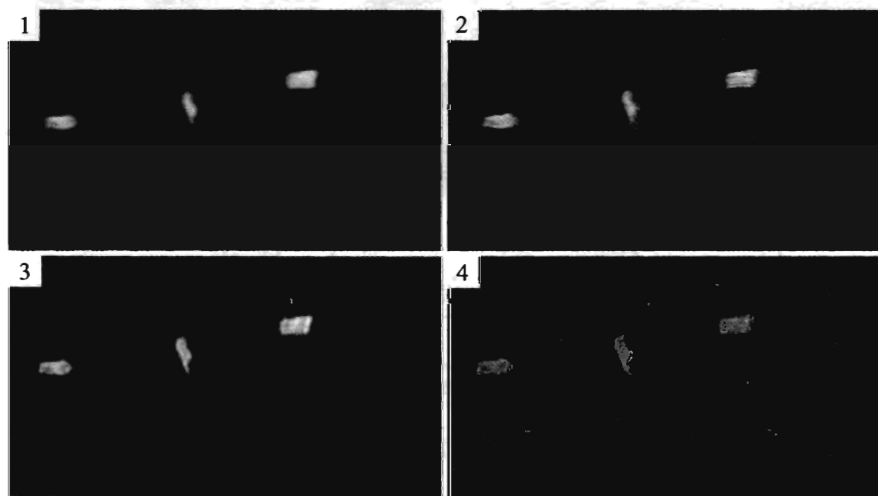


Рис. 4.51. Точность обнаружения объектов и сохранения их контуров: 1, 2 — вид РЛИ, полученного при согласованной фильтрации и индикации несглаженной и сглаженной окном 25×25 м оценки УЭПР, соответственно; 3, 4 — вид РЛИ, полученного при декорреляции принимаемого сигнала и индикации несглаженной и сглаженной окном 25×25 м оценки УЭПР, соответственно

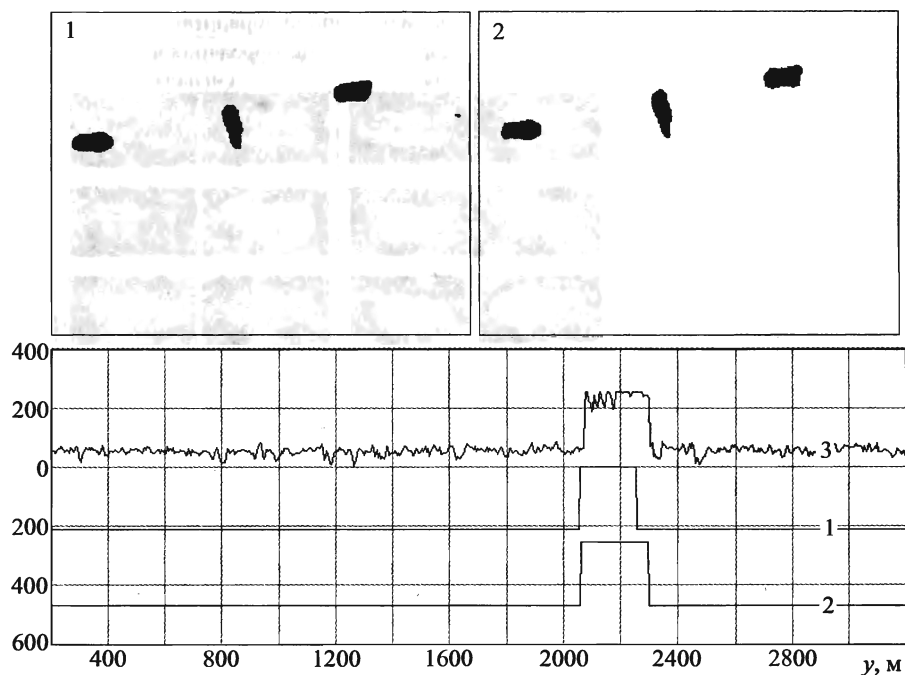


Рис. 4.52. Результаты обнаружения (4.6) при $h_1 = 50$ м, $h_2 = 300$ м: 1 — результаты, полученные при согласованной фильтрации; 2 — результаты обнаружения, полученные при декорреляции входного сигнала; 3 — исходное поведение УЭПР

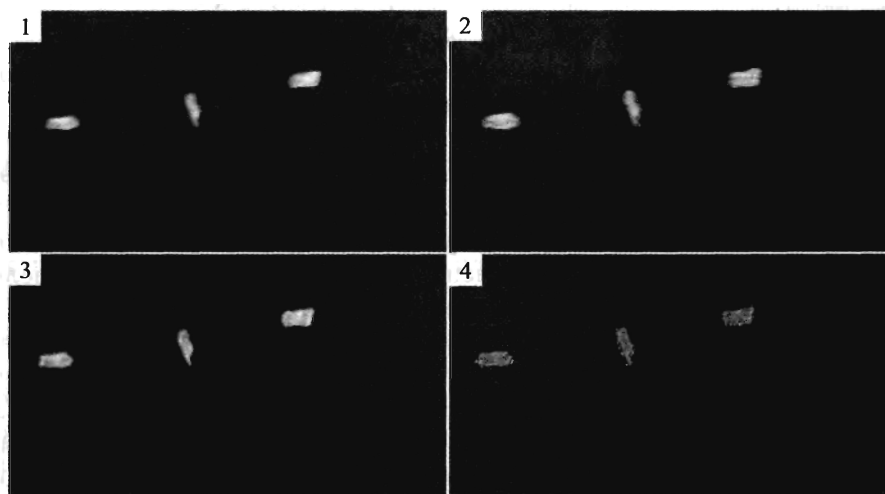


Рис. 4.53. Точность обнаружения объектов и сохранения их контуров: 1, 2 — вид РЛИ, полученного при согласованной фильтрации и индикации результатов, сглаженных окнами 25×25 м и 50×50 м, соответственно; 4 — вид РЛИ, полученного при декорреляции принимаемого сигнала и индикации результатов, сглаженных окнами 250×25 м и 50×50 м, соответственно

Размеры окон	Вид вторичной обработки	Алгоритм первичной обработки			
		Согласованная фильтрация		Декорреляция входного сигнала	
$h_1 = 25$ $h_2 = 50$	Нет				
	Сглаживание окном шириной 25 м				
$h_1 = 50$ $h_2 = 300$	Нет				
	Сглаживание окном шириной 25 м				

Рис. 4.54. Укрупненное сравнение результатов обработки. В каждой из ячеек приведены два исходных изображения протяженных объектов (справа) и результат их обнаружения с последующей индикацией (слева)

При решении задач обнаружения в соответствии с предложенным адаптивным алгоритмом (4.48) возникают некоторые искажения формы ПО. Эти искажения можно устранить путем уменьшения порога K адаптивного алгоритма в последующем использовании результатов определения объектов при большом и малом значении порога. Большое значение порога используется для начального обнаружения (в результате обеспечивается низкое значение вероятности ложного обнаружения и ограничивается область, меньшая по размеру чем протяженный объект). Полученные таким образом пространственные области необходимо расширить и в них выполнить повторную операцию обнаружения при более низком значении порога и, соответственно, меньших значениях h_1 и h_2 . Выполненная последовательность операций позволит достаточно точно восстановить контур ПО при низкой вероятности ложного обнаружения.

Адаптивность алгоритма (4.48) позволяет эффективно решать задачи интерпретации при существенном изменении среднего уровня мощности

отраженного сигнала, что позволяет отказаться от использования схем автоматической регулировки усиления. Несложная модификация данного алгоритма позволяет использовать его при решении задач сопровождения протяженных объектов (сопровождение транспорта на особо важных этапах движения: кораблей при заходе в порт, самолетов при посадке и т. д.).

В конечном итоге, по результатам статистического моделирования процессов формирования и интерпретации радиолокационных изображений можно сделать вывод о том, что применение алгоритмов первичной обработки, полученных при учете стохастического характера отраженного сигнала, повышает вероятностные и точностные характеристики дальнейшей интерпретации РЛИ. В частности, применение этого алгоритма позволяет с большей точностью определить пространственное положение протяженных объектов, сохранить их контуры и более качественно провести их распознавание. Более высокое качество обнаружения можно получить при использовании набора радиолокационных систем за счет совместной обработки результатов, полученных на различных бистатических углах, поляризациях, несущих частотах [35, 36].

4.5. Развертка фазы в цифровых интерферометрических системах с синтезированием апертуры антенны

Одной из важнейших задач, решаемых системами дистанционного зондирования аэрокосмического базирования, является построение карт высот рельефа поверхности [37]. Существует ряд методов, позволяющих выделить из радиолокационных данных информацию о возвышении рельефа: стереометрический, интерферометрический, клинометрический и поляриметрический.

Наибольшее практическое применение получил интерферометрический метод, принцип действия которого заключается в выделении фазовой информации из радиолокационного сигнала путем совместной обработки фазовых полей, полученных съемкой одного и того же участка местности одновременно двумя антенными системами либо одной антенной на двух витках орбиты, рис. 4.55.

Рассмотрим процесс формирования фазовой информации, характеризующей пространственное распределение высоты рельефа картографируемой поверхности, для интерферометрической системы с синтезированием апертуры (ИРСА), рис. 4.56.

Для двух разнесенных антенн интерферометра разность времен запаздывания сигнала, отраженного от элемента поверхности с координатами $\vec{r}$, можно записать следующим образом:

$$t_{31}(t, \mathbf{r}) - t_{32}(t, \mathbf{r}) = \frac{2R_1(t, \mathbf{r})}{c} - \frac{2R_2(t, \mathbf{r})}{c} = 2 \frac{\Delta}{c}. \quad (4.49)$$

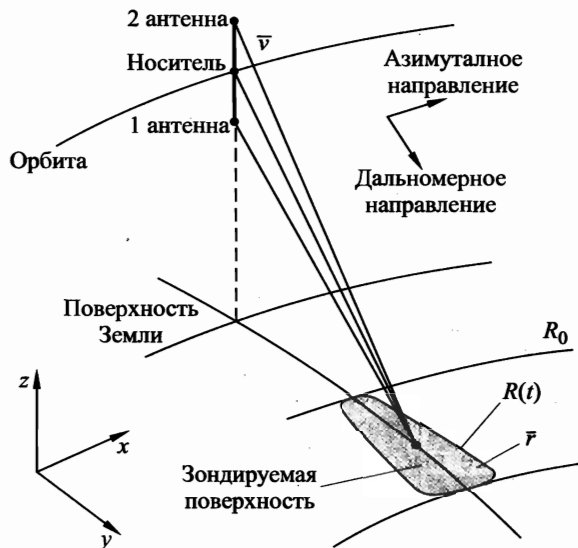


Рис. 4.55. Интерферометрическая система с синтезированием апертуры антенны

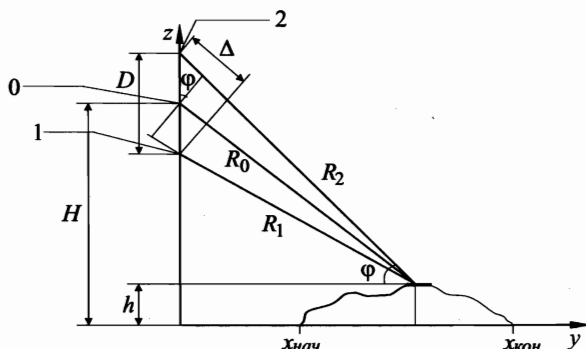


Рис. 4.56. Процесс дистанционного зондирования ИРСА, дальномерная плоскость

Разность фаз будет определяться выражением $\Omega = k\Delta$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ — волновое число. Если точка поверхности находится в дальней зоне (лучи, приходящие в антенны 1 и 2 практически параллельны), несложно получить следующие геометрические соотношения:

$$\Delta = D \sin \varphi, \quad \sin \varphi = \frac{H - h}{R_0}, \quad \Delta = D \frac{H - h}{R_0}, \quad (4.50)$$

где D — расстояние между антеннами интерферометра (база); R_0 — среднее расстояние от центра базы до точки поверхности $\mathbf{r}$; φ — угол между R_0 и осью OY ; H — высота носителя над подстилающей поверхностью; h — высота возвышения точки с координатами $\mathbf{r}$.

Для произвольной точки поверхности связь между высотой рельефа и разностью фаз сигналов, принятых двумя антеннами, определяется выражением

$$\Omega[\mathbf{r}, h(\mathbf{r})] = kD \frac{H - h(\mathbf{r})}{R_0}. \quad (4.51)$$

Рассмотрим этап первичной обработки в ИРСА. Результат оценки разности для большинства алгоритмов первичной обработки можно записать в виде

$$\dot{I}(\mathbf{r}) = \int_D \sigma^0(\mathbf{r}_1) \exp \left\{ jkD \frac{H - h(\mathbf{r}_1)}{R_0(\mathbf{r}_1)} \right\} \Psi_I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1, \quad (4.52)$$

где $\sigma^0(\mathbf{r}_1)$ — удельная эффективная поверхность рассеяния; $\Psi_I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ — пространственная функция неопределенности интерферометра; D — область обзора.

В случае, когда интервал характерного изменения пространственных функций $\sigma^0(\mathbf{r}_1)$ и $\exp \left\{ jkD \frac{H - h(\mathbf{r}_1)}{R_0(\mathbf{r}_1)} \right\}$ намного меньше ширины пространственной функции неопределенности $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ (системы ДЗ с высоким разрешением), выражение (4.52) преобразуется к виду

$$\dot{I}(\mathbf{r}) \cong \sigma^0(\mathbf{r}) \exp \left\{ jkD \frac{H - h(\mathbf{r})}{R_0(\mathbf{r})} \right\}. \quad (4.53)$$

Если $\sigma^0(\mathbf{r}) = \text{const}$, то по сформированному выходному эффекту (4.53) можно непосредственно оценить высоту рельефа [38]. В общем случае необходимо выполнить оценку поведения удельной эффективной поверхности рассеяния в пределах области D . Таким образом, независимо от методов первичной обработки в интерферометрической системе с синтезированием апертуры, выходным эффектом можно считать пространственную функцию $\exp \left\{ jkD \frac{H - h(\mathbf{r}_1)}{R_0(\mathbf{r}_1)} \right\}$, свернутую с пространственной функцией неопределенности ИРСА [39].

Для оценки аргумента экспоненты (4.53) целесообразно воспользоваться одним из следующих соотношений:

$$\hat{\Omega}[\mathbf{r}, h(\mathbf{r})] = \arccos \left(\text{Re } \dot{I}(\mathbf{r}) \right), \quad (4.54)$$

$$\hat{\Omega}[\mathbf{r}, h(\mathbf{r})] = \arcsin \left(\text{Im } \dot{I}(\mathbf{r}) \right). \quad (4.55)$$

Нет существенной разницы, какое из уравнений (4.54) или (4.55) использовать для оценки $\Omega[\mathbf{r}, h(\mathbf{r})]$, поэтому в дальнейшем будем использовать выражение

$$\hat{\Omega}[\mathbf{r}, h(\mathbf{r})] = \arccos \left(\cos \left[kD \frac{H - h(\mathbf{r}_1)}{R_0(\mathbf{r}_1)} \right] \right). \quad (4.56)$$

Из последнего соотношения видно, что связь между оцениваемым $\Omega[\mathbf{r}, h(\mathbf{r})]$ и измеряемым $\exp \left\{ jkD \frac{H - h(\mathbf{r}_1)}{R_0(\mathbf{r}_1)} \right\}$ параметрами задается через неоднозначную функцию. Это означает, что в интерферометре, помимо решения задачи оптимального оценивания разности фаз сигналов в различных антенных системах, для построения топографических карт необходимо решить задачу восстановления функции по ее неоднозначному преобразованию [40]. При этом можно выделить задачи устранения неоднозначности и развертки фазы.

Необходимость решения задачи устранения неоднозначности фазовых измерений связана с тем, что в области обзора могут быть такие отклонения высоты Δh , которые приводят к изменению аргумента $kD \frac{H - h(\mathbf{r}_1)}{R_0(\mathbf{r}_1)}$ в $2\pi n$ раз, где n — целое число. При этом по результатам измерения разности фаз невозможно однозначно определить n и, соответственно, значения $\Omega[\mathbf{r}, h(\mathbf{r})]$ и высоты Δh . Таким образом, для интерферометрической системы с синтезированием апертуры антенны существует такой интервал Δh , который приводит к изменению $kD \frac{H - h(\mathbf{r}_1)}{R_0(\mathbf{r}_1)}$ не более чем на 2π (интервал однозначности Δh_A). Этот интервал определяется размером базы D , длиной волны λ и параметрами визирования. Пример поведения высоты рельефа и ее оценки при наличии неоднозначности измерений ($\Delta h > \Delta h_A$) показан на рис. 4.57 на цветной вклейке.

Однако, если в области обзора D функция $h(\mathbf{r})$ не содержит скачков, приводящих к неоднозначным измерениям, для построения карты высот необходимо решить задачу развертки фазы. Как указано ранее, эта необходимость обусловлена неоднозначной связью между измеренным параметром и величиной, которую необходимо оценить. При решении будем полагать, что измерение $\exp \left\{ jkD \frac{H - h(\mathbf{r}_1)}{R_0(\mathbf{r}_1)} \right\}$ получено при наличии нормальных ошибок, а аномальные отсутствуют.

При развертке фазы в случае произвольного характера поведения высоты рельефа одной из основных задач является определение точек пространства, где высота изменяется от монотонного возрастания до монотонного убывания $\mathbf{r}_\Delta$. Для этого необходимо найти такие $\mathbf{r} \in D$, где изменяется значение пространственной функции $\frac{d^2 \hat{\Omega}(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}^2} = \frac{d^2 \arccos \left\{ \cos \left\{ kD \frac{H - h(\mathbf{r})}{R_0(\mathbf{r})} \right\} \right\}}{d\mathbf{r}^2}$. Так как величина $\frac{d^2 \hat{\Omega}(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}^2}$ изменяется и в точках локального максимума/минимума неразвернутой абсолютной

фазы, необходимо использовать следующее выражение:

$$H_{\bar{r}} = \text{not} \left\{ \frac{d^2 \arccos \left\{ \cos \left\{ kD \frac{H - h(\mathbf{r})}{R_0(\mathbf{r})} \right\} \right\}}{d\mathbf{r}^2} \right\} \text{ and} \\ \text{and} \left\{ \text{not max} \left[\arccos \left\{ \cos \left(kD \frac{H - h(\mathbf{r})}{R_0(\mathbf{r})} \right) \right\} \right] \right\} \text{ and} \\ \text{and} \left\{ \text{not min} \left[\arccos \left\{ \cos \left(kD \frac{H - h(\mathbf{r})}{R_0(\mathbf{r})} \right) \right\} \right] \right\}, \quad (4.57)$$

где not — операция логического отрицания; and — операция логического умножения.

Предложенный цифровой алгоритм выделяет точки пространства, где происходит изменение характера высоты рельефа. Пропуск точки $\mathbf{r}_\Delta$ возможен только в случае ее совпадения с пространственным положением максимума функции $\Omega[\mathbf{r}, h(\mathbf{r})]$. После операции выделения $\mathbf{r}_\Delta$, в зависимости от того возрастает или убывает $h(\mathbf{r})$ в некоторой ε -окрестности, применяется выражение

$$\hat{\Omega}_{\mathbf{r}} = \pm \sum_{x,y \in \varepsilon} \left| \frac{d\hat{\Omega}_{\mathbf{r}}}{d\mathbf{r}} \right|, \quad (4.58)$$

где знак “плюс” соответствует монотонному увеличению высоты рельефа, знак “минус” — уменьшению [41].

Результаты решения задачи цифровой развертки фазы при произвольном характере изменения высоты показаны ниже. Для наглядности помимо трехмерных зависимостей оцениваемых величин используются сечения в определенной области пространства.

Пространственная зависимость высоты рельефа поверхности и координатных функций $\cos \left\{ kD \frac{H - h(\mathbf{r})}{R_0(\mathbf{r})} \right\}$, $\frac{d}{d\mathbf{r}} \left(\cos \left\{ kD \frac{H - h(\mathbf{r})}{R_0(\mathbf{r})} \right\} \right)$ показаны на рис. 4.58, 4.59 на цветной вклейке.

Графики, поясняющие работу предложенного алгоритмы выделения точек поверхности, в которых происходит изменение характера поведения функции $h(\mathbf{r})$, приведены на рис. 4.60 на цветной вклейке.

В результате статистического исследования было установлено, что предложенный алгоритм (4.57) достаточно точно определяет точки пространства, где происходит изменение характера поведения высоты рельефа от монотонного возрастания к монотонному убыванию или наоборот — от убывания к возрастанию.

Решение задачи развертки фазы с учетом данных, полученных в результате применения (4.57), по измеренным значениям пространственной функ-

ции $\cos \left\{ kD \frac{H - h(\mathbf{r})}{R_0(\mathbf{r})} \right\}$, в соответствии с алгоритмом (4.58) представлены на рис. 4.61 на цветной вклейке.

Таким образом, в данном разделе показана возможность цифровой реализации алгоритма развертки фазы в интерферометрических системах с синтезированием апертуры антенны. Одной из основных операций при этом является выявление точек пространства, где характер поведения высоты изменяется от монотонного убывания к монотонному возрастанию. Результаты цифровой обработки показали, что предложенный алгоритм дает достаточно хорошие результаты при произвольном изменении высоты рельефа поверхности.

При использовании алгоритмов обработки целесообразно учесть стохастический характер отраженного от поверхности электромагнитного поля [42, 43], что позволяет повысить точность определения высоты.

Дальнейшего повышения качества функционирования интерферометрических РСА можно достичь при использовании многопозиционных интерферометрических систем с синтезированием апертуры антенны [38], которые позволяют одновременно повысить точность восстановления высоты при увеличении интервала однозначных определений за счет модификации алгоритмов обработки [44].

Список литературы

1. Волосюк В. К., Кравченко В. Ф., Пустовойт В. И. Оптимизация оценок пространственно-распределенных электрофизических параметров и статистических характеристик поверхностей в активных РЛС скаттерометрического типа // ДАН РАН. — 1997. — Т. 356, № 4. — С. 472–475.
2. Волосюк В. К., Кравченко В. Ф., Фалькович С. Е. Оптимизация оценок пространственно-распределенных параметров электродинамических моделей поверхностей в обратных задачах интерпретации при активном дистанционном зондировании // ДАН СССР. — 1992. Т. 322, № 2. — С. 277–280.
3. Волосюк В. К. Синтез оптимальных алгоритмов оценок электрофизических параметров и статистических характеристик поверхностей в скаттерометрических РЛС дистанционного зондирования типа РСА // Электромагнитные волны и электронные системы. 2003. — Т. 8, № 1. — С. 35–44.
4. Волосюк В. К., Кравченко В. Ф., Горбуненко О. А. Оптимизация радиотехнических измерений радиофизических параметров и статистических характеристик природных сред при активном аэрокосмическом зондировании // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. — 2001. — № 10. — С. 5–52.
5. Волосюк В. К., Зеленский А. А., Кравченко В. Ф. Восстановление параметров поверхностей при их картографировании в активных РЛС дистанционного зондирования // Радиотехника. — 2001. — № 10. — С. 21–28.
6. Волосюк В. К., Кравченко В. Ф. Математические методы моделирования физических процессов в задачах дистанционного зондирования Земли // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. — 2000. — № 8. — С. 3–80.

7. *Cutrona L.J. and G.O. Hall.* A Comparison of Techniques for Achieving Fine Azimuth Resolution // "IRE Trans". — 1962. — V. MIL-6. — P. 119–121.
8. *Волосюк В. К., Кравченко В. Ф., Ксендзук А. В.* Особенности восстановления удельной ЭПР. Модифицированный метод синтезирования апертуры // Успехи современной радиоэлектроники. — 2005. — № 5. — С. 10–28.
9. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Случайные поля. — М.: Мир, 1981.
10. *Фалькович С. Е., Пономарев В. И., Шкварко Ю. В.* Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в радиоканалах с рассеянием. — М.: Радио и связь, 1989.
11. Радиолокационные методы исследования Земли / Под ред. Ю. А. Мельника. — М.: Сов. радио, 1980.
12. *Volosyuk V. K., Kravchenko V. F., Falkovich S. Ye.* Optimization of estimates of the spatially distributed parameters of electrodynamic models of surfaces in inverse interpretation problems for active remote sensing // Physics Doklady. — 1992. — Vol. 37, № 1. — P. 23–26.
13. *Volosyuk V. K., Kravchenko V. F., Pustovoit V. I.* Optimization of estimates for spatially distributed electrophysical parameters and statistical characteristics of the surface in scatterometric active radar systems // Physics Doklady. — 1997. — Vol. 42, № 10. — P. 542–545.
14. *Kravchenko V. F., Falkovich S. E., Volosyuk V. K.* Statistical theory of active radar systems for remote probing of natural environment // Measurement Techniques. — 1995. — Vol. 38, № 1. — P. 101–107.
15. *Volosyuk V. K.* Optimization of estimations of spatially — distributed parameters in problems of radiovision and cartography, Radioelectronics and communications systems // Allerton Press. — 2000. — Vol. 43, № 7. — P. 14–20.
16. *Волосюк В. К., Кравченко В. Ф., Фалькович С. Е.* Статистическая теория радиотехнических систем активного дистанционного зондирования природных сред // Измерительная техника. — 1995. — № 1. — С. 57–60.
17. *Волосюк В. К.* Комбинированная оптимальная обработка сигналов в многоканальных РСА // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1999. — № 12. — С. 45–49.
18. *Волосюк В. К.* Оптимизация оценок пространственно-распределенных параметров в задачах картографирования и радиовидения. Радиоэлектроника // Изв. вузов. — 2000. — № 7. — С. 21–31.
19. *Волосюк В. К., Кравченко В. Ф., Пустовойт В. И.* Оптимизация комплексной обработки полей рассеянного и собственного радиотеплового излучения в комбинированных активно-пассивных системах картографирования поверхностей // ДАН РАН. — 1999. — Т. 366, № 1. — С. 43–46.
20. *Ксендзук А. В.* Улучшение радиоизображений РСА применением алгоритмов декорреляции // Вестник ХГПУ. — 2000. — № 80. — С. 12–14.
21. *Ксендзук А. В.* Использование стохастических моделей поверхности при активном дистанционном зондировании земли // Вестник ХГПУ. — 2000. — Вып. 128. — С. 6–12.
22. *Ксендзук А. В.* Синтез оптимального алгоритма обработки стохастических сигналов при активном дистанционном зондировании // Вестник харьковского университета. — 2001. — Ч. 2, № 506. — С. 125–128.
23. *Ксендзук А. В.* Качество радиолокационных изображений РСА при использовании алгоритмов декорреляции // Вестник НТУ "ХПИ". — 2001. — № 14. — С. 37–42.

24. Ксендзук А. В. Исследование функций неопределенности в радиосистемах с синтезированием апертуры // Авиационно-космическая техника и технология. — Харьков, ХАИ. — 2000. — Вып. 21. — С. 148–152.
25. Ksendzук A. V., Volosyuk V. K., Sologub N. S. Space ambiguity functions of the optimal processing algorithm for the stochastic surface models // 5th European Conference on Synthetic Aperture Radar EUSAR 2004. Ulm, Germany. — 2004. Vol. 1. — P. 191–194.
26. Ксендзук А. В., Волосюк В. К., Евсеев И. А. Повышение разрешающей способности РСА при использовании шумоподобных сигналов с учетом стохастического характера отражающей поверхности. Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: Сборник научных трудов. — Вып. 26. — Харьков: Национальный аэрокосмический университет “ХАИ”, 2005. — С. 133–138.
27. Ksendzук A. V., Volosyuk V. K., Sologub N. S. Modeling SAR primary and secondary processing algorithms. Estimating quality of the processing techniques // 5th European Conference on Synthetic Aperture Radar EUSAR 2004. Ulm, Germany. — 2004. Vol. 2. — P. 1013–1016.
28. Ксендзук А. В. Принципы и алгоритмы имитационного статистического моделирования пространственно-временных процессов и их обработки в радиолокационных системах с синтезированием апертуры антенны // Вестник харьковского национального университета имени В. Н. Каразина. — Харьков, Украина. — 2004. — № 622. — С. 102–105.
29. Ксендзук А. В. Аналитическое и численное определение качественных показателей функционирования радиолокационных систем дистанционного зондирования. Электромагнитные волны и электронные системы. — 2004. — Т. 9, № 5. — С. 35–41.
30. Ksendzук A. V., Volosyuk V. K. Optimal processing algorithm via de-correlation in Synthetic Aperture Radar // Авіаційно-космічна техніка і технологія. — Харків, ХАИ. — 2001. — Вып. 22. — С. 285–287.
31. Ksendzук A. V. Extended quality identifiers for the radar measurements // ICATT 03, 9–12 sep, 2003, Sevastopol. — P. 757–760.
32. Ксендзук А. В., Волосюк В. К. Отображение движущихся объектов в РСА // Межд. научно-практ. конф. “Информационные технологии управления экологической безопасностью, ресурсами и действиями в чрезвычайных ситуациях”, ХАИ, 2002. — С. 104–107.
33. Ksendzук A. V., Sologub N. S. Estimation position of the slow targets in strong multiplicative noise // 5th European Conference on Synthetic Aperture Radar EUSAR 2004. Ulm, Germany. — 2004. — Vol. 2. — P. 811–813.
34. Ксендзук А. В. Алгоритмы обнаружения и идентификации точечных целей в многопозиционных РСА // XXIII всероссийский симпозиум “Радиолокационное исследование природных сред”, Санкт-Петербург, 2005. — Вып. 5. — С. 133–139.
35. Ксендзук А. В. Обнаружение пространственных областей с заданными законами отражения в многопозиционных РСА // 15 International Crimean Conference Microwave & Telecommunication Technology, Sept. 12–16, 2005. — P. 923–924.
36. Ksendzук A. V., Volosyuk V. K., Ksenzук V. M. Multiposition SAR versus Monostatic SAR // 6th European conference on Synthetic Aperture Radar: EUSAR 2006 (16–18 May 2006). Dresden, 2006.
37. Ksendzук A. V. Phase unwrapping and ambiguity elimination in the multi frequency SAR interferometer // The Fifth International Kharkov Symposium on

- Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter, and Submillimeter Waves. — Kharkov, Ukraine, 2004. — P. 247–249.
38. Веб-сайт Multiposition Synthetic Aperture Radar, <http://mpsar.narod.ru>.
39. *Ksendzuk A. V.* SAR interferometer optimal processing algorithms for the stochastic surface models // The Fifth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter, and Submillimeter Waves. — Kharkov, Ukraine. — 2004. — P. 253–255.
40. *Ksendzuk A. V.* Phase unwrapping and ambiguity elimination in the multi frequency SAR interferometer // The Fifth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter, and Submillimeter Waves. — Kharkov, Ukraine. — 2004. — P. 247–249.
41. *Ksendzuk A. V., Volosyuk V. K.* Multi-base InSAR with enhanced signal processing // IV International Crimean Conference Microwave & Telecommunication Technology: ICATT, 9–12 September, 2003, Sevastopol. — P. 405–408.
42. *Ксендзук А. В.* Особенности формирования интерферограмм в интерферометрах с синтезированием апертуры // Третья Харьковская конференция молодых ученых. Микроволновая электроника и радиолокация. — Харьков, 2004. — С. 15–16.
43. *Ksendzuk A. V.* SAR interferometer optimal processing algorithms for the stochastic surface models // The Fifth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter, and Submillimeter Waves: MSMW'04, Kharkov, 2004. — P. 253–255.
44. *Ксендзук А. В.* Многопозиционные ИРСА. Алгоритмы обработки стохастических полей // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2006. — № 1/2(19). — Харьков. — С. 10–12.

ГЛАВА 5

СЛЕПАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ. МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ, ПРИЛОЖЕНИЯ

Введение

“Слепая” обработка сигналов (СОС) (blind signal processing) это относительно новая технология цифровой обработки сигналов (ЦОС), получившая свое развитие в последние годы.

Задачу слепой обработки можно сформулировать как цифровую обработку неизвестных сигналов, прошедших линейный канал с неизвестными характеристиками на фоне аддитивных шумов.

“Слепая проблема” часто возникает в различных приложениях цифровой обработки сигналов и изображений: в системах радиотехники, в том числе в системах радиолокации, радионавигации, радиоастрономии, цифрового телевидения; в системах радиосвязи; в задачах цифровой обработки речи, изображений, при обработке сигналов медицинской техники, в геофизике и т. д. [1–6].

В данной главе излагается современная теория, методы и алгоритмы СОС, а так же некоторые приложения слепой обработки сигналов при решении задач связи по каналам с рассеянием и космической радиолокации.

5.1. Постановка задачи, основные приложения

Различают два основных типа задач слепой обработки сигналов: слепая идентификация канала (оценка неизвестной импульсной характеристики или передаточной функции), слепое выравнивание (или коррекция) канала (непосредственная оценка информационного сигнала). В обоих случаях для обработки доступны только реализации наблюдаемого сигнала (рис. 5.1).

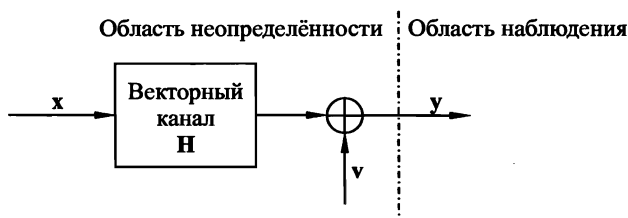


Рис. 5.1. “Слепая проблема”

В случае слепой идентификации оценка импульсной характеристики может далее использоваться для оценки информационной последовательности, т. е. является первым этапом слепого выравнивания или коррекции.

Задачи слепой обработки предполагают широкий класс моделей для описания наблюдаемых сигналов. В общем случае непрерывная модель системы описывается следующим выражением:

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(t, \tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau + \mathbf{v}(t), \quad (5.1)$$

где $\mathbf{y}(t)$ — наблюдаемый векторный сигнал со значениями в $\mathbf{C}^m$, $\mathbf{H}(t, \tau)$ — $m \times n$ неизвестная матрица импульсных характеристик (ИХ) с элементами $\{h_{i,j}(\tau)\}$; $\mathbf{v}(t)$ — аддитивная помеха (векторный случайный процесс со значениями в $\mathbf{C}^m$, как правило с независимыми компонентами); $\mathbf{x}(\tau)$ — неизвестный информационный сигнал со значениями в $\mathbf{C}^n$.

Системы, описываемые выражением (5.1) называют системами с множественным входом и множественным выходом (в англоязычной литературе Multiple-Input Multiple-Output или MIMO).

В частном случае стационарной системы, когда $\mathbf{H}(t, \tau) = \mathbf{H}(t - \tau)$, (5.1) имеет вид

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(t - \tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau + \mathbf{v}(t). \quad (5.2)$$

Если компоненты матрицы $\mathbf{H}(\tau)$ имеют вид $\{h_{i,j}\delta(\tau)\}$, получаем модель, используемую в задачах слепого разделения источников (Blind Source Separation или BSS) [7, 8, 5]:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (5.3)$$

где $\mathbf{H}$ — $m \times n$ неизвестная, комплексная, так называемая “смешивающая” матрица с элементами $\{h_{i,j}\}$; $\mathbf{x}(t)$ — неизвестные сигналы.

В частном случае, когда сигналы источников являются реализациями стационарных, статистически независимых друг от друга случайных процессов, задачу формулируют как анализ независимых компонент [9, 10, 6] (АНК).

При этом модель, используемую в анализе независимых компонент, часто представляют в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad (5.4)$$

где $\mathbf{y}$ и $\mathbf{v}$ — случайные векторы, $\mathbf{x}$ — случайный вектор с независимыми компонентами, $\mathbf{H}$ — детерминированная неизвестная матрица.

Задача АНК формулируется как задача поиска такой проекции вектора $\mathbf{y}$ на линейное пространство векторов $\mathbf{x}$, компоненты которой статистически независимы. При этом доступна только некоторая выборка случайного вектора $\mathbf{y}$ и известна статистика шумового вектора $\mathbf{v}$.

АНК является некоторым развитием хорошо известного в статистике метода принципиальных компонент, где вместо более сильного свойства статистической независимости используется свойство некоррелированности.

Если в (5.2) $n = 1$ и $m > 1$, то модель системы может быть описана более простым выражением:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau + v(t), \quad (5.5)$$

где $h(\tau)$ — неизвестная импульсная характеристика m -мерного канала; $x(\tau)$ — неизвестный комплексный информационный сигнал со значениями в $\mathbb{C}$.

Системы, описываемые моделями вида (5.5), называют системами с одним входом и множественным выходом (Single-Input Multiple-Output или SIMO).

В случае, если $n = 1$ и $m = 1$, имеем модель системы с одним входом и выходом (Single-Input Single-Output или SISO):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau + v(t). \quad (5.6)$$

Задачи слепой идентификации канала на основе моделей (5.5) и (5.6) далее будем называть задачами стационарной слепой идентификации векторного и скалярного канала соответственно.

Под идентифицируемостью системы вслепую понимается возможность восстановления импульсной характеристики системы с точностью до комплексного множителя только по выходным сигналам.

С первого взгляда подобная задача может показаться некорректно сформулированной, если слепое оценивание канала опирается на использование структуры канала или известные свойства его входа. Естественно, что в свою очередь подобные свойства зависят от особенностей конкретного приложения методов слепой идентификации.

В практике радиотехнических систем передачи информации, рассчитанных на высокоскоростную передачу через каналы с различного вида рассеянием, ИХ радиоканала, как правило, не известна с достаточной точностью для возможности синтеза оптимальных модуляторов и демодуляторов [11].

Причем в радиоканалах ИХ как правило нестационарны. К числу таких каналов относятся каналы ионосферной радиосвязи в диапазоне частот 3–30 МГц, каналы радиосвязи с тропосферным рассеянием в диапазоне частот 300–3000 МГц и в полосе частот 3000–30000 МГц, каналы космической связи с ионосферным рассеянием в диапазоне частот 30–300 МГц [11].

В системах подвижной радиосвязи в диапазоне от 1000–2000 МГц многолучевой характер распространения сигнала вызван в основном пе-

реотражениями радиоволн от зданий и сооружений, особенностей рельефа. Подобные эффекты возникают и в подводных акустических каналах [11].

В системах цифровой транкинговой связи, использующих TDMA, системах удаленного радиодоступа, локальных офисных радиосетях каналы характеризуются существенным временным рассеянием и замираниями [12].

Сходные проблемы могут возникать, например, в спутниковых системах глобальной радионавигации. Радиосигнал от пригоризонтных космических аппаратов может приходиться к наземному подвижному объекту не только прямым путем, но и за счет зеркального отражения от земной поверхности. При этом погрешности измерения псевдодальностей, обусловленные многолучевостью, могут достигать в худшей ситуации 3–9 м, т.е. будут составлять 10–30 % общей погрешности измерения [13]. Помимо многолучевости, при увеличении точности измерения, в этих системах может стать актуальной проблема компенсации рассеяния широкополосных сигналов в ионосфере. Применение методов СОС в данном случае может стать насущной проблемой.

Тенденции развития современных систем связи характеризуются все более ужесточающимися требованиями к максимальному использованию объема канала. В системах последовательной передачи дискретных сообщений по каналам, характеризующимся возникновением эффекта межсимвольной интерференции, оценка рассеяния с помощью тестирования канала испытательным импульсом — ключевая технология реализации эквалайзеров различного типа [11, 14, 15]. Однако время (от 20 % до 50 %), затрачиваемое на тестирование канала, все более привлекательный ресурс для модернизации стандартов TDMA, особенно в системах подвижной радиосвязи (например, в стандарте GSM примерно 18 % информационного кадра используется для передачи испытательного импульса) [12].

Альтернативой тестированию канала в этих системах является использование методов слепой обработки сигналов.

Модель системы передачи дискретных сообщений с учетом рассеяния в канале может быть представлена в виде следующего выражения [16]:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \tau) \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} s_k(\tau - nT, a_n) d\tau + v(t), \quad (5.7)$$

где $y(t)$ — сигнал в приемнике; $\{a_n\}$ — последовательность информационных символов алфавита $A = \{a_1, \dots, a_k, \dots, a_M\}$; $s_k(\tau, a_k)$ — канальный сигнал, соответствующий k -му символу; $h(\tau, t)$ — импульсная характеристика канала связи; $v(t)$ — аддитивная помеха, T — тактовый интервал. Для линейной цифровой модуляции (5.7) можно преобразовать к виду

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \tau) s_0(\tau - nT) d\tau + v(t). \quad (5.8)$$

Для каналов с медленными временными замираниями справедливо следующее упрощение:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) s_0(\tau-nT) d\tau + v(t). \quad (5.9)$$

В различных случаях априорной параметрической и структурной неопределенности модель канала содержит ряд параметров или функций, неизвестных на приемной стороне.

Неопределенность в рассматриваемом контексте может возникать не только вследствие прохождения информационных сигналов систем передачи через неизвестный искажающий канал, но и в случаях неизвестной структуры и параметров тестовых сигналов, используемых в системе передачи. Подобная проблема может возникнуть в задачах радиоразведки и радиоконтроля.

В случае “полной” (непараметрической) неопределенности относительно импульсной характеристики канала и канального сигнала имеем дискретно-временную модель системы передачи в виде (5.10), соответствующую модели с одним входом и выходом (5.6):

$$y(l) = y(t)|_{t=lT} = \sum_{n=0}^{L-1} h(n) x(n-l) + v(l), \quad (5.10)$$

где $x(l)$ — неизвестная информационная последовательность, описываемая той или иной статистической моделью, $h(l)$ — неизвестная импульсная характеристика сквозного дискретного канала системы передачи, L — память канала, $v(l)$ — неограниченная последовательность статистически независимых, произвольно “окрашенных” отсчетов шума.

Импульсная характеристика сквозного канала может рассматриваться как детерминированная, так и случайная функция. Когда канал стационарный, выходная последовательность стационарна в дискретном времени.

Для линейных, постоянных во времени, детерминированных каналов, когда частота дискретизации выше скорости передачи символов (обычно в целое число m раз), дискретизированный сигнал является циклоstationарным, или, что эквивалентно, может быть представлен как вектор стационарной последовательности, лежащий в основе модели с одним входом и множественным выходом (5.5), складывающей в стек m -последовательность входных отсчетов, в течение приема очередного входного символа.

Тогда дискретно-временная модель системы передачи может быть представлена в виде [17–19]

$$y(l) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n) x(n-l) + v(l). \quad (5.11)$$

В этом выражении $y(l)$ и $h(n)$ m -мерные векторы сигнала в приемнике и импульсной характеристики.

Другой случай, описываемый моделью векторного канала (5.11), возникает в случае пространственного разнесения нескольких приемных антенн (разнесенный прием).

Методы СОС могут найти эффективные приложения в хаотических системах связи. В последние годы большой интерес исследователей в области связи вызывает возможность использования шумовых сигналов. По некоторым оценкам подобные системы могут обеспечить скорости передачи в радиоканале до 1 Гбит/с (сегодня экспериментально достигнутый уровень скорости передачи составляет десятки Мбит/с).

Основная идея здесь это использование шумового (хаотического) сигнала в качестве несущего колебания системы передачи информации (т.н. прямохаотические системы связи [20]).

Информация вводится в хаотический сигнал с помощью амплитудной модуляции шумового сигнала или путем изменения параметров источника детерминированного хаоса. Поэтому использование специального тестового сигнала в этих системах становится нецелесообразным.

В тоже самое время специфика формирования, излучения и распространения сверхширокополосных сигналов, возникающих в хаотических системах связи, приводит к возникновению существенных линейных и нелинейных искажений сигналов, компенсация которых составляет проблематику, решаемую в рамках СОС.

В задачах цифрового телевидения линейные искажения возникают в результате передачи телевизионного сигнала по радиоканалу, характеризующемуся переотражениями от элементов рельефа или городской застройки, а также в результате ограничения полосы пропускания в аналоговых системах записи и хранения телевизионного сигнала.

Использование специальных испытательных сигналов в данном случае существенно снижает скорость передачи информации и отдаляет перспективу появления систем цифрового телевидения, использующих стандартные радиодиапазоны для трансляции цифрового телевизионного сигнала.

На сегодняшний день для систем связи разработано достаточно большое число подходов построения слепых эквалайзеров.

Ключевой момент в разработке слепого эквалайзера — это разработка правила регулирования параметров эквалайзера. При отсутствии испытательного импульса приемник не имеет доступа к параметрам канала и не может использовать традиционный подход к минимизации критерия минимума средней вероятности ошибки [11].

Адаптация слепого эквалайзера требует использования некоторой специальной функции стоимости, которая, безусловно, включает в себя статистики высокого порядка выходного сигнала.

Самый простой алгоритм в данном классе минимизирует средний квадрат ошибки между выходами эквалайзера и двухстороннего ограничителя. Характеристики алгоритма зависят от того, насколько хорошо подобраны начальные параметры эквалайзера.

Впервые алгоритм прямого слепого выравнивания канала связи в цифровых системах с амплитудной модуляцией предложен, по-видимому, Сато

в 1975 г. [21]. Алгоритм Сато был впоследствии обобщен Д. Годардом в 1980 г. [22] для случая комбинированной амплитудно-фазовой модуляции (известен также как "алгоритм постоянных модулей").

В целом подобные алгоритмы сходятся, когда выходная последовательность эквалайзера удовлетворяет свойству Базганга

$$M\{y(l)y(l-k)\} = M\{y(l)f(y(l-k))\}, \quad (5.12)$$

где $f(\bullet)$ — функция стоимости. Поэтому эти алгоритмы называются также алгоритмами Базганга.

В общем виде алгоритмы данного типа относятся к классу так называемых стохастических градиентных алгоритмов слепого выравнивания, которые строятся по принципу адаптивного эквалайзера.

Сигнал ошибки адаптивного эквалайзера в данном случае формируется безинерционным нелинейным преобразованием выходного сигнала, вид которого зависит от используемой сигнально-кодовой конструкции [11].

Существенным для алгоритмов данного типа является то, что входные сигналы в цифровых системах связи, как правило, негауссовы, а влияние канала, приводящее к наложению большого числа этих сигналов вследствие центральной предельной теоремы теории вероятностей, нормализует наблюдаемые отсчеты сигнала в приемнике. Поэтому сигнал ошибки в этих алгоритмах чувствителен именно к этим свойствам сигналов на выходе эквалайзера.

Базовым ограничением стохастических градиентных алгоритмов являются относительно медленная сходимость, требование достоверных начальных условий.

Отличительным достоинством данных алгоритмов является отсутствие требований к стационарности ИХ канала на интервале оценивания. Причем заметим, что абсолютное большинство алгоритмов слепой идентификации и коррекции, так или иначе, требуют такой стационарности.

Для систем связи, характеризующихся конечным алфавитом информационных символов, может оказаться оправданной идея распространения классического метода оценивания по максимуму правдоподобия не только на информационные символы, но и на неизвестную импульсную характеристику скалярного канала.

Подобные методы классифицируются в литературе как стохастические алгоритмы максимального правдоподобия [11, 23].

Поскольку информационный сигнал неизвестен, можно считать его случайным вектором с известным распределением. Положим для примера, что информационные символы принимают конечное число значений $\{x_1, x_2, \dots, x_K\}$ с равной вероятностью, а аддитивная помеха — белый гауссовский шум со спектральной плотностью N_0 , тогда алгоритм оценки канала будет иметь вид

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \max_{\mathbf{h}} \left\{ \sum_{i=1}^K \exp \left(-\frac{1}{N_0} \sum_l (y(l) - s(l | \mathbf{h}, x_i))^2 \right) \right\}, \quad (5.13)$$

где $s(l | \mathbf{h}, x_i) = \sum_{n=0}^{L-1} h(n) x(n-l)$.

Впервые применение данного алгоритма в системах связи рассмотрено в [23]. Максимизация функции правдоподобия (5.13) в общем случае трудная задача, поскольку данная функция невыпуклая [23]. Однако сегодня известно достаточно большое число алгоритмов, позволяющих получить оценки высокого качества (см. библиографию в [2], а также [11]). При выполнении условий регулярности и при хорошем начальном приближении данные алгоритмы сходятся (по крайней мере, в среднеквадратическом смысле) к истинному значению импульсной характеристики канала.

Детерминированная версия алгоритма МП не использует статистическую модель для информационной последовательности. Другими словами вектор канала $\mathbf{h}$ и информационный вектор $\mathbf{x}$ подлежат одновременной оценке. Когда вектор шума гауссовский с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\sigma^2 \mathbf{I}$, МП оценка может быть получена нелинейной оптимизацией минимальных квадратов

$$\{\hat{\mathbf{h}}, \hat{\mathbf{x}}\} = \arg \min_{\mathbf{h}} \left\{ \min_{\mathbf{x}} \left\{ \sum_l (y(l) - s(l | \mathbf{h}, \mathbf{x}))^2 \right\} \right\}. \quad (5.14)$$

Совместная минимизация функции правдоподобия по вектору канала и информационным отсчетам — еще более трудная задача, чем (5.13). К счастью, наблюдаемый вектор — линейная функция относительно вектора данных или вектора канала, заданная теплицевой или ганкелевой матрицей. Поэтому имеем нелинейную проблему минимальных квадратов, которую можно решить последовательно.

Свойство конечного алфавита информационной последовательности, может также использоваться в рамках детерминированного МП подхода. Такой алгоритм предложен в [24] и использует обобщенный алгоритм Витерби [11, 16]. Сходимость данных подходов в общем случае не гарантирована.

Несмотря на то, что МП оценки обычно обеспечивают лучшие характеристики, вычислительная сложность и локальные максимумы — это две основные проблемы.

Важное место в приложениях связи занимает так называемая “полуслепая” идентификация канала. Данные методы идентификации каналов связи привлекают в последнее время большое внимание, поскольку обеспечивают быструю и устойчивую оценку канала. Кроме того, поскольку большое число последовательных систем передачи уже использует тестовые сигналы, вероятность внедрения этих методов в практику связи более высока.

Полуслепая идентификация использует дополнительные знания о входной информационной последовательности, так как часть входных данных известна.

При этом используются как стохастические, так и детерминированные МП оценки, естественно с учетом модификации функций правдоподобия, путем введения априорных данных о входе [2, 15].

Этапом в развитии методов слепой обработки сигналов в системах связи стало использование статистик высокого порядка для идентификации каналов, входные сигналы которых описываются моделью стационарных негауссовских случайных процессов [25, 11]. В рамках данных методов, как правило, удается найти явное решение для неизвестного канала.

Относительно недавно понятая возможность использования статистик 2-го порядка для слепой идентификации векторного канала связи ($m > 1$) существенно приблизила перспективу внедрения технологий слепой обработки в системы связи и спровоцировала целое направление работ последних лет [2, 17–19, 26–28], в рамках которого на сегодняшний день найдено целое семейство быстросходящихся алгоритмов идентификации. При этом для идентифицируемости канала существенно наличие хотя бы двух независимых каналов приема.

Использование статистик 2-го порядка для слепой идентификации скалярного канала ($m = 1$) возможно в целом для нестационарной модели входного сигнала и в частном случае для периодически-коррелированного (циклостационарного) сигнала.

Возможность слепой идентификации в случае циклостационарности сигнала на выходе показана в [26], для принудительной циклостационарной модуляции сигнала на входе в [29] (рис. 5.2), в общем случае для нестационарного входа — в [30, 31] для радиолокационных приложений.

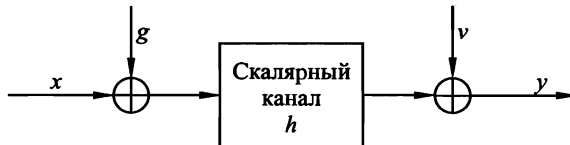


Рис. 5.2. Модель нестационарного по входу канала связи

Дискретно-временная модель широкого класса систем передачи дискретных сообщений может быть записана в виде

$$y_k = \sum_{l=0}^{L-1} h_l g_{l+k} x_{l+k} + v_k, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (5.15)$$

где h_l , $l = 0, \dots, L-1$ — импульсная характеристика канала связи; g_i , $i = 0, \dots, N+L-2$ — модулирующая последовательность; x_i , $i = 0, \dots, N+L-2$ — информационная последовательность. В зависимости от вида модулирующей последовательности можно получить различные структуры передаваемых сигналов (рис. 5.3).

Системы с модулирующими последовательностями, показанными на рис. 5.3, б, в, г относятся к классу систем с нестационарным входом. Наличие такого типа нестационарности входных сигналов является достаточным условием для идентифицируемости канала связи вслепую.

При этом в системах с активной паузой (системы с испытательным импульсом) на тестирование канала тратится максимальное время.

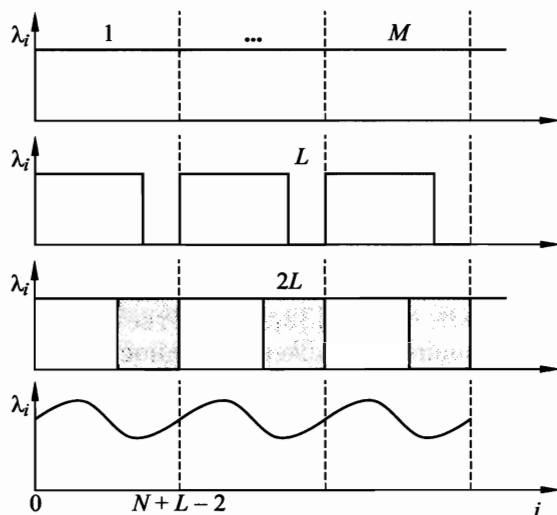


Рис. 5.3. Входные сигналы системы передачи: *а* — стационарная последовательность; *б* — последовательность с пассивной паузой; *в* — последовательность с активной паузой; *г* — последовательность с циклостационарной модуляцией общего вида

В тоже время в системах с циклостационарной модуляцией общего вида (рис. 5.3, *г*), как и в системах со стационарным входом, не тратится время на тестирование неизвестного канала связи.

Таким образом, в задачах разработки радиотехнических систем передачи информации по радиоканалам, характеризующимся существенным рассеянием и замираниями, разработка эффективных методов СОС позволяет повысить пропускную способность систем, использующих различного вида методы тестирования канала. В данном случае слепая идентификация канала является альтернативной технологией и разработчику должны быть предоставлены возможности оптимизации основных параметров системы: скорости передачи, достоверности, стоимости.

В современной радиолокации использование для зондирования все более широкополосных электромагнитных импульсов напрямую связано с увеличением временной разрешающей способности и, следовательно, информативности этих систем.

Однако влияние тракта и среды распространения радиоволн возрастает пропорционально полосе частот используемых сигналов, что часто приводит к потере когерентности системы. Особенно этот эффект существенен для сверхширокополосной радиолокации.

Задачу слепой обработки сигналов в данном случае можно сформулировать как проблему оптимального когерентного приема неизвестных сигналов, отраженных от протяженного объекта конечных размеров.

Такая проблема возникает в частности при активной радиолокации космических объектов через атмосферу Земли в РЛС противовоздушной

и космической обороны, системах предупреждения о ракетном нападении. Помимо военного применения подобные РЛС используются в задачах контроля за космическим “мусором”, который за 40 лет космической эры заполняя околоземное космическое пространство, создает большие проблемы для космической деятельности человечества.

В этом случае пачка зондирующих сигналов РЛС, проходя туда и обратно через атмосферу, получает искажения, вызванные частотной зависимостью коэффициента преломления ионосферы и поляризационной дисперсией, возникающей вследствие эффекта Фарадея. Масштабы влияния данного эффекта рассмотрены в [32]. В соответствии с этими данными существенные дисперсионные искажения радиосигнала возникают уже в S диапазоне и быстро возрастают при увеличении полосы частот и длины волн.

В большинстве случаев модель сигнала РЛС, отраженного от пространственно распределенной цели, можно представить в виде

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau - nT) \xi(\tau, n) d\tau + v(t), \quad (5.16)$$

где $y_n(t)$ — последовательность отраженных импульсов; $\xi(\tau, n)$ — коэффициент обратного рассеяния лоцируемого объекта; $h(t)$ — искаженный зондирующий импульс РЛС.

Коэффициент обратного рассеяния зависит от структуры и геометрии объекта, ориентации объекта и РЛС, их относительного движения, параметров зондирующего сигнала. Эта информация может быть использована для решения задач распознавания радиолокационного объекта и получения данных об его форме [33, 34].

Геометрическую структуру радиолокационного объекта можно восстановить при достаточно большом пространственном разнесении приемников РЛС (радиолокационной базе). В этом случае реализуется возможность получения много ракурсных проекций, а задача сводится к использованию томографических методов [35].

В случае локации объекта из одной точки пространства распознавание его может быть осуществлено по временным, поляризационным или время-частотным портретам радиолокационной цели (сигнатурам).

Во всех этих задачах для восстановления коэффициента обратного рассеяния мы должны точно знать форму зондирующего импульса РЛС. В то же время при распространении зондирующего импульса его форма меняется при прохождении через атмосферу [36] и приемный тракт.

В этом случае для восстановления коэффициента обратного рассеяния лоцируемого объекта имеем задачу слепой идентификации скалярного или векторного радиолокационного канала. Причем в отличие от приложений слепой идентификации в системах связи, где практически всегда можно использовать технику испытательных импульсов для идентификации неизвестного канала, в радиолокации подобный подход практически невозможен.

Радиолокация поверхности Земли с летательных аппаратов с помощью радиолокаторов с синтезированной апертурой (РСА) за последние 30 лет прошла путь от единичных научных экспериментов до устойчиво развивающейся отрасли дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ).

От применения этих систем научное сообщество ожидает в ближайшем будущем существенного прогресса в решении таких глобальных проблем, как предсказание землетрясений и извержений вулканов, понимания процессов глобального изменения климата и в науке о Земле в целом.

Помимо научного назначения эти системы сегодня являются уникальным инструментом при решении таких практических задач, как контроль чрезвычайных ситуаций, экологический мониторинг, картография, сельское хозяйство, мореплавание во льдах и прочее. Следует также отметить, что эти системы являются одним из эффективных инструментов контроля за выполнением договоров по разоружению.

Расширение областей применения РСА стимулирует постоянный рост требований к их пространственному разрешению, а также освоению новых частотных диапазонов.

При этом становится все более значимым эффект деградации пространственного разрешения радиолокационных изображений (расфокусировка), который возникает в этих системах вследствие погрешности траекторных измерений, влияния среды распространения, движения цели.

Задача автоматической фокусировки изображений радиолокаторов с синтезированной апертурой впервые стала актуальной в связи с повышением пространственного разрешения авиационных РСА до уровня единиц метров в конце 80-х и первой половине 90-х годов. Проблема была вызвана тем, что навигационные системы самолета или космического аппарата (КА) не могли с необходимой точностью обеспечить измерение траектории перемещения фазового центра антенны РСА, что является необходимым условием получения высокого пространственного разрешения [37–39].

Если параметры относительного движения объекта и РЛС известны, то возможно построение радиолокационного изображения объекта методами прямого или обращенного синтеза апертуры. В этом случае модель отраженного сигнала может быть представлена в виде

$$y(t, \tau) = \iint_{D(t, \tau)} h(t, \tau, \theta, \sigma) \xi(\theta, \sigma) d\theta d\sigma + v(t, \tau), \quad (5.17)$$

где $\xi(\theta, \sigma)$ — комплексный коэффициент отражения подстилающей поверхности; $h(t, \tau, \theta, \sigma)$ — пространственно-временной сигнал РЛС с синтезированной апертурой, отраженный точечной целью (импульсная характеристика радиолокационного канала); θ, σ — временные координаты элемента подстилающей поверхности (азимут, дальность); t, τ — временные координаты двумерного отраженного сигнала.

В системах, использующих методы обращенного синтеза апертуры, телескопических РСА размер области интегрирования $D(t, \tau)$ значительно больше размера объекта в плоскости t, τ ; модель сигнала (5.14) можно

представить в виде двумерной свертки

$$y(t, \tau) = \iint_D h(t - \theta, \tau - \sigma) \xi(\theta, \sigma) d\theta d\sigma + v(t, \tau). \quad (5.18)$$

Качественно процесс формирования радиолокационных изображений в РСА показан на рис. 5.4.

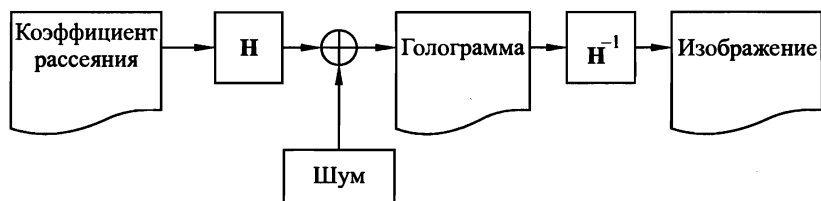


Рис. 5.4. Формирование изображения в РСА

В целом задача формирования радиолокационных изображений относится к классу обратных задач. Неопределенность относительно одного или нескольких параметров псевдообратного или регуляризирующего оператора $\mathbf{H}^{-1}$ составляет существо проблемы параметрической фокусировки радиоизображений [37, 38, 40–42].

В такой постановке проблема в большинстве случаев была успешно решена разработкой алгоритмов цифровой автофокусировки изображений РСА.

Широко известны две основные группы алгоритмов автофокусировки — это алгоритмы, основанные на использовании критерия качества, в виде локальных статистик РСА изображений и алгоритмы, использующие корреляционные свойства расфокусированных изображений [40, 41].

В большинстве случаев, эти алгоритмы обеспечивают достижение заданного уровня разрешения, однако, в случае, когда РСА устанавливается на летательных аппаратах легкого класса (малая авиация, вертолеты, беспилотные самолеты), вариации параметров фокусировки становятся сравнимы с интервалом синтеза апертуры. В этом случае получение заданного уровня разрешения требует использования более адекватных моделей траекторного сигнала и более эффективных алгоритмов автофокусировки.

В отличие от задачи параметрической фокусировки, когда неизвестны один или несколько параметров траекторного сигнала, в задаче непараметрической фокусировки приходится восстанавливать неизвестный оператор $\mathbf{H}^{-1}$ в целом [40].

Задача непараметрической фокусировки (слепой идентификации) возникает в основном вследствие эффектов распространения сигналов РСА в атмосфере [43,3] и характерна в большей степени для РСА космического базирования и авиационных РСА, уровень пространственного разрешения которых достигает единиц сантиметров, и требует использования сверхширокополосных сигналов.

В системах радиоразведки и системах радиоэлектронной борьбы и радиопротиводействия актуальной является проблема слепого разделения источников радиоизлучения, адаптации диаграмм направленности активных фазированных решеток к создаваемой противником помеховой обстановке.

Возникновение слепой проблемы здесь связано с отсутствием априорной информации о координатах источников, их ориентации относительно антенны радиотехнического устройства и соответственно отсутствием информации о коэффициентах смешивающей матрицы в (5.2) или (5.3).

Таким образом, в радиолокации решение слепой проблемы является во многих случаях безальтернативной технологией достижения высоких тактико-технических характеристик, является порой единственной возможностью для освоения новых частотных диапазонов и уровней разрешающей способности, повышения обнаружительных характеристик и в целом информативности радиолокационных систем.

Одной из характерных особенностей постановки слепой проблемы в данных условиях является отсутствие априорной статистической информации о наблюдаемом объекте, что создает дополнительные ограничения для существующих методов слепой идентификации и коррекции.

Задача компенсации искажений в системах формирования изображений является одним из самых массовых приложений СОС. В отличие от активной радиолокации коррекция линейных искажений изображений различного происхождения (радиометрических, радиоастрономических, оптических, акустических, рентгеновских, инфракрасных) — это задача восстановления двумерного, пространственно ограниченного, неотрицательного сигнала [44, 45], искаженного линейным оператором.

Модель такого сигнала также может быть описана выражениями (5.17) или (5.18) с учетом того, что $y(t, \tau)$ и $\xi(\theta, \sigma)$ положительные, пространственно ограниченные функции.

Источники линейных искажений — это, например, дефокусировка объекта оптической системы формирования изображения, скоростной сдвиг (смаз) изображения вследствие движения объекта в процессе экспозиции, различного рода дифракционные ограничения (т. е. ограничение пространственного спектра изображения регистрирующим устройством), влияние среды распространения (например, атмосферная турбулентность).

Часто исследователю известна форма импульсной характеристики искажающего изображения канала [44], тогда коррекция изображения может быть осуществлена линейным оптимальным или субоптимальным фильтром, построенным в соответствии с той или иной стратегией регуляризации.

Слепая коррекция изображений (blind image deconvolution) — задача, возникающая в случае отсутствия априорной информации об ИХ канала формирования. Особенно актуальна задача слепой коррекции линейных искажений изображений в задачах дистанционного зондирования Земли, астрономии, медицине.

Возможности слепой идентификации скалярных двумерных каналов несколько шире, чем одномерных. Это обстоятельство не раз отмечалось в литературе [46] и исторически привело к более интенсивному внедрению методов слепой обработки в данном случае.

Хорошо известно, например, что ковариационные функции стационарного процесса на выходе линейной системы не содержат информации о фазе ее передаточной функции, и слепая идентификация канала по модулю передаточной функции возможна только для узкого класса систем с минимальной фазой.

Интересно, что для дискретных случайных полей это, вообще говоря, не так. Для двумерных дискретных сигналов возможности восстановления фазы по модулю передаточной функции значительно шире. Этот несколько неожиданный результат получен методом математического моделирования Фьенапом в 1978 г. (см. обзор [47]).

Объяснение этому факту заключается в том, что в кольце полиномов от двух и более переменных над полем комплексных чисел существует достаточно мощное множество неприводимых полиномов в отличие от кольца полиномов от одной переменной, где, как известно, не существует неприводимых полиномов, степень которых больше 1.

Поэтому, если двумерный дискретный сигнал имеет z -преобразование, неразложимое на более простые множители, то очевидно, используя единственность факторизации многочлена на неприводимые множители, можно восстановить дискретный сигнал по его автокорреляции или, что эквивалентно, по его амплитудному спектру [48].

Естественно, что данное свойство двумерных сигналов можно использовать и для решения задачи детерминированной слепой идентификации канала формирования изображения.

Конечно, практическое применение подобного подхода существенно ограничено сложностью процедуры факторизации полиномов от многих переменных и наличием шума.

Алгоритм, имеющий некоторое практическое значение и основанный на свойстве неприводимости полиномов (5.21) (известен как алгоритм “нулевого листа”), предложен в [49]. Он использует свойства поверхностей, точки которых являются корнями полиномов канала и истинного изображения.

Дополнительным некоторым ограничением области применения данного подхода является использование предположения о пространственной ограниченности сигналов.

Помимо свойств z -преобразований от сигналов конечной протяженности для слепой идентификации используются также неотрицательность истинного изображения, различные параметрические модели (см. обзор [46]).

Одна из центральных проблем в практике приложений нейронных сетей, статистике, задачах ЦОС — это задача нахождения наиболее компактного представления данных. Это важно для последующего анализа, которым может быть распознавание образов, классификация и принятие решений, сжатие данных, фильтрация шумов, визуализация.

Относительно недавно для решения подобных задач привлек широкое внимание метод нахождения линейного преобразования, обеспечивающего независимость компонент, — АНК. Задача АНК формулируется как задача поиска такой проекции вектора на линейное пространство векторов, компоненты которой были бы статистически независимы. При этом для анализа доступна только некоторая статистическая выборка значений случайного вектора. В этом смысле задачи и методы АНК относятся к задачам и методам СОС.

Одним из перспективных направлений развития современных систем ДЗ является синхронная съемка земной поверхности в различных диапазонах электромагнитного спектра. Совместная обработка многозональных оптических изображений, многочастотных и многополяризационных радиолокационных изображений, радиометрических изображений — перспективное направление исследований и практических приложений последнего времени.

Разработка технологий совместного анализа изображений различной природы включает в себя разработку методов визуализации, классификации, сегментации, сжатия данных. При этом, как правило, стремятся сократить число признаков автоматической классификации объектов, обеспечить их наглядное представление (визуализацию), сократить объемы хранимой информации. Методы АНК могут стать мощным инструментом для совместного анализа изображений.

Поскольку статистика изображений, формируемых радиотехническими системами (радиолокаторы бокового обзора, РСА, радиометры), имеет существенно негауссову статистику, то применение нелинейных методов АНК может расширить возможности данных приложений.

Таким образом, в задачах цифровой обработки изображений эффективное решение слепой проблемы является во многих случаях необходимым, безальтернативным этапом предварительной, первичной обработки, обеспечивающим возможности последующего анализа. В задачах совместного анализа изображений различной природы эффективным инструментом могут стать методы анализа независимых компонент.

Биомедицинские компьютерные технологии являются классическим приложением АНК и методов слепого разделения источников.

Возможности цифровой обработки электрокардиограмм, энцефалограмм, электромиограмм, магнитоэнцефалограмм существенно расширили возможности диагностики широкого класса заболеваний.

Особенностью применения данных методов является необходимость разделения сигналов изучаемых органов от шумов различного происхождения и мешающих сигналов (например, разделение кардиограмм матери и ребенка).

В этих технологиях находят свое прямое применение методы слепого разделения источников и анализа независимых компонент. Модели наблюдаемых сигналов, используемые в этих приложениях, описываются выражениями (5.2) и (5.3) [5].

Проблема распознавания речи — ключевая задача во многих областях робототехники и кибернетики. Технологии распознавания речи могут использоваться для управления действием различного рода машин и механизмов, ввода и поиска данных в компьютере и т. п.

В системе регистрации звуковой информации доступный для распознавания сигнал — это свертка первоначального речевого сигнала и импульсной характеристики датчика и окружающей среды.

При этом параметры датчика, как и параметры среды, изменяются. Телефонные трубки различаются по степеням искажения, спектрального состава и уровня сигнала. Микрофоны изготавливаются разнообразными способами с отверстиями различных размеров и расположены в различных позициях телефонной трубки, в различных точках звукового поля вокруг рта. Устройство распознавания, которое хорошо подходит для одного специфического датчика в одной специфической среде, могло бы работать очень плохо в других условиях. Поэтому желательно чтобы эти параметры не влияли на работу алгоритма распознавания. Слепая идентификация используется в данной задаче для восстановления первоначального речевого сигнала [1, 5].

Борьба с реверберацией необходима в тех случаях, когда первоначальный речевой сигнал искажен акустикой окружающей среды, т. к. акустика окружающей среды зависит от геометрии комнаты и местоположения микрофона.

Так как первоначальный речевой сигнал неразличим и акустика окружающей среды неизвестна, то слепая идентификация может использоваться в адаптивной борьбе с реверберацией.

Одной из показательных задач, иллюстрирующих проблематику слепого разделения независимых источников, является так называемая проблема разделения нужного разговора на фоне других говорящих людей, музыки, посторонних шумов (cocktail party problem). Мы можем заметить, что наш мозг легко с этим справляется, в тоже время для компьютера это очень сложная задача.

Прикладное значение эта проблема имеет, например, для разработки адаптивных систем прослушивания при записи звуковой информации на несколько микрофонов, установленных в помещении.

В задачах геологии, сейсмологических исследованиях используются технологии регистрации сигналов источников механических колебаний, как искусственного происхождения (закладка в шурф динамита), так и естественного (землетрясение). Эти сигналы используются для оценки коэффициентов отражения различных пластов земной коры.

Слепая проблема возникает здесь вследствие непредсказуемости и соответственно неопределенности формы возбуждающего импульса [5].

Таким образом, рассмотренные проблемы, возникающие в различных областях радиотехники и связи, а также других многочисленных приложениях обработки сигналов, подтверждают тезис об актуальности задачи разработки новых методов СОС, расширения областей ее приложений.

По мере накопления результатов в последние годы создались предпосылки для построения систематической теории решения “слепой проблемы”.

Кроме того, для обеспечения возможности широкого внедрения методов СОС в радиотехнике необходимо создание новых технологий, характеризующихся высокой скоростью сходимости, обеспечивающих возможности слепой идентификации при отсутствии априорной информации о статистике информационного сигнала, обеспечивающих возможности идентификации нестационарного канала и нестационарных информационных сигналов.

Новый класс методов СОС, потенциально обеспечивающий эффективное решение проблемы статистической идентификации в отсутствие априорной информации о статистике информационных сигналов, может быть получен путем использования полиномиальных представлений сигналов.

В этом случае можно перенести решаемую задачу из обычно используемых комплексных векторных пространств в кольца полиномов от многих переменных со случайными коэффициентами и использовать интенсивно развивающиеся в последние годы методы коммутативной алгебры, алгебраической геометрии, компьютерной алгебры.

5.2. Основные теоремы слепой идентификации

Рассмотрим задачу слепой идентификации векторного канала, т.е. канала со скалярным входом и векторным выходом. Условия слепой идентифицируемости канала обычно формулируются в отсутствие шумов.

При этом различают задачи статистической и детерминированной идентификации, имея в виду модель информационной последовательности.

С практической точки зрения это означает, что в случае детерминированной идентификации нам доступны одна или крайне ограниченное количество реализаций входного сигнала, для статистической идентификации имеем в принципе неограниченную выборку.

Пусть идентифицируемый канал описывается следующими выражениями:

$$y_l^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{L-1} h_i^{(k)} x_{i+l}(z). \quad (5.19)$$

В этом выражении: $y_l^{(k)}(z)$ — полином степени $(t-1)$ над полем комплексных чисел, образованный блоком из t отсчетов на выходе k -го канала, $k = 1, \dots, M$, $l = 0, \dots, N-1$ — номер блока выходных отсчетов; $L = \max\{L_1, \dots, L_M\}$ — максимальная длина векторного канала; $x_l(z)$ — полином степени $(t-1)$ над полем комплексных чисел, образованный блоком из t информационных отсчетов на входе канала.

Наша задача найти условия, которым должны удовлетворять информационная последовательность и отсчеты векторного канала, при выполнении

которых набор полиномов $\{y_l^{(1)}(z), \dots, y_l^{(M)}(z)\}$ кольца $C[z]$, однозначно характеризует коэффициенты канала $h_0^{(1)}, \dots, h_{L-1}^{(1)}, \dots, h_0^{(M)}, \dots, h_{L-1}^{(M)}$ и коэффициенты информационной последовательности.

Заметим, что если известна информационная последовательность, т. е. решается задача классической идентификации, то условия единственности решения для векторного канала хорошо известны.

Пусть $\mathbf{y} = (y_0^{(k)}, \dots, y_{N-1}^{(k)})$. Тогда

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{X}_H(L) \mathbf{h}^{(k)}, \quad (5.20)$$

где $\mathbf{h}^{(k)} = (h_0^{(k)}, \dots, h_{L-1}^{(k)})$, $\mathbf{X}_H(L)$ — ганкелева матрица, составленная из отсчетов информационной последовательности. Имеет место следующая теорема [50].

Теорема 5.1. *Для идентифицируемости скалярного канала по известной информационной последовательности для любых значений $\mathbf{h} = (h_0, \dots, h_{L-1})$ необходимо и достаточно, чтобы $\text{rank}(\mathbf{X}_H(L)) \geq L$.*

Данная теорема устанавливает только необходимое условие для решения задачи слепой идентификации. Задача слепой идентификации требует значительно более жестких ограничений на информационную последовательность, чем задача классической идентификации.

Рассмотрим случай детерминированной идентификации векторного канала для $M = 2$ в полиномиальной интерпретации.

Анализируя структуру преобразования (5.19), легко заметить, что если $N = L$, то справедливо следующее соотношение:

$$\sum_{l=0}^{L-1} y_l^{(1)}(z) h_l^{(2)} - \sum_{l=0}^{L-1} y_l^{(2)}(z) h_l^{(1)} = 0. \quad (5.21)$$

В этом уравнении $2L$ неизвестных $h_0^{(1)}, \dots, h_{L-1}^{(1)}, h_0^{(2)}, \dots, h_{L-1}^{(2)}$. Выберем $2L$ различных значений формальной переменной $z_1, \dots, z_{2L}$. Тогда используя (5.21), можно записать $2L$ однородных линейных уравнений относительно $2L$ неизвестных коэффициентов канала.

В матричной форме получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_{2L}) \mathbf{h} = \\ & = \begin{pmatrix} y_0^{(1)}(z_1) & \dots & y_{L-1}^{(1)}(z_1) & -y_0^{(2)}(z_1) & \dots & -y_{L-1}^{(2)}(z_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_0^{(1)}(z_{2L}) & \dots & y_{L-1}^{(1)}(z_{2L}) & -y_0^{(2)}(z_{2L}) & \dots & -y_{L-1}^{(2)}(z_{2L}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_0^{(2)} \\ \vdots \\ h_{L-1}^{(2)} \\ h_0^{(1)} \\ \vdots \\ h_{L-1}^{(1)} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Для того чтобы система линейных уравнений (5.22) имела единственное нетривиальное решение в соответствии с теоремой Кронекера–Капелли, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_{2L})$ был равен $(2L - 1)$. Используя формулы (5.19), матрицу системы уравнений (5.22) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_{2L}) &= \\ &= \begin{pmatrix} x_0(z_1) & \dots & x_{2L-2}(z_1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_0(z_{2L}) & \dots & x_{2L-2}(z_{2L}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_0^{(1)} & \dots & 0 & -h_0^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L-1}^{(1)} & & h_0^{(1)} & -h_{L-1}^{(2)} & & -h_0^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_{L-1}^{(1)} & 0 & \dots & -h_{L-1}^{(2)} \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{X}(z_1, \dots, z_{2L}) \mathbf{H}_{1,2}. \quad (5.23) \end{aligned}$$

Таким образом, для идентифицируемости системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

- 1) ранг $(2L \times 2L - 1)$ матрицы $\mathbf{X}(z_1, \dots, z_{2L})$ равен $(2L - 1)$ для любых различных $z_1, \dots, z_{2L}$;
- 2) ранг $(2L - 1 \times 2L)$ матрицы $\mathbf{H}_{1,2}$ равен $(2L - 1)$.

Первое условие содержит в себе два ограничения, которые становятся более очевидны, если представить матрицу $\mathbf{X}(z_1, \dots, z_{2L})$ в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z_1, \dots, z_{2L}) &= \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{t-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_{2L} & \dots & z_{2L}^{t-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{2L-2} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{2L-1} \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{2L} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_t & x_{t+1} & & x_{t+2L-2} \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{V}_t^{2L}(z_1, \dots, z_{2L}) \cdot \mathbf{X}_H(2L - 1), \quad (5.24) \end{aligned}$$

где $\mathbf{V}_t^{2L}(z_1, \dots, z_{2L})$ — матрица Вандермонда имеет ранг $2L - 1$, если $t \geq 2L - 1$, $\mathbf{X}_H(2L - 1)$ — ганкелева матрица, составленная из отсчетов информационной последовательности.

Линейная сложность детерминированной последовательности — это наименьшее значение D такое, что $\mathbf{X}_H(D)$ имеет полный ранг по столбцам или существуют такие не равные нулю одновременно $\{\lambda_j\}$, для которых

$$x_i = - \sum_{j=1}^D \lambda_j x_{i-j}, \quad i = D, \dots, t + 2L - 2. \quad (5.25)$$

Линейная сложность характеризует степень предсказуемости детерминированной последовательности ограниченной длины. Для того чтобы матрица $\mathbf{X}_H(2L - 1)$ имела полный ранг по столбцам, линейная сложность информационной последовательности должна быть больше $(2L - 2)$.

Анализируя (5.23), можно показать, что ранг матрицы $\mathbf{H}_{1,2}$ равен $(2L - 1)$ тогда и только тогда, когда полиномы $h_1(z)$ и $h_2(z)$, составленные из коэффициентов каналов, не имеют общих корней.

Таким образом, определяются необходимые и достаточные условия идентифицируемости векторного канала для случая $M = 2$. Сформулируем этот результат в виде следующей теоремы, обобщив его на случай $M > 2$.

Теорема 5.2. *Для идентифицируемости детерминированного векторного канала необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

- 1) полиномы $h_1(z), \dots, h_M(z)$ не должны иметь общих корней;
- 2) линейная сложность информационной последовательности должна быть больше $(2L - 2)$;
- 3) длина информационной последовательности должна быть больше $(4L - 3)$ или длина вектора данных больше $(3L - 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $M = 2$ доказан. Докажем теперь общий случай.

Уравнение (5.21) для любой пары, образованной i -м и j -м каналом, имеет вид

$$\sum_{l=0}^{L-1} y_l^{(i)}(z) h_l^{(j)} - \sum_{l=0}^{L-1} y_l^{(j)}(z) h_l^{(i)} = 0, \quad (5.26)$$

где $i, j = 1, \dots, M$.

Среди этих уравнений нетривиальных и несовпадающих $K = M(M - 1)/2$ для $L \cdot M$ неизвестных. Из них всегда можно сформировать дополнительные, выбирая сечения $z_1, \dots, z_s$ так, что $s \cdot K \geq L \cdot M$.

Запишем (5.26) в матричной форме, аналогично (5.22).

Пусть

$$\mathbf{Y}^{(i)}(z_1, \dots, z_s) = \begin{pmatrix} y_0^{(i)}(z_1) & \dots & y_{L-1}^{(i)}(z_1) \\ \vdots & & \vdots \\ y_0^{(i)}(z_s) & \dots & y_{L-1}^{(i)}(z_s) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (5.27)$$

$$\mathbf{Y}_i(z_1, \dots, z_s) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \mathbf{Y}^{(i+1)}(z_1, \dots, z_s) & -\mathbf{Y}^{(i)}(z_1, \dots, z_s) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{Y}^{(M)}(z_1, \dots, z_s) & 0 & \dots & -\mathbf{Y}^{(i)}(z_1, \dots, z_s) \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

$$\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s) = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_s) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{M-1}(z_1, \dots, z_s) \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Матрица $\mathbf{Y}^{(i)}(z_1, \dots, z_s)$ имеет размер $(s \times L)$, блочная матрица $\mathbf{Y}_i(z_1, \dots, z_s)$ имеет размер $((M-i) \cdot s \times L \cdot M)$ и $\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s)$ соответственно $(K \cdot s \times L \cdot M)$.

Определим вектор $\mathbf{h}^T = (h_0^{(1)}, \dots, h_{L-1}^{(1)}, \dots, h_0^{(M)}, \dots, h_{L-1}^{(M)})$. Тогда

$$\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s) \cdot \mathbf{h} = 0. \quad (5.30)$$

Для однозначной идентификации необходимо и достаточно, чтобы для любых различных чисел $z_1, \dots, z_s$ ранг матрицы $\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s)$ был равен $(M \cdot L - 1)$.

Пусть $\mathbf{H}^{(i)}$ — теплицева матрица вида

$$\mathbf{H}^{(i)} = \begin{pmatrix} h_0^{(i)} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L-1}^{(i)} & & h_0^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & h_{L-1}^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Пусть

$$\mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \mathbf{H}^{(i+1)} & -\mathbf{H}^{(i)} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{H}^{(M)} & 0 & \dots & -\mathbf{H}^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Тогда

$$\mathbf{Y}_i(z_1, \dots, z_s) = \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{X}(z_1, \dots, z_s) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{X}(z_1, \dots, z_s) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{H}_i, \quad (5.33)$$

$$\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s) = \mathbf{X}_\Sigma \cdot \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{X}_{M-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{M-1} \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Так как при выполнении 2-го и 3-го условий теоремы матрица информационной последовательности $\mathbf{X}_\Sigma$ имеет ранг $\text{rank}(\mathbf{X}_\Sigma) = \min\{s \cdot K, (2L-1) \cdot K\}$, в соответствии с неравенством Фробениуса и неравенством $s \cdot K \geq L \cdot M \quad \text{rank}(\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s)) \geq \text{rank}(\mathbf{H})$. Очевидно, что $\text{rank}(\mathbf{H}) < M \cdot L$, поскольку легко проверить равенство $\mathbf{H} \cdot \mathbf{h} = 0$, где $\mathbf{h} \neq 0$.

Несложно показать, что при выполнении условия 1) $\text{rank}(\mathbf{H}) = (M \cdot L - 1)$.

Теорема доказана.

Данная теорема (впервые сформулированная по-видимому в [17]) играет ключевую роль в задачах слепой детерминированной идентификации векторных каналов.

Необходимые условия идентифицируемости, сформулированные в данной теореме, могут быть ослаблены. Возможно, достаточные условия этой теоремы также могут быть ослаблены, но в этой области требуются дальнейшие исследования. Условия теоремы по существу гарантируют следующие интуитивные требования:

- 1) все каналы в системе должны отличаться друг от друга, например, они не могут быть идентичны;
- 2) входная последовательность должна быть достаточно сложна; она не может быть нулевой, константой или одиночной синусоидой;
- 3) должно быть достаточно отсчетов выхода.

Сформулируем теперь важную теорему для решения задачи коррекции векторного канала.

Теорема 5. 3. *Если известен $\mathbf{h}^T = (h_0^{(1)}, \dots, h_{L-1}^{(1)}, \dots, h_0^{(M)}, \dots, h_{L-1}^{(M)})$, то для однозначного решения задачи коррекции канала при любой информационной последовательности необходимо и достаточно, чтобы полиномы $h_1(z), \dots, h_M(z)$ не имели общих корней или эквивалентно обобщенная матрица Сильвестра $\mathbf{H}_S = (\mathbf{H}^{(1)}, \dots, \mathbf{H}^{(M)})^T$ имела полный ранг по столбцам.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеется L выходных блоков $\mathbf{Y}_L(z) = (y_0(1)(z), \dots, y_{L-1}(1)(z), \dots, y_0(M)(z), \dots, y_{L-1}(M)(z))^T$ и $2L - 1$ входных блоков $\mathbf{X}_{2L-1}(z) = (x_0(z), \dots, x_{2L-2}(z))^T$. Тогда

$$\mathbf{Y}_L(z) = \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{X}_{2L-1}(z). \quad (5.35)$$

Для любого z , если $\text{rank}(\mathbf{H}_S) = 2L - 1$, найдется единственный вектор $\mathbf{X}_{2L-1}(z)$, являющийся решением системы уравнений (5.35).

Докажем эквивалентность условия на ранг матрицы $\mathbf{H}_s$ и условия отсутствия общих корней у полиномов $h_1(z), \dots, h_M(z)$ от противного.

Пусть $\text{rank}(\mathbf{H}_S) = 2L - 1$. Нуль-пространство матрицы $\mathbf{H}_s$ образовано линейно независимыми векторами $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) \in C^{2L-1}$, где $s = 2L - 1 - \text{rank}(\mathbf{H}_S)$, для которых $\mathbf{H}_s \mathbf{V} = \mathbf{0}$. Пусть $x_i(z) = z^i$, $i = 0, \dots, 2L - 2$, тогда $y_l(k)(z) = z^l \cdot h(k)(z)$. Пусть $\{c_1(1), \dots, c_{L-1}(1), \dots, c_1(M), \dots, c_{L-1}(M)\}$ — корни полиномов $h_1(z), \dots, h_M(z)$. Тогда очевидно, что если найдется хотя бы один совместный корень c полиномов $h_1(z), \dots, h_M(z)$, то найдется ненулевой вектор $\mathbf{v} = (1, c, c^2, \dots, c^{2L-2})$, принадлежащий нуль-пространству матрицы $\mathbf{H}_s$, т.е. $\text{rank}(\mathbf{H}_S) < 2L - 1$.

Для доказательства обратного утверждения, что если $h_1(z), \dots, h_M(z)$ не имеют общих корней, то $\text{rank}(\mathbf{H}_S) = 2L - 1$, мы должны показать, что векторы, образованные совместными корнями полиномов, образуют базис нуль-пространства матрицы $\mathbf{H}_s$. Для этого заметим, что если $c_1, \dots, c_s$ — совместные корни одиночной кратности $h_1(z), \dots, h_M(z)$, то $\mathbf{V}$ — матрица Вандермонда имеет ранг s . Если среди корней $c_1, \dots, c_s$ есть кратные корни,

то часть базисных векторов можно сформировать, используя производные соответствующего порядка наибольшего общего делителя полиномов $h_1(z), \dots, h_M(z)$. Более подробное доказательство приведено в [51].

В задачах статистической идентификации условия идентифицируемости могут обсуждаться в более широком контексте. Например, если число доступных отсчетов на выходе канала бесконечно и вход — негауссовский стационарный случайный процесс, то система может быть идентифицирована точно по статистикам высшего порядка даже тогда, когда полиномы каналов имеют общие нули. Или, например, когда на входе стационарный случайный процесс (в том числе и гауссовский), система может быть идентифицирована, если точно известны статистики второго порядка выхода и совместные нули полиномов каналов находятся внутри единичной окружности (условие минимума фазы) [25].

Сформулируем теперь условия, ограничивающие статистические методы слепой идентификации векторного канала. Рассмотрим условия статистической идентификации для случая, когда входная последовательность стационарна и число доступных отсчетов на выходе канала $N \rightarrow \infty$, т. е. нам доступна статистика выхода любого порядка.

Теорема 5.4. *Для возможности статистической слепой идентификации векторного канала достаточно выполнения следующих условий:*

- 1) полиномы $h_1(z), \dots, h_M(z)$ не должны иметь общих корней;
- 2) отсчеты информационной последовательности $\{x_i\}$ таковы, что

$$\mathbf{M}\{x_i\} = 0, \quad \mathbf{M}\{x_i x_j^*\} = \sigma^2 \delta_{i,j}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы достаточно очевидно, если использовать эквивалентность условия на ранг матрицы $\mathbf{H}_s$ и условия отсутствия общих корней у полиномов $h_1(z), \dots, h_M(z)$, доказанного в теореме 5.3. Пусть в (5.35) $t = 1$ или эквивалентно $z = 0$. Тогда, если нам доступна $(L \cdot M \times L \cdot M)$ ковариационная матрица выходных отсчетов $\mathbf{R}_y = \mathbf{M}\{\mathbf{Y}_L(0) \mathbf{Y}_L^*(0)\}$, то

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{H}_s \mathbf{R}_x \mathbf{H}_s^*, \quad (5.36)$$

где $(2L - 1 \times 2L - 1)$ матрица $\mathbf{R}_x = \mathbf{M}\{\mathbf{X}_{2L-1}(0) \mathbf{X}_{2L-1}^*(0)\}$.

Из второго условия следует, что $\mathbf{R}_x = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}_{2L-1}$ и $\mathbf{R}_y = \sigma^2 \cdot \mathbf{H}_s \mathbf{H}_s^*$. Для известных $\mathbf{R}_y$ и σ^2 первое условие теоремы гарантирует единственность решения задачи слепой идентификации.

Итак, как для случая детерминированной, так и статистической идентификации векторного канала присутствует условие отсутствия общих корней у полиномов $h_1(z), \dots, h_M(z)$. Это означает, что для идентификации в полной мере используются перекрестные связи каналов. Естественно, что избавиться от этого ограничения можно только решив задачу идентификации скалярного канала. С другой стороны отсутствие возможности использовать перекрестные связи каналов существенно обедняет возможности слепой идентификации, особенно в задачах детерминированной идентификации.

Пусть последовательность сигнальных блоков на выходе канала в полиномиальной интерпретации описывается выражением

$$y_l(z) = \sum_{i=0}^{L-1} h_i x_{i+l}(z). \quad (5.37)$$

Рассмотрим необходимые условия детерминированной идентификации.

Теорема 5.5. *Для идентифицируемости детерминированного скалярного канала необходимо, чтобы линейная сложность информационной последовательности была больше $(2L - 2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем (5.19) для скалярного канала в виде

$$\mathbf{y}_L(z) = \mathbf{X}_{H,L}(z) \cdot \mathbf{h}, \quad (5.38)$$

где $\mathbf{y}_L(z) = (y_0(z), \dots, y_{L-1}(z))^T$ и $\mathbf{X}_{H,L}(z)$ — полиномиальная ганкелева $L \times L$ матрица, составленная из полиномов $x_0(z), \dots, x_{2L-2}(z)$. Если система идентифицируема, то необходимо чтобы $\text{rank}(\mathbf{X}_H(L)) = L$ (теорема 5.1). Нетрудно показать, что в этом случае $\text{rank}(\mathbf{X}_{H,L}(z)) = L$ для $\forall z \in C$. Это означает, что для $\forall z \in C$ матрица $\mathbf{X}_{H,L}(z)$ имеет обратную матрицу $\mathbf{X}_{H,L}^{-1}(z)$ такую, что $\mathbf{X}_{H,L}^{-1}(z) \cdot \mathbf{X}_{H,L}(z) = \mathbf{I}_L$. Пусть для фиксированного $\mathbf{y}_L(z)$ имеет место равенство

$$\mathbf{y}_L(z) = \mathbf{X1}_{H,L}(z) \cdot \mathbf{h1} = \mathbf{X2}_{H,L}(z) \cdot \mathbf{h2}. \quad (5.39)$$

Если система идентифицируема, то для (5.39) имеется только тривиальное решение $\mathbf{X1}_{H,L}(z) = c\mathbf{X2}_{H,L}(z)$ и $\mathbf{h1} = 1/c \cdot \mathbf{h2}$. Тогда должно быть, по крайней мере так, что

$$\mathbf{X1}_{H,L}(z) \cdot \mathbf{A}(z) - \mathbf{X2}_{H,L}(z) = 0, \quad (5.40)$$

где $\mathbf{A}(z)$ — $L \times L$ полиномиальная матрица полного ранга. Так как $\mathbf{X1}_{H,L}(z)$ и $\mathbf{X2}_{H,L}(z)$ — матрицы ганкелевой структуры, то (5.40) можно переписать в виде системы $2L - 3$ однородных уравнений для неизвестных элементов матрицы $\mathbf{A}(z)$. Поскольку равенство (5.40) справедливо для $\forall z \in C$, рассмотрим $2L$ сечений $z_1, \dots, z_{2L}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} x_0(z_1) & \dots & x_{2L-2}(z_1) & x_{L-1}(z_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0(z_{2L}) & \dots & x_{2L-2}(z_{2L}) & x_{L-1}(z_{2L}) \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{a}(z_1) \dots \mathbf{a}(z_{2L})) = 0,$$

где $\mathbf{a}(z_i)$ — вектор длины $2L$, составленный из коэффициентов первого и последнего столбца матрицы $\mathbf{A}(z_i)$. Эта система имеет единственное нетривиальное решение, если ранг матрицы ее коэффициентов равен $2L - 1$. Нетрудно заметить, что главный минор этой матрицы $\det(\mathbf{X}(z_1, \dots, z_{2L-1})) \neq 0$ при выполнении условия теоремы. Отсюда следует в частности, что $\mathbf{A}(z) = c\mathbf{I}_L$. Теорема доказана.

Итак, если $\mathbf{X}_{H,L}(z)$ — ганкелева матрица, составленная из коэффициентов входной последовательности, линейная сложность которой больше $2L - 2$, то $\mathbf{B}(z) = \mathbf{X1}_{H,L}(z) \cdot \mathbf{A}(z) - \mathbf{X2}_{H,L}(z) \neq 0$ для всех $\mathbf{A}(z) \neq c\mathbf{I}_L$.

Однако этого условия недостаточно для слепой идентификации, поскольку равенство (5.40) может выполняться, если $\mathbf{B}(z) \cdot \mathbf{h} = 0$. Кроме условия на информационную последовательность, требуется наложить дополнительные ограничения на вектор канала и результат взаимодействия его с информационной последовательностью.

Обычно отправным пунктом для обеспечения слепой идентифицируемости скалярного канала по одной реализации служит предположение о конечности алфавита информационных символов. Для этого случая известна следующая теорема [52], которую приведем без доказательства.

Теорема 5.6. *Если информационная последовательность принимает значения на множестве $\{\pm 1, \pm 3, \dots, q-1\} \in \mathbb{Z}$, то для идентифицируемости детерминированного скалярного канала достаточно, чтобы:*

1) *линейная сложность информационной последовательности была больше $(2L-2)$;*

2) *отсчеты канала $h_0, \dots, h_{L-1}$ были линейно независимы на подмножестве целых чисел $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2(q-1)^{2L-1} L^{L/2} (t_0 - L + 1)^L\}$, t_0 — номер первого символа информационной последовательности, начиная с которого линейная сложность информационной последовательности больше L .*

Доказательство теоремы см. в [52].

Статистическая идентификация предоставляет значительно более широкий диапазон возможностей для слепой оценки скалярного канала.

Прежде всего, отметим, что в общем случае наличия на входе канала последовательности с гауссовским распределением, на выходе доступны только вектор математического ожидания и ковариационная матрица.

Поскольку математическое ожидание как правило равно нулю, то для стационарного гауссовского случайного процесса единственной статистической характеристикой является корреляционная функция или автокорреляционная последовательность.

Известно, что автокорреляция не содержит информации о фазе передаточной функции канала. Действительно оценку автокорреляции на выходе канала для белого шума на входе можно записать в виде

$$r_y(z) = \sigma^2 h(z) h^*(1/z^*) \cdot z^{L-1}, \quad (5.41)$$

где $r_y(z)$ — полином, коэффициенты которого являются отсчетами автокорреляционной функции на выходе канала. Если априори известно, что все нули полинома канала находятся внутри (системы с минимальной фазой) или вне (системы с максимальной фазой) окружности единичного радиуса, то, зная $r_y(z)$, можно идентифицировать канал. В общем случае для стационарного гауссовского входа идентификация невозможна. Однако для негауссовских стационарных случайных последовательностей идентификация возможна по статистикам высоких порядков.

В этом случае условие идентифицируемости можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 5.7. Для идентифицируемости скалярного канала достаточно, чтобы отсчеты информационной последовательности при $M\{x_i\} = 0$ и $M\{x_i x_j^*\} = \sigma^2 \delta(i - j)$ описывались негауссовыми распределениями.

Доказательство. Обратное утверждение было фактически уже доказано выше. Конструктивное доказательство см. в [6].

Аналогичное утверждение можно сформулировать для нестационарных по входу систем.

Теорема 5.8. Для идентифицируемости скалярного канала достаточно, чтобы независимые отсчеты информационной последовательности при $M\{x_i\} = 0$ имели, по крайней мере, нестационарную дисперсию $M\{x_i x_i^*\} = \sigma_i^2$.

Доказательство. Убедимся в правоте данного утверждения рассмотрев более общий непрерывный случай [31].

Пусть модель системы описывается выражением (5.6).

Тогда в отсутствие шума можно записать наблюдаемый случайный процесс в виде следующего стохастического интеграла:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) \sigma(\tau) d\eta(\tau), \quad (5.42)$$

где $x'(\tau) = d\eta(\tau)$ — стандартный комплексный “белый” шум с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, $x(\tau) = \sigma(\tau) x'(\tau)$ — нестационарный случайный процесс.

Корреляционная функция случайного процесса $y(t)$ имеет вид

$$B_y(t_1, t_2) = M\{y(t_1) y^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1 - \tau) h^*(t_2 - \tau) \sigma^2(\tau) d\tau. \quad (5.43)$$

Возьмем двумерное преобразование Фурье от корреляционной функции $B_y(t_1, t_2)$:

$$B_y(\omega_1 - \omega_2) = h(\omega_1) h^*(\omega_2) B_x(\omega_1 - \omega_2), \quad (5.44)$$

где

$$B_x(\omega_1 - \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2(\tau) e^{-j(\omega_1 - \omega_2)\tau} d\tau. \quad (5.45)$$

Если $\sigma(\tau) = 1$, то $B_x(\omega_1 - \omega_2) = \delta(\omega_1 - \omega_2)$, т. е. $B_y(t_1, t_2)$ содержит информацию только о модуле передаточной функции системы $|h(\omega)|^2$.

Во всех остальных случаях канал идентифицируем.

Запишем (5.44) в виде равенств отдельно для модуля и фазы $B_y(\omega_1, \omega_2)$:

$$|B_y(\omega_1 - \omega_2)| = |h(\omega_1)| |h^*(\omega_2)| |B_x(\omega_1 - \omega_2)|, \quad (5.46)$$

$$\arg(B_y(\omega_1, -\omega_2)) = \arg(h(\omega_1)) - \arg(h(\omega_2)) + \arg(B_x(\omega_1 - \omega_2)) \quad (5.47)$$

Фиксируя разность $\omega_1 - \omega_2$, получаем уравнения как для модуля, так и для фазы передаточной функции, которые определяют ее с точностью до комплексного множителя и некоторого постоянного временного смещения. Теорема доказана.

Утверждения теорем 5.7 и 5.8 могут быть распространены на случай, когда отсчеты информационной последовательности зависимы.

В (5.11) введена модель векторного канала путем избыточной дискретизации сигнала на выходе скалярного канала.

Представим (5.11) в виде

$$y_k(l) = y(t) \Big|_{t=\frac{kT}{m} + lT} = \sum_{n=0}^{L-1} a_{n+l} h_n^{(k)} + v_l^{(k)}, \quad (5.48)$$

где

$$h_n^{(k)} = g\left(\frac{kT}{m} + lT\right), \quad g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) s_0(\tau) d\tau, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Если аппаратурная часть канала связи имеет полосу пропускания больше чем m/T , то отсчеты шума $\{v_l^{(k)}\}$ остаются некоррелированными.

В соответствии с теоремой 5.2 полиномы $h_0(z), \dots, h_{m-1}(z)$ не должны иметь общих корней.

В каком случае выполняется данное условие при индуцировании векторного канала избыточной дискретизацией?

Поскольку ответ на этот вопрос можно отнести к условиям идентифицируемости канала, сформулируем данные условия в виде теоремы.

Теорема 5.9. *Для того чтобы полиномы степени $L-1$ $h_0(z), \dots, h_{m-1}(z)$, полученные в результате разбиения полинома $h(z)$ степени $mL-1$ вида*

$$h(z) = \sum_{i=0}^{m-1} z^i h_i(z^m), \quad (5.49)$$

не имели общих корней, необходимо и достаточно, чтобы полином $h(z)$ не имел равномерно распределенных корней на окружности с шагом $2\pi/m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть z_0 является общим корнем полиномов $h_0(z), \dots, h_{m-1}(z)$, тогда очевидно из (5.49) найдется m корней $z_1, \dots, z_m$ полинома $h(z)$, являющихся корнями полинома $z^m - z_0$. Таким образом, полином $h(z)$ может быть факторизован в виде $h(z) = h'(z)(z^m - z_0)$, или эквивалентно $h(z) = h'(z)\left(\left(z/z_0^{-m-1}\right)^m - 1\right)z_0$. Очевидно, что $z_k = z_0^{-m+1} \exp(j2\pi k/m)$.

Обратно, — пусть полином $h(z)$ имеет m корней вида $z_k = z_0^{-m+1} \exp(j2\pi k/m)$. Тогда (5.49) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & z_1^{m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & z_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0(z_0) \\ \vdots \\ h_{m-1}(z_0) \end{pmatrix} = 0. \quad (5.50)$$

Квадратная матрица Вандермонда в (5.50) имеет полный ранг, поскольку корни $\{z_k\}$ различны. Отсюда (5.50) имеет единственное тривиальное решение и z_0 -совместный корень полиномов $h_0(z), \dots, h_{m-1}(z)$. Теорема доказана. Эквивалентная теорема в несколько иной форме сформулирована в [19].

5.3. Слепая идентификация векторного канала

Рассмотрим задачу слепой идентификации векторного канала. Условия слепой идентифицируемости канала для этого случая сформулированы в теоремах 5.2 и 5.4 для случаев детерминированной и статистической идентификации соответственно.

Алгоритмы слепой идентификации, рассматриваемые в данном разделе, основаны на свойстве взаимной симметрии выходных сигналов каналов, на входе которых присутствует одна и та же информационная последовательность.

В соответствии с этим свойством при выполнении условий теоремы 5.2 матричное уравнение (5.30) в отсутствие шума имеет единственное, с точностью до комплексного множителя, решение для любых различных чисел $z_1, \dots, z_s$.

Другими словами, нуль-пространство $K \cdot s \times L \cdot M$ матрицы $\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s)$ является линейной оболочкой единственного базисного вектора $\mathbf{h}^T = (h_0^{(1)}, \dots, h_{L-1}^{(1)}, \dots, h_0^{(M)}, \dots, h_{L-1}^{(M)})$, или, что эквивалентно, $\mathbf{h}$ является собственным вектором матрицы $\mathbf{Y}^*(z_1, \dots, z_s) \mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s)$, соответствующим нулевому собственному числу.

Наличие шума заставляет нас искать приближенное решение, наилучшее с точки зрения некоторого критерия качества.

Идентифицируемая система в этом случае описывается следующим выражением:

$$y_l^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{L-1} h_i^{(k)} x_{i+l}(z) + v_l^{(k)}(z), \quad (5.51)$$

где $v_l^{(k)}(z)$ — полином степени $(t-1)$ над полем комплексных чисел, образованный блоком из t отсчетов на выходе k -го канала.

Для небольших значений уровня шума весьма эффективным оказывается метод наименьших квадратов, в соответствии с которым

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\|\mathbf{h}\|=1} \|\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s) \cdot \mathbf{h}\|_2^2, \quad (5.52)$$

где $\|\bullet\|_2^2$ — евклидова векторная норма.

Эквивалентно, оценка канала $\mathbf{h}$ может быть получена из собственного вектора, связанного с наименьшим сингулярным значением матрицы $\mathbf{Y}^*(z_1, \dots, z_s) \mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s)$:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\|\mathbf{h}\|=1} (\mathbf{h}^* \cdot \mathbf{Y}^*(z_1, \dots, z_s) \mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s) \cdot \mathbf{h}). \quad (5.53)$$

Метод слепой идентификации, описываемый выражениями (5.52) или (5.53), в несколько иной форме хорошо известен в литературе как “метод взаимных отношений (ВО)” [6].

Метод впервые предложен в [53], а также независимо рядом других авторов (см. библиографию в [18]).

В отличие от большинства известных статистических методов слепой идентификации метод взаимных отношений является весьма эффективным для небольших выборок при большом отношении сигнал–шум.

В [53] методом моделирования показано, что данный метод дает оценку близкую к границе Рао-Крамера.

Главные недостатки метода — это необходимость точного знания длины канала L , а также необходимость работы в уравнениях (5.52) или (5.53) с разреженными матрицами большого размера.

Использование полиномиальных представлений позволит нам далее несколько упростить вычислительную структуру алгоритма взаимных отношений и несколько уменьшить погрешность метода для малых отношений сигнал–шум за счет дополнительной оптимизации соответствующих чисел обусловленности.

Более того, нам удастся получить аналитическое и итерационное решения задачи слепой идентификации в данном случае.

Для этого запишем выражение (5.21) в виде

$$\sum_{l=0}^{L-1} y_l(z, s_1) h_l(s_2) - \sum_{l=0}^{L-1} y_l(z, s_2) h_l(s_1) = 0, \quad (5.54)$$

где

$$y_l(z, s) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{t-1} y_{j+l}^i z^j s^i, \quad h_l(s) = \sum_{i=0}^{M-1} h_l^i s^i.$$

Использование свойства симметрии для решения уравнения (5.54) относительно неизвестных полиномов $h_0(s), \dots, h_{L-1}(s)$ означает, что необходимо выбрать их таким образом, чтобы полином $\sum_{l=0}^{L-1} y_l(z, s_1) h_l(s_2)$ был симметричен по переменным s_1 и s_2 .

Выберем $2L - 1$ различных значений формальной переменной $z_1, \dots, z_{2L-1}$. Тогда, используя (5.54), можно записать $2L - 1$ однородных линейных уравнений относительно L неизвестных полиномов $h_0(s), \dots, h_{L-1}(s)$.

В матричной форме получим

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2) \cdot \mathbf{h}(s_1, s_2) = \\ = \begin{pmatrix} y_0(z_1, s_2) & \dots & y_{L-1}(z_1, s_2) & -y_0(z_1, s_1) & \dots & -y_{L-1}(z_1, s_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_0(z_{2L-1}, s_2) & \dots & y_{L-1}(z_{2L-1}, s_2) & -y_0(z_{2L-1}, s_1) & \dots & -y_{L-1}(z_{2L-1}, s_1) \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot \begin{pmatrix} h_0(s_1) \\ \vdots \\ h_{L-1}(s_1) \\ h_0(s_2) \\ \vdots \\ h_{L-1}(s_2) \end{pmatrix} = 0. \quad (5.55) \end{aligned}$$

При выполнении условий теоремы 5.2 полиномиальная матрица $\mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2)$ имеет ранг $2L - 1$, действительно:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2) = \begin{pmatrix} x_0(z_1) & \dots & x_{2L-2}(z_1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_0(z_{2L-1}) & \dots & x_{2L-2}(z_{2L-1}) \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot \begin{pmatrix} h_0(s_2) & \dots & 0 & h_0(s_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L-1}(s_2) & & h_0(s_2) & h_{L-1}(s_1) & & h_0(s_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_{L-1}(s_2) & 0 & \dots & h_{L-1}(s_1) \end{pmatrix} = \\ = \mathbf{X}(z_1, \dots, z_{2L-1}) \cdot \mathbf{H}(s_1, s_2). \quad (5.56) \end{aligned}$$

Ранее при доказательстве теоремы 5.2 показано, что ранг $(2L - 1 \times 2L - 1)$ матрицы $\mathbf{X}(z_1, \dots, z_{2L-1})$ для любых различных $z_1, \dots, z_{2L-1}$ равен $(2L - 1)$. Легко заметить также по аналогии с (5.56), что ранг $(2L - 1 \times 2L)$ матрицы $\mathbf{H}(s_1, s_2)$ также равен $(2L - 1)$ если полиномы $h(z, s_1)$ и $h(z, s_2)$, где $h(z, s) = \sum_{l=0}^{M-1} h_l(z) s^l$, не имеют общих корней для различных s_1 и s_2 . Это условие эквивалентно условию 1) теоремы 5.2.

В отсутствие шума легко получить явное решение однородной системы уравнений (5.55). Так как, по условию теоремы 5.2, матрица $\mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2)$ имеет ранг $2L - 1$, то хотя бы один из ее миноров

порядка $2L - 1$ $M_i(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2)$, $i = 1, \dots, 2L$ — номер столбца, отличен от нуля. Пусть это будет $M_{2L}(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2)$, тогда, полагая значение полинома $h_{L-1}(s_2)$ произвольным, получим следующую невырожденную систему $2L - 1$ линейных уравнений с коэффициентами над полем C :

$$\sum_{l=0}^{L-1} y_l(z_j, s_2) h_l(s_1) - \sum_{l=0}^{L-2} y_l(z_j, s_1) h_l(s_2) = y_{L-1}(z_j, s_1) h_{L-1}(s_2), \quad (5.57)$$

где $j = 1, \dots, 2L - 1$. Решая ее методом Крамера, получим общее решение системы в виде

$$h_l(s_1) = (-1)^{2L-l-1} \frac{M_l(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2)}{M_{2L}(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2)} \cdot h_{L-1}(s_1), \quad l = 0, \dots, L-1,$$

$$h_l(s_2) = (-1)^{L-l} \frac{M_{L+l}(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2)}{M_{2L}(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2)} \cdot h_{L-1}(s_2), \quad l = 0, \dots, L-2. \quad (5.58)$$

В силу произвольности $h_{L-1}(s_2)$ положим его равным $(-1)^{2L} M_{2L}(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2)$, тогда решение системы уравнений (5.57) с точностью до произвольного комплексного коэффициента будет иметь вид

$$h_l(s_1) = (-1)^l M_l(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2),$$

$$h_l(s_2) = (-1)^{L+l} M_{L+l}(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2), \quad l = 0, \dots, L-1. \quad (5.59)$$

Заметим также, что нам нужно вычислить только L миноров, т. к. из анализа структуры матрицы (5.55) следует, что

$$M_{2L-l}(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2) = (-1)^L M_l(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_2, s_1). \quad (5.60)$$

Таким образом, найдены значения неизвестных полиномов $h_0(s), \dots, h_{L-1}(s)$ в точках s_1 и s_2 . Если $M = 2$, этого достаточно для оценки всех коэффициентов неизвестного векторного канала:

$$h_l^{(1)} = \frac{s_2 h_l(s_1) - s_1 h_l(s_2)}{s_2 - s_1}, \quad l = 0, \dots, L-1,$$

$$h_l^{(2)} = \frac{h_l(s_2) - h_l(s_1)}{s_2 - s_1}. \quad (5.61)$$

Для того чтобы найти решение системы для произвольного числа каналов, надо выполнить вычисления (5.59) в кольце $C[s_1, s_2]$. Поскольку решение системы (5.55) по формулам (5.59) не содержит операции деления, то мы получим решение с точностью до некоторого полинома $g(s_1, s_2) \in C[s_1, s_2]$.

Поскольку полиномы $h_l(s_1)$ и $h_l(s_2)$ не имеют общих множителей, то неизвестный множитель $g(s_1, s_2)$ можно найти как наибольший общий делитель полиномов $M_l(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2)$ и $M_{L+l}(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2)$, используя, например алгоритм Евклида. Конечно, такой алгоритм не имеет практического значения из-за больших вычислительных затрат.

Альтернативный путь состоит в формировании системы линейных уравнений для M значений полиномов канала $h_l(s_1), \dots, h_l(s_M)$.

Запишем неизвестные значения в виде вектора $\mathbf{h}(s_1, \dots, s_M) = (h_0(s_1), \dots, h_{L-1}(s_1), \dots, h_0(s_M), \dots, h_{L-1}(s_M))^T$. Тогда система линейных уравнений в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M) = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_r, s_1, s_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_r, s_{M-1}, s_M) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{h}(s_1, \dots, s_M) = 0, \quad (5.62)$$

где $\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M)$ — $(M-1) \cdot r \times L \cdot M$ комплексная матрица ранга $(M \cdot L - 1)$; r как и ранее выбирается из условия $(M-1) \cdot r \geq L \cdot M - 1$.

Общее решение для коэффициентов канала может быть найдено далее по интерполяционной формуле Лагранжа

$$h_l(s) = \sum_{i=1}^M h_l(s_i) \cdot L_i(s), \quad (5.63)$$

где $L_i(s)$ — элементарные лагранжевы интерполяционные многочлены, определяемые формулой

$$L_i(s) = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M s - s_j}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M s_i - s_j}. \quad (5.64)$$

Таким образом, в отсутствие шума алгоритм слепой идентификации канала сводится к вычислению базиса нуль-пространства матрицы $\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M)$. Условия теоремы 2 обеспечивают единственность решения этой задачи, т.е. наличие единственного нулевого собственного числа и соответствующего ему единственного собственного вектора с точностью до комплексной константы, за счет строгого равенства $\text{rank}(\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M)) = ML - 1$.

Данный алгоритм далее будем называть алгоритмом нулевого подпространства (АНП).

Наличие аддитивного шума в матрице входных данных $\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M) = \mathbf{Y}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M) + \mathbf{V}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M)$ создает условия, когда $\text{rank}(\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M))$ может быть равен ML или меньше $(LM - 1)$. В первом случае нуль-пространство матрицы состоит только из нулевого вектора, а во втором содержит несколько базисных

векторов. Поэтому задача слепой идентификации может вообще не иметь решения или решение задачи становится неоднозначным.

Как отмечалось выше, в этом случае можно использовать стратегию метода наименьших квадратов, т.е. в качестве решения задачи для случая $\text{rank}(\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M)) = ML$ взять собственный вектор, соответствующий минимальному по модулю собственному числу матрицы $\tilde{\mathbf{Y}}^*(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M) \tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M)$:

$$\hat{\mathbf{h}}(s_1, \dots, s_M) = \arg \min_{\|\mathbf{h}(s_1, \dots, s_M)\|=1} \left(\mathbf{h}(s_1, \dots, s_M)^* \tilde{\mathbf{Y}}^*(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M) \cdot \tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M) \mathbf{h}(s_1, \dots, s_M) \right). \quad (5.65)$$

В этом случае решение задачи всегда единственно и, как известно, минимизирует функционал $\|\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M) \hat{\mathbf{h}}(s_1, \dots, s_M)\|_2^2$ при ограничении нормы $\|\hat{\mathbf{h}}(s_1, \dots, s_M)\|_2^2 = 1$.

Поскольку выбор числа уравнений и соответственно числа строк в матрице $\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M)$ в отличие от традиционного подхода [18] в нашей интерпретации произволен, то можно выбрать их число строго равным $(LM - 1)$. Тогда $\text{rank}(\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z'_r, s_1, \dots, s_M)) \leq LM - 1$ теперь уже за счет линейной независимости строк. При этом, поскольку $r = (L \cdot M - 1)/(M - 1)$ — целое только в частных случаях, выбираем r как наименьшее целое, а r' так, что $(M - 2) \cdot r + r' = L \cdot M - 1$. Тогда

$$\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z'_r, s_1, \dots, s_M) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_1(z_1, \dots, z_r, s_1, s_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\mathbf{Y}}_1(z_1, \dots, z'_r, s_{M-1}, s_M) \end{pmatrix}. \quad (5.66)$$

Теперь можно решать задачу слепой идентификации векторного канала при наличии шума, используя алгоритмы точного решения однородной системы уравнений.

При этом, поскольку нуль-пространства матриц $\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z'_r, s_1, \dots, s_M)$ и $\tilde{\mathbf{Y}}^*(z_1, \dots, z'_r, s_1, \dots, s_M) \tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z'_r, s_1, \dots, s_M)$ совпадают, решение, получаемое, например, по формулам (5.59), и решение вариационной задачи (5.65) совпадают с точностью до комплексного множителя, и являются нормальным псевдорешением однородной системы уравнений (5.62).

Таким образом, показана эквивалентность оценки АНП и оценки, полученной в рамках метода наименьших квадратов.

Несмотря на то, что формулы (5.59) дают явное решение, непосредственное их использование для нахождения численного решения однородной системы, задаваемой матрицей (5.66), нецелесообразно даже при сравнительно небольших размерах матрицы, поскольку требует вычисления $(L \cdot M - 1)$ определителей размера $(L \cdot M - 1)$. При этом, как известно, число операций комплексного деления и умножения при вычислении только одного определителя равно $(L \cdot M - 2) \left((L \cdot M - 1)^2 + (L \cdot M - 1) + 3 \right) / 3$.

Поэтому более целесообразно использование алгоритмов, имеющих меньшие вычислительные затраты.

Одним из таких методов может быть несколько модифицированный метод Перселла. В рамках данного подхода интерпретируем систему однородных уравнений с матрицей (5.66) как условия ортогональности вектора $\mathbf{h}(s_1, \dots, s_M)$ с $(L \cdot M - 1)$ линейно независимыми строками матрицы (5.66). При этом решение системы находится путем построения базисов подпространств унитарного линейного пространства C^{LM} убывающих размерностей

$$C^{LM} = R_0 \supset R_1 \dots \supset R_k \supset \dots \supset R_{LM-1},$$

где R_k — подпространство, состоящее из векторов, ортогональных к первым k строкам $y_1, \dots, y_k$ матрицы $\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r', s_1, \dots, s_M)$.

Базис подпространства R_k строится из базиса подпространства R_{k-1} в виде следующих линейных комбинаций:

$$\mathbf{e}_i^k = \mathbf{e}_i^{k-1} - c_i^k \mathbf{e}_k^{k-1}, \quad i = k + 1, \dots, LM. \quad (5.67)$$

Коэффициенты c_i^k определяются из условия ортогональности строк матрицы $\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r', s_1, \dots, s_M)$ и вектора решения в виде

$$c_i^k = \frac{(\mathbf{y}_k, \mathbf{e}_i^{k-1})}{(\mathbf{y}_k, \mathbf{e}_k^{k-1})}. \quad (5.68)$$

Для реализуемости процесса необходимо, чтобы скалярные произведения $(\mathbf{y}_k, \mathbf{e}_k^{k-1})$ были отличными от нуля. Если $k = 0$, то в качестве базиса берется естественный базис в C^{LM} : $\mathbf{e}_1^0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_{LM}^0 = (0, \dots, 0, 1)$.

Подпространство R_{LM-1} является нуль-пространством матрицы $\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r', s_1, \dots, s_M)$, т.к. единственный базисный вектор этого подпространства ортогонален ко всем линейно независимым векторам $y_1, \dots, y_{LM-1}$ и является численным решением системы однородных уравнений, заданных матрицей (5.66).

Таким образом, получена итерационная модификация АНП, которая, конечно с точки зрения погрешности, эквивалентна АНП в аналитической форме, но требует меньших вычислительных затрат.

Теперь рассмотрим вопрос о выборе значений формальных переменных $z_1, \dots, z'_r, s_1, \dots, s_M$ при формировании системы уравнений (5.62). Ранее мы требовали, чтобы эти множества не содержали совпадающих значений. Если матрица $\tilde{Y}(z_1, \dots, z'_r, s_1, \dots, s_M)$ содержит отсчеты аддитивного шума, то выбор значений формальных переменных будет влиять на обусловленность матрицы и соответственно на погрешность алгоритма. Поэтому необходимо выбрать различные значения формальных переменных $z_1, \dots, z'_r, s_1, \dots, s_M$ так, чтобы минимизировать в некотором унитарном пространстве переменных $z_1, \dots, z'_r, s_1, \dots, s_M$ функционал погрешности алгоритма слепой идентификации.

Относительную погрешность слепой оценки можно оценить следующим неравенством [6]:

$$\gamma^2 \leq 4(LM - 1) \frac{\alpha_1^2(z_1, \dots, z'_r, s_1, \dots, s_M) \alpha_2^2(s_1, \dots, s_M)}{q^2(z_1, \dots, z'_r, s_1, \dots, s_M)}, \quad (5.69)$$

где $\alpha_2^2(s_1, \dots, s_M)$ — число обусловленности невырожденной матрицы Вандермонда $V_M^M(s_1, \dots, s_M)$; $\alpha_1^2(z_1, \dots, z'_r, s_1, \dots, s_M)$ — число обусловленности матрицы $Y(z_1, \dots, z'_r, s_1, \dots, s_M)$ ранга $(LM - 1)$ по отношению к собственному вектору, соответствующему нулевому собственному числу; параметр $q^2(z_1, \dots, z'_r, s_1, \dots, s_M)$ имеет смысл отношения сигнал-шум.

Выбор значений формальных переменных $s_i = \exp(-j2\pi i/M)$, $i = 1, \dots, M$, и $z_i = \exp(-j2\pi i/r')$, $i = 0, \dots, t - 1$ при выполнении условия $t = r' = r$ обеспечивает минимальное значение относительной погрешности оценки канала. При $t = r' \neq r$ данный выбор обеспечивает решение, близкое к оптимальному при одинаковой дисперсии белого гауссовского шума в подканалах.

В целом, при наличии сосредоточенных помех различия параметров аддитивного шума в разных подканалах, корреляции отсчетов шума выбор сечений $z_1, \dots, z'_r, s_1, \dots, s_M$ должен проводиться минимизацией функционала в правой части (5.69).

Выше, адаптируя метод взаимных отношений для случая наличия в наблюдаемых данных аддитивного шума, мы использовали стратегию наименьших квадратов, которая не требует знания статистических характеристик шума.

Для сравнения рассмотрим идентификацию системы на фоне аддитивного шума, статистика которого известна, следуя [1].

Пусть имеется по N выходных отсчетов на выходе каждого из M каналов. Пусть в (5.35) $t = 1$, тогда

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_S \mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad (5.70)$$

где $\mathbf{H}_S$ — обобщенная матрица Сильвестра размером $NM \times (N + L - 1)$, составленная из векторов каналов, $\mathbf{y} = (y_0^{(1)}, \dots, y_{N-1}^{(1)}, \dots, y_0^{(M)}, \dots, y_{N-1}^{(M)})^T$ и $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{N+L-2})^T$.

Пусть комплексные отсчеты шума $\mathbf{v} = (v_0^{(1)}, \dots, v_{N-1}^{(1)}, \dots, v_0^{(M)}, \dots, v_{N-1}^{(M)})^T$ независимы и имеют круговое гауссово распределение

$$p(v_i^{(j)}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)} \exp\left(-\frac{|v_i^{(j)}|^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.71)$$

где σ^2 — дисперсия шума.

Тогда функционал правдоподобия можно записать в виде

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{H}_s, \mathbf{x}) = (2\pi\sigma^2)^{-NM} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_s \mathbf{x}\|_2^2\right). \quad (5.72)$$

Совместная оценка максимального правдоподобия $\mathbf{H}_s$ и $\mathbf{x}$ — это, как известно

$$(\hat{\mathbf{H}}_s, \hat{\mathbf{x}}) = \arg \min_{\mathbf{H}_s, \mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_s \mathbf{x}\|_2^2. \quad (5.73)$$

Если выполняются условия теоремы 5.2, то из теоремы 5.3 следует, что $\mathbf{H}_s$ имеет полный ранг по столбцам, тогда для любой фиксированной матрицы $\mathbf{H}_s$ минимум (5.73) по $\mathbf{x}$ достигается, если

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}_s^* \mathbf{H}_s)^{-1} \mathbf{H}_s^* \mathbf{y} = \mathbf{P}_{\mathbf{H}_s} \mathbf{y}, \quad (5.74)$$

где $\mathbf{P}_{\mathbf{H}_s}$ — оператор ортогонального проектирования пространство матрицы $\mathbf{H}_s$. Подставляя (5.74) в (5.73), получим

$$\hat{\mathbf{H}}_s = \arg \min_{\mathbf{H}_s} \|(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{H}_s}) \mathbf{y}\|_2^2. \quad (5.75)$$

Минимизация (5.75) — трудная задача в вычислительном отношении. В литературе описано достаточно большое число итерационных подходов к нелинейной оптимизации данного типа (см., например, библиографию в [18]).

В [1] описана эффективная методика вычисления (5.75), в основе которой лежит следующее утверждение. Приведем его без доказательства.

Пусть $\mathbf{G}_M$ — матрица, созданная из векторов каналов согласно следующему правилу:

$$\mathbf{G}_2^* = [-\mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1],$$

$$\mathbf{G}_q^* = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{q-1}^* & 0 \\ \hline -\mathbf{H}_q & \mathbf{H}_1 \\ & \vdots \\ & \mathbf{H}_{q-1} \end{array} \right], \quad (5.76)$$

где $q = 3, \dots, M$, $\mathbf{H}_i$ — блоки обобщенной матрицы Сильвестра $\mathbf{H}_s$.

Тогда, при условии, что все каналы не имеют общих нулей и $N \geq 2L$, ортогональной матрицей дополнений обобщенной матрицы Сильвестра $\mathbf{H}_s$ является $\mathbf{G}_M$, т. е.

$$\mathbf{Pr}_{\mathbf{G}_M} + \mathbf{Pr}_{\mathbf{H}_s} = \mathbf{I}. \quad (5.77)$$

Данное соотношение следует из свойства взаимной симметрии выходных сигналов каналов, на входе которых присутствует одна и та же информационная последовательность, использованная нами в предыдущем разделе. Доказательство данного утверждения см. в [53].

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\mathbf{H}_s} \|\mathbf{Pr}_{\mathbf{G}_s} \mathbf{y}\|_2^2 = \arg \min_{\|\mathbf{h}\|=1} \left(\mathbf{y}^* \mathbf{G}_M^* (\mathbf{G}_M^* \mathbf{G}_M)^{\#} \mathbf{G}_M \mathbf{y} \right), \quad (5.78)$$

где “#” обозначает псевдоинверсию Мура–Пенроуза.

Используя коммутативное свойство линейной свертки $\mathbf{G}_M \mathbf{y} = \mathbf{Y}_M \mathbf{h}$, (5.78) можно записать в виде

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\|\mathbf{h}\|=1} \left(\mathbf{h}^* \mathbf{Y}_M^* (\mathbf{G}_M^* \mathbf{G}_M)^{\#} \mathbf{Y}_M \mathbf{h} \right), \quad (5.79)$$

где

$$\mathbf{Y}_2 = [\mathbf{Y}_{(2)} - \mathbf{Y}_{(1)}]$$

$$\mathbf{Y}_q = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Y}_{q-1} & 0 \\ \hline \mathbf{Y}_{(q)} & -\mathbf{Y}_{(1)} \\ & \vdots \\ & -\mathbf{Y}_{(q-1)} \end{array} \right], \quad (5.80)$$

$$\mathbf{Y}_{(i)} = \left[\begin{array}{ccc} y_i(L) & \cdots & y_i(0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_i(N-1) & \cdots & y_i(N-L-1) \end{array} \right]. \quad (5.81)$$

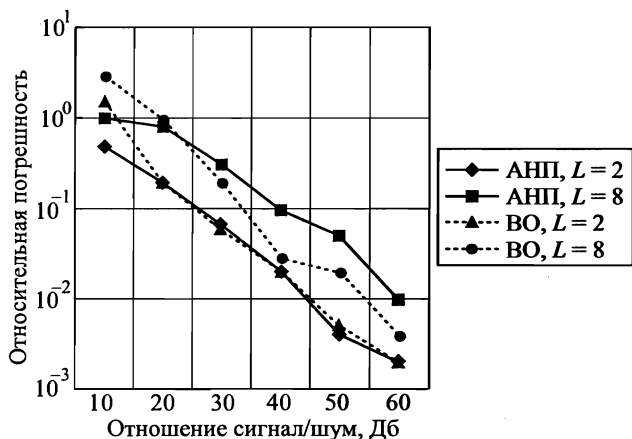
В соответствии с [1] алгоритм максимального правдоподобия (МП) (5.79) эквивалентен следующей последовательности шагов [1]:

$$1) \hat{\mathbf{h}}_1 = \arg \min_{\|\mathbf{h}\|=1} \mathbf{h}^* \mathbf{Y}_M^* \mathbf{Y}_M \mathbf{h}; \quad (5.82)$$

$$2) \hat{\mathbf{h}}_2 = \arg \min_{\|\mathbf{h}\|=1} \mathbf{h}^* \mathbf{Y}_M^* (\mathbf{G}_M^* \mathbf{G}_M)^{\#} \mathbf{Y}_M \mathbf{h}. \quad (5.83)$$

Заметим, что первый шаг этого алгоритма эквивалентен алгоритму взаимных отношений (ВО) [1].

Полиномиальная интерпретация метода взаимных отношений позволяет использовать для решения вариационной задачи метода минимальных квадратов алгоритмы решения системы однородных уравнений.

Рис. 5.5. Относительная погрешность АНП при $M = 3$

Полученный в рамках данного подхода алгоритм АНП слепой идентификации векторного канала эквивалентен оценке, полученной в рамках метода наименьших квадратов, и допускает аналитическую и итерационную формы представления решения.

АНП при больших значениях сигнал-шум практически совпадает с классическим алгоритмом ВО, однако в отличие от АНП алгоритм ВО имеет более резкий рост погрешности при малых отношениях сигнал-шум.

5.4. Слепая идентификация скалярного канала, основанная на полиномиальных статистиках

Если выходная последовательность имеет конечную длину, то выражение (5.10) можно записать в виде произведения полиномов положительной степени над полем комплексных чисел $\mathbb{C}[z]$:

$$y(z) = \pi_{L-1,n}(h(z)x(z)) + v(z), \quad (5.84)$$

где

$$\begin{aligned} y(z) &= \sum_{i=0}^{n-1} y(i) z^i, & h(z) &= \sum_{i=0}^{L-1} h(i) z^i, \\ x(z) &= \sum_{i=0}^{n+L-1} x(i) z^i, & v(z) &= \sum_{i=0}^{n-1} v(i) z^i. \end{aligned}$$

Оператор проектирования $\pi_{k,m}(x(z))$ отображает полином $x(z)$ степени $(m+k-1)$ в полином степени $(m-k-2)$ обнулением первых k младших и k старших коэффициентов полинома и делением на z^{k-1} .

Модель системы в виде (5.84) описывает все особенности структур входных сигналов, в том числе и случай бесконечной дискретной последовательности на входе.

В отличие от традиционного в ЦОС использования представления дискретных сигналов их Z -преобразованиями представляем их элементами кольца полиномов от одной переменной.

Напомним, что кольцом называется множество элементов, на котором определены операции сложения и умножения, обе коммутативны и ассоциативны, связаны законом дистрибутивности, причем сложение обладает обратной операцией. Это означает, что кольцо незамкнуто относительно операции деления элементов.

Само по себе такое представление мало что дает в контексте нашей задачи, т. к. поле комплексных чисел является алгебраически замкнутым. Это означает, что любой многочлен степени n в этом поле в соответствии с основной теоремой алгебры имеет ровно n корней. Поэтому любой многочлен в этом поле может быть факторизован в произведение линейных множителей.

Однако, вводя далее понятие полиномиальных статистик, можно перенести нашу задачу в более содержательное кольцо полиномов от нескольких переменных $C[z_1, z_2, \dots, z_r]$, где возможности для слепой идентификации существенно расширяются.

Таким образом, объектом изучения в нашем случае являются случайные полиномы и их линейные комбинации.

Здесь будем рассматривать случайные полиномы как комплексные случайные поля, определенные на комплексной плоскости. В этом случае естественно определить моментные и кумулянтные функции этих случайных полей, которые будут уже полиномами от многих переменных.

Будем называть эти функции полиномиальными моментами и полиномиальными кумулянтами по аналогии с моментными и кумулянтными функциями [6].

Несмотря на то, что сформированные таким образом случайные поля относятся к классу векторных случайных полей и, на первый взгляд, подобное представление случайных векторов лишь усложняет их описание, однако, для решения рассматриваемых задач можно использовать успешно развивающийся в последние годы математический аппарат, созданный в рамках алгебраической геометрии [54, 55]. Данный подход представлен в [6, 56–58].

5.4.1. Полиномиальные статистики и их свойства. Пусть $x \in C^n$ — комплексный случайный вектор, описываемый плотностью вероятности $f_x(x_1, \dots, x_n)$, определенной в R^{2n} .

Будем называть полиномиальным моментом порядка $(k + m)$, $k = k_1 + k_2 + \dots + k_r$, $m = m_1 + m_2 + \dots + m_r$ случайного вектора x полином r переменных, принадлежащий кольцу $C[z_1, \dots, z_r]$ над полем комплексных чисел, сформированный следующим образом:

$$P_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^x(z_1, z_2, \dots, z_r) = \mathbf{M} \left\{ x(z_1)^{k_1} \dots x(z_r)^{k_r} x^*(z_1)^{m_1} \dots x^*(z_r)^{m_r} \right\} \quad (5.85)$$

Пусть $y(z) = x_1(z) + x_2(z)$ — сумма случайных независимых полиномов $x_1(z)$ и $x_2(z)$, тогда справедливы следующие соотношения:

$$P_l^y(z_1, \dots, z_l) = \sum_{r=1}^l \left(\sum_{\substack{0 < i_1 < \dots < i_r < l \\ 0 < i_{r+1} < \dots < i_l < l}} P_r^{x_1}(z_{i_1}, \dots, z_{i_r}) P_{l-r}^{x_2}(z_{i_{r+1}}, \dots, z_{i_l}) \right). \quad (5.91)$$

Из последнего выражения видно, что полиномиальные моменты не коммутируют сумму независимых случайных полиномов. В частном случае, когда симметричные полиномиальные моменты 1-го порядка независимых случайных полиномов равны нулю, коммутируются полиномиальные моменты не более 3-го порядка.

Последнее обстоятельство заставляет обратиться к обобщенным корреляциям или кумулянтам значений случайных полиномов и определить симметричные кумулянтные полиномиальные моменты по аналогии с обычными кумулянтными функциями [59]. Кроме того, кумулянты, в отличие от моментов, могут задавать различные распределения вероятностей в известной степени независимо.

Определим полиномиальный кумулянт порядка $(k+m)$, $k = k_1 + k_2 + \dots + k_r$, $m = m_1 + m_2 + \dots + m_r$ случайного вектора x как полином r переменных, принадлежащий кольцу $C[z_1, \dots, z_r]$:

$$K_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^x(z_1, z_2, \dots, z_r) = \text{cum} \left\{ x(z_1)^{k_1} \dots x(z_r)^{k_r} x^*(z_1)^{m_1} \dots x^*(z_r)^{m_r} \right\}. \quad (5.92)$$

Симметричный полиномиальный кумулянт зададим следующим выражением:

$$K_l^x(z_1, z_2, \dots, z_l) = \text{cum} \{ x(z_1) \dots x(z_l) \}. \quad (5.93)$$

Связь между симметричными полиномиальными кумулянтами и моментами случайного полинома в соответствии с [59] можно записать в виде:

$$\begin{aligned} K_1^x(z_1) &= P_1^x(z_1); \\ K_2^x(z_1, z_2) &= P_2^x(z_1, z_2) - P_1^x(z_1) P_1^x(z_2); \\ K_3^x(z_1, z_2, z_3) &= P_3^x(z_1, z_2, z_3) - 3 \{ P_1^x(z_1) P_2^x(z_2, z_3) \}_s + \\ &\quad + 2 P_1^x(z_1) P_1^x(z_2) P_1^x(z_3); \\ K_4^x(z_1, z_2, z_3, z_4) &= P_4^x(z_1, z_2, z_3, z_4) - 3 \{ P_2^x(z_1, z_2) P_2^x(z_3, z_4) \}_s - \\ &\quad - 4 \{ P_1^x(z_1) P_3^x(z_2, z_3, z_4) \}_s + 2 \cdot 6 \{ P_1^x(z_1) P_1^x(z_2) P_2^x(z_3, z_4) \}_s - \\ &\quad - 6 \cdot P_1^x(z_1) P_1^x(z_2) P_1^x(z_3) P_1^x(z_4); \end{aligned} \quad (5.94)$$

где $\{ \}_s$ — скобки симметризации.

Свойства кумулянтов линейных комбинаций случайных полиномов аналогичны свойствам соответствующих полиномиальных моментов.

Пусть $y(z) = h(z)x(z)$ — произведение случайного полинома $x(z)$ и неслучайного полинома $h(z)$, тогда

$$K_l^y(z_1, \dots, z_l) = K_l^x(z_1, \dots, z_l) h(z_1) \dots h(z_l). \quad (5.95)$$

Если $y(z) = x_1(z) + x_2(z)$ — сумма случайных независимых полиномов $x_1(z)$ и $x_2(z)$,

$$K_l^y(z_1, \dots, z_l) = K_l^{x_1}(z_1, \dots, z_l) + K_l^{x_2}(z_1, \dots, z_l). \quad (5.96)$$

Связь характеристической функции r значений случайного полинома и набора полиномиальных кумулянтов можно записать в виде

$$\begin{aligned} \ln(\Theta(p_1, \dots, p_r; z_1, \dots, z_r)) = & \sum_{l=1}^{\infty} j^l \sum_{m_1, \dots, m_r=l} \frac{1}{m_1! \dots m_r!} \sum_{k_1, \dots, k_r=0}^{m_1, \dots, m_r} \binom{k_1}{m_1} \dots \\ & \dots \binom{k_r}{m_r} K_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^x(z_1, z_2, \dots, z_r) p_1^{m_1-k_1} (p_1^*)^{k_1} \dots p_r^{m_r-k_r} (p_r^*)^{k_r}. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Для каждого полиномиального кумулянта $K_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^x(z_1, z_2, \dots, z_r)$ мы можем определить множество точек в пространстве C^r , на котором значение полиномиального кумулянта равно нулю:

$$\Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^x = \{z \in C^r : K_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^x(z_1, z_2, \dots, z_r) = 0\}. \quad (5.98)$$

Заданное, таким образом, множество точек является множеством корней полинома кольца $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]$ и называется аффинным многообразием в пространстве C^r [55].

Рассмотрим теперь роль полиномиальных кумулянтов в определении статистических связей между компонентами случайного вектора.

Пусть $x(z) \in$ кольцу $C[z]$ — случайный полином степени $n-1$, заданный случайным вектором $x \in R^n$; $x(z_1)$ и $x(z_2)$ — два различных значения случайного полинома $x(z)$.

Можно определить все возможные значения $z_1 \neq z_2$, для которых $x(z_1)$ и $x(z_2)$ некоррелированы, решив систему полиномиальных уравнений вида:

$$\Xi_2^x = \Xi_{1,1,0,0}^x \cap \Xi_{1,0,0,1}^x = \left\{ z \in C^r : \begin{cases} K_2^x(z_1, z_2) = 0 \\ K_2^x(z_1, z_2^*) = 0 \end{cases} = \begin{cases} K_2^x(z_1^*, z_2^*) = 0 \\ K_2^x(z_1^*, z_2) = 0 \end{cases} \right\}. \quad (5.99)$$

Ξ_2^x будем называть многообразием нулевой корреляции 2-го порядка случайного полинома $x(z)$.

Многообразие нулевой корреляции характеризует множество точек в C^2 на котором любые два значения случайного полинома некоррелированы.

Если возможно выбрать m различных комплексных чисел $\{c_0, \dots, c_{m-1}\}$ так, что любая пара, составленная из этих чисел, $\in \Xi_2^x$, то можно определить линейное проективное отображение вектора $x \in R^n$ в вектор $y \in C^m$ вида

$$y = V_n^m(c_0, \dots, c_{m-1}) x, \quad (5.100)$$

где $V_n^m(c_0, \dots, c_{m-1})$ — $n \times m$ матрица Вандермонда.

Данное отображение обеспечивает попарную некоррелированность компонент вектора y .

Очевидно, что если распределение коэффициентов случайного полинома — гауссово, то значения полинома на Ξ_2^x не только попарно некоррелированы, но и независимы, а отображение (5.100) является отображением независимости вектора x .

Пусть $x \in R^n$ — случайный вектор, описываемый плотностью вероятности $f_x(x_1, \dots, x_n)$ в R^n . Пусть $x(z) \in$ кольцу $C[z]$ — случайный полином степени $n-1$, заданный случайным вектором $x \in R^n$. Для каждого $K_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^x(z_1, z_2, \dots, z_r)$ можно определить множество точек в пространстве C^r , на котором значение полиномиального кумулянта имеет заданное значение $t \in C$:

$$\Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^x(t) = \{z \in C^r : K_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^x(z_1, z_2, \dots, z_r) = t\}. \quad (5.101)$$

В частном случае можем определить все возможные значения $z_1 \neq z_2$ для которых $x(z_1)$ и $x(z_2)$ имеют заданное значение 1-й корреляционной функции, решив полиномиальное уравнение вида:

$$\Xi_{1,0,0,1}^x(t) = \{z \in C^r : K_{1,0,0,1}^x(z_1, z_2) = t, t \in C\}. \quad (5.102)$$

Заданное таким образом для каждого t аффинное многообразие $\Xi_{1,0,0,1}^x(t)$ в C^2 будем называть многообразием заданной корреляции случайного полинома $x(z)$ первого порядка.

Очевидно, что многообразие нулевой корреляции 2-го порядка случайного полинома $x(z)$ можно получить пересечением многообразий заданной корреляции, соответствующих 1-й и 2-й ковариационной функции в виде:

$$\Xi_2^x = \Xi_{1,0,0,1}^x(0) \cap \Xi_{1,1,0,0}^x(0).$$

Для m различных комплексных чисел $\{c_0, \dots, c_{m-1}\}$, выбранных так, что любая пара, составленная из этих чисел, $\in \Xi_{1,0,0,1}^x(t)$, определим линейное отображение вектора $x \in R^n$ в вектор $y \in C^m$ вида (5.100).

ПРИМЕР. Пусть $x(z) \in$ кольцу $C[z]$ — случайный полином степени $n-1$, заданный случайным гауссовым вектором с нулевым математическим ожиданием, независимыми компонентами и дисперсией компонент σ^2 , тогда многообразие заданной корреляции значений случайного полинома имеет вид

$$\Xi_{1,0,0,1}^x(t) = \{z = (z_1, z_2) \in C^2 : z_1 z_2 = \alpha_i(t), i = 1, \dots, n-1\}, \quad (5.103)$$

где $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ — корни полинома $P(x)$,

$$P(x) = (1 - t/\sigma^2) + x + x^2 + \dots + x^{n-1}. \quad (5.104)$$

Пусть $x_1(z)$, $x_2(z)$ — независимые случайные полиномы и $\Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_1}(t_1)$, $\Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_2}(t_2)$ — соответствующие им многообразия заданной корреляции.

Тогда многообразия нулевой корреляции, возникающие как результаты суммы и произведения соответствующих полиномов, описываются следующими выражениями:

$$\Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_1 x_2}(0) = \Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_1}(0) \cup \Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_2}(0), \quad (5.105)$$

$$\Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_1 + x_2}(0) = \Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_1}(t) \cap \Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_2}(-t). \quad (5.106)$$

Пусть $x_1(z), x_2(z), \dots, x_n(z)$ — набор независимых случайных полиномов и $\Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_1}(t_1), \dots, \Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_n}(t_n)$ — соответствующие им многообразия заданной корреляции, тогда:

$$\Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_1 \dots x_n}(0) = \bigcup_{i=1}^n \Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_i}(0), \quad (5.107)$$

$$\Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_1 \dots x_n}(t_1 t_2 \dots t_n) = \bigcap_{i=1}^n \Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_i}(t_i), \quad (5.108)$$

$$\Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_1 + x_2 + \dots + x_n}(t_1 + t_2 + \dots + t_n) = \bigcap_{i=1}^n \Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{x_i}(t_i). \quad (5.109)$$

В заключение сформулируем важное для дальнейших приложений свойство аффинных многообразий.

Многообразие $\Xi \subset C^r$ называется неприводимым, если оно может быть представлено в виде $\Xi = \Xi_1 \cup \Xi_2$, где Ξ_1 и Ξ_2 — аффинные многообразия, в том и только том случае, когда или $\Xi_1 = \Xi$, или $\Xi_2 = \Xi$.

Если $\Xi \subset C^r$ — аффинное многообразие, тогда существует единственное разложение вида

$$\Xi = \bigcup_{i=1}^n \Xi_i, \quad (5.110)$$

где каждое Ξ_i — неприводимое многообразие и $\Xi_i \not\subset \Xi_j$, $i \neq j$.

Таким образом, любое аффинное многообразие может быть получено конечным объединением неприводимых многообразий или разложено в такое объединение. Данный факт является следствием теоремы Гильберта о конечной порожденности идеала [55].

Рассмотрим некоторые примеры приводимых и неприводимых многообразий, порожденных полиномиальными кумулянтами.

ПРИМЕР. Пусть $x(z) \in$ кольцу $C[z]$ — случайный полином степени $n-1$, заданный случайным вектором с нулевым математическим ожиданием и независимыми компонентами. Тогда многообразие нулевой корреляции случайного полинома может быть факторизовано в объединение

$n - 1$ неприводимых многообразий

$$\Xi_{1,0,0,1}^x(0) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \Xi_i, \quad (5.111)$$

где $\Xi_i = \{z = (z_1, z_2) \in C^2 : z_1 z_2 = \alpha_i\}$ и $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ — корни полинома $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$.

Интересно, что часто многообразия, порожденные случайными полиномами с зависимыми коэффициентами, оказываются неприводимыми.

ПРИМЕР. Пусть $x(z) \in$ кольцу $C[z]$ — случайный полином первой степени, ковариация коэффициентов которого $r_{01} \neq 0$. Тогда $K_{1,1,0,0}^x(z_1, z_2) = r_{00} + r_{11}z_1z_2 + r_{01}(z_1 + z_2)$. Этот многочлен является приводимым, только если $r_{00}r_{11} - r_{01}^2 = 0$. Что невозможно в силу свойств ковариации двух статистически связанных случайных величин, т.к. $r_{00}r_{11} > r_{01}^2$. Таким образом, в данном примере $\Xi_{1,1,0,0}^x(0)$ — неприводимо.

В рассмотренных примерах неявно использовалась связь между неприводимыми многообразиями и простыми идеалами кольца полиномов. Для случая, когда многообразие порождается одним полиномом, его неприводимость эквивалентна просто неприводимости порождающего полинома.

Если многообразие порождено набором полиномов, то его неприводимость связана с простотой соответствующего идеала (см. [55]).

5.4.2. Слепая идентификация канала, как решение системы полиномиальных уравнений. Уравнение, связывающее полиномиальные кумулянты на входе и выходе идентифицируемой системы с пассивной паузой (рис. 5.2, б), можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} K_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^y(z_1, z_2, \dots, z_r) = \\ = h(z_1)^{k_1} \dots h(z_r)^{k_r} h^*(z_1)^{m_1} \dots h^*(z_r)^{m_r} K_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^x(z_1, z_2, \dots, z_r) + \\ + K_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^y(z_1, z_2, \dots, z_r). \end{aligned} \quad (5.112)$$

В некоторых приложениях СОС, например, для систем связи, статистика передаваемого сообщения и аддитивного шума часто известна получателю. В этом случае, если имеется точная оценка полиномиального кумулянта $K_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^y(z_1, z_2, \dots, z_r)$, то алгоритм идентификации сводится к элементарным операциям в кольце $C[z_1, \dots, z_r]$.

Конечно, нам доступны только выборочные статистики, и в этом случае операция деления не всегда возможна, но кроме этого, для системы общего вида (рис. 5.2, а, г) полиномиальный момент выходного сигнала нельзя записать в виде линейных комбинаций полиномов в кольце $C[z_1, \dots, z_r]$ вида (5.112).

Понятие идеала является некоторым обобщением понятия подпространства. Идеалом кольца полиномов $C[z_1, \dots, z_r]$ называется такое подмножество его элементов $I \subset C[z_1, \dots, z_r]$, для которого выполняются следующие условия:

1. $0 \in I$;
2. если $f, g \in I$, то $f + g \in I$;
3. если $f \in I$ и $g \in C[z_1, \dots, z_r]$, то $fg \in I$.

Данное определение эквивалентно следующему утверждению.

Идеалом I называется подмножество кольца $C[z_1, \dots, z_r]$, определяемое в виде

$$I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^s g_i f_i, \quad g_1, \dots, g_s \in C[z_1, \dots, z_r] \right\}, \quad (5.117)$$

где полиномы $f_1, \dots, f_s$ называются базисом идеала.

Каждому аффинному многообразию в C^r соответствует некоторое подмножество полиномов в $C[z_1, \dots, z_r]$, обращающихся в ноль на этом многообразии. Причем подмножество всех таких полиномов является идеалом этого кольца [55].

При решении системы (5.115) возможны два случая:

1) число решений конечно и не превосходит r^L , т.е. многообразие (5.115) состоит из конечного множества точек в пространстве C^L , или другими словами нульмерно;

2) число решений бесконечно, т.е. многообразие (5.115) является кривой, поверхностью или гиперповерхностью в C^L , т.е. размерность его > 0 .

Этот факт хорошо известен в алгебраической геометрии как теорема Безу [54]. Идентифицируемость системы в данном случае тесно связана с вопросом о размерности многообразия Ξ^f . Для алгебраически замкнутого поля (в нашем случае это так) размерность многообразия определяется аффинной функцией Гильберта идеала $I(\Xi^f)$ [55].

Определение размерности аффинного многообразия в общем случае — довольно сложная задача. Однако в большинстве случаев интуитивное представление о размерности геометрического объекта совпадает со строгим определением. Здесь размерность точки — 0, кривой — 1, поверхности — 2 и т.п.

В нашей задаче, при выполнении условий теорем 5.7 и 5.8 статистической идентифицируемости канала, при соответствующем выборе Ω_r многообразия типа (5.115) обычно нульмерны и имеют конечное множество решений.

Задача решения систем полиномиальных уравнений — это область современной математики, тесно связанная с алгебраической геометрией и коммутативной алгеброй, причем некоторые существенные результаты в этой области получены относительно недавно, что стимулировало работы по получению новых методов решения задач в приложениях. Примером этому являются результаты данной главы.

Для решения полиномиальных систем небольшой размерности используются методы, основанные на теории результатов. Простые примеры

решения полиномиальных систем можно найти в [60], общую теорию результатов в [55, 61]. Использование данных методов для систем общего вида ограничено их громоздкостью.

В соответствии с теоремой Гильберта “О конечной порожденности идеала” любой идеал кольца $\mathbb{C}[h_0, \dots, h_{L-1}]$ имеет конечное число порождающих полиномов, составляющих базис идеала.

Поэтому одним из возможных путей решения (5.115) является выбор более подходящих для решения системы базисных полиномов идеала $I(\Xi^f)$ (здесь $I(\Xi^f)$ — множество всех полиномов кольца $\mathbb{C}[h_0, \dots, h_{L-1}]$, нули которых $\in \Xi^f$).

Для каждого идеала кольца $\mathbb{C}[h_0, \dots, h_{L-1}]$ можно определить бесконечное множество базисов, но существует единственный базис, обладающий рядом замечательных свойств. Это редуцированный базис Грёбнера. Одно из свойств состоит в том, что этот базис часто содержит последовательно исключенные переменные кольца $\mathbb{C}[h_0, \dots, h_{L-1}]$. Это позволяет легко найти решение задачи слепой идентификации в виде (5.115). Известен также алгоритм нахождения такого базиса — алгоритм Бухбергера [55, 62].

Данный подход сводится к методу Гаусса при решении систем линейных уравнений. К сожалению, метод крайне сложен с вычислительной точки зрения и не адаптирован к ошибкам задания коэффициентов. Более приемлемый вариант этого алгоритма описан в [6].

Другой путь основан на теореме Штеттера (или Айзингера–Штеттера [63]). Если Ξ^f нульмерно, то факторкольцо $\mathbb{C}[h_0, \dots, h_{L-1}]/I$ как векторное пространство изоморфно конечномерному векторному пространству T^s .

Факторкольцом $\mathbb{C}[h_0, \dots, h_{L-1}]/I$ по идеалу I называется множество классов эквивалентности по отношению к сравнимости по модулю I , т. е.:

$$\mathbb{C}[h_0, \dots, h_{L-1}]/I = \{[f] : f \in \mathbb{C}[h_0, \dots, h_{L-1}]\},$$

где $[f] = \{g \in \mathbb{C}[h_0, \dots, h_{L-1}] : g \equiv f \pmod{I}\}$.

Этот факт позволяет решать систему полиномиальных уравнений методами линейной алгебры. Традиционный путь решения системы (5.115) — это сведение ее к задаче поиска собственных чисел и векторов линейных операторов специального вида, определенных на конечномерном векторном пространстве, соответствующем факторкольцу $\mathbb{C}[h_0, \dots, h_{L-1}]/I$ [55].

Пространство T^s образовано линейным многообразием всех мономов $\{1, t_2, t_3, \dots, t_s\}$, принадлежащих дополнению мономиального идеала $\langle LT(I) \rangle$ (идеал, порожденный старшими мономами полиномов из I) [55].

Этот факт позволяет свести задачу (5.115) к задаче поиска собственных значений линейных операторов специального вида, определенных на T^s .

Теорема Штеттера, полученная относительно недавно, является обобщением известного подхода к вычислению корней полинома от одной переменной через собственные числа матрицы Фробениуса.

Пусть M_g — матрица линейного оператора, отображающая $T^s \rightarrow T^s$ так, что для любого полинома $g \in T^s$ найдется $(s \times s)$ матрица M_g с элементами $\{m_{i,j}\}$, $i, j = 0, \dots, s-1$ такими, что

$$gt_j - \sum_{i=0}^{s-1} m_{ij}t_i = f_j \in I. \quad (5.118)$$

При этом, если $\lambda_j, j = 0, \dots, s-1$ — собственные числа матрицы M_g и $\alpha^{(j)} = (\alpha_0, \dots, \alpha_{L-1})$ — одно из $(r)^L$ решений системы уравнений (5.115), то собственное пространство, соответствующее ненулевому собственному числу λ_j , может быть построено с помощью собственного вектора $(1, t_2(\alpha^{(j)}), \dots, t_s(\alpha^{(j)}))$.

Таким образом, найдя все различные ненулевые собственные числа матрицы M_g и соответствующие им собственные векторы, получим все решения системы полиномиальных уравнений (5.115).

Недостатком данного метода является неопределенность выбора полинома $g \in T^s$ и неустойчивость решения при возмущении коэффициентов системы уравнений (5.115). Для преодоления последнего недостатка воспользуемся методом регуляризации.

Таким образом, используя полиномиальные статистики, сводим решение задачи слепой идентификации к задаче решения систем полиномиальных уравнений от многих переменных [57].

Данный подход является обобщением подхода, основанного на использовании полиспектров. Соответственно, предложенному методу присущи и некоторые общие недостатки методов, использующих моментные и кумулянтные функции. Это, прежде всего, медленная сходимость получаемых оценок. Однако, в рамках используемого подхода имеется возможность дополнительной оптимизации параметров алгоритма.

Описанные в данном разделе методы слепой идентификации предложены в [57, 58].

Вместе с тем необходимо отметить, что аналитическое решение задачи слепой идентификации с помощью методов решения систем полиномиальных уравнений от многих переменных, полученных по обычным ковариационным матрицам, в частном случае слепой идентификации систем связи с квадратурной амплитудной модуляцией было предложено в [64, 65].

В отличие от этих работ, развитый в данном разделе подход не ограничен конечным алфавитом и специальным видом ковариационных матриц, поскольку основан на полиномиальных статистиках общего вида.

5.4.3. Идентификация канала, основанная на факторизации аффинных многообразий. Рассмотрим алгоритм статистической слепой идентификации скалярного канала, описываемого моделью системы с пассивной паузой (см. рис. 5.2, б).

В этом случае полагаем, что входная последовательность имеет конечную длину и доступно некоторое множество реализаций, число которых достаточно для статистической идентификации.

Тогда (5.84) можно записать в виде произведения полиномов положительной степени над полем комплексных чисел $C[z]$:

$$y(z) = h(z)x(z) + v(z), \quad (5.119)$$

Уравнение, связывающее полиномиальные кумулянты на входе и выходе идентифицируемой системы с пассивной паузой (5.112), записано ранее.

При построении алгоритма идентификации использовано предположение предыдущего раздела о том, что полиномиальный кумулянт информационного сигнала $K_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^x(z_1, z_2, \dots, z_r)$ известен.

Однако часто о статистике информационной последовательности имеются лишь весьма общие предположения (нестационарность, негауссовость, независимость отсчетов информационной последовательности) или вообще подобная информация отсутствует.

Покажем, что в этом случае для слепой идентификации можно использовать структуру многообразий нулевой корреляции многообразий наблюдаемого сигнала.

Полагаем, что статистика шума известна, поэтому выражение для многообразия нулевой корреляции принятого сигнала, в соответствии с (5.107), можно записать в виде

$$\Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{y-v}(0) = \Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^h(0) \cup \Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^x(0), \quad (5.120)$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^h(0) = \\ = \left\{ z \in C^r : (h(z_1))^{k_1} \dots (h(z_r))^{k_r} (h^*(z_1))^{m_1} \dots (h^*(z_r))^{m_r} = 0 \right\}, \end{aligned} \quad (5.121)$$

$$\Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^{y-v}(0) = \left\{ z \in C^r : \hat{K}_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^y(z_1, z_2, \dots, z_r) - \right. \\ \left. - K_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^v(z_1, z_2, \dots, z_r) = 0 \right\}. \quad (5.122)$$

Поскольку полином от одной переменной в поле комплексных чисел всегда имеет полный набор корней, то, очевидно, что многообразие $\Xi_{k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_r}^h(0)$ нульмерно и состоит из конечного числа точек, соответствующих нулям полинома канала. Причем это многообразие может быть факторизовано в объединение не более $(L-1)^{2r}$ простейших многообразий, описывающих точки в C^r .

С другой стороны, многообразие нулевой корреляции, порождаемое информационной последовательностью, также может быть факторизовано в объединение неприводимых многообразий или остается неприводимым.

Таким образом, свойство неприводимости многообразия не может являться определяющим фактором разделения параметров канала и информационной последовательности.

Однако фактором разделения может стать размерность многообразия. Например, если многообразие, порожденное полиномом канала нульмерно, а многообразие нулевой корреляции информационного сигнала имеет размерность ≥ 1 , то нули канала и информационной последовательности могут быть отделены некоторой процедурой селекции многообразий по их размерности [56, 58].

Рассмотрим в качестве примера случай идентификации по полиномиальным статистикам второго порядка, в частном случае независимых, одинаково распределенных отсчетов информационной последовательности в отсутствии шума.

Тогда факторизация многообразий нулевой корреляции наблюдаемого сигнала в C^2 имеет вид

$$\Xi_{1,0,0,1}^y(0) = \Xi_{1,0,0,1}^h(0) \cup \Xi_{1,0,0,1}^x(0). \quad (5.123)$$

В соответствии с (5.111) многообразие $\Xi_{1,0,0,1}^x(0)$ является пучком кривых в C^2 и имеет размерность 1. Как уже отмечалось выше, $\Xi_{1,0,0,1}^h(0)$ нульмерно.

Анализируя разложение (5.123) с учетом размерности простейших многообразий, можно разделить априори неизвестные многообразия канала и информационной последовательности, выбирая различные сечения $\Xi_{1,0,0,1}^y(0)$.

Пусть

$$\mathbf{W}(c) = \text{roots} \left(K_{1,0,0,1}^y y - N(z, c) \right), \quad (5.124)$$

где $\mathbf{W}(c)$ — вектор комплексных корней полинома одной переменной z ; c — константа, определяющая сечение аффинного многообразия; $\text{roots}()$ — алгоритм вычисления корней полинома одной переменной с учетом их кратностей.

Принцип разделения корней неизвестного канала и корней, индуцированных информационной последовательностью, заключается в следующем: изменение значения c приводит к перемещению корней, связанных с информационной последовательностью по многообразию $\Xi_{1,0,0,1}^x(0)$, в то время как корни, индуцированные неизвестным каналом, остаются на месте, что и позволяет осуществить их однозначное разделение.

В сравнении с алгоритмами предыдущего раздела, а также алгоритмами, основанными на использовании спектров высокого порядка, данный алгоритм требует примерно на два порядка меньше числа реализаций, но обладает более низкой помехоустойчивостью. Кроме того, погрешность алгоритма существенно возрастает при увеличении длины канала.

5.4.4. Идентификация канала, основанная на использовании многообразий ненулевой корреляции. Алгоритм, более приспособленный для идентификации импульсной характеристики каналов большой длины, может быть построен, на основе свойств многообразий ненулевой корреляции.

Если имеется априорная информация о статистике входного сигнала, то для построения алгоритма слепой идентификации в рамках модели (5.119) можно использовать структуру многообразия заданной корреляции случайного полинома.

Рассмотрим случай, когда точки выбраны на различных многообразиях заданных корреляций второго порядка так, что парные корреляции компонент не равны нулю.

Пусть координатами являются $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ корни полинома $P(x)$. Если $t \neq 0$, то любая парная комбинация этих корней $\notin \Xi_{1,0,0,1}^x(0)$. Это означает, что значение смешанного кумулянта значений случайного полинома на выходе канала имеет вид

$$r_{i,j} = K_{1,0,0,1}^y(\alpha_i, \alpha_j) = h(\alpha_i) h^*(\alpha_j) t_{i,j}, \quad (5.125)$$

где $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, n-1$, $t_{i,j} \neq 0$.

Таким образом, можно построить обратимое линейное отображение вектора $\mathbf{x} \in C^n$ в вектор $\mathbf{y} \in C^n$ типа (5.100), первая ковариационная матрица которого имеет ненулевые недиагональные компоненты.

Алгоритм оценки канала может быть получен как алгоритм нахождения собственного вектора, соответствующего максимальному собственному числу матрицы $\mathbf{R} = (r_{i,j}/t_{i,j})$, т. е.

$$\begin{pmatrix} h(\alpha_1) \\ \vdots \\ h(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix} = \arg \left(\max_{\mathbf{x}^* \mathbf{x} = 1} (\mathbf{x}^* \mathbf{R} \mathbf{x}) \right) \quad (5.126)$$

Если $\mathbf{R}$ — истинная матрица ковариации, то максимальное собственное число $\lambda_{\max}$ матрицы $\mathbf{R}$ будет равно 1. Если в качестве $\mathbf{R}$ используется выборочная матрица ковариации, оцениваемая на фоне аддитивного шума, то $\lambda_{\max} < 1$ и оценка (5.126) является оптимальной по критерию минимума среднеквадратического отклонения.

В данном алгоритме нет ограничения на отсутствие нулей кумулянтного спектра информационной последовательности, поскольку используем вместо преобразования Фурье обратимое линейное отображение ненулевой парной корреляции.

Если $n-1 > L$, то матрица $\mathbf{V}_L^{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ имеет ранг L , и оценка канала получается псевдоинверсией матрицы $\mathbf{V}_L^{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$.

Сформулируем основные этапы алгоритма.

1. Для каждой из M реализаций наблюдаемого сигнала выполняют преобразование ненулевой парной корреляции

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{V}_{n-1}^{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \cdot \mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-2} \end{pmatrix}_k. \quad (5.127)$$

2. По полученным векторам приводят оценку выборочной ковариационной матрицы:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathbf{s}_k \cdot \mathbf{s}_k^*. \quad (5.128)$$

3. Вычисляют собственный вектор, соответствующий максимальному собственному числу матрицы $\hat{\mathbf{R}}$.

4. Оценку импульсной характеристики канала вычисляют по следующей формуле:

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_{L-1} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{V}_L^{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \right)^\# \begin{pmatrix} h(\alpha_1) \\ \vdots \\ h(\alpha_{n-1}) \end{pmatrix}. \quad (5.129)$$

В отличие от алгоритма слепой идентификации, основанного на факторизации аффинных многообразий, данный алгоритм имеет достаточно высокую скорость сходимости, обеспечивая оценки высокого качества уже при отношении сигнал–шум 15–20 дБ.

Однако при построении преобразования ненулевой парной корреляции нам необходимо знание ковариационной матрицы информационной последовательности.

5.5. Слепая идентификация в системах связи

Рассмотрим возможности и особенности слепой оценки канала в цифровых системах связи.

Модель цифровой системы связи может быть описана выражениями (5.7)–(5.11). В зависимости от свойств физического канала связи модель системы описывается различными выражениями.

В некоторых физических каналах, таких как проводные телефонные каналы, имеется ограничение на ширину полосы за счет использования специальных фильтров. Такие каналы обычно характеризуются как линейные фильтровые (полосовые) каналы с аддитивным шумом и описываются выражениями (5.9), (5.10).

Такие физические каналы, как ионосферные радиоканалы, тропосферные каналы в условиях сложного рельефа местности или городской застройки, каналы подвижной связи, радиоканалы внутри помещения, подводные акустические каналы, которые возникают в условиях меняющегося во времени многолучевого распространения передаваемого сигнала, могут быть описаны выражениями (5.7), (5.8). Такие каналы характеризуются меняющейся во времени (нестационарной) импульсной характеристикой.

Часто в качестве модели ионосферных каналов и каналов подвижной сотовой радиосвязи используется частный случай модели (5.8), когда переменная во времени импульсная характеристика канала имеет вид [11]

$$h(t, \tau) = \sum_{k=1}^M c_k(t) \delta(\tau - \tau_k), \quad (5.130)$$

где $\{c_k(t)\}$ определяет возможные меняющиеся во времени комплексные коэффициенты затухания для M путей распространения, $\{\tau_k\}$ — соответствующие им времена задержки.

Импульсная характеристика $h(t, \tau)$ может быть описана в рамках модели комплексного гауссовского случайного процесса по переменной t .

Модель канала (5.8) приводит к амплитудным изменениям принимаемого сигнала, называемым замираниями. Статистическая модель данного явления описывается общей гауссовской моделью, согласно которой квадратурные компоненты в каждом луче являются комплексными гауссовскими случайными процессами [14]. Одномерное распределение амплитуды в этом случае называют четырехпараметрическим, поскольку оно зависит от четырех параметров: двух математических ожиданий и двух дисперсий квадратурных компонент.

Когда $h(t, \tau)$ — комплексный случайный гауссовский процесс с нулевым средним, огибающая $|h(t, \tau)|$ в любой момент t распределена по Рэлею. В этом случае канал называют каналом с рэлеевскими замираниями.

В случае, когда имеется нефлуктуирующая (регулярная) составляющая, огибающая $|h(t, \tau)|$ имеет райсовское распределение, и канал называют каналом с райсовскими замираниями. Модели Райса, Рэлея, Накагами являются частными случаями 4-параметрического распределения [14].

Для большинства каналов с рассеянием справедливо предположение, что процесс $h(t, \tau)$ по переменной t стационарен в широком смысле, а коэффициенты рассеяния при двух различных задержках некоррелированы. Тогда мы можем записать корреляционную функцию процесса $h(t, \tau)$ в виде

$$B_h(\tau, \Delta t) = \mathbf{M} \{h(t + \Delta t, \tau)h^*(t, \tau')\}. \quad (5.131)$$

Если $\Delta t = 0$, корреляционная функция $B_h(\tau, 0)$ — это средняя мощность на выходе канала как функция от задержки во времени τ .

Изменения во времени импульсной характеристики канала свидетельствуют о доплеровском рассеянии в канале. Для описания связи эффекта Доплера и изменений канала во времени используют функцию рассеяния канала, определяемую следующим выражением:

$$F_h(\tau, \Delta f) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_h(\tau, \Delta t) e^{-j2\pi\Delta f\Delta t} d\Delta t. \quad (5.132)$$

Функция $F_h(\tau, \Delta f)$ определяет меру средней мощности на выходе канала, как функцию времени задержки τ и доплеровского смещения частоты Δf .

Суммируя мощность сигнала по всем лучам (задержкам), получим доплеровский спектр мощности многолучевого канала в виде

$$S_h(\Delta f) = \int_0^{+\infty} F_h(\tau, \Delta f) d\tau. \quad (5.133)$$

Распределение средней мощности канала по величине задержки соответственно:

$$Q_h(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_h(\tau, \Delta f) d\Delta f = B_h(\tau, 0). \quad (5.134)$$

Полосу частот, в которой $S_h(\Delta f)$ отличен от нуля, называют доплеровским рассеянием в канале F_d . Обратная F_d величина Δt_k является мерой временной когерентности канала, причем

$$\Delta t_k \approx \frac{1}{F_d}. \quad (5.135)$$

Данный параметр фактически характеризует возможности использования модели стационарного канала и, соответственно, число реализаций в задачах статистической слепой идентификации.

Для описания каналов подвижной связи с рэлеевскими замираниями широко используется хорошо согласующаяся с экспериментальными данными модель, предложенная в [66]. В соответствии с данным подходом реализации $h(t, \tau)$ могут быть получены в виде

$$h(t, \tau) = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \exp(j(2\pi\Delta f_k t + \theta_k)) g(\tau - \tau_k), \quad (5.136)$$

где $g(\tau)$ — сигнал на выходе согласованного с сигналом $s_0(t)$ фильтра (см. формулу (5.8)); τ_k — задержка, θ_k — начальная фаза и Δf_k — доплеровское смещение k -го луча.

Задержки и доплеровские сдвиги в рамках данной модели генерируются как реализации непрерывных случайных величин, имеющих функции плотности вероятностей, пропорциональные функции рассеяния канала [66], $F_h(\tau, \Delta f) \approx p(\tau, \Delta f) = p(\tau)p(\Delta f)$, где

$$p(\tau) = a \exp(-\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_{\max}, \quad (5.137)$$

$$p(\Delta f) = \frac{b}{\sqrt{1 - (\Delta f / \Delta f_{\max})^2}}, \quad |\Delta f| < \Delta f_{\max}, \quad (5.138)$$

где a, b — нормирующие константы.

Начальная фаза имеет равномерное распределение на интервале $(-\pi, \pi)$.

В качестве примера на рис. 5.6 показаны реализации импульсных характеристик канала мобильной связи по стандарту GSM. Временное рассеяние соответствует случаю центра города с высокой степенью застройки в соответствии с моделью распространения COST-207. Длина канала в этом случае $L \approx 6$, тактовый интервал $T = 3,7$ мкс, несущая частота — 950 МГц. В данном случае мы имеем случай рэлеевских замираний, т. к. регулярная составляющая (прямой сигнал базовой станции) отсутствует.

Длина интервала когерентности при $V = 12$ км/ч составляет 2702 тактов, при $V = 60$ км/ч — 5405 тактов, при $V = 120$ км/ч — 2702 тактов.

Однако, если оценивать интервал постоянства (стационарности) импульсной характеристики канала по уровню относительной погрешности $\gamma \leq 0,1$, то соответствующие интервалы составляют 2000, 400 и 200 соответственно.

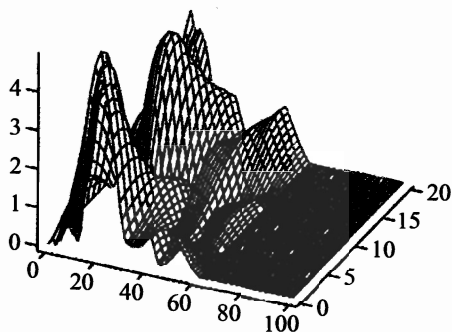


Рис. 5.6. Модуль импульсной характеристики канала системы GSM при скорости относительного перемещения мобильного телефона относительно базовой станции 120 км/ч. Масштаб по оси τ (на графике 0–100) — $0,1T$, по оси t (на графике 0–20) — $150T$

Таким образом, использование слепой идентификации в системах мобильной связи GSM-900 означает фактически возможность оценки канала по одному информационному блоку, содержащему 142 информационных разряда и 6 “тихих” битов. Использование методов статистической идентификации в данных условиях может быть ограничено их низкой скоростью сходимости. Однако методы слепой идентификации, основанные на векторной модели канала, могут оказаться весьма эффективными.

В системах цифровой транкинговой связи, использующих TDMA (например, наземная транкинговая связь по стандарту EDACS ProtoCALL, TETRA), системах удаленного радиодоступа, локальных офисных радиосетях каналы характеризуются весьма медленными замираниями (например, в соответствии со стандартом транкинговой связи IEEE 802.16 $\Delta f_{\max} \leq 1$ Гц) и одновременно могут сопровождаться существенным временным рассеянием.

При этом создаются весьма благоприятные условия для использования алгоритмов статистической слепой идентификации канала для повышения эффективности данных систем.

Как было показано выше, критичным параметром для слепой идентификации каналов с быстрыми замираниями является скорость сходимости алгоритма слепой идентификации. Поэтому в первую очередь наше внимание должно быть уделено тем свойствам сигналов, которые позволяют использовать методы детерминированной слепой идентификации. Это прежде всего возможности использования векторной модели канала.

Рассмотрим более подробно механизм возникновения модели (5.11) в цифровых системах связи с линейной модуляцией.

В соответствии с (5.9) непрерывный информационный сигнал на входе канала имеет вид

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n s_0(t - nT). \quad (5.139)$$

Отметим, что при АМ последовательность $\{a_n\}$ вещественна и соответствует значениям амплитуд передаваемого сигнала, при ФМ, КАМ и комбинированной АМ-ФМ модуляциях последовательность $\{a_n\}$ комплексная.

Корреляционная функция случайного процесса $x(t)$ равна

$$\begin{aligned} B_x(t + \tau, t) &= \mathbf{M} \{x^*(t) x(t + \tau)\} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{n,m} s_0^*(t - nT) s_0(t + \tau - mT), \end{aligned} \quad (5.140)$$

где $b_{n,m} = \mathbf{M} \{a_n^* a_m\}$ — автокорреляционная последовательность информационных символов.

Если последовательность информационных символов $\{a_n\}$ стационарна с нулевым средним и автокорреляционной последовательностью $\{b_{m-n}\}$, тогда

$$B_x(t + \tau, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m g_0(t, t + \tau - mT), \quad (5.141)$$

$$g_0(t, t + \tau - mT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_0^*(t - nT) s_0(t - nT + \tau - mT),$$

где $g_0(t, t + \tau - mT)$ — периодическая функция по переменной t с периодом T .

Таким образом, $B_x(t + \tau, t)$ является периодической функцией по переменной t с периодом T . Случайный процесс такого типа называется циклостационарным процессом или периодически нестационарным процессом.

Рассмотрим отсчеты наблюдаемого сигнала $y(t)$, взятые через интервал T/m . Тогда в соответствии с (5.141) корреляционная функция этих отсчетов $r_y(n, k) = \mathbf{M} \{y(n) y^*(n - k)\}$ является периодической функцией по индексу n с некоторым периодом m .

Выше мы рассмотрели несколько алгоритмов детерминированной слепой идентификации векторного канала в предположении, что полиномы каналов не имеют общих нулей, и ограничении на линейную сложность информационной последовательности.

Возможности применения данных методов в том случае, когда векторный канал индуцирован избыточной дискретизацией, даны условиями теоремы 5.9.

При соблюдении условий этой теоремы можно использовать данный подход для слепой идентификации каналов связи характеризующихся быстрыми замираниями.

Главным достоинством подобного подхода является возможность оценки по стационарным входным последовательностям, т.е. по любому участку принятого информационного сигнала, без пауз и специальных видов дополнительной модуляции.

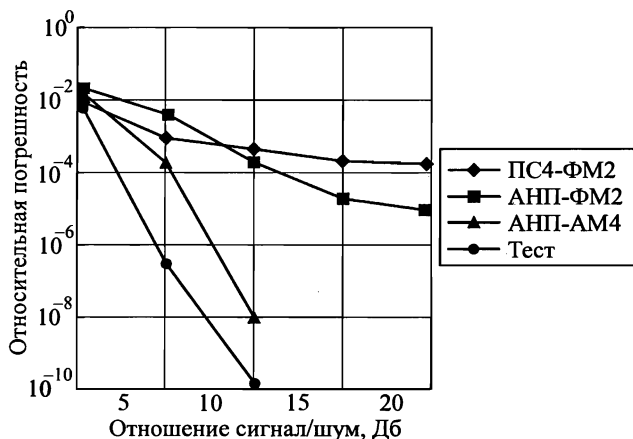


Рис. 5.7. Достоверность связи при использовании слепой оценки канала $L = 2$

Достоверность системы связи в зависимости от точности оценки импульсной характеристики канала и отношения сигнал–шум можно оценить по формуле, полученной в [100] для верхней границы вероятности ошибки демодуляции для больших отношений сигнал–шум:

$$p \leq \exp\left(-\frac{1}{\gamma^2}\right) \frac{(1 + h^2\gamma^2)}{4h^2\gamma^2}, \quad (5.142)$$

где h^2 — отношение сигнал–шум.

При этом для сравнения эффективности слепой оценки на рис. 5.7 построен график погрешности оценки по одному отсчету тестового сигнала.

Характерной особенностью данной оценки является крайне незначительное число отсчетов информационной последовательности, необходимых для получения заданной достоверности. Одновременно помехоустойчивость слепой оценки примерно на 10дБ хуже, чем оценки по тестовому сигналу.

В целом детерминированные алгоритмы слепой оценки, полученные в рамках векторной модели канала, могут быть использованы для повышения достоверности, например, систем мобильной связи не только как альтернативный подход в сравнении с оценкой по тестовому импульсу, но и как дополнительная оценка канала, полученная в промежутке между тестовыми посылками, в случае высокой скорости замираний.

Если полоса идентифицируемого канала ограничена полосой $1/T$, то условия теоремы 5.9 не выполняются, и мы не можем использовать свёрхдискретизацию для индуцирования векторного канала.

В этом случае для слепой оценки скалярного канала мы можем использовать алгоритмы статистической идентификации, основанные на нестационарности или негауссовости информационного сигнала.

Негауссовость информационных сигналов в системах связи — весьма соблазнительный ресурс для построения алгоритма слепой идентификации, не требующего нестационарной структуры информационного сигнала.

Поскольку в системах связи обычно имеют дело с симметричными распределениями информационных символов, то кумулянт 3-го порядка

равен нулю. Поэтому обычно используют кумулянты 4-го порядка (ПС4 на рис. 5.7).

Характерной особенностью данного алгоритма является более высокая помехоустойчивость в сравнении с алгоритмом взаимных отношений и слабая зависимость достоверности от уровня аддитивного шума.

Приемлемый уровень достоверности достигается при достаточно большом числе отсчетов (> 3000) наблюдаемого сигнала, используемых для оценки.

Применительно к стандарту GSM-900 это означает обработку 20-ти и более информационных блоков для получения одной оценки канала, что конечно недостаточно в случае быстрых замираний, но может быть приемлемым для стационарных пунктов связи.

Часто при разработке систем связи, использующих временное разделение каналов, помимо специальных тестовых сигналов, при организации структуры информационного кадра информационные блоки разделяются специальными “защитными” паузами для организации работы эквалайзера (“хвостовые биты”), выравнивания задержки в канале, вывода передатчика на заданный режим (“защитный” интервал) [12].

Наличие таких интервалов позволяет использовать алгоритмы статистической слепой идентификации для нестационарного, или точнее периодически-нестационарного, по входу канала вида рис. 5.1, б. Возможности слепой идентифицируемости системы по статистикам 2-го порядка для нестационарного входа обсуждались в [31]. Впервые на сохранение фазовой информации в системах связи с циклостационарным входом было указано в [28].

Если наличие пассивных пауз является естественной, или точнее вынужденной, нестационарной модуляцией информационных сигналов, то в принципе подобную нестационарную модуляцию можно осуществить непосредственно поверх информационного сигнала в соответствии с (5.12).

Подобный подход применительно к системам связи предложен в [29, 67], для радиолокационных приложений в [40, 68]. В отличие от подхода, основанного на сверхдискретизации, в данном случае отсутствуют ограничения, сформулированные в теореме 5.9. Поэтому нам не требуется наличия дополнительной полосы частот в канале. Кроме того, характеристики основанных на сверхдискретизации алгоритмов чувствительны к рассогласованию длины канала и вызывают увеличение в m раз длины канала. Таким образом, должно быть оценено большее количество параметров и, с точки зрения процедуры оценки, используются значительно большие объемы данных.

Условия идентифицируемости канала с периодически-нестационарным входным сигналом обсуждались в [6]. Для дискретного случая эти условия означают, что период нестационарной модулирующей последовательности должен быть больше длины канала L .

Рассмотрим некоторые соображения при выборе вида нестационарной модуляции. Выбор оптимального вида нестационарной модуляции зависит не только от инженерных соображений по ее реализации, конкретного

алгоритма идентификации, но и от характеристик алгоритма демодуляции. В общем виде сформулировать и решить подобную задачу трудно. Поэтому рассмотрим некоторые частные результаты в данной области.

Комплексная периодическая последовательность $g(k)$, $k = 0, \dots, N - 1$ должна быть выбрана так, чтобы последовательность $x(k)$ на входе канала стала существенно нестационарной и выполнялись некоторые дополнительные условия:

1) желательно, чтобы $|g(k)| > 0$, поскольку при этом отсутствуют потери в скорости передачи;

2) желательно, чтобы $|g(k)| = 1$ в случае использования частотной (или фазовой) модуляции сигналов.

Последнее условие важно также с точки зрения эффективности аппаратной реализации выходных каскадов усилителей системы связи.

Некоторым компромиссом в этом смысле среди вещественных последовательностей может быть последовательность типа:

$$g(k) = \begin{cases} A, & k = 0, \\ 1, & k \neq 0. \end{cases} \quad (5.143)$$

Вообще, имеется компромисс между идентифицируемостью канала (требование высокой степени нестационарности) и требованием постоянства огибающей входного сигнала.

Если входной сигнал вещественен (например при ФМ2 или амплитудно-импульсной модуляции), то для обеспечения постоянного модуля модулирующей последовательности можно использовать комплексные модулирующие последовательности с постоянным модулем. Для этого в алгоритмах слепой идентификации следует использовать только симметричные моменты.

В [69] предложена периодическая нестационарная модуляция с постоянным модулем при помощи двух комплексных экспонент вида $\exp(j\omega k)$, где ω периодически меняет свое значение с ω_1 на ω_2 в течение передачи 1-го информационного блока.

Для других случаев последовательностей с постоянным модулем, кажется, не имеется такой модулирующей последовательности, которая бы сохраняла одновременно и постоянную огибающую и индуцировала бы существенную нестационарность на входе канала. На рис. 5.8 показаны некоторые характеристики алгоритмов слепой идентификации по нестационарному входу в системах связи.

Выше мы обсуждали алгоритмы, используемые для статистической слепой идентификации в системах с финитными сигналами. Данный случай соответствует системам связи с пассивной паузой. Конечно, применение алгоритмов сопровождается потерями в скорости передачи, однако, рассматривая эти алгоритмы в качестве альтернативы использованию тестовых сигналов, мы должны учесть, что частично паузы вызваны инженерными соображениями, а использование тестового импульса требует временного интервала как минимум в 2 раза большей длины. Поэтому для анализа эффективности подобных подходов целесообразно рассматривать процентное соотношение паузы и длины информационного блока, а также

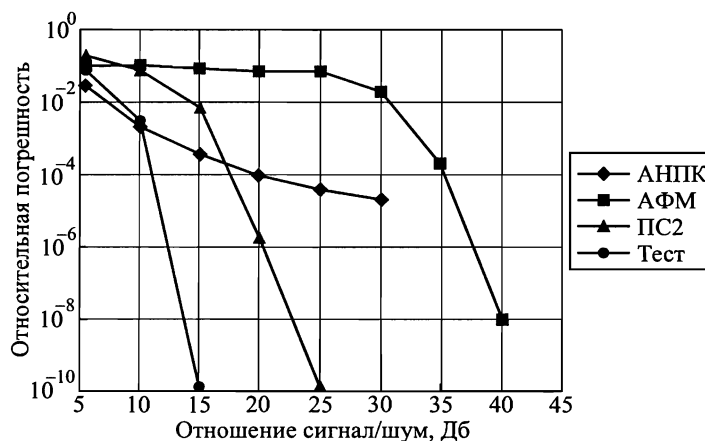


Рис. 5.8. Достоверность связи при использовании слепой оценки канала $L = 3$, модуляция ФМ2

суммарное число отсчетов, необходимое для достижения заданной достоверности. Например, для системы GSM-900 с испытательным импульсом соотношение длины блока к паузе — 25 %, а необходимое число отсчетов $148 + 8 = 156$.

Наибольшей скоростью сходимости обладают алгоритмы, основанные на факторизации аффинных многообразий нулевой корреляции (АФМ).

Несомненными достоинствами таких алгоритмов являются отсутствие требований к наличию априорной информации о статистике информационной последовательности, а также стремление погрешности оценки ИХ к нулю при фиксированной выборке. Отметим, что этот факт свойственен только алгоритмам детерминированной слепой идентификации (см. для сравнения рис. 5.7).

Алгоритмами, потенциально имеющими практическое значение в системах связи, являются алгоритмы, основанные на многообразиях ненулевой корреляции (АНПК). Для работы этих алгоритмов также необходима пассивная пауза, однако их возможности более предпочтительны, чем у алгоритмов, использующих факторизацию многообразий нулевой корреляции. В целом характеристики алгоритма слабо зависят от длины канала и длины информационного блока, что делает такой алгоритм потенциально привлекательным для использования в системах связи.

Данный алгоритм даже превосходит достоверность системы с испытательным импульсом для относительно малых отношений сигнал-шум (5–10 дБ), свойственных, кстати, большинству радиоканалов. При этом, как и для большинства алгоритмов статистической слепой идентификации, уровень достоверности слабо зависит от отношения сигнал-шум, поскольку определяется числом реализаций. Однако в отличие, например от алгоритма оценки по кумулянту 4-го порядка требуемое число отсчетов на порядок меньше. В частности на рис. 5.8 показан случай, когда слепая оценка АНПК выигрывает на 12 % (для системы GSM-900) по скорости передачи

перед тестовым импульсом при примерно той же допустимой скорости замираний в канале.

В целом можно сделать следующее заключение. СОС достаточно перспективная технология выравнивания канала в последовательных системах связи в каналах с рассеянием. Проведенный анализ показывает, что если рассматривать слепую оценку как альтернативу оценке по испытательному импульсу, то последняя практически всегда выигрывает по скорости сходимости и помехоустойчивости, однако слепая оценка практически всегда выигрывает по скорости передачи.

Для алгоритмов, использующих векторную модель канала, преобразования ненулевой корреляции, а также нестационарную модуляцию в ряде случаев выигрыш оценки по тестовому импульсу по достоверности может быть нивелирован или ликвидирован полностью.

Ответ на вопрос “использовать или нет слепую оценку канала?” требует от разработчика системы связи в каждом конкретном случае компромиссного решения.

5.6. Слепое восстановление изображений радиолокационных станций с синтезированной апертурой

В этом разделе рассматриваются вопросы формирования изображений в радиолокационных системах с синтезированной апертурой (РСА), существование слепой проблемы в данной задаче, возможности, специфика и значение технологий СОС для развития технологий радиолокационного наблюдения. На примере решения задачи формирования изображений РСА показан еще один класс алгоритмов слепой обработки сигналов: стохастические градиентные алгоритмы слепой коррекции канала. В отличие от рассмотренных выше методов слепой идентификации эти алгоритмы обеспечивают слепое восстановление информационного сигнала.

Первыми радиолокационными системами (РЛС), которые нашли применение в дистанционном зондировании, были авиационные радиолокаторы бокового обзора. Они использовались в военной авиации в основном для разведывательных целей и навигации.

Появление в 50-х годах авиационных радиолокаторов с синтезированной апертурой (РСА) явилось следствием борьбы за улучшение пространственного разрешения. Развитие когерентной техники и методов оптимальной обработки сигналов открыли новые возможности получения очень высокой разрешающей способности по азимуту.

При использовании метода синтезированной апертуры высокое разрешение достигается формированием искусственного раскрытия в результате поступательного движения летательного аппарата, несущего антенну, которая излучает зондирующие импульсы в направлении, перпендикулярном линии пути. Последовательные положения реальной антенны в пространстве, соответствующие каждому излученному импульсу, могут рассматриваться

как элементы некоторой синтезированной антенной решетки. При этом горизонтальный размер синтезированной антенны обратно пропорционален физическому размеру реальной антенны и может быть сделан очень большим. Соответственно, пространственное разрешение в РСА может быть сделано достаточно высоким независимо от высоты полета летательного аппарата, кроме этого, появляется возможность использования рабочей длины волны вплоть до нескольких метров без существенной потери пространственного разрешения. Эти обстоятельства обусловили огромные перспективы использования РСА на борту космических аппаратов.

В настоящее время космические РСА находят все большее применение в различных технологиях дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ), а в некоторых из них, например, в исследованиях динамических процессов в океане, РСА признается, как единственно возможный инструмент для получения достоверной информации.

РЛС бокового обзора — основное средство в дистанционном зондировании морских льдов, проводки судов во льдах. С помощью информации РЛС удастся не только картографировать ледовые поля, но и определять толщину льда, его происхождение, состояние; определить структуру трещин и динамику их развития. Особенно успешно с помощью радиолокационных данных решаются задачи определения характеристик приводного ветра (скорость, направление), а также прогноза энергии ураганов, контроля зон штормов и сильного волнения.

Совместно с датчиками инфракрасного (ИК) наблюдения, аппаратура РСА активно используется для определения зон наиболее эффективного рыболовства, обнаружения косяков некоторых типов промысловых рыб, прогнозирования рыбных запасов и определения квот вылова.

Особенно расширилась область применения РСА с появлением метода интерферометрической съемки. При интерферометрической обработке появляется возможность получения трехмерной пространственной информации о характеристиках радиолокационного рассеяния земной поверхности. Основным применением таких данных является топография с высоким разрешением, получение цифровых карт рельефа местности, их оперативного и постоянного обновления.

В ближайшем будущем прогнозируется преимущественное применение РЛС в таких областях, как: картографирование растительных покровов, определение их типа; отслеживание некоторых типов повреждений окружающей среды, например, в результате лесных пожаров; картографирование влажности почвы и растительности, заболоченности; контроль и управление движением морских и речных судов; обнаружение пленок нефти естественного и искусственного происхождения; контроль прорывов нефтепроводов и продуктопроводов (в настоящее время проводятся исследования о возможности глобального контроля масштабов утечки газа в газопроводах); картография и топография высокого разрешения; городское планирование и картография землепользования.

РСА космического и авиационного базирования эффективно используются для военных приложений. Это системы разведки, целеуказаний,

системы дистанционного обнаружения мин и т.п. Эффективность использования РСА связана с возможностью этих систем обеспечивать решение задачи независимо от погодных условий и времени суток, а также с высокой геометрической точностью.

Как правило, авиационные радиолокационные комплексы используют одновременно несколько несущих частот (многочастотные РСА) и поляризаций (поляриметрические РСА). Разнообразие частот и поляризаций имеет решающее значение для точной классификации покровов земли в тропических и арктических областях, измерении биомассы лесов, снежного покрова и влажности.

Применение длинноволновых диапазонов (длина волны более 70 см) обеспечивает возможность подповерхностного зондирования, поскольку РЛИ несет в себе информацию о распределении коэффициента отражения в толще земной поверхности, при этом глубина проникновения в VHF и UHF диапазонах может достигать нескольких сотен метров.

РСА космического базирования имеют ряд преимуществ перед авиационными радиолокационными системами наблюдения, это прежде всего:

- 1) возможность глобального обзора поверхности Земли (до 1000 км);
- 2) высокая оперативность и регулярность обновления информации (от нескольких часов до нескольких суток);
- 3) потенциально более низкая стоимость съемки одного квадратного километра поверхности.

Считается, что первым космическим радиолокатором для построения изображений поверхности Земли была аппаратура космического аппарата (КА) Seasat-A (США). Аппарат был запущен на околополярную орбиту высотой 800 км в июне 1978. Радиолокатор имел рабочую длину волны 23 см и горизонтально поляризованное излучение, угол визирования поверхности был фиксированным и составлял 20 градусов от надира. Ширина полосы захвата РСА Seasat-A, т.е. ширина участка местности, попадающей на изображение, была 100 км, а разрешение приблизительно 25 м. РСА был включен в состав полезной нагрузки КА прежде всего с целью съемки поверхности океана, однако в течение трехмесячной эксплуатации КА были также получены изображения обширных территорий северного полушария.

Изображения РСА Seasat использовались для определения спектра направлений океанских волн, поверхностных проявлений внутренних волн, движения полярных льдов, особенностей геологического строения земной коры, границ влажности почвы, характеристик вегетации, использования земли под городские застройки, и других задач, представляющих интерес.

Результаты эксплуатации РСА Seasat превзошли все ожидания и показали высокие информационные возможности РЛИ не только при наблюдении процессов в Мировом океане, но и для наблюдения природных объектов и явлений на суше, ледового и растительного покровов Земли, а также во многих других приложениях дистанционного зондирования. Это обстоятельство вызвало резкий рост интереса к подобным системам и послужило толчком к активизации исследовательских работ в области

практического применения радиолокационных данных, создания аппаратных средств космических РСА, методов обработки радиолокационной информации.

В последующие почти 25 лет после запуска КА Seasat было реализовано несколько проектов космических РСА — SIR-A/B (США), SIR-C/X-SAR (США, Германия, Италия), ERS-1/2, ENVISAT (Европейское сообщество), JERS (Япония), КА "Алмаз" (СССР), RADARSAT (Канада).

С середины 90-х гг., с запуском КА RADARSAT (Канада) в 1995 г. в развитии космических РСА обозначился следующий этап — переход к эксплуатационным системам, предназначенным для решения конкретных научных, хозяйственных и коммерческих задач. В состав датчиков дистанционного зондирования КА RADARSAT входит РСА С-диапазона с согласованной горизонтальной поляризацией излучения. Аппаратура имеет несколько режимов работы с различными характеристиками пространственного разрешения от 10 м до 100 м и полосы захвата от 35 км до 170 км. Основное назначение КА RADARSAT — наблюдение полярных областей планеты в целях получения метеорологической информации, обеспечения навигации в северных областях мирового океана, океанологических исследований и исследования полярных льдов.

Отдельно необходимо отметить программу SRTM (США), которая предусматривала проведение в 1999 г. масштабных экспериментов с многочастотным однопроходным РСА-интерферометром. Основная цель 11-суточного полета Space Shuttle/Endeavour по программе SRTM — сбор данных с целью последующего формирования цифровых топографических карт поверхности Земли в диапазоне от 56° ю.ш. до 60° с.ш. (приблизительно 80% территории суши). Абсолютная точность восстановленного рельефа составила 20 м в плане и 16 м по высоте для С-диапазона, 3–5 м для Х-диапазона.

Пространственное разрешение космических РСА, сегодня, как правило, не лучше 3 м, а рабочая длина волны находится в диапазоне от 3 см (Х-диапазон) до 25 см (L-диапазон). В последние годы обсуждаются проблемы реализации космических РСА дистанционного зондирования Земли, работающих в диапазонах частот, традиционно не используемых в космической радиолокации. Это РСА, работающие в верхней части сантиметрового диапазона и диапазона миллиметровых волн (Х, Ku, K), а также РСА, работающие в верхней части дециметрового диапазона и диапазона метровых волн (P, UHF, VHF). Необходимость размещения таких РСА на борту космического аппарата диктуется практическими нуждами.

Развитие радиолокационной картографии и геодезии, коммерческих приложений ДЗЗ требует увеличения пространственной разрешающей способности. Сегодня пространственное разрешение в Х диапазоне ограничено регламентом радиосвязи на уровне 1 м, в то же время современные технологии РСА могут обеспечить разрешение до единиц сантиметров при увеличении используемой полосы частот, что может быть достигнуто в высокочастотных диапазонах (Х, Ku, K). Использование диапазонов (P, UHF, VHF) особенно интересно, поскольку РЛИ

в этих диапазонах несет в себе информацию о распределении коэффициента отражения в толще земной поверхности, при этом глубина проникновения в VHF диапазоне может достигать нескольких сотен метров. Кроме того, использование низкочастотных диапазонов связано с высокой эффективностью применения РСА для картографирования растительных покровов. К сожалению, размещение этих систем в космосе сопровождается рядом сложных технических проблем. Известно, что увеличение пространственного разрешения по дальности в радиолокаторах с синтезированием апертуры обеспечивается расширением полосы частот зондирующего сигнала и, соответственно, полосы пропускания аппаратного тракта РСА. При этом в коротковолновой части диапазона частот у современных авиационных РСА абсолютный уровень разрешающей способности по дальности ограничен современными возможностями устройств формирования сигналов и полосой пропускания цифрового тракта.

Попытка реализовать абсолютные значения разрешения по дальности в длинноволновой части диапазона частот РСА, хотя бы на уровне 1...5 м, требует реализации уже сверхширокополосных систем (так, например, РСА Carabas 1-2 имеет зондирующий сигнал с внутриимпульсной линейной частотной модуляцией (ЛЧМ), начинающийся с 20 МГц и заканчивающийся на частоте 90 МГц). При обработке данных этой системы разработчики уже столкнулись с проблемами обеспечения линейности сквозного тракта, поскольку измерения сквозной передаточной характеристики системы с необходимой точностью обычными способами, даже в условиях наземных испытаний, оказались невозможными. Помимо аппаратного тракта, для широкополосных систем космического базирования на разрешающую способность по дальности существенное влияние оказывают искажения зондирующего сигнала на трассе распространения в атмосфере за счет изменяющегося с высотой регулярного распределения коэффициента преломления тропосферы и ионосферы [32, 43, 6].

Достижение высокой разрешающей способности РСА по азимутальной координате требует эквивалентного повышения требуемой точности знания параметров относительного движения космического аппарата и поверхности Земли. При этом современное состояние авиационных и космических навигационных систем не позволяет обеспечивать требуемую точность (единицы метров). Данная проблема встала, в первую очередь, перед разработчиками авиационных РСА в 80-х годах и привела к интенсивным исследованиям в области создания методов оценки доплеровского центроида и автоматической фокусировки радиолокационных изображений [37, 40–42].

Однако, помимо геометрических ошибок, на разрешение по азимуту в рассматриваемом случае влияют флуктуации коэффициента преломления атмосферы, приводящие к эквивалентным флуктуациям фазы принимаемого сигнала РСА. Таким образом, влияние траекторных и особенно атмосферных ошибок приводит к существенному ограничению пространственного разрешения космических РСА, при этом степень ухудшения

резко возрастает при увеличении длины волны и потенциального пространственного разрешения. Кроме того, эти эффекты приводят к значительным геометрическим и поляризационным искажениям [6, 38].

Это позволяет считать задачу получения радиолокационного изображения в условиях сильного влияния траекторных и атмосферных ошибок основной проблемой, ограничивающей развитие техники космических РСА при освоении новых частотных диапазонов и уровней разрешения [3].

Одним из наиболее предпочтительных путей преодоления последствий данных эффектов является использование технологий СОС для компенсации искажений радиолокационных изображений [6].

На основе анализа эффектов распространения сигнала РСА в атмосфере Земли в [6] были получены общие выражения, описывающие отраженный сигнал космической РСА, которые можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{S}(t, kT) &= \\ &= \iint \dot{K}_A(kT, \theta, \sigma) \dot{K}_R(t - \Delta t(kT - \theta, \sigma)) \dot{\xi}(\theta, \sigma) g_R(\sigma) g_A(kT - \theta, \sigma) d\theta d\sigma, \\ \dot{K}_R(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}(j\omega) \dot{K}_a(j\omega) \dot{K}_h(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega, \\ \dot{K}_A(kT, \theta, \sigma) &= \exp(j\omega_0 (\Delta t(kT - \theta, \sigma) + \delta(kT, \theta, \sigma))).\end{aligned}\quad (5.144)$$

В этом выражении $\dot{\xi}(\theta, \sigma)$ — коэффициент отражения подстилающей поверхности; $\dot{h}(j\omega)$ — комплексная огибающая зондирующего сигнала; $\dot{K}_a(j\omega)$ — описывает рефракцию зондирующего сигнала в регулярной атмосфере; $\dot{K}_h(j\omega)$ — передаточная характеристика аппаратного тракта; $\Delta t(kT - \theta, \sigma)$ — регулярная часть временного запаздывания сигнала в атмосфере; $\delta(kT, \theta, \sigma)$ — флуктуационная компонента временного запаздывания сигнала в турбулентной атмосфере; t, kT — координаты (задержка, номер зондирующего сигнала); θ, σ — временные координаты элемента подстилающей поверхности (азимут, дальность); g_A и g_R — вещественные функции, описывающие модуляцию сигнала диаграммой направленности антенны РСА.

Классический случай параметрической фокусировки возникает вследствие погрешности знания траектории относительного движения РСА и отражающей поверхности. При этом имеет место параметрическая неопределенность относительно регулярной части временного запаздывания сигнала в атмосфере $\Delta t(kT, \theta, \sigma)$. На азимутальное разрешение РСА оказывает влияние коэффициент, определяющий квадратичный фазовый набег в выражении

$$\begin{aligned}\Delta t(kT, \theta, \sigma) &= \frac{2}{c} \left[F_p \left(\frac{c\sigma}{2} \right) + \frac{1}{c} F'_p \left(\frac{c\sigma}{2} \right) \frac{1}{\sigma} ((\mathbf{R}''_c(\theta), \mathbf{R}_c(\theta) - \mathbf{R}(\theta, \sigma)) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{R}'_c(\theta), \mathbf{R}'_c(\theta))) (kT - \theta)^2 \right].\end{aligned}\quad (5.145)$$

В этом выражении F_p — функция, описывающая влияние среды распространения; $\mathbf{R}_c(\theta)$ — вектор положения летательного аппарата; $\mathbf{R}(\theta, \sigma)$ — вектор, описывающий геометрию отражающей поверхности в некоторой геоцентрической системе координат.

Поскольку часто траектория перемещения фазового центра антенны РСА не является прямолинейной, то данный коэффициент, называемый также коэффициентом фокусировки, является функцией траекторного времени. Поэтому запишем коэффициент фокусировки через “эквивалентную” скорость прямолинейного движения:

$$V(\theta, \sigma) = F'_p\left(\frac{c\sigma}{2}\right) ((\mathbf{R}''_c(\theta), \mathbf{R}_c(\theta) - \mathbf{R}(\theta, \sigma)) + (\mathbf{R}'_c(\theta), \mathbf{R}'_c(\theta))). \quad (5.146)$$

Эквивалентная скорость, как мы видим из этого выражения, связана с модулем вектора скорости и проекцией ускорения на наклонную дальность, а также с коэффициентом, отражающим влияние регулярной атмосферы.

Циклическое смещение азимутального спектра радиолокационного изображения (РЛИ) (называемого в зарубежной литературе доплеровским центроидом [6]) обычно связано с линейным фазовым набегом траекторной фазы (5.145). Однако в (5.145) имеет место только квадратичный фазовый набег. Это свидетельствует о том, что значение доплеровского центроида зависит только от ориентации диаграммы направленности антенны РСА. Оценка доплеровского центроида является необходимой при коррекции линейных искажений масштаба РЛИ, но собственно на его качество (пространственное разрешение) не влияет. Данная задача представляется на данный момент достаточно полно исследованной и здесь не рассматривается.

В данном разделе рассматриваются алгоритмы слепого восстановления изображений РСА на основе так называемых контрастных функций [9, 70], полученных из тех или иных предположений о свойствах радиолокационных изображений для задач как параметрической, так и непараметрической фокусировки.

К задаче непараметрической фокусировки РЛИ приводят флуктуации времени распространения сигнала в атмосфере $\delta(kT, \theta, \sigma)$, вызванные относительным движением РСА и атмосферных неоднородностей и влияющие на разрешающую способность РСА в сечении азимута.

В дискретном представлении модель радиоголограммы РСА можно представить в виде

$$\dot{y}_{k,m} = \sum_i \sum_j \dot{h}_{i,j,k,m} \dot{x}_{i,j} + \dot{n}_{k,m}, \quad (5.147)$$

где $\dot{y}_{k,m}$ — отсчеты радиоголограммы, $\dot{h}_{i,j,k,m}$ — нестационарное ядро интегрального оператора (5.144), $\dot{x}_{i,j}$ — восстанавливаемые комплексные отсчеты изображения, $\dot{n}_{k,m}$ — комплексный гауссовский белый шум.

В операторной форме:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{n}. \quad (5.148)$$

При решении задачи непараметрической фокусировки полагаем неизвестными коэффициенты $\dot{h}_{i,j,k,m}$, в случае параметрической неопределенности каждый из отсчетов $\dot{h}_{i,j,k,m}$ является известной функцией одного или нескольких неизвестных параметров.

Как уже отмечалось выше, проблема фокусировки радиолокационных изображений относится к классу задач слепой обработки сигналов. На сегодняшний день известно большое число подходов к решению подобных задач, рассмотренных выше.

Большинство методов слепой идентификации явно используют теплицеву структуру оператора $\mathbf{H}$. В тоже время (5.144) и (5.147) имеют нестационарную структуру.

Явные ограничения на стационарность отсутствуют в стохастических градиентных алгоритмах слепой коррекции. Поэтому при разработке алгоритмов слепого формирования радиолокационных изображений будем придерживаться этого подхода. Близкий подход к решению этой задачи был предложен в [71] и основывался на использовании метода фазово-градиентной фокусировки [71]. Далее мы сформулируем общий подход к синтезу подобных алгоритмов, отличающихся по большому счету только критерием оптимальности и стратегией оптимизации нелинейного функционала.

В задачах слепого разделения источников и слепого обращения свертки идея стохастических градиентных алгоритмов слепой коррекции была впоследствии обобщена в методе контрастных функций [64].

В соответствии с этим подходом, если отсчеты входного сигнала независимы и имеют негауссово распределение, то найдется такая вещественная функция $q(\dot{x})$, стохастическая минимизация которой обеспечивает в среднем однозначное решение задачи слепой идентификации системы (5.147). При этом эта функция должна удовлетворять следующим условиям:

1) $\mathbf{M}\{q(\dot{x})\}$ должна быть аффинным инвариантом;

2) $\mathbf{M}\{q(\dot{x})\} \geq 0$;

3) $\mathbf{M}\{q(\tilde{x}_{k,m})\} \leq \sum_i \sum_j |\dot{g}_{i,j,k,m}|^2 \cdot \mathbf{M}\{q(\dot{x}_{i,j})\}$,

где $\dot{g}_{i,j,k,m} = \sum_l \sum_n \dot{h}_{l,n,i,j} h_{k,m,k,m}^*$.

В более общем виде алгоритм слепого восстановления данного типа можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{x}} = \arg \left(\max_{\mathbf{H}^{-1}} \left(Q \left(\mathbf{H}^{-1} \mathbf{y} \right) \right) \right) \mathbf{y}, \quad (5.149)$$

где $Q = \mathbf{M}\{q(\tilde{x}_{i,j})\}$ — нелинейный функционал, $\tilde{\mathbf{x}}$ — восстановленное изображение.

Выбор контрастной функции неоднозначен и диктуется особенностями задачи. Фактически контрастная функция является критерием качества

решения задачи восстановления сигнала или изображения. Частными случаями данного подхода являются алгоритм максимального правдоподобия (МП), алгоритм минимума энтропии (МЭ), метод кумулянтных функций, алгоритмы Базганга.

Метод максимального правдоподобия. Пусть комплексные отсчеты восстанавливаемого изображения независимы и имеют негауссово распределение. Тогда их совместная плотность вероятности имеет вид

$$p_x(\mathbf{x}) = \prod_i \prod_j p_{i,j}(\dot{x}_{i,j}). \quad (5.150)$$

Без потери общности будем полагать, что оператор $\mathbf{H}$ обратим. Тогда в отсутствии шумов функционал правдоподобия отсчетов радиоголограммы можно записать в виде

$$L(\mathbf{y} | \mathbf{H}^{-1}) = \sum_i \sum_j \log(p_{i,j}(\tilde{x}_{i,j}(\mathbf{y}))) + \log(J(\mathbf{y}, \mathbf{H}^{-1})), \quad (5.151)$$

где $\tilde{x}_{i,j}(\mathbf{y})$ — координатные функции, $J(\mathbf{y}, \mathbf{H}^{-1})$ — якобиан отображения $\mathbf{H}^{-1}$.

Отсутствие аддитивного шума в рассматриваемой модели радиоголограммы, с одной стороны, является существенным упрощением алгоритма, с другой стороны, не является критичным моментом для РСА, у которых при формировании изображения после процедуры сжатия по дальности уровень аддитивных шумов часто не более $-10 \dots -30$ дБ.

Поскольку $\mathbf{H}^{-1}$ линейный оператор и восстанавливаемое изображение может иметь в принципе любой постоянный комплексный множитель, мы можем положить, что $J(\mathbf{y}, \mathbf{H}^{-1}) = J(\mathbf{H}^{-1}) = 1$, тогда алгоритм максимального правдоподобия можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{x}} = \arg \left(\max_{\mathbf{H}^{-1}} \left(\sum_i \sum_j \log(p_{i,j}(\tilde{x}_{i,j}(\mathbf{y}))) \right) \right) \cdot \mathbf{y}. \quad (5.152)$$

Если предположить локальную однородность фокусируемого фрагмента РЛИ, то для достаточно большого числа отсчетов внутри фрагмента асимптотически получим алгоритм восстановления в виде

$$\tilde{\mathbf{x}} = \arg \left(\min_{\mathbf{H}^{-1}} \left(\mathbf{M} \left\{ \log \left(\frac{1}{p_x(\tilde{x}_{i,j}(\mathbf{y}))} \right) \right\} \right) \right) \cdot \mathbf{y}. \quad (5.153)$$

Таким образом, метод максимального правдоподобия является частным случаем метода контрастных функций, а именно, когда контрастная функция $q(\tilde{\mathbf{x}}) = \log(p_x(\tilde{\mathbf{x}}))$.

Функционал качества в этом случае можно записать в виде

$$Q = D_{KL}(\dot{\mathbf{x}} \parallel \tilde{\mathbf{x}}) + H(\tilde{\mathbf{x}}), \quad (5.154)$$

где

$$D_{KL}(\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}) = \int p_x(\mathbf{z}) \log(p_x(\mathbf{z})/p_y(\mathbf{z})) d\mathbf{z},$$

$$H(x) = - \int p_x(z) \log(p_x(z)) dz,$$

$D_{KL}(\hat{x} \parallel \tilde{x})$ — расстояние Кульбака–Лейблера между распределением вероятности восстанавливаемого и истинного изображений, $H(\tilde{x})$ — энтропия восстановленного изображения по Шеннону.

Метод минимума энтропии. В методе минимума энтропии используется несколько отличная от метода максимального правдоподобия идея выбора контрастной функции или функционала качества.

Если отсчеты истинного изображения имеют негауссово распределение, то любая их линейная комбинация дает случайную величину, распределение которой асимптотически приближается к гауссовому, вследствие центральной предельной теоремы.

Тогда функционалом качества может быть расстояние Кульбака–Лейблера между распределением вероятности отсчетов восстанавливаемого изображения и некоторой гауссовой случайной величины

$$Q = H(\tilde{x}) - \log \left(\sqrt{2\pi e M \{|\tilde{x}|^2\}} \right), \quad (5.155)$$

или для нормированных данных

$$Q = H(\tilde{x}). \quad (5.156)$$

При этом контрастная функция $q(\tilde{x}) = \log(p_{\tilde{x}}(\tilde{x}))$.

Данный подход впервые использован в задачах сейсмологии Уидженсом [72]. Применительно к задаче фокусировки изображений РСА возможность использования данного метода обсуждалась в контексте обработки радиолокационных изображений первой космической РСА Seasat (США) в 1991 г.

В 1992 г., при обработке радиолокационных изображений авиационной РСА “МАРС”, полученных в рамках совместных работ ЦСКБ (г. Самара) и ИРЭ АН УССР (г. Харьков) по экологическому мониторингу г. Самары, Горячкиным О. В. (независимо от упомянутых работ) в разработанном программном обеспечении был использован алгоритм автофокусировки по критерию минимума энтропии. При этом, в отличие от упомянутых алгоритмов, использовалась гистограммная (ядерная) оценка энтропии радиолокационного изображения.

Различные модификации кумулянтных методов можно получить, разложив в степенной ряд контрастные функции методов МП или МЭ, при этом обычно используются комбинации кумулянтов выше 2-го порядка.

Реализация алгоритмов фокусировки. Основное отличие методов МП и МЭ в том, что для вычисления значения функционала качества в первом случае требуется знание априорного распределения вероятности отсчетов истинного изображения, а во втором — апостериорного распределения вероятности отсчетов восстанавливаемого изображения.

Если априорное распределение нам неизвестно, то использование метода минимума энтропии более предпочтительно, поскольку мы естественно

имеем выборку отсчетов восстанавливаемого изображения и можем оценить по ним значение энтропии.

Для формирования контрастной функции в этом случае можно использовать оценку плотности вероятности комплексных отсчетов изображения в виде

$$\hat{p}_{\tilde{x}}(x_{re}, x_{im}) = \frac{1}{NM} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \mu(x_{re} - \operatorname{Re}(\tilde{x}_{i,j})) \mu(x_{im} - \operatorname{Im}(\tilde{x}_{i,j})), \quad (5.157)$$

где $\mu(x)$ — положительная функция окна, такая что $\int \mu(x) dx = 1$.

Данная оценка плотности вероятности случайной величины по наблюдаемой выборке предложена в [73].

Оценка энтропии может быть далее получена в виде

$$\hat{H}(\tilde{x}) = - \iint \hat{p}_{\tilde{x}}(x_{re}, x_{im}) \log(\hat{p}_{\tilde{x}}(x_{re}, x_{im})) dx_{re} dx_{im}. \quad (5.158)$$

В [74] при решении задачи слепого разделения сигналов предложено в алгоритме МА использовать вместо шенонновского определения энтропии понятие энтропии по Реньи $H_{\alpha}(\tilde{x})$:

$$H_{\alpha}(x) = \frac{1}{1-\alpha} \log \int p_x^{\alpha}(z) dz. \quad (5.159)$$

В сочетании с оценкой (5.158) это может дать некоторое упрощение функционала Q .

Для однопараметрической фокусировки РЛИ, вычисляя аргумент минимума (5.153) простым перебором по параметру фокусировки, получаем с некоторой точностью скользящую по РЛИ оценку эквивалентной скорости.

В случае непараметрической фокусировки или наличия нескольких параметров можно использовать хорошо разработанные в приложениях адаптивной фильтрации алгоритмы нелинейной оптимизации Ньютона или градиентного спуска.

При этом выбранная функция окна $\mu(x)$ должна иметь производную по крайней мере 1-го порядка. Тогда коэффициенты обратного фильтра $\dot{z}_{i,j,k,m}$ вычисляются в итерационном процессе, на каждом шаге которого вычисляются поправочные коэффициенты по следующей формуле:

$$\dot{z}_{i,j,k,m}^{s+1} = \dot{z}_{i,j,k,m}^s - \beta_s \frac{\partial Q(z)}{\partial \dot{z}_{i,j,k,m}} \bigg|_{\dot{z}_{i,j,k,m}^s}, \quad (5.160)$$

где $Q(z) = \frac{1}{NM} \sum_i \sum_j q(\tilde{x}_{ij}(z))$.

Тогда

$$\frac{\partial Q(z)}{\partial \dot{z}_{i,j,k,m}} = \frac{1}{NM} q'(\tilde{x}_{i,k}(z)) \dot{y}_{j,m}. \quad (5.161)$$

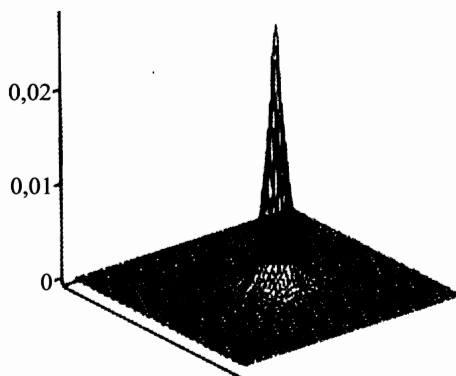


Рис. 5.9. Оценка плотности вероятности комплексных отсчетов РЛИ $p_x(x_{re}, x_{im})$

Коэффициенты $\{\beta_s\}$ определяют скорость сходимости алгоритма и должны удовлетворять условию $Q(\mathbf{z}^{s+1}) < Q(\mathbf{z}^s)$.

Особенности применения данных методов иллюстрирует пример восстановления РЛИ самолетной РСА L-диапазона в составе радиолокационного комплекса “МАРС” (Украина). Данный комплекс разработан в ИРЭ АН УССР (в настоящее время Исследовательский центр радиофизических методов дистанционного зондирования Земли имени А.И. Калмыкова).

Обработка по координате наклонной дальности в этой системе осуществляется на аппаратном уровне, поэтому цифровое восстановление РЛИ осуществляется только в сечении путевой дальности.

Анализируемая голограмма г. Самары получена 12.12.91 г. Параметры радиоголограммы: 768×6092 комплексных отсчетов; начальная задержка — 61 мкс; период повторения импульсов — 100 Гц; частота дискретизации 24 МГц; длина волны — 23 см. При обработке использовались алгоритмы МП и МЭ.

Показанная на рис. 5.9. оценка плотности вероятности комплексных отсчетов РЛИ получена в соответствии с (5.157) для гауссовой функции окна. В алгоритме МП в качестве априорного распределения использовалось экспоненциальное распределение с единичной дисперсией

$$p_x(x_{re}, x_{im}) = \frac{1}{4} \exp(-(|x_{re}| + |x_{im}|)). \quad (5.162)$$

Проведенная экспериментальная проверка позволяет сформулировать качественный вывод: алгоритм МЭ обеспечивает более высокую точность фокусировки относительно алгоритма МП, но более чувствителен к сюжету РЛИ и может давать несколько локальных минимумов функционала качества.

Результаты оценки параметра фокусировки по реальной голограмме РСА показаны на рис. 5.12. По этим результатам видно, что эквивалентная скорость меняется в пределах (± 15 м/с) на интервале порядка 10 с (отметим также, что максимальный интервал синтеза апертуры для данного случая составляет 3–5 с). Естественно, что при использовании модели



Рис. 5.10. Дефокусированное радиолокационное изображение авиационной РСА L-диапазона “МАРС” (ЦРМ ДЗЗ им. А.И. Калмыкова, г. Харьков, Украина)



Рис. 5.11. Фокусированное методом МП радиолокационное изображение

прямолинейного равномерного движения самолета такое изменение объяснить невозможно. Данные колебания связаны с изменением радиального ускорения движения самолета (см. выражение (5.146)).

Полученные результаты являются достаточно типичными для авиационных носителей и совпадают с [37]. Этот факт позволяет использовать для решения задачи фокусировки РЛИ модель движения самолета в виде суммы линейных и гармонических компонент. Используя данную модель траекторных нестабильностей, можно рассматривать задачу фокусировки в случае “быстрых” колебаний эквивалентной скорости, причем параметры модели легко определяются по результатам локальной автофокусировки.

На рис. 5.10 показано РЛИ данного фрагмента, сфокусированное по данным навигационной системы самолета, а на рис. 5.11 фокусированное изображение, построенное алгоритмом автофокусировки, по критерию минимума энтропии с учетом интерполяции, показанной на рис. 5.12.

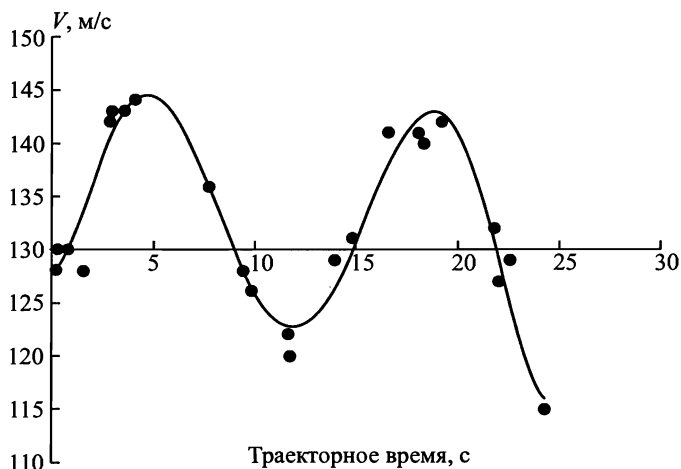


Рис. 5.12. Результаты измерения и интерполяции эквивалентной скорости авиационной РСА “МАРС” по фрагменту РГГ г. Самары (12.12.91 г.)

Основные этапы восстановления РЛИ в условиях параметрической неопределенности относительно параметров движения летательного аппарата должны быть следующие:

- 1) “грубый” синтез радиолокационного изображения;
- 2) выделение фрагментов голограммы, перспективных для оценивания параметра фокусировки (процедура автоматического обнаружения точечных целей);
- 3) фокусировка выделенных фрагментов;
- 4) интерполяция параметров фокусировки на всю область голограммы;
- 5) “точный” синтез радиолокационного изображения с использованием интерполированной зависимости параметра фокусировки или соответствующей параметрической модели.

Рассмотренные в данном разделе алгоритмы могут быть использованы для высокоточной фокусировки и коррекции искажений РЛИ возникающих вследствие погрешности траекторных измерений и атмосферных эффектов.

В целом, качество работы рассмотренных в данном разделе алгоритмов компенсации искажений РЛИ для параметрического и непараметрического случаев зависит от сюжета.

При этом, чем больше на РЛИ “ярких” точек, тем более успешна процедура оценивания. Кроме того, наличие локальных экстремумов функционала Q может значительно осложнить непараметрическую фокусировку. В этих случаях важно наличие начального приближения, которое может быть получено при использовании методов слепой идентификации, использующих стационарность искажающего функционала.

Однако компенсация атмосферных искажений на РЛИ, работающих в длинноволновых диапазонах, при использовании данных методов несколько упрощается, поскольку в этих диапазонах более выражен резонансный механизм обратного рассеяния и сюжеты таких РЛИ, как правило, благоприятны для фокусировки [75].

Список литературы

1. *Abed-Meraim K., Hua W., Qiu Y.* Blind System Identification // IEEE Proceeding. — 1997. — Vol. 85. — P. 1308–1322.
2. *Tugnait J.K., Tong L., Ding Z.* Single-user channel estimation and equalization // IEEE Signal Processing Magazine. — 2000. — Vol. 17. — № 3. — P. 17–28.
3. *Goriachkin O. V., Klovsky D.D.* The some problems of realization spaceborne SAR's in P, UHF, VHF bands // Proceedings IEEE 1999 International Geoscience and Remote Sensing Symposium. — Hamburg, Germany, July 1999. — Vol. 2. — P. 1271–1273.
4. *Goriachkin O. V., Klovsky D.D.* Inverse Problems with Unknown Kernels in Microwave Remote Sensing // Proceedings of of World Multiconference on Systemics. Cybernetics and Informatics. — Orlando, Florida, USA. — 2000. — Vol. 7. — P. 610–615.
5. *Cichocki A., Amari S.* Adaptive blind signal and image processing. — John Wiley & Sons Ltd, 2002.
6. *Горячкин О.В.* Методы слепой обработки сигналов и их приложения в системах радиотехники и связи. — М.: Радио и связь, 2003.
7. *Cardoso J.* Blind signal separation: statistical principles // Proceedings of the IEEE. — 1998. — Vol. 9, № 10. — P. 2009–2025.
8. *Douglas S. C., Haykin S.* On the Relationship Between Blind Deconvolution and Blind Source Separation // Proc. 31st Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers. — 1997. — Pacific Grove, CA. — Vol. 2. — P. 1591–1595.
9. *Comon P.* Independent component analysis: a new concept? // Signal Processing. — 1994. — Vol. 36. — P. 287–314.
10. *Hyvarinen A.* Survey on independent component analysis // Neural computing surveys. — 1999. — № 2. — P. 94–128.
11. *Прокис Дж.* Цифровая связь / Пер с англ. под ред. Д.Д. Кловского. — М.: Радио и связь, 2000.
12. *Карташевский В. Г., Семенов С. Н., Фирстова Т. В.* Сети подвижной связи. — М.: ЭКО-ТРЕНДЗ, 2001.
13. *Волков Н. М., Иванов Н. Е., Салищев В. А., Тюбалин В.В.* Глобальная навигационная спутниковая система “ГЛОНАСС” // Успехи современной радиоэлектроники. — 1997. — № 1. — С. 31–61.
14. *Кловский Д. Д.* Передача дискретных сообщений по радиоканалам. — М.: Радио и связь, 1982.
15. *Николаев Б. И.* Последовательная передача дискретных сообщений по непрерывным каналам с памятью. — М.: Радио и связь, 1988.
16. *Теория электрической связи / Под ред. Д.Д. Кловского.* — М.: Радио и связь, 1998.
17. *Xu G., Liu H., Tong L., Kailath T.* A least-squares approach to blind channel identification // IEEE Trans. Signal Processing. — 1995. — Vol. 43, № 12. — P. 2982–2993.
18. *Tong L., Perreau S.* Blind Channel Estimation: From Subspace to Maximum Likelihood Methods // IEEE Proceedings. — 1998. — Vol. 86, № 10. — P. 1951–1968.

19. *Liu H., Xu G., Tong L., Kailath T.* Recent Developments in Blind Channel Equalization: From Cyclostationarity to Subspaces // *Signal Processing*. — 1996. — Vol. 50. — P. 82–99.
20. *Дмитриев А. С.* Широкополосные и сверхширокополосные прямохаотические системы связи // Сборник “Сверхширокополосные системы в радиолокации и связи: Конспекты лекций”. — Муром: Издательско-полиграфический центр МИ ВлГУ, 2003. — С. 110–143.
21. *Sato Y.* A method of self-recovering equalization for multilevel amplitude-modulation systems // *IEEE Trans. on Communications*. — 1975. — Vol. 23. — P. 679–682.
22. *Godard D. N.* Self-recovering equalization and carrier tracking in two dimensional data communication systems // *IEEE Trans. on Communications*. — 1980. — Vol. 28. — № 11. — P. 1867–1875.
23. *Kaleh G. K., Valler R.* Joint parameter estimation and symbol detection for linear or non linear unknown dispersive channels // *IEEE Trans. Telecommunication*. — 1994. — Vol. 42. — P. 2406–2413.
24. *Seshadri N.* Joint data and channel estimation using fast blind trellis search techniques // *IEEE Trans. Telecommunication*. — 1994. — Vol. 42. — P. 1000–1011.
25. *Нукиас Х. Л., Рагувер М. Р.* Биспектральное оценивание применительно к цифровой обработке сигналов // *ТИИЭР*. — 1987. — Т. 75. — № 7. — С. 5–30.
26. *Tong L., Xu G., Kailath T.* A new approach to blind identification and equalization of multipath channels // *Proc. of the 25th Asilomar Conference on Signals. — Systems and Computers*. — Nov. 1991. — P. 856–860.
27. *Moulines E., Duhamel P., Cardoso J.-F., Mayrargue S.* Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters // *IEEE Trans. on Signal Processing*. — 1995. — Vol. 43, № 2. — P. 516–525.
28. *Gardner W. A.* A new method of channel identification // *IEEE Trans. on Communications*. — 1991. — Vol. 39, № 6. — P. 813–817.
29. *Serpedin E., Giannakis G. B.* Blind channel identification and equalization with modulation induced cyclostationarity // *Proc. CISS. Baltimore. MD. Mar. 1997*. — Vol. II. — P. 792–797.
30. *Goriachkin O. V., Klovsky D. D.* Blind Channel Identification with Non-Stationary Input Processes // *Proceedings of World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics. July 22–25, 2001*. — Orlando, Florida, USA. — Vol. XVIII. — P. 386–388.
31. *Горячкин О. В.* О возможности восстановления импульсной характеристики радиолокационного канала для некоторых моделей нестационарных полей. Самара: ПИИРС. Сборник научных трудов “Информатика, радиотехника, связь”. — Вып. 1. — 1996. — С. 9–16.
32. *Кретов Н. В., Рыжкина Т. Е., Федорова Л. В.* О дисперсионных искажениях широкополосных сигналов в ионосферной плазме // *Радиотехника и электроника*. — 1991. — Т. 36. — Вып. 1. — С. 1–6.
33. *Костылев А. А.* Идентификация радиолокационных целей при использовании сверхширокополосных сигналов: методы и приложения // *Зарубежная радиоэлектроника*. — 1984. — № 4. — С. 75.

34. Кошелев В. И., Шипилов С. Э., Якубов В. П. Восстановление формы объектов при малоракурсной сверхширокополосной радиолокации // Радиотехника и электроника. — 1999. — Т. 44, № 3. — С. 301.
35. Радзиевский В. Г., Караваев М. А. Получение радиолокационных изображений объектов на основе томографической обработки сверхширокополосных сигналов // Радиотехника. — 1998. — № 6. — С. 32.
36. Стадник А. М., Ермаков Г. В. Искажения сверхширокополосных электромагнитных импульсов в атмосфере земли. Радиотехника и электроника. — 1995. — Т. 40, № 7. — С. 1009.
37. Oliver C. J. Synthetic-aperture radar imaging // J. Phys. D: Appl. Phys. 22. — 1989. — P. 871–890.
38. Blacknell D., Freeman A., White R. G., Wood J. W. The prediction of geometric distortions in airborne synthetic aperture radar imagery from autofocus measurements // IEEE Tr. GRS-25. — 1987. — № 6. — P. 775–782.
39. Кондратенков Г. С., Потехин В. А., Реутов А. П., Феоктистов Ю. А. Радиолокационные станции обзора земли / Под. ред. Г. С. Кондратенкова. — М.: Радио и связь, 1983.
40. Горячкин О. В. Автоматическая фокусировка изображений в радиолокаторе с синтезированной апертурой // ТУЗС "Анализ сигналов и систем связи. — СПб., 1996. — № 161. — С. 128–134.
41. Prati C. Autofocusing synthetic aperture radar images. SEP-57. — 1992. — P. 441–456.
42. Monti-Guarnieri A., Rocca F. Autofocusing SAR Data Using The Blind Deconvolution Approach: Limits and Experimental Results // IGARSS'92. — IEEE. — 1992. — P. 363–365.
43. Горячкин О. В. Влияние атмосферы Земли на деградацию характеристик изображений космических радиолокационных станций с синтезированной апертурой // Компьютерная оптика. — 2002. — Вып. 24. — С. 177–183.
44. Василенко Г. И., Тараторин А. М. Восстановление изображений. — М.: Радио и связь, 1986.
45. Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. В. А. Сойфера. — М.: Физматлит, 2001.
46. Kundur D., Hatzinakos D. Blind Image Deconvolution: An Algorithmic Approach to Practical Image Restoration // IEEE Signal Processing Magazine. — 1996. — № 4. — P. 1–42.
47. Бакалов В. П., Киреенко О. В., Мартюшев Ю. Ю., Матвеева О. И. Восстановление многомерных сигналов по амплитудному спектру // Зарубежная радиоэлектроника. — 1994. — № 2. — С. 31–37.
48. Бакалов В. П. О возможности восстановления многомерных дискретных сигналов по амплитудному спектру // Радиотехника. — 1982. — Т. 37, № 11. — С. 69–71.
49. Lane R. G., Bates R. H. T. Automatic multidimensional deconvolution // J. Opt. Soc. Am. A.. — 1987. — Vol. 4(1). — P. 180–188.
50. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. — М.: Наука, 1987.
51. Serpedin E., Giannakis G. A simple proof of a known blind channel identifiability result // IEEE Trans. Signal Processing. — 1999. — Vol. 47, № 2. — P. 591–593.

52. *Gustafson F., Wahlberg B.* Blind equalization by direct examination of the input sequences // IEEE Trans. on Communications. — 1995. — Vol. 43, № 7. — P. 2213–2222.
53. *Hua Y.* Fast maximum likelihood for blind identification of blind identification of multiple FIR channels // IEEE Transactions on Signal Processing. — 1996. — Vol. 44. — P. 661–672.
54. *Мамфорд Д.* Алгебраическая геометрия. Комплексные проективные многообразия / Пер с англ. — Н.: ИО НФМИ, 2000.
55. *Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д.* Идеалы. — многообразия и алгоритмы / Пер. с англ. под ред. В. Л. Попова. — М.: Мир, 2000.
56. *Горячкин О. В.* Использование полиномиального представления в задаче слепой статистической идентификации канала связи // Труды 57-й научной сессии РНТОРЭС им. А. С. Попова, г. Москва, 2002. — С. 3.
57. *Горячкин О. В.* Оценка импульсной характеристики канала связи по информационным последовательностям как задача решения системы полиномиальных уравнений // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2003. — Т. 10. — Вып. 1. — С. 137–138.
58. *Горячкин О. В.* Полиномиальные представления и слепая идентификация систем. Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2002. — Т. 5, № 4. — С. 53–60.
59. *Малахов А. Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
60. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1975.
61. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.
62. *Прасолов В. В.* Многочлены. — М.: МЦНМО, 2001.
63. *Stetter H. J.* Matrix eigenproblems at the heart of polynomial system solving. SIGSAM Bull. — 1995. — Vol. 30, № 4. — P. 22–25.
64. *Comon P., Lebrun J.* An algebraic approach to blind identification of communication channels // Proc. IEEE ISSPA. — Paris, France. — July 1–4, 2003.
65. *Grellier O., Comon P., Mourrain B., Trebuchet P.* Analytical blind channel identification // IEEE Transactions on Signal Processing. — 2002. — Vol. 50, № 9.
66. *Hoehner P.* A statistical discrete-time model for the WSSUS multipath channels // IEEE Trans. on Vehicular Technology. — 1992. — Vol. 41. — P. 461–468.
67. *Chevreuril A., Loubaton P.* Blind second-order identification of FIR channels: Forced cyclostationarity and structured subspace method // Proc. SPAWC. — Paris, La Villette, France. — Apr. 16–18, 1997. — P. 121–124.
68. *Goriachkin O. V., Klousky D. D.* New Method for Wideband Low Frequency SAR Data Processing // Proc. Third International Airborne Remote Sensing Conference and Exhibition, 7–10 July, 1997. — Copenhagen, Denmark. — Vol. 2. — P. 147–154.
69. *Serpedin E., Giannakis G. B.* Blind Channel Identification and Equalization with Modulation-Induced Cyclostationarity // IEEE Transactions on Signal Processing. — 1998. — Vol. 46, № 7.
70. *Donoho D.* On minimum entropy deconvolution. Applied time series analysis II. / D. F. Findley Editor. — New York: Academic Press, 1987.
71. *Shteinshleiger V., Dzenkevich A., Mizezhnikov G., Mel'nikov L.* On the Possibility of Designing a High-Resolution Space-Borne VHF-Band SAR for Remote Sensing of the Earth // Proceedings European Conference on Synthetic Aperture Radar, 26–28 March 1996. — Konigswinter, Germany. — P. 321–324.

- 72. *Wiggins R. A.* Minimum entropy deconvolution // *Geoexploration*. — 1978. — № 16.
- 73. *Parzen E.* On estimation of a probability density function and model // *Time Series Analysis Papers*. — Holden-day, Inc., CA. — 1967.
- 74. *Hild II K. E., Erdogan D., Principe J. C.* Blind source separation using Renyi's mutual information // *IEEE Signal processing letters*. — 2001. — Vol. 8, № 6. — P. 174–176.
- 75. *Штейншлейгер В. Б., Дзенкевич А. В., Манаков В. Ю., Мельников Л. Я., Мисежников Г. С.* О разрешающей способности трансionoсферных РЛС для дистанционного зондирования Земли в УКВ-диапазоне волн // *Радиотехника и электроника*. — 1997. — Т. 42, № 6. — с. 725–732.

ГЛАВА 6

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛОКУСОВ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ R-ОПЕРАЦИЯМИ И АТОМАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ. ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Введение

В последние годы в ведущих индустриальных странах возросли темпы создания новых математических теорий и разработки на их основе методов решения на современных ЭВМ задач, связанных с исследованием, расчетом и оптимизацией полей различной физической природы [1–17]. Возрастающий интерес к данной проблеме объясняется тем, что ею охвачен широкий круг направлений, таких как теплофизика, лазерная физика [1, 2], электродинамика сверхпроводящих структур, гироскопия [4–7], теория анализа и синтеза антенн (включая теорию фрактальных антенн) [5], космическая техника [8], дистанционное зондирование [9], связь, радиолокация и навигация [10, 11, 21, 22], рассеяние волн на телах сложной формы [4, 12], цифровая обработка многомерных сигналов [1, 14–17], распознавание образов, математическое программирование, краевые задачи математической физики [1, 2, 11], нанотехнология [18, 19], нейронные сети [20], дискретная математика [23], развитие которых имеет первостепенное значение для современного научно-технического прогресса. В этих проблемных задачах большое внимание уделяется аналитическому описанию объектов сложной формы. Здесь определяющую роль играют методы алгебры логики, R-функций и атомарных функций (АФ) [1, 2].

Данная глава состоит из двух частей. В первой на конкретных примерах изложена теория R-функций и АФ применительно к описанию локусов произвольной формы, а во второй — по результатам первой построены двумерные весовые функции (окна) Кравченко на опорных областях нестандартной геометрии для цифровой обработки многомерных сигналов и изображений.

6.1. Обратная задача аналитической геометрии и метод R-функций

Согласно [1, 2, 4] рассмотрим описание на аналитическом уровне локусов сложной формы. Методы построения функции $\omega(x, y)$ основаны на теории R-функций. Следуя этой теории, для построения уравнения границы некоторой области необходимо на первом этапе написать логическую формулу (предикатное уравнение) для нее. Пусть в R^2 задана

область S (рис. 6.1) с кусочно-гладкой границей ∂S . Необходимо построить функцию $\omega(x, y)$, положительную внутри S , отрицательную вне S и равную нулю на ∂S . Полученное уравнение $\omega(x, y) = 0$ будет в неявной форме определять геометрическое место точек, представляющих границу области. Обозначим характеристическую функцию, соответствующую области S , через $\chi_i = [\omega_i(x, y) \geq 0]$. Располагая некоторой системой $\chi_i = [\omega_i(x, y) \geq 0]$ характеристических функций и булевой функцией $Y = F(x_1, \dots, x_m)$, можно построить предикат

$$\chi = F(\chi_1, \dots, \chi_m) = F([\omega_1(x, y) \geq 0], \dots, [\omega_m(x, y) \geq 0]), \quad (6.1)$$

определяющий область S , построенную из вспомогательных областей $S_1 \dots S_m$ по логическим правилам согласно булевой функции F .

Предположим, что область S получается из исходных областей $S_1 \dots S_m$ с помощью следующих логических операций над множествами: " $\cap$ " — пересечение, " $\cup$ " — объединение, " $\neg$ " — дополнение.

Запишем

$$S = F([S_1 \dots S_m], [\cap, \cup, \neg]). \quad (6.2)$$

При этом считаем, что исходные области $S_1 \dots S_m$ имеют более простую форму, чем S , и для каждой из них известно уравнение ее границы $\omega_i(x, y) = 0$ ($i = 1 \dots m$).

Метод R-функций позволяет из теоретико-множественного описания области S получить в аналитическом виде уравнение ее границы $\omega(x, y) = 0$.

Согласно [1, 2] приведем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. R-функцией (функцией В. Л. Рвачева), соответствующей разбиению числовой оси на интервалы $(-\infty, 0)$ и $[0, \infty)$, называется такая функция, знак которой вполне определяется знаками ее аргументов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Функция $z = f(x, y)$ называется R-функцией, если существует такая булева функция Φ , что $S[z(x, y)] = \Phi[S(x), S(y)]$, где двужначный предикат

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Каждой R-функции соответствует единственная сопровождающая булева функция. Обратное неверно. Одной и той же булевой функции соответствует бесконечное множество (ветвь) R-функций. Множество R-функций замкнуто, т. е. суперпозиция R-функций также является R-функцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. Система функций H , составленная из R-функций, называется достаточно полной, если множество всех суперпозиций элементов H (множество H -реализуемых функций), имеет непустое пересечение с каждой ветвью множества R-функций.

Достаточным условием полноты системы H является полнота системы H^* соответствующих сопровождающих булевых функций. Некоторые из семейств R-функций приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1. Основные системы R-функций

Сопровождающая булева функция	Система R_α	Система R_0^m
$F_1(a, b) = a \wedge b$	$y_1 = x_1 \wedge_\alpha x_2 = \frac{1}{1+\alpha} \cdot \left(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2} \right)$	$y_1 = x_1 \wedge_0^m x_2 = \left(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \cdot (x_1^2 + x_2^2)^{m/2}$
$F_2(a, b) = a \vee b$	$y_2 = x_1 \vee_\alpha x_2 = \frac{1}{1+\alpha} \cdot \left(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2} \right)$	$y_2 = x_1 \vee_0^m x_2 = \left(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \cdot (x_1^2 + x_2^2)^{m/2}$
$F_3(b) = \bar{b}$	$y_3 = \bar{x} = -x$	$y_3 = \bar{x} = -x$

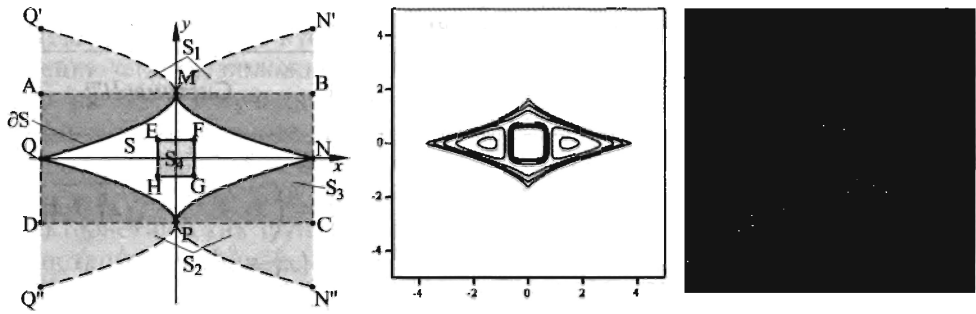
Система R_α , приведенная в табл. 6.1, содержит параметр α , который может принимать значения из интервала $(-1, 1]$. Он может быть функцией координат. Представляют интерес частные случаи: R_0 при $\alpha = 0$ и R_1 при $\alpha = 1$. Функции из этих систем приведены в табл. 6.2. Система R_0^m состоит из функций класса C^m .

Таблица 6.2. Системы функций R_0 и R_1

Система R_0	Система R_1
$y_1 = x \wedge_0 y = \left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \right)$ $y_2 = x \vee_0 y = \left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \right)$ $y_3 = \bar{x} = -x$	$y_1 = x \wedge_1 y = \frac{1}{2} \left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy} \right) = \frac{1}{2} (x + y - x - y) = \min(x, y)$ $y_2 = x \vee_1 y = \frac{1}{2} (x + y + x - y) = \max(x, y)$ $y_3 = -x$

Заметим, что недостатком системы функций R_0 является недифференцируемость в начале координат, а функций системы R_1 — на биссектрисе первого и третьего координатных углов.

Пример 6.1. Рассмотрим locus S (рис. 6.1), который представляет собой ромб $QMNP$ с вырезом $EFGH$. Он получается с помощью следующих областей: а) области S_1 , ограниченной симметричными параболлами QMQ'' и NMN'' ; б) области S_2 , также ограниченной параболлами QMQ'' и NMN'' ; в) области S_3 — прямоугольник $ABCD$; г) области S_4 — квадрат $EFGH$.

Рис. 6.1. Локус, линии уровня и аксонометрическая проекция $\omega(x, y)$

Опишем их следующими неравенствами:

$$\omega_1(x, y) = (y - 2)^2 - |x| \geq 0,$$

$$\omega_2(x, y) = (y + 2)^2 - |x| \geq 0,$$

$$\omega_3(x, y) = (4 - x^2) \wedge_\alpha (2 - y^2) \geq 0,$$

$$\omega_4(x, y) = (0,25 - x^2) \wedge_\alpha (0,25 - y^2) \geq 0.$$

Предикатное уравнение границы ∂S области S может быть написано в виде

$$(S_1 \vee S_2) \wedge (S_3 \wedge \bar{S}_4) = 1.$$

Следовательно, уравнение локуса

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= [\omega_1(x, y) \vee_\alpha \omega_2(x, y)] \wedge_\alpha [\omega_3(x, y) \wedge_\alpha (-\omega_4(x, y))] = \\ &= \left\{ \left[(y - 2)^2 - |x| \right] \vee_\alpha \left[(y + 2)^2 - |x| \right] \right\} \wedge_\alpha \left\{ \left[(4 - x^2) \wedge_\alpha (2 - y^2) \right] \wedge_\alpha \right. \\ &\quad \left. \wedge_\alpha \left(- \left[(0,25 - x^2) \wedge_\alpha (0,25 - y^2) \right] \right) \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

6.2. Частично нормализованные уравнения

Используя идеи, изложенные в [1, 2], начнем с обобщения понятия нормали к линии или поверхности. Пусть L — произвольный чертеж в E^n , M — произвольная точка пространства E^n , не принадлежащая L , а $M_1, M_2, \dots$ — точки противостояния, соответствующие точке M . Соединим каждую из точек M_i , $i = 1, 2, \dots$, с точкой M отрезком прямой и направим вдоль этой прямой единичный вектор

$$\nu_i = \overrightarrow{M_i M} |\overrightarrow{M_i M}|^{-1}, i = 1, 2, \dots$$

В результате получим некоторую систему единичных векторов ν_i , $i = 1, 2, \dots$, которые назовем векторами противостояния чертежа L , соответствующими точке M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. Вектор ν ($\|\nu\| = 1$) называется единичным вектором нормали к чертежу L по отношению к области $\Omega \subset E^n$, если существует

такая точка $M \in \Omega \cap \bar{L}$, для которой вектор ν является вектором противостояния чертежа L . Если $\Omega = E^n$, то ν называется единичным вектором нормали к L .

Нетрудно заметить, что если L есть гладкая линия или поверхность, то единичные векторы нормали к L , понимаемые в обычном смысле, являются также единичными векторами нормали в указанном выше обобщенном смысле. Характерной особенностью нормальной функции f чертежа L является то, что ее нормальная производная по всякой обобщенной нормали ν равна единице, а все остальные производные по ν высших порядков равны нулю:

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \right|_L = 1; \quad \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial \nu^2} \right|_L = \left. \frac{\partial^3 \omega}{\partial \nu^3} \right|_L = \dots = 0. \quad (6.3)$$

В дальнейшем с целью упрощения изложения часто будет использовано и обычное понятие нормали. Пусть Ω есть некоторая область, граница $\partial\Omega$ которой имеет уравнение $\omega = 0$, где $\omega \in C^{n+1}$ внутри области Ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.5. Уравнение $\omega = 0$ называется нормализованным на $\partial\Omega$ до n -го порядка, если функция ω удовлетворяет условиям

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = 1, \quad \left. \frac{\partial^n \omega}{\partial \nu^n} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (6.4)$$

где ν — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$.

Эти условия означают, что вдоль нормали к $\partial\Omega$ функция ω ведет себя примерно как расстояние ρ точек этой нормали до чертежа $\partial\Omega$. Построение функции ω , удовлетворяющей условиям нормировки, осуществлено с помощью R-функций. Рассмотрим вопрос о построении нормализованных уравнений первого порядка. Пусть функция $\omega \in E^n$ удовлетворяет условиям

$$\omega = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad \omega \neq 0 \quad \text{вне} \quad \partial\Omega, \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} \neq 0. \quad (6.5)$$

Нормализованное уравнение первого порядка строится с помощью следующей теоремы.

Теорема 6.1. Если функция $\omega \in C^m$ удовлетворяет условиям (6.5), то функция

$$\omega(x, y) = \omega_1 (\omega_1^2 + |\text{grad } \omega_1|^2)^{-\frac{1}{2}}$$

принадлежит множеству C^{m-1} , удовлетворяет условиям (6.5) и, кроме того,

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = 1,$$

где ν — нормаль в обычном смысле.

Следует отметить, что нормализация первого порядка может быть осуществлена с помощью R-функций $x_1 \wedge_\alpha x_2$, $x_1 \vee_\alpha x_2$, $\bar{x}$ при условии проведения нормализации первого порядка уравнений границ опорных областей. Описанный метод нормализации особенно удобен для областей,

контур которых состоит из элементов постоянной кривизны. В этом случае предварительная нормализация осуществляется надлежащим выбором постоянного множителя. Для прямой и плоскости такими множителями являются нормирующие множители, используемые для приведения их к нормальному виду. Нормализованное до первого порядка уравнение окружности радиуса R с центром в точке $O_1(a, b)$ можно взять в виде

$$\frac{1}{2R} \left[R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2 \right] = 0. \quad (6.6)$$

Нормализованное уравнение прямоугольника, определяемого неравенствами $a^2 - x^2 \geq 0$ и $b^2 - y^2 \geq 0$, имеет вид

$$\left(\frac{a^2 - x^2}{2a} \right) \wedge_\alpha \left(\frac{b^2 - y^2}{2b} \right) = 0. \quad (6.7)$$

Существуют еще методы нормализации уравнений, в том числе и до n -го порядка. Здесь они не применяются, поэтому их рассматривать не будем.

6.3. Локусы и финитные функции

На практике бывает необходимо получить локус ω_ε , представляющий собой некоторую малую ε -окрестность границы области $\tilde{\omega}$. В этом случае для описания пограничного слоя можно уменьшить размер $\tilde{\omega}$ на величину ε и с помощью R-конъюнкции получить уравнение границы

$$\omega_\varepsilon(x, y) = \tilde{\omega}(x, y) \wedge (-\tilde{\omega}_1(x, y)). \quad (6.8)$$

При этом осуществляется построение функции $\tilde{\omega}_1$ по той же логической формуле что и $\tilde{\omega}$, но с другими геометрическими параметрами. В результате происходит усложнение и излишняя громоздкость уравнения ω_ε . Учитывая выше изложенное, рассмотрим подход получения уравнения границы, основанный на применении финитных функций [2]. Одной из классических финитных функций с носителем $[-\varepsilon, \varepsilon]$ является следующая:

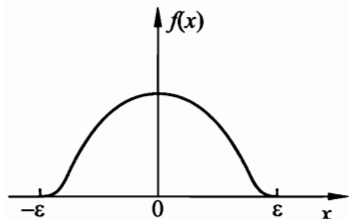
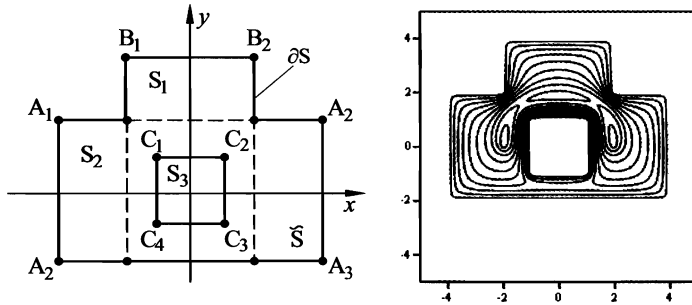


Рис. 6.2. График функции $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2} \right), & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases} \quad (6.9)$$

Кроме того, она бесконечно дифференцируемая и четная (рис. 6.2).

Пусть $\tilde{S}$ — произвольный локус. В качестве примера возьмем область $\tilde{S}(A_1 B_1 B_2 A_2 A_3 A_4 C_1 C_2 C_3 C_4)$ (рис. 6.3), представляющую собой объединение прямоугольников $S_1(A_1 A_2 A_3 A_4)$ и $S_2(B_1 B_2 B_3 B_4)$ с вырезанным

Рис. 6.3. Локус и линии уровня $\tilde{\omega}(x, y)$

квадратом $S_3(C_1C_2C_3C_4)$. Прямоугольники и квадрат могут быть заданы нормализованными уравнениями:

$$\begin{aligned}\omega_1(x, y) &= \left(\frac{16 - x^2}{8} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{4 - y^2}{4} \right) \geq 0, \\ \omega_2(x, y) &= \left(\frac{4 - x^2}{4} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{9 - (y - 1)^2}{6} \right) \geq 0, \\ \omega_3(x, y) &= \left(\frac{1 - x^2}{2} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{1 - y^2}{2} \right) \geq 0.\end{aligned}$$

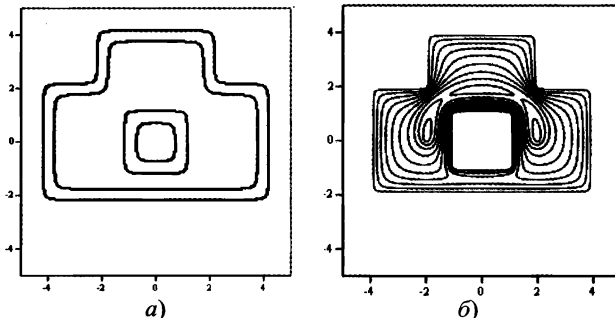
Следовательно, локус $\tilde{S}$ может быть задан неравенством

$$\tilde{\omega}(x, y) = [\omega_1(x, y) \vee_{\alpha} \omega_2(x, y)] \wedge_{\alpha} (-\omega_3(x, y)) \geq 0. \quad (6.10)$$

В силу свойств финитной функции $f(x)$ функция

$$f(\tilde{\omega}) = \begin{cases} \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |\tilde{\omega}|^2} \right), & |\tilde{\omega}| \leq \varepsilon, \\ 0, & |\tilde{\omega}| > \varepsilon, \end{cases} \quad (6.11)$$

будет финитной с носителем, совпадающим с ε -окрестностью локуса S , непрерывно дифференцируемой функцией (рис. 6.4).

Рис. 6.4. а) локус ω_{ε} при $\varepsilon = 0,1$; б) локус ω_{ε} при $\varepsilon = 0,01$

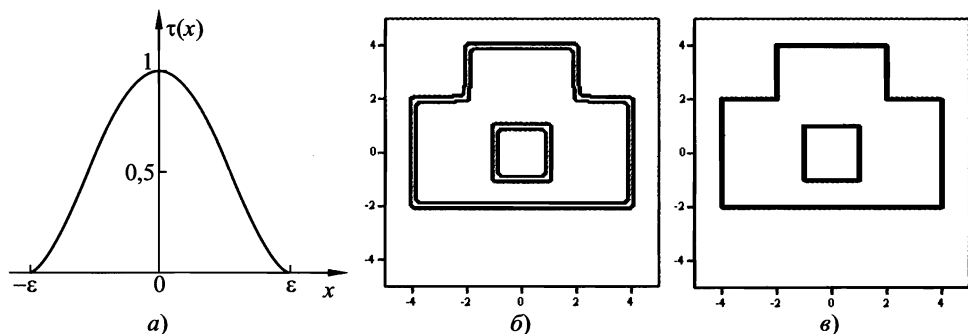


Рис. 6.5. а) график $\tau(x)$ при $n = 1$, б) locus ω_ε при $\varepsilon = 0,1$, в) locus ω_ε при $\varepsilon = 0,01$

Финитная функция $\tau(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 - \frac{x^2}{\varepsilon^2} + \left| 1 - \frac{x^2}{\varepsilon^2} \right| \right)^{n+1} \in C^n$ (рис. 6.5, а), $\text{supp } \tau(x, \varepsilon) = [-\varepsilon, \varepsilon]$ и $\max(\tau(x)) = 1$.

На рис. 6.4, а, б, и 6.5, б, в, изображены locus ω_ε с различными значениями ε . При уменьшении ε наблюдается уменьшение ширины пограничного слоя. Таким образом, выбирая параметр ε достаточно малым, можно добиться сколь угодно малой ε -окрестности границы области $\tilde{S}$. Семейство атомарных функций $\text{up}(x)$, $\text{fur}_N(x)$, $h_a(x)$, $\Xi_n(x)$, $g_k(x)$ [2] представлено широким классом финитных, бесконечно дифференцируемых функций, являющихся решением соответствующих функционально-дифференциальных уравнений.

Рассмотрим некоторые из них применительно к описанию границы области $\tilde{S}$.

1. Функция $\text{up}(x) \in C^n$ (рис. 6.6, а), $\text{supp } \text{up}(x, \varepsilon) = [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\max \text{up}(x) = 1$.

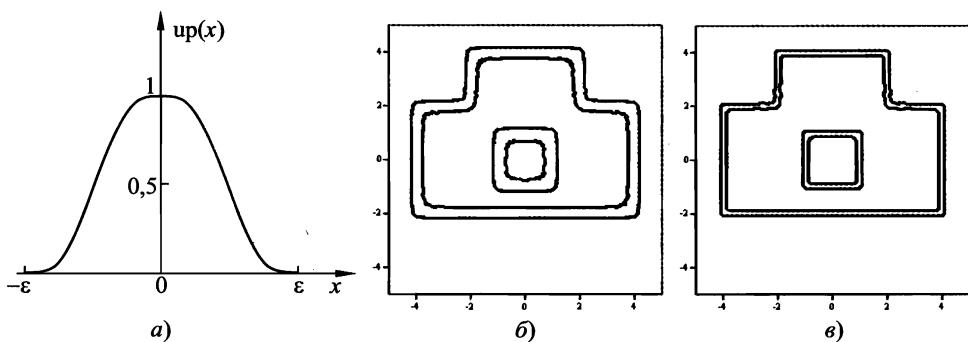


Рис. 6.6. а) график $\text{up}(x, \varepsilon)$, б) locus ω_ε при $\varepsilon = 0,1$, в) locus ω_ε при $\varepsilon = 0,01$

2. Функция $h_a(x) \in C^n$ (рис. 6.7, 6.8, а), $\text{supp } h_a(x, \varepsilon) = \left[-\frac{\varepsilon}{a-1}, \frac{\varepsilon}{a-1} \right]$

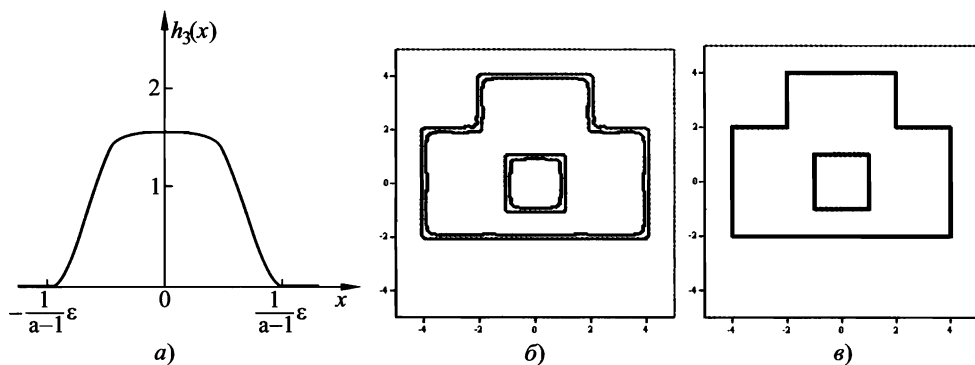


Рис. 6.7. а) график $h_3(x, \varepsilon)$, б) locus ω_ε при $\varepsilon = 0,1$, в) locus ω_ε при $\varepsilon = 0,01$

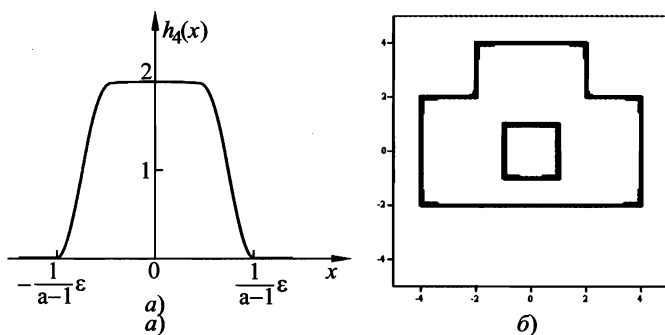


Рис. 6.8. а) график $h_4(x, \varepsilon)$, б) locus ω_ε при $\varepsilon = 0,1$

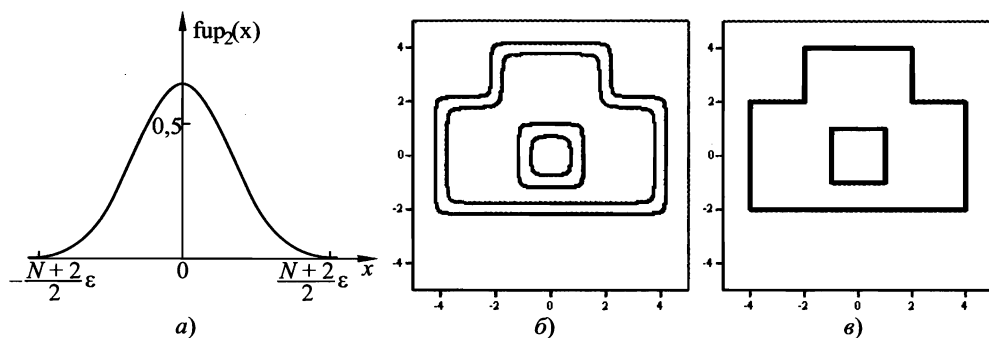


Рис. 6.9. а) график $\text{fup}_2(x)$; б) locus ω_ε при $\varepsilon = 0,1$; в) locus ω_ε при $\varepsilon = 0,01$

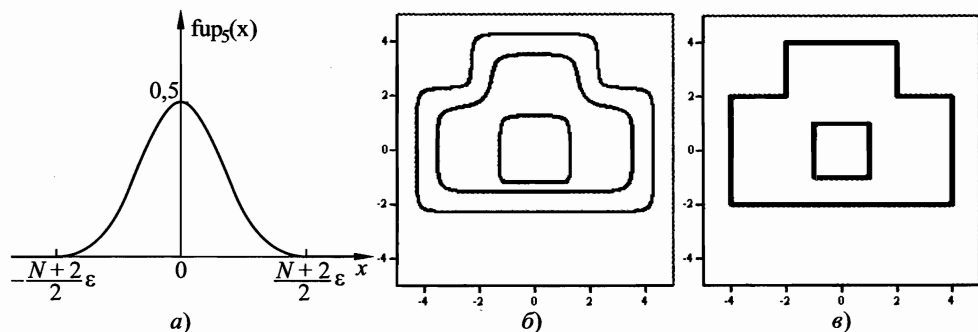


Рис. 6.10. а) график $\text{fup}_5(x)$; б) locus ω_ε при $\varepsilon = 0,1$, в) locus ω_ε при $\varepsilon = 0,01$

3. Функция $\text{fup}_N(x) \in C^n$ (рис. 6.9, а, 6.10, а), $\text{supp fup}_N(x, \varepsilon) = \left[-\frac{N+2}{2} \cdot \varepsilon, \frac{N+2}{2} \cdot \varepsilon \right]$.

Из рис. 6.7–6.10 следует, что ширина пограничного слоя locusов зависит не только от значения ε , но и от параметров, определяющих величину носителя финитной функции. Следовательно, ε -окрестность locusа полностью определяется величиной носителя финитной функции. Такой подход может быть использован для сглаживания угловых точек locusа. Неравенство

$$\omega(x, y) - f(\omega(x, y)) \geq 0, \quad (6.12)$$

где $\omega(x, y)$ — уравнение $\tilde{S}$, $f(x)$ — финитная функция определяет область S_Γ , граница ∂S_Γ которой отличается от границы $\partial \tilde{S}$ области $\tilde{S}$ лишь некоторыми закруглениями, расположенными в ε -окрестности ω_ε . При этом, выбирая параметр ε достаточно малым, можно добиться сколь угодно малого отклонения ∂S_Γ от $\partial \tilde{S}$.

Результаты, полученные при помощи финитных функций, представленных выше, приведены на рис. 6.11.

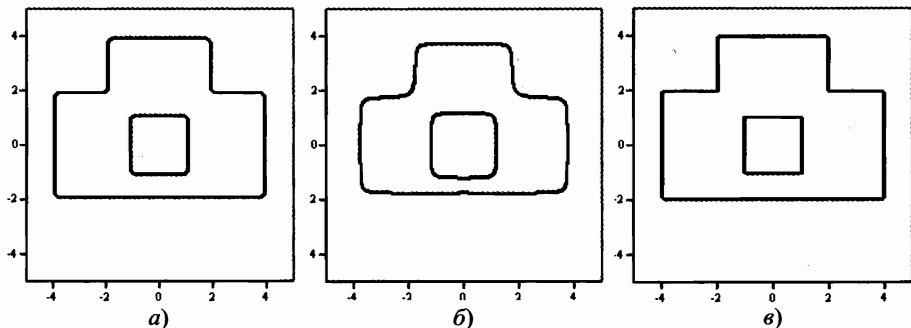


Рис. 11. а) locus $\omega_\Gamma(x, y) = \omega(x, y) - \text{up}(\omega(x, y))$ при $\varepsilon = 0,1$;
 б) locus $\omega_\Gamma(x, y) = \omega(x, y) - \text{fup}_N(\omega(x, y))$ при $\varepsilon = 0,1$, $N = 5$;
 в) locus $\omega_\Gamma(x, y) = \omega(x, y) - h_a(\omega(x, y))$ при $\varepsilon = 0,1$, $a = 3$

6.4. Заполнение внутренней области локусов

Рисунки локусов более информативны, если графически представлены не только их границы, но и структуры внутренних областей. Задача сводится к получению описания пересечения локуса $\omega_0(x, y)$ с функцией $\gamma(x, y)$, несущей информацию о характере заполнения, и объединения с контуром локуса. Наиболее часто используется заливка и штрихование. Штрихование представляет собой пересечение плоской фигуры повторяющимися линиями, которые легко получить с помощью периодической функции. Заполненный локус строится при помощи типовой формулы

$$\omega(x, y) = f(\omega_0(x, y)) \vee [\gamma(x, y) \wedge \omega_0(x, y)]. \quad (6.13)$$

Здесь $\omega_0(x, y)$ — функция, описывающая исходный локус S_0 ; $f(x, y)$ — финитная функция; $\gamma(x, y)$ — функция узора.

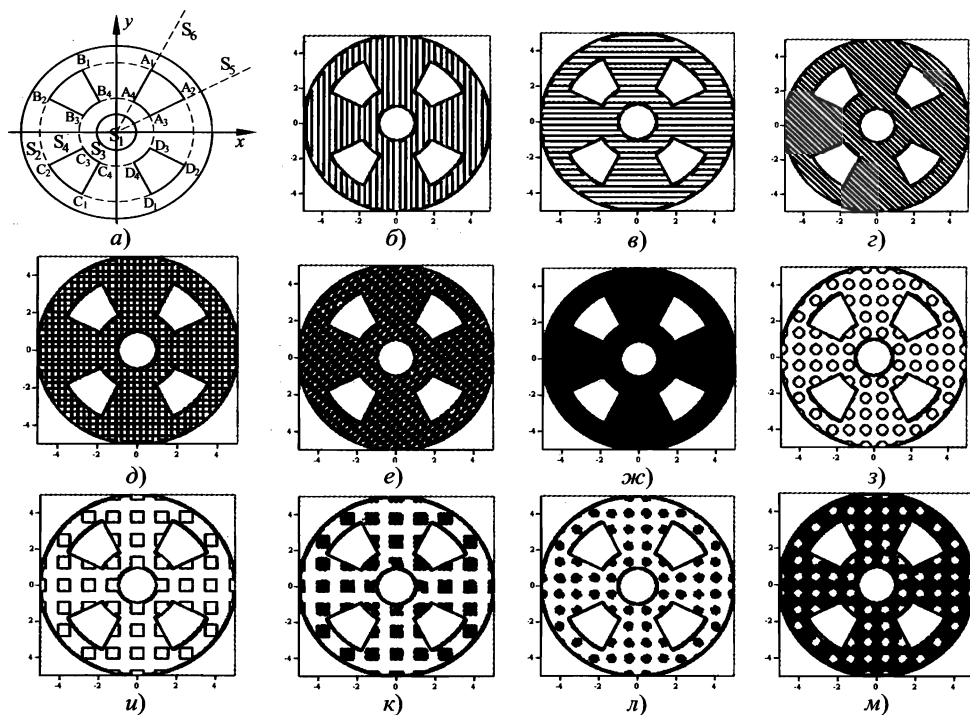


Рис. 6.12. а) локус $\omega_0(x, y)$; б) вертикальная штриховка локуса $\omega_0(x, y)$; в) горизонтальная штриховка $\omega_0(x, y)$; г) наклонная штриховка $\omega_0(x, y)$; д) сетчатая штриховка $\omega_0(x, y)$; е) штриховка ромбом $\omega_0(x, y)$; ж) заливка $\omega_0(x, y)$; з), и) узор; к), л), м) заливка узора

Пусть S_0 (рис. 6.12, а) описывается с помощью областей: S_1, S_2, S_3, S_4 , ограниченных окружностями $\omega_1(x, y) = \frac{1}{10}[25 - x^2 - y^2]$, $\omega_2(x, y) = \frac{1}{2}[1 - x^2 - y^2]$, $\omega_3(x, y) = \frac{1}{4}[4 - x^2 - y^2]$, $\omega_4(x, y) = \frac{1}{8}[16 - x^2 - y^2]$; S_5 — полуплоскости, лежащей над прямой $\omega_5(x, y) = \frac{x - 2y}{\sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2 + 1}}$; S_6 — полуплоскости, лежащей под прямой $\omega_6(x, y) = \frac{2x - y}{\sqrt{4x^2 - 4xy + y^2 + 1}}$.

Учитывая симметричность $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$, $D_1D_2D_3D_4$ опишем locus S_0 при помощи следующего неравенства:

$$\begin{aligned} \omega_0(x, y) = \omega_1(x, y) \wedge_{\alpha} \left(- \left[\omega_2(x, y) \vee_{\alpha} \left\{ \left((-\omega_3(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_4(x, y)) \wedge_{\alpha} \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \wedge_{\alpha} (-\omega_5(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_6(x, y)) \right) \vee_{\alpha} (-\omega_3(x, -y) \wedge_{\alpha} \omega_4(x, -y)) \wedge_{\alpha} \right. \right. \\ \left. \left. \wedge_{\alpha} (-\omega_5(x, -y) \wedge_{\alpha} \omega_6(x, -y)) \vee_{\alpha} (-\omega_3(-x, y) \wedge_{\alpha} \right. \right. \\ \left. \left. \wedge_{\alpha} \omega_4(-x, y)) \wedge_{\alpha} (-\omega_5(-x, y) \wedge_{\alpha} \omega_6(-x, y)) \vee_{\alpha} (-\omega_3(-x, -y) \wedge_{\alpha} \right. \right. \\ \left. \left. \left. \wedge_{\alpha} \omega_4(-x, -y)) \wedge_{\alpha} (-\omega_5(-x, -y) \wedge_{\alpha} \omega_6(-x, -y)) \right\} \right] \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Введем функцию, с помощью которой описывается узор. Возможны следующие варианты штрихования:

$\gamma_1(x, y) = \cos(10x)$ — вертикальная штриховка (рис. 6.12, б);

$\gamma_2(x, y) = \cos(10y)$ — горизонтальная штриховка (рис. 6.12, в);

$\gamma_3(x, y) = \cos(10(x + y))$ — наклонная штриховка (рис. 6.12, г);

$\gamma_4(x, y) = \cos(10x) \cdot \cos(10y)$ — сетчатая штриховка (рис. 6.12, д);

$\gamma_5(x, y) = \cos(5(2y - x)) \cdot \cos(5(2x - y))$ —

штриховка ромбом (рис. 6.12, е);

Заливка (рис. 6.12, ж) осуществляется по одной из выше предложенных формул путем увеличения частоты функции: $\gamma_6(x, y) = \cos(100x) \cdot \cos(100y)$. Для получения разнообразных узоров используется тот же подход:

$\gamma_7(x, y) = r^2 - \cos ax^2 - \cos by^2$ — заполнение локуса кругами радиуса r с периодом $a = b$ (рис. 6.12, з). Изменяя параметры r, a, b , меняем узор (рис. 6.12, и).

$\gamma_9(x, y) = \cos(ax) \wedge \cos(bx)$ — заполнение локуса квадратами $a = b$.

Заливку внутреннего узора запишем в следующем виде:

$\gamma_{10}(x, y) = [(\cos(ax) \wedge \cos(bx))] \wedge \cos(100xy)$ (рис. 6.12, к).

$\gamma_8(x, y) = \pm(r^2 - \cos ax^2 - \cos by^2) \wedge (\cos(100xy))$ (рис. 6.12, л, м).

6.5. Раскрой локусов

С точки зрения аналитической геометрии решение этой классической задачи сводится к получению уравнения пересечения фигуры с некоторой разрезающей областью. Приведем пример раскроя ранее описанного локуса S_0 (рис. 6.12, а). Уравнение сплошной фигуры раскроя возьмем в виде

$$r(x, y) = \left(\frac{9 - (x - x_1)^2}{6} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{4 - (y - y_1)^2}{4} \right). \quad (6.14)$$

Здесь x_1 и y_1 задают нужное позиционирование $r(x, y)$ на плоскости чертежа. Локус раскроя (рис. 6.13) описывается при помощи следующего неравенства:

$$\omega(x, y) = [r(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{\gamma}(x, y)] \vee_{\alpha} \tau(r(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_0(x, y)) \geq 0, \quad (6.15)$$

где $\omega_0(x, y)$ — функция, определяющая исходный локус S_0 ,

$\omega_{\gamma}(x, y)$ — функция, определяющая исходный локус S_0 ,

$\tau(x, y)$ — финитная функция.

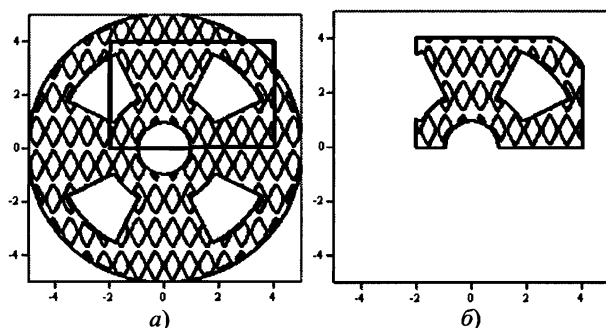


Рис. 6.13. а) локус с наложением фигуры раскроя, б) вырезанная область с контуром

С помощью предложенной выше методики, возможно проведение разрезания областями произвольной формы, в том числе и незамкнутыми. Продолжением данной задачи может явиться разработка оптимального, по некоторым критериям, раскроя локуса на n частей элементом M , а также задача оптимального размещения n объектов внутри площади S .

6.6. Комбинированные локусы

Теория R-функций позволяет описывать не только отдельные объекты, но и семейство, состоящее из их множества. Одним из интересных примеров является описание игрового поля шахматной доски. Описание начнем с формирования локусов шахматных фигур. Почти все из них имеют осесимметричную форму. Это облегчает построение. Достаточно построить

линию образующей, а затем осуществить преобразование координат. Ось симметрии локуса совпадает с осью ординат. Изображение конструируется из опорных геометрических объектов. В свою очередь, каждый из опорных геометрических объектов может являться совокупностью построений.

При построении локуса пешки разобьем его на ряд подобластей $\omega_1 \dots \omega_5$ (см. рис. 6.14 на цветной вклейке).

Функция, определяющая локус, имеет вид

$$\omega_{\text{пешки}}(x, y) = \omega_1^{\text{пешка}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_2^{\text{пешка}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_3^{\text{пешка}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_4^{\text{пешка}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_5^{\text{пешка}}(x, y). \quad (6.16)$$

Для наглядности осевой симметрии необходимо разграничить между собой подобласти: $\omega_1^{\text{пешка}}$, $\omega_2^{\text{пешка}}$, $\omega_3^{\text{пешка}}$, $\omega_4^{\text{пешка}}$, $\omega_5^{\text{пешка}}$. Это осуществляется разделением соседних областей параметром ε ($\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$).

1. ω_1 сконструируем из ω_{11} -окружности и ω_{12} -прямоугольника.

$$\omega_1^{\text{пешка}}(x, y) = \omega_{11}^{\text{пешка}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{12}^{\text{пешка}}(x, y), \quad (6.17)$$

$\omega_{11}^{\text{пешка}}(x, y) = \frac{1}{2}[1 - (x - 6)^2 - (y - 1)^2] = 0$ — нормализованное до первого порядка уравнение окружности.

$\omega_{12}^{\text{пешка}}(x, y) = \left(\frac{9 - (x - 3)^2}{6}\right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{1 - (y - 1)^2}{2}\right) = 0$ — нормализованное до первого порядка уравнение прямоугольника.

2. $\omega_2^{\text{пешка}}(x, y)$ получается аналогично:

$$\omega_{21}^{\text{пешка}}(x, y) = \frac{1}{3}[2,25 - (x - 3,5)^2 - (y - 3,5 - \varepsilon)^2] = 0,$$

$$\omega_{22}^{\text{пешка}}(x, y) = \left(\frac{3,0625 - (x - 1,75)^2}{3,5}\right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{2,25 - (y - 3,5 - \varepsilon)^2}{3}\right) = 0,$$

$$\omega_2^{\text{пешка}}(x, y) = \omega_{21}^{\text{пешка}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{22}^{\text{пешка}}(x, y) \quad (6.18)$$

3. Построение $\omega_3^{\text{пешка}}(x, y)$ представляет собой пересечение множеств геометрических мест точек прямоугольника $\omega_{31}^{\text{пешка}}$ и параболы $\omega_{32}^{\text{пешка}}$

$$\omega_{31}^{\text{пешка}}(x, y) = \left(\frac{6,25 - (x - 2,5)^2}{5}\right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{4 - (y - 7 - \varepsilon)^2}{14}\right) = 0.$$

Для вывода нормализованного до первого порядка уравнения параболы $\omega_{32}^{\text{пешка}}(x, y) = (x - 5)^2 - y + 2 = 0$ воспользуемся известной формулой [1].

$$\omega(x, y) = \omega_1 \left(\omega_1^2 + |\text{grad } \omega_1|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Тогда } \omega_{32}^{\text{пешка}}(x, y) = \frac{(x - 5)^2 - y + 2}{\sqrt{((x - 5)^2 - y + 2)^2 + (2x - 11)^2}},$$

$$\omega_3^{\text{пешка}}(x, y) = \omega_{31}^{\text{пешка}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{32}^{\text{пешка}}(x, y). \quad (6.19)$$

$$4. \quad \omega_4^{\text{пешка}}(x, y) = \omega_{41}^{\text{пешка}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{42}^{\text{пешка}}(x, y), \quad (6.20)$$

где

$$\omega_{41}^{\text{пешка}}(x, y) = 0,25 - (x - 2,5)^2 - (y - 9,5 - \varepsilon)^2,$$

$$\omega_{42}^{\text{пешка}}(x, y) = \left(\frac{1,5625 - (x - 1,25)^2}{2,5} \right) \wedge_{\alpha} (0,25 - (y - 9,5 - \varepsilon)^2).$$

$$5. \quad \omega_5^{\text{пешка}}(x, y) = \frac{1}{5} [6,25 - x^2 - (y - 12,5 - \varepsilon)^2]. \quad (6.21)$$

Рассматривая совокупность проведенных операций, можно вывести схему построения:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{пешки}}(x, y) = & (\omega_{11}^{\text{пешка}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{12}^{\text{пешка}}(x, y)) \vee_{\alpha} (\omega_{21}^{\text{пешка}}(x, y) \vee_{\alpha} \\ & \vee_{\alpha} \omega_{22}^{\text{пешка}}(x, y)) \vee_{\alpha} (\omega_{31}^{\text{пешка}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{32}^{\text{пешка}}(x, y)) \vee_{\alpha} (\omega_{41}^{\text{пешка}}(x, y) \vee_{\alpha} \\ & \vee_{\alpha} \omega_{42}^{\text{пешка}}(x, y)) \vee_{\alpha} \omega_5^{\text{пешка}}(x, y). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Получилось громоздкое выражение. Однако, сложная функция, описывающая пешку, представлена классом элементарных функций: окружность, прямая, парабола. Для построения другой стороны пешки воспользуемся преобразованием координат. Так как функция $\omega_{\text{пешка}}(x, y)$ должна быть симметричной относительно оси ординат, то она четная по x . Таким образом, выполнив преобразование, $\omega_{\text{пешка}}^{\text{сим}}(x, y) = \omega_{\text{пешки}}(-x, y)$ получим locus, симметричный относительно y .

Для получения описания всей фигуры необходимо объединить исходную область и симметричную ей R-операциями [1]

$$\omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x, y) = \omega_{\text{пешка}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{\text{пешка}}^{\text{сим}}(x, y) = \omega_{\text{пешка}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{\text{пешка}}(-x, y). \quad (6.23)$$

Таким образом, полученная функция равна нулю на оси симметрии. Для устранения "особой точки" необходимо сдвинуть locus $\omega_{\text{пешка}}(x, y)$ за ось ординат на некоторую малую величину ε ($\varepsilon > 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$), а затем выполнить преобразование симметрии: $\omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x, y, \varepsilon) = \omega_{\text{пешка}}(x - \varepsilon, y) \vee_{\alpha} \vee_{\alpha} \omega_{\text{пешка}}(-x + \varepsilon, y)$.

Следовательно, в окрестности $x = 0$ значение полученной функции будет отлично от нуля. При этом $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x, y, \varepsilon) = 0$. Это приводит к

искажению locus. Для исправления значения $\omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x, y, \varepsilon)$ необходимо умножить на функцию $\chi(x)$, которая была бы равна единице при всех x , кроме окрестности точки $x = 0$, и $\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x) = \infty$. В результате преобразований получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi(x) \omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x, y, \varepsilon) = \omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x, y). \quad (6.24)$$

Итак, функция $\chi(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ удовлетворяет заданным требованиям, является положительной и, следовательно, $\chi(x) \omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x, y, \varepsilon)$ — R-функция.

Тогда

$$\omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x, y) \Big|_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} = \frac{x^2 + 1}{x^2} [\omega_{\text{пешка}}(x - \varepsilon, y) \vee_{\alpha} \omega_{\text{пешка}}(-x + \varepsilon, y)]. \quad (6.25)$$

Построенная фигура представлена на рис. 6.15.

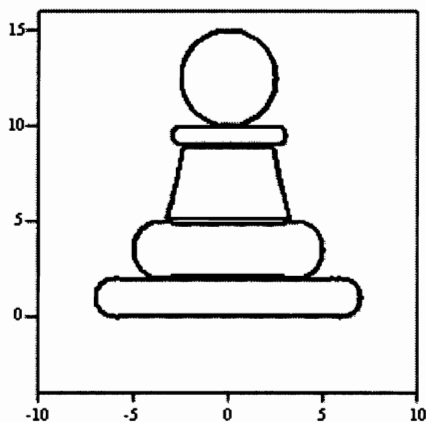


Рис. 6.15. Локус $\omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x, y)$

Решение такой задачи позволяет осуществить следующие операции: построить черные шахматные фигуры на **белом фоне**, а используя R-отрицание, — на **черном фоне**. Возникает вопрос: как представить белую шахматную фигуру на **белом фоне**, а черную на **черном фоне**? Ответ состоит в следующем: выделим некоторую ε -окрестность границы области, и используя операцию R-дизъюнкции, получим изображение белой шахматной фигуры на **белом фоне**. С помощью операций: R-отрицания, R-конъюнкции получим изображение черной шахматной фигуры на **черном фоне**. Для получения чертежа окрестности границы области воспользуемся рассмотренной ранее неотрицательной финитной функцией с носителем $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

$$\tau(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 - \frac{x^2}{\varepsilon^2} + \left| 1 - \frac{x^2}{\varepsilon^2} \right| \right)^{n+1}. \quad (6.26)$$

Здесь $\tau(x)$ при $x = 0$ принимает значение, равное единице. Кроме того, эта функция является четной и принадлежит классу $C^n[-\varepsilon, \varepsilon]$. Тогда функция

$$\omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x, y) = \tau(\omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x, y)) = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 - \frac{\omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}^2}(x, y)}{\varepsilon^2} + \left| 1 - \frac{\omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}^2}(x, y)}{\varepsilon^2} \right| \right)^{n+1} \quad (6.27)$$

в силу свойств $\tau(x)$ будет финитной с носителем, совпадающим с ε -окрестностью границы чертежа $\omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x, y) \geq 0$, а также принимающей в его

точках значение, равное единице. Кроме того, функция является в n раз непрерывно-дифференцируемой, неотрицательной функцией.

Локус $\omega_{\text{пешка}}^{\text{границ}}(x, y) = \tau(\omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x, y))$ приведен на рис. 6.16.

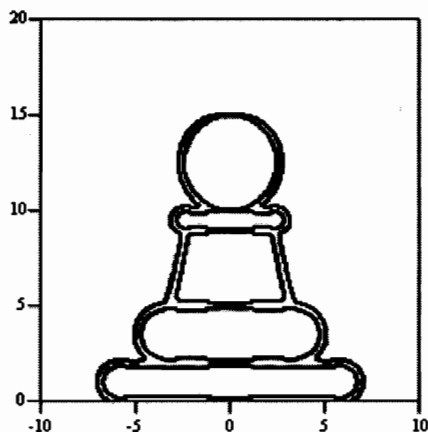


Рис. 6.16. Локус $\tau(\omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x, y))$

Локусы остальных шахматных фигур строятся аналогично. Конструируем область образующей и отображаем ее относительно оси ординат. Локус ладьи получим при помощи следующих конструкций, представленных на рис. 6.17 на цветной вклейке.

$$6. \quad \omega_1^{\text{ладья}}(x, y) = \omega_{11}^{\text{ладья}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{12}^{\text{ладья}}(x, y), \quad (6.28)$$

где $\omega_{11}^{\text{ладья}}(x, y) = \frac{1}{2} [1 - (x - 6)^2 - (y - 1)^2]$ — нормализованное уравнение окружности,

$\omega_{12}^{\text{ладья}}(x, y) = \left(\frac{9 + (x - 3)^2}{6} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{1 + (y - 1)^2}{2} \right)$ — нормализованное уравнение прямоугольника.

7. Область $\omega_2^{\text{ладья}}(x, y)$ — прямоугольник, правая сторона которого $\omega_{21}^{\text{ладья}}(x, y)$ отсекается параболой $\omega_{22}^{\text{ладья}}(x, y)$:

$$\omega_2^{\text{ладья}}(x, y) = \omega_{21}^{\text{ладья}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{22}^{\text{ладья}}(x, y), \quad (6.29)$$

где $\omega_{21}^{\text{ладья}}(x, y) = \left(\frac{6,25 + (x - 2,5)^2}{5} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(6 - \varepsilon)^2 + (y - 8)^2}{2(6 - \varepsilon)} \right)$ — нормализованное уравнение прямоугольника,

$$\omega_{22}^{\text{ладья}}(x, y) = \frac{2(x - 5)^2 - y - 2}{\sqrt{16x^4 - 320x^3 + 2432x^2 - 8x^2y - 8328x + 80xy + 10845 - 204y + y^2}} -$$

нормализованное уравнение параболы.

8. $\omega_3^{\text{ладья}}(x, y)$ — прямоугольник $\omega_{31}^{\text{ладья}}(x, y)$ с вырезом в верхней части $\omega_{32}^{\text{ладья}}(x, y)$, где

$$\omega_{31}^{\text{ладья}}(x, y) \Big|_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} = \left(\frac{6,25 + (x - 2,5)^2}{5} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(2 - \varepsilon)^2 + (y - 16)^2}{2(2 - \varepsilon)} \right),$$

$$\omega_{32}^{\text{ладья}}(x, y) = \left(\frac{1 + (x - 2)^2}{2} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{4 + (y - 18)^2}{4} \right)$$

— нормализованные уравнения прямоугольников.

Таким образом,

$$\omega_3^{\text{ладья}}(x, y) = \omega_{31}^{\text{ладья}}(x, y) \wedge_{\alpha} (-\omega_{32}^{\text{ладья}}(x, y)). \quad (6.30)$$

Общее уравнение образующей чертежа ладьи имеет следующий вид:

$$\omega_{\text{ладья}}(x, y) = (\omega_{11}^{\text{ладья}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{12}^{\text{ладья}}(x, y)) \vee_{\alpha} (\omega_{21}^{\text{ладья}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{22}^{\text{ладья}}(x, y)) \vee_{\alpha} (\omega_{31}^{\text{ладья}}(x, y) \wedge_{\alpha} (-\omega_{32}^{\text{ладья}}(x, y))). \quad (6.31)$$

Преобразование симметрии дает:

$$\omega_{\text{ладья}}^{\text{полн}}(x, y) = \omega_{\text{ладья}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{\text{ладья}}^{\text{сим}}(x, y) = \omega_{\text{ладья}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{\text{ладья}}(-x, y). \quad (6.32)$$

Устранив нежелательный эффект нулевого значения функции $\omega_{\text{ладья}}^{\text{полн}}(x, y)$ на оси симметрии, получим уравнение вида

$$\omega_{\text{ладья}}^{\text{полн}}(x, y) \Big|_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} = \frac{x^2 + 1}{x^2} [\omega_{\text{ладья}}(x - \varepsilon, y) \vee_{\alpha} \omega_{\text{ладья}}(-x + \varepsilon, y)], \quad (6.33)$$

описывающее locus ладьи (рис. 6.18).

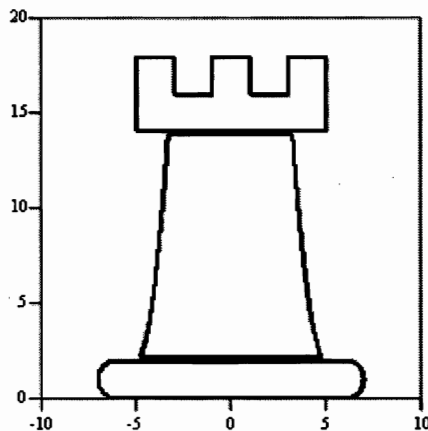
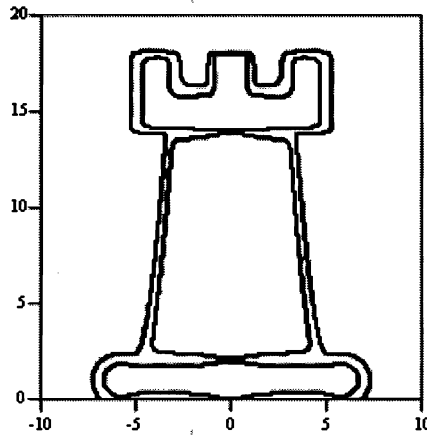


Рис. 6.18. Лocus $\omega_{\text{ладья}}^{\text{полн}}(x, y)$

Рис. 6.19. Локус $\tau(\omega_{\text{ладья}}^{\text{полн}}(x, y))$

Локус окрестности границ области $\omega_{\text{ладья}}^{\text{полн}}(x, y)$ следующий (рис. 6.19):

$$\omega_{\text{ладья}}^{\text{границ}}(x, y) = \tau(\omega_{\text{ладья}}^{\text{полн}}(x, y)) = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 - \frac{\omega_{\text{ладья}}^{\text{полн}^2}}{\varepsilon^2} + \left| 1 - \frac{\omega_{\text{ладья}}^{\text{полн}^2}}{\varepsilon^2} \right| \right)^{n+1}. \quad (6.34)$$

Построение фигуры коня (см. рис. 6.20 на цветной вклейке) начнем с основания, являющегося осесимметричным.

9. Основание $\omega_1^{\text{конь}}(x, y)$ получим отсечением боковой грани прямоугольника $\omega_{11}^{\text{конь}}(x, y)$, окружностью $\omega_{12}^{\text{конь}}(x, y)$ с центром в начале координат

$$\omega_1^{\text{конь}}(x, y) = \omega_{11}^{\text{конь}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{12}^{\text{конь}}(x, y), \quad (6.35)$$

где $\omega_{11}^{\text{конь}}(x, y) = \frac{1}{12} [36 - x^2 - y^2]$ — нормализованное уравнение прямоугольника,

$\omega_{12}^{\text{конь}}(x, y) = \left(\frac{16 + (x-4)^2}{8} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{1 + (y-1)^2}{2} \right)$ — нормализованное уравнение окружности.

10. Функцию $\omega_2^{\text{конь}}(x, y)$ представим так

$$\omega_2^{\text{конь}}(x, y) = \omega_{21}^{\text{конь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{22}^{\text{конь}}(x, y), \quad (6.36)$$

где $\omega_{21}^{\text{конь}}(x, y) = \frac{1}{2(1,5 - \varepsilon)} [(1,5 - \varepsilon)^2 - (x - 3,5)^2 - (y - 3,5)^2]$ — нормализованное уравнение окружности,

$\omega_{22}^{\text{конь}}(x, y) = \left(\frac{3,0625 + (x - 1,75)^2}{3,5} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(1,5 - \varepsilon)^2 + (y - 3,5)^2}{2(1,5 - \varepsilon)} \right)$ — нормализованное уравнение прямоугольника.

11. Функция $\omega_3^{\text{конь}}(x, y)$ не обладает симметрией и определена как при $x > 0$, так и при $x < 0$. Поэтому сначала надо объединить и $\omega_2^{\text{конь}}(x, y)$, применив к ним преобразование симметрии, а затем дополнить locus областью $\omega_3^{\text{конь}}(x, y)$

$$\omega_{1\cup 2}^{\text{конь}}(x, y) = \omega_1^{\text{конь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_2^{\text{конь}}(x, y). \quad (6.37)$$

Для исключения нулевого значения $\omega_{1\cup 2}^{\text{конь}}(x, y)$ в окрестности оси симметрии запишем

$$\omega_{1\cup 2}^{\text{конь}}(x, y) \Big|_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} = \frac{x^2 + 1}{x^2} [\omega_{1\cup 2}^{\text{конь}}(x - \varepsilon, y) \vee_{\alpha} \omega_{1\cup 2}^{\text{конь}}(-x + \varepsilon, y)]. \quad (6.38)$$

12. Область $\omega_3^{\text{конь}}(x, y)$ состоит из следующих конструкций:

$\omega_{31}^{\text{конь}}(x, y) = \left(\frac{4 + (x + 2)^2}{4} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(6 - \varepsilon)^2 + (y - 11)^2}{2(6 - \varepsilon)} \right)$ — нормализованное уравнение прямоугольника.

Отсекаем $\omega_{31}^{\text{конь}}(x, y)$ параболой $\omega_{32}^{\text{конь}}(x, y)$, применяя операцию R-конъюнкции:

$$\omega_{31\cup 32}^{\text{конь}}(x, y) = \omega_{31}^{\text{конь}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{32}^{\text{конь}}(x, y), \quad (6.39)$$

где $\omega_{32}^{\text{конь}}(x, y) = \frac{-0,8x^2 - y + 16}{\sqrt{(0,64x^2 - y + 16)^2 - (1,6x - 1)^2}}$ — нормализованное уравнение параболы.

Аналогично представляем следующие части локуса:

$$\omega_{33\cap 34}^{\text{конь}}(x, y) = \omega_{33}^{\text{конь}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{34}^{\text{конь}}(x, y), \quad (6.40)$$

где

$$\omega_{33}^{\text{конь}}(x, y) = \left(\frac{4 + (x - 2)^2}{4} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(3 - \varepsilon)^2 + (y - 8)^2}{2(3 - \varepsilon)} \right),$$

$$\omega_{34}^{\text{конь}}(x, y) = \frac{-0,4x^2 - y + 12}{\sqrt{(0,16x^2 - y + 12)^2 + (0,8x - 1)^2}}.$$

Область $\omega_{35\cap 36}^{\text{конь}}(x, y) = \omega_{35}^{\text{конь}}(x, y) \wedge_{\alpha} [-\omega_{36}^{\text{конь}}(x, y)]$, где

$$\omega_{35}^{\text{конь}}(x, y) = \left(\frac{9 - (x - 3)^2}{6} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(3 - \varepsilon)^2 - (y - 13)^2}{2(3 - \varepsilon)} \right),$$

$$\omega_{36}^{\text{конь}}(x, y) = \frac{-0,05x^2 - y + 11}{\sqrt{(0,0025x^2 - y + 11)^2 + (0,1x - 1)^2}}.$$

Далее, используя набор функций: $\omega_{35\cap 36}^{\text{конь}}(x, y)$, $\omega_{37}^{\text{конь}}(x, y)$, $\omega_{38}^{\text{конь}}(x, y)$, $\omega_{39}^{\text{конь}}(x, y)$, $\omega_{310}^{\text{конь}}(x, y)$, $\omega_{311}^{\text{конь}}(x, y)$, $\omega_{312}^{\text{конь}}(x, y)$, $\omega_{313}^{\text{конь}}(x, y)$, $\omega_{314}^{\text{конь}}(x, y)$, достраиваем locus при помощи следующих R-операций:

$$\omega_{35\dots 314}^{\text{конь}}(x, y) = [[[\omega_{35\cap 36}^{\text{конь}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{37}^{\text{конь}}(x, y)] \vee_{\alpha} \omega_{38}^{\text{конь}}(x, y)] \wedge_{\alpha} [-\omega_{39}^{\text{конь}}(x, y)]] \vee_{\alpha} \vee_{\alpha} \omega_{310}^{\text{конь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{311}^{\text{конь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{312}^{\text{конь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{313\cap 314}^{\text{конь}}(x, y). \quad (6.41)$$

Эти функции описываются такими уравнениями:

$$\omega_{37}^{\text{конь}}(x, y) = \frac{-0,13x^2 - y + 16}{\sqrt{(0,0169x^2 - y + 16)^2 + (0,26x - 1)^2}},$$

$$\omega_{38}^{\text{конь}}(x, y) = \frac{1}{2,5} [1,44 - (x - 5,1)^2 - (y - 10,7)^2],$$

$$\omega_{39}^{\text{конь}}(x, y) = \frac{1}{0,6} [0,9 - (x - 2,2)^2 - (y - 14)^2],$$

$$\omega_{310}^{\text{конь}}(x, y) = \left\{ \frac{1}{6} [9 - (x + 1,5)^2 - (y - 7)^2] \right\} \wedge_{\alpha} \left\{ \frac{y - 5}{\sqrt{(y - 5)^2 + 1}} \right\},$$

$$\omega_{311}^{\text{конь}}(x, y) = \frac{1}{4,4} [4,84 - (x + 1)^2 - (y - 11,5)^2],$$

$$\omega_{312}^{\text{конь}}(x, y) = \frac{1}{2,2} [1,21 - (x + 0,9)^2 - (y - 14,5)^2].$$

Отметим, что $\omega_{313 \cap 314}^{\text{конь}}(x, y) = \omega_{313}^{\text{конь}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{314}^{\text{конь}}(x, y)$, где

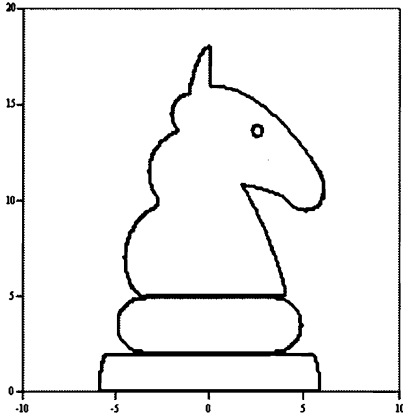
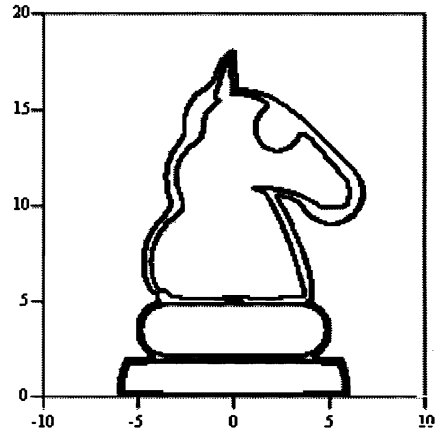
$$\omega_{313}^{\text{конь}}(x, y) = \left(\frac{1 - (x + 1)^2}{2} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{2,25 - (y - 17)^2}{3} \right),$$

$$\omega_{314}^{\text{конь}}(x, y) = \frac{-2x^2 - y + 18}{\sqrt{16x^4 - 8x^2y + 160x^2 + y^2 - 36y + 8x + 325}}.$$

Общее уравнение локуса имеет вид (рис. 6.21).

$$\omega_{\text{конь}}^{\text{полн}}(x, y) =$$

$$\begin{aligned} &= \left[\left[\left[\left\{ \omega_{35}^{\text{конь}}(x, y) \wedge_{\alpha} \left(-\omega_{36}^{\text{конь}}(x, y) \right) \right\} \wedge_{\alpha} \omega_{37}^{\text{конь}}(x, y) \right] \vee_{\alpha} \omega_{38}^{\text{конь}}(x, y) \right] \wedge_{\alpha} \right. \\ &\quad \left. \wedge_{\alpha} \left(-\omega_{39}^{\text{конь}}(x, y) \right) \right] \vee_{\alpha} \omega_{310}^{\text{конь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{311}^{\text{конь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{312}^{\text{конь}}(x, y) \vee_{\alpha} \\ &\quad \vee_{\alpha} \left\{ \omega_{313}^{\text{конь}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{314}^{\text{конь}}(x, y) \right\} \vee_{\alpha} \left[\left\{ \omega_{33}^{\text{конь}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{34}^{\text{конь}}(x, y) \right\} \vee_{\alpha} \right. \\ &\quad \left. \vee_{\alpha} \left[\left\{ \omega_{31}^{\text{конь}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{32}^{\text{конь}}(x, y) \right\} \vee_{\alpha} \left\{ \chi(x) \left[\omega_1^{\text{конь}}(x - \varepsilon, y) \vee_{\alpha} \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \vee_{\alpha} \omega_2^{\text{конь}}(x - \varepsilon, y) \vee_{\alpha} \omega_1^{\text{конь}}(-x + \varepsilon, y) \vee_{\alpha} \omega_2^{\text{конь}}(-x + \varepsilon, y) \right] \right\} \right] \right] \right]. \quad (6.42) \end{aligned}$$

Рис. 6.21. Локус $\omega_{\text{конь}}^{\text{полн}}(x, y)$ Рис. 6.22. Локус $\omega_{\text{конь}}^{\text{границ}}(x, y)$

Локус окрестности границ области запишем так (рис. 6.22):

$$\omega_{\text{конь}}^{\text{границ}}(x, y) = \tau(\omega_{\text{конь}}^{\text{полн}}(x, y)) = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 - \frac{\omega_{\text{конь}}^{\text{полн}^2}}{\varepsilon^2} + \left| 1 - \frac{\omega_{\text{конь}}^{\text{полн}^2}}{\varepsilon^2} \right| \right)^{n+1}. \quad (6.43)$$

Далее рассмотрим построение локуса слона (см. рис. 6.23 на цветной вклейке).

Конструктивные соотношения имеют следующий вид:

$$13. \omega_{11}^{\text{слон}}(x, y) = \frac{1}{12} [36 - x^2 - y^2],$$

$$\omega_{12}^{\text{слон}}(x, y) = \left(\frac{16 - (x - 4)^2}{8} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{1 - (y - 1)^2}{2} \right).$$

Таким образом,

$$\omega_1^{\text{слон}}(x, y) = \omega_{11}^{\text{слон}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{12}^{\text{слон}}(x, y). \quad (6.44)$$

14. Для следующей области $\omega_2^{\text{слон}}(x, y)$:

$$\omega_{21}^{\text{слон}}(x, y) = \frac{1}{2(1,5 - \varepsilon)} [(1,5 - \varepsilon)^2 - (x - 3,5)^2 - (y - 3,5)^2],$$

$$\omega_{22}^{\text{слон}}(x, y) = \left(\frac{3,4225 - (x - 1,75)^2}{3,7} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(1,5 - \varepsilon)^2 - (y - 3,5)^2}{2(1,5 - \varepsilon)} \right),$$

$$\omega_2^{\text{слон}}(x, y) = \omega_{21}^{\text{слон}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{22}^{\text{слон}}(x, y). \quad (6.45)$$

$$15. \omega_3^{\text{слон}}(x, y) = \omega_{31}^{\text{слон}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{32}^{\text{слон}}(x, y), \quad (6.46)$$

где

$$\omega_{31}^{\text{слон}}(x, y) = \left(\frac{2,56 - (x - 1,5)^2}{3,2} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(3,5 - \varepsilon)^2 - (y - 8,5)^2}{2(3,5 - \varepsilon)} \right),$$

$$\omega_{32}^{\text{слон}}(x, y) = \frac{(2x - 6)^2 - y + 5,5}{\sqrt{\left((2x - 6)^2 - y + 5,5 \right)^2 + (4x - 13)^2}}.$$

16. Далее представим $\omega_4^{\text{ферзь}}(x, y)$ в виде

$$\omega_4^{\text{слон}}(x, y) = \omega_{41}^{\text{слон}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{42}^{\text{слон}}(x, y), \quad (6.47)$$

где

$$\omega_{41}^{\text{слон}}(x, y) = \frac{1}{2(0,5 - \varepsilon)} [(0,5 - \varepsilon)^2 - (x - 2)^2 - (y - 12,5)^2],$$

$$\omega_{42}^{\text{слон}}(x, y) = \left(\frac{1,21 - (x - 1)^2}{2,2} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(0,5 - \varepsilon)^2 - (y - 12,5)^2}{2(0,5 - \varepsilon)} \right).$$

17. Аналогично для

$$\omega_5^{\text{слон}}(x, y) = \omega_{51}^{\text{слон}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{52}^{\text{слон}}(x, y), \quad (6.48)$$

$$\omega_{51}^{\text{слон}}(x, y) = \frac{1}{2(0,5 - \varepsilon)} [(0,5 - \varepsilon)^2 - (x - 1)^2 - (y - 13,5)^2],$$

$$\omega_{52}^{\text{слон}}(x, y) = \left(\frac{0,36 - (x - 0,5)^2}{1,2} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(0,5 - \varepsilon)^2 - (y - 13,5)^2}{2(0,5 - \varepsilon)} \right).$$

18. Локус функции $\omega_6^{\text{слон}}(x, y)$ получаем следующим образом:

$$\omega_6^{\text{слон}}(x, y) = [\omega_{61}^{\text{слон}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{62}^{\text{слон}}(x, y)] \wedge_{\alpha} \omega_{63}^{\text{слон}}(x, y), \quad (6.49)$$

$$\omega_{61}^{\text{слон}}(x, y) = \frac{-0,3x^2 - y + 17}{\sqrt{(0,09x^2 - y + 17)^2 + (-0,6x - 1)^2}},$$

$$\omega_{62}^{\text{слон}}(x, y) = \left(\frac{1,21 - (x - 1)^2}{2} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(1,5 - \varepsilon)^2 - (y - 15,5)^2}{2(1,5 - \varepsilon)} \right),$$

$$\omega_{63}^{\text{слон}}(x, y) = \frac{1}{9} [20,25 - (x + 3)^2 - (y - 16)^2].$$

19. Вершина фигуры: $\omega_7^{\text{слон}}(x, y) = 0,25 - x^2 - (y - 17,5)^2$.

Получаем уравнение локуса в следующем виде:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{слон}}(x, y) = & [\omega_{11}^{\text{слон}}(x, y) \wedge \omega_{12}^{\text{слон}}(x, y)] \vee_{\alpha} [\omega_{21}^{\text{слон}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{22}^{\text{слон}}(x, y)] \vee_{\alpha} \\ & \vee_{\alpha} [\omega_{31}^{\text{слон}}(x, y) \wedge \omega_{32}^{\text{слон}}(x, y)] \vee_{\alpha} [\omega_{41}^{\text{слон}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{42}^{\text{слон}}(x, y)] \vee_{\alpha} \\ & \vee_{\alpha} [\omega_{51}^{\text{слон}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{52}^{\text{слон}}(x, y)] \vee_{\alpha} \\ & \vee_{\alpha} \{ [\omega_{61}^{\text{слон}}(x, y) \wedge \omega_{62}^{\text{слон}}(x, y)] \wedge \omega_{62}^{\text{слон}}(x, y) \} \vee_{\alpha} \omega_7^{\text{слон}}(x, y). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Произведем преобразование симметрии

$$\omega_{\text{слон}}^{\text{полн}}(x, y) = \omega_{\text{слон}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{\text{слон}}^{\text{сим}}(x, y) = \omega_{\text{слон}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{\text{слон}}(-x, y). \quad (6.51)$$

Для исключения нулевого значения $\omega_{\text{слон}}^{\text{полн}}(x, y)$ в окрестности оси симметрии запишем

$$\omega_{\text{слон}}^{\text{полн}}(x, y) \Big|_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} = \frac{x^2 + 1}{x^2} [\omega_{\text{слон}}(x - \varepsilon, y) \vee_{\alpha} \omega_{\text{слон}}(-x + \varepsilon, y)], \quad (6.52)$$

которое описывает локус слона (рис. 6.24).

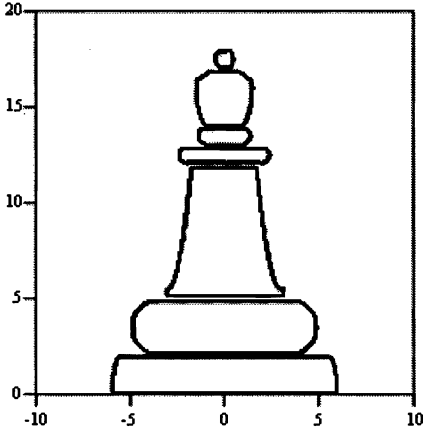


Рис. 6.24. Локус $\omega_{\text{слон}}^{\text{полн}}(x, y)$

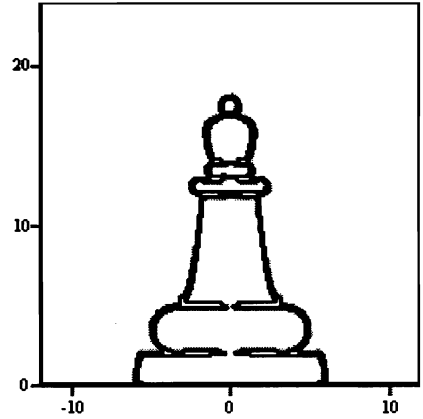


Рис. 6.25. Локус $\tau(\omega_{\text{слон}}^{\text{полн}}(x, y))$

Локус окрестности границ области таков (рис. 6.25):

$$\omega_{\text{слон}}^{\text{границ}}(x, y) = \tau(\omega_{\text{слон}}^{\text{полн}}(x, y)) = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 - \frac{\omega_{\text{слон}}^{\text{полн}2}}{\varepsilon^2} + \left| 1 - \frac{\omega_{\text{слон}}^{\text{полн}2}}{\varepsilon^2} \right| \right)^{n+1}. \quad (6.53)$$

Для описания фигуры ферзя (см. рис. 6.26 на цветной вклейке) необходимо проведение преобразований:

$$20. \quad \omega_1^{\text{ферзь}}(x, y) = \omega_{11}^{\text{ферзь}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{12}^{\text{ферзь}}(x, y), \quad (6.54)$$

$$\omega_{11}^{\text{ферзь}}(x, y) = \frac{1}{12} [36 - x^2 - y^2],$$

$$\omega_{12}^{\text{ферзь}}(x, y) = \left(\frac{16 + (x - 4)^2}{8} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{1 + (y - 1)^2}{2} \right).$$

21. Другая часть представляет собой уравнение вида:

$$\omega_2^{\text{ферзь}}(x, y) = \omega_{21}^{\text{ферзь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{22}^{\text{ферзь}}(x, y), \quad (6.55)$$

$$\omega_{21}^{\text{ферзь}}(x, y) = \frac{1}{2(1,5 - \varepsilon)} [(1,5 - \varepsilon)^2 - (x - 3,5)^2 - (y - 3,5)^2]$$

$$\omega_{22}^{\text{ферзь}}(x, y) = \left(\frac{3,0625 + (x - 1,75)^2}{3,5} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(1,5 - \varepsilon)^2 + (y - 3,5)^2}{2(1,5 - \varepsilon)} \right).$$

22. Далее

$$\omega_3^{\text{ферзь}}(x, y) = \omega_{31}^{\text{ферзь}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{32}^{\text{ферзь}}(x, y), \quad (6.56)$$

$$\omega_{31}^{\text{ферзь}}(x, y) = \frac{(2x - 6)^2 - y + 5,5}{\sqrt{\left((2x - 6)^2 - y + 5,5 \right)^2 + (4x - 13)^2}}$$

$$\omega_{32}^{\text{ферзь}}(x, y) = \left(\frac{2,25 + (x - 1,5)^2}{3} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(3,5 - \varepsilon)^2 + (y - 8,5)^2}{2(3,5 - \varepsilon)} \right).$$

Аналогично построим $\omega_4^{\text{ферзь}}$, $\omega_5^{\text{ферзь}}$:

$$23. \quad \omega_4^{\text{ферзь}}(x, y) = \omega_{41}^{\text{ферзь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{42}^{\text{ферзь}}(x, y), \quad (6.57)$$

$$\omega_{41}^{\text{ферзь}}(x, y) = \frac{1}{2(0,5 - \varepsilon)} [(0,5 - \varepsilon)^2 - (x - 2)^2 - (y - 12,5)^2],$$

$$\omega_{42}^{\text{ферзь}}(x, y) = \left(\frac{1 + (x - 1)^2}{2} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(0,5 - \varepsilon)^2 + (y - 12,5)^2}{2(0,5 - \varepsilon)} \right).$$

$$24. \quad \omega_5^{\text{ферзь}}(x, y) = \omega_{51}^{\text{ферзь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{52}^{\text{ферзь}}(x, y), \quad (6.58)$$

$$\omega_{51}^{\text{ферзь}}(x, y) = \frac{1}{2(0,5 - \varepsilon)} [(0,5 - \varepsilon)^2 - (x - 1)^2 - (y - 13,5)^2],$$

$$\omega_{52}^{\text{ферзь}}(x, y) = \left(0,25 + (x - 0,5)^2 \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(0,5 - \varepsilon)^2 + (y - 13,5)^2}{2(0,5 - \varepsilon)} \right).$$

25. $\omega_6^{\text{ферзь}}(x, y)$ — прямоугольник.

$$\omega_6^{\text{ферзь}}(x, y) = (0,25 + (x - 0,5)^2) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(1,5 - \varepsilon)^2 + (y - 15,5)^2}{2(1,5 - \varepsilon)} \right). \quad (6.59)$$

26. Далее

$$\omega_7^{\text{ферзь}}(x, y) = \omega_{71}^{\text{ферзь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{72}^{\text{ферзь}}(x, y), \quad (6.60)$$

$$\omega_{71}^{\text{ферзь}}(x, y) = \frac{1}{2(0,5 - \varepsilon)} [(0,5 - \varepsilon)^2 - (x - 1)^2 - (y - 16,5)^2],$$

$$\omega_{72}^{\text{ферзь}}(x, y) = (0,25 + (x - 0,5)^2) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(0,5 - \varepsilon)^2 + (y - 16,5)^2}{2(0,5 - \varepsilon)} \right).$$

27. Область $\omega_8^{\text{ферзь}}$ получается пересечением функций: $\omega_{81}^{\text{ферзь}}$ и $\omega_{82}^{\text{ферзь}}$

$$\omega_8^{\text{ферзь}}(x, y) = \omega_{81}^{\text{ферзь}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{82}^{\text{ферзь}}(x, y), \quad (6.61)$$

где

$$\omega_{81}^{\text{ферзь}}(x, y) = \frac{1}{2(4,5 - \varepsilon)} [(4,5 - \varepsilon)^2 - (x + 3)^2 - (y - 19)^2],$$

$$\omega_{82}^{\text{ферзь}}(x, y) = \left(\frac{1 + (x - 1)^2}{2} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(1,5 - \varepsilon)^2 + (y - 18,5)^2}{2(1,5 - \varepsilon)} \right).$$

28. Локус ферзя завершает область, представляющая собой пересечение двух парабол:

$$\omega_{91}^{\text{ферзь}}(x, y) = \frac{12x^2 - y + 20}{\sqrt{(12x^2 - y + 20)^2 + (24x - 1)^2}},$$

$$\omega_{92}^{\text{ферзь}}(x, y) = \frac{-12x^2 - y + 22}{\sqrt{(-12x^2 - y + 22)^2 + (-24x - 1)^2}}.$$

$$\omega_9^{\text{ферзь}}(x, y) = \omega_{91}^{\text{ферзь}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{92}^{\text{ферзь}}(x, y). \quad (6.62)$$

Итак,

$$\omega_{\text{ферзь}}(x, y) = \omega_1^{\text{ферзь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_2^{\text{ферзь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_3^{\text{ферзь}}(x, y) \vee_{\alpha}$$

$$\vee_{\alpha} \omega_4^{\text{ферзь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_5^{\text{ферзь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_6^{\text{ферзь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_7^{\text{ферзь}}(x, y) \vee_{\alpha}$$

$$\vee_{\alpha} \omega_8^{\text{ферзь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_9^{\text{ферзь}}(x, y). \quad (6.63)$$

Осуществим преобразование симметрии

$$\omega_{\text{ферзь}}^{\text{полн}}(x, y) = \omega_{\text{ферзь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{\text{ферзь}}^{\text{сим}}(x, y) = \omega_{\text{ферзь}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{\text{ферзь}}(-x, y).$$

$$(6.64)$$

Устранив нежелательный эффект нулевого значения функции $\omega_{\text{ферзь}}^{\text{полн}}(x, y)$ на оси симметрии, получим уравнение

$$\omega_{\text{ферзь}}^{\text{полн}}(x, y) \Big|_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} = \frac{x^2 + 1}{x^2} [\omega_{\text{ферзь}}(x - \varepsilon, y) \vee_{\alpha} \omega_{\text{ферзь}}(-x + \varepsilon, y)], \quad (6.65)$$

представленное на рис. 6.27.

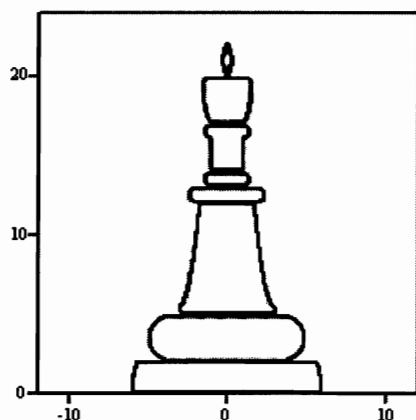


Рис. 6.27. Локус $\omega_{\text{ферзь}}^{\text{полн}}(x, y)$

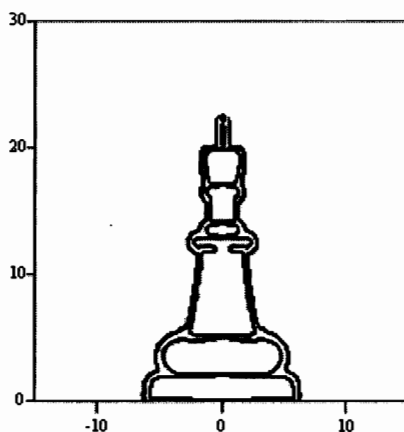


Рис. 6.28. Локус $\tau(\omega_{\text{ферзь}}^{\text{полн}}(x, y))$

Локус окрестности границ области получаем в виде (рис. 6.28):

$$\omega_{\text{ферзь}}^{\text{границ}}(x, y) = \tau(\omega_{\text{ферзь}}^{\text{полн}}(x, y)) = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 - \frac{\omega_{\text{ферзь}}^{\text{полн}^2}}{\varepsilon^2} + \left| 1 - \frac{\omega_{\text{ферзь}}^{\text{полн}^2}}{\varepsilon^2} \right| \right)^{n+1}. \quad (6.66)$$

Локус короля (см. рис. 6.29 на цветной вклейке) представляется составными областями:

$$29. \omega_{11}^{\text{король}}(x, y) = \frac{1}{12} [36 - x - y],$$

$$\omega_{12}^{\text{король}}(x, y) = \left(\frac{16 + (x - 4)^2}{8} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{1 + (y - 1)^2}{2} \right). \\ \omega_1^{\text{король}}(x, y) = \omega_{11}^{\text{король}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{12}^{\text{король}}(x, y). \quad (6.67)$$

30. Далее

$$\omega_2^{\text{король}}(x, y) = \omega_{21}^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{22}^{\text{король}}(x, y), \quad (6.68)$$

$$\omega_{21}^{\text{король}}(x, y) = \frac{1}{3} [2,25 - (x - 3,5)^2 - (y - 3,5)^2],$$

$$\omega_{22}^{\text{король}}(x, y) = \left(\frac{3,0625 + (x - 1,75)^2}{3,5} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{2,25 + (y - 3,5)^2}{3} \right).$$

31. Следующей областью является функция:

$$\omega_3^{\text{король}}(x, y) = \omega_{31}^{\text{король}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{32}^{\text{король}}(x, y), \quad (6.69)$$

$$\text{где } \omega_{31}^{\text{король}}(x, y) = \frac{2(x-3)^2 - y + 5,5}{\sqrt{(2(x-3)^2 - y + 5,5)^2 + (4x-13)^2}},$$

$$\omega_{32}^{\text{король}}(x, y) = \left(\frac{2,25 + (x-1,5)^2}{3} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(3,5-\varepsilon)^2 + (y-8,5)^2}{2(3,5-\varepsilon)} \right).$$

Области: $\omega_4^{\text{король}}$, $\omega_5^{\text{король}}$, $\omega_7^{\text{король}}$ строятся аналогично и имеют следующий вид:

$$\mathbf{32.} \quad \omega_4^{\text{король}}(x, y) = \omega_{41}^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{42}^{\text{король}}(x, y), \quad (6.70)$$

$$\omega_{41}^{\text{король}}(x, y) = \frac{1}{2(0,5-\varepsilon)} [(0,5-\varepsilon)^2 - (x-2)^2 - (y-12,5)^2],$$

$$\omega_{42}^{\text{король}}(x, y) = \left(\frac{1 + (x-1)^2}{2} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(0,5-\varepsilon)^2 + (y-12,5)^2}{2(0,5-\varepsilon)} \right),$$

$$\mathbf{33.} \quad \omega_5^{\text{король}}(x, y) = \omega_{51}^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{52}^{\text{король}}(x, y), \quad (6.71)$$

$$\omega_{51}^{\text{король}}(x, y) = \frac{1}{2(0,5-\varepsilon)} [(0,5-\varepsilon)^2 - (x-1)^2 - (y-13,5)^2],$$

$$\omega_{52}^{\text{король}}(x, y) = (0,25 + (x-0,5)^2) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(0,5-\varepsilon)^2 + (y-13,5)^2}{2(0,5-\varepsilon)} \right),$$

34. $\omega_6^{\text{король}}(x, y)$ — прямоугольник:

$$\omega_6^{\text{король}}(x, y) = (0,25 + (x-0,5)^2) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(1-\varepsilon)^2 + (y-15)^2}{2(1-\varepsilon)} \right). \quad (6.72)$$

$$\mathbf{35.} \quad \omega_7^{\text{король}}(x, y) = \omega_{71}^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{72}^{\text{король}}(x, y), \quad (6.73)$$

$$\omega_{71}^{\text{король}}(x, y) = \frac{1}{2(0,5-\varepsilon)} [(0,5-\varepsilon)^2 - (x-1)^2 - (y-16,5)^2],$$

$$\omega_{72}^{\text{король}}(x, y) = (0,25 + (x-0,5)^2) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(0,5-\varepsilon)^2 + (y-16,5)^2}{2(0,5-\varepsilon)} \right).$$

36. Область

$$\omega_8^{\text{король}}(x, y) = \omega_{81}^{\text{король}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{82}^{\text{король}}(x, y), \quad (6.74)$$

$$\text{где } \omega_{81}^{\text{король}}(x, y) = \frac{1}{2(4,5 - \varepsilon)} [(4,5 - \varepsilon)^2 - (x + 3)^2 - (y - 19)^2],$$

$$\omega_{82}^{\text{король}}(x, y) = \left(\frac{1 + (x - 1)^2}{2} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(1,5 - \varepsilon)^2 + (y - 18,5)^2}{2(1,5 - \varepsilon)} \right).$$

39. Тогда

$$\omega_9^{\text{король}}(x, y) = \omega_{91}^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{92}^{\text{король}}(x, y), \quad (6.75)$$

$$\text{где } \omega_{91}^{\text{король}}(x, y) = \frac{1}{2(0,5 - \varepsilon)} [(0,5 - \varepsilon)^2 - (x - 1,5)^2 - (y - 20,5)^2],$$

$$\omega_{92}^{\text{король}}(x, y) = \left(\frac{0,5625 + (x - 0,75)^2}{1,5} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(0,5 - \varepsilon)^2 + (y - 20,5)^2}{2(0,5 - \varepsilon)} \right).$$

$$\mathbf{40.} \quad \omega_{10}^{\text{король}}(x, y) = \omega_{101}^{\text{король}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{102}^{\text{король}}(x, y), \quad (6.76)$$

$$\text{где } \omega_{101}^{\text{король}}(x, y) = \frac{1}{2(2 - \varepsilon)} [(2 - \varepsilon)^2 - x - (y - 20)^2],$$

$$\omega_{102}^{\text{король}}(x, y) = \left(\frac{0,5625 + (x - 0,75)^2}{1,5} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(0,5 - \varepsilon)^2 + (y - 21,5)^2}{2(0,5 - \varepsilon)} \right).$$

41. Вершина короля определяется уравнением креста

$$\omega_{11}^{\text{король}}(x, y) = \omega_{111}^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{112}^{\text{король}}(x, y). \quad (6.77)$$

$$\text{Здесь } \omega_{111}^{\text{король}}(x, y) = \left(\frac{0,01 + (x - 0,2)^2}{1,5} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{(1 - \varepsilon)^2 + (y - 23)^2}{2(1 - \varepsilon)} \right),$$

$$\omega_{112}^{\text{король}}(x, y) = \left(\frac{0,25 + (x - 0,5)^2}{1,5} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{0,04 + (y - 23)^2}{0,4} \right).$$

В итоге получаем выражение для функции $\omega_{\text{король}}(x, y)$:

$$\omega_{\text{король}}(x, y) = \omega_1^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_2^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_3^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_4^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha}$$

$$\vee_{\alpha} \omega_5^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_6^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_7^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_8^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha}$$

$$\vee_{\alpha} \omega_9^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{10}^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{11}^{\text{король}}(x, y). \quad (6.78)$$

Произведем преобразование симметрии

$$\omega_{\text{король}}^{\text{полн}}(x, y) = \omega_1^{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{\text{король}}^{\text{сим}}(x, y) = \omega_{\text{король}}(x, y) \vee_{\alpha} \omega_{\text{король}}(-x, y). \quad (6.79)$$

Устранив нежелательный эффект нулевого значения функции $\omega_{\text{король}}^{\text{полн}}(x, y)$ на оси симметрии получим уравнение

$$\omega_{\text{король}}^{\text{полн}}(x, y) \Big|_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} = \frac{x^2 + 1}{x^2} [\omega^{\text{король}}(x - \varepsilon, y) \vee_{\alpha} \omega^{\text{король}}(-x + \varepsilon, y)], \quad (6.80)$$

которое описывает фигуру короля (рис 6.30).

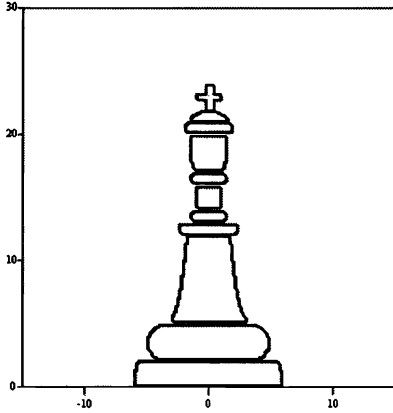


Рис. 6.30. Локус $\omega_{\text{король}}^{\text{полн}}(x, y)$

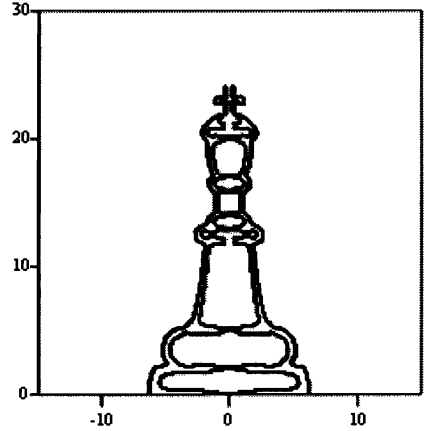


Рис. 6.31. Локус $\tau(\omega_{\text{король}}^{\text{полн}}(x, y))$

Локус окрестности границ области имеет вид (рис. 6.31):

$$\omega_{\text{король}}^{\text{границ}}(x, y) = \tau(\omega_{\text{король}}^{\text{полн}}(x, y)) = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 - \frac{\omega_{\text{король}}^{\text{полн}^2}}{\varepsilon^2} + \left| 1 - \frac{\omega_{\text{король}}^{\text{полн}^2}}{\varepsilon^2} \right| \right)^{n+1}. \quad (6.81)$$

Шахматная доска представляет собой пересечение вертикальных и горизонтальных полос. Уравнение должно удовлетворять области всех зачерненных клеток, включая их границу, а также контуры шахматной доски. Ширина клеток должна быть больше максимального размера шахматных фигур и равна $h = 24$. Область $\omega_1^{\text{шД}}(x, y) = \sin(kx)$ представляет собой систему вертикальных полос пересекающих ось абсцисс по отрезкам $[2k, 2k + 1]$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$\omega_{21}^{\text{шД}}(x, y) = \sin(ky)$ — система горизонтальных полос пересекающих ось ординат по отрезкам $[2k, 2k + 1]$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Нормализованные уравнения $\omega_1^{\text{шД}}$ и $\omega_2^{\text{шД}}$ запишем так:

$$\omega_1^{\text{шД}}(x, y) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\sin kx^2 + k \cdot \cos kx^2}}, \quad (6.82)$$

$$\omega_2^{\text{шД}}(x, y) = \frac{\sin ky}{\sqrt{\sin ky^2 + k \cdot \cos ky^2}}, \quad (6.83)$$

где $k = 0, 131$ — частотный коэффициент.

Область $\omega_3^{\text{ШД}}(x, y) = \left(\frac{9216 + x^2}{192} \right) \wedge_{\alpha} \left(\frac{9216 + y^2}{192} \right)$ соответствует полю шахматной доски.

Общее уравнение локуса имеет вид

$$\omega^{\text{ШД}}(x, y) = \left(\omega_1^{\text{ШД}}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_2^{\text{ШД}}(x, y) \right) \vee_{\alpha} \left(-\omega_1^{\text{ШД}}(x, y) \wedge_{\alpha} -\omega_2^{\text{ШД}}(x, y) \right) \wedge_{\alpha} \omega_3^{\text{ШД}}(x, y). \quad (6.84)$$

Локус шахматной доски представлен на рис. 6.32.

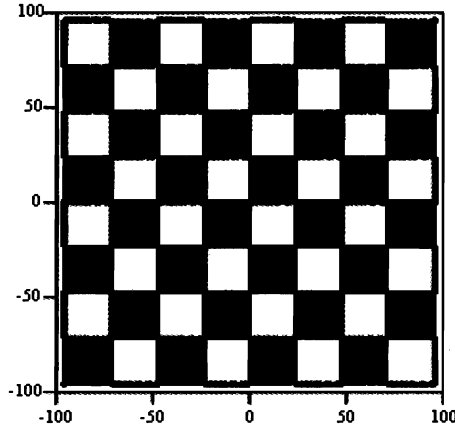


Рис 6.32. Локус $\omega^{\text{ШД}}(x, y)$

Используя полученные результаты, построим локус шахматной доски с расположенными на ней шахматными фигурами. Задача построения сводится к расположению каждой фигуры в определенном месте шахматной доски. Известно, что фигуры разделяются на **белые** и **черные** ($\omega_{\text{Б}}^{\Phi} < 0$ и $\omega_{\text{Ч}}^{\Phi} > 0$), а место их расположения на **белое** и **черное** ($\omega_{\text{к}}^{\text{ШД}}_{\square} < 0$, и $\omega_{\text{к}}^{\text{ШД}}_{\blacksquare} > 0$). Поэтому целесообразно объединить их по следующим признакам:

- 1) $\omega_{\text{Ч}}^{\Phi} > 0$, $\omega_{\text{к}}^{\text{ШД}}_{\square} < 0$ — черные фигуры на **белой** клетке,
- 2) $\omega_{\text{Ч}}^{\Phi} > 0$, $\omega_{\text{к}}^{\text{ШД}}_{\blacksquare} > 0$ — черные фигуры на **черной** клетке,
- 3) $\omega_{\text{Б}}^{\Phi} < 0$, $\omega_{\text{к}}^{\text{ШД}}_{\square} < 0$ — белые фигуры на **белой** клетке,
- 4) $\omega_{\text{Б}}^{\Phi} < 0$, $\omega_{\text{к}}^{\text{ШД}}_{\blacksquare} > 0$ — белые фигуры на **черной** клетке,

где ω^{Φ} — уравнение фигуры, а $\omega_{\text{к}}^{\text{ШД}}$ — знакопостоянная область шахматной доски соответствующая клетке. Необходимо отметить, что пешки одного цвета располагаются с периодом $T = 2h = 48$ вдоль оси абсцисс.

$\Sigma_0 = [\omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x, y) \geq 0]$ — область пешки, симметричная относительно оси ординат, которая заключена в вертикальную полосу $-\frac{h}{2} < x < \frac{h}{2}$,

а $\Sigma_i = [\omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}(x - Ti, y) \geq 0]$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, — области, полученные смещением Σ_0 вдоль оси абсцисс на величины, кратные T . Тогда граница $\partial\omega_{\text{пешка}}^{\text{трансл}}$ области $\omega_{\text{пешка}}^{\text{трансл}} = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} \Sigma_i$ задается уравнением

$$\omega_{\text{пешка}}^{\text{трансл}}(x, y) = \omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}\left(\mu\left(x, \frac{h}{2}, T\right), y\right) = 0, \quad (6.85)$$

где

$$\mu(x, a, T) =$$

$$= \frac{T}{\pi} \arcsin \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{T} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a\pi}{2T} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a\pi}{2T} \right) + \left[1 - \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a\pi}{2T} \right) \cdot \rho \left(x - \frac{T}{2}, \frac{T}{2} - a \right) \right]} \right], \quad (6.86)$$

$$\text{а } \rho(x, q) = \left[\frac{\cos \frac{2\pi x}{h} - \cos \frac{2\pi q}{h} + \left| \cos \frac{2\pi x}{h} - \cos \frac{2\pi q}{h} \right|}{2 \left(1 - \cos \frac{2\pi q}{h} \right)} \right]^{n+1} \quad \text{— вспомогательная функция.}$$

Периодический локус представлен на рис. 6.33.

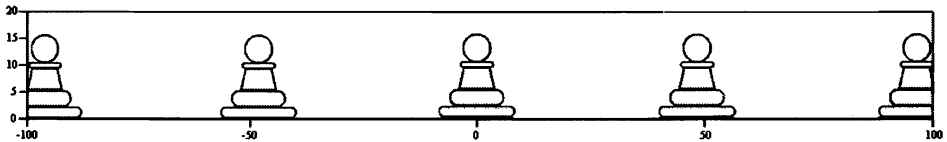


Рис. 6.33. Локус $\omega_{\text{пешка}}^{\text{трансл}}(x, y)$

Из всего набора локусов необходимы только те, которые заключены в области шахматной доски. Следовательно, надо ограничить область определения функции $\omega_{\text{пешка}}^{\text{трансл}}(x, y)$ областью $\omega_{\text{опред}}(x, y) = \frac{9216 + x^2}{192} \geq 0$:

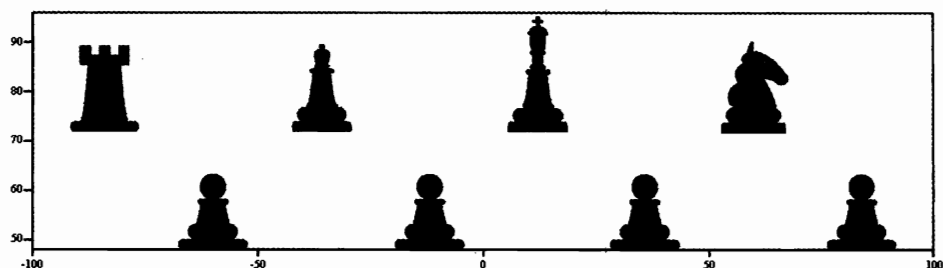
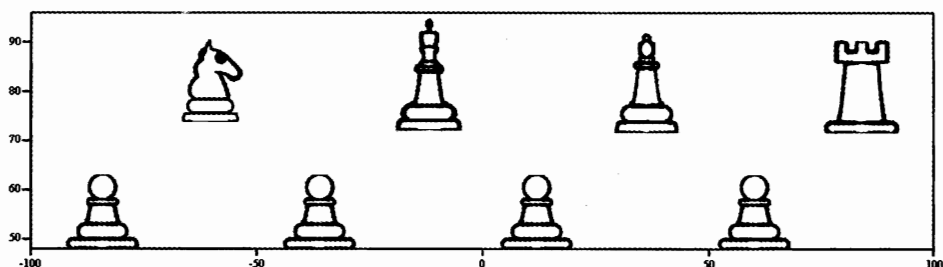
$$\omega_{\text{пешка}}^{\text{трансл}}(x, y) = \frac{9216 + x^2}{192} \wedge_{\alpha} \omega_{\text{пешка}}^{\text{полн}}\left(\mu\left(x, \frac{h}{2}, T\right), y\right). \quad (6.87)$$

Построение функций разграниченных по цветовым признакам фигур и клеток осуществляется так:

$$1) \omega_{\square}^{\Phi}(x, y) = \omega_{\text{конь}}^{\text{полн}}(x - 60, y - 72) \vee_{\alpha} \omega_{\text{король}}^{\text{полн}}(x - 12, y - 72) \vee_{\alpha}$$

$$\vee_{\alpha} \omega_{\text{ферзь}}^{\text{полн}}(x + 36, y - 72) \vee_{\alpha} \omega_{\text{ладья}}^{\text{полн}}(x + 84, y - 72) \vee_{\alpha} \omega_{\text{пешка}}^{\text{трансл}}(x + 12, y - 48). \quad (6.88)$$

Полученный локус представлен на рис. 6.34.

Рис. 6.34. Локус $\omega_{Ч\Box}(x, y)$ Рис. 6.35. Локус $\omega_{Ч\blacksquare}(x, y)$

$$\begin{aligned}
 2) \omega_{Ч\blacksquare}^{\Phi}(x, y) &= \omega_{\text{ладья}}^{\text{границ}}(x - 84, y - 72) \vee_{\alpha} \omega_{\text{ферзь}}^{\text{границ}}(x - 36, y - 72) \vee_{\alpha} \\
 &\quad \vee_{\alpha} \omega_{\text{король}}^{\text{границ}}(x + 12, y - 72) \vee_{\alpha} \\
 &\quad \vee_{\alpha} \omega_{\text{конь}}^{\text{границ}}(x + 60, y - 72) \vee_{\alpha} \omega_{\text{пешка}}^{\text{трансл границ}}(x - 12, y - 48). \quad (6.89)
 \end{aligned}$$

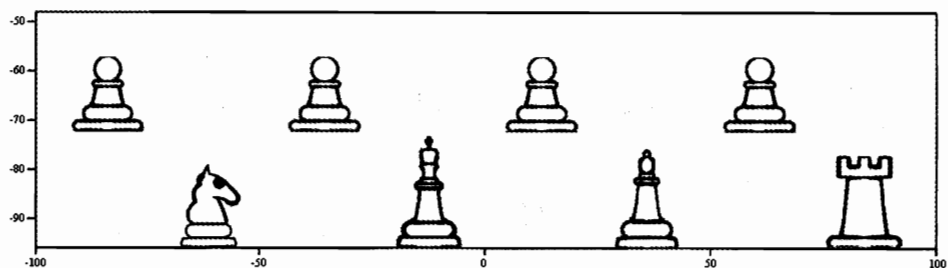
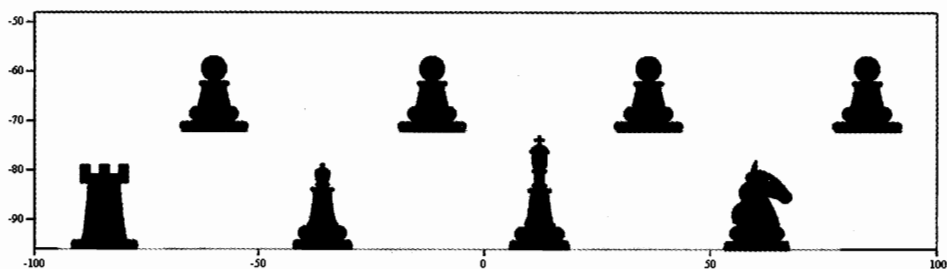
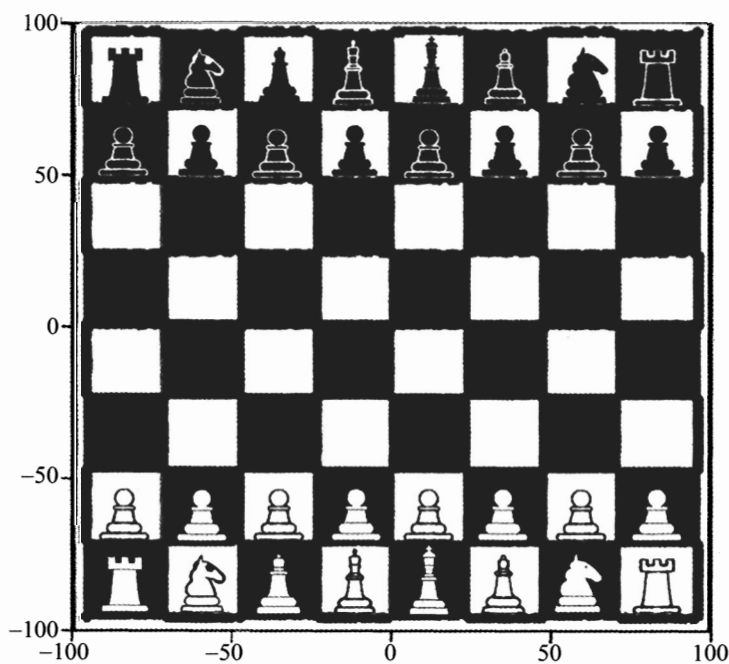
Локус построенной функции представлен на рис. 6.35.

$$\begin{aligned}
 3) \omega_{\Box}^{\Phi}(x, y) &= \omega_{\text{ладья}}^{\text{границ}}(x - 84, y + 96) \vee_{\alpha} \omega_{\text{ферзь}}^{\text{границ}}(x - 36, y + 96) \vee_{\alpha} \\
 &\quad \vee_{\alpha} \omega_{\text{король}}^{\text{границ}}(x + 12, y + 96) \vee_{\alpha} \\
 &\quad \vee_{\alpha} \omega_{\text{конь}}^{\text{границ}}(x + 60, y + 96) \vee_{\alpha} \omega_{\text{пешка}}^{\text{трансл границ}}(x - 12, y + 96). \quad (6.90)
 \end{aligned}$$

Локус полученной функции представлен на рис. 6.36.

$$\begin{aligned}
 4) \omega_{\blacksquare}^{\Phi}(x, y) &= \omega_{\text{полн}}^{\text{король}}(x - 60, y + 96) \vee_{\alpha} \\
 &\quad \vee_{\alpha} \omega_{\text{полн}}^{\text{король}}(x - 12, y + 96) \vee_{\alpha} \omega_{\text{полн}}^{\text{ферзь}}(x + 36, y + 96) \vee_{\alpha} \\
 &\quad \vee_{\alpha} \omega_{\text{ладья}}^{\text{полн}}(x + 84, y + 96) \vee_{\alpha} \omega_{\text{пешка}}^{\text{трансл}}(x + 12, y + 72). \quad (6.91)
 \end{aligned}$$

Локус функции представлен на рис. 6.37.

Рис. 6.36. Локус $\omega_{\square}^{\Phi}(x, y)$ Рис. 6.37. Локус $\omega_{\blacksquare}^{\Phi}(x, y)$ Рис. 6.38. Локус игрового поля шахматной доски $\omega_{\square\blacksquare}^{\Phi}(x, y)$

Применив к многопозиционным функциям $\omega_{\text{Б}\square}^{\Phi}(x, y)$, $\omega_{\text{Ч}\square}^{\Phi}(x, y)$ R-дизъюнкцию, получим общий локус шахматных фигур расположенных в окрестности **белых клеток**. Для получения изображения $\omega_{\text{Ч}\blacksquare}^{\Phi}(x, y)$ в окрестности **черных клеток** надо, чтобы при $\omega_{\text{Ч}\blacksquare}^{\Phi}(x, y) > 0$ результирующая функция была меньше нуля. Это достигается произведением функций $\omega^{\text{ШД}}(x, y)$ и инверсией $\omega_{\text{Ч}\blacksquare}^{\Phi}(x, y)$. Умножив это выражение на инверсную функцию $\omega_{\text{Б}\blacksquare}^{\Phi}(x, y)$, получим локус фигуры, изображающий шахматную доску с соответствующими фигурами на **черных клетках**. Дополним его при помощи R-дизъюнкции локусом шахматных фигур, расположенных в окрестности **белых клеток**, получим комбинированный локус всего поля шахматной доски (рис. 6.38)

$$\omega_{\text{ШД}}^{\Phi} = ([\omega^{\text{ШД}}(x, y) \cdot \overline{\omega_{\text{Ч}\blacksquare}^{\Phi}}(x, y)] \cdot \overline{\omega_{\text{Б}\blacksquare}^{\Phi}}(x, y)) \vee_{\alpha} (\omega_{\text{Б}\square}^{\Phi}(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_{\text{Ч}\square}^{\Phi}(x, y)). \quad (6.92)$$

Этот пример является наглядным пособием совместного отображения n локусов в пределах рабочего чертежа. В свою очередь полученный чертеж также представляет собой комбинированный локус. Таким образом, используя конструкции функций можно осуществить перенос шахматных фигур в любую точку доски. Такая методика может быть использована при разработке алгоритмов визуализации и движения в программе шахматной игры.

6.7. Контурный и структурный анализ изображений

Известно, что одним из свойств изображений является замкнутость и непрерывность их линий. При этом контур полностью определяет форму, а также содержит необходимую информацию для распознавания исследуемого объекта [17, 24]. Такой подход позволяет не рассматривать внутренние точки изображения и тем самым значительно сократить объем обрабатываемой информации. Следствием этого является возможность обеспечения работы системы обработки в масштабе времени, более близком к реальному. Но даже в тех задачах, где нельзя пренебречь обработкой внутренних точек, методы контурного анализа дополняют другие и поэтому, безусловно, полезны.

Для обработки контура, как правило, используется бинарное по яркости, многоточечное (распределенное) изображение. Оно может стать результатом работы радиолокационных, телевизионных, пассивных и активных ИК систем, гидролокаторов, рентгеновских и других установок и устройств. Чаще всего содержащиеся в них объекты весьма несовершенны, обладают недостаточной по отношению к фону четкостью, искажены помехами и шумами. Обозначим через $s(x, y)$ исходное, а через $\xi(m_1, m_2)$ — оцифрованное бинарное изображения (рис. 6.39), причем яркости $I(x, y)$ точки (x, y) и $I(m_1, m_2)$ клетки (m_1, m_2) будут

$$I(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{при } (x, y) \in s, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

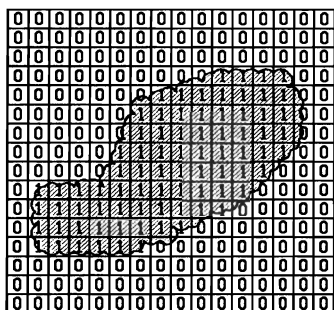


Рис. 6.39. Вариант представления бинарного изображения на квадратной сетчатке

$$I(m_1, m_2) = \begin{cases} 1, & \text{при } (m_1, m_2) \in \xi, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Размер клетки (пикселя) сетчатки обычно выбирается из условия возможности восстановления по оцифрованному $\xi(m_1, m_2)$ исходного изображения $s(x, y)$. Ошибки дискретизации вызываются наличием граничных пикселей, в пределах которых содержатся участки, как фона, так и изображения объекта.

После оцифровки каждый пиксель однозначно относится либо к фону, либо к изображению. Поэтому формы $s(x, y)$ и $\xi(m_1, m_2)$ не совпадают. Величина ошибки дискретизации зависит не только от размеров $\delta x \delta y$ пикселя, но и от вида критерия принятия решения о принадлежности каждого из пикселей фону или изображению. Граничные клетки отличаются от внутренних клеток изображения наличием в качестве соседней одной или нескольких фоновых клеток. Для обработки контура аналитическим или цифровым путем надо произвести его кодирование, то есть поставить в соответствие каждому контурному элементу определенное число. Последовательность таких чисел — код контура. Для выделения на основе R-функций границы плоского изображения объекта, необходимо ввести систему координат $x_1 O_1 y_1$ и базис опорных элементов. За начало отсчета (рис. 6.40), если объект замкнут, принимается точка с координатами O_1^x

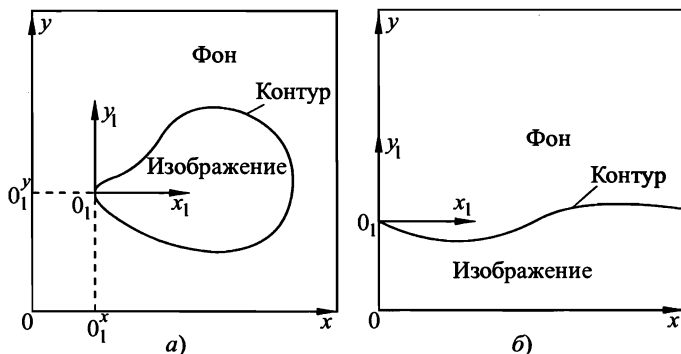


Рис. 6.40. Выбор начала координат



Рис. 6.41. Задание контура элементарными векторами

и O_1^y , которые соответствуют первой точке обнаружения контура. Если нет, то принимается точка касания контура границы изображения.

В качестве опорного элемента контура удобно использовать прямую $Ax + By + C = 0$. Она будет ограничивать область $Ax + By + C \geq 0$, которая содержит исследуемый объект. Примем направление обхода против часовой стрелки. Коэффициенты A, B, C находятся по координатам вектора $\bar{r}_i$ составленного из элементарных векторов (ЭВ) $\bar{\gamma}_n$. ЭВ соединяют центры или узлы соседних контурных ячеек сетчатки, проведенных в направлении обхода; n — номер этого ЭВ, отсчитываемый от точки O_1 , $n = 1, 2, \dots, k-1$, k — количество ЭВ в контуре данного изображения. Координаты точек $\Gamma_{n-1}(x_{\Gamma}^{n-1}, y_{\Gamma}^{n-1})$, $\Gamma_n(x_{\Gamma}^n, y_{\Gamma}^n)$ определяют начало и конец $\bar{\gamma}_n$. Они находятся после ввода локальной системы координат $x_1 O_1 y_1$ и хранятся в памяти (рис. 6.41).

Вектор $\bar{r}_1$ является результирующим для последовательности $\bar{\gamma}_1 \dots \bar{\gamma}_k$. Она задается следующим образом (рис. 6.42). Вначале строятся два взаимно противоположных вектора $\overrightarrow{O_1 O'_1}$ и $\overrightarrow{O_1 O''_1}$. Они ортогональны $\bar{\gamma}_1$ и имеют одинаковую длину, равную величине допустимого разброса τ_p координат контура относительно направления $\overrightarrow{O_1 \Gamma_1}$. Далее строятся уравнения прямых

$$\begin{aligned} l'_1(x, y) &= A'_1 x + B'_1 y + C'_1 = 0, \\ l''_1(x, y) &= A''_1 x + B''_1 y + C''_1 = 0, \end{aligned} \quad (6.93)$$

параллельных $\overrightarrow{O_1 \Gamma_1}$ и проходящих через точки O'_1 и O''_1 .

Коэффициенты определяются из соотношений

$$\begin{aligned} A'_1 &= A''_1 = y_{\Gamma_1}^1, \\ B'_1 &= B''_1 = x_{\Gamma_1}^1, \\ C'_1 &= -C''_1 = \tau_p, \end{aligned} \quad (6.94)$$

где $x_{\Gamma_1}^1, y_{\Gamma_1}^1$ — координаты точки Γ_1 .

С помощью R-конъюнкции строится неравенство

$$\psi(x, y) = [-(A'_1 x + B'_1 y + C'_1)] \wedge_{\alpha} (A''_1 x + B''_1 y + C''_1) \geq 0, \quad (6.95)$$

характеризующее locus S_1 , ограниченный прямыми l'_1 и l''_1 .

t — количество ЭВ, определяющих $\bar{r}_2$;

$x_{\Gamma}^{k+t}, y_{\Gamma}^{k+t}$ и $x_{\Gamma}^{k+t+1}, y_{\Gamma}^{k+t+1}$ — координаты ЭВ $\bar{\gamma}_{k+t+1}$, по которым находятся параметры l_3'' и l_3''' ;

j — количество ЭВ, определяющих $\bar{r}_m$;

$x_{\Gamma}^{n-j}, y_{\Gamma}^{n-j}$ и $x_{\Gamma}^{n-j+1}, y_{\Gamma}^{n-j+1}$ — координаты ЭВ $\bar{\gamma}_{n-j+1}$ по которым находятся параметры l_m'' и l_m''' .

Процесс формирования векторов $\bar{r}_1 \dots \bar{r}_m$ заканчивается, когда рассматривается последний ЭВ $\bar{\gamma}_n$. Если объект замкнут, то $\bar{\gamma}_n(x_{\Gamma}^{n-1}, y_{\Gamma}^{n-1}; 0, 0)$, а если нет, тогда $\bar{\gamma}_n(x_{\Gamma}^{n-1}, y_{\Gamma}^{n-1}; x_{\Gamma}^n, y_{\Gamma}^n)$. В результате имеем набор $\bar{r}_1 \dots \bar{r}_m$ с координатами $\bar{r}_1(0, 0; x_{\Gamma}^k, y_{\Gamma}^k)$, $\bar{r}_2(x_{\Gamma}^k, y_{\Gamma}^k; x_{\Gamma}^{k+t}, y_{\Gamma}^{k+t})$, $\dots$, $\bar{r}_m(x_{\Gamma}^{n-1}, y_{\Gamma}^{n-1}; 0, 0)$ или $\bar{r}_1(0, 0; x_{\Gamma}^k, y_{\Gamma}^k)$, $\bar{r}_2(x_{\Gamma}^k, y_{\Gamma}^k; x_{\Gamma}^{k+t}, y_{\Gamma}^{k+t})$, $\dots$, $\bar{r}_m(x_{\Gamma}^{n-1}, y_{\Gamma}^{n-1}; x_{\Gamma}^n, y_{\Gamma}^n)$. Эта последовательность определяет вершины многоугольника, вписанных в порядке левого обхода. Зная эти координаты, напомним уравнения ориентированных прямых:

$$\begin{aligned} \nu_1(x, y) &= y_{\Gamma}^k \cdot x - x_{\Gamma}^k \cdot y = 0, \\ \nu_2(x, y) &= (y_{\Gamma}^{k+t} - y_{\Gamma}^k)x - (x_{\Gamma}^{k+t} - x_{\Gamma}^k)y + (y_{\Gamma}^k x_{\Gamma}^{k+t} - x_{\Gamma}^k y_{\Gamma}^{k+t}) = 0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (6.97)$$

$$\nu_m(x, y) = -y_{\Gamma}^{n-j} \cdot x + x_{\Gamma}^{n-j} \cdot y = 0$$

или

$$\nu_m(x, y) = (y_{\Gamma}^n - y_{\Gamma}^{n-j})x - (x_{\Gamma}^n - x_{\Gamma}^{n-j})y + (y_{\Gamma}^{n-j} x_{\Gamma}^n - x_{\Gamma}^{n-j} y_{\Gamma}^n) = 0.$$

Они могут быть нормализованы:

$$\begin{aligned} \nu_1(x, y) &= \frac{y_{\Gamma}^k \cdot x - x_{\Gamma}^k \cdot y}{\sqrt{(x_{\Gamma}^k)^2 + (y_{\Gamma}^k)^2}} = 0, \\ \nu_2(x, y) &= \frac{(y_{\Gamma}^{k+t} - y_{\Gamma}^k)x - (x_{\Gamma}^{k+t} - x_{\Gamma}^k)y + (y_{\Gamma}^k x_{\Gamma}^{k+t} - x_{\Gamma}^k y_{\Gamma}^{k+t})}{\sqrt{(x_{\Gamma}^{k+t} - x_{\Gamma}^k)^2 + (y_{\Gamma}^{k+t} - y_{\Gamma}^k)^2}} = 0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (6.98)$$

$$\nu_m(x, y) = \frac{-y_{\Gamma}^{n-j} \cdot x + x_{\Gamma}^{n-j} \cdot y}{\sqrt{(-x_{\Gamma}^a)^2 + (-y_{\Gamma}^a)^2}} = 0$$

или

$$\nu_m(x, y) = \frac{(y_{\Gamma}^n - y_{\Gamma}^{n-j})x - (x_{\Gamma}^n - x_{\Gamma}^{n-j})y + (y_{\Gamma}^{n-j} x_{\Gamma}^n - x_{\Gamma}^{n-j} y_{\Gamma}^n)}{\sqrt{(x_{\Gamma}^n - x_{\Gamma}^{n-j})^2 + (y_{\Gamma}^n - y_{\Gamma}^{n-j})^2}} = 0.$$

Функция $\nu_q(x, y) > 0$ [1] определяет полуплоскость слева от прямой, которая содержит Ω . Соответствующие трехзначные предикаты обозначим через $S_3(\nu_q)$, $q = 1, 2, \dots, m$. Далее, найдем такую функцию трехзначной логики $Y = F(X_1, X_2, \dots, X_m)$, чтобы предикатное уравнение

$$F(S(\nu_1), S(\nu_2), \dots, S(\nu)) = \sigma$$

при $\sigma = 1$ было уравнением контура, при $\sigma = 2$ определяло ограниченную контуром область объекта, а при $\sigma = 0$ остальную часть изображения.

Условимся обозначать область, определяемую предикатным уравнением $S_3(\nu_q) = 2$, через Ω_q^+ , $q = 1, 2, \dots, m$.

Теперь, используя эту процедуру [1], опишем многоугольник $A_1 A_2 \dots A_{27}$, характеризующий locus самолета (рис. 6.43).

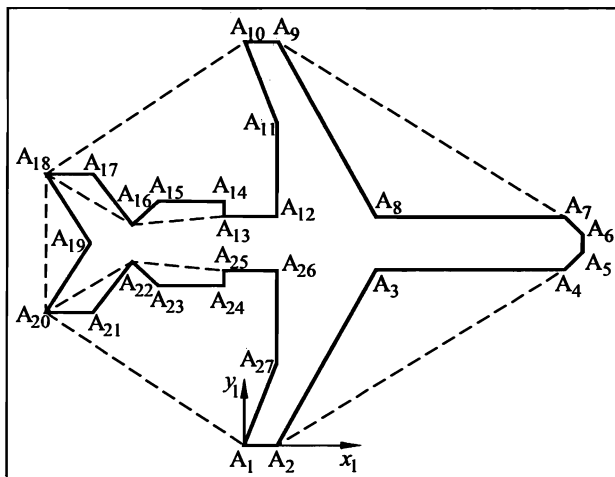


Рис. 6.43. Вариант сегментации контура самолета

Алгоритм построения (рис. 6.43) состоит из следующих этапов.

1. С помощью отрезков $A_2 A_4$, $A_7 A_9$, $A_{10} A_{18}$, $A_{18} A_{20}$, $A_{20} A_1$ дополним многоугольник до выпуклого. Пусть $\Omega_{2:4}^+$, $\Omega_{7:9}^+$, $\Omega_{10:18}^+$, $\Omega_{18:20}^+$, $\Omega_{20:1}^+$ — полуплоскости, лежащие слева от линий $A_2 A_4$, $A_7 A_9$, $A_{10} A_{18}$, $A_{18} A_{20}$, $A_{20} A_1$ соответственно. Тогда он определяется следующей логической формулой:

$$\Omega_{1:2}^+ \cap \Omega_{2:4}^+ \cap \Omega_{4:5}^+ \cap \Omega_{5:6}^+ \cap \Omega_{6:7}^+ \cap \Omega_{7:9}^+ \cap \Omega_{9:10}^+ \cap \Omega_{10:18}^+ \cap \Omega_{18:20}^+ \cap \Omega_{20:1}^+. \quad (6.99)$$

2. Если в выпуклый многоугольник врезается область $A_2 A_3 A_4$, то это приводит к замене в формуле (6.99) символа $\Omega_{2:4}^+$ дизъюнкцией

$$\Omega_{2:3}^+ \cup \Omega_{3:4}^+ \cup \Omega_{4:2}^+.$$

Таким образом, многоугольная область: $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_9 A_{10} A_{18} A_{20}$ определяться формулой

$$\Omega_{1:2}^+ \cap (\Omega_{2:3}^+ \cup \Omega_{3:4}^+) \cap \Omega_{4:5}^+ \cap \Omega_{5:6}^+ \cap \Omega_{6:7}^+ \cap \Omega_{7:9}^+ \cap \Omega_{9:10}^+ \cap \Omega_{10:18}^+ \cap \Omega_{18:20}^+ \cap \Omega_{20:1}^+. \quad (6.100)$$

3. Аналогично, если сделать выпуклый врез $A_7 A_8 A_9$ в область многоугольника, получим

$$\Omega_{1:2}^+ \cap (\Omega_{2:3}^+ \cup \Omega_{3:4}^+) \cap \Omega_{4:5}^+ \cap \Omega_{5:6}^+ \cap \Omega_{6:7}^+ \cap (\Omega_{7:8}^+ \cup \Omega_{8:9}^+) \cap \Omega_{9:10}^+ \cap \Omega_{10:18}^+ \cap \Omega_{18:20}^+ \cap \Omega_{20:1}^+. \quad (6.101)$$

4. Таким же способом произведем замену символов $\Omega_{10:18}^+$, $\Omega_{18:20}^+$, $\Omega_{20:1}^+$:

$$\begin{aligned} & \Omega_{1:2}^+ \cap (\Omega_{2:3}^+ \cup \Omega_{3:4}^+) \cap \Omega_{4:5}^+ \cap \Omega_{5:6}^+ \cap \Omega_{6:7}^+ \cap (\Omega_{7:8}^+ \cup \Omega_{8:9}^+) \cap \\ & \cap \Omega_{9:10}^+ \cap (\Omega_{10:11}^+ \cup \Omega_{11:12}^+ \cup \Omega_{12:16}^+ \cup \Omega_{16:18}^+) \cap \\ & \cap (\Omega_{18:19}^+ \cup \Omega_{19:20}^+) \cap (\Omega_{20:22}^+ \cup \Omega_{22:26}^+ \cup \Omega_{26:27}^+ \cup \Omega_{27:1}^+). \quad (6.102) \end{aligned}$$

5. Присоединим выпуклые многоугольники $A_{13}A_{14}A_{15}A_{16}$ и $A_{16}A_{17}A_{18}$, $A_{22}A_{23}A_{24}A_{25}$ и $A_{20}A_{21}A_{22}$. Получим общее выражение в виде:

$$\begin{aligned} & \Omega_{1:2}^+ \cap (\Omega_{2:3}^+ \cup \Omega_{3:4}^+) \cap \Omega_{4:5}^+ \cap \Omega_{5:6}^+ \cap \Omega_{6:7}^+ \cap (\Omega_{7:8}^+ \cup \Omega_{8:9}^+) \cap \\ & \cap \Omega_{9:10}^+ \cap (\Omega_{10:11}^+ \cup \Omega_{11:12}^+ (\Omega_{12:13}^+ \cap \Omega_{13:14}^+ \cap \Omega_{14:15}^+ \cap \Omega_{15:16}^+) \cup \\ & \cup (\Omega_{16:17}^+ \cap \Omega_{17:18}^+)) \cap (\Omega_{18:19}^+ \cup \Omega_{19:20}^+) \cap \\ & ((\Omega_{20:21}^+ \cap \Omega_{21:22}^+) \cup (\Omega_{22:23}^+ \cap \Omega_{23:24}^+ \cap \Omega_{24:25}^+ \cap \Omega_{25:26}^+) \cup \Omega_{26:27}^+ \cup \Omega_{27:1}^+). \quad (6.103) \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что в формуле (6.101) символы операций $\cap$ и $\cup$ чередуются. При переходе слева направо через каждую скобку символ логической операции меняется на противоположный. Таким образом, задача сводится только к расстановке скобок [5]. Последняя процедура выполняется следующим образом.

6. Исходный многоугольник дополняем до выпуклого необходимым количеством отрезков. В рассмотренном примере (см. рис. 6.43) это были отрезки A_2A_4 , A_7A_9 , $A_{10}A_{18}$, $A_{18}A_{20}$ и $A_{20}A_1$. В соответствии с этим заключаем в скобки группы членов, соответствующие ломанным, опирающимся на добавленные отрезки (согласно (6.102) скобки перед $\Omega_{2:3}^+$ и после $\Omega_{3:4}^+$, перед $\Omega_{7:8}^+$ и после $\Omega_{8:9}^+$, перед $\Omega_{10:11}^+$ и после $\Omega_{16:18}^+$, перед $\Omega_{18:19}^+$ и после $\Omega_{19:20}^+$, перед $\Omega_{20:22}^+$ и после $\Omega_{27:1}^+$). Полученные ломанные также дополняем до выпуклых фигур. Затем заключаем в скобки группы членов, соответствующие замыкаемым ломаным и т. д. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут исчерпаны все невыпуклые ломаные. На рис. 6.43 пунктиром показаны дополнительные отрезки, которым в формуле (6.103) соответствуют определенные пары открывающих и закрывающих скобок. Обратим внимание на то, что в (6.103) отсутствует операция отрицания, а операциям объединения $\cup$ и пересечения $\cap$ соответствуют дизъюнкция и конъюнкция, которые являются замыкающими, как в трехзначной, так и в двухзначной логике. Поэтому, если в уравнении (6.103) заменить $\cap$ и $\cup$ двухзначным предикатом $S_2(\nu_q) \equiv (\nu_q \geq 0)$, $q = 1, 2, \dots, m$, то полученное предикатное уравнение при $\sigma = 1$ будет определять внутреннюю область многоугольника, включая границу, а при $\sigma = 0$ — внешнюю область.

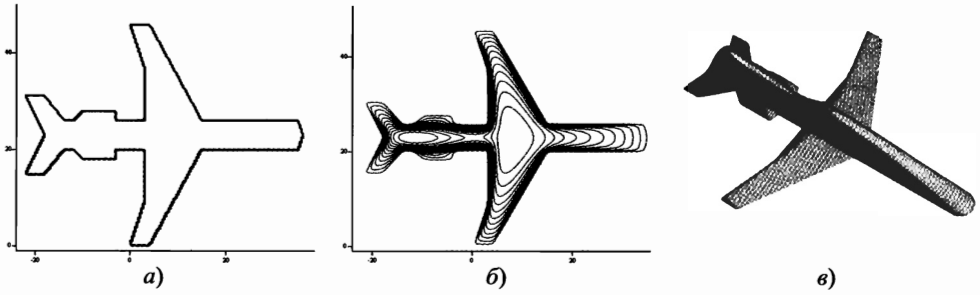


Рис. 44. а) локус самолета, б) линии уровня и в) аксонометрическая проекция функции $\omega(x, y)$

Окончательно предикатное уравнение получим, подставив в (6.103) вместо Ω_q^+ , двузначные предикаты $S_2(\nu_q)$, $q = 1, 2, \dots, m$, и заменив символы $\cap$ и $\cup$ на R-операции: $\vee$ и $\wedge$ соответственно. Запишем предикатное уравнение для локуса самолета в виде:

$$\begin{aligned}
 F(x, y) = & S_2(\nu_1) \wedge (S_2(\nu_2) \vee S_2(\nu_3)) \wedge S_2(\nu_4) \wedge S_2(\nu_5) \wedge S_2(\nu_6) \wedge \\
 & \wedge (S_2(\nu_7) \vee S_2(\nu_8)) \wedge S_2(\nu_9) \wedge (S_2(\nu_{10}) \vee S_2(\nu_{11})) (S_2(\nu_{12}) \wedge S_2(\nu_{13}) \wedge S_2(\nu_{14}) \wedge \\
 & \wedge S_2(\nu_{15})) \vee (S_2(\nu_{16}) \wedge S_2(\nu_{17}))) \wedge (S_2(\nu_{18}) \vee S_2(\nu_{19})) \wedge \\
 & \wedge ((S_2(\nu_{20}) \wedge S_2(\nu_{21})) \vee (S_2(\nu_{22}) \wedge S_2(\nu_{23}) \wedge S_2(\nu_{24}) \wedge S_2(\nu_{25})) \vee \\
 & \vee S_2(\nu_{26}) \vee S_2(\nu_{27})) = \sigma, \quad (6.104)
 \end{aligned}$$

которому при $\sigma = 1$ соответствует внутренняя область и граница, а при $\sigma = 0$ внешняя область. Локус самолета (рис. 6.44) определяет неравенство:

$$\begin{aligned}
 \omega(x, y) = & \nu_1(x, y) \wedge (\nu_2(x, y) \vee \nu_3(x, y)) \wedge \nu_4(x, y) \wedge \nu_5(x, y) \wedge \\
 & \wedge \nu_6(x, y) \wedge (\nu_7(x, y) \vee \nu_8(x, y)) \wedge \wedge \nu_9(x, y) \wedge \\
 & \wedge (\nu_{10}(x, y) \vee \nu_{11}(x, y) (\nu_{12}(x, y) \wedge \nu_{13}(x, y) \wedge \nu_{14}(x, y) \wedge \nu_{15}(x, y)) \vee \\
 & \vee (\nu_{16}(x, y) \wedge \nu_{17}(x, y))) \wedge (\nu_{18}(x, y) \vee \nu_{19}(x, y)) \wedge \\
 & \wedge ((\nu_{20}(x, y) \wedge \nu_{21}(x, y)) \vee (\nu_{22}(x, y) \wedge \nu_{23}(x, y) \wedge \nu_{24}(x, y) \wedge \nu_{25}(x, y)) \vee \\
 & \vee \nu_{26}(x, y) \vee \nu_{27}(x, y)) \geq 0. \quad (6.105)
 \end{aligned}$$

Здесь $\nu_1(x, y) \dots \nu_{27}(x, y)$ — уравнения ориентированных прямых:

$$\begin{aligned}
 A_1 A_2: \nu_1(x, y) &= 4y, & A_2 A_3: \nu_2(x, y) &= -20x + 11y + 80, \\
 A_3 A_4: \nu_3(x, y) &= y - 20, & A_4 A_5: \nu_4(x, y) &= x - 2y + 5, \\
 A_5 A_6: \nu_5(x, y) &= x - 39, & A_6 A_7: \nu_6(x, y) &= x + 2y - 87, \\
 A_7 A_8: \nu_7(x, y) &= y + 26, & A_8 A_9: \nu_8(x, y) &= -20x - 11y + 586, \\
 A_9 A_{10}: \nu_9(x, y) &= y - 46, & A_{10} A_{11}: \nu_{10}(x, y) &= 3x + y - 46,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{11}A_{12}: \nu_{11}(x, y) &= x - 3, & A_{12}A_{13}: \nu_{12}(x, y) &= -y + 26, \\
A_{13}A_{14}: \nu_{13}(x, y) &= -x - 3, & A_{14}A_{15}: \nu_{14}(x, y) &= -y + 28, \\
A_{15}A_{16}: \nu_{15}(x, y) &= 3x - 3y + 144, & A_{16}A_{17}: \nu_{16}(x, y) &= -6x - 5y + 47, \\
A_{17}A_{18}: \nu_{17}(x, y) &= -y + 31, & A_{18}A_{19}: \nu_{18}(x, y) &= 2x + y + 13, \\
A_{19}A_{20}: \nu_{19}(x, y) &= 2x - y + 59, & A_{20}A_{21}: \nu_{20}(x, y) &= y - 15, \\
A_{21}A_{22}: \nu_{21}(x, y) &= -6x + 5y - 183, & A_{22}A_{23}: \nu_{22}(x, y) &= x + y - 6, \\
A_{23}A_{24}: \nu_{23}(x, y) &= y - 18, & A_{24}A_{25}: \nu_{24}(x, y) &= -x - 3, \\
A_{25}A_{26}: \nu_{25}(x, y) &= y - 20, & A_{26}A_{27}: \nu_{26}(x, y) &= x - 3, \\
A_{27}A_1: \nu_{27}(x, y) &= 3x - y.
\end{aligned}$$

6.8. Построение двумерных фильтров для цифровой обработки изображений весовыми функциями (окнами) Кравченко

В этом разделе на основании идей, изложенных выше, рассмотрим использование R -операций для задачи синтеза и реализации двумерных КИХ-фильтров (фильтров с конечной импульсной характеристикой) для цифровой обработки сигналов и изображений. Следует заметить, что синтез двумерных цифровых фильтров отличается от синтеза одномерных. Так, в одномерном случае задачи синтеза фильтра и его схемной реализации разделены. На первом этапе выполняется синтез фильтра, а затем, с помощью соответствующих преобразований передаточной функции определяются коэффициенты, которые необходимы для построения конкретной схемной реализации. В двумерном случае наблюдается совершенно иная ситуация, из-за того, что многомерные полиномы нельзя разложить на множители. Практически это означает, что в общем случае нет возможности менять форму произвольной передаточной функции для согласования её с требованиями схемной реализации. Такое обстоятельство усложняет задачу проектирования фильтров, а также сокращает число приемлемых реализаций. Совместное использование R -функций и АФ для построения двумерных фильтров позволяет получать весовые функции (окна) с различными опорными областями.

6.8.1. Синтез двумерных КИХ-фильтров. Выбор весовой функции (окна) обуславливается несколькими требованиями. Во-первых, окно должно иметь опорную область в R . Во-вторых, чтобы отклик синтезированного фильтра хорошо аппроксимировал отклик идеального, функция окна должна аппроксимировать его двумерную импульсную функцию. Кроме того, двумерный КИХ-фильтр должен обеспечивать нулевой сдвиг фазы, т. е.

$$\hat{h}(\omega_1, \omega_2) = \hat{h}^*(\omega_1, \omega_2), \quad (6.106)$$

т.е. его импульсная характеристика симметрична относительно начала координат,

$$h[n_1, n_2] = h^*[-n_1, -n_2], \quad (6.107)$$

Все эти требования совпадают с требованиями к одномерным окнам, поэтому для построения двумерных окон часто используются одномерные прототипы. В соответствии с данным методом требуемая двумерная частотная характеристика фильтра $\hat{h}_0(\omega_1, \omega_2)$ представляется в виде ряда Фурье

$$\hat{h}_0(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} h_0[n_1, n_2] e^{-j(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}, \quad (6.108)$$

где коэффициенты $h_0[n_1, n_2]$ определяются с помощью выражения

$$h_0[n_1, n_2] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(\omega_1, \omega_2) e^{j(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} d\omega_1 d\omega_2. \quad (6.109)$$

Здесь $h_0[n_1, n_2]$ — бесконечная импульсная характеристика двумерного фильтра, соответствующего заданной частотной характеристике $H_0(\omega_1, \omega_2)$. Для реализации двумерного КИХ-фильтра пределы суммирования в (6.108) должны быть ограничены. Это приводит к ухудшению сходимости усеченного ряда к заданной частотной характеристике в точках ее разрыва (эффект Гиббса). Для улучшения сходимости, коэффициенты $h_0[n_1, n_2]$ следует умножить на конечную двумерную весовую функцию $w[n_1, n_2]$, т.е. в качестве коэффициентов фильтра взять

$$h[n_1, n_2] = w[n_1, n_2] \cdot h_0[n_1, n_2]. \quad (6.110)$$

Для фильтров с нулевым фазовым сдвигом весовая (оконная) функция также должна удовлетворять условию

$$w[n_1, n_2] = w^*[-n_1, -n_2]. \quad (6.111)$$

Двумерные КИХ-фильтры как правило синтезируются на основе двумерных оконных функций, определенных на прямоугольной, круговой или гексагональной опорных областях. В простейшем случае прямоугольной опорной области двумерное весовое окно формируется с помощью прямого произведения одномерных окон,

$$w[n_1, n_2] = w_1[n_1] \cdot w_2[n_2]. \quad (6.112)$$

Оконные функции удовлетворяют условиям нормировки: $w(x) = 0$ для $|x| > 1$, $w(0) = 1$, $w(-x) = w(x)$. С помощью выражения (6.112) можно построить двумерные окна с прямоугольной опорной областью. В случае круговой опорной области весовая функция получается путем вращения одномерного весового окна вокруг оси симметрии с помощью выражения

$$w[n_1, n_2] = w[\sqrt{n_1^2 + n_2^2}], \quad (6.113)$$

где $w(\cdot)$ — функция одномерного непрерывного окна. С помощью (6.113) можно получить двумерные дискретные окна, обладающие круговой симметрией. Такая симметрия желательна, например, при обработке изображений, когда любое направление в плоскости изображения является равноценным. Для построения двумерных весовых функций со сложными опорными областями можно использовать R-функции. Наиболее распространенные системы R-функций приведены в табл. 6.1. На рис. 6.45, а, в изображены атомарные функции $up(x)$ и $fup_5(x)$, а также модули их АЧХ (рис. 6.45, б, г)

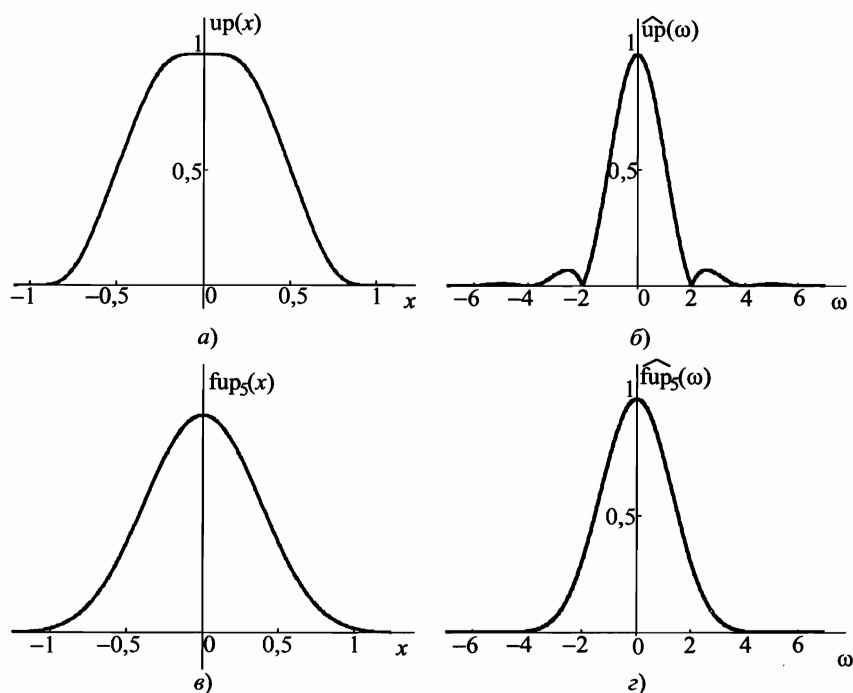


Рис. 6.45. Атомарные функции а) $up(x)$, в) $fup_5(x)$ и вид модуля их частотной характеристики б), г) соответственно

Примеры двумерных фильтров, построенных с помощью АФ приведены на рис. 6.46–6.50. Различные опорные области заданы R-операциями [1–3]. Для наглядности выбрана система R_1 (см. табл. 6.2). Здесь двумерное окно $w[n_1, n_2]$ на основе одномерного прототипа $w[n]$ синтезировано следующим образом. Сначала, с помощью полной системы R-операций составляется уравнение опорной области $\omega(x, y) \geq 0$ такое, что $\max \omega(x, y) = \omega(0, 0) = 1$. Затем двумерное окно представляется в следующем виде:

$$w[n_1, n_2] = w(1 - \omega[n_1, n_2]). \quad (6.114)$$

Очевидно, что в случае круговой опорной области единичного радиуса с центром в начале координат, описываемой (6.113), совпадает с выражением (6.114).

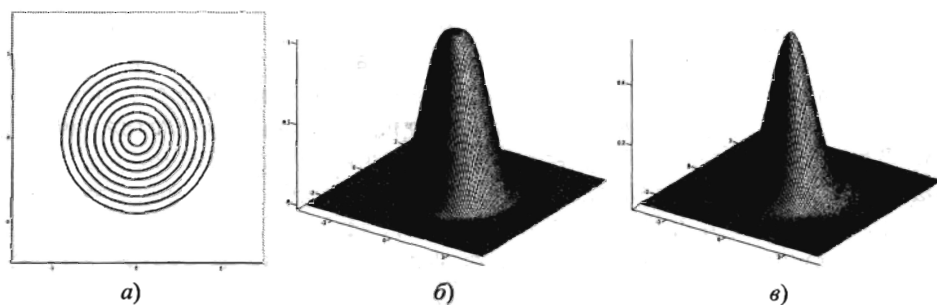


Рис. 6.46. а) Опорная область и варианты реализации двумерных весовых функций на основе б) АФ $up(x)$, в) $fup_5(x)$

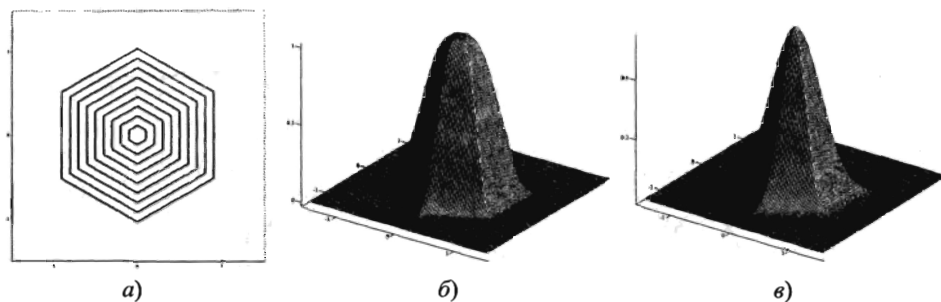


Рис. 6.47. а) Опорная область и варианты реализации двумерных весовых функций на основе б) $up(x)$, в) $fup_5(x)$

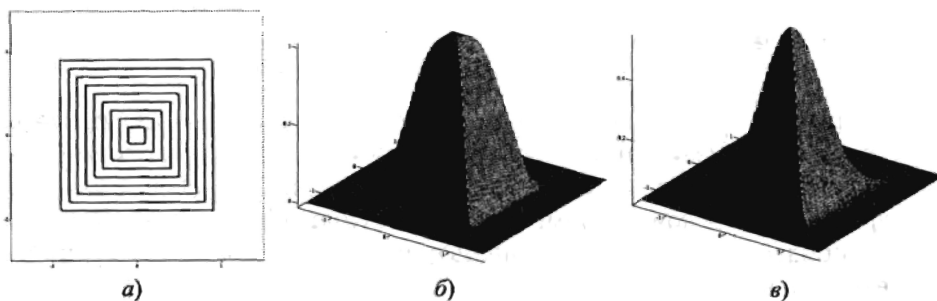


Рис. 6.48. а) Опорная область и варианты реализации двумерных весовых функций на основе б) АФ $up(x)$, в) $fup_5(x)$

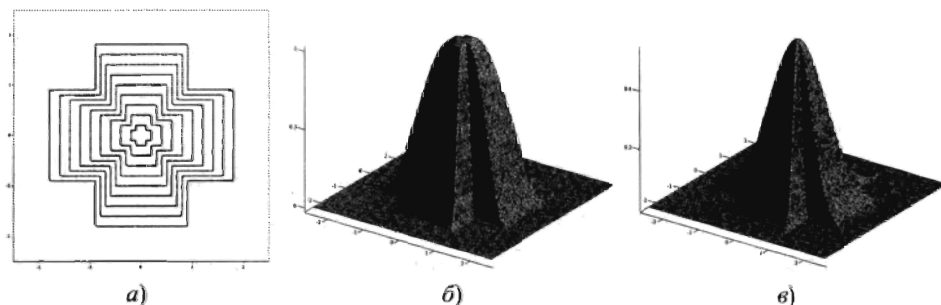


Рис. 6.49. а) Опорная область и варианты реализации двумерных весовых функций на основе б) $\text{up}(x)$, в) $\text{fur}_5(x)$

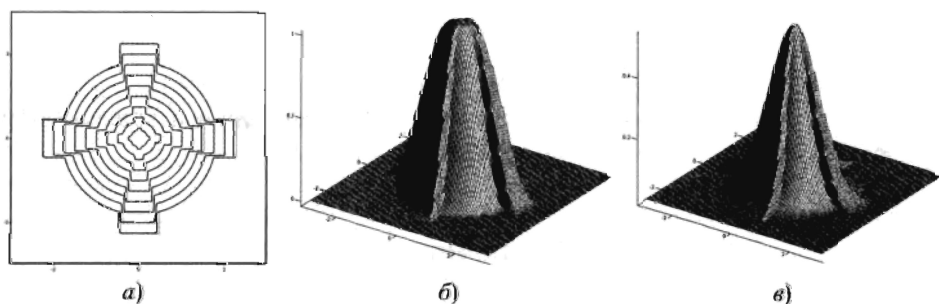


Рис. 6.50. а) Опорная область и варианты реализации двумерных весовых функций на основе б) АФ $\text{up}(x)$, в) $\text{fur}_5(x)$

Выражения для опорных областей двумерных весовых функций имеют следующий вид:

Круговая область рис. 6.46, а:

$$\omega_1 = 1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}. \quad (6.115)$$

Гексогонольная область рис. 6.47, а:

$$\begin{aligned} \omega_{21} &= 1 - x, & \omega_{22} &= 1 + x, \\ \omega_{23} &= 1 - \frac{x + y\sqrt{3}}{2}, & \omega_{24} &= 1 - \frac{x + y\sqrt{3}}{2}, \\ \omega_{25} &= 1 + \frac{x - y\sqrt{3}}{2}, & \omega_{26} &= 1 + \frac{x - y\sqrt{3}}{2}, \\ \omega_2 &= \omega_{21} \wedge \omega_{22} \wedge \omega_{23} \wedge \omega_{24} \wedge \omega_{25} \wedge \omega_{26}; \end{aligned} \quad (6.116)$$

Квадратная область рис. 6.48, а:

$$\begin{aligned} \omega_{31} &= 1 - x, & \omega_{32} &= 1 + x, \\ \omega_{31} &= 1 - y, & \omega_{32} &= 1 + y, \\ \omega_3 &= \omega_{31} \wedge \omega_{32} \wedge \omega_{33} \wedge \omega_{34}; \end{aligned} \quad (6.117)$$

Крестообразная область рис. 6.49, а:

$$\begin{aligned}\omega_{41} &= 1 - x, & \omega_{42} &= 1 + x, \\ \omega_{43} &= 2 - y, & \omega_{44} &= 2 + y, \\ \omega_{45} &= 1 - y, & \omega_{46} &= 1 + y, \\ \omega_{47} &= 2 - x, & \omega_{48} &= 2 + x, \\ \omega_4 &= [\omega_{41} \wedge \omega_{42} \wedge \omega_{43} \wedge \omega_{44}] \vee [\omega_{45} \wedge \omega_{46} \wedge \omega_{47} \wedge \omega_{48}];\end{aligned}\tag{6.118}$$

Сложная область рис. 6.50, а:

$$\begin{aligned}\omega_{51} &= 0,5 - x, & \omega_{52} &= 0,5 + x, & \omega_{53} &= 1 - y, & \omega_{54} &= 1 + y, \\ \omega_{55} &= 0,5 - y, & \omega_{56} &= 0,5 + y, & \omega_{57} &= 1 - x, & \omega_{58} &= 1 + x, \\ \omega_{59} &= 1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}, \\ \omega_5 &= [\omega_{51} \wedge \omega_{52} \wedge \omega_{53} \wedge \omega_{54}] \vee [\omega_{55} \wedge \omega_{56} \wedge \omega_{57} \wedge \omega_{58}] \vee \omega_{59}.\end{aligned}\tag{6.119}$$

Эти двумерные окна могут найти широкое применение в задачах обработки многомерных цифровых сигналов.

Заключение

Проблемы, рассмотренные в этой главе очень широки, чтобы ответить на все те вопросы, которые могут возникнуть у специалистов. Из анализа полученных результатов следует, что в компьютерных системах обработки и визуализации графической информации возникает задача выбора математического подхода к представлению графических данных. От этого в значительной мере зависит эффективность и качество работы системы, а также организация алгоритмов. Развитие конструктивных средств, способных кодировать геометрическую информацию с помощью некоторых аналитических конструкций, позволяет продвинуться в решении этого класса задач. Предложенная и обоснованная на основе R-операций и АФ методика позволяет не только эффективно описывать сложные локусы, но и решать конкретные практические задачи машинной графики, геометрического проектирования и дизайна, математического программирования, распознавания образов, построения многомерных фильтров с различными опорными областями, краевых задач математической физики и т. д.

Литература

1. Кравченко В. Ф., Рвачёв В. Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. — М.: Физматлит, 2006.
2. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. — Киев: Наукова думка, 1982.

3. *Кравченко В. Ф.* Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. — М.: Радиотехника, 2003.
4. *Кравченко В. Ф., Басараб М. А.* Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики. — М.: Физматлит, 2004.
5. *Зелкин Е. Г., Кравченко В. Ф., Гусевский В. И.* Конструктивные методы аппроксимации в теории антенн. — М.: Сайнс-Пресс, 2005.
6. *Кравченко В. Ф.* Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. — М.: Физматлит, 2006.
7. *Басараб М. А., Кравченко В. Ф., Матвеев В. А.* Математическое моделирование физических процессов в гироскопии. — М.: Радиотехника, 2005.
8. *Соллогуб А. В., Аншаков Е. П., Данилов В. В.* Космические аппараты систем зондирования поверхности Земли. Математические модели повышения эффективности КА. — М.: Машиностроение, 1993.
9. *Гончаренко А. А., Кравченко В. Ф., Пономарев В. И.* Дистанционное зондирование неоднородных сред. — М.: Машиностроение, 1991.
10. *Небабин В. Г., Сергеев В. В.* Методы и техника радиолокационного распознавания. — М.: Радио и связь, 1984.
11. Обнаружение и распознавание объектов радиолокации / Под ред. А. В. Соколова. — М.: Радиотехника, 2007.
12. *Штагер Е. А.* Рассеяние радиоволн на телах сложной формы. — М.: Радио и связь, 1986.
13. *Василенко Г. И., Тараторин А. М.* Восстановление изображений. — М.: Радио и связь, 1986.
14. *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений. — М.: Техносфера, 2005.
15. *Херн Д., Бейкер М. П.* Компьютерная графика и стандарт OpenGL. — М.: Издательский дом "Вильямс", 2005.
16. *Даджион Д., Мерсере Р.* Цифровая обработка многомерных сигналов. — М.: Мир, 1988.
17. Введение в контурный анализ. Приложения к обработке изображений и сигналов / Под ред. Я. А. Фурмана. — М.: Физматлит, 2003.
18. *Татаренко Н. И., Кравченко В. Ф.* Автоэмиссионные наноструктуры и приборы на их основе. — М.: Физматлит, 2006.
19. Нано- и микросистемная техника. От исследований к разработкам / Под ред. П. П. Мальцева. — М.: Техносфера, 2005.
20. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс. — М.: Издательский дом "Вильямс", 2006.
21. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. — М.: Издательский дом "Вильямс", 2003.
22. *Яценков В. С.* Основы спутниковой навигации. Системы GPS NAVSTAR и ГЛОНАСС. — М.: Горячая линия-Телеком, 2005.
23. *Андерсон Дж. А.* Дискретная математика и комбинаторика. — М.: Издательский дом "Вильямс", 2003.
24. *Кравченко В. Ф., Федоров И. Б., Чуриков Д. В.* Функции В. Л. Рвачева и атомарные функции в задачах описания сложных контурных объектов и цифровой обработке изображений // ЭВ и ЭС. — 2005. — № 7. — С. 70–80.
25. *Гуляев Ю. В., Кравченко В. Ф., Пустовойт В. И.* Новый класс WA-систем функций Кравченко-Рвачева // ДАН РАН. — 2007. — Т. 413, № 3. — С. 320–328.

ГЛАВА 7

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЕЙВЛЕТЫ КРАВЧЕНКО–КОТЕЛЬНИКОВА И КРАВЧЕНКО–ЛЕВИТАНА В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ

Введение

Основная идея вейвлет-преобразования сигнала (ВП) состоит в его разложении по базису, сконструированному из обладающей определенными свойствами локализованной функции (вейвлета) посредством масштабных изменений и переносов. Каждая из функций этого базиса характеризует как определенную пространственную (или временную) частотную составляющую сигнала, так и локализацию этой составляющей в физическом пространстве (или времени). В отличие от традиционного преобразования Фурье, предоставляющего одномерную функцию спектральной плотности, ВП дает двумерную развертку исследуемого одномерного сигнала. При этом частота и координата (или время) рассматриваются как независимые переменные. Последнее означает, что для ВП увеличение разрешающей способности по одной из этих переменных не приводит к ухудшению разрешения по другой, как это происходит при построении двумерного динамического Фурье-спектра в результате проведения оконного преобразования Фурье. Поэтому появляется возможность анализировать свойства сигнала одновременно в физическом (время, координата) и в частотном пространствах. В качестве некоторого недостатка вейвлет-анализа можно считать то обстоятельство, что почти все вейвлеты не имеют аналитического представления в виде одной формулы. Однако, они могут задаваться итерационными выражениями, легко вычисляемыми современными компьютерами. Таким образом, вейвлет-анализ обеспечивает лучшую частотно-временную локализацию, гибкость анализа и возможность выбора более подходящего вида вейвлета.

7.1. Вейвлет-преобразования

Свойства вейвлетов. Известно [2, 6], что основными свойствами вейвлетов являются локализация, нулевое среднее и автомодельность базиса.

Условие нулевого среднего:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (7.1)$$

Условие ограниченности во временной и в частотной областях:

$$\int |\psi(t)|^2 dt < \infty, \quad \int |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty. \quad (7.2)$$

Автомодельность базиса. Характерным признаком вейвлетного базиса является его самоподобие, так как все базисные функции получены с помощью масштабных преобразований и сдвигов из одного и того же исходного вейвлета.

Вейвлет-преобразование. Прямое непрерывное преобразование одномерного сигнала $f(t)$ [2–6] имеет вид

$$Wf(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \tilde{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (7.3)$$

где символ “ $\sim$ ” обозначает комплексное сопряжение, $\psi(t)$ — вейвлетобразующая функция, a — параметр масштабирования, b — параметр сдвига. Если функция $\psi(t)$ является вещественной, то и вейвлет-спектр $Wf(a, b)$ оказывается вещественным. Если функция $\psi(t)$ является аналитической и комплекснозначной, то такой вейвлет называется аналитическим, а соответствующее непрерывное преобразование — аналитическим вейвлет-преобразованием. Функция $\psi(t)$ называется аналитической [3, 6], если ее преобразование Фурье равняется нулю для отрицательных частот: $\hat{\psi}(\omega) = 0$ при $\omega < 0$. Поскольку вейвлет-спектр $Wf(a, b)$ для аналитического ВП представляет собой комплекснозначную функцию, то отдельно рассматриваются амплитудная $|Wf(a, b)|$ и фазовая $\arg Wf(a, b)$ характеристики. Наличие мнимой части является основным преимуществом аналитического ВП перед обычным, так как фазовая характеристика учитывает дополнительную информацию об исследуемом сигнале.

7.2. Обобщенные ряды Котельникова на основе атомарных функций (АФ)

Известно [1, 2, 5, 6], что АФ нашли широкое применение в различных физических приложениях. На их основе [2] построены обобщенные ряды Котельникова. Теоремы, определяющие условия, при которых сигнал $s(t)$ можно точно восстановить по дискретным отсчетам называются теоремами отсчетов [3, 10]. Они имеют дело с представлениями сигнала $s(t)$ в виде

$$s(t) \approx_{t \in \{T\}} \sum_k c_k \varphi_k(t) = s_K(t), \quad (7.4)$$

где $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$ — множество сигналов (функций времени), выбранных заранее независимо от вида $s(t)$, $\{T\}$ — множество моментов времени, на котором определены $s(t)$ и $\{\varphi_k(t)\}$, $k = 1, 2, \dots$. Знак $\approx$ указывает на то, что правая часть (7.4) не обязательно совпадает с $s(t)$ во всех точках,

а лишь близка к $s(t)$ в соответствии с выбранной метрикой (расстоянием) $\rho[s(t), s_K(t)]$. Наиболее часто встречается квадратичная метрика вида

$$\rho_{s\psi} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |s(t) - s_K(t)|^2 dt, \quad (7.5)$$

пропорциональная разности энергий аппроксимируемого $s(t)$ и аппроксимирующего $s_K(t)$ сигналов. В канале связи под сигналом $s(t)$ понимается огибающая амплитуды несущего сигнала $s_H(t)$ частоты порядка $f \sim \sim 10^{14...15}$ Гц. В роли функций $\{\varphi_k(t)\}$ обычно используются импульсы, смещенные относительно начала отсчета времени пропорционально k . Импульс $\varphi_k(t)$ называют интерполирующим, если

$$(\forall k) [\varphi_k(0) = 1], \quad (\forall l = 1, 2, \dots) [\varphi_k(l\Delta) = 0], \quad (7.6)$$

где Δ — некоторый конечный интервал времени, период отсчетов. В роли функций c_k для удобства реализации в большинстве случаев выступают точечные отсчеты

$$c_k = s(k\Delta), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (7.7)$$

а вид импульсов $\{\varphi_k(t)\}$ принимается одинаковым. Тогда

$$s(t) \approx \sum_k s(k\Delta) \varphi_k(t - k\Delta). \quad (7.8)$$

Представление (7.8) дает точное равенство при $t = k\Delta$, и $s(t)$ в промежутках между отсчетами изменяется не слишком быстро. Тогда погрешность

$$\rho \left(s(t), \sum_k s(k\Delta) \varphi(t - k\Delta) \right) \quad (7.9)$$

получается технически допустимой. Более сильное утверждение справедливо для сигналов с ограниченной полосой частот. Для них спектр

$$\widehat{s}(\omega) = 0 \quad (7.10)$$

вне интервала $|\omega| \leq \Omega$, где $\Omega = 2\pi F$ — максимально возможная круговая частота спектра. Внутри интервала $|\omega| \leq \Omega$ спектр $\widehat{s}(\omega)$ отличен от нуля по крайней мере на некотором подмножестве точек ω ненулевой меры (область, в точках которой $\widehat{s}(\omega) \neq 0$ имеет ненулевую длину). Спектр сигнала $s(t)$ определяется так

$$\widehat{s}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{i\omega t} dt. \quad (7.11)$$

Здесь $\widehat{s}(\omega)$ интегрируема в квадрате на $[-\Omega; +\Omega]$. Предполагается, что сигнал

$$s(t) = \int_{-\Omega}^{+\Omega} \widehat{s}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (7.12)$$

обладает конечной энергией в области своего определения $-\infty < t < +\infty$ (теоретически бесконечной)

$$\int_{-\Omega}^{+\Omega} |\widehat{s}(\omega)|^2 d\omega < \infty. \quad (7.13)$$

Теорема Котельникова. Для сигналов $s(t)$ с ограниченной полосой $\widehat{s}(\omega)$ и заданных на бесконечной оси времени, $-\infty < t < +\infty$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta) \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta} (t - k\Delta)}{\frac{\pi}{\Delta} (t - k\Delta)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{k}{2F}\right) \frac{\sin 2\pi F \left(t - \frac{k}{2F}\right)}{2\pi F \left(t - \frac{k}{2F}\right)} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} s\left(k \frac{\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin (\Omega t - k\pi)}{\Omega t - k\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s\left(k \frac{\pi}{\Omega}\right) \operatorname{sinc} (\Omega t - k\pi), \end{aligned} \quad (7.14)$$

где $\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$, Δ — интервал времени между двумя соседними равноотстоящими отсчетами сигнала $s(t)$:

$$\Delta = \frac{1}{2F} = \frac{\pi}{\Omega}. \quad (7.15)$$

Представление сигнала $s(t)$ рядом (7.14) представлено на рис. 7.1. Сплошная линия $s(t)$ представляет собой сумму сплошного и пунктирных горбов $\varphi_k(t)$, умноженных на величину амплитуд $s(k\Delta)$ в точках $k\Delta$.

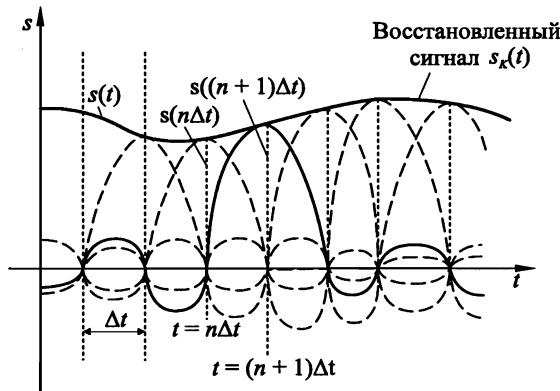


Рис. 7.1. Представление сигнала $s(t)$ рядом (7.14)

Обобщенные ряды Котельникова на основе АФ. Сигнал $s(t)$ с ограниченной полосой $\widehat{s}(\omega)$ представим в виде

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta) \prod_{j=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} (t - k\Delta) \right). \quad (7.16)$$

Выражение (7.16), удовлетворяя всем требованиям теоремы Котельникова, обладает лучшей сходимостью, особенно при восстановлении ограниченных по времени и разрывных сигналов. При вычислениях необходимо ограничиться конечным числом членов произведения в правой части (7.16). В этом случае имеет место точное разложение

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta) \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} (t - k\Delta) \right), \quad (7.17)$$

$$a(1 + a^{-M}) > 2, \quad \Delta = \frac{\pi}{\Omega} \cdot \frac{a(1 + a^{-M}) - 2}{a - 1}. \quad (7.18)$$

Минимально значения a могут быть найдены из решения трансцендентного уравнения $a(1 + a^{-M}) = 2$. При $M = 1$ из (7.17) следует ряд Котельникова [1–3], а в пределе, когда $M \rightarrow \infty$, ряд (7.16).

Физический смысл обобщенного ряда Котельникова. Выражение (7.16), справедливое при условии (7.18), говорит о том, что операции дискретизации (цифрового преобразования) и восстановления сигнала взаимно обратны. Из разложения (7.16) следует, что для любого задаваемого t сигнал $s(t)$ теоретически можно получить на приемном конце, если пропустить всю бесконечную последовательность $s(k\Delta)$, $k = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$ через идеальный фильтр нижних частот с частотой среза $\Omega = \frac{\pi}{\Delta} \cdot \frac{a(1 + a^{-M}) - 2}{a - 1}$ и амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) $|K(\omega)| = \Delta$ в полосе пропускания. Теорема Котельникова характеризует предельные возможности канала связи. Тогда (7.17) следует понимать так:

$$s(t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=-K}^K s(k\Delta) \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} (t - k\Delta) \right) \right], \quad (7.19)$$

$$s_K(t; \Delta) = \sum_{k=-K}^K s(k\Delta) \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} (t - k\Delta) \right),$$

причем сходимость определяется в квадратичной метрике

$$\rho(s(t); \tilde{s}(t; \Delta)) = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t) - \tilde{s}(t; \Delta)|^2 dt, \quad (7.20)$$

где $\tilde{s}(t; \Delta) = \lim_{K \rightarrow \infty} s_K(t; \Delta)$.

Для инженерных задач обобщенная теорема Котельникова может использоваться следующим образом [10]. С какого-то фиксированного момента t_0 на приемный конец канала связи начинают поступать отсчеты $s(k\Delta)$. На практике отсчеты реализуются в виде импульсов прямоугольной (треугольной, трапециевидной или иной аналитически заданной) формы. Длительность импульсов достаточно малая, чтобы на интервале Δ успели закончиться все переходные процессы в приемнике. Используемая сейчас стандартная аппаратура открытого атмосферного канала (ОАК) позволяет без труда формировать импульсы длительности $\Delta \simeq 10 \dots 50 \text{ нс} = (1 \dots 5) \cdot 10^{-8} \text{ с}$ с почти прямоугольной огибающей, надежно гарантируя интервал дискретизации не более $\tilde{\Delta} \simeq 100 \dots 200 \text{ нс} = (1 \dots 2) \cdot 10^{-7} \text{ с}$. При этом возможна дискретизация сигналов с верхней частотой

$$F = \frac{1}{2\Delta} \approx \frac{1}{(2 \dots 4) \cdot 10^{-7}} \approx (0,25 \dots 0,5) \cdot 10^{-7} \text{ Гц} \approx 30 \text{ МГц},$$

обеспечивающей скорость передачи порядка 30 Мбит/с.

Пусть на приемном конце вид сигнала $s(t)$ известен заранее. Импульсы $s(k\Delta)$, поочередно поступая на вход приемника, формируют текущую сумму ряда

$$s_k(t; \Delta), \quad k = \left\lfloor \frac{t_0}{\Delta} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{t_0}{\Delta} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{t_0}{\Delta} \right\rfloor + 2, \dots,$$

для заранее выбранного $t = K\Delta + \frac{\Delta}{2}$ (или K). Величина t специально берется некрatной $K\Delta$, чтобы оценить точность восстановления сигнала в точке отличной от момента отсчета. Как только номер текущего отсчета совпадает с K ($k = K$), определяется величина суммы $s_K(t)$, $t = k\Delta + \frac{\Delta}{2}$, а по истечении периода времени $\Delta/2$ сравнивается с эталонным значением. Если погрешность восстановления

$$\Delta s = |s(t) - s_K(t)| \quad (7.21)$$

не превышает заданной максимальной величины

$$\Delta s \leq \Delta s_{\max}, \quad (7.22)$$

то длина интервала дискретизации Δ и количество отсчетов K достаточны для восстановления сигнала по его дискретным отсчетам.

7.3. Весовая функция (окно) Кравченко–Котельникова

Согласно (7.8) уравнение (7.17) запишем в виде

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta) \cdot \varphi_{k-M}(t), \quad (7.23)$$

где

$$\varphi_{k-M}(t) = \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} (t - k\Delta) \right). \quad (7.24)$$

Параметр a ($1 < a \leq 2$) выбирается исходя из частотных свойств сигналов [2]. Функция (7.24) обладает хорошими физическими параметрами [1, 2]. Она нашла применение в задачах цифровой обработки сигналов (ЦОС) различной физической природы. Весовая функция (окно) Кравченко–Котельникова определяется следующим выражением:

$$w_{KK}(t) = \varphi_{0-M}(t) = \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} t \right). \quad (7.25)$$

На её поведение оказывают влияние три параметра: M , a , Δ . Изменяя их, получим весовые функции Кравченко–Котельникова с различными физическими характеристиками. На рис. 7.2–7.7 представлены весовые функции Кравченко–Котельникова для разных значений: M , a и Δ ($M = 1$ — штрих-пунктир, $M = 2$ — пунктир, $M = 3$ — сплошная линия).

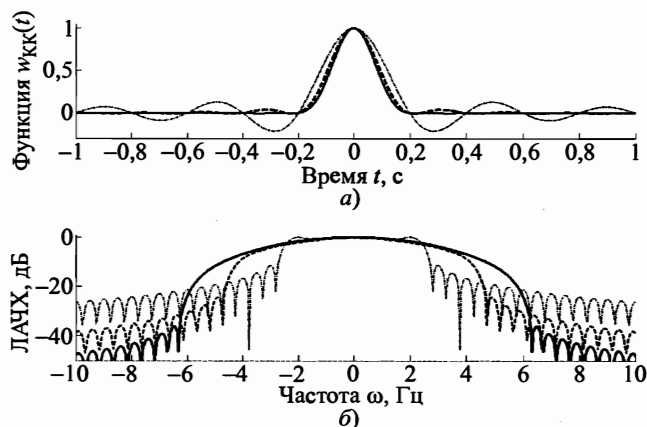


Рис. 7.2. Весовые функции Кравченко–Котельникова для $M = 1$ (пунктир), $M = 2$ (штрих-пунктир), $M = 3$ (сплошная линия) $a = 1,2$, $\Delta = 0,2$ с) (а), их ЛАЧХ (б)

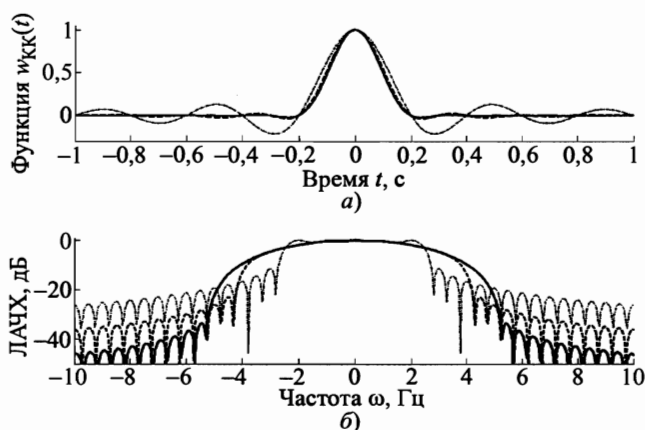


Рис. 7.3. Весовые функции Кравченко–Котельникова для $M=1$ (пунктир), $M=2$ (штрих-пунктир), $M=3$ (сплошная линия) $a=1,5$, $\Delta=0,2$ с) (а), их ЛАЧХ (б)

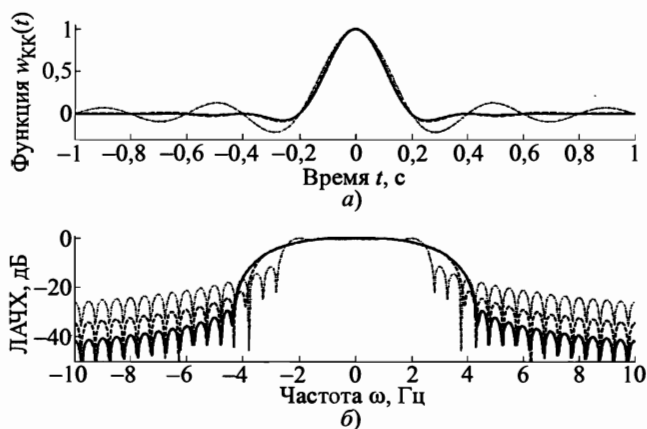


Рис. 7.4. Весовые функции Кравченко–Котельникова для $M=1$ (пунктир), $M=2$ (штрих-пунктир), $M=3$ (сплошная линия) $a=2$, $\Delta=0,2$ с) (а), их ЛАЧХ (б)

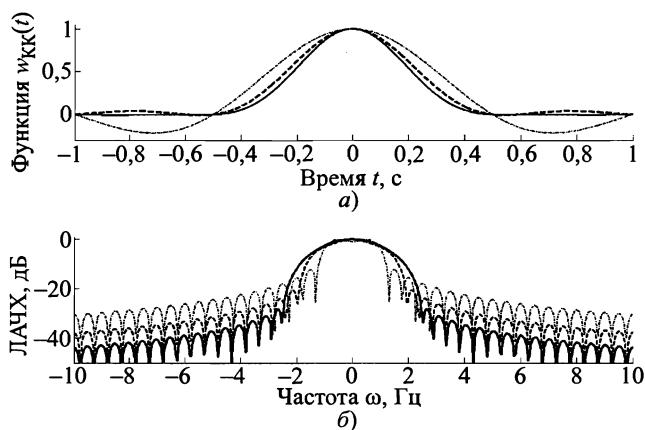


Рис. 7.5. Весовые функции Кравченко–Котельникова для $M = 1$ (пунктир), $M = 2$ (штрих-пунктир), $M = 3$ (сплошная линия) $a = 1,2$, $\Delta = 0,5$ с) (а), их ЛАЧХ (б)

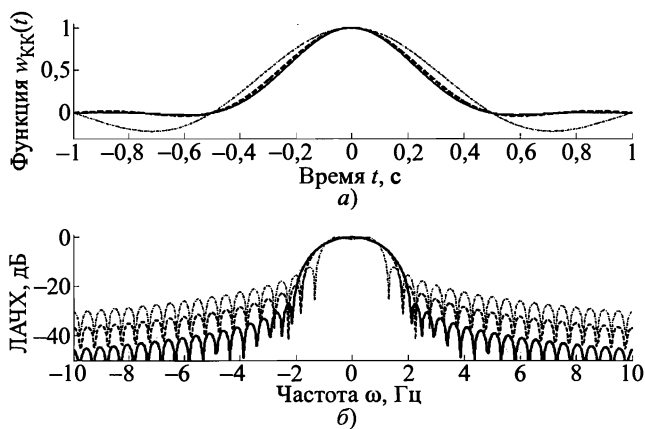


Рис. 7.6. Весовые функции Кравченко–Котельникова для $M = 1$ (пунктир), $M = 2$ (штрих-пунктир), $M = 3$ (сплошная линия) $a = 1,5$, $\Delta = 0,5$ с) (а), их ЛАЧХ (б)

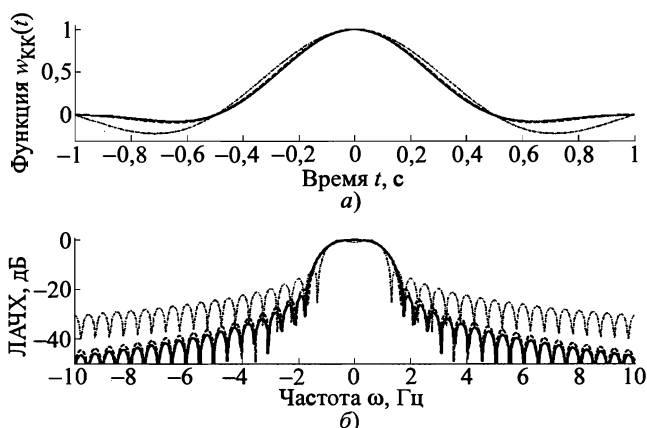


Рис. 7.7. Весовые функции Кравченко–Котельникова для $M = 1$ (пунктир), $M = 2$ (штрих-пунктир), $M = 3$ (сплошная линия) $a = 2$, $\Delta = 0,5$ с) (а), их ЛАЧХ (б)

Вторая производная весовой функции Кравченко–Котельникова. Здесь рассмотрим поведение второй производной весовой функции (окна) Кравченко–Котельникова

$$w_{2пКК}(t) = -\frac{d^2}{dt^2} \left(\prod_{j=1}^M \text{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta a^{j-1}} t \right) \right). \quad (7.26)$$

Графики этой функции для различных значений параметров M , a , Δ представлены на рис. 7.8–7.10.

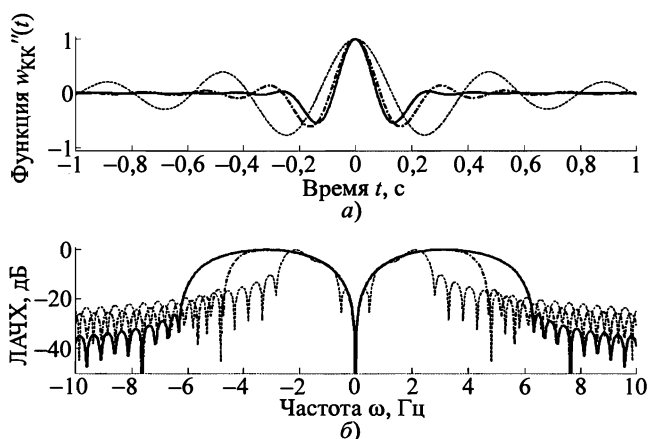


Рис. 7.8. Вторая производная весовой функции Кравченко–Котельникова: $M = 1$ (пунктир), $M = 2$ (штрих-пунктир), $M = 3$ (сплошная линия) для $a = 1,2$, $\Delta = 0,2$ с) (а), их ЛАЧХ (б)

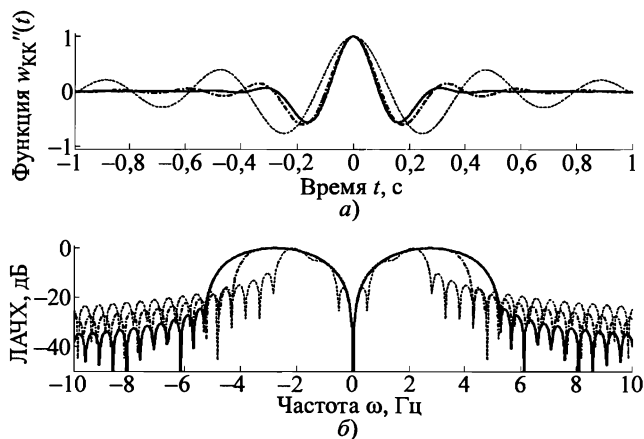


Рис. 7.9. Вторая производная весовой функции Кравченко–Котельникова: $M = 1$ (пунктир), $M = 2$ (штрих-пунктир), $M = 3$ (сплошная линия) для $a = 1,5$, $\Delta = 0,2$ с (а), их ЛАЧХ (б)

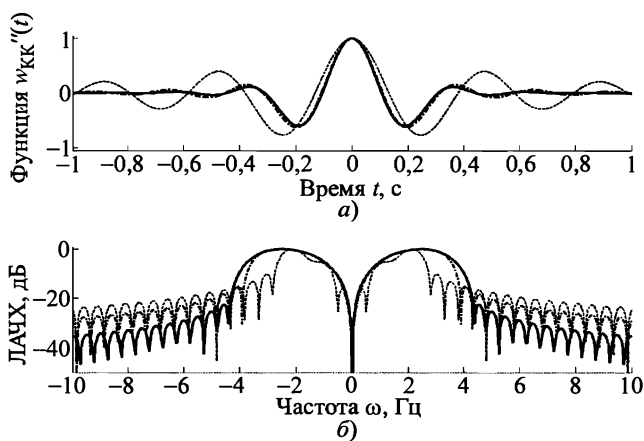


Рис. 7.10. Вторая производная весовой функции Кравченко–Котельникова: $M = 1$ (пунктир), $M = 2$ (штрих-пунктир), $M = 3$ (сплошная линия) для $a = 2$, $\Delta = 0,2$ с (а), их ЛАЧХ (б)

7.4. Весовая функция Кравченко–Левитана

Разложение [2] в ряд Котельникова не является единственно возможной формой представления функций (7.4). Существует также представление полиномов Левитана [4], внешний вид которого напоминает разложение в ряд Котельникова:

$$S_n(f; z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(z + k\Delta) \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{\pi}{\Delta} (z + k\Delta) \right], \quad (7.27)$$

где $\Delta = \frac{1}{F} = \frac{2\pi}{\Omega}$. В (7.27) в качестве базисных функций фигурируют сдвиги-сжатия ядер Фейера. Обобщенные многочлены Левитана [2, 4] для функций $f(z) \in \mathbf{W}_{\sigma}^{(r)}$ ($\sigma \geq 0$, $r = 0, 1, 2, \dots$), таких, что $f(x)/|x - i|^{2r+1} \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R})$, строятся на основе ядер типа Фейера (Джексона). Они имеют вид

$$S_n^{(r)}(f; z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(z + k\Delta) \operatorname{sinc}^{2r+2} \left[\frac{\pi}{\Delta} (z + k\Delta) \right]. \quad (7.28)$$

По аналогии с (7.25) вводим весовую функцию (окно) Кравченко–Левитана

$$w_{\text{кл}}(t) = \prod_{j=1}^M \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta 2^{j-1}} t \right) \right)^{2r+2}. \quad (7.29)$$

Весовая функция $w_{\text{кл}}(t)$ также как и $w_{\text{кк}}(t)$ зависит от трех параметров: M , r , Δ , входящих в (7.29). Изменяя их последовательно, получим весовые функции (окна) Кравченко–Левитана с различными физическими характеристиками. На рис. 7.11–7.14 представлены весовые функции Кравченко–Левитана для разных значений: M , r и Δ .

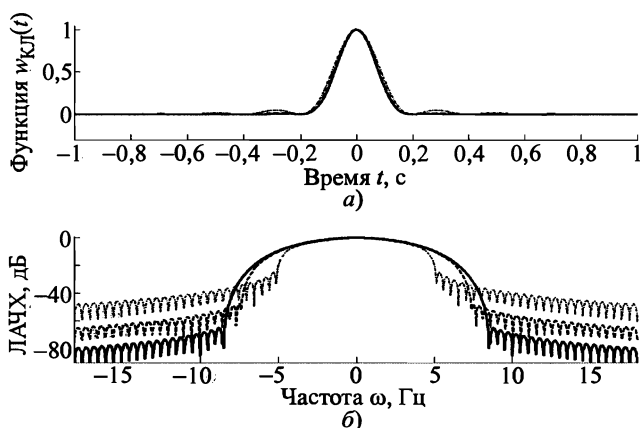


Рис. 7.11. Весовая функция Кравченко–Левитана: $M = 1$ (пунктир), $M = 2$ (штрих-пунктир), $M = 3$ (сплошная линия) ($r = 0$, $\Delta = 0,2$ с) (а), их ЛАЧХ (б)

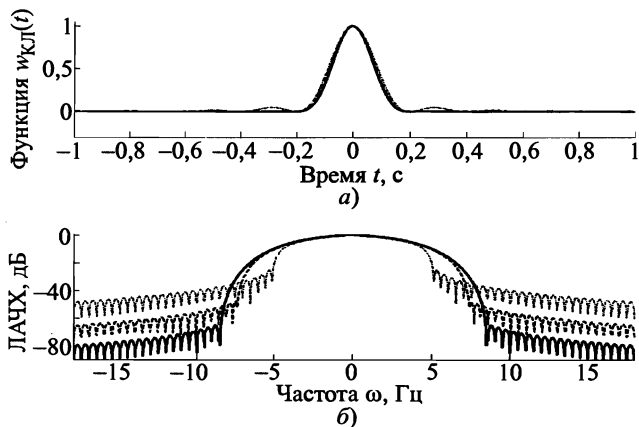


Рис. 7.12. Весовая функция Кравченко–Левитана: $M = 1$ (пунктир), $M = 2$ (штрих-пунктир), $M = 3$ (сплошная линия) ($r = 1$, $\Delta = 0,2$ с) (а), их ЛАЧХ (б)

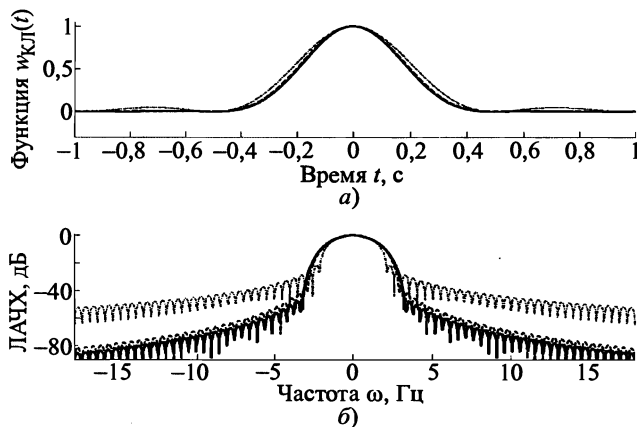


Рис. 7.13. Весовая функция Кравченко–Левитана: $M = 1$ (пунктир), $M = 2$ (штрих-пунктир), $M = 3$ (сплошная линия) ($r = 0$, $\Delta = 0,5$ с) (а), их ЛАЧХ (б)

Ряд (7.28) имеет лучшую сходимость по сравнению с (7.17). Это объясняется тем, что в (7.29) функция $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ возводится в степень $2r + 2$, $r = 0, 1, 2, \dots$. Ниже в табл. 7.1, 7.2, 7.5, 7.6 приведены физические характеристики весовых функций Кравченко–Котельникова и Кравченко–Левитана, из которых видно, что они обладают хорошими временными и частотными свойствами.

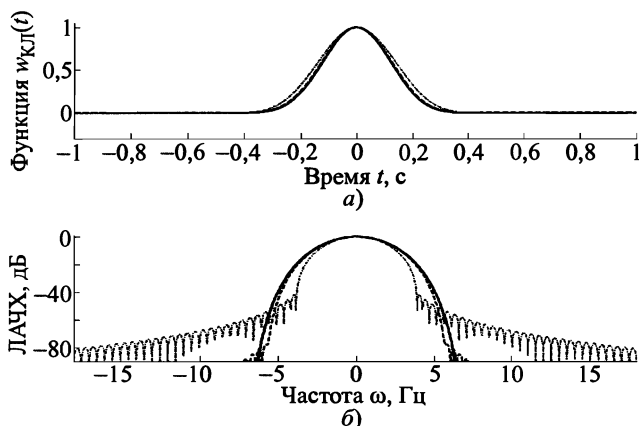


Рис. 7.14. Весовая функция Кравченко–Левитана: $M = 1$ (пунктир), $M = 2$ (штрих-пунктир), $M = 3$ (сплошная линия) ($r = 1$, $\Delta = 0,5$ с) (а), их ЛАЧХ (б)

Вторая производная весовой функции Кравченко–Левитана. Рассмотрим поведение второй производной весовой функции Кравченко–Левитана

$$w_{2пКК}(t) = -\frac{d^2}{dt^2} \left(\prod_{j=1}^M \left(\text{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta 2^{j-1}} t \right) \right)^{2r+2} \right). \quad (7.30)$$

Графики этой функции для различных значений параметров M , r , Δ представлены на рис. 7.15–7.16.

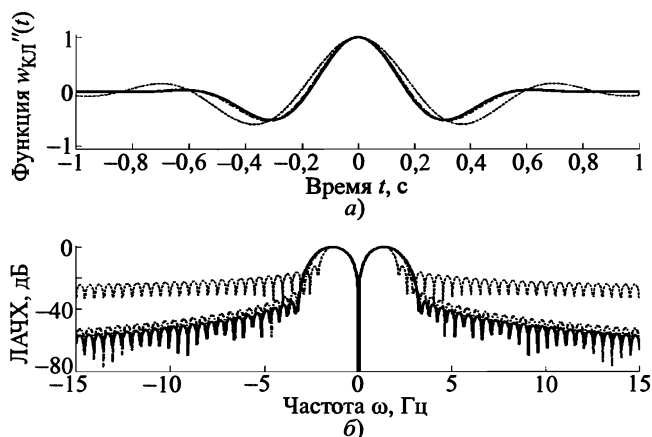


Рис. 7.15. Вторая производная весовых функций Кравченко–Левитана: $M = 1$ (пунктир), $M = 2$ (штрих-пунктир), $M = 3$ (сплошная линия) ($r = 0$, $\Delta = 0,5$ с) (а), их ЛАЧХ (б)

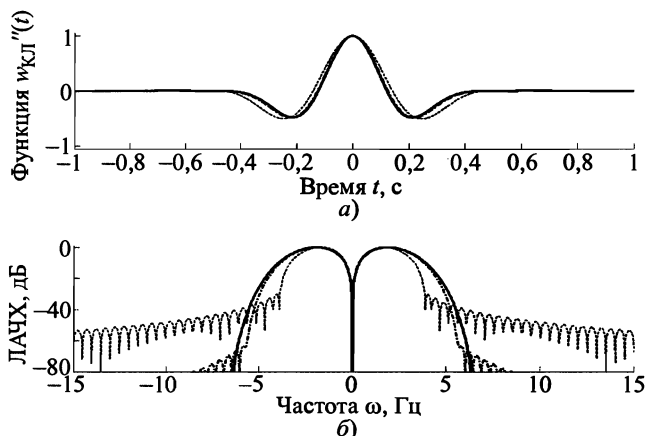


Рис. 7.16. Вторая производная весовых функций Кравченко–Левитана: $M = 1$ (пунктир), $M = 2$ (штрих-пунктир), $M = 3$ (сплошная линия) ($r = 1$, $\Delta = 0,5$ с) (а), их ЛАЧХ (б)

7.5. Вейвлет-модулированные весовые функции Кравченко–Котельникова и Кравченко–Левитана

Следуя [1–6], вейвлет-модулированная весовая функция определяется выражением вида

$$\psi(t) = w(t) \cdot \exp(i\eta t), \quad (7.31)$$

где $w(t)$ — весовая функция, η — параметр, имеющий физический смысл частоты. Весовая функция удовлетворяет условиям нормировки: $w(t) = 0$ при $|t| > 1$, $w(0) = 1$, $w(-t) = w(t)$. Основным требованием к ней при построении аналитического вейвлета является достаточно хорошая локализованность как во временной, так и в частотной областях. Если $\eta = \pi m$, где m — натуральное число, то m характеризует количество полных периодов гармонической функции, вырезанных окном $w(t)$. Изменением параметра η можно добиться выполнения условия $\hat{\psi}(\omega) = 0$ для всех $\omega \leq 0$. Преобразование (7.31) не влияет на ширину носителя во временной области. На рис. 7.17, а, б представлены блок-схемы алгоритмов вычисления вейвлет-модулированных весовых функций Кравченко–Котельникова и Кравченко–Левитана.

Получаем следующие аналитические вейвлеты:

$$\psi_{\text{АКК}}(t) = w_{\text{КК}}(t) \cdot \exp(i\eta t) = \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{\Delta a^{j-1}}\right) \cdot \exp(i\eta t), \quad (7.32)$$

$$\psi_{\text{АКЛ}}(t) = w_{\text{КЛ}}(t) \cdot \exp(i\eta t) = \prod_{j=1}^M \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta 2^{j-1}} t\right) \right]^{2r+2} \cdot \exp(i\eta t). \quad (7.33)$$

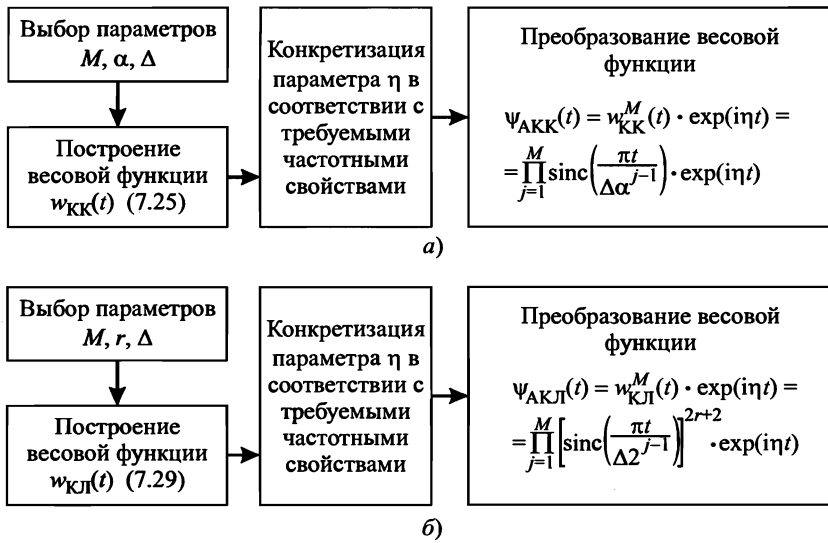


Рис. 7.17. Блок-схема алгоритма вычисления вейвлет-модулированных весовых функций Кравченко–Котельникова (а) и Кравченко–Левитана (б)

В (7.32) и (7.33) параметры M , a , r , Δ определяют основные физические характеристики (ширину функции спектральной плотности (ФСП) по уровню 3 дБ и 6 дБ, максимальный уровень боковых лепестков и др.). Графики этих функций приведены на рис. 7.19–7.21 и рис. 7.25–7.28. Определенный физический интерес представляют вторые производные выражений (7.30) и (7.31), которые имеют вид:

$$\psi_{A2\pi KK}(t) = w_{2\pi KK}(t) \cdot \exp(i\eta t) = \left(-\frac{d^2}{dt^2} \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi t}{\Delta a^{j-1}} \right) \right) \cdot \exp(i\eta t), \quad (7.34)$$

$$\psi_{A2\pi KL}(t) = w_{2\pi KL}(t) \cdot \exp(i\eta t) = \left(-\frac{d^2}{dt^2} \prod_{j=1}^M \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta 2^{j-1}} t \right) \right]^{2r+2} \right) \cdot \exp(i\eta t). \quad (7.35)$$

Графики функций (7.34) и (7.35) приведены на рис. 7.22–7.24 и рис. 7.29–7.31. С увеличением M функции (7.25) и (7.29) как во временной, так и в частотной областях быстро убывают. При любых η , больших некоторого значения ($\eta \geq 2\pi f_{\max}$), вейвлет-модулированные функции удовлетворяют условию нулевого среднего (7.1) с высокой степенью точности, а если $\eta = 2\pi\nu_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), где ν_i — нули ФСП, условие (7.1) выполняется точно. Когда $\eta = 2\pi\nu_1$, то показатель широкополосности μ (7.34) — максимальный. Это следует из того, что при увеличении η минимальная

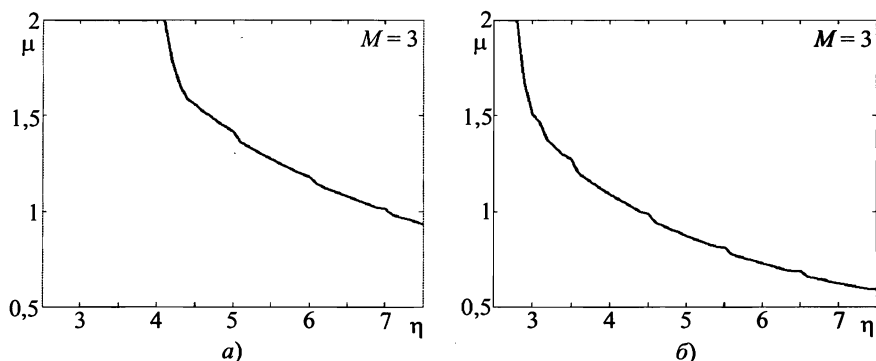


Рис. 7.18. Зависимость параметра μ от η для вейвлет-модулированных функций: (а) Кравченко–Котельникова ($M=3$, $A=2$) и (б) Кравченко–Левитана ($M=3$, $r=0$)

и максимальная частоты также увеличиваются на одно и то же значение, а величина μ уменьшается. Поведение μ при изменении η для (7.32) и (7.33) приведено на рис. 7.18. Если $\eta = 2\pi f_{\max}$, то $\mu = 1$.

7.6. Физические характеристики СШП сигналов

Для исследования вейвлетобразующих функций и анализируемых модельных СШП сигналов будем использовать модифицированные физические характеристики [2].

Показатель широкополосности. Его использование обусловлено тем, что, вейвлетобразующая функция $\psi(t)$ в большинстве случаев является СШП сигналом. Показатель широкополосности μ , задаваемый соотношением

$$\mu = 2 \frac{f_{\max} - f_{\min}}{f_{\max} + f_{\min}}, \quad (7.36)$$

где $f_{\min}$, $f_{\max}$ — минимальная и максимальная частоты функции спектральной плотности сигнала и определяются по уровню убывания функции спектральной плотности (ФСП) в e раз относительно ее главного максимума. Для функций, у которых $\Phi(0) \neq 0$, как и для любого видеосигнала, $\mu = 2$. Под СШП сигналом понимают сигнал, показатель μ которого удовлетворяет условию: $\mu_{\min} \leq \mu < 2$, где $\mu_{\min} = 1$.

Центральная частота функции спектральной плотности. Она является вторым основным параметром при описании СШП сигналов и задается выражением

$$f_0 = \frac{1}{2} (f_{\min} + f_{\max}). \quad (7.37)$$

Для $w(t)$, у которой $f_{\min} = 0$, $f_0 = f_{\max}/2$.

Относительное положение максимума ФСП определяется

$$\gamma_1 = f_m / f_0, \quad (7.38)$$

где f_m — частота главного максимума.

Относительное положение первого нуля ФСП. Для $w(t)$ под частотой первого нуля ν понимается такое минимальное значение частоты f , что $\hat{w}(\nu) = 0$. Для $\psi(t)$, у которой $\hat{\psi}(0) = 0$, следует дополнительно потребовать $\nu \neq 0$. Тогда

$$\gamma_2 = \frac{\nu - f_m}{f_{\max} - f_{\min}}. \quad (7.39)$$

Выражение (7.39) отличается от приведенного в [2]. В данной ситуации γ_2 определяется так, чтобы функционал качества (7.59) являлся инвариантным относительно параметра масштабирования a (см. (7.3)).

Относительная ширина ФСП по уровню 3 дБ. Этот параметр представляет собой уровеньый показатель широкополосности. Это следует из сравнения его с (7.34)

$$\gamma_3 = \frac{f_{\max 3} - f_{\min 3}}{f_{\max} - f_{\min}}. \quad (7.40)$$

Здесь максимальная и минимальная частоты $f_{\min 3}$ и $f_{\max 3}$ определяются из условия

$$10 \lg \left| \frac{\hat{w}(f)}{\hat{w}(f_m)} \right|^2 = 3. \quad (7.41)$$

Относительная ширина ФСП по уровню 6 дБ. Аналогично предыдущему параметру

$$\gamma_4 = \frac{f_{\max 6} - f_{\min 6}}{f_{\max} - f_{\min}}, \quad (7.42)$$

где $f_{\min 6}$ и $f_{\max 6}$ определяются условием

$$10 \lg \left| \frac{\hat{w}(f)}{\hat{w}(f_m)} \right|^2 = 6. \quad (7.43)$$

Потери информации (в дБ), наблюдающиеся при отбрасывании от ФСП компонент с частотами $f \notin [0, \nu]$, где ν — первый нуль ФСП правее ее главного максимума f_m

$$\gamma_5 = 10 \lg \left(1 - \frac{\int_0^\nu \hat{w}(f) df}{\int_0^\infty \hat{w}(f) df} \right). \quad (7.44)$$

Потери информации (в дБ), наблюдающиеся при отбрасывании от ФСП компонент с частотами $f \notin [f_{\min}, f_{\max}]$

$$\gamma_6 = 10 \lg \left(1 - \frac{\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} \hat{w}(f) df}{\int_0^{\infty} \hat{w}(f) df} \right). \quad (7.45)$$

Когерентное усиление задается соотношением

$$\gamma_7 = \frac{\tau}{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} |w(t)| dt}, \quad (7.46)$$

где τ — интервал, на котором функции не равны нулю. В отличие от выражения, определяющего частотные окна [1, 2], для вейвлетов в знаменателе указанного соотношения, как и для параметра γ_8 , интегрируется модуль функции, поскольку такой интеграл от функции $\psi(t)$ в силу свойства о нулевом среднем (7.1) оказывается равным нулю.

Эквивалентная шумовая полоса определяется

$$\gamma_8 = \frac{\tau \int_{-\tau/2}^{\tau/2} w^2(t) dt}{\left[\int_{-\tau/2}^{\tau/2} |w(t)| dt \right]^2}. \quad (7.47)$$

Максимальный уровень боковых лепестков (в дБ). Пусть $f_{m1}, f_{m2}, \dots, f_{mk}$ — точки локальных максимумов ФСП отличные от главного максимума f_m . Тогда

$$\gamma_9 = 10 \lg \max_k \left| \frac{\hat{w}(f_{mk})}{\hat{w}(f_m)} \right|. \quad (7.48)$$

7.7. Численный эксперимент и анализ физических результатов

На основании соотношений (7.36)–(7.48) был проведен численный эксперимент по определению физических характеристик как весовых функций (окон), так и вейвлет-модулированных функций Кравченко–Котельникова и Кравченко–Левитана. В табл. 7.1, 7.2 представлены физические характеристики функций (7.32) и (7.33). Физические характеристики вейвлет-модулированных вторых производных функций Кравченко–Котельникова и Кравченко–Левитана (7.34), (7.35) приведены в табл. 7.3, 7.4.

Таблица 7.1. Физические характеристики весовых функций (окон) и вейвлетов Кравченко–Котельникова

Весовые функции (окна)	M	a	Δ	η	μ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
$w_{KK}(t)$	1	1,2	0,20	5,00	2,00	0,00	1,13	0,98	1,04	-14,79	-12,61	27,40	14,71	-11,37
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	1	1,2	0,20	5,00	1,02	1,00	0,55	0,96	1,02	-17,16	-13,32	43,93	18,90	-11,05
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	1	1,2	0,20	5,00	1,00	1,00	0,56	0,98	1,04	-18,40	-13,55	42,09	17,36	-11,47
$w_{KK}(t)$	2	1,2	0,20	6,00	2,00	0,00	1,58	0,82	1,17	-28,55	-9,30	48,16	33,50	-24,20
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	2	1,2	0,20	6,00	1,00	1,00	0,79	0,82	1,17	-31,07	-9,27	75,74	41,43	-24,00
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	2	1,2	0,20	6,00	1,00	1,00	0,79	0,82	1,17	-32,02	-9,28	75,56	41,23	-24,24
$w_{KK}(t)$	3	1,2	0,20	6,45	2,00	0,00	1,96	0,85	1,17	-40,60	-8,78	56,22	40,70	-36,12
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	3	1,2	0,20	6,45	1,00	1,00	0,98	0,85	1,17	-43,11	-8,74	88,30	50,21	-33,11
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	3	1,2	0,20	6,45	1,00	1,00	0,98	0,85	1,17	-43,95	-8,75	88,31	50,21	-36,17
$w_{KK}(t)$	1	1,5	0,20	5,00	2,00	0,00	1,13	0,98	1,04	-14,79	-12,61	27,40	14,71	-11,37
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	1	1,5	0,20	5,00	1,02	1,00	0,55	0,96	1,02	-17,16	-13,32	43,93	18,90	-11,05
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	1	1,5	0,20	5,00	1,00	1,00	0,56	0,98	1,04	-18,40	-13,55	42,09	17,36	-11,47
$w_{KK}(t)$	2	1,5	0,20	5,82	2,00	0,00	1,48	0,84	1,14	-26,56	-10,30	44,70	31,08	-22,96
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	2	1,5	0,20	5,82	1,00	1,00	0,74	0,84	1,14	-29,89	-10,29	70,03	38,14	-23,00
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	2	1,5	0,20	5,82	1,00	1,00	0,74	0,84	1,14	-29,04	-10,27	70,43	38,58	-22,68
$w_{KK}(t)$	3	1,5	0,20	5,82	2,00	0,00	1,81	0,86	1,14	-37,41	-9,37	49,20	35,58	-33,55
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	3	1,5	0,20	5,82	1,00	1,00	0,91	0,86	1,14	-40,81	-9,34	77,25	43,86	-33,10
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	3	1,5	0,20	5,82	1,00	1,00	0,91	0,86	1,14	-39,83	-9,34	77,34	43,96	-33,50
$w_{KK}(t)$	1	2,0	0,20	5,00	2,00	0,00	1,13	0,98	1,04	-14,79	-12,61	27,40	14,71	-11,37
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	1	2,0	0,20	5,00	1,02	1,00	0,55	0,96	1,02	-17,16	-13,32	43,93	18,90	-11,05
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	1	2,0	0,20	5,00	1,00	1,00	0,56	0,98	1,04	-18,40	-13,55	42,09	17,36	-11,47
$w_{KK}(t)$	2	2,0	0,20	5,63	2,00	0,00	1,39	0,87	1,10	-24,84	-11,59	40,36	27,15	-21,50
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	2	2,0	0,20	5,63	1,00	1,00	0,69	0,87	1,10	-27,78	-11,59	63,54	33,64	-21,34
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	2	2,0	0,20	5,63	1,00	1,00	0,69	0,87	1,10	-27,56	-11,60	63,31	33,40	-21,47
$w_{KK}(t)$	3	2,0	0,20	5,63	2,00	0,00	1,55	0,87	1,10	-32,65	-11,16	42,71	29,72	-29,37
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	3	2,0	0,20	5,63	1,00	1,00	0,77	0,87	1,10	-35,56	-11,13	67,24	36,83	-29,28
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	3	2,0	0,20	5,63	1,00	1,00	0,78	0,87	1,10	-35,40	-11,13	66,98	36,54	-29,33

Таблица 7.2. Физические характеристики весовых функций (окоп) и вейвлетов Кравченко–Котельникова

Весовые функции (окоп)	M	a	Δ	η	μ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
$w_{KK}(t)$	1	1,2	0,50	2,00	2,00	0,00	1,32	0,95	1,09	-12,59	-9,81	13,74	8,97	-12,09
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	1	1,2	0,50	2,00	1,00	1,00	0,66	0,95	1,09	-14,70	-9,88	21,90	11,40	-11,03
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	1	1,2	0,50	2,00	1,00	1,00	0,66	0,91	1,09	-16,39	-10,88	21,25	10,72	-12,35
$w_{KK}(t)$	2	1,2	0,50	2,36	2,00	0,00	1,65	0,81	1,15	-21,14	-9,08	19,69	13,99	-20,48
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	2	1,2	0,50	2,36	1,00	1,00	0,85	0,81	1,15	-23,92	-9,09	30,98	17,32	-20,41
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	2	1,2	0,50	2,36	1,00	1,00	0,83	0,81	1,15	-23,88	-9,04	30,88	17,21	-18,81
$w_{KK}(t)$	3	1,2	0,50	2,54	2,00	0,00	2,00	0,86	1,18	-28,87	-8,74	22,54	16,36	-28,14
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	3	1,2	0,50	2,54	1,00	1,00	1,00	0,86	1,18	-31,05	-8,67	35,40	20,17	-28,12
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	3	1,2	0,50	2,54	1,00	1,00	1,00	0,86	1,18	-32,46	-8,67	35,41	20,18	-28,15
$w_{KK}(t)$	1	1,5	0,50	2,00	2,00	0,00	1,32	0,95	1,09	-12,59	-9,81	13,74	8,97	-12,09
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	1	1,5	0,50	2,00	1,00	1,00	0,66	0,95	1,09	-14,70	-9,88	21,90	11,40	-11,03
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	1	1,5	0,50	2,00	1,00	1,00	0,66	0,91	1,09	-16,39	-10,88	21,25	10,72	-12,35
$w_{KK}(t)$	2	1,5	0,50	2,27	2,00	0,00	1,60	0,84	1,12	-19,92	-9,83	18,57	13,39	-19,35
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	2	1,5	0,50	2,27	1,00	1,00	0,80	0,84	1,12	-23,71	-9,95	29,16	16,52	-19,54
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	2	1,5	0,50	2,27	1,00	1,00	0,80	0,84	1,12	-22,04	-9,77	29,18	16,54	-17,81
$w_{KK}(t)$	3	1,5	0,50	2,36	2,00	0,00	1,81	0,85	1,12	-28,68	-9,82	19,77	14,36	-27,14
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	3	1,5	0,50	2,36	1,00	1,00	0,90	0,85	1,12	-31,37	-9,74	31,01	17,67	-25,78
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	3	1,5	0,50	2,36	1,00	1,00	0,90	0,85	1,12	-31,53	-9,75	31,09	17,76	-27,11
$w_{KK}(t)$	1	2,0	0,50	2,00	2,00	0,00	1,32	0,95	1,09	-12,59	-9,81	13,74	8,97	-12,09
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	1	2,0	0,50	2,00	1,00	1,00	0,66	0,95	1,09	-14,70	-9,88	21,90	11,40	-11,03
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	1	2,0	0,50	2,00	1,00	1,00	0,66	0,91	1,09	-16,39	-10,88	21,25	10,72	-12,35
$w_{KK}(t)$	2	2,0	0,50	2,18	2,00	0,00	1,54	0,88	1,08	-22,46	-11,06	16,82	11,77	-19,68
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	2	2,0	0,50	2,18	1,00	0,98	0,79	0,88	1,08	-25,53	-11,05	26,57	14,69	-19,73
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	2	2,0	0,50	2,18	1,00	1,04	0,73	0,88	1,08	-25,20	-11,00	26,28	14,37	-19,33
$w_{KK}(t)$	3	2,0	0,50	2,18	2,00	0,00	1,63	0,88	1,13	-25,12	-10,65	17,31	12,21	-22,47
$\text{Re}(\psi_{AKK}(t))$	3	2,0	0,50	2,18	1,00	1,00	0,81	0,88	1,13	-28,22	-10,62	27,34	15,22	-22,54
$\text{Im}(\psi_{AKK}(t))$	3	2,0	0,50	2,18	1,00	1,00	0,81	0,88	1,13	-27,83	-10,57	27,06	14,91	-21,30

Таблица 7.3. Физические характеристики весовых функций (окоп) и вейвлетов Кравченко–Котельникова

Весовые функции (окоп)	M	a	Δ	η	μ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
$w_{2\pi KK}(t)$	1	1,2	0,20	5,18	0,53	1,04	0,63	0,75	1,50	-8,94	-4,80	15,70	8,16	-10,21
$\text{Re}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	1	1,2	0,20	5,18	1,00	1,00	0,54	0,96	1,02	-12,05	-9,16	24,82	10,19	-10,17
$\text{Im}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	1	1,2	0,20	5,18	1,00	1,00	0,54	0,96	1,02	-10,88	-8,64	24,51	9,94	-10,21
$w_{2\pi KK}(t)$	2	1,2	0,20	8,54	1,08	1,08	0,58	0,86	1,12	-15,56	-9,44	34,58	17,90	-16,11
$\text{Re}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	2	1,2	0,20	8,54	1,00	1,00	0,55	0,97	1,02	-16,80	-13,22	53,56	21,47	-16,06
$\text{Im}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	2	1,2	0,20	8,54	1,00	1,00	0,55	0,97	1,02	-20,35	-14,20	55,07	22,69	-15,89
$w_{2\pi KK}(t)$	3	1,2	0,20	10,27	1,18	0,99	0,82	0,86	1,13	-26,93	-9,95	49,11	27,83	-26,28
$\text{Re}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	3	1,2	0,20	10,27	1,00	1,00	0,62	0,95	1,04	-32,69	-13,15	76,32	33,61	-26,24
$\text{Im}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	3	1,2	0,20	10,27	1,00	1,00	0,62	0,95	1,04	-28,19	-13,07	77,97	35,08	-26,24
$w_{2\pi KK}(t)$	1	1,5	0,20	5,18	0,53	1,04	0,63	0,75	1,50	-8,94	-4,80	15,70	8,16	-10,21
$\text{Re}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	1	1,5	0,20	5,18	1,00	1,00	0,54	0,96	1,02	-12,05	-9,16	24,82	10,19	-10,17
$\text{Im}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	1	1,5	0,20	5,18	1,00	1,00	0,54	0,96	1,02	-10,88	-8,64	24,51	9,94	-10,21
$w_{2\pi KK}(t)$	2	1,5	0,20	7,72	1,06	1,06	0,61	0,88	1,12	-17,21	-9,52	31,63	16,48	-15,90
$\text{Re}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	2	1,5	0,20	7,72	1,00	1,00	0,56	0,98	1,02	-21,87	-14,28	49,03	19,80	-15,97
$\text{Im}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	2	1,5	0,20	7,72	1,00	1,00	0,56	0,98	1,02	-18,77	-13,43	50,32	20,86	-15,70
$w_{2\pi KK}(t)$	3	1,5	0,20	8,54	1,13	1,02	0,81	0,84	1,15	-24,77	-9,59	40,41	22,91	-24,60
$\text{Re}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	3	1,5	0,20	8,54	1,00	1,00	0,62	0,95	1,05	-26,10	-12,62	62,41	27,33	-24,59
$\text{Im}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	3	1,5	0,20	8,54	1,00	1,00	0,62	0,95	1,05	-29,55	-12,71	64,50	29,19	-24,48
$w_{2\pi KK}(t)$	1	2,0	0,20	5,18	0,53	1,04	0,63	0,75	1,50	-8,94	-4,80	15,70	8,16	-10,21
$\text{Re}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	1	2,0	0,20	5,18	1,00	1,00	0,54	0,96	1,02	-12,05	-9,16	24,82	10,19	-10,17
$\text{Im}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	1	2,0	0,20	5,18	1,00	1,00	0,54	0,96	1,02	-10,88	-8,64	24,51	9,94	-10,21
$w_{2\pi KK}(t)$	2	2,0	0,20	6,91	1,04	1,10	0,60	0,88	1,15	-16,47	-9,39	28,39	15,03	-15,34
$\text{Re}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	2	2,0	0,20	6,91	1,00	1,00	0,56	0,97	1,04	-18,74	-12,99	44,04	18,08	-15,34
$\text{Im}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	2	2,0	0,20	6,91	1,00	1,00	0,57	0,97	1,04	-19,28	-13,00	45,12	18,98	-15,16
$w_{2\pi KK}(t)$	3	2,0	0,20	7,18	1,04	1,06	0,78	0,87	1,17	-24,95	-9,23	32,52	18,19	-22,32
$\text{Re}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	3	2,0	0,20	7,18	1,00	1,00	0,61	0,96	1,04	-28,33	-13,13	50,11	21,61	-22,37
$\text{Im}(\psi_{A2\pi KK}(t))$	3	2,0	0,20	7,18	1,00	1,00	0,61	0,96	1,04	-27,26	-13,08	52,00	23,26	-22,21

Т а б л и ц а 7.4. Физические характеристики весовых функций (окон), построенных для второй производной функции Кравченко–Котельникова

Весовые функции (окна)	M	a	Δ	η	μ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
$w_{2\pi KK}(t)$	1	1,2	0,50	2,27	1,13	1,00	0,78	0,83	1,17	-4,49	-3,74	11,05	6,88	-8,76
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	1	1,2	0,50	2,27	1,00	1,00	0,60	0,96	1,06	-9,86	-7,13	17,36	8,43	-8,88
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	1	1,2	0,50	2,27	1,00	1,00	0,62	0,96	1,06	-5,18	-4,29	17,39	8,57	-8,40
$w_{2\pi KK}(t)$	2	1,2	0,50	3,36	1,02	1,06	0,72	0,88	1,16	-7,57	-5,69	15,30	8,81	-12,10
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	2	1,2	0,50	3,36	1,00	1,01	0,60	0,96	1,05	-9,83	-7,77	23,77	10,62	-12,26
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	2	1,2	0,50	3,36	1,00	1,00	0,59	0,97	1,05	-9,17	-7,39	24,28	11,10	-11,68
$w_{2\pi KK}(t)$	3	1,2	0,50	4,09	1,16	0,98	0,85	0,85	1,12	-14,97	-8,80	20,05	11,57	-18,08
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	3	1,2	0,50	4,09	1,00	1,00	0,62	0,93	1,04	-16,44	-11,30	31,11	13,92	-17,97
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	3	1,2	0,50	4,09	1,00	1,00	0,62	0,93	1,04	-18,18	-11,75	31,88	14,62	-18,12
$w_{2\pi KK}(t)$	1	1,5	0,50	2,27	1,13	1,00	0,78	0,83	1,17	-4,49	-3,74	11,05	6,88	-8,76
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	1	1,5	0,50	2,27	1,00	1,00	0,60	0,96	1,06	-9,86	-7,13	17,36	8,43	-8,88
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	1	1,5	0,50	2,27	1,00	1,00	0,62	0,96	1,06	-5,18	-4,29	17,39	8,57	-8,40
$w_{2\pi KK}(t)$	2	1,5	0,50	3,09	1,02	1,02	0,78	0,83	1,09	-12,26	-8,00	14,03	8,21	-12,87
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	2	1,5	0,50	3,09	1,00	1,00	0,60	0,94	1,03	-14,50	-10,12	21,63	9,76	-12,43
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	2	1,5	0,50	3,09	1,00	1,00	0,60	0,94	1,03	-15,28	-10,71	22,42	10,49	-12,92
$w_{2\pi KK}(t)$	3	1,5	0,50	3,36	1,08	1,00	0,88	0,85	1,15	-12,81	-7,81	16,53	9,61	-16,97
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	3	1,5	0,50	3,36	1,00	1,00	0,64	0,95	1,05	-15,23	-10,21	25,51	11,44	-16,58
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	3	1,5	0,50	3,36	1,00	1,00	0,64	0,95	1,05	-14,59	-10,11	26,40	12,25	-16,97
$w_{2\pi KK}(t)$	1	2,0	0,50	2,27	1,13	1,00	0,78	0,83	1,17	-4,49	-3,74	11,05	6,88	-8,76
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	1	2,0	0,50	2,27	1,00	1,00	0,60	0,96	1,06	-9,86	-7,13	17,36	8,43	-8,88
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	1	2,0	0,50	2,27	1,00	1,00	0,62	0,96	1,06	-5,18	-4,29	17,39	8,57	-8,40
$w_{2\pi KK}(t)$	2	2,0	0,50	2,82	1,02	1,02	0,76	0,81	1,14	-6,20	-4,95	12,83	7,57	-11,45
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	2	2,0	0,50	2,82	1,00	1,00	0,60	0,94	1,03	-9,60	-7,55	19,86	9,06	-10,39
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	2	2,0	0,50	2,82	0,98	0,99	0,59	0,95	1,05	-7,10	-6,12	20,46	9,64	-11,29
$w_{2\pi KK}(t)$	3	2,0	0,50	2,91	1,05	1,00	0,82	0,82	1,14	-7,98	-6,04	13,62	7,96	-13,82
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	3	2,0	0,50	2,91	1,00	1,00	0,61	0,94	1,03	-9,23	-7,52	21,04	9,50	-12,81
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi KK}}(t))$	3	2,0	0,50	2,91	1,00	1,00	0,61	0,94	1,03	-10,73	-8,73	21,70	10,11	-14,43

Таблица 7.5. Физические характеристики весовых функций (окон) и вейвлетов Кравченко–Левитана

Весовые функции (окна)	M	r	Δ	η	μ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
$w_{\text{кл}}(t)$	1	0	0,20	6,36	2,00	0,00	1,61	0,79	1,17	-30,20	-8,89	51,03	34,72	-25,00
$\text{Re}(\psi_{\text{акл}}(t))$	1	0	0,20	6,36	1,00	1,00	0,81	0,79	1,17	-33,18	-8,86	80,16	42,83	-24,66
$\text{Im}(\psi_{\text{акл}}(t))$	1	0	0,20	6,36	1,00	1,00	0,81	0,79	1,17	-33,15	-8,86	80,17	42,84	-25,00
$w_{\text{кл}}(t)$	2	0	0,20	6,91	2,00	0,00	2,15	0,84	1,17	-52,00	-8,76	60,00	43,33	-47,60
$\text{Re}(\psi_{\text{акл}}(t))$	2	0	0,20	6,91	1,00	1,00	1,07	0,84	1,17	-54,83	-8,72	94,25	53,46	-47,56
$\text{Im}(\psi_{\text{акл}}(t))$	2	0	0,20	6,91	1,00	1,00	1,07	0,84	1,17	-55,09	-8,73	94,26	53,47	-47,65
$w_{\text{кл}}(t)$	3	0	0,20	7,09	2,00	0,00	2,40	0,83	1,15	-68,41	-8,81	61,38	44,35	-65,01
$\text{Re}(\psi_{\text{акл}}(t))$	3	0	0,20	7,09	1,00	1,00	1,20	0,83	1,15	-71,21	-8,78	96,42	54,72	-65,00
$\text{Im}(\psi_{\text{акл}}(t))$	3	0	0,20	7,09	1,00	1,00	1,20	0,83	1,15	-71,50	-8,78	96,42	54,72	-65,01
$w_{\text{кл}}(t)$	1	1	0,20	8,54	2,00	0,00	2,32	0,84	1,16	-60,66	-8,53	75,00	53,93	-53,08
$\text{Re}(\psi_{\text{акл}}(t))$	1	1	0,20	8,54	1,00	1,00	1,16	0,84	1,16	-63,63	-8,50	117,80	66,53	-53,08
$\text{Im}(\psi_{\text{акл}}(t))$	1	1	0,20	8,54	1,00	1,00	1,16	0,84	1,16	-63,65	-8,52	117,80	66,54	-53,08
$w_{\text{кл}}(t)$	2	1	0,20	9,45	2,00	0,00	3,13	0,84	1,16	-106,20	-8,43	83,09	59,56	-102,30
$\text{Re}(\psi_{\text{акл}}(t))$	2	1	0,20	9,45	1,00	1,00	1,55	0,84	1,16	-109,00	-8,40	130,50	73,46	-102,30
$\text{Im}(\psi_{\text{акл}}(t))$	2	1	0,20	9,45	1,00	1,00	1,55	0,84	1,16	-109,10	-8,45	130,50	73,50	-102,30
$w_{\text{кл}}(t)$	3	1	0,20	9,63	2,00	0,00	3,49	0,83	1,17	-139,50	-8,37	84,94	60,82	-134,00
$\text{Re}(\psi_{\text{акл}}(t))$	3	1	0,20	9,63	1,00	1,00	1,68	0,83	1,17	-118,90	-8,34	133,50	75,07	-134,00
$\text{Im}(\psi_{\text{акл}}(t))$	3	1	0,20	9,63	1,00	1,00	1,68	0,83	1,17	-118,90	-8,40	133,50	75,06	-133,90
$w_{\text{кл}}(t)$	1	0	0,50	2,54	2,00	0,00	1,71	0,82	1,18	-24,36	-9,01	21,05	14,77	-21,72
$\text{Re}(\psi_{\text{акл}}(t))$	1	0	0,50	2,54	1,03	1,01	0,84	0,81	1,16	-27,10	-9,24	33,07	18,22	-21,68
$\text{Im}(\psi_{\text{акл}}(t))$	1	0	0,50	2,54	1,01	0,99	0,84	0,81	1,16	-27,44	-9,22	33,07	18,22	-20,27
$w_{\text{кл}}(t)$	2	0	0,50	2,73	2,00	0,00	2,13	0,83	1,17	-42,16	-8,76	24,02	17,36	-37,35
$\text{Re}(\psi_{\text{акл}}(t))$	2	0	0,50	2,73	1,00	1,00	1,07	0,83	1,17	-45,11	-8,68	37,73	21,42	-37,36
$\text{Im}(\psi_{\text{акл}}(t))$	2	0	0,50	2,73	1,00	1,00	1,07	0,83	1,17	-45,07	-8,68	37,73	21,42	-37,35
$w_{\text{кл}}(t)$	3	0	0,50	2,82	2,00	0,00	2,29	0,84	1,16	-50,30	-8,90	24,56	17,75	-47,46
$\text{Re}(\psi_{\text{акл}}(t))$	3	0	0,50	2,82	1,00	1,00	1,15	0,84	1,16	-53,22	-8,82	38,57	21,89	-47,45
$\text{Im}(\psi_{\text{акл}}(t))$	3	0	0,50	2,82	1,00	1,00	1,15	0,84	1,16	-53,23	-8,83	38,57	21,89	-47,48
$w_{\text{кл}}(t)$	1	1	0,50	3,36	2,00	0,00	2,32	0,84	1,16	-46,81	-8,46	30,01	21,59	-41,67
$\text{Re}(\psi_{\text{акл}}(t))$	1	1	0,50	3,36	1,00	1,00	1,16	0,84	1,16	-49,74	-8,39	47,14	26,64	-41,66
$\text{Im}(\psi_{\text{акл}}(t))$	1	1	0,50	3,36	1,00	1,00	1,16	0,84	1,16	-49,76	-8,42	47,15	26,64	-41,68
$w_{\text{кл}}(t)$	2	1	0,50	3,73	2,00	0,00	3,07	0,83	1,17	-83,75	-8,37	33,23	23,82	-77,85
$\text{Re}(\psi_{\text{акл}}(t))$	2	1	0,50	3,73	1,00	1,00	1,54	0,83	1,17	-86,70	-8,31	52,21	29,39	-77,85
$\text{Im}(\psi_{\text{акл}}(t))$	2	1	0,50	3,73	1,00	1,00	1,54	0,83	1,17	-86,69	-8,37	52,21	29,39	-77,85
$w_{\text{кл}}(t)$	3	1	0,50	3,82	2,00	0,00	3,36	0,83	1,17	-99,16	-8,38	33,98	24,33	-94,99
$\text{Re}(\psi_{\text{акл}}(t))$	3	1	0,50	3,82	1,00	1,00	1,68	0,83	1,17	-102,10	-8,31	53,37	30,01	-94,99
$\text{Im}(\psi_{\text{акл}}(t))$	3	1	0,50	3,82	1,00	1,00	1,68	0,83	1,17	-102,10	-8,38	53,37	30,01	-94,99

Таблица 7.6. Физические характеристики весовых функций (онок) и вейвлетов, построенных для второй производной функции Кравченко–Левитана

Весовые функции (онок)	M	r	Δ	η	μ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
$w_{2\pi\text{КЛ}}(t)$	1	0	0,20	9,27	1,07	1,10	0,56	0,87	1,13	-15,45	-9,19	37,56	19,35	-16,28
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	1	0	0,20	9,27	1,00	1,00	0,55	0,97	1,03	-21,54	-14,10	58,23	23,24	-15,96
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	1	0	0,20	9,27	1,00	1,00	0,55	0,97	1,03	-16,54	-12,89	59,77	24,49	-16,14
$w_{2\pi\text{КЛ}}(t)$	2	0	0,20	10,81	1,17	1,00	1,00	0,84	1,15	-34,68	-9,35	53,79	30,94	-36,61
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	2	0	0,20	10,81	1,00	1,00	0,68	0,94	1,06	-38,89	-11,89	83,31	37,11	-36,26
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	2	0	0,20	10,81	1,00	1,00	0,68	0,94	1,06	-35,97	-11,89	85,67	39,24	-36,76
$w_{2\pi\text{КЛ}}(t)$	3	0	0,20	11,18	1,17	0,99	1,21	0,85	1,14	-50,01	-9,22	56,09	32,30	-52,77
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	3	0	0,20	11,18	1,00	1,00	0,76	0,94	1,06	-53,52	-11,75	86,97	38,83	-52,36
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	3	0	0,20	11,18	1,00	1,00	0,76	0,94	1,06	-51,46	-11,75	89,18	40,83	-52,52
$w_{2\pi\text{КЛ}}(t)$	1	1	0,20	14,08	1,21	0,95	1,08	0,85	1,15	-48,51	-9,29	71,16	40,72	-41,42
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	1	1	0,20	14,08	1,00	1,00	0,70	0,94	1,07	-51,49	-11,56	110,40	49,03	-41,43
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	1	1	0,20	14,08	1,00	1,00	0,70	0,94	1,07	-51,54	-11,56	113,10	51,46	-41,35
$w_{2\pi\text{КЛ}}(t)$	2	1	0,20	15,81	1,22	0,94	1,69	0,84	1,16	-90,96	-8,87	81,35	46,10	-87,93
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	2	1	0,20	15,81	1,00	1,00	0,93	0,93	1,08	-94,04	-10,83	126,10	55,42	-86,72
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	2	1	0,20	15,81	1,00	1,00	0,93	0,93	1,08	-93,83	-10,83	129,40	58,33	-87,77
$w_{2\pi\text{КЛ}}(t)$	3	1	0,20	16,27	1,23	0,95	1,90	0,84	1,16	-107,90	-8,85	83,58	47,21	-118,60
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	3	1	0,20	16,27	1,00	1,00	1,01	0,93	1,07	-109,50	-10,80	129,60	56,76	-118,70
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	3	1	0,20	16,27	1,00	1,00	1,01	0,93	1,07	-109,40	-10,80	132,90	59,73	-118,60
$w_{2\pi\text{КЛ}}(t)$	1	0	0,50	3,73	1,04	1,07	0,68	0,82	1,14	-7,91	-5,97	16,44	9,22	-12,47
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	1	0	0,50	3,73	1,00	1,00	0,59	0,95	1,02	-13,66	-10,19	25,32	10,94	-11,99
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	1	0	0,50	3,73	1,00	1,00	0,57	0,95	1,02	-8,67	-7,47	26,31	11,80	-12,08
$w_{2\pi\text{КЛ}}(t)$	2	0	0,50	4,27	1,13	1,00	1,00	0,88	1,18	-29,98	-9,06	21,58	12,45	-26,26
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	2	0	0,50	4,27	1,00	1,00	0,68	0,96	1,06	-33,08	-11,61	33,36	14,88	-26,25
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	2	0	0,50	4,27	1,00	1,00	0,68	0,96	1,06	-32,90	-11,61	34,42	15,84	-26,10
$w_{2\pi\text{КЛ}}(t)$	3	0	0,50	4,45	1,16	1,00	1,11	0,83	1,14	-36,74	-9,31	22,45	12,93	-35,14
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	3	0	0,50	4,45	1,00	1,00	0,72	0,94	1,06	-39,58	-11,82	34,79	15,53	-34,44
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	3	0	0,50	4,45	1,00	1,00	0,72	0,94	1,06	-39,93	-11,82	35,71	16,36	-35,16
$w_{2\pi\text{КЛ}}(t)$	1	1	0,50	5,63	1,18	0,95	1,07	0,85	1,15	-34,25	-9,21	28,50	16,33	-29,91
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	1	1	0,50	5,63	1,00	1,00	0,69	0,94	1,07	-37,30	-11,71	44,22	19,66	-29,93
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	1	1	0,50	5,63	1,00	1,00	0,69	0,94	1,07	-37,21	-11,71	45,30	20,64	-29,74
$w_{2\pi\text{КЛ}}(t)$	2	1	0,50	6,27	1,21	0,95	1,64	0,83	1,15	-69,89	-8,82	32,54	18,44	-63,76
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	2	1	0,50	6,27	1,00	1,00	0,91	0,93	1,07	-72,90	-10,70	50,41	22,13	-62,89
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	2	1	0,50	6,27	1,00	1,00	0,91	0,93	1,07	-72,90	-10,70	51,80	23,36	-63,76
$w_{2\pi\text{КЛ}}(t)$	3	1	0,50	6,45	1,23	0,95	1,83	0,83	1,15	-84,09	-8,90	33,43	18,88	-80,16
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	3	1	0,50	6,45	1,00	1,00	0,99	0,93	1,07	-87,04	-10,68	51,80	22,67	-77,16
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛ}}(t))$	3	1	0,50	6,45	1,00	1,00	0,99	0,93	1,07	-87,02	-10,68	53,20	23,91	-80,16

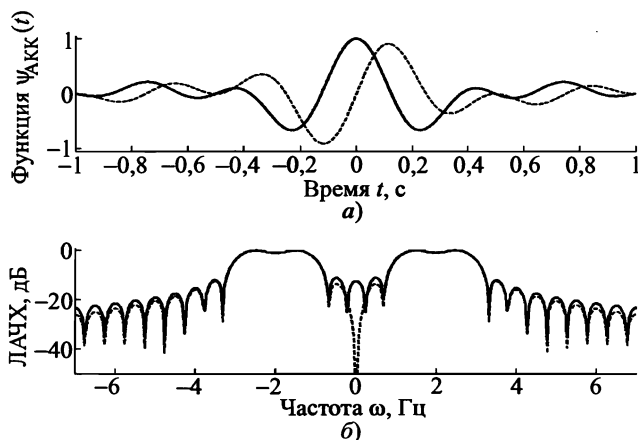


Рис. 7.19. Вейвлет-модулированная весовая функция Кравченко–Котельникова (а), построенная для $\mu = 1$ и ее ЛАЧХ (б), $M = 1$, $a = 2$, $\Delta = 0,5$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

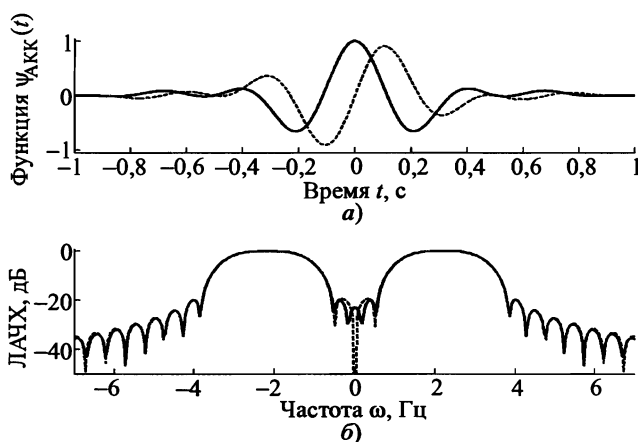


Рис. 7.20. Вейвлет-модулированная весовая функция Кравченко–Котельникова (а), построенная для $\mu = 1$ и ее ЛАЧХ (б), $M = 2$, $a = 2$, $\Delta = 0,5$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

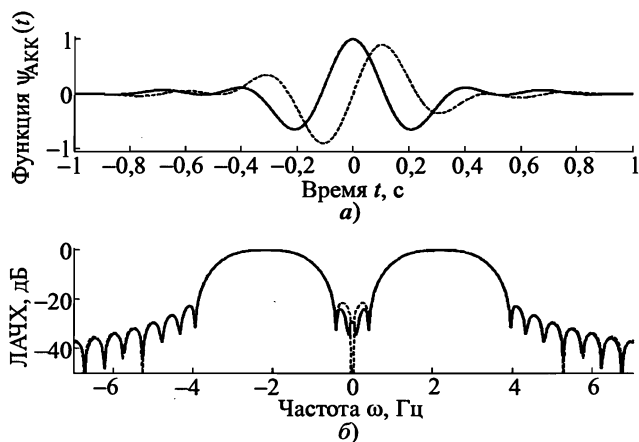


Рис. 7.21. Вейвлет-модулированная весовая функция Кравченко–Котельникова (а), построенная для $\mu = 1$ и ее ЛАЧХ (б), $M = 3$, $a = 2$, $\Delta = 0,5$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

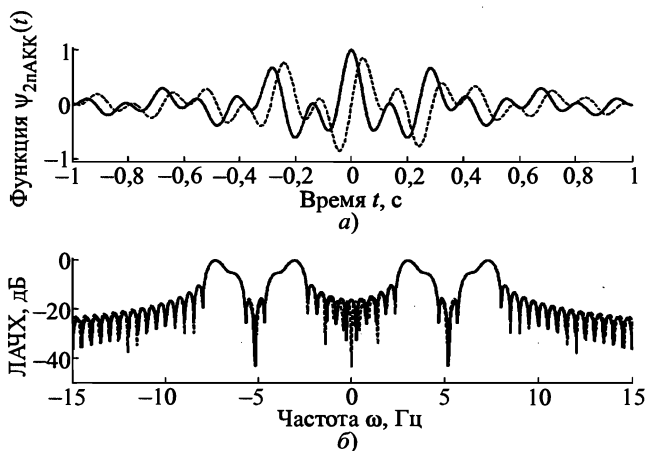


Рис. 7.22. Вейвлет-модулированная вторая производная функции Кравченко–Котельникова (а), построенная для $\mu = 1$ и ее ЛАЧХ (б), $M = 1$, $a = 2$, $\Delta = 0,2$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

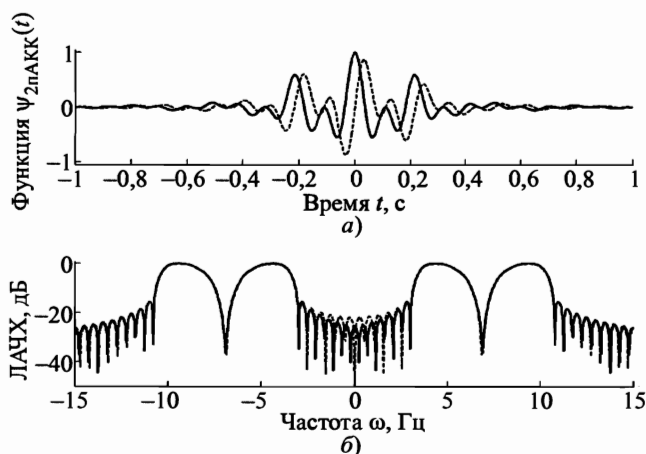


Рис. 7.23. Вейвлет-модулированная вторая производная функции Кравченко–Котельникова (а), построенная для $\mu = 1$ и ее ЛАЧХ (б), $M = 2$, $a = 2$, $\Delta = 0,2$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

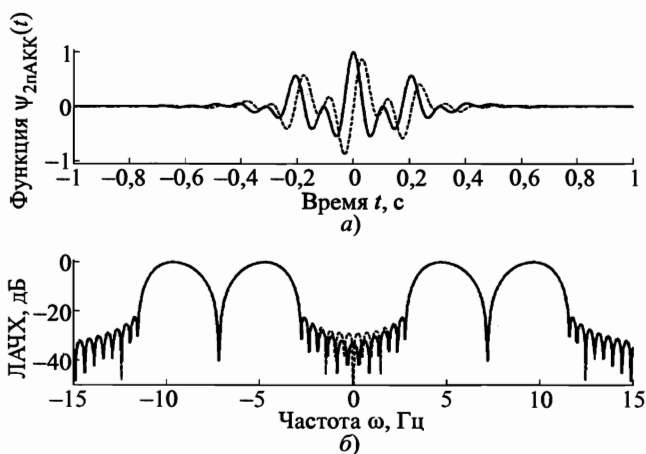


Рис. 7.24. Вейвлет-модулированная вторая производная функции Кравченко–Котельникова (а), построенная для $\mu = 1$ и ее ЛАЧХ (б), $M = 3$, $a = 2$, $\Delta = 0,2$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

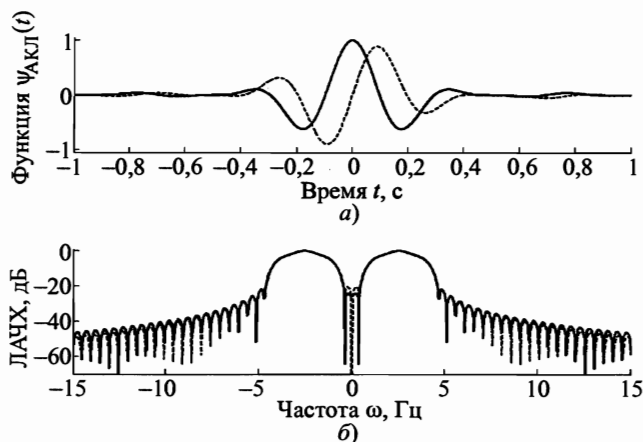


Рис. 7.25. Вейвлет-модулированная весовая функция Кравченко–Левитана (а), построенная для $\mu = 1$ и ее ЛАЧХ (б), $M = 1$, $r = 0$, $\Delta = 0,5$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

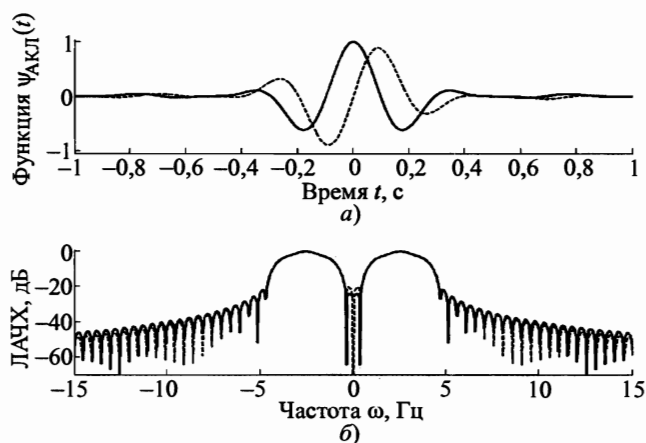


Рис. 7.26. Вейвлет-модулированная весовая функция Кравченко–Левитана (а), построенная для $\mu = 1$ и ее ЛАЧХ (б), $M = 2$, $r = 0$, $\Delta = 0,5$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

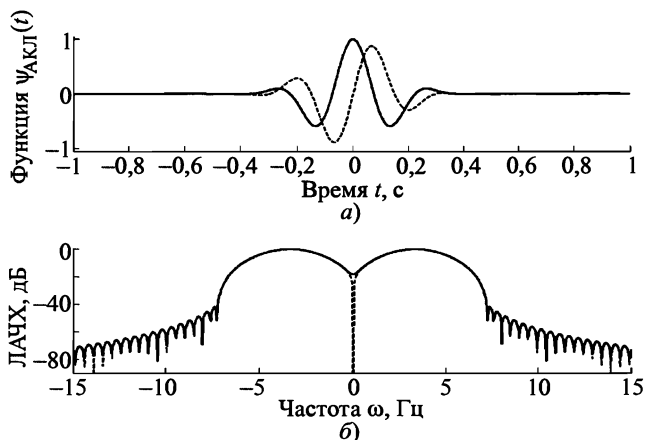


Рис. 7.27. Вейвлет-модулированная весовая функция Кравченко–Левитана (а), построенная для $\mu = 1$ и ее ЛАЧХ (б), $M = 1$, $r = 1$, $\Delta = 0,5$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

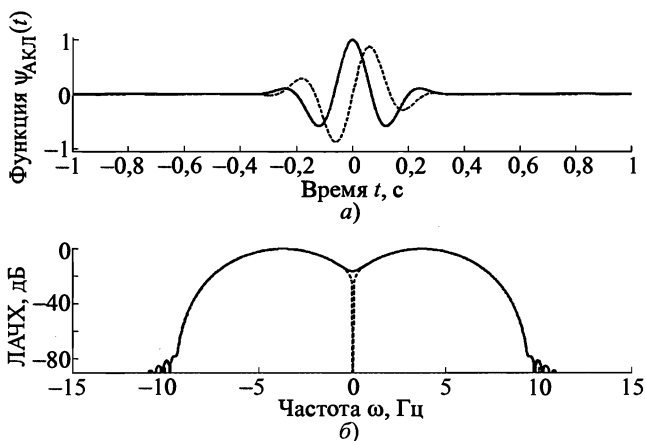


Рис. 7.28. Вейвлет-модулированная весовая функция Кравченко–Левитана (а), построенная для $\mu = 1$ и ее ЛАЧХ (б), $M = 2$, $r = 0$, $\Delta = 0,5$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

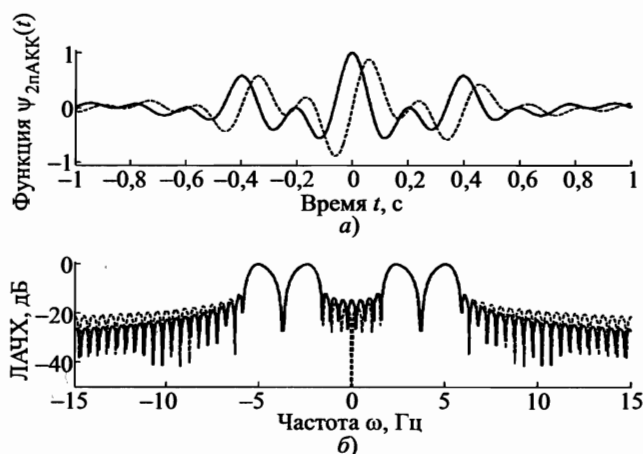


Рис. 7.29. Вейвлет-модулированная вторая производная функции Кравченко–Левитана (а), построенная для $\mu = 1$ и ее ЛАЧХ (б), $M = 1$, $r = 0$, $\Delta = 0,5$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

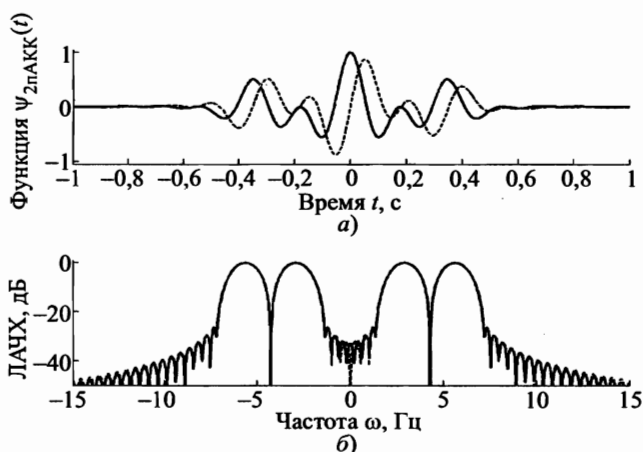


Рис. 7.30. Вейвлет-модулированная вторая производная функции Кравченко–Левитана (а), построенная для $\mu = 1$ и ее ЛАЧХ (б), $M = 2$, $r = 0$, $\Delta = 0,5$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

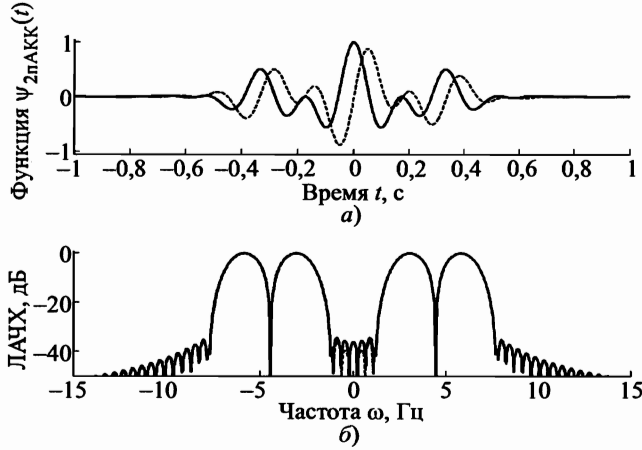


Рис. 7.31. Вейвлет-модулированная вторая производная функции Кравченко–Левитана (а), построенная для $\mu = 1$ и ее ЛАЧХ (б), $M = 3$, $r = 0$, $\Delta = 0,5$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

7.8. Построение весовых функций (окон): Кравченко–Котельникова–Гаусса и Кравченко–Левитана–Гаусса

Функцию Гаусса запишем в следующем виде:

$$g_{\tau}(t) = \exp \left(- \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right), \quad (7.49)$$

где τ — параметр масштабирования. Вейвлет-модулированные функции Кравченко–Котельникова–Гаусса и Кравченко–Левитана–Гаусса получим путем прямого их произведения:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{АККГ}}(t) &= \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi t}{\Delta a^{j-1}} \right) \cdot \exp \left(- \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right) \cdot \exp(i\eta t) = \\ &= \prod_{j=1}^M \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi t}{\Delta a^{j-1}} \right) \cdot \exp \left(i\eta t - \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (7.50)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{АКЛГ}}(t) &= \prod_{j=1}^M \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta 2^{j-1}} t \right) \right]^{2r+2} \cdot \exp \left(- \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right) \cdot \exp(i\eta t) = \\ &= \prod_{j=1}^M \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta 2^{j-1}} t \right) \right]^{2r+2} \cdot \exp \left(i\eta t - \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (7.51)$$

Таблица 7.7. Физические характеристики весовых функций (окоп) и вейвлетов Кравченко–Котельникова–Гаусса

Весовые функции (окоп)	M	a	Δ	η	μ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
$w_{KK\Gamma}(t)$	1	1,2	0,50	2,73	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	1	1,2	0,50	2,73	1,00	1,00	2,02	0,83	1,17	-74,09	-8,38	38,23	21,52	-75,61
$\text{Im}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	1	1,2	0,50	2,73	1,00	1,00	1,85	0,83	1,17	-68,87	-8,46	38,27	21,56	-71,03
$w_{KK\Gamma}(t)$	2	1,2	0,50	3,09	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	2	1,2	0,50	3,09	1,00	1,00	1,93	0,82	1,15	-78,32	-8,47	42,79	24,06	-82,39
$\text{Im}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	2	1,2	0,50	3,09	1,00	1,00	1,96	0,82	1,15	-79,21	-8,54	42,78	24,05	-81,85
$w_{KK\Gamma}(t)$	3	1,2	0,50	3,27	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	3	1,2	0,50	3,27	1,00	1,00	2,00	0,83	1,17	-88,64	-8,35	45,58	25,59	-90,14
$\text{Im}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	3	1,2	0,50	3,27	1,00	1,00	1,99	0,83	1,17	-84,45	-8,43	45,58	25,58	-88,31
$w_{KK\Gamma}(t)$	1	1,5	0,50	2,73	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	1	1,5	0,50	2,73	1,00	1,00	2,02	0,83	1,17	-74,09	-8,38	38,23	21,52	-75,61
$\text{Im}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	1	1,5	0,50	2,73	1,00	1,00	1,85	0,83	1,17	-68,87	-8,46	38,27	21,56	-71,03
$w_{KK\Gamma}(t)$	2	1,5	0,50	2,91	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	2	1,5	0,50	2,91	1,00	1,00	2,05	0,84	1,19	-76,74	-8,22	41,15	23,14	-79,76
$\text{Im}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	2	1,5	0,50	2,91	1,00	1,00	2,03	0,84	1,19	-78,71	-8,30	41,15	23,13	-81,93
$w_{KK\Gamma}(t)$	3	1,5	0,50	3,00	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	3	1,5	0,50	3,00	1,00	1,00	2,05	0,85	1,18	-85,74	-8,22	42,34	23,78	-89,73
$\text{Im}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	3	1,5	0,50	3,00	1,00	1,00	2,05	0,85	1,18	-90,92	-8,31	42,33	23,76	-92,33
$w_{KK\Gamma}(t)$	1	2,0	0,50	2,73	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	1	2,0	0,50	2,73	1,00	1,00	2,02	0,83	1,17	-74,09	-8,38	38,23	21,52	-75,61
$\text{Im}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	1	2,0	0,50	2,73	1,00	1,00	1,85	0,83	1,17	-68,87	-8,46	38,27	21,56	-71,03
$w_{KK\Gamma}(t)$	2	2,0	0,50	2,82	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	2	2,0	0,50	2,82	1,00	1,00	2,07	0,84	1,19	-87,81	-8,23	39,87	22,42	-87,74
$\text{Im}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	2	2,0	0,50	2,82	1,00	1,00	2,07	0,84	1,19	-86,96	-8,32	39,88	22,43	-87,96
$w_{KK\Gamma}(t)$	3	2,0	0,50	2,91	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	3	2,0	0,50	2,91	1,00	1,00	2,03	0,81	1,16	-88,77	-8,49	40,27	22,64	-89,65
$\text{Im}(\psi_{AKK\Gamma}(t))$	3	2,0	0,50	2,91	1,00	1,00	2,02	0,81	1,16	-90,55	-8,57	40,26	22,63	-91,25

Графики функций (7.49)–(7.51) представлены на рис. 7.32–7.34, а их физические характеристики приведены в табл. 7.7–7.8. Аналогичные формулы запишем для вейвлет–модулированных вторых производных

Т а б л и ц а 7.8. Физические характеристики весовых функций (окон) и вейвлетов Кравченко–Левитана–Гаусса

Функция	M	r	Δ	η	μ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
$w_{\text{КЛГ}}(t)$	1	0	0,50	3,18	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{\text{АКЛГ}}(t))$	1	0	0,50	3,18	1,00	1,00	1,97	0,83	1,17	-89,12	-8,28	44,78	25,21	-88,89
$\text{Im}(\psi_{\text{АКЛГ}}(t))$	1	0	0,50	3,18	1,00	1,00	1,97	0,83	1,17	-87,03	-8,35	44,78	25,20	-87,27
$w_{\text{КЛГ}}(t)$	2	0	0,50	3,36	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{\text{АКЛГ}}(t))$	2	0	0,50	3,36	1,00	1,00	2,07	0,84	1,19	-112,20	-8,19	47,50	26,68	-112,60
$\text{Im}(\psi_{\text{АКЛГ}}(t))$	2	0	0,50	3,36	1,00	1,00	2,07	0,84	1,19	-112,30	-8,27	47,50	26,67	-113,10
$w_{\text{КЛГ}}(t)$	3	0	0,50	3,45	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{\text{АКЛГ}}(t))$	3	0	0,50	3,45	1,00	1,00	2,05	0,83	1,16	-112,90	-8,33	48,15	27,02	-118,20
$\text{Im}(\psi_{\text{АКЛГ}}(t))$	3	0	0,50	3,45	1,00	1,00	2,05	0,83	1,16	-113,00	-8,41	48,15	27,02	-118,70
$w_{\text{КЛГ}}(t)$	1	1	0,50	4,00	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{\text{АКЛГ}}(t))$	1	1	0,50	4,00	1,00	1,00	1,96	0,82	1,16	-113,40	-8,41	55,31	31,03	-114,00
$\text{Im}(\psi_{\text{АКЛГ}}(t))$	1	1	0,50	4,00	1,00	1,00	1,96	0,82	1,16	-113,50	-8,47	55,31	31,03	-114,20
$w_{\text{КЛГ}}(t)$	2	1	0,50	4,27	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{\text{АКЛГ}}(t))$	2	1	0,50	4,27	1,00	1,00	2,03	0,83	1,17	-113,70	-8,23	59,69	33,41	-153,10
$\text{Im}(\psi_{\text{АКЛГ}}(t))$	2	1	0,50	4,27	1,00	1,00	2,03	0,83	1,17	-113,60	-8,31	59,69	33,41	-154,80
$w_{\text{КЛГ}}(t)$	3	1	0,50	4,36	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{\text{АКЛГ}}(t))$	3	1	0,50	4,36	1,00	1,00	2,05	0,83	1,17	-114,10	-8,26	60,73	33,98	-153,00
$\text{Im}(\psi_{\text{АКЛГ}}(t))$	3	1	0,50	4,36	1,00	1,00	2,05	0,83	1,17	-114,10	-8,35	60,74	33,97	-152,80

весовых функций (окон) Кравченко–Котельникова–Гаусса и Кравченко–Левитана–Гаусса:

$$\psi_{\text{А2ПККГ}}(t) = \left(-\frac{d^2}{dt^2} \prod_{j=1}^M \text{sinc} \left(\frac{\pi t}{\Delta a^{j-1}} \right) \right) \cdot \exp \left(i\eta t - \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right), \quad (7.52)$$

$$\psi_{\text{А2ПКЛГ}}(t) = \left(-\frac{d^2}{dt^2} \prod_{j=1}^M \left[\text{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta 2^{j-1}} t \right) \right]^{2r+2} \right) \cdot \exp \left(i\eta t - \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right). \quad (7.53)$$

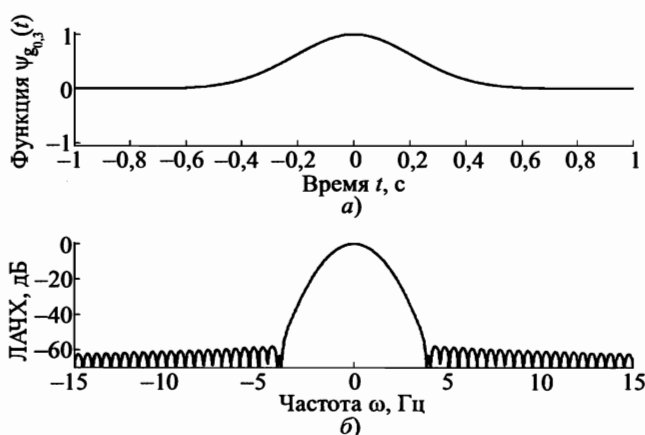
Их графики представлены на рис. 7.35–7.36, а физические характеристики приведены в табл. 7.9–7.10.

Таблица 7.9. Физические характеристики весовых функций (окон) и вейвлетов, построенных для вторых производных функций Кравченко–Котельникова–Гаусса

Весовые функции (окна)	M	a	Δ	η	μ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
$w_{2\pi\text{ККГ}}(t)$	1	1,2	0,50	3,27	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	1	1,2	0,50	3,27	1,00	1,00	1,49	0,89	1,14	-60,02	-9,40	43,05	23,96	-64,33
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	1	1,2	0,50	3,27	1,00	1,00	1,46	0,89	1,14	-52,64	-9,42	42,96	23,86	-60,88
$w_{2\pi\text{ККГ}}(t)$	2	1,2	0,50	4,54	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	2	1,2	0,50	4,54	1,00	1,00	1,22	0,90	1,08	-56,92	-11,17	51,05	25,84	-64,01
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	2	1,2	0,50	4,54	1,00	1,00	1,23	0,90	1,08	-61,89	-11,17	50,08	24,87	-66,39
$w_{2\pi\text{ККГ}}(t)$	3	1,2	0,50	5,00	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	3	1,2	0,50	5,00	1,00	1,00	1,31	0,93	1,09	-65,17	-10,93	55,13	27,14	-72,47
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	3	1,2	0,50	5,00	1,00	1,00	1,32	0,93	1,09	-74,12	-10,93	54,09	26,13	-75,90
$w_{2\pi\text{ККГ}}(t)$	1	1,5	0,50	3,27	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	1	1,5	0,50	3,27	1,00	1,00	1,49	0,89	1,14	-60,02	-9,40	43,05	23,96	-64,33
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	1	1,5	0,50	3,27	1,00	1,00	1,46	0,89	1,14	-52,64	-9,42	42,96	23,86	-60,88
$w_{2\pi\text{ККГ}}(t)$	2	1,5	0,50	4,27	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	2	1,5	0,50	4,27	1,00	1,00	1,40	0,89	1,09	-71,41	-10,98	49,42	25,64	-72,32
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	2	1,5	0,50	4,27	1,00	1,00	1,39	0,89	1,09	-65,80	-10,98	48,66	24,86	-70,99
$w_{2\pi\text{ККГ}}(t)$	3	1,5	0,50	4,45	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	3	1,5	0,50	4,45	1,00	1,00	1,38	0,92	1,10	-63,02	-10,69	51,63	26,43	-70,66
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	3	1,5	0,50	4,45	1,00	1,00	1,37	0,92	1,10	-67,71	-10,69	50,66	25,44	-74,53
$w_{2\pi\text{ККГ}}(t)$	1	2,0	0,50	3,27	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	1	2,0	0,50	3,27	1,00	1,00	1,49	0,89	1,14	-60,02	-9,40	43,05	23,96	-64,33
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	1	2,0	0,50	3,27	1,00	1,00	1,46	0,89	1,14	-52,64	-9,42	42,96	23,86	-60,88
$w_{2\pi\text{ККГ}}(t)$	2	2,0	0,50	3,91	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	2	2,0	0,50	3,91	1,00	1,00	1,33	0,91	1,12	-55,67	-10,35	47,65	25,45	-62,68
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	2	2,0	0,50	3,91	1,00	1,00	1,42	0,91	1,12	-57,57	-10,35	47,07	24,84	-66,67
$w_{2\pi\text{ККГ}}(t)$	3	2,0	0,50	4,09	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	3	2,0	0,50	4,09	1,00	1,00	1,37	0,89	1,09	-57,93	-10,78	48,47	25,67	-67,04
$\text{Im}(\psi_{A_{2\pi\text{ККГ}}}(t))$	3	2,0	0,50	4,09	1,00	1,00	1,40	0,89	1,09	-59,80	-10,79	47,94	25,12	-67,20

Т а б л и ц а 7.10. Физические характеристики весовых функций (окон) и вейвлетов, построенных для вторых производных функций Кравченко–Левитана–Гаусса

Весовые функции (окна)	M	r	Δ	η	μ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
$w_{2\pi\text{КЛГ}}(t)$	1	0	0,50	4,73	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛГ}}(t))$	1	0	0,50	4,73	1,00	1,00	1,30	0,92	1,10	-64,07	-10,91	52,57	26,03	-69,68
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛГ}}(t))$	1	0	0,50	4,73	1,00	1,00	1,30	0,92	1,10	-57,20	-10,91	51,57	25,06	-65,26
$w_{2\pi\text{КЛГ}}(t)$	2	0	0,50	5,27	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛГ}}(t))$	2	0	0,50	5,27	1,00	1,00	1,33	0,91	1,09	-92,96	-10,97	56,66	27,35	-92,01
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛГ}}(t))$	2	0	0,50	5,27	1,00	1,00	1,34	0,91	1,09	-92,14	-10,97	55,72	26,45	-91,78
$w_{2\pi\text{КЛГ}}(t)$	3	0	0,50	5,36	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛГ}}(t))$	3	0	0,50	5,36	1,00	1,00	1,36	0,92	1,09	-95,12	-11,02	57,52	27,59	-95,48
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛГ}}(t))$	3	0	0,50	5,36	1,00	1,00	1,37	0,92	1,09	-95,57	-11,02	56,66	26,78	-95,92
$w_{2\pi\text{КЛГ}}(t)$	1	1	0,50	6,36	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛГ}}(t))$	1	1	0,50	6,36	1,00	1,00	1,24	0,93	1,09	-94,90	-10,91	63,62	29,24	-94,19
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛГ}}(t))$	1	1	0,50	6,36	1,00	1,00	1,25	0,93	1,09	-95,01	-10,91	63,35	28,99	-94,66
$w_{2\pi\text{КЛГ}}(t)$	2	1	0,50	7,09	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛГ}}(t))$	2	1	0,50	7,09	1,00	1,00	1,29	0,92	1,08	-101,00	-10,92	68,35	30,83	-112,80
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛГ}}(t))$	2	1	0,50	7,09	1,00	1,00	1,29	0,92	1,08	-100,70	-10,92	68,28	30,77	-112,20
$w_{2\pi\text{КЛГ}}(t)$	3	1	0,50	7,27	2,00	0,00	3,70	0,83	1,17	-45,42	-8,21	18,81	13,30	-57,89
$\text{Re}(\psi_{A2\pi\text{КЛГ}}(t))$	3	1	0,50	7,27	1,00	1,00	1,29	0,91	1,08	-100,30	-10,97	69,47	31,23	-112,50
$\text{Im}(\psi_{A2\pi\text{КЛГ}}(t))$	3	1	0,50	7,27	1,00	1,00	1,29	0,91	1,08	-99,68	-10,97	69,41	31,18	-112,10

Рис. 7.32. Функция Гаусса (а) и ее ЛАЧХ (б), $\tau = 0,3$ с

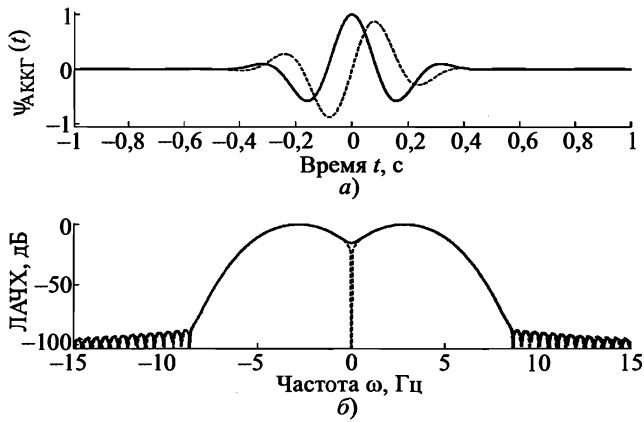


Рис. 7.33. Функция $\psi_{\text{АККГ}}(t)$ и ее ЛАЧХ (б), $M=2$, $a=2$, $\Delta=0,5$ с, $\tau=0,3$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

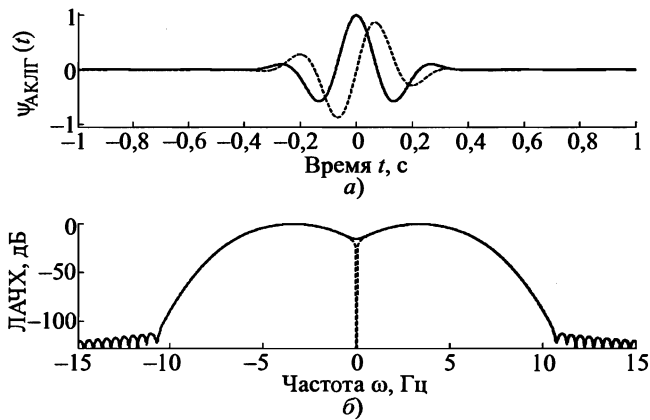


Рис. 7.34. Функция $\psi_{\text{АКЛГ}}(t)$ и ее ЛАЧХ (б), $M=2$, $r=0$, $\Delta=0,5$ с, $\tau=0,3$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

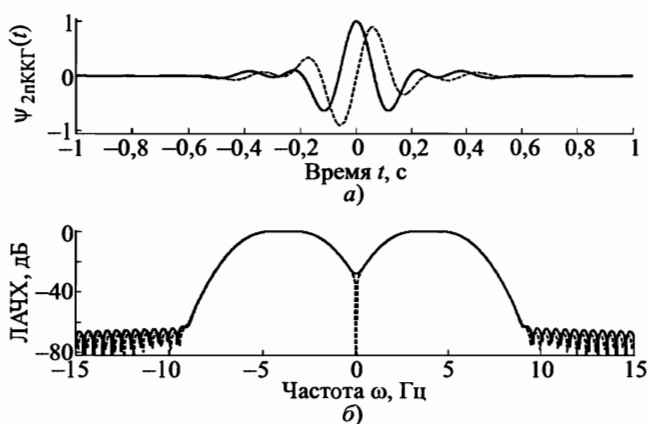


Рис. 7.35. Функция $\psi_{2пккг}(t)$ (а) и ее ЛАЧХ (б), $M = 2$, $a = 2$, $\Delta = 0,5$ с, $\tau = 0,5$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

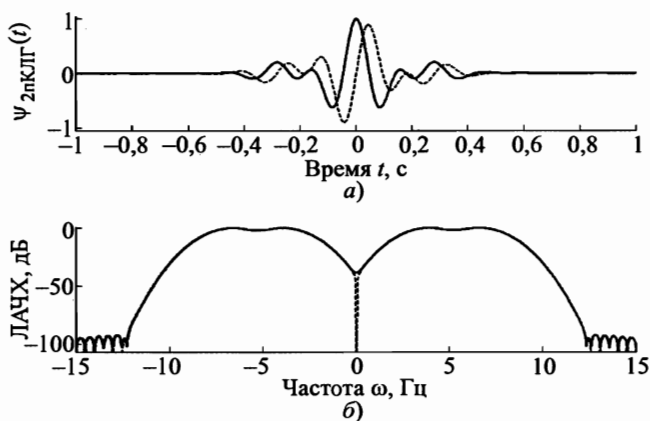


Рис. 7.36. Функция $\psi_{2пккг}(t)$ (а) и ее ЛАЧХ (б), $M = 2$, $r = 0$, $\Delta = 0,5$ с, $\tau = 0,3$ с (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

7.9. Модели сверхширокополосных (СШП) сигналов

Рассмотрим модели следующих сверхширокополосных сигналов [8, 9]:

$$1) y_1(t) = - \left(\text{step} \left(\frac{t+0,5}{\tau} \right) - \text{step} \left(\frac{t-0,5}{\tau} \right) \right) \cdot \text{sign}(t); \quad (7.54)$$

$$2) y_2(t) = (-1)^n \cdot \sin \left(\pi n \frac{t}{\tau} \right) \times \\ \times \exp \left(- \left| \frac{t}{\tau} \right| \right) \cdot \left(\text{step} \left(\frac{t}{\tau} + 1 \right) - \text{step} \left(\frac{t}{\tau} - 1 \right) \right); \quad (7.55)$$

$$3) y_3(t) = - \frac{2t}{\tau^2} \cdot \exp \left(- \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right); \quad (7.56)$$

$$4) y_4(t) = - \frac{2}{\tau^2} \left(1 - \frac{2t^2}{\tau^2} \right) \cdot \exp \left(- \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right); \quad (7.57)$$

$$5) y_5(t) = \exp \left(- \left(\frac{t}{2\tau} \right)^2 \right) n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \left(-\frac{1}{2} \right)^k \frac{(t/\tau)^{n-2k}}{(n-2k)!k!}; \quad (7.58)$$

где $\text{step}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$ — функция Хевисайда, а $\text{sign}(t)$ — функция характеризующая знак аргумента. Их графики представлены на рис. 7.37–7.40, а физические характеристики приведены в табл. 7.11.

Таблица 7.11. Модельные СШП сигналы и их физические характеристики

Номера реали- заций	Модельные СШП сигналы	μ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9
1	$y_1(t), \tau = 1 \text{ с}$	1,54	0,91	1,04	0,85	1,11	-1,58	-1,41	10,01	10,01	-5,29
2	$y_1(t), \tau = 1,5 \text{ с}$	1,50	0,92	1,00	0,83	1,11	-1,49	-1,34	6,67	6,67	-5,28
3	$y_2(t), n = 1$	1,46	0,91	1,06	0,81	1,13	-11,47	-7,81	8,06	6,28	-12,99
4	$y_2(t), n = 2$	0,79	0,98	0,94	0,88	1,18	-10,18	-6,32	9,84	6,57	-8,19
5	$y_2(t), n = 3$	0,52	1,02	0,88	0,82	1,18	-9,53	-5,53	10,60	6,63	-8,60
6	$y_3(t), \tau = 0,3 \text{ с}$	1,59	0,87	2,26	0,81	1,13	-37,58	-9,17	14,30	10,44	-49,15
7	$y_3(t), \tau = 0,5 \text{ с}$	1,48	0,87	1,82	0,88	1,18	-8,80	-5,88	8,74	6,49	-18,87
8	$y_4(t), \tau = 0,3 \text{ с}$	1,22	0,90	2,19	0,84	1,16	-32,05	-8,43	19,43	10,65	-43,44
9	$y_4(t), \tau = 0,5 \text{ с}$	1,20	1,00	1,11	0,83	1,17	-6,20	-4,60	12,18	6,93	-14,08
10	$y_5(t), n = 1, \tau = 0,15 \text{ с}$	1,59	0,87	2,26	0,81	1,13	-37,58	-9,17	14,30	10,44	-49,15
11	$y_5(t), n = 3, \tau = 0,15 \text{ с}$	1,77	0,85	1,39	0,89	1,09	-25,77	-10,44	11,50	8,12	-34,63
12	$y_5(t), n = 5, \tau = 0,15 \text{ с}$	1,81	0,84	1,08	0,93	1,07	-17,01	-10,40	10,20	6,98	-26,63
13	$y_5(t), n = 1, \tau = 0,1 \text{ с}$	1,59	0,86	3,28	0,85	1,15	-96,77	-8,86	21,44	15,67	-108,30
14	$y_5(t), n = 3, \tau = 0,1 \text{ с}$	1,75	0,82	2,21	0,90	1,10	-81,50	-10,37	17,25	12,17	-92,79
15	$y_5(t), n = 5, \tau = 0,1 \text{ с}$	1,83	0,85	1,69	0,93	1,06	-68,61	-11,34	15,27	10,43	-77,97
16	$y_5(t), n = 7, \tau = 0,1 \text{ с}$	1,85	0,87	1,42	0,95	1,06	-57,50	-11,65	14,02	9,32	-67,70

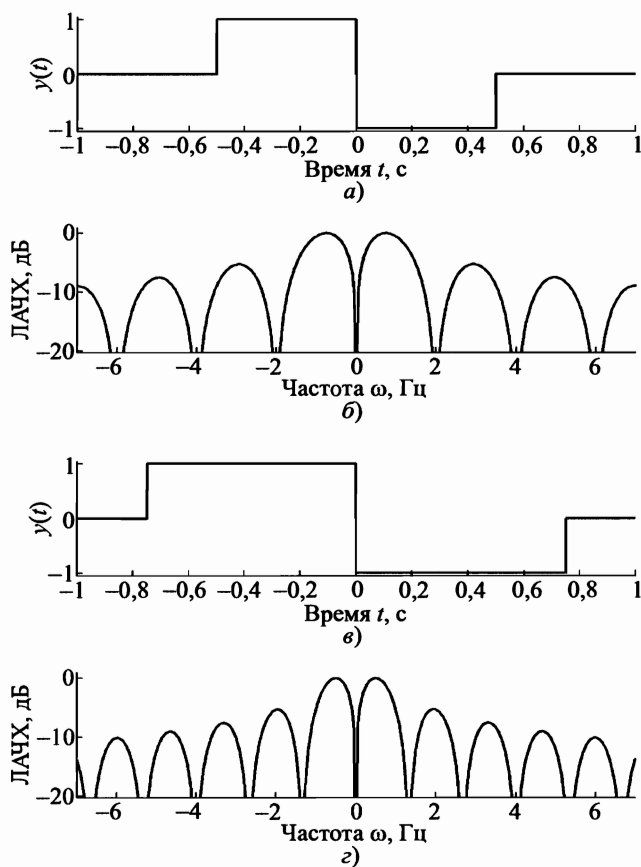


Рис. 7.37. СШП сигналы и их ЛАЧХ: $y_1(t)$, $\tau = 1$ с (а, б), $y_1(t)$, $\tau = 1,5$ с (в, г)

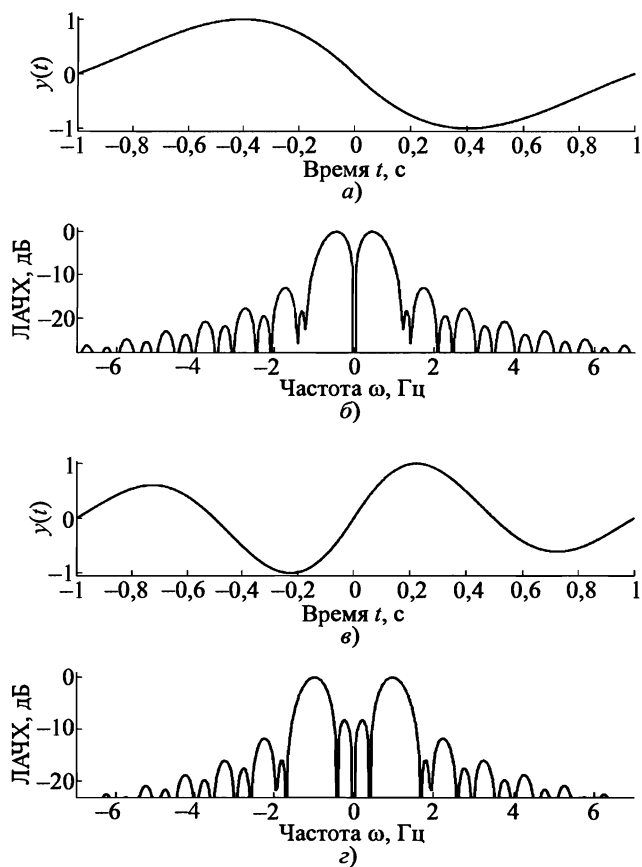


Рис. 7.38. СШП сигналы и их ЛАЧХ: $y_2(t)$, $n = 1$ с (а, б), $y_2(t)$, $n = 2$ с (в, г)

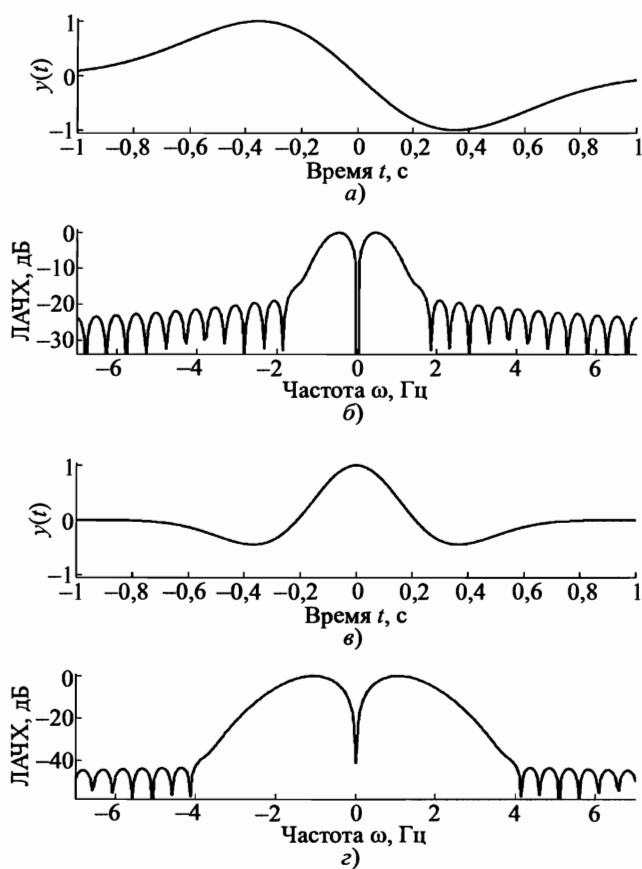


Рис. 7.39. СШП сигналы и их ЛАЧХ: $y_3(t)$, $\tau = 0,3$ с (а, б), $y_4(t)$, $\tau = 0,3$ с (в, г)

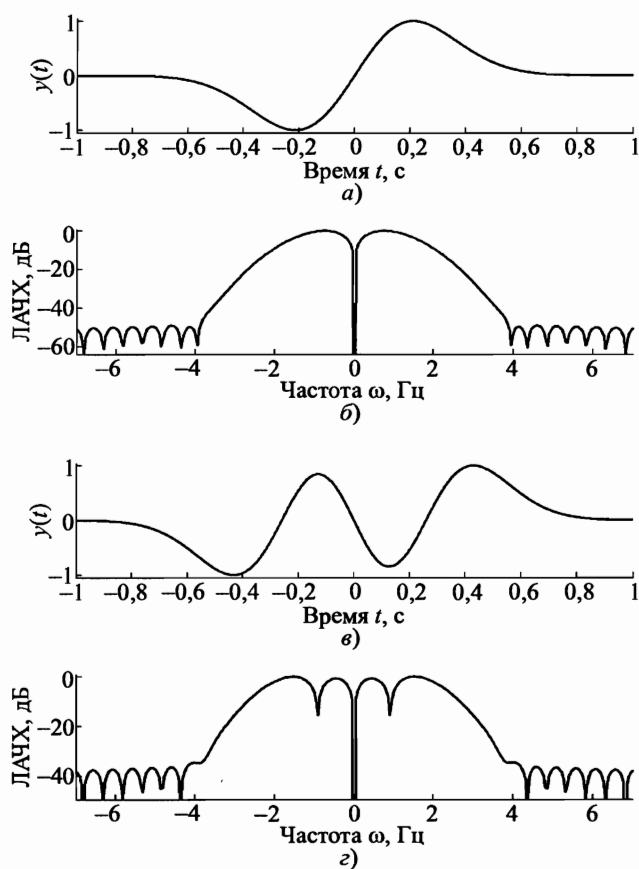


Рис. 7.40. СШП сигналы и их ЛАЧХ: $y_5(t)$, $n = 1$, $\tau = 0,15$ с (а, б), $y_5(t)$, $n = 3$, $\tau = 0,15$ с (в, г)

7.10. Функционал качества выбора вейвлетного базиса для анализа СШП сигналов

Для анализа СШП сигналов был введен функционал качества, позволяющий дать оценку выбора базисных вейвлет-функций. Этот функционал имеет вид

$$J(\psi, y) = \sum_{k=0}^N \left| \frac{\gamma_k^\psi - \gamma_k^y}{\gamma_k^y} \right|^2, \quad (7.59)$$

где $\psi(t)$ — вейвлетобразующая функция, $y(t)$ — анализируемый сигнал, γ_k^ψ и γ_k^y — их физические характеристики, а N — количество сравниваемых параметров. Здесь $\gamma_0 = \mu$, $N = 4$. В случае выбора вейвлетного базиса целесообразно учитывать ряд инвариантных по отношению к масштабированию аргумента частотных характеристик (7.34)–(7.41). Оптимальному выбору базиса соответствует минимальное значение функционала (7.59). Анализ выражений для расчета физических параметров (7.34)–(7.41) и (7.59) показал, что для достижения оптимальных результатов вейвлет-функция и сигнал должны иметь близкие показатели широкполосности: $\mu^\psi \approx \mu^y$. Рассмотрим (7.29)–(7.32). Поскольку спектр функций Кравченко–Котельникова и Кравченко–Левитана симметричен [1–3], то (7.32) для вейвлет-модулированных функций (7.30) и (7.31) имеет вид

$$\mu^\psi = 2 \frac{f_{\max}^\psi - f_{\min}^\psi}{f_{\max}^\psi + f_{\min}^\psi} = 2 \frac{(f_{\max}^w + \eta) - (\eta - f_{\max}^w)}{(f_{\max}^w + \eta) + (\eta - f_{\max}^w)} = f_{\max}^w \frac{2}{\eta},$$

где $f_{\max}^w$ — максимальная частота функции спектральной плотности сигнала $w(t)$. Получим выражение для определения η : $\eta = f_{\max}^w \frac{2}{\mu^\psi}$. На практике физические параметры (7.36)–(7.48) определяются отдельно для вещественной и мнимой частей. Поэтому имеет место приближенное равенство

$$\eta \approx f_{\max}^w \frac{2}{\mu^\psi}. \quad (7.60)$$

Тогда (7.31) принимает вид

$$\psi(t) = w(t) \cdot \exp \left(i \frac{2 f_{\max}^w}{\mu'} t \right). \quad (7.61)$$

Здесь μ' — заданный показатель широкополосности, а $f_{\max}^w$ — максимальная частота функции спектральной плотности $\hat{w}(\omega)$. Функция $\psi(t)$ является вейвлетом при выполнении условия нулевого среднего (7.1).

В общем виде это условие выполняется приближенно: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt \approx 0$, т. е.

$\hat{\psi}(0) \neq 0$, что эквивалентно $\hat{w}\left(\frac{2f_{\max}^w}{\mu'}\right) \neq 0$. Выражение (7.54) целесообразно применять при выполнении условия

$$10 \cdot \log_{10} \left[\hat{w} \left(\frac{2f_{\max}^w}{\mu'} \right) \right] \leq -15 \text{ дБ} \Leftrightarrow \frac{2f_{\max}^w}{\mu'} \geq f_{15}^w, \quad (7.62)$$

где $10 \cdot \log_{10} [\hat{w}(f_{10}^w)] = -15$ дБ, которое определяется требованиями точности выполнения (7.1) и частотными свойствами (7.60). Если $\frac{2f_{\max}^w}{\mu'} < f_{10}^w$, то значение параметра η определяется так:

$$\eta = f_{10}, \quad (7.63)$$

$$\psi(t) = w(t) \cdot \exp(i f_{10}^w t). \quad (7.64)$$

Итак, получаем вейвлет-модулированные весовые (оконные) функции, согласованные по параметру μ с СШП сигналами.

Значения функционала качества для СШП сигналов (7.54)–(7.58) и согласованных с ними вейвлет-модулированных функций:

- 1) Кравченко–Котельникова ($\psi_{\text{АКК}}(t)$);
- 2) Кравченко–Котельникова–Гаусса ($\psi_{\text{АККГ}}(t)$);
- 3) Второй производной функции Кравченко–Котельникова ($\psi_{\text{А2пКК}}(t)$);
- 4) Второй производной функции Кравченко–Котельникова–Гаусса ($\psi_{\text{А2пККГ}}(t)$);
- 5) Кравченко–Левитана ($\psi_{\text{АКЛ}}(t)$);
- 6) Кравченко–Левитана–Гаусса ($\psi_{\text{АКЛГ}}(t)$);
- 7) Второй производной функции Кравченко–Левитана ($\psi_{\text{А2пКЛ}}(t)$);
- 8) Второй производной функции Кравченко–Левитана–Гаусса ($\psi_{\text{А2пКЛГ}}(t)$);

приведены в табл. 7.12–7.22.

Вейвлет-преобразование модельных СШП сигналов $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_5(t)$ (см. табл. 7.11) на основе вейвлетов Кравченко–Котельникова показано на рис. 7.41–7.43. Вейвлет-преобразование этих же модельных сигналов на основе вейвлет-модулированной второй производной функции Кравченко–Котельникова иллюстрируется рис. 7.44–7.46.

Таблица 7.12. Значение функционала качества для модельных СШП сигналов и вейвлетов Кравченко–Котельникова ($\psi_{\text{АКК}}(t)$, $\Delta = 0,2$ с)

Параметры весовой функции		Номера реализаций модельных СШП сигналов															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
M	a																
1	1,2	24,47	23,35	27,77	19,24	18,41	64,19	52,82	61,06	28,64	64,19	39,16	26,01	76,13	60,99	47,09	38,24
2	1,2	8,45	6,47	8,24	3,25	1,17	46,76	35,67	42,77	8,50	46,76	28,66	19,24	64,32	52,38	40,51	31,97
3	1,2	6,61	5,34	5,16	0,44	1,28	40,83	27,60	31,89	1,44	40,83	23,53	17,70	60,10	46,77	34,69	26,76
1	1,5	24,47	23,35	27,77	19,24	18,41	64,19	52,82	61,06	28,64	64,19	39,16	26,01	76,13	60,99	47,09	38,24
2	1,5	9,50	7,73	10,27	4,81	2,76	48,36	37,77	45,02	10,89	48,36	29,10	18,80	65,11	52,67	40,45	31,80
3	1,5	5,74	4,28	5,17	0,49	0,29	42,56	29,75	35,54	3,76	42,56	23,88	16,11	61,07	47,61	35,09	26,73
1	2,0	24,47	23,35	27,77	19,24	18,41	64,19	52,82	61,06	28,64	64,19	39,16	26,01	76,13	60,99	47,09	38,24
2	2,0	11,92	10,79	13,26	7,91	5,39	51,03	41,12	48,40	14,32	51,03	30,33	19,15	66,88	53,63	40,92	32,19
3	2,0	7,49	6,00	8,62	3,50	2,20	46,51	35,45	43,87	9,26	46,51	25,96	15,66	63,52	49,76	36,85	28,14

Таблица 7.13. Значение функционала качества для модельных СШП сигналов и вейвлетов Кравченко–Котельникова ($\psi_{\text{АКК}}(t)$, $\tau = 0,2$ с, $\Delta = 0,2$ с)

Параметры весовой функции		Номера реализаций модельных СШП сигналов																
		1		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		<i>M</i>	<i>a</i>															
1	1,2	5,50	7,23	5,02	7,51	12,76	26,04	13,79	23,44	1,56	26,04	8,96	10,50	43,79	28,23	16,03	10,17	
2	1,2	17,83	20,72	13,89	24,78	36,23	21,17	10,36	14,57	7,22	21,17	13,14	24,68	39,87	27,00	18,20	15,60	
3	1,2	27,46	31,56	22,40	37,74	51,77	19,88	9,67	10,99	12,92	19,88	16,06	33,52	38,31	26,09	18,89	18,31	
1	1,5	5,50	7,23	5,02	7,51	12,76	26,04	13,79	23,44	1,56	26,04	8,96	10,50	43,79	28,23	16,03	10,17	
2	1,5	17,93	21,18	14,45	25,36	35,76	20,73	9,40	14,18	7,44	20,73	12,05	23,81	38,98	25,54	16,56	14,01	
3	1,5	28,39	32,95	23,56	38,34	52,14	18,73	8,35	10,36	13,26	18,73	15,05	33,54	36,79	24,23	17,16	16,93	
1	2,0	5,50	7,23	5,02	7,51	12,76	26,04	13,79	23,44	1,56	26,04	8,96	10,50	43,79	28,23	16,03	10,17	
2	2,0	14,72	17,69	11,91	22,96	33,01	21,14	9,70	15,14	6,42	21,14	10,55	20,22	39,40	25,29	15,47	12,25	
3	2,0	18,73	22,33	15,29	30,25	42,27	19,16	8,47	12,56	9,96	19,16	10,94	23,83	37,51	23,73	14,76	12,64	

Таблица 7.14. Значение функционала качества для модельных СШП сигналов и вейвлет-модулированных вторых производных функции Кравченко–Котельникова ($\psi_{A2пкк}(t)$, $\Delta = 0,2$ с)

Параметры весовой функции		Номера реализаций модельных СШП сигналов																
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
M	a																	
1	1,2	25,45	24,84	28,88	20,58	19,51	64,83	54,20	61,47	30,19	64,83	40,35	27,78	76,66	61,75	47,29	39,69	
2	1,2	25,08	23,38	28,31	19,49	18,18	63,93	53,11	60,90	29,21	63,93	39,81	27,18	76,03	61,80	48,13	39,34	
3	1,2	18,56	17,43	21,48	13,62	12,86	58,78	47,63	55,44	22,33	58,78	35,35	22,81	72,00	57,79	44,30	35,44	
1	1,5	25,45	24,84	28,88	20,58	19,51	64,83	54,20	61,47	30,19	64,83	40,35	27,78	76,66	61,75	47,29	39,69	
2	1,5	25,07	23,89	28,07	19,39	18,61	63,46	53,18	60,32	28,54	63,46	39,89	27,24	76,18	61,78	48,13	39,27	
3	1,5	19,21	17,79	21,55	13,91	12,66	58,34	47,48	55,85	23,04	58,34	35,12	22,60	72,36	57,57	44,12	35,24	
1	2,0	25,45	24,84	28,88	20,58	19,51	64,83	54,20	61,47	30,19	64,83	40,35	27,78	76,66	61,75	47,29	39,69	
2	2,0	24,60	23,08	27,22	19,12	17,90	63,90	52,01	59,62	28,17	63,90	41,32	28,25	76,81	62,95	49,09	40,17	
3	2,0	19,67	18,54	23,47	14,42	13,41	59,36	48,67	56,37	24,24	59,36	35,90	23,19	73,48	58,35	44,61	35,65	

Таблица 7.15. Значение функционала качества для модельных СШП сигналов и вейвлет-модулированных вторых производных функции Кравченко–Котельникова–Гаусса ($\psi_{A_2, \text{ККГ}}(t)$, $\tau = 0,3$ с, $\Delta = 0,2$ с)

Параметры весовой функции		Номера реализаций модельных СШП сигналов															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
M	a																
1	1,2	3,01	3,18	4,15	2,18	5,24	36,67	23,28	31,27	3,12	36,67	14,92	8,79	55,34	38,03	23,91	15,83
2	1,2	3,08	3,15	5,07	1,68	3,99	39,15	26,24	34,88	4,51	39,15	15,93	7,98	57,19	39,62	25,14	16,58
3	1,2	2,60	2,56	4,47	1,40	3,94	38,17	25,68	34,41	3,94	38,17	15,58	7,97	56,54	39,25	24,94	16,49
1	1,5	3,01	3,18	4,15	2,18	5,24	36,67	23,28	31,27	3,12	36,67	14,92	8,79	55,34	38,03	23,91	15,83
2	1,5	2,57	2,84	4,23	1,97	5,21	36,79	23,77	32,69	3,51	36,79	14,30	7,62	55,28	37,60	23,30	15,05
3	1,5	2,33	2,54	3,59	1,98	5,44	35,73	22,98	32,13	3,09	35,73	13,95	7,83	54,57	37,13	22,99	14,92
1	2,0	3,01	3,18	4,15	2,18	5,24	36,67	23,28	31,27	3,12	36,67	14,92	8,79	55,34	38,03	23,91	15,83
2	2,0	2,64	3,15	3,70	2,74	6,93	34,28	21,08	30,55	2,72	34,28	12,94	7,98	53,23	35,58	21,62	13,82
3	2,0	2,50	3,00	3,50	3,20	7,31	33,86	21,04	29,44	2,44	33,86	12,64	7,81	53,01	35,31	21,29	13,56

Таблица 7.16. Значение функционала качества для модельных СШП сигналов и вейвлет-модулированных вторых производных функции Кравченко–Котельникова–Гаусса ($\psi_{A2, \text{ККГ}}(t)$, $\tau = 0,5$ с, $\Delta = 0,2$ с)

Параметры весовой функции		Номера реализаций модельных СШП сигналов															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
<i>M</i>	<i>a</i>																
1	1,2	11,70	10,85	14,91	7,65	7,10	52,26	40,71	49,20	15,23	52,26	28,58	16,67	65,78	51,84	38,17	29,07
2	1,2	13,21	12,43	16,30	8,55	8,11	53,97	42,33	50,79	16,90	53,97	29,34	17,10	66,81	52,50	38,64	29,48
3	1,2	9,85	8,04	11,62	5,00	5,41	48,77	38,21	46,70	12,02	48,77	24,90	13,56	63,06	48,51	34,60	25,50
1	1,5	11,70	10,85	14,91	7,65	7,10	52,26	40,71	49,20	15,23	52,26	28,58	16,67	65,78	51,84	38,17	29,07
2	1,5	11,91	11,16	15,00	7,71	7,22	53,00	40,84	49,55	15,85	53,00	28,69	16,61	65,93	51,96	38,10	28,94
3	1,5	8,80	8,25	11,73	4,92	4,95	49,00	37,08	45,68	12,23	49,00	25,09	13,73	63,19	48,69	34,77	25,64
1	2,0	11,70	10,85	14,91	7,65	7,10	52,26	40,71	49,20	15,23	52,26	28,58	16,67	65,78	51,84	38,17	29,07
2	2,0	11,46	10,60	14,18	7,34	6,81	52,07	40,73	48,89	14,75	52,07	28,04	16,09	65,70	51,38	37,52	28,40
3	2,0	8,68	7,80	10,92	4,26	4,51	48,84	36,76	45,42	11,41	48,84	24,94	13,65	63,07	48,56	34,60	25,48

Таблица 7.17. Значение функционала качества для модельных СШП сигналов и вейвлетов Кравченко–Левитана ($\psi_{\text{акл}}(t)$, $\Delta = 0,2$ с)

Параметры весовой функции		Номера реализаций модельных СШП сигналов																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		
M	a	1	0	8,76	6,60	7,90	3,12	0,89	46,52	35,65	41,02	7,73	46,52	29,37	20,50	64,68	53,17	41,53	33,13
2	0	6,33	5,74	4,45	2,17	4,06	36,18	23,05	27,34	0,13	36,18	19,93	16,81	56,19	42,17	30,31	23,08		
3	0	8,71	9,17	6,06	8,25	13,56	30,63	18,12	21,80	0,64	30,63	16,71	18,17	51,47	36,79	25,51	19,66		
1	1	9,09	9,13	6,54	5,68	9,50	33,86	20,80	23,73	0,40	33,86	19,25	19,17	54,42	40,07	28,61	22,28		
2	1	33,95	38,76	28,31	43,98	59,94	20,23	10,12	9,95	16,84	20,23	18,73	39,50	40,87	26,74	20,21	20,78		
3	1	55,32	63,01	47,74	74,26	96,75	16,20	8,61	5,97	33,00	16,20	24,23	58,16	35,71	23,05	20,43	25,70		

Таблица 7.18. Значение функционала качества для модельных СШП сигналов и вейвлетов Кравченко–Левитана–Гаусса ($\psi_{\text{аклг}}(t)$, $\tau = 0,3$ с, $\Delta = 0,2$ с)

Параметры весовой функции		Номера реализаций модельных СШП сигналов															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
<i>M</i>	<i>a</i>																
1	0	15,32	17,80	11,68	21,75	31,64	22,05	11,04	15,25	5,66	22,05	12,84	22,53	40,80	27,86	18,62	15,40
2	0	30,90	35,51	25,58	41,42	56,34	19,34	9,23	10,08	15,26	19,34	16,88	36,45	37,51	25,43	18,81	18,95
3	0	34,94	40,14	29,17	47,39	65,54	18,00	8,59	8,98	18,36	18,00	17,57	39,95	36,08	24,28	18,42	19,57
1	1	29,68	33,89	24,44	39,24	52,38	21,02	10,51	10,97	13,82	21,02	17,68	35,78	39,28	27,23	20,25	19,89
2	1	52,83	60,24	45,53	69,96	91,55	16,65	8,62	6,32	31,10	16,65	23,45	55,88	33,65	23,09	20,21	24,92
3	1	63,25	71,93	55,06	83,81	108,42	15,51	8,67	5,11	39,07	15,51	26,77	65,15	31,88	22,17	21,13	28,00

Таблица 7.19. Значение функционала качества для модельных СШП сигналов и вейвлетов Кравченко–Левитана–Гаусса ($\psi_{\text{АКЛГ}}(t)$, $\tau = 0,5$ с, $\Delta = 0,2$ с)

Параметры весовой функции		Номера реализаций модельных СШП сигналов															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
M	a																
1	0	4,06	3,02	2,62	1,21	2,27	36,53	24,74	30,72	1,11	36,53	19,66	14,66	54,35	42,49	30,77	23,08
2	0	13,56	15,25	10,25	15,21	22,81	26,57	14,27	17,42	3,29	26,57	15,40	21,84	45,04	32,26	22,38	18,06
3	0	19,49	22,28	15,36	24,66	36,02	23,21	11,83	14,09	7,19	23,21	15,31	26,77	41,78	29,16	20,42	17,78
1	1	17,71	19,91	13,83	20,44	29,76	26,03	13,93	15,86	5,37	26,03	16,68	25,74	44,53	31,98	22,74	19,29
2	1	41,46	47,29	35,06	54,89	74,01	18,54	9,38	8,26	22,41	18,54	20,50	46,06	36,30	24,98	20,12	22,39
3	1	52,62	59,96	45,28	71,02	91,09	16,69	8,74	6,38	30,90	16,69	23,49	55,79	33,77	23,25	20,35	25,02

Таблица 7.20. Значение функционала качества для модельных СШП сигналов и вейвлетов Кравченко–Левитана ($\psi_{\text{А2П,КЛ}}(t)$, $\Delta = 0,2$ с)

Параметры весовой функции		Номера реализаций модельных СШП сигналов															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
M	a																
1	0	25,60	23,69	28,59	19,55	18,63	64,23	53,29	61,00	29,24	64,23	39,89	27,25	75,10	62,02	48,44	39,63
2	0	14,10	13,02	16,83	8,92	8,07	53,93	42,68	50,95	17,67	53,93	30,93	18,90	67,09	53,84	40,58	31,59
3	0	9,41	8,46	11,63	4,96	4,97	49,60	37,03	45,62	12,47	49,60	26,63	15,31	63,79	50,14	36,55	27,50
1	1	12,39	11,41	15,01	7,72	6,91	52,62	41,52	49,37	15,81	52,62	29,93	18,13	66,09	52,99	39,78	30,79
2	1	3,66	3,16	4,92	1,17	2,74	40,55	27,36	36,23	4,54	40,55	18,60	10,41	56,50	42,04	28,42	19,86
3	1	2,78	2,75	3,60	1,74	4,83	36,55	23,33	31,87	2,74	36,55	15,36	9,22	53,16	38,21	24,67	16,60

Таблица 7.21. Значение функционала качества для модельных СШП сигналов и вейвлет-модулированных вторых производных функции Кравченко–Левитана–Гаусса ($\psi_{\Delta 2\text{ПКЛГ}}(t)$, $\tau = 0,3$ с, $\Delta = 0,2$ с)

Параметры весовой функции		Номера реализаций модельных СШП сигналов															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
M	a																
1	0	3,21	3,46	5,63	1,75	3,73	39,80	27,63	36,66	5,41	39,80	16,31	7,88	55,69	39,85	25,61	16,94
2	0	2,54	2,62	3,97	1,66	4,32	37,06	24,15	33,01	3,42	37,06	14,92	8,10	53,47	37,98	24,12	15,86
3	0	2,37	2,65	3,47	2,39	6,04	35,08	22,24	30,83	2,69	35,08	13,60	7,94	51,84	36,27	22,55	14,60
1	1	2,84	2,66	4,59	1,26	3,24	38,91	26,29	35,14	4,27	38,91	16,43	8,55	55,07	39,85	25,94	17,43
2	1	2,88	3,17	3,43	2,70	6,88	34,36	21,12	29,49	2,09	34,36	13,80	9,09	51,28	36,09	22,69	15,00
3	1	3,52	4,15	3,75	4,14	8,86	32,59	19,23	27,54	1,95	32,59	12,79	9,58	49,70	34,40	21,24	13,96

Таблица 7.22. Значение функционала качества для модельных СШП сигналов и вейвлет-модулированных вторых производных функции Кравченко–Левитана–Гаусса ($\psi_{\Delta 2\text{ПКЛГ}}(t)$, $\tau = 0,5$ с, $\Delta = 0,2$ с)

Параметры весовой функции		Номера реализаций модельных СШП сигналов															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
M	a																
1	0	14,50	13,55	17,15	9,55	9,15	55,10	43,46	51,72	17,88	55,10	30,46	18,09	67,61	53,47	39,67	30,56
2	0	6,16	5,53	8,53	2,91	3,22	45,48	33,02	41,99	8,76	45,48	21,93	11,50	60,39	45,68	31,71	22,69
3	0	4,27	3,86	6,12	1,59	3,00	42,29	29,45	38,37	6,12	42,29	19,22	10,00	57,78	42,85	28,90	20,09
1	1	6,20	5,45	8,70	2,89	3,27	45,52	33,39	42,02	8,82	45,52	22,48	12,07	60,45	46,17	32,46	23,50
2	1	2,84	2,71	3,78	1,48	4,15	37,33	24,11	32,65	2,97	37,33	15,90	9,28	53,81	38,89	25,32	17,14
3	1	2,96	3,22	3,50	2,65	6,47	34,66	21,36	29,68	2,17	34,66	14,08	9,25	51,55	36,40	23,00	15,28

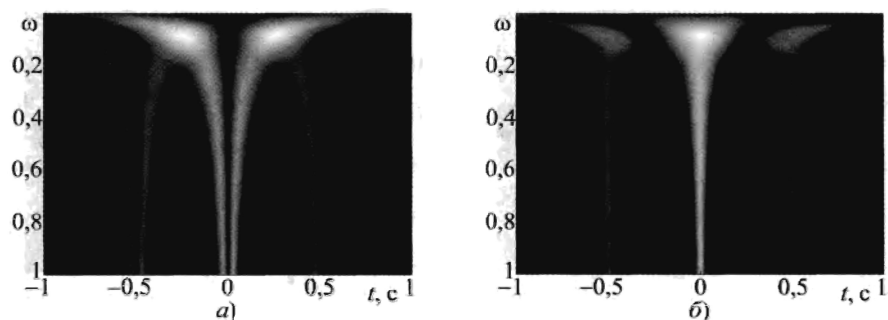


Рис. 7.41. Вейвлет-преобразование сигнала $y_1(t)$ ($\tau = 1$ с) с помощью вейвлета $\psi_{AKK}(t)$ ($M = 3$, $a = 1,5$, $\Delta = 0,2$ с): вещественная (а) и мнимая (б) части

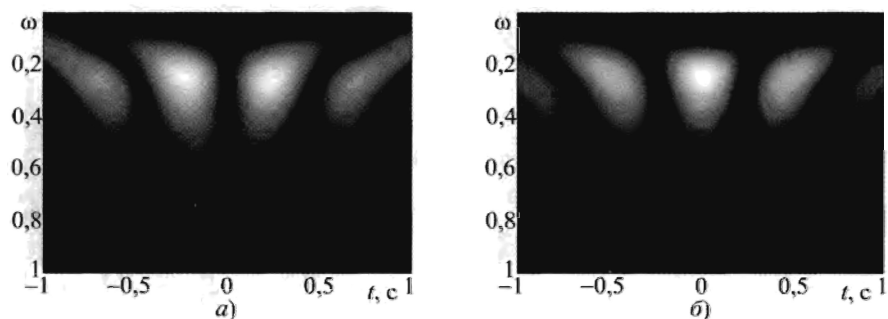


Рис. 7.42. Вейвлет-преобразование сигнала $y_2(t)$ ($n = 2$) с помощью вейвлета $\psi_{AKK}(t)$ ($M = 3$, $a = 1,5$, $\Delta = 0,2$ с): вещественная (а) и мнимая (б) части

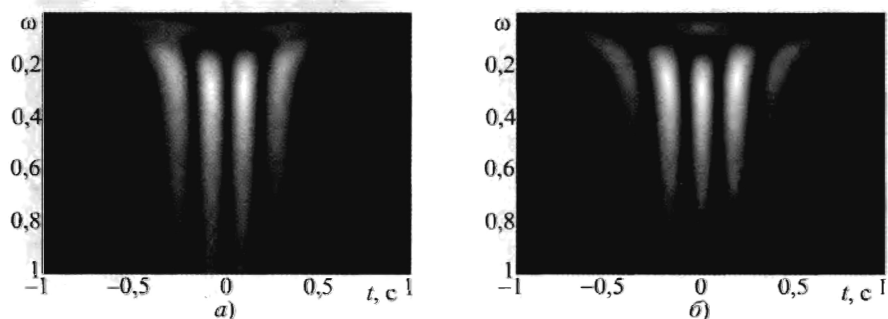


Рис. 7.43. Вейвлет-преобразование сигнала $y_5(t)$ ($n = 3$, $\tau = 0,1$ с) с помощью вейвлета $\psi_{AKK}(t)$ ($M = 3$, $a = 1,5$, $\Delta = 0,2$ с): вещественная (а) и мнимая (б) части

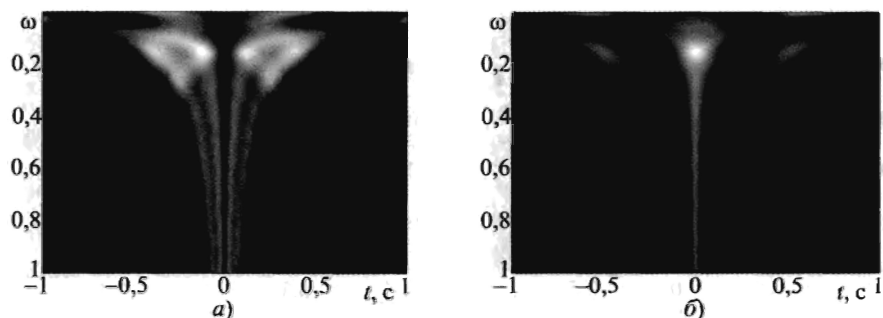


Рис. 7.44. Вейвлет-преобразование сигнала $y_1(t)$ ($\tau = 1$ с) с помощью вейвлета $\psi_{A2пКК}(t)$ ($M = 3$, $a = 1,5$, $\Delta = 0,2$ с): вещественная (а) и мнимая (б) части

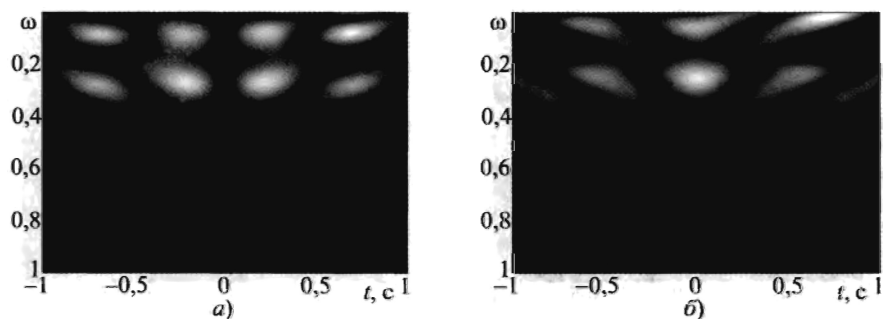


Рис. 7.45. Вейвлет-преобразование сигнала $y_2(t)$ ($n = 2$) с помощью вейвлета $\psi_{A2пКК}(t)$ ($M = 3$, $a = 1,5$, $\Delta = 0,2$ с): вещественная (а) и мнимая (б) части

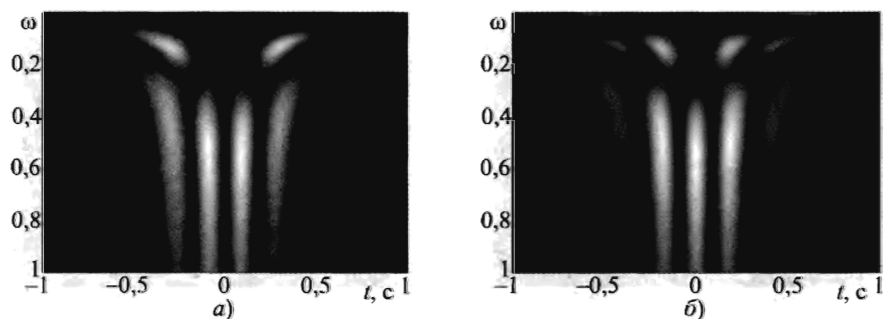


Рис. 7.46. Вейвлет-преобразование сигнала $y_5(t)$ ($n = 3$, $\tau = 0,1$ с) с помощью вейвлета $\psi_{A2пКК}(t)$ ($M = 3$, $a = 1,5$, $\Delta = 0,2$ с): вещественная (а) и мнимая (б) части

Заключение

Впервые на основе обобщенных рядов Котельникова и Левитана предложен и обоснован новый класс аналитических вейвлетов. Исследования показали, что они могут быть эффективными в задачах цифровой обработки СШП сигналов. Предложена методика согласования аналитических вейвлетов с конкретными СШП сигналами с целью повышения качества их анализа и цифровой обработки. Введенный функционал качества по оценке эффективности вейвлетных базисов Кравченко–Котельникова и Кравченко–Левитана позволяет определить подходящий для практики из множества существующих. Приведено большое количество примеров аналитических вейвлетов и их вейвлет–преобразований. Проведенный численный эксперимент, а также анализ физических результатов показывают потенциальные возможности применения предложенного и обоснованного нового класса вейвлетов в различных задачах радиофизики, радиолокации, радиовидения.

Список литературы

1. *Кравченко В. Ф.* Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. — М.: Радиотехника, 2003.
2. *Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л.* Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. — М.: Физматлит, 2006.
3. *Харкевич А. А.* Спектры и анализ. — М.: Издательство ЛКИ, 2007.
4. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965.
5. *Кравченко В. Ф., Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф.* Новый класс аналитических вейвлетов Кравченко–Рвачева в задачах анализа сверширокополосных сигналов и процессов // *Успехи современной радиоэлектроники*. — 2007. — № 5. — С. 29–47.
6. *Gulyaev Yu. V., Kravchenko V. F., Pustovoit V. I.* A New Class of WA-Systems of Kravchenko–Rvachev Functions // *Doklady Mathematics*. — 2007. — Vol. 75, № 2. — P. 325–332.
7. *Mallat S. G.* A Wavelet Tour of Signal Processing. — Academic Press, 1998.
8. *Денисенко А. Н.* Сигналы. Теоретическая радиотехника. Справочное пособие. — М.: Горячая линия – Телеком, 2005.
9. *Ghavamli M., Michael L. B., Kohno R.* Ultra Wideband Signals and Systems in Communication Engineering. — John Wiley & Sons, 2004.
10. *Вишневский В. М., Ляхов А. И., Портной С. Л., Шахнович И. В.* Широкополосные беспроводные сети передачи информации. — М.: Техносфера, 2005.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Аппроксимация финитными функциями и цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уиттекера–Котельникова–Шеннона	5
Введение	5
1.1. Теорема Уиттекера–Котельникова–Шеннона	8
1.2. Синтез функций с финитным спектром	14
1.3. Продолжение функций с финитным спектром	17
1.4. Теорема о полиномиальном сканировании	20
1.5. Обобщенные ряды Котельникова на основе атомарных функций..	23
1.6. Полиномы Левитана на основе АФ	26
1.7. R-функции и соотношение неопределенности для пространственных сигналов, локализованных в области сложной геометрии	28
1.8. Системы функций с двойной ортогональностью и обобщенное соотношение неопределенности	35
1.9. Функции с минимальной энергией вредного спектра	52
1.10. Кватернионы и атомарные функции в задачах сферической интерполяции и аппроксимации	68
1.11. Методы интерполяции и аппроксимации на сфере	68
1.12. Метод накопленных базисов	72
1.13. Обработка выходной телеметрической информации космического летательного аппарата (КЛА)	79
Заключение	87
Список литературы	87
Глава 2. Биспектральный анализ в приложении к цифровой обработке сигналов	92
Введение	92
2.1. Математические основы биспектральной обработки стохастических сигналов и полей	92
2.1.1. Анализ свойств корреляционных функций третьего порядка и биспектров (92). 2.1.2. Методы оценивания биспектральной плотности (98).	

2.2. Восстановление одномерных вещественных сигналов по оценкам биспектральной плотности в присутствии Гауссовых и импульсных помех	115
2.2.1 Алгоритмы сглаживания восстановленных по биспектральным данным фазового и амплитудного Фурье-спектров одномерными линейным и нелинейными фильтрами (115). 2.2.2. Сглаживание оценок биспектральной плотности двумерными линейными и нелинейными фильтрами со скользящими окнами (129). 2.2.3. Векторная фильтрация оценки биспектральной плотности восстанавливаемого сигнала (143).	
2.3. Примеры практического применения биспектрального анализа в задачах оценивания радиолокационных дальностных портретов и реставрации изображений	148
2.3.1. Оценивание радиолокационного дальностного портрета объекта на фоне помех, вызванных рассеянием от морской поверхности (148). 2.3.2. Восстановление изображения по оценкам биспектральной плотности строк с предсказаниями (159).	
Список литературы	170

Глава 3. Многопозиционные радиолокационные системы с синтезированием апертуры антенны

Введение	174
3.1. Потенциал многопозиционных РСА при решении задач дистанционного зондирования	175
3.2. Методы оптимальной и квазиоптимальной совместной обработки в многопозиционных системах дистанционного зондирования с синтезированием апертуры антенны	188
3.3. Методы обнаружения объектов в многопозиционных РСА на основании совместной обработки наблюдаемых процессов	196
3.4. Принципы и алгоритмы статистического моделирования пространственно-временных процессов и их обработки в МПРСА	201
3.5. Выбор и оптимизация пространственной конфигурации многопозиционных систем в реальном масштабе времени	207
3.5.1. Исследование влияния пространственной конфигурации и характера взаимного движения многопозиционной РСА на структуру пространственно-временных сигналов (208). 3.5.2. Оптимизация пространственной конфигурации многопозиционных РСА на основании градиентного анализа полей равного запаздывания и дельта-запаздывания (213).	
3.6. Принципы выбора ансамблей сигналов в МПРСА	218
3.6.1. Ортогональность сигналов в многопозиционной системе с синтезированием апертуры антенны с учетом их зависимости от пространственных конфигураций МПРСА, а также характера пространственно-временной обработки (218). 3.6.2. Анализ взаимных пространственных функций неопределенности и возможностей уменьшения межканальных помех в МПРСА за счет выбора ансамблей сигналов (224).	

3.7. Исследование особенностей применения шумоподобных сигналов в системах дистанционного зондирования	229
3.7.1. Исследование качественных показателей формирования РЛИ в обзорных РЛС с шумоподобными сигналами (231).	
3.7.2. Сравнение пространственных функций неопределенности и качества формирования радиолокационных изображений в РСА с различными видами сигналов (237).	
3.7.3. Использование ШПС в МПРСА (240).	
3.7.4. Выбор шумоподобных сигналов и алгоритмов их обработки с учетом особенностей решения задач ДЗ (243).	
3.8. Исследование возможности построения многопозиционных РСА, основанных на приеме сигналов навигационных систем ГЛОНАСС/GPS	247
3.8.1. Энергетический потенциал навигационных систем для решения задач дистанционного зондирования (250).	
3.8.2. Пространственные функции неопределенности и разрешающая способность многопозиционных РСА, основанных на приеме сигналов ГЛОНАСС/GPS (253).	
3.8.3. Оптимизация радиолокационного наблюдения псевдопассивными МПРСА (256).	
3.9. Когерентный режим работы бистатических систем с синтезированием апертуры антенны	259
Список литературы.....	269

Глава 4. Некоторые аспекты цифровой обработки сигналов в обзорных РЛС и РСА

274

4.1. Модифицированный метод синтеза апертуры. Особенности цифровой реализации	274
4.1.1. Синтез апертуры как оптимальная оценка коэффициента рассеяния в рамках метода максимального правдоподобия (277).	
4.1.2. Модифицированный алгоритм синтеза апертуры (280).	
4.2. Качественные показатели алгоритмов формирования и цифровой обработки первичных радиолокационных изображений в обзорных РЛС и РСА.....	287
4.2.1. Динамические ошибки формирования РЛИ (290).	
4.2.2. Флуктуационные ошибки, обусловленные спекл-структурой РЛИ (293).	
4.2.3. Шумовые ошибки формирования РЛИ, обусловленные наличием аддитивной помехи (295).	
4.3. Сравнение алгоритмов вторичной цифровой обработки радиолокационных изображений	296
4.3.1. Методы оконного сглаживания, качественные показатели РЛИ после обработки (297).	
4.3.2. Цифровые фильтры на порядковых статистиках, особенности применения для обработки изображений в системах с синтезированием апертуры (302).	
4.3.3. Адаптивные цифровые алгоритмы обработки радиолокационных изображений (305).	

4.4. Адаптивные и неадаптивные цифровые алгоритмы селекции протяженных объектов на радиолокационных изображениях земной поверхности	310
4.4.1. Особенности цифровой обработки сигналов при решении задач обнаружения. Схемная реализация систем аттестации радиолокационных систем (311). 4.4.2. Исследование неадаптивных методов обнаружения при различных алгоритмах первичной и вторичной обработки. Характеристики обнаружителей (316). 4.4.3. Синтез адаптивных систем обнаружения. Исследование качества обнаружения для различных методов первичной обработки входных процессов и изображений (322).	
4.5. Развертка фазы в цифровых интерферометрических системах с синтезированием апертуры антенны	331
Список литературы	336

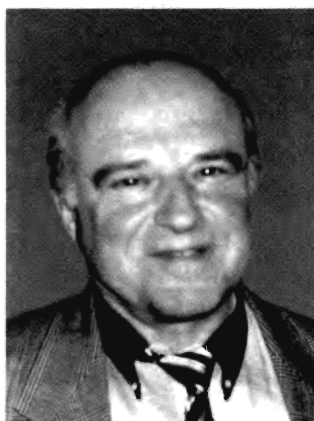
Глава 5. Слепая обработка сигналов. Методы, алгоритмы, приложения	340
Введение	340
5.1. Постановка задачи, основные приложения	340
5.2. Основные теоремы слепой идентификации	357
5.3. Слепая идентификация векторного канала	368
5.4. Слепая идентификация скалярного канала, основанная на полиномиальных статистиках	378
5.4.1. Полиномиальные статистики и их свойства (379). 5.4.2. Слепая идентификация канала, как решение системы полиномиальных уравнений (385). 5.4.3. Идентификация канала, основанная на факторизации аффинных многообразий (389). 5.4.4. Идентификация канала, основанная на использовании многообразий ненулевой корреляции (391).	
5.5. Слепая идентификация в системах связи	393
5.6. Слепое восстановление изображений радиолокационных станций с синтезированной апертурой	402
Список литературы	416

Глава 6. Аналитическое описание локусов сложной формы R-операциями и атомарными функциями. Цифровая обработка сигналов и изображений	421
Введение	421
6.1. Обратная задача аналитической геометрии и метод R-функций ..	421
6.2. Частично нормализованные уравнения	424
6.3. Локусы и финитные функции	426
6.4. Заполнение внутренней области локусов	431
6.5. Раскрой локусов	433
6.6. Комбинированные локусы	433

6.7. Контурный и структурный анализ изображений	455
6.8. Построение двумерных фильтров для цифровой обработки изображений весовыми функциями (окнами) Кравченко	463
6.8.1. Синтез двумерных КИХ-фильтров (463).	
Заключение	468
Список литературы	525

Глава 7. Аналитические вейвлеты Кравченко–Котельникова и Кравченко–Левитана в цифровой обработке сверхширокополосных сигналов	470
Введение	470
7.1. Вейвлет-преобразования	470
7.2. Обобщенные ряды Котельникова на основе атомарных функций (АФ)	471
7.3. Весовая функция (окно) Кравченко–Котельникова	476
7.4. Весовая функция Кравченко–Левитана	481
7.5. Вейвлет-модулированные весовые функции Кравченко–Котельникова и Кравченко–Левитана	484
7.6. Физические характеристики СШП сигналов	486
7.7. Численный эксперимент и анализ физических результатов	488
7.8. Построение весовых функций (окон): Кравченко–Котельникова–Гаусса и Кравченко–Левитана–Гаусса	501
7.9. Модели сверхширокополосных (СШП) сигналов	508
7.10. Функционал качества выбора вейвлетного базиса для анализа СШП сигналов	513
Заклучение	525
Список литературы	525

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ



Кравченко Виктор Филиппович

Заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук. Профессор кафедр “Радиофизика и твердотельная электроника” МФТИ и “Высшая математика” ФН-1 МГТУ им. Н.Э. Баумана. Главный научный сотрудник Института радиотехники и электроники РАН.



Басараб Михаил Алексеевич

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры “Теоретическая информатика и компьютерные технологии” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Автор и соавтор более 100 печатных работ, включая 4 монографии.

Область научных интересов: прикладная и вычислительная математика, моделирование и цифровая обработка сигналов в гироскопии, методы искусственного интеллекта.



Горячкин Олег Валериевич

Доктор технических наук, заведующий кафедрой “Теоретические основы радиотехники и связи” Поволжской государственной академии телекоммуникаций и информатики (ПГАТИ).

Автор более 110 научных работ.

Область научных интересов: цифровая обработка сигналов в системах радиотехники и связи, радиофизические методы дистанционного зондирования Земли, радиолокация с синтезированием апертуры антенны, слепая идентификация систем, прикладная статистика.



Волосюк Валерий Константинович

Доктор технических наук, профессор кафедры “Радиоэлектронные системы летательных аппаратов” Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”.

Область научных интересов: пространственно-временная обработка сигналов, дистанционное зондирование природных сред.



Зеленский Александр Алексеевич

Доктор технических наук, заведующий кафедрой “Прием, передача и обработка сигналов” Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”.

Автор более 200 научных работ и изобретений в области формирования и обработки многочастотных сигналов и полей в многоканальных системах передачи информации, дистанционного зондирования и связи.

**Ксендзук Александр Владимирович**

Доктор технических наук, доцент Национального аэрокосмического университета им. Н. Е. Жуковского "ХАИ".

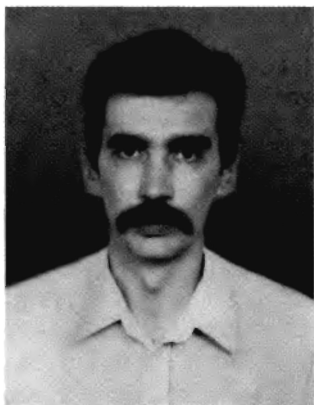
Автор 80 научных работ по теории построения многопозиционных многоспутниковых РСА.

Область научных интересов: многоспутниковые авиационно-космические РСА, оптимальная обработка многомерных сигналов, интерферометры с синтезом апертуры, навигационные системы.

**Кутуза Борис Георгиевич**

Доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией ИРЭ РАН "Аэрокосмические радиофизические исследования окружающей среды", профессор кафедры "Физико-математические проблемы волновых процессов" МФТИ.

Лауреат Государственных премий СССР (1987 г.) и Российской Федерации (2000 г.)

**Лукин Владимир Васильевич**

Доктор технических наук, профессор кафедры "Прием, передача и обработка сигналов" Национального аэрокосмического университета им. Н. Е. Жуковского "ХАИ". Член программного комитета международной конференции "Нелинейная обработка изображений" симпозиума SPIE Photonics West, Сан Хосе, США.

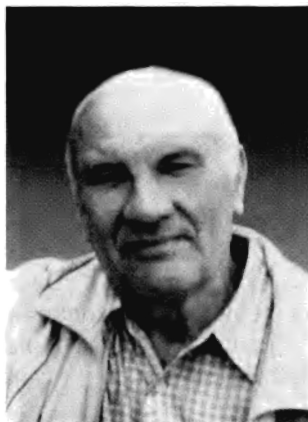
Автор более 60 статей и более 200 докладов в трудах конференций различного уровня.

Область научных интересов: цифровая обработка сигналов и изображений в системах дистанционного зондирования.

**Тоцкий Александр Владимирович**

Кандидат технических наук, доцент кафедры "Прием, передача и обработка сигналов" Национального аэрокосмического университета имени Н.Е. Жуковского "ХАИ".

Автор более 60 научных трудов в области цифровой обработки сигналов и методов биспектрального оценивания случайных процессов.

**Яковлев Виталий Павлович**

Доктор физико-математических наук, профессор Российского Государственного Университета нефти и газа им. И.М. Губкина. Один из основателей теории синтеза антенн. Один из разработчиков измерительного комплекса космической системы дистанционного зондирования "Океан". Автор ряда основополагающих исследований в области статистической радиофизики. В настоящее время разрабатывает теорию распространения электромагнитных и акустических наноимпульсов.

Научное издание

*БАСАРАБ Михаил Алексеевич
ГОРЯЧКИН Олег Валерьевич
КРАВЧЕНКО Виктор Филиппович
КУТУЗА Борис Георгиевич
ТОЦКИЙ Александр Владимирович*

*ВОЛОСЮК Валерий Константинович
ЗЕЛЕНСКИЙ Александр Алексеевич
КСЕНДЗУК Александр Владимирович
ЛУКИН Владимир Васильевич
ЯКОВЛЕВ Виталий Павлович*

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ В РАДИОФИЗИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Под редакцией В. Ф. Кравченко

Редактор *С.А. Тюрина*
Оригинал-макет: *Е.А. Королева*
Оформление переплета: *Д.Б. Белуха*

Подписано в печать 30.07.07. Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 44,07. Уч.-изд. л. 44,07. Тираж 1500 экз.
Заказ № 1139

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ООО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 978-5-9221-0871-3



9 785922 108713

DIGITAL SIGNAL AND IMAGE PROCESSING IN RADIO PHYSICAL APPLICATIONS

**V.F. Kravchenko, M.A. Basarab, O.V. Goryachkin,
V.K. Volosyuk, A.A. Zelenskii, A.V. Ksendzuk, B.G. Kutuza,
V.V. Lukin, A.V. Totskii, V.P. Yakovlev**

Abstract. In the monograph, the new perspective trends of digital signal processing with their applications to radio physics and radio engineering problems are considered. The monograph consists of five chapters. The new methods of signal approximation on the basis of the Whittaker-Kotelnikov-Shannon theorem with using the compactly supported functions, including a new class of atomic ones, are considered in the first chapter. The second chapter is devoted to the use of the bispectral analysis in digital signal processing. The third chapter is devoted to multiposition radar systems with synthetic antenna aperture. Some aspects of digital signal processing in radars and SAR are surveyed in the fourth chapter. The fifth chapter is devoted to the development of new mathematical methods, algorithms, and their applications to the blind signal processing. The sixth chapter consists of two parts. Its first part is devoted to the theory of R-functions and atomic functions (AF) with reference to the description of random shaped locuses. In the second part, the construction of Kravchenko 2D weight functions (windows) on the basis of irregular shape areas for digital multidimensional signal and image processing, resulting from the first part, is under consideration. Chapter 7 consists of three parts. In the first part the foundation of wavelet transform, generalize Kotelnikov series and Levitan polynomial, which constructing on basis of atomic functions (AF) are studied. In the second part the new class analytical wavelets Kravchenko-Kotelnikov and Kravchenko-Levitan is considered. The third part is consecrate to formation of quality functional. The numerical experiment and physical analysis illustrated effectiveness of this approach for digital ultra wideband (UWB) signal processing.

The monograph is recommended for scientists, students and post-graduates specializing in radio physics, radio engineering, computational mathematics, and computational physics.

About the authors

Kravchenko Victor F. Honored Scientist of the Russian Federation, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief researcher of Institute of Radio Engineering and Electronics (IRE) RAS, Professor of the chair of radio physics and solid-state electronics of Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT) and the chair of higher mathematics FN-1 of Bauman Moscow State Technical University (BMSTU). Fields of scientific interests: applied mathematics, R-functions, atomic functions, radio physics, digital signal processing, superconductivity. Author of 16 monographs.

Basarab Mikhail A. Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the chair of theoretical informatics and computer technologies of Bauman Moscow State Technical University, Leading researcher of BMSTU. Fields of scientific interests: applied and computational

mathematics, modeling and digital signal processing in gyroscopy, methods of artificial intelligence. Author of more than 100 publications including 6 monographs.

Goryachkin Oleg V. Dr. Sci. (Eng.), Head of the chair of theoretical foundations of radio engineering and communication of Povolzhskaya State Academy of Telecommunications and Informatics (PGATI). Fields of scientific interests: digital signal processing in radio engineering and communication systems, radio physical methods of Earth remote sensing, synthetic aperture radar (SAR), blind identification of systems, applied statistics. Author of more than 110 publications.

Volosyuk Valerii K. Dr. Sci. (Eng.), Professor of the chair of aircraft radio electronic systems of the Kharkov National Air-Space University (KhAI) named after N.E. Zhukovskii. Fields of scientific interests: space-time signal processing, remote sensing of natural media.

Zelenskii Aleksandr A. Dr. Sci. (Eng.), Head of the chair of signal acceptance, transmission, and processing of the Kharkov National Air-Space University (KhAI) named after N.E. Zhukovskii. Fields of scientific interests: forming and processing of multifrequency signals and fields in multichannel information transmitting systems, remote sensing, communication. Author of more than 200 publications.

Ksendzuk Aleksandr V. Dr. Sci. (Eng.), Assistant professor of the Kharkov National Air-Space University (KhAI) named after N.E. Zhukovskii. Fields of scientific interests: multisatellite air-space synthetic aperture radar (SAR), optimal processing of multidimensional signals, synthetic aperture interferometry, navigation systems.

Kutuza Boris G. Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the laboratory of air-space radio physical investigation of environment of Institute of Radio Engineering and Electronics (IRE) RAS, Professor of the chair of physical-mathematical problems of wave processes of Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT). Fields of scientific interests: radio physics, remote sensing. Laureate of USSR State Prize (1987) and Russian Federation State Prize (2000).

Lukin Vladimir V. Dr. Sci. (Eng.), Professor of the chair of signal acceptance, transmission, and processing of the Kharkov National Air-Space University (KhAI) named after N.E. Zhukovskii, Member of the Program Committee of International Conference "Nonlinear Signal Processing" of SPIE Photonics West Symposium, San-Jose, U.S.A. Fields of scientific interests: digital signal and image processing in remote sensing systems. Author of more than 260 publications.

Totskii Aleksandr V. Cand. Sci. (Eng.), Assistant professor of the chair of signal acceptance, transmission, and processing of the Kharkov National Air-Space University (KhAI) named after N.E. Zhukovskii. Fields of scientific interests: digital signal processing, methods of bispectral estimation of random processes. Author of more than 60 publications.

Yakovlev Vitalii P. Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of Russian State University of Oil and Gas named after I.M. Gubkin. He is one of the creators of the theory of antenna synthesis and one of the developers of measuring complex of the space remote sensing system "Okean". Fields of scientific interests: theory of antenna synthesis, statistical radio physics, the theory of electromagnetic and acoustic nanoimpulses propagation.

"In the communication engineering, at transmitting various signals, we usually deal with functions of time, whose spectrum is compactly supported, i.e., it does not contain frequencies higher than some limiting frequency. Such functions possess a unique property, first established in 1933 by V. A. Kotelnikov and expressed in the theorem playing a fundamental role in the communication theory and, in particular, in the impulse communication."

Academician A. A. Kharkevich

PREFACE

This book is based on the authors' original results got by them lately. Undoubtedly, its readers are to be aware of both the theory of digital signal processing (DSP) of various physical nature and the classical Whittaker-Kotelnikov-Shannon theorem.

In **Chapter 1** the new methods of signal approximation with the use of the compactly supported functions, including a new class of atomic ones (AF), based on the Whittaker-Kotelnikov-Shannon theorem, are considered and based.

Chapter 2 is devoted to the bispectrum analysis and its applications. It is demonstrated that the bispectrum analysis can serve as a sensitive and precise means, allowing to expose and measure deviations of the processes under investigation from the normal distribution law. Therefore, in a number of applied problems of radiolocation, hydrolocation, astronomy, technical diagnostics of machines and mechanisms, medical diagnostics etc. the bispectrum analysis often serves as the only effective means of digital signal processing and estimation of parameters of the processes under investigation.

In **Chapter 3** the problems of constructing a new generation of multiposition antenna aperture radar system are under consideration. The ever-growing requirements for the systems of remote sensing (RS) and, in particular, for the precision, reliability, opportunity to get data on the condition of a minimal area of shadow zones, efficiency and frequency of observing led to the necessity of creating a system of global monitoring of the Earth surface. Such a global RS system of aerospace basing, that is able to meet the highest requirements for the quality of the resultant data, is a multiposition radar system with synthetic aperture (MPRSA). This term was firstly introduced in the works by A. V. Ksendzuk. The material presented in this chapter is the generalization of the author's investigations. He stresses on the methods and algorithms of processing that could be easily integrated digitally or as programs applied to the RS systems or ground radar processing stations.

In **Chapter 4** the peculiarities of the primary and secondary digital processing in RSA with a view of their stochastic and non-stationary character are considered. Methods of creating digital equipment for certification are suggested, the quality coefficients of RS systems are developed and investigated. The peculiarities of the secondary digital processing of radar images and the mechanism of defining dynamic, fluctuation, noise and general errors of unit effective diameter of scattering (UEDS) in scattermetric RSA are demonstrated. Some algorithms of radar images interpretation (detection of the extended objects, resulting from radar observations) are investigated as well as the digital methods of phase scan in interferometric systems with synthetic aperture are developed and investigated.

In **Chapter 5** today's theory, methods and algorithms of the blind signal processing (BSP) and also some applications for solving the problems of channel communication with scattering and space radiolocation are presented. Here the problem of "blind processing" is formulated as digital processing of unknown signals passing through a linear channel with unknown characteristics on the background of additive noises. It often appears in various DSP and image applications in the systems of radioengineering, including those of radar systems, radio navigation, radio astronomy, digital TV, in the systems of radiocommunication, in the problems of digital processing of speech, images, in medicine, in geophysics etc.

Chapter 6 consists of two parts. In the first part the theory of R-functions and AFs with reference to the description of arbitrary shaped locuses, and in the second part, resulting from the first one, Kravchenko 2D weight functions (windows) on the basis of irregular shape areas for digital multidimensional signal and image processing are constructed.

Chapter 7 consists of three parts. In the first part the foundation of wavelet transform, generalize Kotelnikov series and Levitan polynomial, which constructing on basis of atomic functions (AF) are studied. In the second part the new class analytical wavelets Kravchenko–Kotelnikov and Kravchenko–Levitan is considered. The third part is consecrate to formation of quality functional. The numerical experiment and physical analysis illustrated effectiveness of this approach for digital ultra wideband (UWB) signal processing.

A group of authors took part in writing the monograph: M.A. Basarab, V.F. Kravchenko, V.P. Yakovlev (Ch. 1), A.A. Zelensky, V.V. Lukin, A.V. Totsky (Ch. 2), A.V. Ksendzuk (Ch. 3), V.K. Volosyuk, V.F. Kravchenko, A.V. Ksendzuk, V.G. Kutuza (Ch. 4), O.V. Goryachkin (Ch. 5), V.F. Kravchenko (Ch. 6 and 7).

We are grateful to D.V. Churikov and A.V. Yurin for the assistance in the design of the book, in particular, of Chapters 6 and 7.

Honored Scientist of the Russian Federation,
Dr. of Phys.-Math. Sci.,
Professor *V.F. Kravchenko*

CONTENTS

Preface	3
Chapter 1. Approximation by finite functions and digital signal processing on the basis of Whittaker-Kotelnikov-Shannon theorem	5
Introduction	5
1.1. Whittaker-Kotelnikov-Shannon theorem	8
1.2. Synthesis of functions with finite spectrum	14
1.3. Continuation of functions with finite spectrum	17
1.4. Theorem of polynomial scanning	20
1.5. Kotelnikov generalized series on the basis of atomic functions	23
1.6. Levitan polynomial on the AF basis	26
1.7. R-functions and the relationship of uncertainty for the space signals, localized in the complex shaped areas	28
1.8. Systems of functions with double orthogonality and generalized relationship of uncertainty	35
1.9. Functions with minimum energy of damaging spectrum	52
1.10. Quaternions and atomic functions in the problems of spherical interpolation and approximation	68
1.11. Methods of interpolation and approximation on the sphere	68
1.12. Method of accumulated bases	72
1.13. Processing of spacecraft (SC) output telemetric data	79
Conclusion	87
References	87
Chapter 2. Bispectrum analysis in application to digital signal processing	92
Introduction	92
2.1. Mathematical bases of stochastic signal and field bispectrum processing	92
2.1.1. Analysis of properties of the 3-rd order correlation functions and bispectrum (92). 2.1.2. Bispectrum density estimation techniques (98).	

2.2. Reconstruction of 1D real-valued signals by bispectrum density estimates in the presence of Gaussian and pulse interference	115
Algorithms of smoothing the phase and magnitude Fourier spectra reconstructed from bispectrum estimates by using 1D linear and nonlinear filters (115). 2.2.2. Smoothing of bispectrum density estimates by 2D linear and nonlinear filters with sliding windows (129). 2.2.3. Vector filtering of reconstructed signal bispectrum density estimate (143).	
2.3. Experimental examples of using bispectrum analysis for radar range profiles estimations and image reconstruction	148
2.3.1. Radar range profile estimation in interference background caused by sea surface backscattering (148). 2.3.2. Image reconstruction by using bispectrum density estimates of the pre-distorted image lines (159).	
References	170

Chapter 3. Multiposition radar systems with antenna aperture synthesizing	174
Introduction	174
3.1. The potential of multiposition RSA in solving the problems of remote sensing	175
3.2. Methods of optimal and quasioptimal common processing in multiposition systems of remote sensing with antenna aperture synthesizing	188
3.3. Detection of objects in multiposition RSA on the basis of common processing of observed processes	196
3.4. Principles and algorithms of statistic space-time process modeling and their processing in MPRSA	201
3.5. Selection and optimization of spatial configuration of multiposition systems in real time	207
3.5.1. Investigation of the influence of spatial configuration and character of mutual movement of multiposition RSA on the structure of space-time signals (208). 3.5.2. Optimization of spatial configuration of multiposition RSA on the basis of gradient analysis of fields of equal and delta retarding (213).	
3.6. Principles of signal ensembles selection in MPRSA	218
3.6.1. Signal orthogonality in the multiposition system with synthesizing antenna aperture with a view of their dependence on both MPRSA spatial configuration and the character of space-time processing (218). 3.6.2. Analysis of mutual spatial functions of uncertainty and possibilities of reducing interchannel interferences in MPRSA at the expense of signal ensembles selection (224).	

3.7. Investigation of peculiarities of noise-like signal application in the remote sensing systems	229
3.7.1. Investigation of quality coefficients of radar image forming in surveyed radar with noise-like signals (231). 3.7.2. Comparison of spatial functions of uncertainty and the quality of forming radar images in RSA with various kinds of signals (237). 3.7.3. Broadband signal (BS) application in MPRSA (240). 3.7.4. Selection of noise-like signals and algorithms of their processing with a view of the peculiarities of solving remote sensing (RS) problems (243).	
3.8. Investigation of possibilities of constructing multiposition RSA based on signal reception of GLONASS/GPS navigation systems	247
3.8.1. Energy potential of navigation systems for solving the problems of remote sensing (250). 3.8.2. Spatial functions of uncertainty and the resolution of multiposition RSA based on the GLONASS/GPS signal reception (253). 3.8.3. Optimization of radar observations by pseudo-passive MPRSA (256).	
3.9. Coherent operation mode of bistatical systems with antenna aperture synthesizing	259
References	269

Chapter 4. Some aspects of digital signal processing in surveyed Radar and RSA

274

4.1. Modified method of aperture synthesizing. Peculiarities of digital realization	274
4.1.1. Aperture synthesis as optimal estimation of scattering coefficient in the limits of maximum veracity method (277). 4.1.2. Modified algorithm of aperture synthesizing (280).	
4.2. Quality coefficients of algorithms of forming and digital processing of primary radar images in surveyed radar and RSA	287
4.2.1. Dynamic errors of radar images forming (290). 4.2.2. Fluctuation errors caused by radar images spectrum structure (293). 4.2.3. Noise errors of radar images forming caused by the presence of an additive interference (295).	
4.3. Comparison of algorithms of secondary digital radar images processing	296
4.3.1. Methods of window sliding , radar images quality coefficients after processing (297). 4.3.2. Digital filters on order statistics, peculiarities of application to image processing in the synthesizing aperture systems (302). 4.3.3. Adaptive digital algorithms of radar image processing (305).	

4.4. Adaptive and non-adaptive digital algorithms of selecting extended objects on radar images of the Earth surface.....	310
4.4.1. Peculiarities of digital signal processing in solving the problems of detection. Circuit realization of the systems of radar system certification (311). 4.4.2. Investigation of non-adaptive methods of detection at various algorithms of primary and secondary processing. Characteristics of detectors (316). 4.4.3. Synthesis of adaptive detection systems. Investigation of the detection quality for various methods of primary processing of output processes and images (322).	
4.5. Phase scan in digital interferometric systems with antenna aperture synthesizing.....	331
References.....	336

Chapter 5. Blind signal processing. Methods, algorithms, applications.....

Introduction	340
5.1. Formulation of the problem, principle applications.....	340
5.2. Principle theorems of blind identification.....	357
5.3. Blind identification of vector channel.....	368
5.4. Blind identification of scalar channel based on polynomial statistics.	378
5.4.1. Polynomial statistics and their properties (379). 5.4.2. Blind channel identification as solving the system of polynomial equations (385). 5.4.3. Channel identification based on the factorization of affinor diversities (389). 5.4.4. Channel identification based on the use of diversities of nonzero correlation (391).	
5.5. Blind identification in telecommunication systems.....	393
5.6. Blind image reconstruction of radar stations with synthesized aperture.....	402
References.....	416

Chapter 6. Analytic description of complex shaped locuses by R-operations and atomic functions. Digital signal and image processing.....

Introduction	421
6.1. Inverse problem of analytic geometry and R-function method.....	421
6.2. Partially normalized equations.....	424
6.3. Locuses and finite functions	426
6.4. Filling of the inner locus area	431
6.5. Locus laying out	433
6.6. Combined locuses	433
6.7. Circuit and structure analysis of images.....	455

6.8. Construction of 2 D filters for digital image processing by Kravchenko weight functions (windows)	463
6.8.1. Synthesis of 2D FIR-filters (463).	
Conclusion	468
References	525

Chapter 7. Analytical wavelets Kravchenko–Kotelnikov and Kravchenko–Levitan in the digital ultra wideband signal processing	470
Introduction	470
7.1. Wavelet transforms	470
7.2. Generalize Kotelnikov series on basis of atomic functions (AF)	471
7.3. Kravchenko–Kotelnikov weight function (window)	476
7.4. Kravchenko–Levitan weight function (window)	481
7.5. Wavelet modulated Kravchenko–Kotelnikov and Kravchenko–Levitan weight functions (windows)	484
7.6. Physical characteristics of ultra wideband (UWB) signals	486
7.7. The numerical experiment and analysis of physical results	488
7.8. Constructing of Kravchenko–Kotelnikov–Gauss and Kravchenko–Levitan–Gauss weight functions	501
7.9. The models of UWB signals	508
7.10. Quality functional for selection of wavelet basis for analysis of UWB signals	513
Conclusion	525
References	525

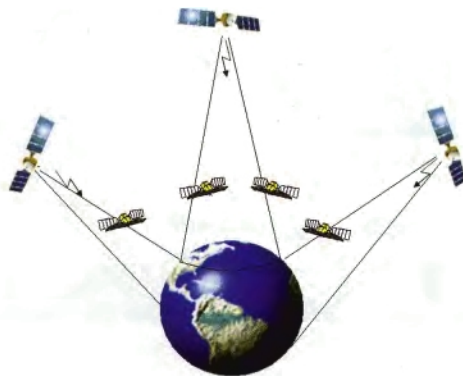


Рис. 3.5. Использование геостационарных передатчиков в МПРСА

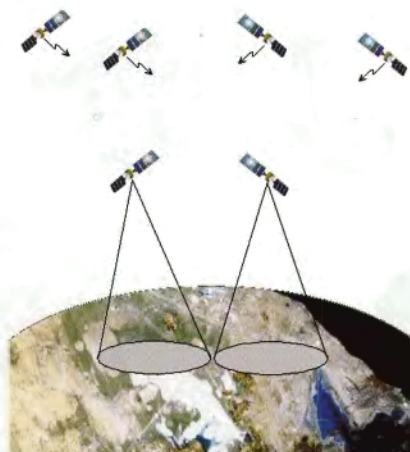


Рис. 3.6. Псевдопассивная МПРСА

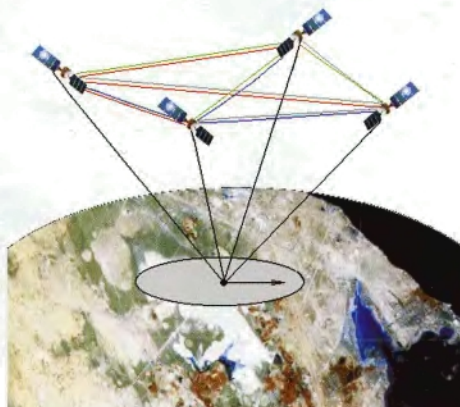


Рис. 3.8. Многобазовый интерферометр

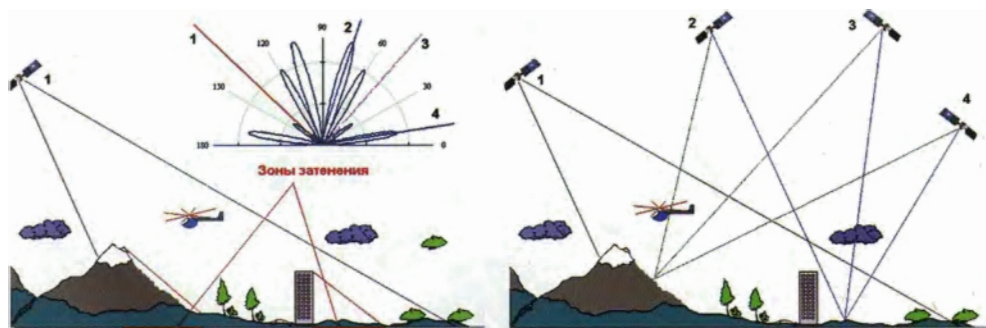


Рис. 3.11. Преимущества МПРСА при обнаружении объектов

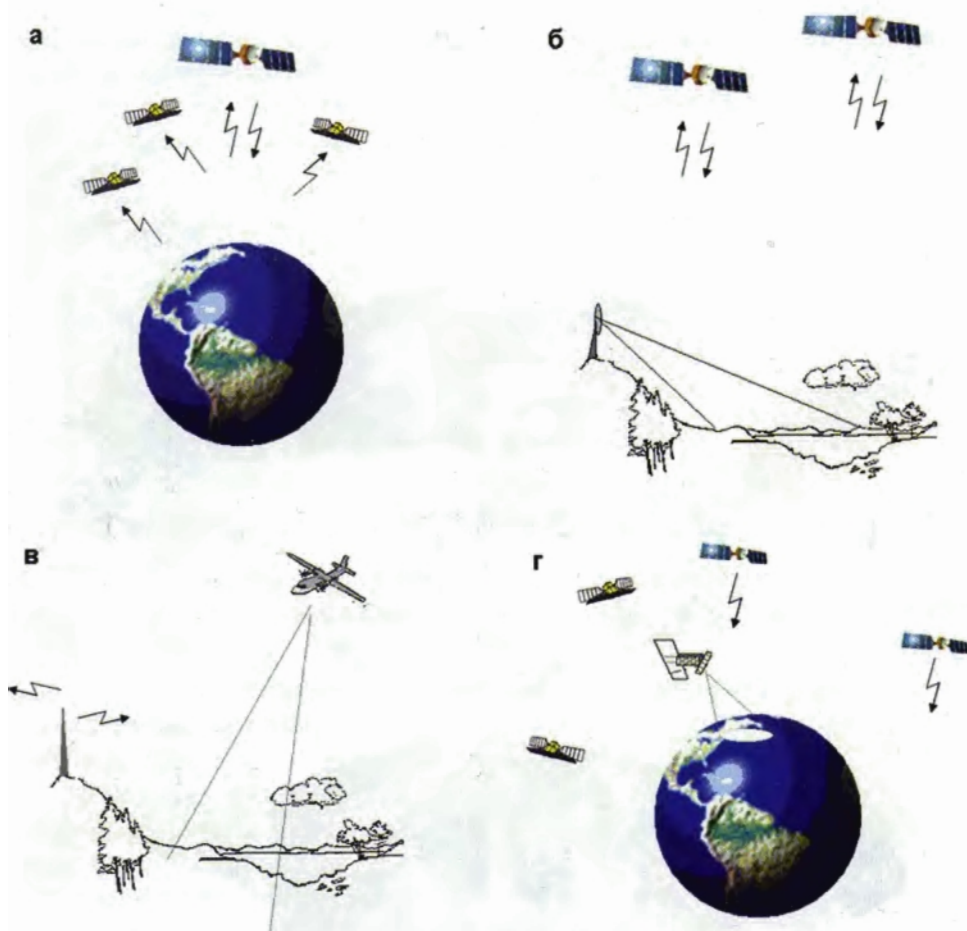


Рис. 3.47. Варианты практического построения многопозиционной РСА

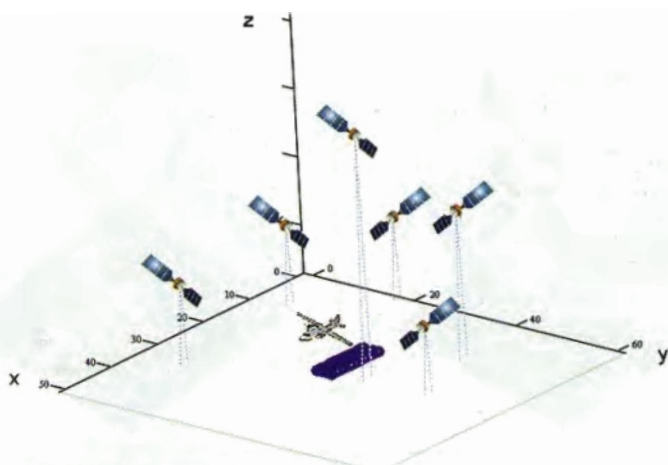


Рис. 3.62. Пространственная конфигурация МПРСА

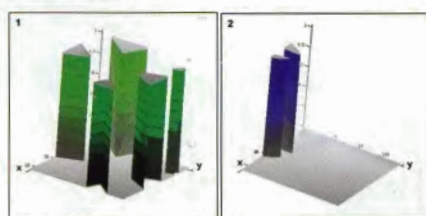


Рис. 3.63. Оптимизация по модулю градиентов к линиям равных запаздываний и равного доплеровского сдвига частоты (1.40):
1 – для всех, 2 – для 4 излучателей

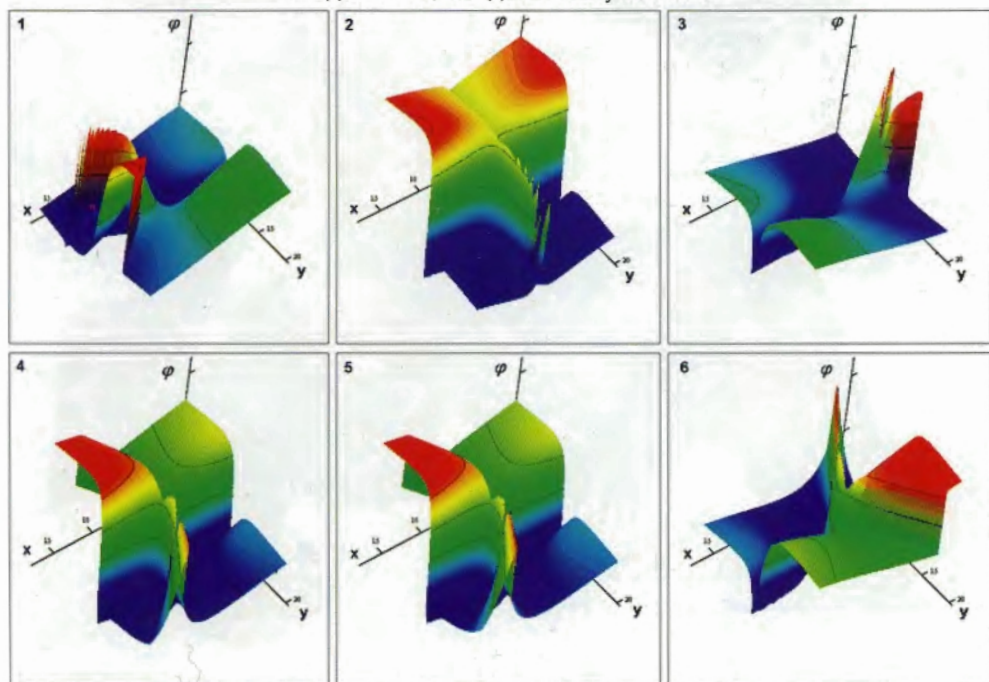


Рис. 3.64. Зависимость нормированного угла между градиентами для бистатических пар, номер передатчика соответствует номеру графика

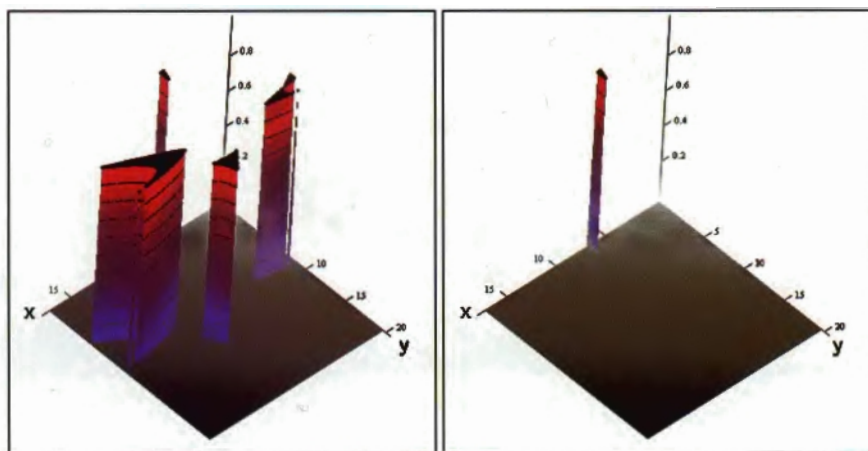


Рис. 3.65. Результат выбора области обзора только по углу между градиентами

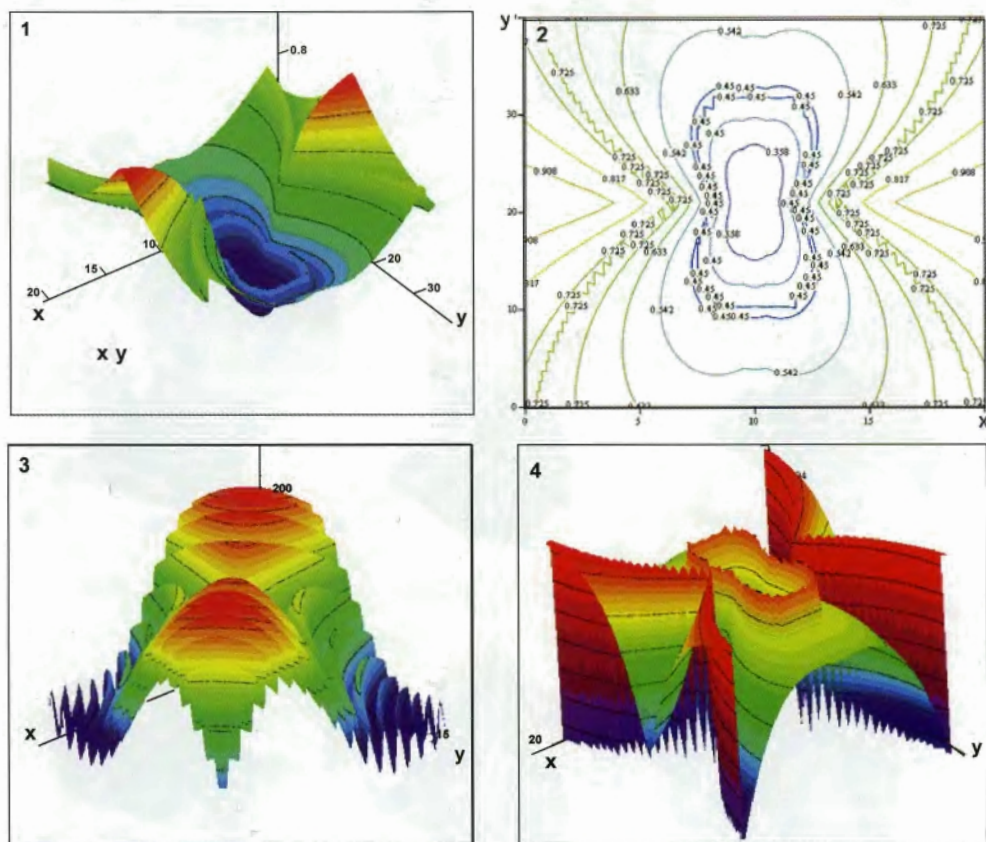


Рис. 3.67. Выбор области обзора для МПРСА. 1, 2 – нормированная величина μ_z для модели поверхности; 3, 4 – разность μ_z при учете и без учета модели поверхности

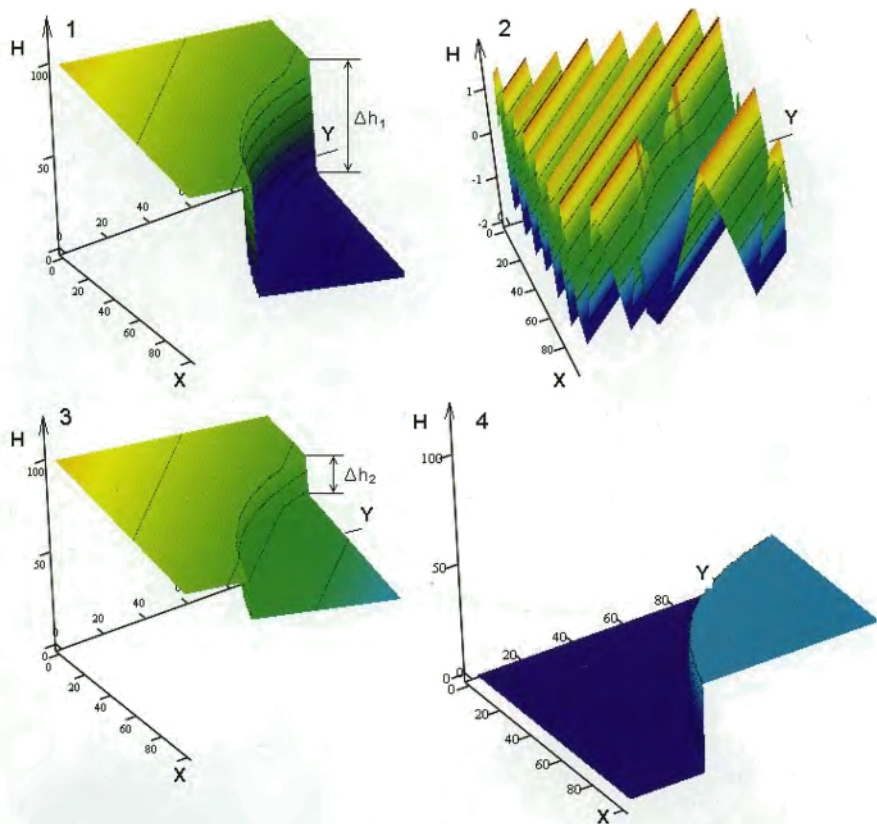


Рис. 4.57. Восстановление высоты: 1 – поведение высоты $h(r)$; 2 – функция $\arccos \left(\cos \left\{ kD \frac{H - h(r)}{R_0(r)} \right\} \right)$; 3 – результат оценки $\hat{h}(r)$; 4 – ошибка оценки высоты

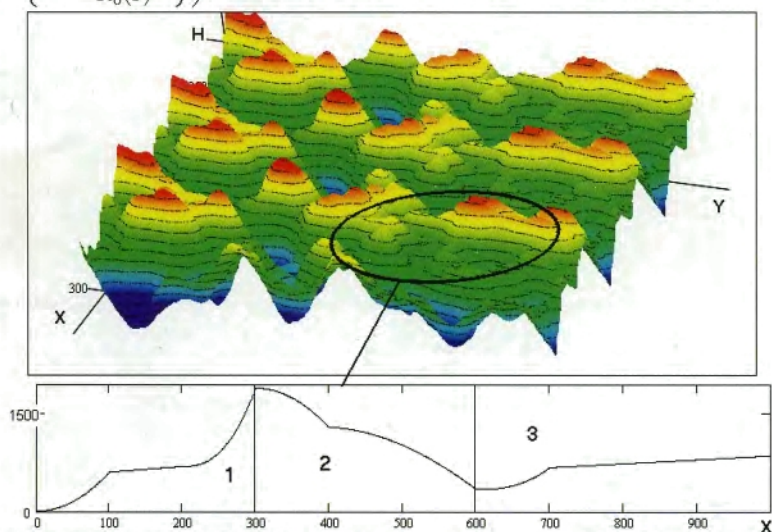


Рис. 4.58. Поведение высоты рельефа поверхности и ее сечение в дальномерной плоскости. 1,3 – области монотонного увеличения высоты; 2 – область монотонного уменьшения

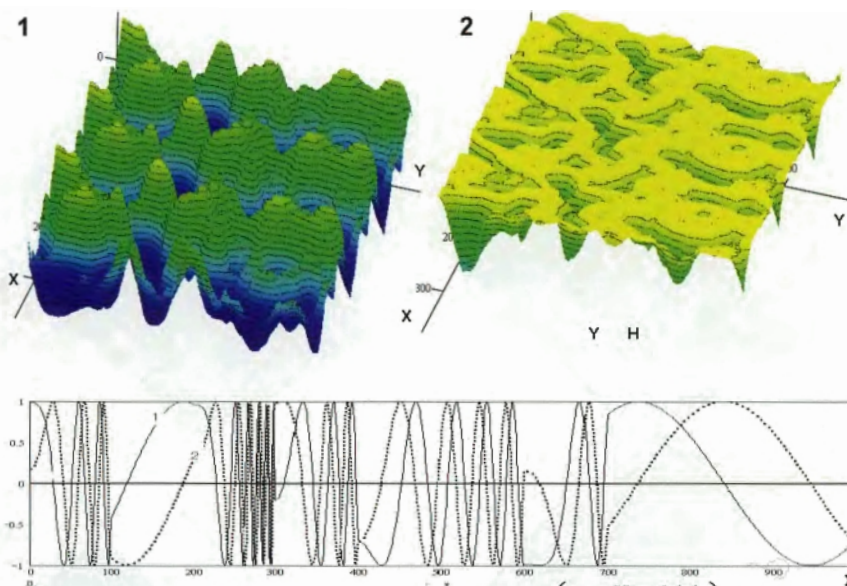


Рис. 4.59. Поведение функции $\cos \left\{ kD \frac{H - h(\mathbf{r})}{R_0(\mathbf{r})} \right\}$ (1) и ее производной (2), соответствующие рис. 4.58

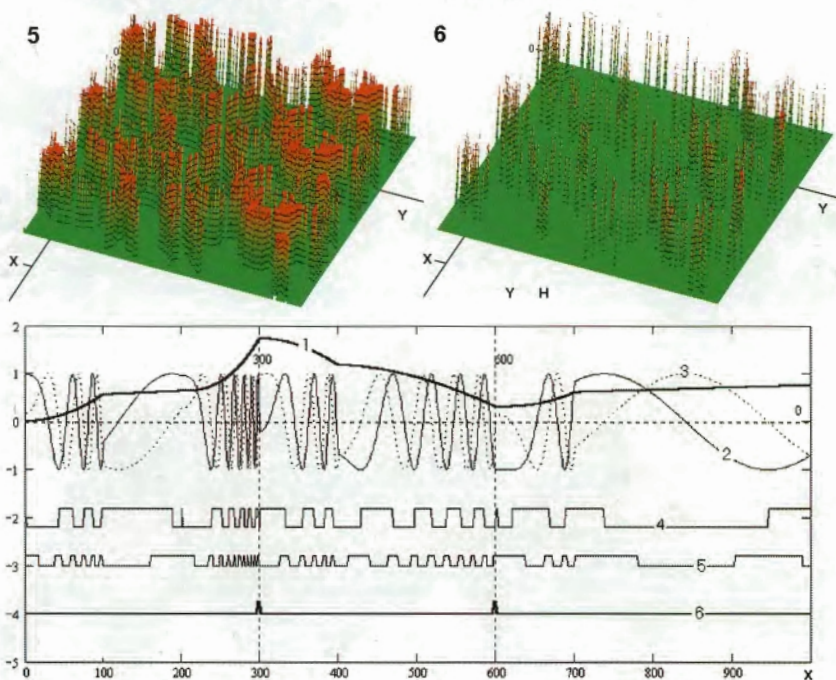


Рис. 4.60. Результаты работы алгоритма (4.59):
 1 – высота рельефа как функция пространственных координат;
 2 – функция $\cos \left\{ kD \frac{H - h(\mathbf{r})}{R_0(\mathbf{r})} \right\}$; 3 – производная 2; 4 – $\text{sign} \left\{ \frac{d^2 \hat{\Omega}(\mathbf{r})}{dr^2} \right\}$;
 5 – функция $\text{not max} \left\{ \cos \left(kD \frac{H - h(\mathbf{r})}{R_0(\mathbf{r})} \right) \right\}$; 6 – результат применения алгоритма (4.57)

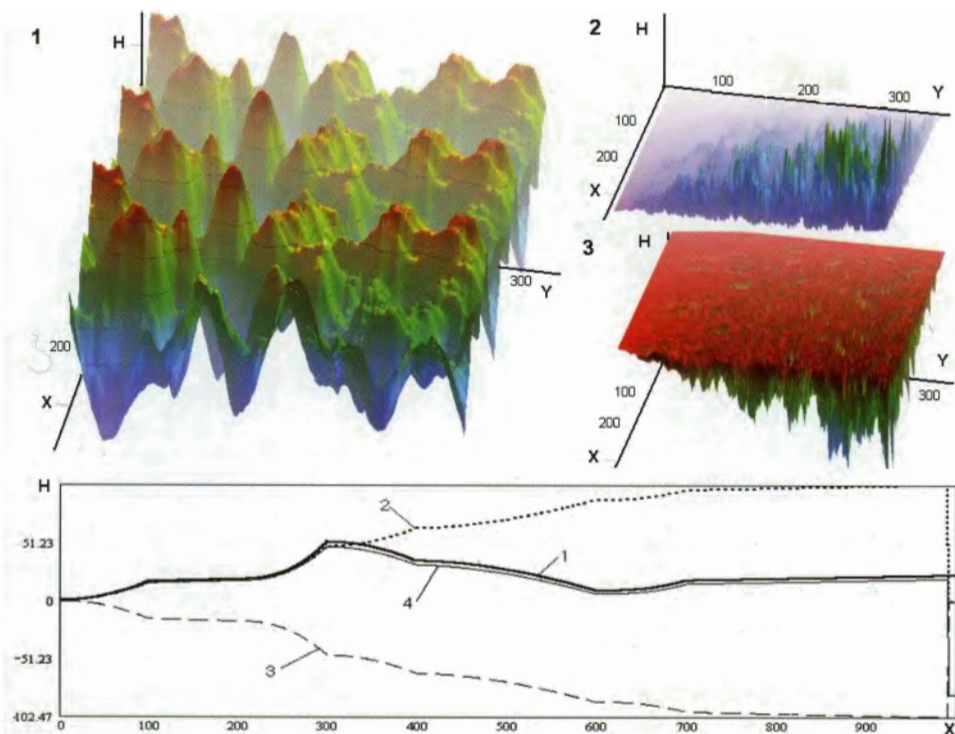


Рис. 4.61. Результаты развертки абсолютной фазы: 1 – поведение высоты рельефа поверхности как функции пространственных координат; 2 – результат развертки в соответствии с (4.58) при использовании знака «+»; 3 – результат развертки в соответствии с (4.58) при использовании знака «-»; 4 – результат корректной развертки фазы

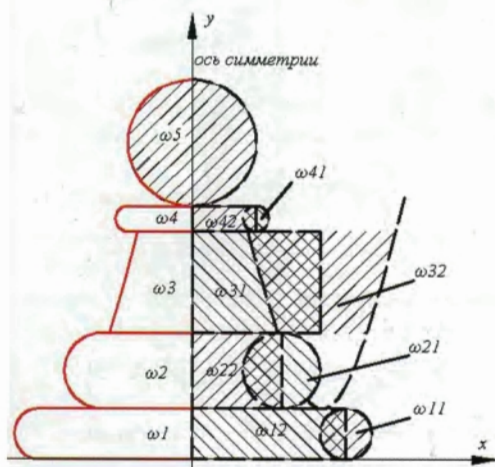


Рис. 6.14. Пешка

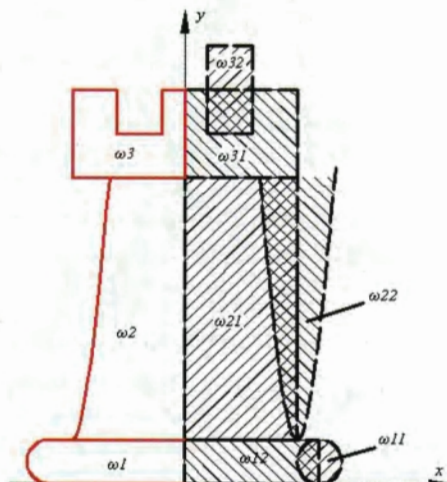


Рис. 6.17. Ладья

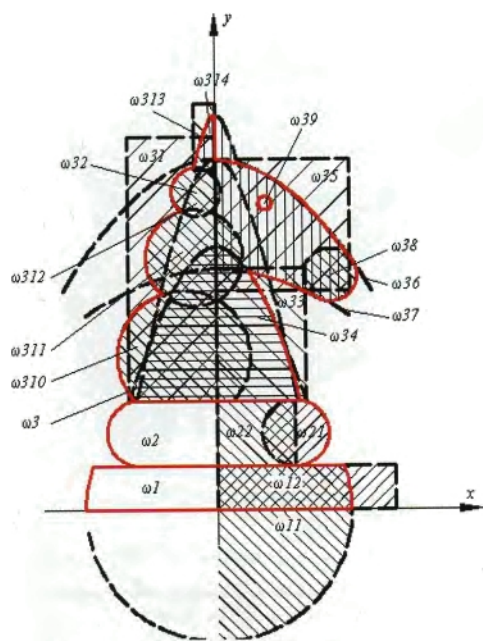


Рис. 6.20. Конь

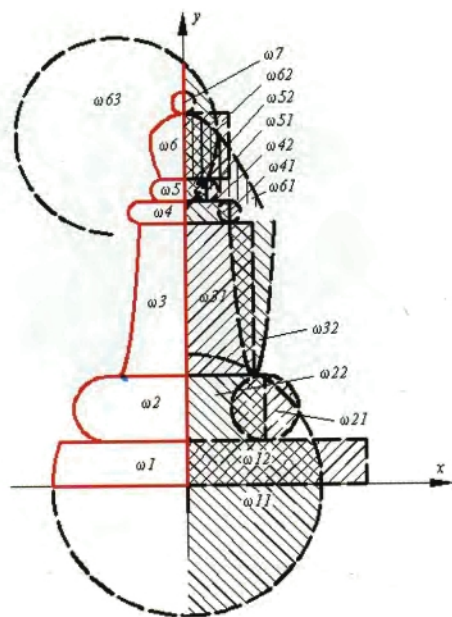


Рис. 6.23. Слон

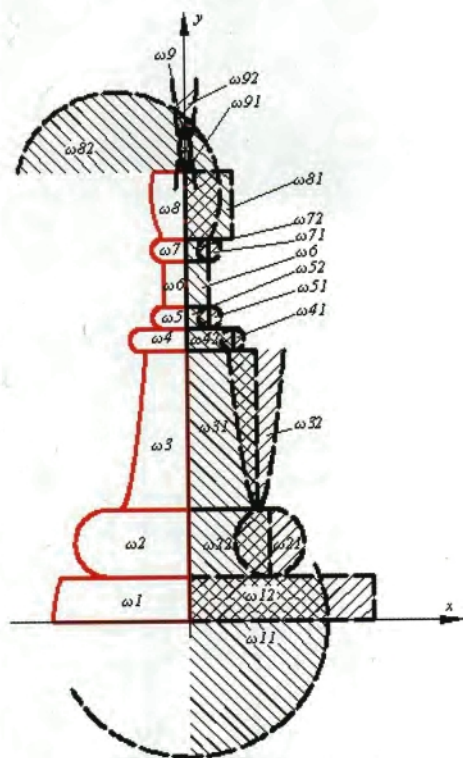


Рис. 6.26. Ферзь

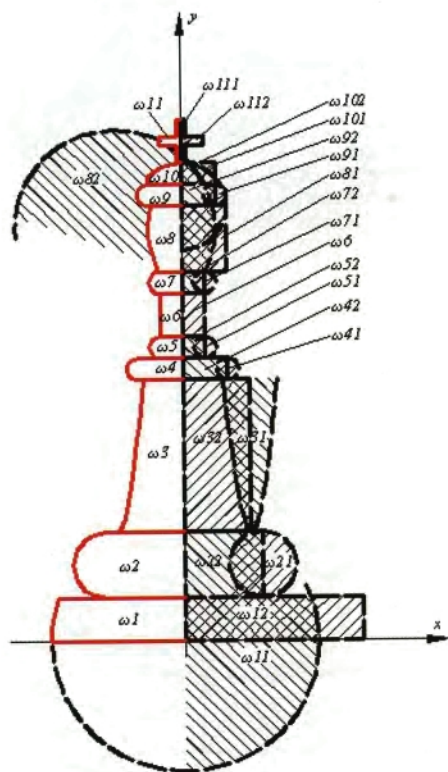


Рис. 6.29. Король