

**ТРУДЫ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНЫХ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

Выпуск 9

**МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ**

Петрозаводск 2009

Карельский научный центр
Российской академии наук
Институт прикладных
математических исследований

Karelian Research Center of
the Russian Academy of Sciences
Institute of Applied
Mathematical Research

ТРУДЫ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Методы математического моделирования
и информационные технологии

Выпуск 9

Петрозаводск
2008

PROCEEDINGS OF THE INSTITUTE OF
APPLIED MATHEMATICAL RESEARCH

Methods of mathematical modeling
and information technologies

Volume 9

Petrozavodsk
2008

Редакционная коллегия:

В.В.Мазалов (главный редактор), д.ф.-м.н., проф.

Ю.Л.Павлов, д.ф.-м.н., проф.

Ю.В.Заика, д.ф.-м.н., проф.

В.Т.Вдовицын, к.ф.-м.н., доцент

В.А.Лебедев, к.э.н., ст.н.с.

А.В.Соколов, д.ф.-м.н., доцент

Т.П.Тихомирова (ответственный за выпуск), к.т.н.,
доцент

ISBN

© Карельский научный центр РАН, 2008

© Институт прикладных математических
исследований КарНЦ РАН, 2008

Содержание

Предисловие.....	7
------------------	---

Раздел I. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

<i>Берникович Е. С.</i> О предельном поведении максимального объема дерева в случайном непомеченном некорневом лесе.	11
<i>Заика Ю. В., Борматова Е. П.</i> Определение параметров модели водородопроницаемости.	15
<i>Заика Ю. В., Костикова Е. К.</i> Моделирование ТДС-дегазации пластины.	28
<i>Иванов А. П., Остов Ю. Я.</i> Двойственность и алгоритм решения задачи динамики полета.	35
<i>Ивашко Е. Е.</i> Игровая задача наилучшего выбора с разладкой с вероятностными приоритетами.	44
<i>Чернов И. А.</i> Вариационный подход к решению обратной задачи дегидрирования.	53
<i>Щипцова А.В.</i> Задача о размещении.	63

Раздел II. ИНФОРМАТИКА

<i>Аксенова Е. А.</i> Оптимальное управление очередью с двумя приоритетами в памяти одного уровня.	73
<i>Косицын Д. П., Печников А. А., Шабаетов А.И.</i> Об опыте применения обобщенного подхода к разработке программного обеспечения управления производственными процессами. .	91
<i>Кукин В.Д.</i> Гибридная метаэвристика для потоковой задачи Штейнера.....	97
<i>Соломатов В. Ю.</i> Генерация Web 2.0 страниц на основе XSD схем.	107
Abstracts.	115

Table of Contents

Preface	7
---------------	---

Section I. METHODS OF MATHEMATICAL MODELING

<i>Bernikovich E.S.</i> On limiting behavior of maximum tree size in a random unlabeled unrooted forest.	11
<i>Zaika Yu.V., Bormatova E.P.</i> Determination of parameters of the hydrogen permeability model	15
<i>Zaika Yu.V., Kostikova E.K.</i> Modeling of TDS-degassing of a plate	28
<i>Ivanov A.P., Ostov Yu.Ya.</i> Duality and algorithm of solving of a flight dynamics problem.	35
<i>Ivashko E.E.</i> Random-priority two-person full-information best-choice game with disorder.....	44
<i>Chernov I.A.</i> Variational approach to an inverse problem of dehydriding.	53
<i>Shchiptsova A.V.</i> Location game on the plain.....	63

Section II. COMPUTER SCIENCE

<i>Aksenova E.A.</i> Optimal control of a two-priority queue in single-level memory.....	73
<i>Kositsyn D.P., Pechnikov A.A., Shabaev A.I.</i> Experience of applying the generalized approach to development of manufacturing control software.....	91
<i>Kukin V.D.</i> Hybrid metaheuristics for the weighted Steiner tree problem.	97
<i>Solomatov V.Y.</i> Generation of Web 2.0 pages on the basis of XSD schemes.	107
Abstracts.....	115

Предисловие

Настоящий сборник статей продолжает серию работ Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН.

В работах, связанных с математическим моделированием, представлены традиционные направления, характерные для института, комбинаторные методы исследования случайных графов и отображений, исследование краевых задач математической физики, наилучшего выбора и теоретико-игровые задачи.

В разделе Информатика представлены исследования по вебометрике, оптимизации вычислительных ресурсов, дискретной оптимизации и практические результаты развития информационных ресурсов.

Часть статей сборника была представлена в виде докладов на VII Петрозаводском Международном Симпозиуме "Вероятностные методы в дискретной математике" и III Всероссийской школе молодых ученых "Математические методы в экологии", состоявшихся в Петрозаводске 1–7 июня и 24–29 августа 2008 г. Проведение Симпозиума было поддержано грантом РФФИ (08-01-06025г), проведение Школы — грантом РФФИ (08-01-06020г) и грантом Совета РАН по программе "Поддержка молодых ученых" (проведение научных школ для молодых ученых).

Директор Института прикладных
математических исследований,
д.ф.-м.н., проф.

В.В.Мазалов

Раздел I. Методы математического
моделирования

Section I. Methods of Mathematical
Modeling

УДК 519.2

**О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ МАКСИМАЛЬНОГО
ОБЪЕМА ДЕРЕВА В СЛУЧАЙНОМ НЕПОМЕЧЕННОМ
НЕКОРНЕВОМ ЛЕСЕ**

Е. С. БЕРНИКОВИЧ

Для случайного леса, состоящего из N некорневых деревьев и n непомеченных вершин, найдено предельное распределение максимального объема дерева при стремлении N и n к бесконечности в центральной зоне изменения этих параметров.

Пусть $F_{N,n}$ — множество некорневых непомеченных лесов, состоящих из N деревьев, упорядоченных одним из $N!$ возможных способов, и n вершин. Зададим на этом объекте равномерное распределение вероятностей. Для таких случайных лесов при $N, n \rightarrow \infty$ изучено предельное распределение максимального объема дерева. Под объемом дерева в лесе из $F_{N,n}$ будем понимать число всех вершин, содержащихся в этом дереве. Аналогичная задача для корневых непомеченных лесов решена в [1].

Задача перечисления деревьев изучалась в [2]. Вводится производящая функция

$$t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k x^k, \quad (1)$$

где t_k — число непомеченных деревьев объема k .

В [2] рассматривались свойства этой функции и было показано, что

$$t(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 11x^7 + \dots \quad (2)$$

и радиус сходимости этого ряда $R = 0.3383219\dots$

Кроме того, согласно [2], функцию $t(x)$ можно представить в виде

$$t(x) = a_0 - a_1(R - x) + a_2(R - x)^{3/2} + a_3(R - x)^2 + \dots, \quad (3)$$

где $a_0 = t(R) = 0.5628769\dots$, $a_1 = t'(R) = 3.4127749\dots$, $a_2 = 6.4243753\dots$

Известно также, что при $k \rightarrow \infty$

$$t_k = \alpha \left(R^k k^{5/2} \right)^{-1} + O \left(\left(R^k k^{7/2} \right)^{-1} \right), \quad (4)$$

где $\alpha = (3a_2/4\sqrt{\pi}) R^{3/2} = 0.5349485\dots$

Введем случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$, равные объемам деревьев леса из $F_{N,n}$ с номерами $1, \dots, N$ соответственно. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные целочисленные случайные величины такие, что

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{t_k \lambda^k}{t(\lambda)}, \quad 0 < \lambda \leq R. \quad (5)$$

Легко проверить, что $\xi_1, \dots, \xi_N$ определяют совместное распределение $\eta_1, \dots, \eta_N$ таких, что $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$, с помощью соотношения:

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}. \quad (6)$$

Это равенство означает, что для двух случайных наборов величин $(\eta_1, \dots, \eta_N)$ и $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ выполнены условия обобщенной схемы размещения [3].

Обозначим через $\eta_{(N)}$ максимальный объем дерева:

$$\eta_{(N)} = \max_i \eta_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Пусть λ является решением уравнения

$$\frac{\lambda t'(\lambda)}{t(\lambda)} = \frac{n}{N}. \quad (7)$$

Положим $L = a_1 R / a_0 = 2.0512772\dots$. Нетрудно проверить, что при $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < L$ уравнение (7) имеет единственное решение. Справедлива следующая теорема о предельном поведении $\eta_{(N)}$.

Теорема. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < L$, а r выбрано из условия

$$\frac{N\alpha}{r^{5/2}t(\lambda)} \left(\frac{\lambda}{R} \right)^r \rightarrow \gamma,$$

где γ — некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r + k\} \rightarrow \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\lambda}{R} \right)^{k+1} \left(1 - \frac{\lambda}{R} \right)^{-1} \right\}.$$

Ниже приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–3), с помощью которых доказывается теорема.

Пусть r — целое неотрицательное число. Введем независимые вспомогательные случайные величины $\xi_i^{(r)}$, распределения которых задаются следующим образом:

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \leq r\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Положим

$$\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N, \quad \zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_N^{(r)}, \quad P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}$$

Хорошо известно [3], что следующее утверждение является следствием соотношения (6).

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Лемма 2. *Если выполнены условия теоремы, то при любом фиксированном $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$*

$$NP_{r+k} \rightarrow \gamma(\lambda/R)^{k+1}(1 - \lambda/R)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$NP_{r+k} = N \mathbf{P}\{\xi_1 = r\} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 = r + k + s\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 = r\}}.$$

Нетрудно видеть, что $r \rightarrow \infty$, поэтому из (4) и (5) следует

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi_1 = r + k + s\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 = r\}} = \frac{t_{r+k+s}\lambda^{k+s}}{t_r} = \left(\frac{\lambda}{R}\right)^{k+s} (1 + O(s/r)),$$

Из этих соотношений и (7) следует утверждение леммы 2.

Обозначим $m = \mathbf{E} \xi_1$, $\sigma^2 = \mathbf{D} \xi_1$. Из (5) и (7) получаем

$$m = \frac{\lambda t'(\lambda)}{t(\lambda)} = \frac{n}{N}, \quad \sigma^2 = \frac{\lambda^2 t''(\lambda)}{t(\lambda)} + m + m^2. \quad (9)$$

Обозначим также $m_r = \mathbf{E} \xi_1^{(r)}$, $\sigma_r^2 = \mathbf{D} \xi_1^{(r)}$. Из (5) и (8) вытекают следующие соотношения:

$$m_r = \frac{\sum_{k=r+1}^{\infty} k p_k}{1 - P_r}, \quad \sigma_r^2 = \frac{\sigma^2 + m^2 - \sum_{k=r+1}^{\infty} k^2 p_k}{1 - P_r} - m_r^2. \quad (10)$$

Из результатов работ [1, 4] нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $N \rightarrow \infty$ и $0 \leq C_1 \leq \lambda \leq C_2 < R$. Тогда

$$\sigma \sqrt{N} \mathbf{P}\{\zeta_N = n\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(n - mN)^2}{2\sigma^2 N}\right\} \rightarrow 0$$

$$\sigma_r \sqrt{N} \mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(n - m_r N)^2}{2\sigma_r^2 N}\right\} \rightarrow 0$$

равномерно относительно целых положительных n таких, что $(n - m_r N)/\sigma_r \sqrt{N}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале.

Теперь можно перейти к доказательству теоремы. Из (7) нетрудно получить неравенства $1 < C_1 \leq \lambda \leq C_2 < R$.

Используя (9), (10), легко обнаружить, что

$$(n - m_r N)^2 / (\sigma_r^2 N) = O(r^2 / N),$$

а выбор r обеспечивает выполнение соотношения $r^2 / N \rightarrow 0$. Поэтому, принимая во внимание (10), из леммы 3 получаем, что

$$\frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} \rightarrow 1.$$

Отсюда и из лемм 1, 2 следует утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов Ю.Л., Предельные теоремы для объемов деревьев в случайном непомеченном лесе // Дискретная математика, 2005, т. 17, вып. 2, 70–86.
2. Харари Ф., Палмер Э., Перечисление графов. М.: Мир, 1977.
3. Колчин В.Ф., Случайные графы. М.: Физматлит, 2004.
4. Колчин А.В., Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения // Дискретная математика, 2003, т. 15, вып. 4, 148–157.

УДК 519.6, 539.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ВОДОРОДОПРОНИЦАЕМОСТИ

Ю. В. ЗАЙКА, Е. П. БОРМАТОВА

Рассматривается обратная задача параметрической идентификации нелинейной модели водородопроницаемости. В зависимости от объема экспериментальной информации предложена методика оценки параметров переноса: десорбции и диффузии.

Введение. Экспериментальный метод проницаемости является классическим и подробно изложен, например, в [1, 2]. Вместе с тем имеется определенный разброс в оценках значений параметров моделей. Одна из основных причин: как известно, обратные задачи математической физики характеризуются высокой чувствительностью к экспериментальным и вычислительным погрешностям. Кроме того, традиционный «метод подгонки» обычно не гарантирует единственности набора параметров, удовлетворительно аппроксимирующих экспериментальные кривые проницаемости. Поэтому, во-первых, необходимо определить объем данных, достаточный для однозначной параметрической идентификации модели. Во-вторых, алгоритм оценки параметров должен быть корректным (в частности, не содержащим операции дифференцирования зашумленных измерений).

Будем ориентироваться на следующий вариант эксперимента. Мембрана толщины ℓ из исследуемого материала (металла или сплава) является перегородкой вакуумной камеры. При фиксированной температуре образца с входной стороны скачкообразно создается давление $\bar{p}_0 = \text{const}$ молекулярного водорода. С выходной стороны производится вакуумирование и с помощью масс-спектрометра определяется

выходной десорбционный поток $J = J(t)$, t — время. Потоки подразумеваем отнесенными к единице площади, т. е. речь идет о плотностях. На самом деле измеряется давление на выходе:

$$p_\ell(t) = \theta_1 \int_0^t \exp\{(\tau - t)\theta_0^{-1}\} J(\tau) d\tau, \quad J(t) = [\dot{p}_\ell(t) + p_\ell(t)\theta_0^{-1}]\theta_1^{-1},$$

где θ_i — характеристики вакуумной установки. Вычисление J по p_ℓ — обратная задача, на которой не останавливаемся (см., например, [3]). По достижении стационара $J(t) \approx \bar{J} = \text{const}$, $t \geq t_*$, на входе резко увеличиваем давление до значения $\bar{p}_0^+ > \bar{p}_0$ и дожидаемся последующего установления десорбции при $t \geq t^* > t_*$. Такой вариант предпочтительнее двух классических экспериментов, поскольку нет необходимости в повторной дегазации образца и «старт» второго этапа происходит не с нулевого начального распределения атомарного водорода в пластине, а с предшествующего стационара (разнообразие повышает информативность). Выход на стационар носит асимптотический характер. Но t_* и t^* не следует выбирать слишком большими, чтобы переходные процессы «не потерялись» на фоне стационарных.

Зависимость параметров водородопроницаемости от температуры T считаем аррениусовской. Например, для коэффициента диффузии $D = D_0 \exp\{-E_D/[RT]\}$. Теоретически достаточно двух значений при различных температурах для определения предэкспоненты и энергии активации. При необходимости допустимы другие зависимости от T . Давления и концентрации $c(t, x)$ растворенного водорода считаем относительно малыми: $D \neq D(c)$.

Модель. Рассмотрим вариант с объемной десорбцией [1]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in (0, t_*) \times (0, \ell), \quad c(0, x) = 0, \quad x \in [0, \ell], \quad (1)$$

$$P \equiv \mu s \bar{p}_0, \quad P - bc_0^2(t) = -D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad bc_\ell^2(t) = -D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=\ell}, \quad (2)$$

$c_0(t) \equiv c(t, 0)$, $c_\ell(t) \equiv c(t, \ell)$. Здесь μ — кинетический коэффициент, s — коэффициент прилипания, b — коэффициент десорбции. Вакуумная система настолько мощная, чтобы пренебречь ресорбцией: $\mu s p_\ell \approx 0$. По измерениям известна функция $J \equiv J_\ell(t) = bc_\ell^2(t)$. Для второго этапа эксперимента ($t \in [t_*, t^*]$) начальное распределение $c(t_*, x)$ — стационар, а $\bar{p}_0$ заменяем на $\bar{p}_0^+$.

Влияние дефектов. Вместо уравнения диффузии имеем систему:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - a_1 c + a_2 w, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a_1 c - a_2 w.$$

Здесь $w = w(t, x)$ — концентрация атомов водорода в ловушках (в частности, в микропорах), a_i — коэффициенты обратимого захвата. При необходимости можно ограничить емкость ловушек: $a_1 c \rightarrow a_1 c [1 - w/w_{\max}]$. Такая грубая модель может лишь ответить на вопрос «сколько задерживается» водорода. Для практических целей этого часто достаточно. Кривые проницаемости имеют стандартный S -образный вид кривой насыщения. Значения a_i не влияют на величину стационарного потока десорбции $\bar{J}$. При $a_i > 0$ график $J(t)$ сначала несколько прогибается (идет накопление в дефектах), а затем становится более выпуклым вверх. Так что если удалось совместить модельный и экспериментальный уровень $\bar{J}$, то, когда характерное влияние дефектов заметно, a_i нетрудно подобрать численно. Теоретический учет $a_i > 0$ приводит к значительному усложнению технических выкладок.

Решение прямой задачи. Кратко остановимся на численном решении краевой задачи. Граничные и начальные условия не согласованы в классическом смысле. Поэтому, строго говоря, решение понимается в рамках теории обобщенных решений. Вначале входная сторона испытывает ударную нагрузку из-за скачка давления. График входного потока $F_0(t) \equiv -Dc_x(t, 0)$ имеет вид всплеска с последующим затуханием до стационара $\bar{J}$. В связи с этим (и нелинейностью задачи) схема вычислений носит неявный и итерационный характер. При численном моделировании жесткость задачи понижалась: моделировалось быстрое (линейное и в пределах нескольких секунд) установление $p_0(t)$ до уровня $\bar{p}_0$. Во-первых, это соответствует реалиям эксперимента. Во-вторых, позволяет сгладить эффект δ -функции: теоретический начальный всплеск F_0 может внести большую интегральную составляющую, не характерную для реального материала с ограниченной пропускной способностью. Поэтому также следует «срезать» пик F_0 физически допустимым максимумом ($\leq P$), что в модели ускоряет и установление $c_0(t) \rightarrow \bar{c}_0$. Подчеркнем, что информация о начальном процессе в алгоритмах идентификации не анализируется, используются лишь соотношения интегрального характера.

Разностная схема (Кранка-Николсон) имеет шеститочечный шаблон. В стандартных обозначениях $c_i^k \approx c(t_k, x_i)$, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$,

$x_n = \ell$, $\Delta x = h$. На каждом слое по времени аппроксимируем $c_x(t_k, 0) \approx [-3c_0^k + 4c_1^k - c_2^k]/2h$. Подставляя в граничное условие (2) при $x = 0$, получаем выражение $c_0^k = f_0(c_1^k, c_2^k)$. Аналогичным образом $c_n^k = f_n(c_{n-2}^k, c_{n-1}^k)$. На предварительном временном слое все $c_i^k = 0$, $k = -1$. При $k = 0$ сначала полагаем $c_i^0 = 0$, $1 \leq i \leq n-1$, $c_0^0 = f_0(c_1^0, c_2^0)$, $c_n^0 = f_n(c_{n-2}^0, c_{n-1}^0)$. Затем решается методом прогонки трехдиагональная система линейных уравнений. Получаем новые значения c_i^0 , $1 \leq i \leq n-1$. Снова вычисляем $c_0^0 = f_0$, $c_n^0 = f_n$ и решаем систему. Итерации продолжаем до тех пор, пока граничные значения не установятся. На последующих шагах по времени в качестве начальных приближений c_0^k и c_n^k используются значения c_0^{k-1} и c_n^{k-1} . Возмущения на входе доходят до выходной стороны за конечное время. Дискретная аппроксимация «сглаживает» недостатки модели (1)–(2) и адаптирована к реальным условиям эксперимента. Проверка вычислений проводилась выходом распределения $c(t, x)$ на линейный стационар (4) при соблюдении материального баланса:

$$\int_0^\ell c(t, x) dx = - \int_0^t D c_x(t, 0) dt + \int_0^t D c_x(t, \ell) dt. \quad (3)$$

Для второго этапа ($t \in [t_*, t^*]$) построения аналогичны. Численные эксперименты проводились в широком диапазоне: D от 10^{-9} до $10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$; b от 10^{-21} до $10^{-5} \text{ см}^4/\text{с}$; s от 10^{-12} до 10^{-2} ; $\bar{p}_0$ от 0.1 до 10 Торр; $\mu = 1.46 \cdot 10^{21} \text{ 1/см}^2\text{s Торр}$. Из-за разброса порядков величин проводилось масштабирование. Параметры, порождающие кривые проницаемости, «забывались» и затем восстанавливались по излагаемой ниже методике.

Равновесие и стационар. Равновесная пара $(\bar{p}, \bar{c})$ определяется приравниванием к нулю производных:

$$\mu s \bar{p} = b \bar{c}^2 \Rightarrow \bar{c} = \gamma \sqrt{\bar{p}}, \quad \gamma \equiv \sqrt{\mu s b^{-1}}.$$

Тем самым, эксперимент проводится в области $\bar{c} \sim \sqrt{\bar{p}}$. Когда коэффициент γ известен, параметр $s = b\gamma^2/\mu$ можно исключить из дальнейших рассуждений. Стационарное распределение атомов H линейно:

$$c_t = 0 \Rightarrow c(t_*, x) = -D^{-1} \bar{J} x + \bar{c}_0, \quad \bar{c}_0 = \sqrt{b^{-1}(P - \bar{J})}. \quad (4)$$

Из соотношения $\bar{J} = b\bar{c}_\ell^2$ выражаем стационарное значение $\bar{c}_\ell$ и приравниваем к $c(t_*, \ell)$:

$$\sqrt{\bar{J}} - \sqrt{P - \bar{J}} + \ell\sqrt{b}D^{-1}\bar{J} = 0 \quad (P \equiv \mu s\bar{p}_0). \quad (5)$$

Из двух таких уравнений, соответствующих давлениям $\bar{p}_0$ и $\bar{p}_0^+$, исключаем μs : $z \equiv \ell\sqrt{b}/D$,

$$\left(\frac{\bar{J}_+^2}{\bar{p}_0^+} - \frac{\bar{J}^2}{\bar{p}_0}\right)z^2 + 2\left(\frac{\bar{J}_+^{3/2}}{\bar{p}_0^+} - \frac{\bar{J}^{3/2}}{\bar{p}_0}\right)z + 2\left(\frac{\bar{J}_+}{\bar{p}_0^+} - \frac{\bar{J}}{\bar{p}_0}\right) = 0. \quad (6)$$

Корни разного знака, комплекс $z = \ell\sqrt{b}/D$ определяется однозначно. Затем из уравнения (5) находим значение s , далее вычисляем $b = \mu s/\gamma^2$ и $D = \ell\sqrt{b}/z$. Целесообразно предварительно уравнение (6) разделить на $\bar{J}$ и перейти к безразмерной переменной $z\sqrt{\bar{J}}$.

При указанном объеме информации задача параметрической идентификации решается элементарными выкладками. Перейдем к следующему этапу: попытаемся сэкономить на экспериментах насыщения-дегазации. К тому же другие эксперименты характеризуются своими погрешностями. Можно ли однозначно найти параметры, не определяя предварительно коэффициент равновесной растворимости γ ?

Время запаздывания. Линейная задача. Вместо граничных условий (2) рассмотрим линейные:

$$c_0(t) \equiv c(t, 0) = \bar{c}_0 = \text{const}, \quad c_\ell(t) \equiv c(t, \ell) = 0. \quad (7)$$

Краевую задачу (1), (2) будем обозначать как I , а (1), (7) — как II . График функции (количество атомов H , десорбировавшихся с единичной площадки при $x = \ell$)

$$S_{II}(t) = \int_0^t J_{II}(\tau) d\tau, \quad J_{II}(t) = F_\ell(t) \equiv -D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=\ell},$$

имеет асимптоту. Пересечение ее с осью t носит название времени запаздывания: $t_0 = \ell^2/6D$ [1]. Уравнение касательной к графику $S(t)$ в точке (t_*, S_*) (индекс II у t_* , J , S опускаем): $S = S(t_*) + \bar{J} \cdot (t - t_*)$ ($\dot{S} = J$). Следовательно, значение t_0 достаточно точно вычисляется как $t_* - S_*/\bar{J}$, $S_* = S(t_*)$. Важно, что t_0 не зависит от $\bar{c}_0$. Обычно принимают $c_0(t) = \bar{c}$, где $\bar{c} \sim \sqrt{\bar{p}_0}$ — равновесная с давлением $\bar{p}_0$ концентрация. Другой вариант: $\bar{c}_0$ равна установившейся концентрации $\bar{c}_0$ в задаче I . Поскольку $P = b\bar{c}^2$, $P - b\bar{c}_0^2 = \bar{J}$, то $\bar{c} > \bar{c}_0$, $\bar{J} = b\bar{c}_\ell^2 \Rightarrow \bar{c}^2 = \bar{c}_0^2 + \bar{c}_\ell^2$. Формально задача II — первого рода. Но при

$\tilde{c}_0 = \bar{c}_0 = \sqrt{b^{-1}(P - \bar{J})}$ она косвенно связана с нелинейной задачей *I* третьего рода. Когда поток атомов H на входную поверхность значительно превосходит пропускную способность мембраны ($P \gg \bar{J}$), имеем $\bar{c}_0 \approx \bar{c}$. Наконец, из формулы (4) следует $\bar{c}_0 = \bar{c}_\ell + \bar{J}\ell D^{-1}$, и если $\bar{c}_\ell \ll \bar{c}_0$, то $\bar{c}_0 \approx \bar{J}\ell D^{-1}$ (в задаче *II* $\tilde{c}_0 = \bar{J}\ell D^{-1}$).

Замечание 1. Вычислительные эксперименты в широком диапазоне параметров показали, что значения коэффициента диффузии слабо влияют на точность приближения $\bar{c}_0 \approx \bar{J}\ell D^{-1}$. Определяющим является параметр bP — чем он меньше, тем «дальше модели» *I* и *II* ($\tilde{c}_0 = \bar{c}_0$), лимитирующим фактором становятся и поверхностные процессы. Действительно, если значительно уменьшить падающий на входную поверхность поток $P = \mu s \bar{p}_0$, то проникающий поток $\bar{J}$ будет очень мал и $\bar{c}_\ell \approx \bar{c}_0$. Если уменьшить b , то на выходе десорбция будет слабой, что способствует росту $\bar{c}_\ell$ ($c_\ell(t)$ монотонно растет до уровня $\bar{c}_\ell$). Обратно, если b относительно велик, то на выходной стороне активная десорбция понижает концентрацию $\bar{c}_\ell$, и в итоге получаем задачу *II* с $c_\ell(t) = 0$. Рост bP влечет уменьшение времени установления стационарной концентрации: $c_0(0) = 0 \rightarrow \bar{c}_0$. Когда модели перекрываются (*I* вырождается в *II*), большие (но не слишком) вариации коэффициентов s, b практически не влияют на время запаздывания $t_0 = \ell^2/6D$. В этом и проявляется некорректность обратной задачи. В качественных рассуждениях (сильно, слабо, практически) авторы условно ориентировались на погрешность в 10% при определении проникающего потока водорода.

Для второго этапа ($t \in [t_*, t^*]$) сделаем замену $\hat{c}(t, x) = c(t, x) - c(t_*, x)$ и примем t_* за начало отсчета времени. В линейном приближении *II* ($\tilde{c}_0 = \bar{c}_0$) получим ту же краевую задачу для $\hat{c}$, только вместо $\bar{c}_0$, $J_{II}(t)$ будут $\Delta \bar{c} = \bar{c}_0^+ - \bar{c}_0$ и $\Delta J_{II} = J_{II} - \bar{J}_{II}$. Новое время запаздывания вычисляется по формуле

$$\Delta t_0 = \Delta t_* - \frac{\Delta S_*}{\Delta \bar{J}_{II}}, \quad \Delta S_* \equiv \int_0^{\Delta t_*} \Delta J_{II}(\tau) d\tau, \quad \Delta \bar{J}_{II} \equiv \bar{J}_{II}^+ - \bar{J}_{II},$$

$\Delta t_* \equiv t^* - t_*$. В исходном времени интегрирование по $\tau \in [t_*, t^*]$.

Изложим схему идентификации. Напомним, что s и $z = \ell\sqrt{b}/D$ известны из анализа стационаров. По известной из эксперимента плотности десорбции $J(t)$ вычисляем $t_1 = t_* - S_*/\bar{J}$ и $t_2 = \Delta t_* - \Delta S_*/\Delta \bar{J}$, где вместо $\Delta J_{II}(t)$ используем $\Delta J(t) = J(t) - \bar{J}$, а $\Delta \bar{J} = \bar{J}^+ - \bar{J}^-$. Если t_i совпадают с высокой точностью, то обоснованно предполагаем, что

эксперимент находится в зоне вырождения модели I в II . Хотя теоретически t_i могут совпасть и в I при специально подобранных $\bar{p}_0, \bar{p}_0^+$. Из $t_i = \ell^2/6D$ находим оценку коэффициента диффузии D . Далее вычисляем $\bar{c}_0 = \bar{J}\ell D^{-1}$, $\bar{c}_0^+ = \bar{J}^+\ell D^{-1}$. Сопоставляя с $\bar{c}_0 = \sqrt{b^{-1}(P - \bar{J})}$, $\bar{c}_0^+ = \sqrt{b^{-1}(P^+ - \bar{J}^+)}$, находим оценку коэффициента десорбции b . Более надежным значением является $\sqrt{b} = Dz/\ell$. Наконец, численно решаем задачу I с полученными s, b, D и сравниваем модельную кривую $J(t) = bc_\ell^2(t)$ с экспериментальной. Если результат неудовлетворителен, то полученные оценки s, b, D принимаем в качестве начального приближения для исходной модели I .

Нелинейная модель. Чем «дальше» друг от друга модели I и II , тем лучше обусловлена обратная задача. Скорости диффузии и (де)сорбционных процессов должны быть соизмеримыми по порядкам (заметим, что $[\sqrt{bP}] = \text{см}/\text{с} = [D/\ell]$). Следовательно, речь идет о невысоких температурах: химические процессы активируются с ростом температуры значительно быстрее диффузии. В прикладном плане модель I нацелена, например, на исследование тонких пленок или стенок, когда концентрации очень малы и требуется оценить медленное (но на значительном интервале времени) накопление водорода (или его изотопов) с внешней стороны.

Замечание 2. По классической кривой проницаемости нельзя однозначно сделать вывод о соизмеримости диффузии и (де)сорбции. Поэтому и предлагается эксперимент с двумя давлениями и «стартом» на втором этапе не с нуля, а с достигнутого стационара. Если взять $\bar{J}$ и $t_0 = t_* - S_*/\bar{J}$ из задачи I и принять в II $D = \ell^2/6t_0$, $\bar{c}_0 = \bar{J}\ell/D$, то в II будет то же установившееся значение $\bar{J}$. Практически неразличимы и переходные процессы. Например, при $bP \sim 10^{-7}$, $D = 10^{-6}$ концентрация $\bar{c}_0$ больше $\ell\bar{J}/D$ почти в два раза, t_0 превосходит $\ell^2/6D$ более чем в три раза. Однако графики $J(t)$ в моделях I и II (D и $\bar{c}_0$ вычисляются как указано выше) совпадают в пределах 5%.

Перейдем к оценке времени запаздывания в модели I , $t \in [0, t_*]$. Обозначим

$$R(t) = \int_0^t F_0(\tau) d\tau, \quad F_0(t) = -D \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_0, \quad R_* = R(t_*).$$

Определим функцию $\eta(t) \equiv F_0(t) - \bar{J}$ и представим $R(t)$ в форме

$$R(t) = M(t) + \bar{J}t, \quad M(t) \equiv \int_0^t \eta(\tau) d\tau,$$

где интеграл в пределе конечен ($\approx M_* = M(t_*)$) из-за большой скорости убывания функции $|\eta(t)|$, $t \gg 1$ ($\dot{R} = F_0 \rightarrow \bar{J}$).

При $t = t_*$ из материального баланса (3) и представления (4) имеем

$$M_* + \bar{J}t_* - S_* = \int_0^t c(t_*, x) dx = \bar{c}_0 \ell - \frac{\bar{J}\ell^2}{2D}.$$

Подставляя $\bar{c}_0 = \bar{c}_\ell + \bar{J}\ell/D$, $\bar{c}_\ell = \bar{I}/\sqrt{b}$, для времени запаздывания $t_0 = t_* - S_*/\bar{J}$ имеем

$$t_0 = \frac{\ell^2}{2D} + \frac{\ell}{\bar{I}\sqrt{b}} - \frac{M_*}{\bar{J}}, \quad I \equiv \sqrt{J}. \quad (8)$$

С учетом уравнения для стационара (5):

$$\frac{\ell\sqrt{b}\bar{I}}{D} = \chi - 1, \quad \chi^2 \equiv \frac{P}{\bar{J}} - 1 \Rightarrow t_0 = \frac{\ell^2}{2D} \cdot \frac{\chi + 1}{\chi - 1} - \frac{M_*}{\bar{J}}. \quad (9)$$

В рассматриваемом диапазоне параметров модели $M_* > 0$, откуда следует оценка $t_0 < (\chi + 1)(\chi - 1)^{-1}\ell^2/2D$. Она тем точнее, чем меньше относительный всплеск $(F_0 - \bar{J})/\bar{J}$ и быстрее установление $F_0 \rightarrow \bar{J}$. Когда по условию эксперимента $P \gg \bar{J}$, то с достаточно малой погрешностью справедливо $t_0 \lesssim \ell^2/2D$. При выполнении неравенства $(M_* - \bar{c}_\ell\ell)/\bar{J} \ll \ell^2/2D$ из представления (8) следует $t_0 \approx \ell^2/2D$.

Замечание 3. Когда модель I вырождается в II ($\check{c}_0 = \bar{c}_0$), из $\bar{c}_0 = \bar{J}\ell/D$ и $t_0 = \ell^2/6D$ следует $M_* = \bar{J}\ell^2/3D$. Увеличение времени запаздывания с ростом влияния (де)сорбционных процессов происходит за счет увеличения t_* , времени установления $c_0(t) \rightarrow \bar{c}_0$ и уменьшения $\bar{J}$. Например, в модели I при $\ell = 2 \cdot 10^{-2}$, $D = 10^{-6}$, $b = 10^{-20}$, $s = 10^{-8}$, $\bar{p}_0 = 1$ (т.е. $\sqrt{bP} \approx 4 \cdot 10^{-4} \sim D/\ell$) имеем $\bar{J} = 1.2 \cdot 10^{12}$, $\bar{c}_0 = 3.6 \cdot 10^{16}$, $\bar{c}_\ell = 1.1 \cdot 10^{16}$, $t_* \sim 500$, $t_0 = 130$, в то время как в II (с установившимся в I значением концентрации $\bar{c}_0$) $\bar{J} = 1.8 \cdot 10^{12}$, $t_* \sim 300$, $t_0 = 67$.

Поставим вопрос: когда под интегралом можно полагать $F_0 \approx \bar{J}$ ($\Rightarrow M_* \approx 0$)? Запишем материальный баланс (3) для вырожденной модели II после установления:

$$\frac{\check{c}_0\ell}{2} = \int_0^{t_*} F_0(\tau) d\tau - S(t_*) = R_* - S_*, \quad J = J_{II}.$$

Используя выражения $t_0 = t_* - S_*/\bar{J}$, $\bar{c}_0 = \bar{J}\ell/D$, $t_0 = \ell^2/6D$, получим $R_* = \bar{J}t_* + 2\bar{J}t_0$. Итак, ответ: при $t_0 \ll t_*$. Аналогичный эффект численно обнаружен и в модели I .

Схема вычислений по разделению b , D такова. За начальное приближение примем, например, $D = \ell^2/3t_0$ и вычислим $\sqrt{b} = Dz/\ell$, M_* (решая задачу I). Затем из уравнения (9) находим следующее приближение D и так до установления итерационного процесса. Пока M_* меньше истинного значения и растет, приближения D будут верхними убывающими оценками, когда M_* больше — наоборот («вилка»). Итерационный характер алгоритма связан с тем, что на входе нет информации ни о концентрации $c_0(t)$, ни о потоке $F_0(t)$.

В заключение пункта рассмотрим вариант существенного улучшения обусловленности решения обратной задачи, хотя он связан с дополнительными затратами. Пусть известен общий расход водорода. Либо он непосредственно измерен с входной стороны, либо вычислен как интеграл от $J(t)$ плюс количество H в пластине (на единицу площади). Это предполагает быстрое охлаждение образца с последующей дегазацией в вакууме. Либо быстро убираем водород из входной камеры (например, открыв на мгновение предварительно вакуумированный баллон большой емкости). При этом для сокращения времени эксперимента можно соединить входную и выходную камеры, поскольку нас интересует только общее количество атомов H в пластине.

Обратимся ко второму этапу эксперимента: $\bar{p}_0 \rightarrow \bar{p}_0^+$, $t \in [t_*, t^*]$. Сделаем замену: $\hat{c}(t, x) = c(t, x) - c(t_*, x)$,

$$c(t_*, x) = \bar{c}_0 - D^{-1}\bar{J}x, \quad \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial x^2}, \quad t > t_*, \quad \hat{c}(t_*, x) = 0,$$

$$-D \frac{\partial \hat{c}}{\partial x} \Big|_{x=0} = F_0(t) - \bar{J} \equiv \Delta F_0(t), \quad -D \frac{\partial \hat{c}}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = J(t) - \bar{J} \equiv \Delta J(t).$$

Для нового времени запаздывания получаем выражения

$$\Delta t_0 = \frac{\ell \Delta \bar{c}_0}{\Delta \bar{J}} - \frac{\ell^2}{2D} - \frac{\Delta M_*}{\Delta \bar{J}}, \quad \Delta \bar{c}_0 = \bar{c}_0^+ - \bar{c}_0, \quad \Delta \bar{J} = \bar{J}^+ - \bar{J}, \quad (10)$$

$$\Delta M_* = \int_{t_*}^{t^*} [F_0(t) - \bar{J}^+] dt, \quad \bar{J}t_0 + \Delta \bar{J} \Delta t_0 = \bar{c}_0^+ \ell - \frac{\ell^2 \bar{J}^+}{2D} - (M_* + \Delta M_*).$$

Величина Δt_0 вычисляется как $\Delta t_* - \Delta S_*/\Delta \bar{J}$, а $M_* + \Delta M_*$ — как разность общего расхода водорода с входной стороны и $\bar{J}t_* +$

$\bar{J}^+ \Delta t_*$. Из уравнения (10) после подстановки $\bar{c}_0^+ = \sqrt{b^{-1}(P^+ - \bar{J}^+)} = \ell \sqrt{P^+ - \bar{J}^+} / (zD)$ определяется коэффициент диффузии D .

Сопряженные уравнения. Остановимся на применении сопряженных уравнений в задачах идентификации моделей водородопроницаемости. Определим сопряженное к (1) уравнение $\psi_t = -D\psi_{xx}$. Для любого решения (сопряженной функции) интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^{t_*} \int_0^\ell \psi [c_t - Dc_{xx}] dx dt &= \int_0^\ell (\psi c) \Big|_{t=0}^{t_*} dx - \\ &- D \int_0^{t_*} (c_x \psi) \Big|_{x=0}^\ell dt + D \int_0^{t_*} (\psi_x c) \Big|_{x=0}^\ell dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Смысл такого выбора $\psi(t, x)$ в том, чтобы после преобразований не появилось двойного интеграла. Остались величины, связанные с краевыми условиями (и измерениями). В тривиальном случае ($\psi = 1$) получаем уравнение материального баланса.

В соотношение (11) можно подставить выражения $c(t_*, x)$ согласно (4), $c(t, \ell) = \sqrt{J/b}$, $c(0, x) = 0$. Нет информации о $c_0(t)$ и $F_0(t) \equiv -Dc_x(t, 0)$. От одного из соответствующих слагаемых в (11) можно избавиться дополнительным ограничением $\psi(t, 0) = 0$ или $\psi_x(t, 0) = 0$. Плотность входного потока F_0 испытывает всплеск, часто весьма значительный в интегральном измерении. Концентрация $c_0(t)$ в широком диапазоне параметров устанавливается достаточно быстро. Поэтому предпочтительнее исключить из тождества (11) плотность входного потока F_0 ($\psi(t, 0) = 0$).

Для простейшего варианта $\psi = x/\ell$ (знаменатель для нормировки) получаем

$$f(b, D) \equiv \frac{\bar{c}_0 \ell}{2} - \frac{\bar{J} \ell^2}{3D} + S(t_*) - \frac{DS_{1/2}(t_*)}{\ell \sqrt{b}} - \frac{D}{\ell} \int_0^{t_*} c_0(t) dt = 0, \quad (12)$$

$$S(t_*) = S_* = \int_0^{t_*} J(\tau) d\tau, \quad S_{1/2}(t_*) = S_{1/2}^* = \int_0^{t_*} I(\tau) d\tau, \quad I(t) = \sqrt{J(t)},$$

$\bar{c}_0 = \sqrt{b^{-1}(P - \bar{J})}$. Из-за большого разброса порядков величин введем безразмерные переменные

$$z_1 \equiv \frac{\ell}{\bar{I} t_* \sqrt{b}}, \quad z_2 \equiv \frac{D t_*}{\ell^2}, \quad Z \equiv z_1 z_2 = \frac{1}{\bar{I} z} = \frac{D}{\bar{I} \ell \sqrt{b}}, \quad \chi^2 \equiv \frac{P}{\bar{J}} - 1, \quad \chi > 1.$$

Значение Z известно — вычисляется по значениям $\bar{J}$, $\bar{J}^+$. В принятых обозначениях $c_0(t) = c(t; z_1, z_2)$,

$$z_1 \left[\frac{1}{3Z} - \frac{\chi}{2} \right] + \frac{z_2}{t_*} \int_0^{t_*} \frac{\ell c_0(t)}{\bar{J} t_*} dt = \frac{S_*}{\bar{J} t_*} + \frac{Z}{t_*} \cdot \frac{S_{1/2}^*}{\bar{I}}, \quad z_1 z_2 = Z. \quad (13)$$

Подчеркнем, что концентрация $c_0(t)$ неизвестна и определяется параметрами b , D . Нормировки $S_*/\bar{J}$, $S_{1/2}^*/\bar{I}$ понимаются так: вычисляем $J/\bar{J}$, $I/\bar{I}$, а потом интегралы.

Предположим сначала, что $c_0(t) \approx \bar{c}_0$ при вычислении интеграла. Условия эксперимента таковы, что входная поверхность относительно быстро насыщается. Этого легко добиться увеличением давления $\bar{p}_0$ и (или) толщины ℓ . Правда, чем меньше время установления $c_0(t) \approx \bar{c}_0$, тем ближе задачи *I*, *II* и тем чувствительнее вычисляемое значение b к погрешностям (степень некорректности растет). Численно установлено, что в логарифмических координатах зависимость времени установления $c_0(t)$ от параметра bP линейная убывающая. Например, для $D = 10^{-6}$ уже при $bP > 10$ оно меньше нескольких секунд, в то время как t_* — сотни.

Подставляя в уравнение (13) выражение $\bar{c}_0 = \chi \sqrt{\bar{J}/b}$ вместо $c_0(t)$, получаем, что второе (интегральное) слагаемое слева равно χZ и однозначно вычисляется z_1 , т. е. коэффициент десорбции b . Если в силу уравнения (5) для стационара заменить χZ на $1 + Z$, то соотношение (13) после замены $c_0(t)$ на $\bar{c}_0$ перепишется в форме

$$z_1 \left[\frac{\chi}{2} - \frac{1}{3Z} \right] = \frac{t_0 + Z t_{1/2}^0}{t_*}, \quad t_{1/2}^0 \equiv t_* - \frac{S_{1/2}^*}{\bar{I}}, \quad (14)$$

где $t_{1/2}^0$ является временем запаздывания для $I(t) = \sqrt{J(t)}$. В общем случае изложенное — первое приближение. В левой части появится слагаемое:

$$z_1 \left[\frac{\chi}{2} - \frac{1}{3Z} \right] + \frac{z_2}{t_*} \int_0^{t_*} \frac{\ell [\bar{c}_0 - c_0(t)]}{\bar{J} t_*} dt = \frac{t_0 + Z t_{1/2}^0}{t_*}. \quad (15)$$

Следовательно, уравнение (14) даст нижнюю оценку коэффициента b и верхнюю для D , поскольку $Z = z_1 z_2 = D/(\bar{I} \ell / \sqrt{b})$. При текущих b , D вычисляем из краевой задачи *I* функцию $c_0(t)$ и интеграл в левой части уравнения (15). В рассматриваемом диапазоне [...] < 0, так что $z_{1,2}$ могут либо расти, либо убывать одновременно. Но этому мешает постоянство $z_1 z_2 = Z$. Подставляя $z_2 = Z/z_1$, получаем квадратное уравнение по z_1 (корни разного знака). По z_1 , Z находим очередные

значения b , D . Итерации продолжаем до установления. Их можно также начинать с $D \approx \ell^2/6t_0$ или $D \approx \ell^2/3t_0$.

Аналогично составляется сопряженное уравнение и для второго этапа эксперимента $t \in [t_*, t^*]$. Следует только учесть, что вместо нулевых начальных данных в тождестве вида (11) будет стационарное распределение $c(t_*, x)$. Если в нашем распоряжении только одна кривая проницаемости ($t \in [0, t_*]$), то следует заменить Z на $z_1 z_2$ и решать систему уравнений (9), (15) относительно переменных b , D .

Упрощенная схема вычислений. Для практических целей может оказаться достаточным следующее приближение. Функция $f(t) = \bar{c}_0 - c_0(t)$ быстро убывает: $f(0) = \bar{c}_0$, $f(\hat{t}) \approx 0$, $\hat{t} < t_*$. Аппроксимируем, например, $f(t) = \bar{c}_0 \exp\{-at\}$. Константа $a > 0$ подбирается из условия $f(\hat{t}) \approx 0$ для априорной оценки времени установления $\hat{t}$ входной концентрации $c_0(t)$ ($a\hat{t} \approx 5 - 7$). Тогда интегральное слагаемое в уравнении (15) будет известным числом $\approx \chi Z/(at_*)$. Интегрируя по $t \in [0, t_*]$ граничное условие $P - bc_0^2(t) = F_0(t)$ с подстановкой $c_0(t) \approx \bar{c}_0[1 - \exp\{-at\}]$, получаем $M_* \approx (P - \bar{J})3/2a$ в соотношениях (8), (9). В качественном отношении, по-видимому, предпочтительнее $f(t) = \bar{c}_0(1 - \exp\{-a/t\})$ ($a/\hat{t} \approx 5 - 7$).

Другой вариант: интегрируя по $t \in [0, t_*]$ граничное условие (2) при $x = 0$, имеем

$$(P - \bar{J})t_* - M_* = \int_0^{t_*} bc_0^2(t) dt = b\alpha\bar{c}_0 \int_0^{t_*} c_0(t) dt.$$

Параметр α появился вследствие теоремы о среднем: $\alpha\bar{c}_0 = c_0(\xi)$, $\xi \in (0, t_*)$ ($c_0(t) \approx \bar{c}_0 \Rightarrow \alpha \approx 1$). Подставляя интеграл от $c_0(t)$ из уравнения (13), имеем выражение для M_* , которое следует подставить в (8), (9). С учетом $z = \ell\sqrt{b}/D$, $z\bar{I} = \chi - 1$ получим явное выражение для D . Остается поварьировать α в окрестности единицы.

Заключение. Параметры поверхностных и диффузионных процессов определяются в одном эксперименте. Это представляется более корректным, чем использование «табличных данных» по каждому коэффициенту в отдельности из различных источников. Достаточно лишь информации о плотности десорбционного потока с выходной стороны мембраны, на входе «черного ящика» можно не проводить измерений. Но, естественно, при этом алгоритм идентификации, образно говоря, теряет хорошую обусловленность и некорректность обратной задачи усиливается. Рассмотренный диапазон порядков величин

слишком велик для однозначных рекомендаций. В конкретном случае, когда из физических соображений известен достаточно узкий диапазон, следует переходить к безразмерным переменным x_i : $D = \tilde{D}x_1$, $b = \tilde{b}x_2$, $s = \tilde{s}x_3$ (волной фиксируются характерные порядки). Например, уравнение стационара (5) переписется в форме

$$\sqrt{\alpha x_3 - 1} - \beta X = 1, \quad \alpha \equiv \frac{\mu \tilde{s} \tilde{p}_0}{\tilde{J}}, \quad \beta \equiv \frac{\tilde{I} \ell \sqrt{\tilde{b}}}{\tilde{D}}, \quad X \equiv \frac{\sqrt{x_2}}{x_1}.$$

На заключительном этапе, когда получено решение в окрестности «истинного», целесообразно дополнительно применить локально сходящийся алгоритм метода наименьших квадратов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кунин Л. Л., Головин А. И., Суровой Ю. И., Хохрин В. М. Проблемы дегазации металлов. М.: Наука, 1972.
2. Бекман И. Н., Габис И. Е., Компаниец Т. И., Курдюмов А. А., Лясников В. Н. Исследование водородопроницаемости в технологии производства изделий электронной техники/ Обзоры по электронной технике, серия 7, вып. 1 (1084). М.: ЦНИИ "ЭЛЕКТРОНИКА", 1985.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

УДК 519.6, 539.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТДС-ДЕГАЗАЦИИ ПЛАСТИНЫ

Ю. В. Заика, Е. К. Костикова

Рассматривается дегазация пластины, предварительно насыщенной водородом. Эксперимент проводится методом термодесорбционной спектроскопии (ТДС). В работе приводятся результаты численного моделирования. В соответствующей нелинейной краевой задаче учтены основные лимитирующие факторы: процессы диффузии и десорбции.

Постановка задачи. Экспериментальный метод термодесорбционной спектроскопии (ТДС) является одним из основных при исследовании взаимодействия водорода с твердым телом (см., например, [1, 2]). Рассмотрим один из простейших вариантов. Пластина из металла или сплава помещается в камеру с газообразным водородом. После насыщения образца растворенным (атомарным) водородом камера вакуумируется, и с помощью масс-спектрометра определяется десорбционный поток. По этой экспериментальной информации судят о тех или иных характеристиках взаимодействия водорода с исследуемым материалом. В данной статье остановимся лишь на прямой задаче. Обратные задачи параметрической идентификации моделей — предмет отдельных публикаций.

Рассмотрим следующую краевую задачу ТДС-дегазации:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in (0, \ell), \quad c(0, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \ell], \quad (1)$$

$$D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} = bc_0^2, \quad D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = -bc_\ell^2, \quad c_0(t) \equiv c(t, 0), \quad c_\ell(t) \equiv c(t, \ell). \quad (2)$$

Здесь $c(t, x)$ — концентрация растворенного водорода, D, b — коэффициенты диффузии и десорбции. Квадратичность десорбции обусловлена соединением атомов в молекулы в приповерхностном объеме.

Параметры D , b зависят от температуры T . Обычно используют закон Аррениуса: $D(T) = D_0 \exp\{-E_D/[RT]\}$, $b(T) = b_0 \exp\{-E_b/[RT]\}$, $D_0, b_0, E_D, E_b = \text{const}$. В простейшем варианте эксперимент проводят при фиксированной $T = \bar{T}$, так что в дальнейшем $D, b = \text{const}$.

Если начальное насыщение считать равномерным ($\varphi(x) = \bar{c}$), то решение краевой задачи понимается как обобщенное. Поскольку по постановке эксперимента концентрация симметрична относительно середины пластины и начальное вакуумирование длится некоторое (пусть и малое) время, то разумно принять

$$\varphi(x) = \bar{c} - A \cdot (x - \ell_m)^2, \quad A > 0, \quad \ell_m = \ell/2.$$

Константа A определяется подстановкой в граничные условия (2). Без принципиальных изменений используются и более высокие степени.

Требуется вычислить плотность десорбции $J(t) = bc_0^2(t) = bc_\ell^2(t)$ на отрезке времени $[0, t_*]$, $J(t_*) \approx 0$. Эта функция определяется из эксперимента, так что модельный поток $J(t)$ необходим для обоснования и тестирования методов параметрической идентификации.

Решение краевой задачи: разностная схема. Следуя стандартной методике [3, 4], введем сетку $\bar{\omega}_h^\tau$ с фиксированными шагами τ , h по t , x в замкнутой области $\bar{\Omega} = [0, t_*] \times [0, \ell]$. Обозначим через k , i ($k \in \{0, \dots, M\}$, $i \in \{0, \dots, N\}$, $\tau = t_*/M$, $h = \ell/N$) номера узлов по t , x , а через c_i^k приближенные значения концентрации $c(t_k, x_i)$ в узлах сетки. Заменим производные разностными аналогами:

$$\frac{c_n^k - c_{n-1}^{k-1}}{\tau} = D \frac{c_{n+1}^k - 2c_n^k + c_{n-1}^k}{h^2}.$$

Обозначив $s = h^2/(D\tau)$, получаем $c_{n-1}^k - (2 + s)c_n^k + c_{n+1}^k = -sc_{n-1}^{k-1}$. Значения в начальный момент времени (на нулевом слое) известны: $c_i^0 = \varphi(x_i)$. Применяя метод прогонки, ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки в виде

$$c_{n-1}^k = \alpha_{n-1}c_n^k + \beta_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Прогоночные коэффициенты: $\alpha_n = \frac{1}{2+s-\alpha_{n-1}}$, $\beta_n = \alpha_n(\beta_{n-1} - c_n^{k-1})$.

Изложим алгоритм вычислений на k -ом слое по времени.

1. Значения в первом и втором узлах вычисляем по явной схеме:

$$c_i^k = \frac{1}{s} \left(c_{i+1}^{k-1} - (2 - s)c_i^{k-1} + c_{i-1}^{k-1} \right), \quad i = 1, 2.$$

2. В граничных узлах с точностью до $O(h^2)$ имеем

$$c_x(t_k, 0) \approx (-c_2^k + 4c_1^k - 3c_0^k)/2h, \quad (4)$$

$$c_x(t_k, \ell) \approx (c_{N-2}^k - 4c_{N-1}^k + 3c_N^k)/2h. \quad (5)$$

Из краевого условия $b(c_0^k)^2 = D[-c_2^k + 4c_1^k - 3c_0^k]/2h$ получаем квадратное уравнение для c_0^k . Корни уравнения имеют разные знаки, выбираем положительный по физическому смыслу.

3. Вычислив приближенное значение концентрации c_0^k , находим начальные прогоночные коэффициенты $\alpha_0 = (2 - s)/\gamma$, $\beta_0 = c_1^k s/\gamma$ ($\gamma = 2hc_0^k b/D + 2$), а по ним и все остальные.
4. На границе $x = \ell$ с учетом аппроксимации (5) и прогоночного соотношения (3), коэффициенты в котором уже известны, получаем квадратное уравнение относительно c_N^k . При этом значения c_{N-2}^k , c_{N-1}^k выражаются через α_{N-2} , α_{N-1} , β_{N-2} , β_{N-1} и c_N^k . Из корней уравнения выбираем положительный.
5. Вычисляем остальные c_i^k , $i = 1, 2, \dots, N-1$, в соответствии с (3).
6. Дальнейший расчет итерационный: подставляем c_1^k , c_2^k , c_{N-2}^k , c_{N-1}^k (из предыдущего пункта) в (4–5); из граничных условий для c_0^k , c_N^k получаем квадратные уравнения; снова применяем прогонку — и так до установления. В рассматриваемом физически оправданном диапазоне параметров ($D : 10^{-8} - 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$; $b : 10^{-20} - 10^{-14} \text{ см}^4/\text{с}$; $\bar{c} : 10^{16} - 10^{18} \text{ 1/см}^3$) обычно требуется одна–две итерации.

Симметрия задачи являлась одним из критериев правильности счета. Основной критерий — выполнение материального баланса:

$$\int_0^\ell \varphi(x) dx = \int_0^\ell c(t, x) dx + 2 \int_0^t J(\tau) d\tau, \quad J(t) = bc_{0,\ell}^2(t).$$

Результаты численного моделирования (рис. 1, 2) полностью соответствуют физическим представлениям. При этом из-за большого разброса порядков величин проводилось масштабирование:

$$x = \ell z, \quad z \in [0, 1], \quad u = c/\bar{c}, \quad u_t = \hat{D}u_{zz}, \quad \hat{D}u_z|_{0,1} = \pm \hat{b}u_{0,1}^2 \equiv \pm \hat{J},$$

$$\hat{D} = D/\ell^2, \quad \hat{b} = b\bar{c}/\ell, \quad \hat{A} = A\ell^2/\bar{c}.$$

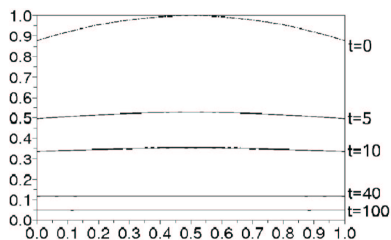
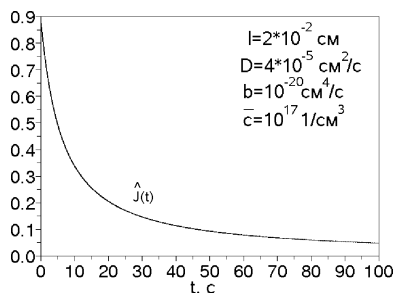

 Рис. 1. Относительная концентрация $u(t, z)$.


Рис. 2. Плотность десорбции.

Применение функции Грина. После того, как получена функция $J(t) = bc_{0,\ell}^2(t)$ (с достаточно малым шагом дискретности τ), можно рассмотреть следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(0, x) = \varphi(x), \quad D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} = J(t), \quad D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = -J(t).$$

Поскольку функция $J(t)$ известна, имеем классическую задачу математической физики с граничными условиями второго рода. Для $\varphi(x) = \bar{c}$ решение краевой задачи представимо в форме [5, гл. 2]

$$c(t, x) = \bar{c} - \int_0^t D^{-1} J(\tau) \{G(x, t; 0, \tau) + G(x, t; \ell, \tau)\} d\tau,$$

$$G(x, t; y, \tau) = \frac{1}{\ell} + \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} (\tau - t) \right\} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi y}{\ell},$$

где G — функция Грина. В обратной задаче функция $J(t)$ задается по результатам ТДС-эксперимента, так что для параметрической идентификации можно использовать соотношение $J = bc_{0,\ell}^2$. Поэтому далее нас интересует представление граничной концентрации $c_0(t)$.

Можно получить более адекватное эксперименту выражение $c_0(t)$, учитывая начальный «прогиб» $\varphi(x) = \bar{c} - A[x - \ell/2]^2$, $A > 0$:

$$c_0(t) = \bar{c} - \frac{2}{\ell} \int_0^t J(\tau) d\tau - \frac{J(0)}{D} \left[\frac{\ell}{12} + \frac{4}{\ell} \sum_{n=2k} \frac{1}{\mu_n} \exp \{ -\mu_n D t \} \right] -$$

$$- \frac{4}{\ell} \sum_{n=2k} \int_0^t \exp \{ -\mu_n D [t - \tau] \} J(\tau) d\tau, \quad \mu_n = \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2, \quad J(0) = DA\ell.$$

Сложность использования этой формулы заключается в сочетании операций интегрирования и суммирования ряда. Сначала следует по-членно вычислять интегралы, а затем суммировать. Интегралы

$$J_n(t) = \int_0^t \exp \left\{ - \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 D [t - \tau] \right\} J(\tau) d\tau$$

удобно вычислять, используя процедуру интегрирования линейного дифференциального уравнения (с нормировкой $J_{\max}$):

$$\dot{J}_n(t) = - \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 D J_n(t) + J(t), \quad J_n(0) = 0.$$

В общем случае $J(0) \gg 1$ и задача может оказаться жесткой. В пакете Scilab были построены графики J_n , $n = 2, 4, \dots, 12$. Все значения J_{n+2} ($t > t_0 > 0$) существенно меньше значений J_n . Рассматриваемый ряд достаточно быстро сходится, при численной реализации он заменялся суммой первых 5 членов. Сравнение графиков функций $c_0(t)$, соответствующие построениям п. 2, 3, показывает, что функция Грина (для линейной задачи) может быть эффективно использована для оценки параметров исходной нелинейной модели. Иллюстрации приведены на рис. 3–5 ($\ell = 2 \cdot 10^{-2}$, $D = 4 \cdot 10^{-5}$, $b = 10^{-20}$, $\bar{c} = 10^{17}$).

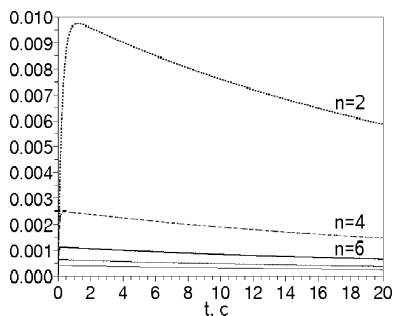


Рис. 3. Графики функций J_n

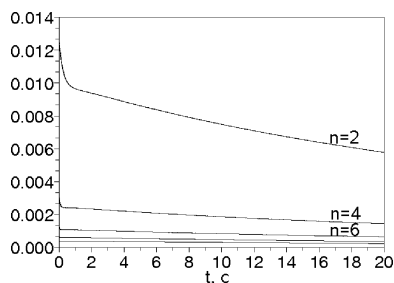


Рис. 4. Графики функций $4A \exp\{-\mu_n D t\} / \mu_n + 4J_n(t) / \ell$

Первое приближение. Экспериментальные погрешности могут достигать нескольких десятков процентов (при определении плотности десорбции $J(t)$). В такой ситуации вполне целесообразно для грубых

оценок D , b использовать простейшую модель. «Куполообразный» характер распределения $c(t, x)$ известен. Поэтому разумно в качественном плане за первое приближение взять параболу

$$c(t, x) \approx \tilde{c}(t, x) = B(t) - A(t)(x - \ell_m)^2, \quad \ell = 2\ell_m, \quad B(0) = \bar{c}.$$

Симметрия выполнена, полагаем $B(t) > 0$, $A(t) > 0$, $t \geq 0$. Из краевого условия $Dc_x(t, 0) = b c^2(t, 0)$ получаем

$$B(t) = \sqrt{D\ell A(t)b^{-1}} + A(t)\ell_m^2, \quad B(0) = \bar{c} = \sqrt{D\ell A(0)b^{-1}} + A(0)\ell_m^2,$$

откуда однозначно находим $A(0)$, учитывая $A > 0$. Таким образом, получили первое приближение в виде движущейся параболы с одним неизвестным функциональным параметром $A(t)$:

$$\tilde{c}(t, x) = \sqrt{D\ell A(t)b^{-1}} - A(t)x(x - \ell).$$

Подчиним указанное приближение материальному балансу

$$\int_0^\ell \tilde{c}(0, x) dx - 2b \int_0^t \tilde{c}^2(\tau, 0) d\tau = \int_0^\ell \tilde{c}(t, x) dx.$$

Продифференцируем по t балансовое соотношение с учетом граничного условия. Получим уравнение с разделяющимися переменными

$$-2DA = \dot{A} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D\ell}{bA}} + \frac{\ell^2}{6} \right).$$

Проинтегрировав его, получаем явное выражение $t = t(A)$:

$$t = \frac{\ell^2}{12D} \ln \left(\frac{A(0)}{A} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\ell}{Db}} \left(\frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{A(0)}} \right).$$

Используя в пакете Scilab встроенную функцию решения уравнений, восстанавливаем значения $A(t)$. На рис. 6 показаны профили концентрации, полученные разностным методом и параболической аппроксимацией. Отличия, разумеется, есть, но вычислительные затраты на параболическое приближение несопоставимо меньше.

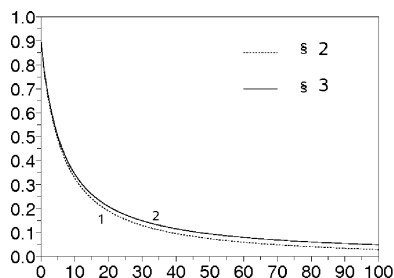


Рис. 5. Графики концентрации $u_0(t)$: 1 — § 2; 2 — § 3.

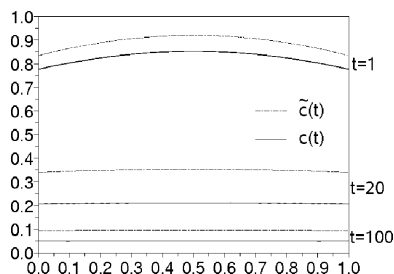


Рис. 6. Графики концентрации и ее приближения параболой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кунин Л. Л., Головин А. И., Суровой Ю. И. Хохрин В. М. Проблемы дегазации металлов. М.: Наука, 1972.
2. Гидридные системы. Справочник / Колачев Б. А., Ильин А. А., Лавренко В. А., Левинский Ю. В. М.: Металлургия, 1992.
3. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
4. Власова Е. А., Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Приближенные методы математической физики. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001.
5. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.

УДК 517.9

ДВОЙСТВЕННОСТЬ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА

А. П. ИВАНОВ, Ю. Я. ОСТОВ

Решается задача оптимизации траектории продольного движения центра масс летательного аппарата (ЛА), совершающего полёт из начальной точки атмосферного пространства в заданную конечную точку на поверхности Земли. Критерием оптимальности траектории (управления) является максимум кинетической энергии ЛА в конечной точке траектории.

Оптимальное управление, найденное как результат решения краевой задачи на основе принципа максимума в его классической формулировке, является программным управлением, и при наличии всякого рода возмущений оказывается неэффективным, т. е. не обеспечивает оптимум заданного критерия качества [1]. Поэтому, если говорить о прикладном аспекте решения задачи, достаточно построить управление, при котором значение оптимизируемого функционала отличается от его оптимального значения не более, чем на заданную величину. Такое управление будем называть субоптимальным управлением.

Новый вариационный метод применим к решению следующей задачи: оптимизировать траекторию продольного движения центра масс (ЦМ) летательного аппарата (ЛА), совершающего полёт из начальной точки атмосферного пространства в заданную конечную точку на поверхности Земли. Критерием оптимальности траектории (управления) является максимум кинетической энергии ЛА в конечной точке траектории.

Движение ЦМ ЛА описывается следующими уравнениями [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{X}{m} - g \sin \theta, & V(0) &= V_0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{Y}{mV} - \frac{g \cos \theta}{V}, & \theta(0) &= \theta_0, \\ \frac{dH}{dt} &= V \sin \theta, & H(0) &= H_0, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \beta \bar{\rho} V, & \xi(0) &= \xi_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $V(t)$ — модуль скорости, $\theta(t)$ — угол наклона траектории к горизонту, $H(t)$ — высота над поверхностью Земли, $\xi(t)$ — безразмерная «взвешенная» длина траектории, t — текущий момент времени, $t \in [0, T]$, m — масса ЛА, g — модуль ускорения свободного падения, $X = (C_{x0} + C_{xi}\alpha^2)\rho V^2 S/2$ — лобовое сопротивление, $Y = C_y^\alpha \alpha \rho V^2 S/2$ — подъемная сила ЛА, $\rho = \rho_0^* \exp(-\beta H)$ — плотность атмосферы на высоте H , $\bar{\rho} \equiv \rho/\rho_0^*$, α — угол атаки (управление).

В данной модели C_{x0} , C_{xi} , C_y^α , S , m , ρ_0^* , β , g — заданные константы. Множество A допустимых значений угла атаки α является открытым. Ставится задача: максимизировать кинетическую энергию

$$J(\alpha) = \varphi(V(T)) = \frac{mV^2(T)}{2} \quad (2)$$

при заданных значениях высоты и «взвешенной» длины траектории полета в конечный момент времени T , т. е.

$$H(T) - H_T = 0, \quad \xi(T) - \xi_T = 0, \quad (3)$$

где H_T и ξ_T — заданные константы. Угол $\theta(T)$ и конечный момент времени T не фиксированы, что не влияет на общность подхода к решению задачи.

На первом этапе решения поставленной задачи исходная система (1) преобразуется к виду [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dV_l}{d\xi} &= -\left(\bar{c}_{x0} + \frac{\bar{c}_y^2}{2d}\right) V_l - \bar{c}_y V_h, & V_l(\xi_0) &= V_{l0}, \\ \frac{dV_h}{d\xi} &= \bar{c}_y V_l - \left(\bar{c}_{x0} + \frac{\bar{c}_y^2}{2d}\right) V_h - \frac{\bar{g}}{\bar{\rho}\sqrt{V_l^2 + V_h^2}}, & V_h(\xi_0) &= V_{h0}, \\ \frac{d\bar{\rho}}{d\xi} &= -\frac{V_h}{\sqrt{V_l^2 + V_h^2}}, & \bar{\rho}(\xi_0) &= \bar{\rho}_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0^*} = \exp(-\bar{h}), \quad \bar{h} = \beta H, \quad \bar{g} = \frac{g}{\beta},$$

$$\bar{c}_{x0} = \frac{C_{x0}\rho_0^*S}{2m\beta}, \quad d = \frac{(C_y^\alpha)^2\rho_0^*S}{4m\beta C_{xi}}, \quad \bar{c}_y = \frac{(C_y^\alpha)\rho_0^*S\alpha}{2m\beta},$$

а V_l и V_h — проекции скорости $\bar{V}$ ЦМ ЛА соответственно на горизонтальную и вертикальную оси инерциальной системы.

Соответственно функционал (2) и ограничения (3) переписутся в виде:

$$\tilde{J}(u) = \tilde{\varphi}((V_l^2 + V_h^2)(\xi_T)) = V^2(\xi_T),$$

$$\bar{\rho}(\xi_T) - \bar{\rho}_T = 0, \quad \xi \in [\xi_0, \xi_T], \quad \xi_0 \triangleq 0, \quad \xi_T > 0.$$

Как следует из приведенных выше соотношений, ЛА обладает параболической полярой, т. е. коэффициент лобового сопротивления связан с коэффициентом аэродинамической подъемной силы соотношением $\bar{c}_x = \bar{c}_{x0} + \bar{c}_y^2/2d$, где $\bar{c}_{x0}$ и d — положительные константы. Из последнего соотношения следует $y = 2\sqrt{x-a}/b$, где приняты обозначения $y = \bar{c}_y$, $x = \bar{c}_x$, $a = \bar{c}_{x0}$, $b = \sqrt{2/d}$.

Обозначим $G(x) = 2\sqrt{x-a}/b$. Пусть x_k — коэффициент лобового сопротивления. Касательная к кривой $G(x)$ в точке $x = x_k$:

$$y = \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=x_k} (x - x_k) + G(x_k) = \frac{(x - x_k)}{b\sqrt{x_k - a}} + 2\frac{\sqrt{x_k - a}}{b}.$$

Обозначим точку пересечения этой прямой с осью Ox через z , т. е.

$$0 = \frac{(z - x_k)}{b\sqrt{x_k - a}} + 2\frac{\sqrt{x_k - a}}{b}.$$

Откуда следует

$$x_k + z = 2a, \quad a = \text{const.} \quad (5)$$

С учетом последних двух соотношений уравнение касательной принимает вид

$$y = \frac{(x - z)}{b\sqrt{a - z}}.$$

Точку z будем называть сопряженной точкой по отношению к x_k . Таким образом, точке параболы $(\bar{c}_x = x, \bar{c}_y = y)$ сопоставлено уравнение

прямой (в пространственном случае — уравнение гиперплоскости, которое соответствует преобразованию Лежандра применительно к параболоиду). Теперь система уравнений (4) перепишется в виде

$$\begin{aligned}\frac{dV_l}{d\xi} &= -\bar{c}_x V_l - \frac{(\bar{c}_x - z)}{b\sqrt{a-z}} V_h, & V_l(\xi_0) &= V_{l0}, \\ \frac{dV_h}{d\xi} &= \frac{(\bar{c}_x - z)}{b\sqrt{a-z}} V_l - \bar{c}_x V_h - \frac{\bar{g}}{\bar{\rho}\sqrt{V_l^2 + V_h^2}}, & V_h(\xi_0) &= V_{h0}, \\ \frac{d\bar{\rho}}{d\xi} &= -\frac{V_h}{\sqrt{V_l^2 + V_h^2}}, & \bar{\rho}(\xi_0) &= \bar{\rho}_0.\end{aligned}\quad (6)$$

Система уравнений (6) при переходе к новой независимой переменной $\bar{\rho}$ примет вид

$$\begin{aligned}\frac{dV_l}{d\bar{\rho}} &= \frac{\bar{c}_x V_l \sqrt{V_l^2 + V_h^2}}{V_h} + \frac{(\bar{c}_x - z) \sqrt{V_l^2 + V_h^2}}{b\sqrt{a-z}}, \\ \frac{dV_h}{d\bar{\rho}} &= -\frac{(\bar{c}_x - z) V_l \sqrt{V_l^2 + V_h^2}}{bV_h \sqrt{a-z}} + \bar{c}_x \sqrt{V_l^2 + V_h^2} + \frac{\bar{g}}{\bar{\rho} V_h}, \\ \frac{d\xi}{d\bar{\rho}} &= -\frac{\sqrt{V_l^2 + V_h^2}}{V_h}.\end{aligned}\quad (7)$$

Гамильтониан системы уравнений (7) и сопряженная система уравнений теперь запишутся так:

$$H = \Psi_0 \frac{dV_l}{d\bar{\rho}} + \Psi_1 \frac{dV_h}{d\bar{\rho}} + \Psi_2 \frac{d\xi}{d\bar{\rho}}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_0}{d\bar{\rho}} &= -\frac{\partial H}{\partial V_l} = -\Psi_0 \Phi_0 - \Psi_1 \Phi_1 - \Psi_2 \Phi_2, \\ \frac{d\Psi_1}{d\bar{\rho}} &= -\frac{\partial H}{\partial V_h} = -\Psi_0 \Phi_3 - \Psi_1 \Phi_4 - \Psi_2 \Phi_5, \\ \frac{d\Psi_2}{d\bar{\rho}} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi} = 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \frac{\bar{c}_x V}{V_h} + \frac{\bar{c}_x V_l^2}{V_h V} + \frac{(\bar{c}_x - z)V_l}{bV\sqrt{a-z}}, \\ \Phi_1 &= -\frac{(\bar{c}_x - z)V}{bV_h\sqrt{a-z}} - \frac{(\bar{c}_x - z)V_l^2}{bV V_h\sqrt{a-z}} + \frac{\bar{c}_x V_l}{V}, \\ \Phi_2 &= -\frac{V_l}{V V_h}, \quad \Phi_3 = \frac{-\bar{c}_x V_l^3}{V V_h^2} + \frac{(\bar{c}_x - z)V_h}{bV\sqrt{a-z}}, \\ \Phi_4 &= \frac{(\bar{c}_x - z)V_l^3}{bV V_h^2\sqrt{a-z}} + \frac{\bar{c}_x V_h}{V} - \frac{\bar{g}}{\bar{\rho} V_h^2}, \quad \Phi_5 = \frac{V_l^2}{V V_h^2}.\end{aligned}$$

Так как $V = \sqrt{V_l^2 + V_h^2} > 0$, то условие стационарности гамильтониана (8) относительно управления $\bar{c}_x$ можно представить в виде:

$$F_1 = \frac{1}{V} \frac{\partial H}{\partial \bar{c}_x} = \Psi_0 \left(\frac{V_l}{V_h} + \frac{1}{b\sqrt{a-z}} \right) + \Psi_1 \left(-\frac{V_l}{bV_h\sqrt{a-z}} + 1 \right) = 0. \quad (10)$$

Условие стационарности гамильтониана (8) относительно $z(\bar{\rho})$ при ограничении $(a - z) > 0$:

$$-\frac{1}{V} \frac{\partial H}{\partial z} 2b(a - z)^{3/2} = \left(\Psi_0 - \Psi_1 \frac{V_l}{V_h} \right) (2a - \bar{c}_x - z) = 0.$$

Первый сомножитель в правой части этого выражения отличен от нуля (иначе с учетом соотношения (10) $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$), второй сомножитель (модификация соотношения (5)) равен нулю.

В силу нестационарности системы (7) гамильтониан (8) на экстремали является функцией $\bar{\rho}$, т. е. $H = H(\bar{\rho})$. Из соотношений (6), (7) следует, что $H(\bar{\rho}) = -C\sqrt{V_l^2 + V_h^2}/V_h$, где $C = \text{const} > 0$. Поэтому с учетом соотношения (10) выражение (8) можно преобразовать к интегралу следующего вида:

$$F_2 = \left(\frac{\Psi_0 V_l}{V_h} + \Psi_1 \right) z + \frac{C - \Psi_2}{V_h} + \frac{\Psi_1 \bar{g}}{\sqrt{V_l^2 + V_h^2} \bar{\rho} V_h} = 0. \quad (11)$$

Дифференцируя интегралы $F_1(X(\bar{\rho}), z(\bar{\rho})) = 0$ и $F_2(X(\bar{\rho}), z(\bar{\rho}), \bar{\rho}) = 0$ по $\bar{\rho}$, где $X = (V_l, V_h, \Psi_0, \Psi_1)$ в силу системы (7), (9) и исключив переменную $dz/d\bar{\rho}$, получим интеграл $F_3 = 0$ в виде

$$F_3 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0,$$

где

$$a_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial X} \frac{dX}{d\bar{\rho}}, \quad a_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial z},$$

$$a_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad a_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial X} \frac{dX}{d\bar{\rho}} + \frac{\partial F_2}{\partial \bar{\rho}}.$$

В развернутом виде

$$F_3 = \frac{\bar{g}}{\bar{\rho}^2 V} \Psi_1 + \left(\frac{-2\sqrt{a-z} V_l V}{b V_h^2} + \frac{\bar{g} V_l^2}{\bar{\rho} V^2 V_h^2} \right) C = 0. \quad (12)$$

Переменные Ψ_0 и Ψ_1 выражаются из уравнений (10), (11):

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \frac{(V_l - b\sqrt{a-z} V_h) \bar{\rho} V (\Psi_2 - C)}{z V^3 \bar{\rho} + \bar{g} b \sqrt{a-z} V_l + V_h \bar{g}}, \\ \Psi_1 &= \frac{(b\sqrt{a-z} V_l + V_h) (\Psi_2 - C) \bar{\rho} V}{z V^3 \bar{\rho} + \bar{g} b \sqrt{a-z} V_l + V_h \bar{g}}. \end{aligned}$$

Подстановка последнего соотношения в интеграл $F_3 = 0$ с учетом соотношения (5) приводит к уравнению 3-ей степени относительно сопряженной переменной z :

$$P \equiv P_1^2 (a - z) - P_0^2 = 0, \quad (13)$$

причем можно положить параметр $\Psi_2 = C_1 + C$, а $C = 1$. В этом случае для P_0 и P_1 имеем:

$$\begin{aligned} P_0 &= 3 \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} z + \frac{\bar{g} \cos^2 \theta}{\bar{\rho} V^2 \sin \theta} + \frac{\sin \theta C_1}{\bar{\rho}} - 2 \frac{\cos^2 \theta a}{\sin^2 \theta}, \\ P_1 &= -2 \frac{\bar{\rho} V^2 \cos \theta}{\sin^2 \theta b \bar{g}} z + \frac{\bar{g} b \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta V^2 \bar{\rho}} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta b} + \frac{b \cos \theta C_1}{\bar{\rho}}, \end{aligned}$$

где $\theta = \arctg \left(\frac{V_h}{V_l} \right)$, $V = \sqrt{V_l^2 + V_h^2}$, $a = \bar{c}_{x0}$.

Третий интеграл может быть вычислен по формуле: $\hat{F}_3 = \frac{\partial H}{\partial X} = 0$. В этом случае уравнение относительно переменной z принимает следующий вид:

$$\hat{P} \equiv \hat{P}_1^2 (a - z) - \hat{P}_0^2 = 0, \quad (14)$$

где полиномы $\hat{P}_0$ и $\hat{P}_1$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} P_0 &= -\frac{3 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} z - \frac{\bar{g} \cos^2 \theta}{\bar{\rho} V^2 \sin \theta} - \frac{C_1 \sin \theta}{\bar{\rho}} + \frac{2a \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}, \\ \hat{P}_1 &= \frac{2 \cos \theta \cdot \left(b^2 C_1 \sin \theta + \frac{V^2 \bar{\rho}}{\bar{g}} \right)}{b \sin^2 \theta} z - \frac{C_1 b \cos \theta}{\bar{\rho}} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2 \cos \theta}{b \sin \theta} - \frac{2a b C_1 \cos \theta}{\sin \theta} - \frac{b \bar{g} \cos^3 \theta}{V^2 \bar{\rho} \sin^2 \theta}.$$

Результаты численного моделирования, приведенные ниже, подтверждают эффективность рассмотренной методики. Синтезированное по упрощённой модели управление $\bar{c}_x$ находилось из соотношения $\bar{c}_x = 2a - z$, где z – корень уравнения (13) при текущих значениях фазовых переменных θ , $\bar{\rho}$, V и пересчитывалось в угол атаки α , который в исходной системе (1) является управлением. При этом константы b и C_1 , от которых зависят коэффициенты полинома (13), должны быть подобраны так, чтобы были выполнены заданные граничные условия (3). Система уравнений (1) интегрировалась методом Рунге-Кутты (4-го порядка точности на шаге) с шагом $h_u = 0.02$ при следующих значениях параметров ЛА и атмосферы: $C_{x0} = 0.1931$; $C_{xi} = 5.88$; $C_y^\alpha = 0.8548046$; $m = 422$; $S = 0.159$; $g = 9.81$.

Вариант 1: $\rho_0^* = 2.047$; $\beta = 1.5682 \cdot 10^{-4}$.

Вариант 2: $\rho_0^* = 1.225$; $\beta = 1.4280 \cdot 10^{-4}$.

Начальная точка траектории в обоих вариантах одна и та же: $\xi(0) = 0.00$; $H(0) = 24054.5$; $V(0) = 1088.31$; $\theta(0) = -0.54113$. Терминальные ограничения (3), (4) в обоих вариантах следующие: $H(T) - 0 = 0$; $\xi(T) - 1.42500 = 0$. Результаты счета для этих вариантов приведены соответственно в табл. 1 и 2.

ТАБЛИЦА 1

Параметр	Упрощенная модель	Полная модель
b	13.375710	—
C_1	0.422616910	—
T	37.88	37.88
$\xi(T)$	1.42500	1.42500
$H(T)$	0.00000	0.00000
$V(T)$	700.84704	700.8499
$\theta(T)$	-0.844170	-0.844283

ТАБЛИЦА 2

Параметр	Упрощенная модель	Полная модель
b	6.633430	---
C_1	0.999963	---
T	36.18	36.16
$\xi(T)$	1.42500	1.42500
$H(T)$	-0.00001	0.0000
$V(T)$	858.9485	858.96097
$\theta(T)$	-0.829500	-0.826503

Третий вариант отличается от первого начальной точкой траектории: $\xi(0) = 0.0$; $H(0) = 30000.0$; $V(0) = 1200.0$; $\theta(0) = -0.4$, а также ограничением (4) на конечную точку траектории: $\xi(T) - 1.6500 = 0$. Остальные параметры соответствуют варианту 1.

Результаты счёта варианта 3 приведены в табл. 3.

ТАБЛИЦА 3

Параметр	Упрощенная модель	Полная модель
b	4.87190	---
C_1	0.7479072	---
T	50.93	51.01
$\xi(T)$	1.6500	1.6500
$H(T)$	-0.00001	0.00000
$V(T)$	695.8655	695.93738
$\theta(T)$	-0.72382	-0.72557847

Полиномы P и $\hat{P}$ имеют один корень z , являющийся общим вещественным положительным корнем этих полиномов, и он находится методом Евклида, что позволяет свести задачу построения субоптимального управления движением ЦМ ЛА к решению линейного алгебраического уравнения. В табл. 4 приведены результаты решения задачи для первого варианта (см. табл. 1), полученные с использованием уравнения третьей степени (см. табл. 4, п.1), и для для этого же варианта — с использованием линейного уравнения (см. табл. 4, п. 2).

Таблица 4

№ п/п	$V(T)$	$\theta(T)$	$H(T)$	$\xi(T)$
1	700.84704	-0.84417	0.00000	1.4250
2	700.84703	-0.84417	-0.00050	1.4250

Примечание: под полной моделью следует понимать традиционную схему решения задачи (1)–(3) на основе принципа максимума Л.С.Понтрягина в его классической формулировке. При управлении, синтезированном по упрощённой модели, система (1), (13) интегрируется примерно в 1.8 раза быстрее, чем при использовании традиционной схемы решения задачи (1)–(3), т. к. отпадает необходимость интегрировать сопряжённую систему (9).

Следует заметить, что представление (12) интеграла $F_3 = 0$ является не единственным, т. е. можно получить лучшее приближение оптимального значения функционала (2), а последнее уравнение системы (1) можно заменить другим соотношением, например, уравнением нормированной горизонтальной дальности $dl/dt = \beta V \cos \theta$ или уравнением “взвешенной” горизонтальной дальности $d\sigma/dt = \beta \bar{\rho} V \cos \theta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кишин Н.Е. Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. Л.: ЛГУ, 1975.
2. Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М.: Наука, 1969.
3. Иванов А.П., Остов Ю.Я. Двойственность и принцип расширения в задаче динамики полета // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ КарНЦ РАН, вып. 7. Петрозаводск, 2006, 26–34.

УДК 519.244.5

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА НАИЛУЧШЕГО ВЫБОРА С РАЗЛАДКОЙ С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ

Е. Е. ИВАШКО

В статье рассматривается игровая задача наилучшего выбора с разладкой, в которой игроки имеют различные приоритеты принятия наблюдений. В качестве критерия оптимальности используется максимизация среднего полученного игроком значения. Решение ищется в классе однопороговых стратегий. Для данной задачи были получены уравнения оптимальности. Рассмотрены предельный (при бесконечном числе наблюдений) и частный (один из игроков всегда имеет приоритет выбора наблюдения) случаи. Представлены результаты численного моделирования.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из классов задач, исследуемых в рамках теории игр, являются задачи наилучшего выбора. Впервые задача наилучшего выбора была рассмотрена в статье [1], где из последовательности известного числа независимых одинаково распределенных случайных величин необходимо с наибольшей вероятностью выбрать максимальное значение.

В книгах [2,3] описано решение так называемой «задачи о разладке», в которой в случайный момент времени происходит изменение закона распределения наблюдений (разладка), и требуется обнаружить этот момент как можно раньше. Позже в работе [4] была рассмотрена проблема максимизации среднего значения, выбранного из последовательности независимых случайных величин, закон распределения которых изменяется в случайный момент времени (момент разладки).

В данной статье рассматривается новая теоретико-игровая постановка задачи наилучшего выбора — игровая задача наилучшего выбора с разладкой, в которой два игрока в условиях конкуренции стремятся максимизировать среднее значение, выбранное из последовательности случайных величин, закон распределения которых изменяется в случайный момент разладки.

Указанная задача является обобщением задачи, рассмотренной в работе [5], на случай разладки. Данная статья продолжает исследование класса задач наилучшего выбора с разладкой, начатое в работах [6, 7].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим производящую систему, генерирующую последовательность из n независимых одинаково распределенных случайных величин (н.о.р.с.в.). В каждый момент времени (перед генерацией каждой новой случайной величины) система переходит в одно из двух состояний: G или B — в результате разладки — B со следующей матрицей переходов:

$$\begin{array}{c|cc} & G & B \\ \hline G & \alpha & 1 - \alpha \\ B & 0 & 1 \end{array} \quad (0 \leq \alpha \leq 1 \text{ — параметр задачи}).$$

Перед генерацией первого наблюдения система находится в состоянии G . В состоянии G система генерирует н.о.р.с.в., равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$, в состоянии B — н.о.р.с.в., равномерно распределенные на отрезке $[0,b]$ ($b \in (0,1)$ — параметр задачи).

Наблюдатели (игрок I и игрок II) имеют информацию о параметрах задачи α , b и n , но не знают истинного состояния системы. Каждый из игроков может либо принять наблюдение (тогда процесс наблюдения для этого игрока останавливается, и он получает выигрыш, равный значению принятого наблюдения), либо отвергнуть его и перейти к следующему. Возврат к наблюдению, отвергнутому ранее, не допускается.

Одно и то же наблюдение не может быть выбрано обоими игроками. Если оба игрока готовы принять наблюдение, то с вероятностью p приоритет выбора предоставляется первому игроку, а с вероятностью $(1 - p)$ — второму.

Цель игроков — максимизировать среднее значение принятого наблюдения из последовательности n ($n > 1$) случайных величин, генерируемых производящей системой.

В данной работе рассматривается решение в классе однопороговых стратегий следующего вида. Перед началом наблюдений игрок I и игрок II устанавливают значения порогов (q_1 и q_2 соответственно). Каждый из игроков принимает первое наблюдение, превышающее установленный порог, отвергая все наблюдения с меньшими значениями. Значение порога устанавливается перед первым наблюдением и не может быть изменено в дальнейшем.

Основные обозначения

Пусть приоритет выбора принадлежит первому игроку ($p \leq 1/2$). В противном случае перенумеруем игроков.

Учитывая, что приоритет игрока I в выборе наблюдений ниже приоритета игрока II, очевидно, что значение оптимального порога первого игрока также ниже значения оптимального порога второго игрока.

Обозначим за $H_k^G(q_1, q_2)$ выигрыш (ожидаемое значение принятой случайной величины) игрока за k шагов до окончания наблюдений при установленных порогах q_1 (порог игрока I) и q_2 (порог игрока II) в случае, когда система, генерирующая случайные величины, находится в состоянии G . Аналогично $H_k^B(q_1, q_2)$ — выигрыш за k шагов до окончания наблюдений при порогах q_1 и q_2 в случае, когда система находится в состоянии B .

Лемма

Перед выводом основных формул выигрыша докажем следующую лемму об арифметико-геометрической прогрессии.

Лемма 1. Пусть последовательность чисел A_k определяется следующим образом: $A_k = A_{k-1}B + C$, где B, C — константы. Тогда

$$A_k = A_1 B^{k-1} + C \sum_{i=0}^{k-2} B^i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем по индукции.

1) Покажем, что формула верна для $k = 2$ и $k = 3$:

при $k = 2$ $A_2 = A_1 B + C$,

при $k = 3$ $A_3 = A_2 B + C = B[A_1 B + C] + C = A_1 B^2 + C(1 + B)$.

2) Пусть формула верна для $k = m$, т.е.

$$A_m = A_1 B^{m-1} + C \sum_{i=0}^{m-2} B^i.$$

3) Докажем, что формула верна для $k = m + 1$

$$\begin{aligned} A_{m+1} &= A_m B + C = B \left[A_1 B^{m-1} + C \sum_{i=0}^{m-2} B^i \right] + C = \\ &= A_1 B^m + C \sum_{i=1}^{m-1} B^i + C = A_1 B^m + C \sum_{i=0}^{m-1} B^i; \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если в условиях Леммы 1 $A_1 = C$, то

$$A_k = A_1 \sum_{i=0}^{k-1} B^i = A_1 \frac{1 - B^k}{1 - B}.$$

3. ФУНКЦИИ ВЫИГРЫША

Выигрыш первого игрока определяется следующими рекуррентными формулами ($k > 1$):

$$\begin{aligned} H_k^G(q_1, q_2) &= \alpha \left[\int_0^{q_1} H_{k-1}^G(q_1, q_2) dx + \int_{q_1}^{q_2} x dx + \int_{q_2}^1 (px + (1-p)H_{k-1}^G(q_1, 1)) dx \right] + \\ &+ (1-\alpha)H_k^B(q_1, q_2) = H_1^G(q_1, q_2)(\alpha q_1)^{k-1} + \left[\alpha \frac{q_2^2 - q_1^2}{2} + \alpha p \frac{1 - q_2^2}{2} + \right. \\ &+ \left. \alpha(1-p)(1-q_2)H_{k-1}^G(q_1, 1) + (1-\alpha)H_k^B(q_1, q_2) \right] \frac{1 - (\alpha q_1)^{k-1}}{1 - \alpha q_1}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_k^G(q_1, 1) &= \alpha \left[\int_0^{q_1} H_{k-1}^G(q_1, 1) dx + \int_{q_1}^1 x dx \right] + (1-\alpha)H_k^B(q_1, 1) = \\ &= H_1^G(q_1, 1)(\alpha q_1)^{k-1} + \left[\alpha \frac{1 - q_1^2}{2} + (1-\alpha)H_k^B(q_1, 1) \right] \frac{1 - (\alpha q_1)^{k-1}}{1 - \alpha q_1}, \\ H_k^B(q_1, q_2) &= I(q_1 < b) \frac{1}{b} \left[\int_0^{q_1} H_{k-1}^B(q_1, q_2) dx + I(q_2 < b) \left(\int_{q_1}^{q_2} x dx + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \int_{q_2}^b (px + (1-p)H_{k-1}^B(q_1, b)) dx \right) + I(q_2 > b) \int_{q_1}^b x dx \right] = \\ &= I(q_1 < b) \left[H_1^B(q_1, q_2) \left(\frac{q_1}{b} \right)^{k-1} + \left(I(q_2 < b) \left(\frac{q_2^2 - q_1^2}{2} + p \frac{b^2 - q_2^2}{2} + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. (1-p)(b - q_2)H_{k-1}^B(q_1, b) \right) + I(q_2 > b) \frac{b^2 - q_1^2}{2} \right) \frac{1 - (\frac{q_1}{b})^{k-1}}{b - q_1} \Big], \end{aligned}$$

$$H_k^B(q_1, b) = I(q_1 < b) \frac{1}{b} \left[\int_0^{q_1} H_{k-1}^B(q_1, b) dx + \int_{q_1}^b x dx \right] = I(q_1 < b) \frac{b^2 - q_1^2}{2} \frac{1 - (\frac{q_1}{b})^k}{b - q_1}.$$

Выигрыши на последнем шаге (окончание рекурсии) вычисляются на основании условия

$$H_0^G(q_1, q_2) = H_0^B(q_1, q_2) = 0 \quad \forall q_1, q_2.$$

Функция выигрыша II игрока

Аналогично вычисляются функции выигрыша II игрока ($k > 1$):

$$\begin{aligned} H_k^G(q_1, q_2) &= \alpha \left[\int_0^{q_1} H_{k-1}^G(q_1, q_2) dx + \int_{q_1}^{q_2} H_{k-1}^G(1, q_2) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{q_2}^1 (p H_{k-1}^G(1, q_2) + (1-p)x) dx \right] + (1-\alpha) H_k^B(q_1, q_2) = \\ &= H_1^G(q_1, q_2) (\alpha q_1)^{k-1} + \left(\alpha H_{k-1}^G(1, q_2) (q_2 - q_1 + p(1 - q_2)) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha(1-p) \frac{1-q_2^2}{2} + (1-\alpha) H_k^B(q_1, q_2) \right) \frac{1 - (\alpha q_1)^{k-1}}{1 - \alpha q_1}, \\ H_k^G(1, q_2) &= \alpha \left[\int_0^{q_2} H_{k-1}^G(1, q_2) dx + \int_{q_2}^1 x dx \right] + (1-\alpha) H_k^B(b, q_2) = \\ &= H_1^G(1, q_2) (\alpha q_2)^{k-1} + \left[\alpha \frac{1-q_2^2}{2} + (1-\alpha) H_k^B(b, q_2) \right] \frac{1 - (\alpha q_2)^{k-1}}{1 - \alpha q_2}, \\ H_k^B(b, q_2) &= I(q_2 < b) \frac{1}{b} \left[\int_0^{q_2} H_{k-1}^B(b, q_2) dx + \int_{q_2}^b x dx \right] = I(q_2 < b) \frac{b^2 - q_2^2}{2} \frac{1 - (\frac{q_2}{b})^k}{b - q_2}, \\ H_k^B(q_1, q_2) &= I(q_2 < b) \frac{1}{b} \left[\int_0^{q_1} H_{k-1}^B(q_1, q_2) dx + \int_{q_1}^{q_2} H_{k-1}^B(b, q_2) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{q_2}^b (p H_{k-1}^B(b, q_2) + (1-p)x) dx \right] = I(q_2 < b) \left[H_1^B(q_1, q_2) \left(\frac{q_1}{b} \right)^{k-1} + \right. \\ &\quad \left. + \left(H_{k-1}^B(b, q_2) (q_2 - q_1 + p(b - q_2)) + (1-p) \frac{b^2 - q_2^2}{2} \right) \frac{1 - (\frac{q_1}{b})^{k-1}}{b - q_1} \right]. \end{aligned}$$

В таблицах 1 и 2 представлены результаты численного моделирования значений оптимальных порогов принятия наблюдений при различных значениях параметров α, b, p и n .

Как видно из таблиц, чем меньше число наблюдений, тем больше разница между значениями оптимальных порогов при фиксированной разнице приоритетов.

ТАБЛИЦА 1. Значение оптимальных порогов I (II) игрока при $n = 10$ / $n = 20$, $p = 0.3$

b/α	0.25	0.5	0.75
0.25	0.166 / 0.197 (0.178) / (0.204)	0.171 / 0.199 (0.182) / (0.206)	0.184 / 0.207 (0.195) / (0.213)
0.5	0.331 / 0.394 (0.355) / (0.408)	0.336 / 0.397 (0.360) / (0.411)	0.357 / 0.408 (0.380) / (0.421)
0.75	0.495 / 0.590 (0.531) / (0.611)	0.499 / 0.592 (0.535) / (0.613)	0.516 / 0.601 (0.552) / (0.622)

ТАБЛИЦА 2. Ожидаемый выигрыш I (II) игрока при $n = 10$ / $n = 20$, $p = 0.3$

b/α	0.25	0.5	0.75
0.25	0.230 / 0.250 (0.264) / (0.280)	0.301 / 0.319 (0.347) / (0.361)	0.415 / 0.430 (0.454) / (0.466)
0.5	0.404 / 0.446 (0.437) / (0.471)	0.448 / 0.485 (0.489) / (0.518)	0.525 / 0.557 (0.564) / (0.590)
0.75	0.582 / 0.648 (0.617) / (0.670)	0.601 / 0.663 (0.640) / (0.689)	0.641 / 0.696 (0.680) / (0.724)

4. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ 1: $n \rightarrow \infty$

Представляет интерес предельные (при $n \rightarrow \infty$) функции выигрыша игроков.

Выигрыш первого игрока определяется следующими рекуррентными формулами ($k > 1$):

$$\begin{aligned}
 H_k^G(q_1, q_2) &= \left[\alpha \frac{q_2^2 - q_1^2}{2} + \alpha p \frac{1 - q_2^2}{2} + \alpha(1 - p)(1 - q_2)H_{k-1}^G(q_1, 1) + \right. \\
 &\quad \left. + (1 - \alpha)H_k^B(q_1, q_2) \right] \frac{1}{1 - \alpha q_1}, \\
 H_k^G(q_1, 1) &= \left[\alpha \frac{1 - q_1^2}{2} + (1 - \alpha)H_k^B(q_1, b) \right] \frac{1}{1 - \alpha q_1}, \\
 H_k^B(q_1, q_2) &= I(q_1 < b) \left[\left(I(q_2 < b) \left(\frac{q_2^2 - q_1^2}{2} + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + p \frac{b^2 - q_2^2}{2} + (1 - p)(b - q_2)H_{k-1}^B(q_1, b) \right) + I(q_2 > b) \frac{b^2 - q_1^2}{2} \right) \frac{1}{b - q_1} \right],
 \end{aligned}$$

$$H_k^B(q_1, b) = I(q_1 < b) \frac{b^2 - q_1^2}{2(b - q_1)}.$$

Функция выигрыша II игрока

Аналогично вычисляются формулы выигрыша II игрока ($k > 1$):

$$\begin{aligned} H_k^G(q_1, q_2) &= (\alpha H_{k-1}^G(1, q_2)(q_2 - q_1 + p(1 - q_2)) + \\ &+ \alpha(1 - p) \frac{1 - q_2^2}{2} + (1 - \alpha) H_k^B(q_1, q_2)) \frac{1}{1 - \alpha q_1}, \\ H_k^G(1, q_2) &= \left[\alpha \frac{1 - q_2^2}{2} + (1 - \alpha) H_k^B(b, q_2) \right] \frac{1}{1 - \alpha q_2}, \\ H_k^B(b, q_2) &= I(q_2 < b) \frac{b^2 - q_2^2}{2(b - q_2)}, \\ H_k^B(q_1, q_2) &= I(q_2 < b) \left(H_{k-1}^B(b, q_2)(q_2 - q_1 + p(b - q_2)) + (1 - p) \frac{b^2 - q_2^2}{2} \right) \frac{1}{b - q_1}. \end{aligned}$$

5. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ 2: ВТОРОЙ ИГРОК ИМЕЕТ АБСОЛЮТНЫЙ ПРИОРИТЕТ ($p = 0$)

Случай, когда наблюдение всегда предоставляется второму игроку.

5.1. Конечное число наблюдений. Выигрыш первого игрока определяется следующими рекуррентными формулами ($k > 1$):

$$\begin{aligned} H_k^G(q_1, q_2) &= H_1^G(q_1, q_2)(\alpha q_1)^{k-1} + \left[\alpha \frac{q_2^2 - q_1^2}{2} + \alpha(1 - q_2) H_{k-1}^G(q_1, 1) + \right. \\ &+ \left. (1 - \alpha) H_k^B(q_1, q_2) \right] \frac{1 - (\alpha q_1)^{k-1}}{1 - \alpha q_1}, \\ H_k^G(q_1, 1) &= H_1^G(q_1, 1)(\alpha q_1)^{k-1} + \left[\alpha \frac{1 - q_1^2}{2} + (1 - \alpha) H_k^B(q_1, b) \right] \frac{1 - (\alpha q_1)^{k-1}}{1 - \alpha q_1}, \\ H_k^B(q_1, q_2) &= I(q_1 < b) \left[H_1^B(q_1, q_2) \left(\frac{q_1}{b} \right)^{k-1} + \left(I(q_2 < b) \left(\frac{q_2^2 - q_1^2}{2} + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. (b - q_2) H_{k-1}^B(q_1, b) \right) + I(q_2 > b) \frac{b^2 - q_1^2}{2} \right) \frac{1 - (q_1/b)^{k-1}}{b - q_1} \Big], \\ H_k^B(q_1, b) &= I(q_1 < b) \frac{b^2 - q_1^2}{2} \frac{1 - (\frac{q_1}{b})^k}{b - q_1}. \end{aligned}$$

Функция выигрыша II игрока

Аналогично вычисляются формулы выигрыша II игрока ($k > 1$):

$$\begin{aligned} H_k^G(q_1, q_2) &= H_1^G(q_1, q_2)(\alpha q_1)^{k-1} + \left(\alpha H_{k-1}^G(1, q_2)(q_2 - q_1) + \alpha \frac{1 - q_2^2}{2} + \right. \\ &+ \left. (1 - \alpha) H_k^B(q_1, q_2) \right) \frac{1 - (\alpha q_1)^{k-1}}{1 - \alpha q_1}, \\ H_k^G(1, q_2) &= H_1^G(1, q_2)(\alpha q_2)^{k-1} + \left[\alpha \frac{1 - q_2^2}{2} + (1 - \alpha) H_k^B(b, q_2) \right] \frac{1 - (\alpha q_2)^{k-1}}{1 - \alpha q_2}, \\ H_k^B(b, q_2) &= I(q_2 < b) \frac{b^2 - q_2^2}{2} \frac{1 - (\frac{q_2}{b})^k}{b - q_2}, \end{aligned}$$

$$H_k^B(q_1, q_2) = I(q_2 < b) \left[H_1^B(q_1, q_2) \left(\frac{q_1}{b} \right)^{k-1} + \left(H_{k-1}^B(b, q_2) (q_2 - q_1) + \frac{b^2 - q_2^2}{2} \right) \frac{1 - \left(\frac{q_1}{b} \right)^{k-1}}{b - q_1} \right].$$

5.2. **Случай $n \rightarrow \infty$.** Функция выигрыша первого игрока ($k > 1$):

$$\begin{aligned} H_k^G(q_1, q_2) &= \left[\alpha \frac{q_2^2 - q_1^2}{2} + \alpha(1 - q_2) H_{k-1}^G(q_1, 1) + (1 - \alpha) H_k^B(q_1, q_2) \right] \frac{1}{1 - \alpha q_1}, \\ H_k^G(q_1, 1) &= \left[\alpha \frac{1 - q_1^2}{2} + (1 - \alpha) H_k^B(q_1, b) \right] \frac{1}{1 - \alpha q_1}, \\ H_k^B(q_1, q_2) &= I(q_1 < b) \left[\left(I(q_2 < b) \left(\frac{q_2^2 - q_1^2}{2} + (b - q_2) H_{k-1}^B(q_1, b) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + I(q_2 > b) \frac{b^2 - q_1^2}{2} \right) \frac{1}{b - q_1} \right], \\ H_k^B(q_1, b) &= I(q_1 < b) \frac{b^2 - q_1^2}{2} \frac{1}{b - q_1}. \end{aligned}$$

Функция выигрыша II игрока

Функция выигрыша II игрока ($k > 1$):

$$\begin{aligned} H_k^G(q_1, q_2) &= \left(\alpha H_{k-1}^G(1, q_2) (q_2 - q_1) + \alpha \frac{1 - q_2^2}{2} + (1 - \alpha) H_k^B(q_1, q_2) \right) \frac{1}{1 - \alpha q_1}, \\ H_k^G(1, q_2) &= \left[\alpha \frac{1 - q_2^2}{2} + (1 - \alpha) H_k^B(b, q_2) \right] \frac{1}{1 - \alpha q_2}, \\ H_k^B(b, q_2) &= I(q_2 < b) \frac{b^2 - q_2^2}{2} \frac{1}{b - q_2}, \\ H_k^B(q_1, q_2) &= I(q_2 < b) \left(H_{k-1}^B(b, q_2) (q_2 - q_1) + \frac{b^2 - q_2^2}{2} \right) \frac{1}{b - q_1}. \end{aligned}$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена игровая постановка задачи наилучшего выбора с разладкой, в которой два игрока имеют различные приоритеты принятия наблюдений. Представлены результаты, полученные при продолжении исследования класса задач наилучшего выбора с разладкой.

В работе получены функции выигрыша игроков для общего, а также частных случаев (предельный случай при бесконечном числе наблюдений, случай абсолютного приоритета одного из игроков – конечный и предельный варианты). Представлены результаты численного нахождения оптимальных порогов игроков и ожидаемых выигрышей при различных параметрах задачи.

Как видно из представленных таблиц, наибольшее влияние распределение приоритетов принятия наблюдений между игроками оказывает на оптимальные пороги и ожидаемые выигрыши при небольшом числе наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gilbert J. P., Mosteller F. Recognizing the maximum of a sequence. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 61, No. 313, 1966, 35–73.
2. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ, М.: Наука, 1976.
3. Розанов Ю. А. Случайные процессы. Краткий курс, М.: Наука, 1971.
4. M. Sakaguchi. A best-choice problem for a production system which deteriorates at a disorder time // *Scientiae Mathematicae Japonicae* Vol. 54, No. 1, 125–134.
5. Z. Porosinski and K. Szajowski. Random priority two-person full-information best choice problem with imperfect observation // *Applicationes Mathematicae*, 27(3), 2000, 251–263.
6. Ивашко Е. Е. Многопороговая задача наилучшего выбора с полной информацией и разладкой // *Труды ИПМИ КарНЦ РАН*, вып. 8, 2007, 11–15.
7. Мазалов В.В., Ивашко Е. Е. Задача наилучшего выбора с разладкой // *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 2007, т. 14, вып. 2, 215–224.

УДК 517.9

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЕГИДРИРОВАНИЯ

И. А. ЧЕРНОВ

В статье рассматривается возможность применения классических методов вариационного исчисления и оптимального управления для решения коэффициентной обратной задачи дегидрирования, представляющей собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений — следствие законов сохранения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Металлогидридные аккумуляторы водорода являются одним из возможных решений проблемы хранения экологически чистого водородного топлива [1]. На первый план выходит кинетика: скорости поглощения и выделения водорода должны быть достаточно высоки. Поэтому актуальна математическая задача оценки констант скоростей элементарных процессов (коэффициентов) по измеряемым данным. Такие задачи относятся к классу обратных и представляют также чисто математический интерес.

Рассматриваем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) — простейшую модель распада гидрида. Из-за значительного уменьшения плотности (до 50%) при гидрировании материал представляет собой мелкий порошок. Поэтому рассматриваем одну из N частиц порошка. Количество N определяется в эксперименте с достаточно малой относительной погрешностью. Частица — шар радиуса L . В центре — гидридное ядро радиуса $\rho(t)$, покрытое коркой металла с растворенным водородом. Концентрации содержащегося в гидриде и растворенного в фазе металла водорода обозначены $Q > 1$ и $c(t) > 0$. Равновесную по отношению к гидриду

концентрацию принимаем за единицу. Уравнения выводятся из закона сохранения и имеют вид [2]:

$$\frac{L^3 - \rho^3}{3} \dot{c} = -b(t)c^2L^2 + k(t)(1-c)\rho^2, \quad c(0) = c_0 \in [0, 1], \quad (1)$$

$$(Q - c)\dot{\rho} = \begin{cases} -k(t)(1-c) & \text{при } \rho > 0, \\ \dot{\rho} = 0 & \text{при } \rho = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\rho(0) = \rho_0 \in (0, L), \quad t^* = \min\{t : \rho(t) = 0\}. \quad (3)$$

Здесь $b(t)$, $k(t)$ — коэффициенты, описывающие элементарные процессы (десорбцию и распад гидрида); зависимость от времени связана с нагревом. Время t^* окончания распада гидрида также неизвестно. Десорбционный поток имеет вид $J(t) = 4\pi L^2 b(t)c^2(t)$. Требуется определить функции $b(t)$ и $k(t)$ по измерениям на $[0, T]$ десорбционного потока $J_{\text{ex}}(t)$ (отнесенного к $4\pi N$), что приводит к задаче минимизации функционала

$$F(b(\cdot), k(\cdot), t^*) = \int_0^T \left(b(t)c^2(t)L^2 - J_{\text{ex}}(t) \right)^2 dt. \quad (4)$$

Реальный порошок содержит частицы различных сложных форм и размеров. Опыт показывает, что форма частиц несущественно влияет на кинетику [3] даже в одночастичном приближении, однако распределение частиц по размерам желательно учесть. Поэтому рассмотрим порошок из N сферических частиц с дискретным распределением радиусов: пусть доля φ_i частиц имеет радиус L_i , где $i = \overline{1:n}$. Предполагаем, что все частицы в равных условиях. Процессы в отдельной частице описывает модель (1)–(3) (только величины c , L , ρ и t^* имеют индекс i). Десорбционный поток теперь складывается из десорбции с разных частиц:

$$J(t) = \sum_{i=1}^n 4\pi N b(t)c_i^2(t)L_i^2 \varphi_i.$$

Задача определения $b(t)$, $k(t)$ и t_i^* по измерениям на $[0, T]$ потока $J_{\text{ex}}(t)$ (отнесенного к $4\pi N$) приводит к минимизации функционала

$$F(b(\cdot), k(\cdot)) = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n b(t)c_i^2(t)L_i^2 \varphi_i - J_{\text{ex}}(t) \right)^2 dt. \quad (5)$$

Уточним допустимое множество. Один подход состоит в том, чтобы отказаться от любых ограничений на определяемые параметры $b(t)$ и $k(t)$ (помимо гладкости). Тогда имеем классические задачи вариационного исчисления [4]. Если полученный результат имеет физический смысл, это оправдывает снятие ограничений. Если полученные параметры недопустимы (отрицательны, нарушена монотонность или физически разумные границы), то, возможно, следует учесть неучтенные в модели экспериментальные факторы. В их числе неравномерный нагрев образца, негерметичность экспериментальной установки, неполный вакуум. В этом случае целесообразно уточнить модель.

Другой подход: искать оптимальные параметры в некотором параметрическом классе (как правило, кинетические константы имеют аррениусову зависимость от температуры, закон нагрева считаем заданным). Тогда имеем частный случай задачи оптимального управления с оптимизацией по вектору управляющих параметров. В статье рассматриваются эти подходы и обратная задача сводится к решению систем дифференциальных или алгебраических уравнений.

2. ЗАДАЧА БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ, ОДНА ЧАСТИЦА

Рассмотрим этап $[0, t^*]$. Выразим из (2) характеризующий распад гидроксида параметр $k(t) = -(Q - c)(1 - c)^{-1}\dot{\rho}$ и подставим в (1):

$$\dot{c} = -3 \frac{b(t)c^2L^2 + (Q - c)\dot{\rho}\rho^2}{L^3 - \rho^3}.$$

Отсюда выразим параметр b :

$$b(t) = -\frac{L^3 - \rho^3}{3c^2L^2}\dot{c} - \frac{Q - c}{c^2L^2}\dot{\rho}\rho^2. \quad (6)$$

Подставляя это выражение в функционал (4) на $[0, t^*]$, получаем экстремальную задачу для функционала

$$\int_0^{t^*} \left(J_{\text{ex}}(t) - \dot{M} \right)^2 dt \rightarrow \min, \quad M = (Q - c) \frac{L^3 - \rho^3}{3}. \quad (7)$$

Решение задачи тривиально: $\dot{M} = J_{\text{ex}}(t)$ и

$$M(t) = (Q - c) \frac{L^3 - \rho^3}{3} = (Q - c_0) \frac{L^3 - \rho_0^3}{3} + \int_0^t J_{\text{ex}}(\xi) d\xi. \quad (8)$$

Необходимо выбрать дополнительное условие. Отсутствие ограничений на параметры привело к тому, что один из параметров определяется при произвольно заданном другом.

Предположим, что $k(t)$ известно; тогда из (2) получим

$$c(t) = \frac{Q\dot{\rho} + k}{k + \dot{\rho}}. \quad (9)$$

Пусть $\dot{A}(t) = J_{\text{ex}}(t)$, $A(0) = 0$; подставляем выражение (9) в (8):

$$\left(Q - \frac{Q\dot{\rho} + k}{k + \dot{\rho}}\right) \frac{L^3 - \rho^3}{3} = (Q - c_0) \frac{L^3 - \rho_0^3}{3} + A(t).$$

После несложных преобразований:

$$(Q - 1) \frac{k}{k + \dot{\rho}} (L^3 - \rho^3) = (Q - c_0)(L^3 - \rho_0^3) + 3A(t).$$

Разрешим относительно производной это уравнение первого порядка:

$$\dot{\rho} = k \frac{c_0(L^3 - \rho_0^3) - (L^3 - \rho^3) + Q(\rho_0^3 - \rho^3) - 3A(t)}{(Q - c_0)(L^3 - \rho_0^3) + 3A(t)}. \quad (10)$$

Начальные условия: $\rho(0) = \rho_0$. Момент окончания гидрирования t^* определяется из условия $\rho(t^*) = 0$. Решая эту задачу Коши, получаем функцию $\rho(t)$ и по формуле (9) $c(t)$. Окончательно $b(t) = J_{\text{ex}}c^{-2}$. Отметим, что измерения оказываются под знаком интеграла, что обеспечивает определенную устойчивость к погрешностям измерений.

Для этапа $t \in [t^*, T]$ имеем задачу дегазации, где $\rho \equiv 0$, а концентрация подчинена уравнению $L\dot{c} = -3b(t)c^2(t)$. Начальное условие $c(t^*)$ имеем с предыдущего этапа. Функционал примет вид

$$\int_{t^*}^T \left(\frac{L^3}{3} \dot{c} + J_{\text{ex}}(t) \right)^2 dt \rightarrow \min,$$

так что $\dot{c} = -3L^{-3}J_{\text{ex}}(t)$, откуда

$$c(t) = c(t^*) - 3A^*(t), \quad b(t) = -\frac{L\dot{c}}{3c^2} = \frac{L^{-2}J_{\text{ex}}(t)}{(c(t^*) - 3A^*(t))^2}, \quad A^* = \int_{t^*}^t J_{\text{ex}}(\xi) d\xi.$$

Необходимо уточнить, что эти формулы менее пригодны для практического использования. Во-первых, измерения фигурируют не под знаком интеграла; во-вторых, при больших временах концентрация

растворенного в частице водорода низка, а она фигурирует в знаменателе в квадрате.

Пусть теперь известен параметр $b(t)$, а $k(t)$ подлежит определению. Отсутствие в (4) параметра k позволяет выразить

$$c(t) = \sqrt{\frac{J_{\text{ex}}(t)}{b(t)L^2}}.$$

Исключим с помощью уравнения (2) (при $t < t^*$) параметр k в уравнении (1) и подставим $c(t)$:

$$\frac{\dot{J}_{\text{ex}}b - J_{\text{ex}}\dot{b}}{2b\sqrt{J_{\text{ex}}}} = 3 \frac{-J_{\text{ex}}L\sqrt{b} - (LQ\sqrt{b} - \sqrt{J_{\text{ex}}})\dot{\rho}\rho^2}{L^3 - \rho^3}.$$

Преобразуем это уравнение первого порядка для $\rho(t)$:

$$\dot{S} = -\frac{\dot{b}\sqrt{J_{\text{ex}}} \cdot S}{2b(LQ\sqrt{b} - \sqrt{J_{\text{ex}}})} + L\sqrt{b}J_{\text{ex}}, \quad S = \left((LQ\sqrt{b} - \sqrt{J_{\text{ex}}}) \frac{L^3 - \rho^3}{3} \right).$$

Получили линейное уравнение для $S(t)$ с начальным условием

$$S(0) = (LQ\sqrt{b(0)} - \sqrt{J_{\text{ex}}(0)}) (L^3 - \rho_0^3) / 3.$$

Решая эту задачу Коши, получаем $\rho(t)$ и время t^* из условия $\rho(t^*) = 0$, а по $\rho(t)$ и уже известной $c(t)$ вычисляем $k(t)$ по формуле

$$k(t) = -\frac{Q - c}{1 - c}\dot{\rho}, \quad t \in [0, t^*].$$

3. ЗАДАЧА БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ, АНСАМБЛЬ ЧАСТИЦ

Десорбционный поток для порошка с различными частицами складывается из потоков с каждой частицы. Дегидрирование частиц каждого размера описывается системой (1)–(2). В моменты времени t_i^* (когда заканчивается гидрид в частицах очередного размера) правая часть системы терпит разрыв. Задача (5) имеет тривиальное решение

$$\sum_{i=1}^n b(t)c_i^2(t)L_i^2\varphi_i = J_{\text{ex}}(t).$$

В свете сказанного удобно изучать его на интервалах $[t_{j-1}^*, t_j^*]$, где $j = \overline{1 : n+1}$, $t_0^* = 0$, $t_{n+1}^* = T$.

Введем обозначение

$$\mathbb{E}_i^j f_m = \sum_{m=i}^j f_m \varphi_m, \quad \mathbb{E} f_m = \mathbb{E}_1^n f_m.$$

Ясно, что $\mathbb{E} f_m$ есть математическое ожидание по распределению φ_m .

Рассмотрим интервал $[0, t_1^*]$. Записывая поток, получаем

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E} \left((L_i^3 - \rho_i^3(t)) (Q - c_i(t)) \right) = 3J_{\text{ex}}(t),$$

С учетом соотношения (9) для c_i получаем после упрощений:

$$\mathbb{E} \left(\frac{L_i^3 - \rho_i^3(t)}{k + \dot{\rho}_i(t)} \right) = M_{01} + \frac{3A_1(t)}{k(Q-1)}, \quad A_1(t) = \int_0^t J_{\text{ex}}(\xi) d\xi, \quad M_{01} = \text{const}.$$

Кроме того, параметр b не зависит от размера частицы, поэтому для $i = \overline{2:n}$

$$\left(\frac{L_i^3 - \rho_i^3(t)}{k + \dot{\rho}_i(t)} \right)' \frac{(k + \dot{\rho}_i(t))^2}{(k + Q\dot{\rho}_i(t))^2} L_i^{-2} = \left(\frac{L_1^3 - \rho_1^3(t)}{k + \dot{\rho}_1(t)} \right)' \frac{(k + \dot{\rho}_1(t))^2}{(k + Q\dot{\rho}_1(t))^2} L_1^{-2}.$$

Совместно с предыдущим уравнением первого порядка получается замкнутая система для неизвестных $\rho_i(t)$ при $i = \overline{1:n}$. Она сводится к системе первого порядка из $2n - 1$ уравнений. Момент t_1^* определим из условия $\rho_1(t_1^*) = 0$.

На интервалах $[t_{j-1}^*, t_j^*]$ при $j = \overline{2:n}$ частицы больших (L_i , $i \geq j$) размеров содержат гидрид, а остальные лишь выделяют растворенный в металле водород. Запишем суммарный поток

$$\mathbb{E}_j^n \left(\frac{L_i^3 - \rho_i^3(t)}{k + \dot{\rho}_i(t)} \right) - \frac{\mathbb{E}_1^j (L_i^3 c_i)}{k(Q-1)} = M_{0j} + \frac{3A_j(t)}{k(Q-1)}.$$

Здесь $M_{0j} = \text{const}$, $\dot{A}_j(t) = J_{\text{ex}}(t)$, $A_j(t_{j-1}^*) = 0$. Независимость $b(t)$ от размера дает дополнительные уравнения: для $i = \overline{j+1:n}$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L_i^3 - \rho_i^3(t)}{k + \dot{\rho}_i(t)} \right) \frac{(k + \dot{\rho}_i(t))^2}{(k + Q\dot{\rho}_i(t))^2} L_i^{-2} = -\frac{\dot{c}_1}{L_1^2 c_1^2}$$

и для $i = \overline{2:j}$

$$\frac{\dot{c}_i}{L_i^2 c_i^2} = \frac{\dot{c}_1}{L_1^2 c_1^2}.$$

Имеем n уравнений для неизвестных функций $c_i(t)$ при $i = \overline{1:j}$ и $\rho_i(t)$ при $i = \overline{j+1:n}$. (Порядок понижается: $2n - j$ уравнений первого порядка). Момент t_j^* окончания гидрида в частицах размера L_j определим из условия $\rho_j(t_j^*) = 0$.

Теперь рассмотрим последний интервал $[t_n^*, T]$. Уравнения (первого порядка) имеют вид ($M_{0n+1} = \text{const}$)

$$E \left(L_i^3 c_i \right) = M_{0n+1} - 3A_{n+1}(t), \quad \frac{\dot{c}_m}{L_m^2 c_m^2} = \frac{\dot{c}_1}{L_1^2 c_1^2}, \quad m = \overline{2:n},$$

неизвестными являются функции $c_i(t)$, $i = \overline{1:n}$.

4. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ

Теперь рассмотрим другой подход. Зависимость параметров от температуры $\tau(t)$ считаем аррениусовской:

$$b(t) = b_0 \exp \left(-\frac{E_b}{R\tau(t)} \right), \quad k(t) = k_0 \exp \left(-\frac{E_k}{R\tau(t)} \right),$$

где b_0 , k_0 , E_b и E_k — подлежащие определению константы (кинетические параметры), $R \approx 8.31$ Дж/(моль К) — газовая постоянная. Рассматриваем одну частицу порошка. Вводя новую фазовую переменную $a(t)$, получаем задачу

$$a(T) \rightarrow \min, \quad (11)$$

$$\dot{a} = \left(b(t)c^2(t)L^2 - J_{\text{ex}}(t) \right)^2, \quad (12)$$

$$\dot{c} = 3 \frac{-b(t)c^2L^2 + k(t)(1-c)\rho^2}{L^3 - \rho^3}, \quad (13)$$

$$\dot{\rho} = \begin{cases} -k(t)(1-c)(Q-c)^{-1} & \text{при } \rho > 0, \\ 0 & \text{при } \rho = 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$c(0) = c_0 \in [0, 1], \quad \rho(0) = \rho_0 \in (0, L), \quad a(0) = 0. \quad (15)$$

Это задача оптимального управления, где компоненты вектора управления $\zeta = (b_0, k_0, E_b, E_k)$ — константы. Такие задачи рассматриваются в классической теории оптимального управления [5] — оптимизация по вектору управляющих параметров. В нашем случае задача проще: отсутствует управление как функция времени. Задачу (13)–(15) назовем исходной системой.

Переформулируем задачу. Введем фазовый вектор $x(t) = (a(t), c(t), \rho(t))$, а вектор-функцию правых частей обозначим $f(t, x, \zeta)$. Теперь

задача имеет вид $B(x(T), \zeta) = x_1(T) \rightarrow \min$ при ограничениях $\dot{x} = f(t, x, \zeta)$, $x(0) = x_0$.

Введем вектор импульсов $\psi(t)$, который удовлетворяет сопряженной системе $\dot{\psi} = -\partial_x f \cdot \psi$ с краевым условием $\psi(T) = \partial_x B(x(T), \zeta)$. Заметим, что $\psi_2(T) = \psi_3(T) = 0$, а $\psi_1(t) \equiv 1$, так что реально система имеет размерность два и нулевое граничное условие. Требуется еще четыре уравнения для определения параметров, они в общем случае имеют вид

$$\partial_\zeta B(x(T), \zeta) + \int_0^T \partial_\zeta f(t, x(t), \zeta) \cdot \psi(t) dt = 0. \quad (16)$$

В нашем случае, разумеется, первое слагаемое равно нулю. Отсутствие управления в виде функции времени позволяет рассматривать исходную и сопряженную систему независимо (исходная система импульсов не содержит), так что вместо краевой задачи имеем две задачи Коши. Поэтому, по существу, имеем систему четырех алгебраических уравнений (16), которую решаем численно (стандартными средствами). На каждой итерации решаем исходную систему, пользуясь текущими значениями параметров, а затем сопряженную систему (при текущих значениях параметров и найденном фазовом векторе).

Отметим, что в случае распределения частиц по размерам имеем совершенно аналогичный алгоритм. Вместо исходной системы размерности 2 будет n таких систем; аналогично с сопряженной системой (так как исходные системы для частиц разных размеров независимы). Получается система четырех алгебраических уравнений, решаемая численно; на каждой итерации решается n исходных систем при текущих приближениях и затем n сопряженных систем.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Алгоритмы, изложенные в параграфах 2 и 4, были реализованы в системе SciLab и применены к экспериментальным данным, предоставленным профессором И.Е. Габисом (НИИ физики им. В.А. Фока при СПбГУ). Для решения систем ОДУ и алгебраических уравнений применялись стандартные средства SciLab.

На рис. 1 приведена кривая $b(t)$, полученная по алгоритму §2 (одна частица). Монотонность отсутствует, кроме того, имеется «уход в бесконечность», связанный с малой величиной $c(t)$ в знаменателе. Однако

начальный участок кривой надежен (то есть погрешности не приводят к катастрофическим последствиям). Вторая кривая на рис. 1 — аррениусова кривая, приближающая $b(t)$ среднеквадратично на данном участке. На рис. 2 приведена соответствующая плотность потока и экспериментальная кривая. Совпадение весьма грубое. Однако значительная простота алгоритма позволяет использовать его для получения начальных приближений, а также для выявления «проблемных» участков экспериментальной кривой. Главное условие выполняется: параметры модельной кривой восстанавливаются.

Можно распорядиться произволом в выборе $k(t)$ для обеспечения близости $b(t)$ к некоторому параметрическому семейству кривых; такая задача может быть поставлена и решена, то есть сведена к системе алгебраических уравнений. Однако они содержат производные измерений, что приводит к высокой чувствительности к погрешностям измерений и затрудняет практическое применение метода.

На рис. 3 приведены кривые плотностей потоков: полученная по алгоритму §4 для ансамбля частиц (распределение $L_i = 10^{-3} \cdot (3 \ 5 \ 6)$, $\varphi_i = (0.3 \ 0.4 \ 0.3)$) и экспериментальная. Совпадение лучше, чем на рис. 2 (для одной частицы радиуса $5 \cdot 10^{-3}$ совпадение такое же). На рис. 4 приведены нормированные фазовые переменные $c(t)$ и $\rho(t)$ (одна частица). Вычислительные эксперименты показали, что алгоритм решения (§4) сходится локально: при «плохих» начальных приближениях алгоритм не сходится.

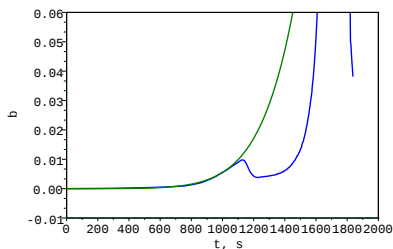


Рис. 1. Коэффициент $b(t)$.

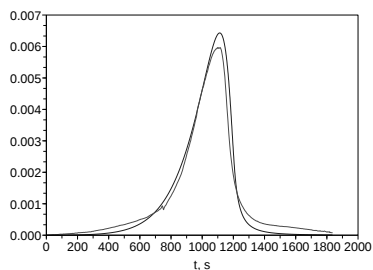


Рис. 2. Плотности потоков J , J_{ex} .

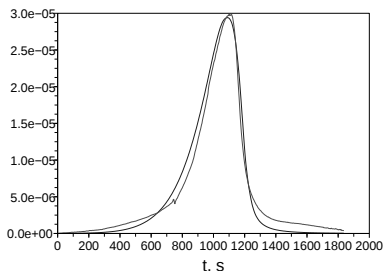


Рис. 3. Плотности потоков J, J_{ex} .

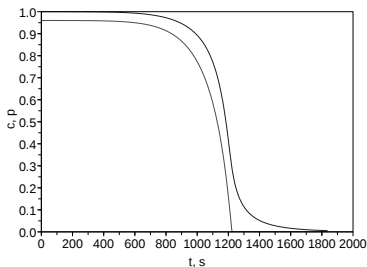


Рис. 4. Функции $c(t), \rho(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вербецкий В.Н. Митрохин С.В. Гидриды интерметаллических соединений — синтез, свойства и применение для аккумулярования водорода // Альтернативная энергетика и экология, № 10(30), 2005, 41–61.
2. Заика Ю.В., Родченкова Н.И. Моделирование высокотемпературного пика ТДС-спектра дегидрирования // Математическое моделирование, т. 18, № 4, 2006, 100–112.
3. Войт А.П. Моделирование термодесорбционных спектров, полученных при разложении порошковых гидридов металлов // Вестник СПбГУ, серия 4, вып. 3, № 20, 2004, 85–87.
4. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. М.: КомКнига, 2006.
5. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.

УДК 519.7

ЗАДАЧА О РАЗМЕЩЕНИИ

А. В. Щипцова

В статье рассматривается модель дуополии Хотеллинга на плоскости. Две фирмы размещены внутри круга. Рассматривается задача поиска ценового равновесия при фиксированном расположении фирм и задача отыскания равновесия для расположения фирм. Критерием оптимальности является прибыль, полученная фирмами. В случае симметричного расположения фирм найдены оптимальные цены. В задаче оптимального размещения фирм найдено уравнение, связывающее оптимальные положения фирм на плоскости. Представлено приближенное числовое решение этого уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Впервые задача о размещении была рассмотрена в статье [1]. Было проведено исследование модели дуополии Хотеллинга на прямой.

В статье [2] модель дуополии Хотеллинга рассматривалась на плоскости. Были описаны задачи, возникающие в случае равномерного распределения населения и в случае, когда задана функция плотности населения. Была рассмотрена постановка задачи, когда функция покупки представлена через назначенную цену на товар и расстояние от фирмы до покупателя, взятое в квадрате. Приведен пример решения задачи размещения на плоскости, когда функция покупки задается как сумма квадратов значений цены и расстояния.

В [2] поставлена задача поиска равновесия, когда положение фирм фиксировано. Тогда существуют оптимальные цены p_1 и p_2 для максимальных прибылей фирм. Также рассматривается проблема поиска оптимального местоположения фирм на плоскости.

Данная статья продолжает исследование класса задач о размещении фирм на плоскости. В статье рассматривается постановка задачи

размещения в условиях равномерного распределения населения и задания функции покупки через цену, предлагаемую фирмой, и расстояние от покупателя до фирмы. Расстояние определяется как евклидово. Рассмотрена задача поиска ценового равновесия при фиксированном размещении фирм и задача оптимального размещения фирм на плоскости.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть город представлен на плоскости кругом радиуса 1 с равномерным распределением населения. Двое участников рынка являются равноправными и предлагают свои решения одновременно.

Пусть покупатель находится в точке (x, y) . Тогда функция покупки определяется следующим образом:

$$f(p_i) = p_i + \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \quad i = 1, 2,$$

где p_i — цена, предложенная i -ой фирмой, (x_i, y_i) — координаты i -ой фирмы на плоскости.

Прибыль фирмы складывается из назначенной цены на товар и количества покупателей, которые отдали предпочтение этой фирме, т. е. $H_i = p_i S_i$, где H_i — прибыль i -ой фирмы.

Требуется решить следующие задачи:

1) Найти оптимальные цены, которые предложат фирмы, исходя из своего местоположения, т. е. найти такие цены p_1^* и p_2^* , что $H_1(p_1, p_2^*) \leq H_1(p_1^*, p_2^*)$ и $H_2(p_1^*, p_2) \leq H_2(p_1^*, p_2^*)$ для $\forall p_1, p_2$.

2) Найти положение равновесия для фирм, т. е. найти такие k_1^* и k_2^* , что $H_1(k_1, k_2^*) \leq H_1(k_1^*, k_2^*)$ и $H_2(k_1^*, k_2) \leq H_2(k_1^*, k_2^*)$ для $\forall k_1, k_2$.

3. НАХОЖДЕНИЕ ЦЕНОВОГО РАВНОВЕСИЯ ПРИ ФИКСИРОВАННОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ФИРМ

Пусть первая фирма расположена в точке $(k_1, 0)$, а вторая — в точке $(k_2, 0)$ (рис. 1), цена на товар у первой фирмы выше, чем у второй: $p_1 \geq p_2$.

Найдем кривую, которая разделяет две области S_1 и S_2 :

$$p_1 + \sqrt{(x - k_1)^2 + y^2} = p_2 + \sqrt{(x - k_2)^2 + y^2}.$$

Кривая представляет собой гиперболу:

$$\frac{(x - \psi)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

где $a = \frac{p_1 - p_2}{2}$, $b = \sqrt{\frac{\varphi^2}{4} - a^2}$, $\varphi = k_1 - k_2$, $\psi = \frac{k_1 + k_2}{2}$.

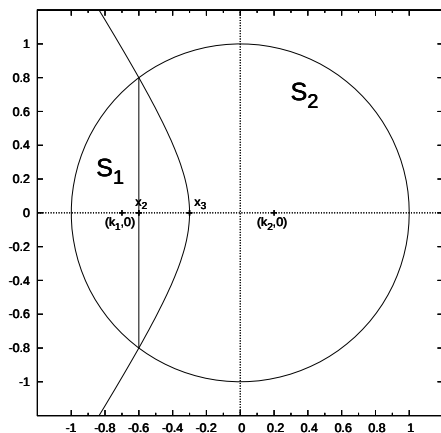


Рис. 1. Расположение фирм на плоскости

Выигрыши игроков имеют вид: $H_1 = p_1 S_1$, $H_2 = p_2 S_2$.

Равновесие по Нэшу получим, исходя из условий:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial p_1} = S_1 + p_1 \frac{\partial S_1}{\partial p_1} = 0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial p_2} = S_2 + p_2 \frac{\partial S_2}{\partial p_2} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Найдем количество покупателей для первой фирмы:

$$S_1 = -ab \ln a + x_2 \sqrt{1 - x_2^2} + \arcsin x_2 + \frac{\pi}{2} - \frac{b(x_2 - \psi)}{a} \sqrt{(x_2 - \psi)^2 - a^2} + ba \ln |x_2 - \psi + \sqrt{(x_2 - \psi)^2 - a^2}|, \quad (3)$$

где $x_2 = \frac{b^2 \psi - \sqrt{D}}{b^2 + a^2}$, $D = a^2(-b^2 \psi^2 + b^2 + a^2 + b^4 + a^2 b^2)$, $x_3 = -a + \psi$.

Так как рынок представлен кругом, то $S_1 + S_2 = \pi$. Из того, что $\frac{\partial a}{\partial p_1} = -\frac{\partial a}{\partial p_2}$ следует, что $\frac{\partial S_1}{\partial p_2} = -\frac{\partial S_1}{\partial p_1}$.

Тогда получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial p_1} = S_1 + p_1 \frac{\partial S_1}{\partial p_1} = 0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial p_2} = \pi - S_1 + p_2 \frac{\partial S_1}{\partial p_1} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Точка, удовлетворяющая системе (4), является точкой ценового равновесия при фиксированном положении двух фирм.

Следует заметить, что из системы (4) можно выделить аналитические выражения для S_1 и $\frac{\partial S_1}{\partial p_1}$ в случае равновесных цен:

$$S_1 = \frac{\pi p_1}{p_1 + p_2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial p_1} = -\frac{\pi}{p_1 + p_2}. \quad (6)$$

Тогда прибыли фирм при равновесных ценах будут соответственно равны:

$$H_1 = \frac{\pi p_1^2}{p_1 + p_2}, \quad H_2 = \frac{\pi p_2^2}{p_1 + p_2}. \quad (7)$$

Рассмотрим случай симметричного расположения фирм, т.е. $k_2 = -k_1 = k$. Цена на товар у первой фирмы выше, значит, ее предпочтет меньше чем половина покупателей, т.е.:

$$S_1 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Из системы (4) получим соотношение $\pi = S_1 \left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right)$. Так как $p_1 \geq p_2$, то:

$$S_1 \geq \frac{\pi}{2}.$$

Из полученных соотношений следует, что в случае симметричного расположения фирм решение системы (4) существует только при равных ценах $p_1 = p_2$ и, соответственно:

$$S_1 = \frac{\pi}{2}.$$

При $k_2 = -k_1 = k$ в условии равновесных цен из (3) получим:

$$\frac{\partial S_1}{\partial p_1} = -\frac{\sqrt{k^2 + 1}}{2k} - \frac{k}{2} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 + k^2}}{k} \right|.$$

Тогда, выразив из системы (4) p_1 и p_2 , получим:

$$p_1^* = p_2^* = \frac{\pi}{\frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k} + k \ln \frac{1 + \sqrt{1 + k^2}}{k}}. \quad (8)$$

4. ЗАДАЧА ПОИСКА РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ ДВУХ ФИРМ

В задаче поиска ценового равновесия фирмы имели фиксированное положение. Пусть теперь фирмы могут менять свое местоположение.

Рассмотрим проблему поиска равновесия для расположения двух фирм. Т.е. сформулируем задачу следующим образом: найти такие k_1^* и k_2^* , что $H_1(k_1, k_2^*) \leq H_1(k_1^*, k_2^*)$ и $H_2(k_1^*, k_2) \leq H_2(k_1^*, k_2^*)$ для $\forall k_1, k_2$.

Пусть k_2 фиксировано. Тогда задача поиска равновесия превратится для первой фирмы в задачу отыскания положения, в котором эта фирма будет получать максимальную прибыль. Заметим, что при фиксированном положении первой фирмы цены p_1 и p_2 будут выбираться как решение задачи ценового равновесия. В силу (4) и того, что $\frac{\partial S_1}{\partial p_2} = -\frac{\partial S_1}{\partial p_1}$, получаем уравнение для поиска экстремума:

$$\frac{\partial H_1}{\partial k_1} = p_1 \left(-\frac{\partial S_1}{\partial p_1} \frac{\partial p_2}{\partial k_1} + \frac{\partial S_1}{\partial k_1} \right) = 0. \quad (9)$$

Найдем выражение для $\frac{\partial p_2}{\partial k_1}$, исходя из (9).

Пусть $F_1 = S_1 + p_1 \frac{\partial S_1}{\partial p_1}$ и $F_2 = \pi - S_1 + p_2 \frac{\partial S_1}{\partial p_1}$, тогда получим, что:

$$\frac{\partial p_2}{\partial k_1} = \frac{-\frac{\partial F_1}{\partial p_1} \frac{\partial F_2}{\partial k_1} + \frac{\partial F_2}{\partial p_1} \frac{\partial F_1}{\partial k_1}}{\frac{\partial F_1}{\partial p_1} \frac{\partial F_2}{\partial p_2} - \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \frac{\partial F_2}{\partial p_1}}, \quad (10)$$

где $\frac{\partial F_1}{\partial p_1} = 2 \frac{\partial S_1}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial p_1^2}$, $\frac{\partial F_1}{\partial p_2} = -\frac{\partial S_1}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial p_1^2}$, $\frac{\partial F_2}{\partial p_1} = -\frac{\partial S_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial^2 S_1}{\partial p_1^2}$, $\frac{\partial F_2}{\partial p_2} = 2 \frac{\partial S_1}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial^2 S_1}{\partial p_2^2}$, $\frac{\partial F_1}{\partial k_1} = \frac{\partial S_1}{\partial k_1} + p_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial p_1 \partial k_1}$, $\frac{\partial F_2}{\partial k_1} = -\frac{\partial S_1}{\partial k_1} + p_2 \frac{\partial^2 S_1}{\partial p_1 \partial k_1}$.

Для поиска равновесия можно последовательно решать уравнение (9) для разных фирм.

В таблице 1 приведены некоторые расчеты для выбранного начального положения $k_1 = -1, k_2 = 1$. Первая итерации производится для поиска наилучшего положения первой фирмы при фиксированном $k_2 = 1$.

Следует заметить, что последовательность решений стремится к точке, в которой $k_1 = -k_2$ и $p_1 = p_2$. Действительно, когда $k_1 = -k_2$ и $p_1 = p_2$, то оптимальное положение фирмы будет в этой же точке, так как задача симметрична.

Рассмотрим уравнение (9) при $p_2 \rightarrow p_1$ и $k_2 \rightarrow -k_1$.

Найдя соответствующие выражения для производных, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial k_1} &\rightarrow 1, \quad \frac{\partial S_1}{\partial p_1} \rightarrow 0, \\ \frac{\partial^2 S_1}{\partial p_1 \partial k_1} &\rightarrow -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 + k_1^2}}{k_1} \right| - \frac{\sqrt{1 + k_1^2}}{4k_1^2}. \end{aligned}$$

Подставив в (10), а затем в (9), получим следующее уравнение:

$$1 - \frac{1 + 3p_1 \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1+k_1^2}}{k_1} \right| + \frac{\sqrt{1+k_1^2}}{4k_1^2} \right)}{3} = 0.$$

ТАБЛИЦА 1. Положение фирм, удовлетворяющее уравнению (9)

№ шага	k_1	k_2	p_1	p_2	H_1	H_2
1	-0.412	1	1.35488	1.05116	2.39689	1.44273
2	-0.412	0.6068	1.11025	1.53866	1.81626	1.53866
3	-0.531	0.6068	1.14794	1.11158	1.83219	1.71797
4	-0.531	0.5598	1.11525	1.1017	1.76254	1.71998
5	-0.5495	0.5598	1.11983	1.11494	1.76287	1.74752
6	-0.5495	0.5524	1.11459	1.11322	1.75187	1.74757
7	-0.552	0.5524	1.11519	1.115	1.75188	1.75128
8	-0.552	0.552	1.1149	1.1149	1.75129	1.75129

Выразим p_1 через k_1 :

$$p_1 = \frac{2}{3 \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1+k_1^2}}{k_1} \right| + \frac{\sqrt{1+k_1^2}}{4k_1^2} \right)}. \quad (11)$$

Таким образом, мы получили соотношение, выражающее зависимость цены от положения фирмы для точки равновесия, в которой $k_1 = -k_2$ и $p_1 = p_2$.

Так как в (11) $k_1 = -k_2$, то также справедливо (8):

$$p_1^* = p_2^* = \frac{\pi}{\frac{\sqrt{k^2+1}}{k} + k \ln \frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k}}.$$

Тогда получаем следующее уравнение:

$$\frac{\pi}{\frac{\sqrt{k^2+1}}{k} + k \ln \frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k}} = \frac{2}{3 \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1+k^2}}{k} \right| + \frac{\sqrt{1+k^2}}{4k^2} \right)}. \quad (12)$$

Решение (12) будет удовлетворять задаче поиска равновесия.

Приближенное решение (12): $k^* \approx 0.5521$.

Подставив в (11), получим:

$$p^* \approx 1.1150243021701.$$

Прибыль фирм рассчитываем по формуле (7):

$$H_1 = H_2 \approx 1.751476078136.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье проведено исследование задачи о размещении на плоскости в случае равномерного распределения населения. Затраты покупателя на приобретение товара складывались из стоимости товара и расстояния от покупателя до фирмы, которое определялось как евклидово.

В случае фиксированного положения фирм на плоскости получены аналитические выражения для количества покупателей и получаемой прибыли. В случае симметричного расположения фирм найдены оптимальные цены.

Для задачи поиска оптимального расположения фирм установлено, что решение имеет место при симметричном расположении. Получено уравнение, связывающее местоположение фирм на плоскости. Представлено его численное решение и соответствующие значения для оптимальных цен и получаемой прибыли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hotelling H. Stability in competition // The Economic Journal Vol. 39, Issue 153, 1929, 41-57.
2. Mazalov V. V., Sakaguchi M. Location game on the plain // International Game Theory Review Vol. 5, No. 1, 2003, 1-13.

Раздел II. ИНФОРМАТИКА

Section II. COMPUTER SCIENCE

УДК 519.142.2 + 519.2

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОЧЕРЕДЬЮ С ДВУМЯ ПРИОРИТЕТАМИ В ПАМЯТИ ОДНОГО УРОВНЯ

Е. А. АКСЕНОВА

В статье рассмотрена задача управления двухприоритетной очередью, представленной в виде двух FIFO-очереди, для трех способов организации хранения данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №06-01-00303.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Во многих приложениях требуется обработка записей с упорядоченными определенным образом ключами. Часто накапливается некоторый набор записей, после чего обрабатывается запись с максимальным значением ключа, затем, возможно, накопление записей продолжается, затем обрабатывается запись с наибольшим текущим ключом и т. д. Соответствующая структура данных, поддерживающая операции вставки нового элемента и удаления элемента с наибольшим приоритетом, называется очередью с приоритетами [1, 2].

Рассмотрим очередь с двумя приоритетами, расположенную в области памяти размера m единиц. Такую приоритетную очередь представим в виде двух FIFO-очереди. Первой FIFO-очереди присвоим приоритет 1, второй FIFO-очереди – приоритет 2. Наивысший приоритет 2. Будем считать, что время дискретно. В каждый момент времени могут произойти следующие операции:

- включение элемента с первым приоритетом с вероятностью p_1 (включение элемента в первую FIFO-очередь),
- включение элемента со вторым приоритетом с вероятностью p_2 (включение элемента во вторую FIFO-очередь),
- исключение элемента из очереди с вероятностью q ,

- очередь не изменяет своей длины с вероятностью r (только чтение или отсутствие операции),

где $p_1 + p_2 + q + r = 1$. Исключение элемента из очереди происходит по наивысшему приоритету. Это означает, что пока вторая FIFO-очередь не пуста, с вероятностью q исключение элементов происходит из этой очереди. Как только вторая FIFO-очередь станет пустой, с вероятностью q исключение элементов будет происходить из первой FIFO-очереди. При исключении элемента из пустой очереди не происходит завершение работы.

Рассмотрим последовательный, связанный и страничный способы организации FIFO-очереди. Необходимо определить, как распределить память между FIFO-очередями в последовательном способе, и какой из способов организации очередей является оптимальным. В качестве критерия оптимальности рассмотрим максимальное среднее время работы с приоритетной очередью до переполнения выделенного объема памяти.

2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В последовательном способе организации каждой FIFO-очереди выделено некоторое количество единиц памяти из данных m единиц. Пусть s – количество единиц памяти, выделенных первой FIFO-очереди, тогда $(m - s)$ – количество единиц памяти, выделенных второй FIFO-очереди (Рис. 1).

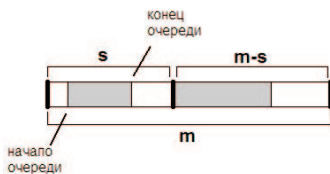


Рис. 1. Последовательное представление

2.1. Математическая модель и матрица вероятностей переходов. Обозначим текущие длины FIFO-очереди x_1 и x_2 . В качестве математической модели процесса работы с приоритетной очередью рассмотрим случайное блуждание по целочисленной решетке в двухмерном пространстве $0 \leq x_1 < s + 1$, $0 \leq x_2 < m - s + 1$ (Рис. 2), где

$x_1 = s+1, x_2 = m-s+1$ – поглощающие экраны, попадание на которые характеризуется как переполнение одной из FIFO-очереди, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$ – отражающие точки, т.к. только в состоянии $x_1 = x_2 = 0$ возможно исключение из пустой очереди. Исключение элементов из первой FIFO-очереди может происходить только при $x_2 = 0$.

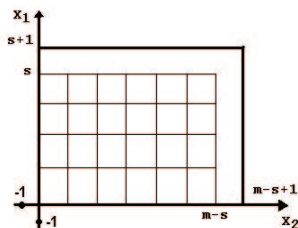


Рис. 2. Область блуждания при последовательном представлении

Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = 0$. Необходимо определить такое значение $0 \leq s \leq m$, чтобы время блуждания до попадания на поглощающие экраны было максимально.

Рассмотрим случай, когда в очереди хранятся данные, длина информационной части которых равна $L > 1$ единиц памяти. Предполагаем, что m кратно L . Количество элементов в этом случае равно m/L . В качестве математической модели в этом случае будем иметь

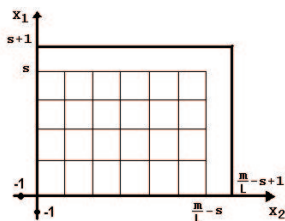


Рис. 3. Область блуждания, когда длина информационной части равна L

случайное блуждание по целочисленной решетке в двухмерном пространстве $0 \leq x_1 < s+1, 0 \leq x_2 < m/L - s + 1$ (Рис. 3), где $x_1 = s+1, x_2 = m/L - s + 1$ – поглощающие экраны, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$ – отражающие точки.

Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = 0$. Необходимо определить такое значение $0 \leq s \leq m/L$, чтобы время блуждания до попадания на поглощающие экраны было максимально.

Если в произвольный момент времени процесс блуждания находится в состоянии (x_1, x_2) , то в следующий момент времени он переходит в состояние (x'_1, x'_2) , которое определяется правилами:

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{p_1} (x'_1, x'_2) = \{(x_1 + 1, x_2), \quad 0 \leq x_1 \leq s, \quad 0 \leq x_2 \leq m - s;$$

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{p_2} (x'_1, x'_2) = \{(x_1, x_2 + 1), \quad 0 \leq x_1 \leq s, \quad 0 \leq x_2 \leq m - s;$$

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{q} (x'_1, x'_2) = \begin{cases} (x_1 - 1, x_2), & 0 < x_1 \leq s, \quad x_2 = 0; \\ (x_1, x_2 - 1), & 0 \leq x_1 \leq s, \quad 0 < x_2 \leq m - s; \\ (x_1, x_2), & x_1 = 0, \quad x_2 = 0; \end{cases}$$

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{r} (x'_1, x'_2) = \{(x_1, x_2), \quad 0 \leq x_1 \leq s, \quad 0 \leq x_2 \leq m - s.$$

Если длина информационной части элемента в очереди равна L , то вместо m в этом случае будем рассматривать m/L .

Случайное блуждание будем рассматривать как конечную однородную поглощающую цепь Маркова [3]. Пронумеруем невозвратные состояния цепи так, как показано графически (Рис. 4). Количество невозвратных состояний в такой цепи равно $(s + 1)(m - s + 1)$. Например, для $m = 6, s = 4$ количество невозвратных состояний равно 15 (Рис. 4).

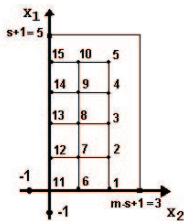


Рис. 4. Область блуждания и нумерация невозвратных состояний при $m = 6, s = 4$

Рассмотрим матрицу Q вероятностей переходов из невозвратных состояний в невозвратные. Для размера памяти m и заданного s размерность матрицы Q будет $(s + 1)(m - s + 1) \times (s + 1)(m - s + 1)$.

Теорема 1. Матрица Q при заданной нумерации, размере памяти m и заданной величине $s > 0$ имеет следующий вид:

$$Q = \begin{pmatrix} A_{(s+1) \times (s+1)} & B_{(s+1) \times (s+1)} & & 0 \\ C_{(s+1) \times (s+1)} & A_{(s+1) \times (s+1)} & \dots & \\ & C_{(s+1) \times (s+1)} & \dots & B_{(s+1) \times (s+1)} \\ & & \dots & A_{(s+1) \times (s+1)} & B'_{(s+1) \times (s+1)} \\ & 0 & & C_{(s+1) \times (s+1)} & A'_{(s+1) \times (s+1)} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{(s+1) \times (s+1)} = \begin{pmatrix} r & p_1 & & 0 \\ & r & p_1 & \\ & & \dots & \dots \\ & & & r & p_1 \\ 0 & & & & r \end{pmatrix},$$

$$A'_{(s+1) \times (s+1)} = \begin{pmatrix} r+q & p_1 & & 0 \\ q & r & p_1 & \\ & q & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots & p_1 \\ 0 & & & q & r \end{pmatrix},$$

$$B_{(s+1) \times (s+1)} = \begin{pmatrix} q & & & 0 \\ & q & & \\ & & \dots & \\ & & & q & q \\ 0 & & & & q \end{pmatrix},$$

$$C_{(s+1) \times (s+1)} = \begin{pmatrix} p_2 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & p_2 \\ 0 & & & & p_2 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция проводится по размеру памяти m .

1) Пусть размер памяти $m = 2, s = 1$ (Рис. 5). Размерность матри-

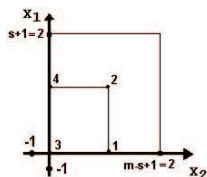


Рис. 5. Область блуждания и нумерация невозвратных состояний при $m = 2, s = 1$

цы Q будет 4×4 , и матрица имеет вид

$$Q = \left(\begin{array}{cc|cc} r & p_1 & q & 0 \\ 0 & r & 0 & q \\ \hline p_2 & 0 & r+q & p_1 \\ 0 & p_2 & q & r \end{array} \right).$$

Пусть $m = 6, s = 4$ (Рис. 4). Размерность матрицы Q будет 15×15 , и матрица имеет вид

$$Q = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} r & p_1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & p_1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & p_1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & p_1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & p_1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & p_1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & p_1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & p_1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & q \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & r+q & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & q & r & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & q & r & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & q & r & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & q & r \end{array} \right).$$

2) Предположим, что для размера памяти $m = d - 1$ и заданного значения $s > 0$ выполняется утверждение теоремы. Количество невозвратных состояний в цепи равно $(s+1)(d-1-s+1) = (s+1)(d-s)$. Размерность матрицы Q будет $(s+1)(d-s) \times (s+1)(d-s)$ и матрица имеет вид

$$Q = \left(\begin{array}{ccccccc} A_{(s+1) \times (s+1)} & B_{(s+1) \times (s+1)} & & & & & 0 \\ C_{(s+1) \times (s+1)} & A_{(s+1) \times (s+1)} & \dots & & & & \\ & C_{(s+1) \times (s+1)} & \dots & B_{(s+1) \times (s+1)} & & & \\ & & \dots & A_{(s+1) \times (s+1)} & B_{(s+1) \times (s+1)} & & \\ & 0 & & C_{(s+1) \times (s+1)} & A'_{(s+1) \times (s+1)} & & \end{array} \right).$$

3) Проверим, что при размере памяти $m = d$ выполняется утверждение теоремы. Если добавить еще одну единицу памяти, то при фиксированном s поглощающая граница области блуждания при $m = d - 1$ $x_2 = d - s$ сдвинется на единицу вправо и будет $x_2 = d + 1$. Тогда получим $s + 1$ новых невозвратных состояний. Согласно введенной нумерации, эти состояния будут иметь младшие номера. Количество невозвратных состояний будет $(s+1)(d-s) + (s+1) = (s+1)(d-s+1)$. Тогда в матрицу Q при $m = d - 1$ добавятся подматрицы: $A_{(s+1) \times (s+1)}$, $B_{(s+1) \times (s+1)}$, $C_{(s+1) \times (s+1)}$. Получили матрицу

Q размерности $(s+1)(d-s+1) \times (s+1)(d-s+1)$:

$$Q = \left(\begin{array}{c|cccc} A_{(s+1) \times (s+1)} & B_{(s+1) \times (s+1)} & & & \\ C_{(s+1) \times (s+1)} & A'_{(s+1) \times (s+1)} & B_{(s+1) \times (s+1)} & & 0 \\ & C_{(s+1) \times (s+1)} & \dots & \dots & \\ & & \dots & A_{(s+1) \times (s+1)} & B_{(s+1) \times (s+1)} \\ & 0 & & C_{(s+1) \times (s+1)} & A'_{(s+1) \times (s+1)} \end{array} \right).$$

Теорема доказана.

Подматрицы матрицы Q характеризуют определенные операции над очередями. Подматрица A характеризует операции, при которых не изменяется длина очереди (например, чтение), и операции включения элементов в очередь с приоритетом 1, подматрица B – операции исключения элементов из очереди с приоритетом 2, подматрица C – операции включения элементов в очереди, подматрица A' – операции, при которых не изменяется длина очереди и операции включения и исключения элементов в очередь с приоритетом 1.

3. СВЯЗАННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В связанном способе организации FIFO-очередь представлена в виде связанного списка, каждый элемент которого состоит из двух единиц памяти, одна из которых используется для хранения информации, вторая содержит указатель на следующий элемент в списке (Рис. 6).

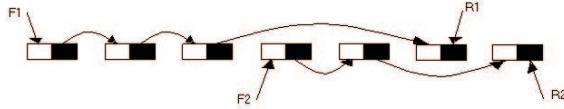


Рис. 6. Связанное представление

F_1 и F_2 – указатели на первые элементы FIFO-очереди, R_1 и R_2 – указатели на последние элементы FIFO-очереди. Предполагаем, что m кратно 2. Для хранения указателей используется $m/2$ единиц памяти, для хранения информации используется $m/2$ единиц памяти. Количество элементов равно $m/2$.

3.1. Математическая модель. Обозначим текущие длины FIFO-очереди x_1 и x_2 . В качестве математической модели процесса работы с приоритетной очередью рассмотрим случайное блуждание по целочисленной решетке в треугольной области $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 < m/2 + 1$ (Рис. 7), где $x_1 + x_2 = m/2 + 1$ – поглощающий экран,

попадание на который характеризуется как переполнение выделенного объема памяти, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$ – отражающие точки, т.к. только в состоянии $x_1 = x_2 = 0$ возможно исключение из пустой очереди. Исключение элементов из первой FIFO-очереди может происходить только при $x_2 = 0$.

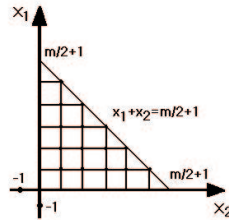


Рис. 7. Область блуждания для связанного представления

Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = 0$. Необходимо найти среднее время блуждания T до попадания на поглощающий экран.

Рассмотрим случай, когда в очереди хранятся данные, длина информационной части которых равна $L > 1$ единиц памяти. Тогда длина каждого элемента очереди будет $L + 1$, где одна единица памяти содержит указатель на следующий элемент. Предполагаем, что m кратно $L + 1$. Количество элементов в этом случае будет $m/(L + 1)$. Для хранения указателей используется $m/(L + 1)$ единиц памяти. В качестве математической модели будем иметь случайное блуждание по целочисленной решетке в треугольной области $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 < m/(L + 1) + 1$ (Рис. 8), где $x_1 + x_2 = m/(L + 1) + 1$ – поглощающий экран, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$ – отражающие точки.

Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = 0$. Необходимо найти среднее время блуждания T до попадания на поглощающий экран и сравнить со средним временем блуждания в случае последовательного представления, когда длина информационной части равна L .

4. СТРАНИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В страничном способе организации FIFO-очередь представлена в виде связанного списка страниц размера x единиц памяти. Если одна FIFO-очередь заняла страницу, то другая FIFO-очередь не может ее использовать (Рис. 9). F_1 и F_2 – указатели на первые элементы FIFO-очереди, R_1 и R_2 – указатели на последние элементы FIFO-очереди.

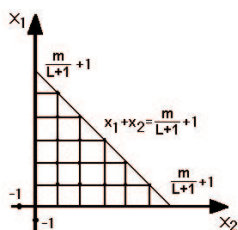


Рис. 8. Область блуждания, когда длина информационной части равна L

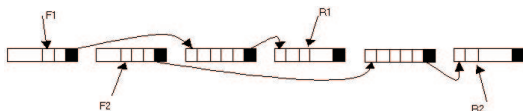


Рис. 9. Страничное представление

Предполагаем, что m кратно x . Для хранения указателей используется m/x единиц памяти, для хранения информации используется $m - m/x$ единиц памяти. Количество страниц равно m/x . Для хранения информации у каждой страницы используется $x - 1$ единиц памяти. При $x = 2$ получаем связанное представление очередей.

Предполагаем, что существует механизм работы со списком свободных страниц, который позволяет при заполнении страницы представить очереди новую страницу. Если в очереди освободилась страница, то она возвращается в список свободных страниц. Переполнение наступает тогда, когда список свободных страниц пуст и какая-то из FIFO-очередей переполнила страницу.

4.1. Математическая модель и матрица вероятностей переходов. Обозначим текущие длины FIFO-очередей x_1 и x_2 . В качестве математической модели процесса работы с приоритетной очередью рассмотрим случайное блуждание по целочисленной решетке в треугольной области $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 < m - m/x + 1$ (Рис. 10), где $x_1 + x_2 = m - m/x + 1$ — поглощающий экран, попадание на который характеризуется как переполнение выделенного объема памяти, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$ — отражающие точки, т.к. только в состоянии $x_1 = x_2 = 0$

возможно исключение из пустой очереди. Исключение элементов из первой FIFO-очереди может происходить только при $x_2 = 0$.

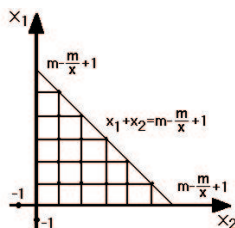


Рис. 10. Область блуждания для страничного представления

Блуждание начинается в точке $x_1 = x_2 = 0$. Необходимо найти среднее время блуждания T до попадания на поглощающий экран.

Обозначим n – количество единиц памяти, которые используются для хранения информации. Для страничного представления FIFO-очереди $n = m - m/x$. Для связанного представления FIFO-очереди $n = m/2$, если длина информационной части равна 1, и $n = m/(L + 1)$, если длина информационной части равна $L > 1$.

Если в произвольный момент времени процесс блуждания находится в состоянии (x_1, x_2) , то в следующий момент времени он переходит в состояние (x'_1, x'_2) , которое определяется правилами:

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{p_1} (x'_1, x'_2) = \{(x_1 + 1, x_2), \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad 0 \leq x_1 + x_2 \leq n;$$

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{p_2} (x'_1, x'_2) = \{(x_1, x_2 + 1), \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad 0 \leq x_1 + x_2 \leq n;$$

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{q} (x'_1, x'_2) = \begin{cases} (x_1 - 1, x_2), & 0 < x_1 \leq n, \quad x_2 = 0; \\ (x_1, x_2 - 1), & x_1 \geq 0, \quad x_2 > 0, \quad 0 < x_1 + x_2 \leq n; \\ (x_1, x_2), & x_1 = 0, \quad x_2 = 0; \end{cases}$$

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{r} (x'_1, x'_2) = \{(x_1, x_2), \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad 0 \leq x_1 + x_2 \leq n.$$

Случайное блуждание будем рассматривать как конечную однородную поглощающую цепь Маркова. Пронумеруем невозвратные состояния цепи так, как показано на рисунке 11, т.е. снизу вверх, справа налево. Количество невозвратных состояний вычисляется с помощью формулы суммы арифметической прогрессии и равно $(n + 1)(n + 2)/2$.

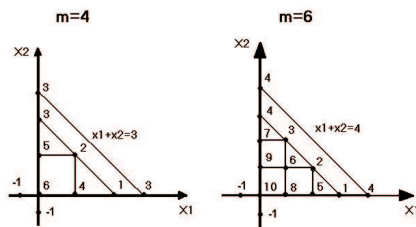


Рис. 11. Нумерация невозвратных состояний при $x = 2$ для $m = 4$ и $m = 6$

Рассмотрим примеры построения области блуждания для $m = 4$ и $m = 6$ при $x = 2$ (Рис. 11). Для $m = 4$ $n = 2$, количество невозвратных состояний равно $3 \cdot 4/2 = 6$, поглощающий экран $x_1 + x_2 = n + 1 = 3$. Для $m = 6$ $n = 3$, количество невозвратных состояний равно $4 \cdot 5/2 = 10$, поглощающий экран $x_1 + x_2 = n + 1 = 4$. Размеры памяти меньше 4 рассматривать не будем, т.к. в этом случае не имеет смысла рассматривать страничный способ.

Рассмотрим матрицу Q вероятностей переходов из невозвратных состояний в невозвратные.

Размерность матрицы Q будет $(n + 1)(n + 2)/2 \times (n + 1)(n + 2)/2$.

Теорема 2. Матрица Q при заданной нумерации и величине n имеет следующий вид:

$$Q = \begin{pmatrix} A_{n+1} & B_n & & & 0 \\ C_{n+1} & A_n & B_{n-1} & & \\ & C_n & A_{n-1} & \dots & \\ & & C_{n-1} & \dots & B_2 \\ & & & \dots & A_2 & B_1 \\ 0 & & & & C_2 & A_1 \end{pmatrix},$$

где подматрица A_k размера $k \times k$

$$A_k = \begin{pmatrix} r & & & 0 \\ & r & & \\ & & \dots & \\ & & & r \\ 0 & & & & r \end{pmatrix}, \quad k = n + 1, n, \dots, 3, 2;$$

$$A_1 = (r + q),$$

подматрица B_k размера $(k+1) \times k$

$$B_k = \begin{pmatrix} q & & & 0 \\ & q & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & q \\ & & & q \end{pmatrix}, \quad k = n, n-1, \dots, 2, 1;$$

подматрица C_k размера $(k-1) \times k$

$$C_k = \begin{pmatrix} p_2 & p_1 & & & 0 \\ & p_2 & p_1 & & \\ & & \dots & \dots & \\ 0 & & & p_2 & p_1 \end{pmatrix}, \quad k = n+1, n, \dots, 3, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция проводится по количеству единиц памяти n , которое используется для хранения информации.

1) Пусть размер памяти $m = 4$, $x = 2$, $n = 2$ (Рис. 11). Размерность матрицы Q будет 6×6 .

Рассмотрим состояние 2. Из него можно перейти в состояние 5 с вероятностью q исключения элемента из очереди с приоритетом 2, можно остаться в состоянии 2 с вероятностью r . Остальные элементы в этой строке будут нулями, т.к. переходы из состояния 2 в состояния 1, 3, 4, 6 невозможны.

Рассмотрим состояние 5. Из него можно перейти в состояние 3 с вероятностью p_1 включения элемента в очередь с приоритетом 1, в состояние 2 с вероятностью p_2 включения элемента в очередь с приоритетом 2, в состояние 6 с вероятностью q исключения элемента из очереди с приоритетом 1 (исключения из очереди с приоритетом 1 могут происходить только при $x_2 = 0$, т.е. если очередь с приоритетом 2 пуста), можно остаться в состоянии 5 с вероятностью r . Остальные элементы в этой строке будут нулями, т.к. переходы из состояния 5 в состояния 1, 4 невозможны.

Рассмотрим состояние 6. Из него можно перейти в состояние 4 с вероятностью p_2 включения элемента в первую очередь, можно перейти в состояние 5 с вероятностью p_1 включения элемента во вторую очередь, можно остаться в состоянии 6 с вероятностью $r+q$ (q прибавляется потому, что в этом состоянии обе очереди пусты, а исключение из пустой очереди не меняет ее длины). Остальные элементы в этой строке будут нулями, т.к. переходы из состояния 6 в состояния 1, 2, 3

невозможны. Другие состояния рассматриваются аналогично. Матрица Q имеет вид:

$$Q = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} r & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & q & 0 \\ \hline p_2 & p_1 & 0 & r & 0 & q \\ 0 & p_2 & p_1 & 0 & r & q \\ \hline 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 & r+q \end{array} \right).$$

Если рассмотреть $m = 6, x = 3, n = 2$, то область блуждания и матрица Q будут такие же, как при $m = 4, x = 2, n = 2$.

Пусть $m = 6, x = 2, n = 3$ (Рис. 11). Размерность матрицы Q будет 10×10 , и матрица имеет вид:

$$Q = \left(\begin{array}{cccc|ccc|cc|c} r & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ \hline p_2 & p_1 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & p_1 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & p_1 & 0 & 0 & r & 0 & q & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 & 0 & r & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 & 0 & r & q \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 & r+q \end{array} \right).$$

2) Предположим, что для размера памяти $n = d - 1$ выполняется утверждение теоремы. Количество невозвратных состояний в цепи будет $d(d+1)/2$. Матрица Q имеет размерность $d(d+1)/2 \times d(d+1)/2$ и блочную структуру:

$$Q = \left(\begin{array}{cccccc} A_d & B_{d-1} & & & & 0 \\ C_d & A_{d-1} & B_{d-2} & & & \\ & C_{d-1} & A_{d-2} & \dots & & \\ & & C_{d-2} & \dots & B_2 & \\ & & & \dots & A_2 & B_1 \\ 0 & & & & C_2 & A_1 \end{array} \right).$$

3) Проверим, что при размере памяти $n = d$ выполняется утверждение теоремы. Если добавить еще одну единицу памяти, тогда поглощающая граница сдвинется вправо на единицу и будет $x_1 + x_2 = d+1$. Тогда в цепи появятся $d+1$ новых невозвратных состояний. Количество невозвратных состояний в цепи будет равно $d(d+1)/2 + (d+1) = (d+1)(d+2)/2$. Количество строк и столбцов в матрице Q при $n = d - 1$ увеличится на $d + 1$. Согласно введенной нумерации, новые состояния будут иметь младшие номера, а состояния цепи при $n = d - 1$ будут

следовать за ними. Тогда в матрицу Q добавятся подматрицы: A_{d+1} размерности $(d+1) \times (d+1)$, B_d размерности $(d+1) \times d$, C_{d+1} размерности $d \times (d+1)$, которые будут описывать переходы из новых $d+1$ состояний. Получили матрицу Q размерности $(d+1)(d+2)/2 \times (d+1)(d+2)/2$:

$$Q = \left(\begin{array}{c|cccc} A_{d+1} & B_d & & & \\ C_{d+1} & A_d & B_{d-1} & & 0 \\ & C_d & A_{d-1} & \dots & \\ & & C_{d-1} & \dots & B_2 \\ & & & \dots & A_2 & B_1 \\ & 0 & & & C_2 & A_1 \end{array} \right).$$

Теорема доказана.

Подматрицы матрицы Q описывают определенные операции над очередями. Подматрица A характеризует операции, при которых не изменяется длина очереди (например, чтение), подматрица B – операции исключения информации из очередей, подматрица C – операции включения информации в очереди.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для решения задачи вычислим фундаментальную матрицу $N = (I - Q)^{-1}$. В случае последовательного представления необходимо построить матрицу Q , вычислить матрицу N для всевозможных значений s . Для вычисления среднего времени блуждания просуммируем элементы матрицы N в строке, которая соответствует начальному состоянию $x_1 = x_2 = 0$. Согласно введенной нумерации это будет строка с номером $(s+1)(m-s+1) - s$. Затем сравним полученное время для разных значений s и выберем максимальное. Соответствующее максимальному времени значение s будет оптимальным разбиением памяти для последовательного представления.

В случае связанного и страничного представления необходимо построить матрицу Q , вычислить матрицу N и просуммировать элементы матрицы N в строке, которая соответствует начальному состоянию $x_1 = x_2 = 0$. Согласно введенной нумерации это будет последняя строка матрицы N .

В случае страничного представления вычисленное среднее время блуждания будет оценкой сверху для реального среднего времени. Обозначим эту оценку T_{max} . Также, можно вычислить оценку снизу

T_{min} для среднего времени блуждания. Для оценки сверху рассмотрим блуждание в области $x_1 + x_2 < t - m/x + 1$, для оценки снизу блуждание в области $x_1 + x_2 < t - m/x - 3(x - 2) + 1$. При связанном представлении вычисленное время T – это среднее время блуждания.

Для страничного представления оптимальный размер страницы равен $x = \sqrt{6 \cdot m}/3$. Рассматривая, для какого размера памяти m область блуждания в случае связанного представления может быть меньше, чем область блуждания в случае страничного представления для минимальной оценки среднего времени, получаем, что для $m > 24$ при $x = \sqrt{6 \cdot m}/3$ и для любого m при $2 < x < m/6$ среднее время блуждания до поглощения в случае связанного представления будет меньше, чем минимальная оценка среднего времени в случае страничного представления.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для реализации алгоритма решения задачи разработаны программы для ЭВМ, которые генерируют матрицу Q , вычисляют матрицу N и среднее время работы для каждого из рассмотренных способов представления.

В таблицах 1, 2, 3, 4 представлены результаты вычислений. В первых четырех столбцах находятся вероятностные характеристики приоритетной очереди, в столбце с названием m содержится размер выделенной памяти.

Столбец с названием A_1 соответствует последовательному представлению для размера памяти m , столбец с названием A'_1 соответствует последовательному представлению для размера памяти $m - 2$, т.е. когда учитываются две единицы памяти при реализации двух циклических FIFO-очереди. В столбце с названием s находится оптимальное количество единиц памяти, выделенных первой FIFO-очереди, в столбце с названием T находится среднее время работы.

В столбце с названием A_2 находится среднее время работы T для связанного представления. В столбце с названием A_3 находятся минимальная T_{min} и максимальная T_{max} оценки среднего времени для страничного представления и оптимальный размер страницы x .

Из представленных результатов в таблицах 1 и 2 видно, что при $m = 20$ ($m < 24$) среднее время для связанного представления находится между оценками T_{min} и T_{max} для страничного представления. При $m = 32$ ($m > 24$) видно, что среднее время для связанного

Таблица 1. Среднее время работы с очередью по приоритетам для $m = 20$

r	p_1	p_2	q	m	A_1		A'_1		A_2	A_3		
					s	T	s	T	T	x	T_{min}	T_{max}
0.25	0.25	0.25	0.25	20	13	62.99	12	56.38	40.0	4	36.0	60.0
0.1	0.4	0.4	0.1	20	11	25.4	10	22.82	15.51	4	14.08	22.65
0	0.1	0.6	0.3	20	5	43.02	5	38.76	25.63	4	23.13	38.13
0.2	0.6	0.1	0.1	20	17	30.47	15	27.49	18.06	4	16.39	26.39
0	0.7	0.3	0	20	13	18.4	12	16.6	11.0	4	10.0	16.0
0	0.3	0.7	0	20	7	18.4	6	16.6	11.0	4	10.0	16.0
0.1	0.3	0.2	0.4	20	15	128.69	13	111.61	73.44	4	64.3	121.13
0.1	0.2	0.3	0.4	20	13	121.58	11	106.2	73.44	4	64.3	121.13
0.5	0.2	0.2	0.1	20	12	57.09	10	51.2	35.56	4	32.22	52.22

Таблица 2. Среднее время работы с очередью по приоритетам для $m = 32$

r	p_1	p_2	q	m	A_1		A'_1		A_2	A_3		
					s	T	s	T	T	x	T_{min}	T_{max}
0.25	0.25	0.25	0.25	32	22	102.93	21	96.33	64.0	4	72.0	96.0
0.1	0.4	0.4	0.1	32	18	40.9	16	38.29	24.08	4	26.94	35.51
0	0.1	0.6	0.3	32	9	70.41	8	65.77	40.63	4	45.63	60.63
0.2	0.6	0.1	0.1	32	27	48.63	26	45.6	28.06	4	31.39	41.39
0	0.7	0.3	0	32	21	29.5	20	27.7	17.0	4	18.99	25.0
0	0.3	0.7	0	32	11	29.5	10	27.7	17.0	4	19.0	25.0
0.1	0.3	0.2	0.4	32	26	232.42	24	215.1	130.9	4	150.58	210.15
0.1	0.2	0.3	0.4	32	22	217.51	21	201.28	130.9	4	150.58	210.15
0.5	0.2	0.2	0.1	32	19	92.45	18	86.55	55.56	4	62.22	82.22

представления меньше минимальной оценки среднего времени T_{min} для страничного представления, оптимальный размер страницы $x = 4$ удовлетворяет неравенству $2 < x < m/6$.

Сравнивая среднее время работы для последовательного и страничного представления, видно, что для некоторых наборов вероятностей среднее время для последовательного представления меньше оценки сверху T_{max} для страничного представления. Тем не менее, видно, что для некоторых наборов вероятностей среднее время для

Таблица 3. Среднее время работы с очередью по приоритетам для $m = 60$ при длине информационной части $L > 1$

r	p_1	p_2	q	m	$L = 2$			$L = 3$		
					A_1		A_2	A_1		A_2
					s	T	T	s	T	T
0.25	0.25	0.25	0.25	60	21	96.33	80.0	13	62.99	60.0
0.1	0.4	0.4	0.1	60	16	38.29	29.8	11	25.4	22.65
0	0.1	0.6	0.3	60	8	65.77	50.63	5	43.02	38.13
0.2	0.6	0.1	0.1	60	26	45.6	34.72	17	30.47	26.39
0	0.7	0.3	0	60	20	27.69	21.0	13	18.4	16.0
0	0.3	0.7	0	60	10	27.69	21.0	7	18.4	16.0
0.1	0.3	0.2	0.4	60	24	215.1	170.37	15	128.69	121.13
0.1	0.2	0.3	0.4	60	21	201.3	170.37	13	121.58	121.13
0.5	0.2	0.2	0.1	60	18	86.55	68.89	12	57.09	52.22

Таблица 4. Среднее время работы с очередью по приоритетам для $m = 60$ при длине информационной части $L > 1$

r	p_1	p_2	q	m	$L = 4$			$L = 5$		
					A_1		A_2	A_1		A_2
					s	T	T	s	T	T
0.25	0.25	0.25	0.25	60	10	46.37	48.0	7	36.73	40.0
0.1	0.4	0.4	0.1	60	8	19.05	18.37	6	15.2	15.51
0	0.1	0.6	0.3	60	4	32.14	30.63	3	25.55	25.63
0.2	0.6	0.1	0.1	60	12	22.79	21.39	10	18.52	18.06
0	0.7	0.3	0	60	10	13.87	13.0	8	11.17	11.0
0	0.3	0.7	0	60	5	13.87	13.0	4	11.17	11.0
0.1	0.3	0.2	0.4	60	11	88.04	92.2	8	64.66	73.44
0.1	0.2	0.3	0.4	60	9	84.22	92.2	7	63.0	73.44
0.5	0.2	0.2	0.1	60	9	42.62	42.22	7	34.23	35.56

последовательного представления больше, чем максимальная оценка T_{max} для страничного представления.

Сравнивая связанное и последовательное представление, видно, что среднее время для связанного представления всегда меньше среднего времени для последовательного представления.

Сравнивая результаты в случае, когда длина информационной части равна $L > 1$, видно, что с ростом L среднее время для связанного

представления становится больше среднего времени для последовательного представления. Например, при $L = 5$ среднее время для связанного представления в основном больше среднего времени для последовательного представления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седжвик Р. Фундаментальные алгоритмы на C++. Анализ /Структуры данных /Сортировка/ Поиск: Пер. с англ./ Роберт Седжвик. К.: Издательство "Диасофт", 2001.
2. Боллапаргада В., Мэрфи К., Расс У. Структура операционной системы Cisco IOS. М.: Вильямс, 2002, 163–189.
3. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970.

УДК 519.6

ОБ ОПЫТЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ПОДХОДА К РАЗРАБОТКЕ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Д. П. Косицын, А. А. Печников, А. И. ШАБАЕВ

Рассмотрен единый формализованный подход к разработке программного обеспечения для управления сложными производственными процессами определенного класса. В качестве примера описана разработка программного обеспечения для планирования производства гофротары.

1. ВВЕДЕНИЕ

Петрозаводский государственный университет имеет многолетний опыт работы по заказам предприятий целлюлозно-бумажной промышленности и лесопромышленного комплекса России. Среди заказчиков – Архангельский, Сегежский и Котласский ЦБК, ОАО «Кондопога», ОАО «Архбум», АОЗТ «Гофрон», ЗАО «Народное предприятие Набережночелнинский картонный комбинат», ОАО «Братский целлюлозно-картонный комбинат». В промышленную эксплуатацию внедрено более 40 прикладных программных систем управления производством.

Накопленный опыт позволяет сформулировать два следующих утверждения.

Во-первых, многие производственные процессы описываются в виде математических моделей, относящихся к классу оптимизационных задач раскроя и комплектовки материалов (ОЗРК), а, следовательно, могут решаться с помощью единого универсального алгоритма [1].

Во-вторых, информационные процессы, связанные с разработкой программного обеспечения (ПО) для решения таких задач, обладают высокой степенью общности по требованиям к интерфейсу, языку программирования, правам доступа, организации работы в сети, входным и выходным данным (портфель заказов, каталоги технологических карт, заказов и поставщиков и т.д.).

Из этого следует, что основные информационные решения могут быть реализованы в виде общих информационных и конфигурационных модулей, настраиваемых в дальнейшем применительно к конкретной задаче, производству или предметной области. Из этих двух утверждений следует, что существует принципиальная возможность реализации единого формализованного подхода к разработке ПО для управления сложными производственными процессами определенного класса, а значит, процесс может быть автоматизирован и реализован в виде универсальной программной системы [2].

Данный подход был поддержан в рамках федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2012 годы» (решение Конкурсной комиссии Роснауки № 26, Протокол от 15 ноября 2007 г. № 60; государственный контракт № 02.527.11.9021 от 26 ноября 2007 г. на выполнение опытно-конструкторских работ по теме «Разработка комплекса математических моделей, методов и программного обеспечения для повышения эффективности управления сложными производственными процессами»).

2. КОНВЕЙЕРНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

В самом общем виде комплекс программного обеспечения для решения сформулированного класса задач можно представить как трехуровневую иерархическую систему, на верхнем уровне которой находится УПС – универсальная программная система, обеспечивающая адаптацию к данной предметной области и требованиям заказчиков посредством универсальных настроек. Второй уровень иерархии – это программная система планирования производства (ПС ПП), адаптированная к требованиям конкретной предметной области, обеспечивающая выполнение общих требований и включающая специфические конфигурационные настройки и отчетные формы применительно к

предметной области. Нижний уровень иерархии – это внедрённая программная система планирования производства (ВПС ПП), представляющая собой ПС ПП, адаптированную к требованиям конкретного производства и являющуюся совокупностью автоматизированных рабочих мест, связанных локальной сетью и оснащённых настроенным на данную задачу ПО.

Процесс разработки приложения для конкретной производственной задачи в такой системе представляет собой конвейерную технологию производства, состоящую из трёх этапов. Во-первых, разрабатывается программная среда УПС для решения задач, формулируемых в математической постановке как ОЗРК. Во-вторых, в процессе адаптации УПС под конкретные предметные области, создаются специализированные ПС ПП. При этом осуществляется настройка УПС под общие требования, определяемые предметной областью. В-третьих, в наиболее подходящей с точки зрения модели ПС ПП создаётся (а по большей части – настраивается) приложение для решения конкретной задачи, которая и внедряется на предприятии-заказчике в соответствии с требованиями, определяемыми в техническом задании.

Внедрение и сопровождение ВПС ПП проводится специально обученными сотрудниками организации-исполнителя совместно с системным администратором, программистами и технологами заказчика, но без участия основных разработчиков. Возможности масштабирования при возникновении новых функций и/или новых производственных задач реализуются основными разработчиками УПС и ПС ПП.

В соответствии с требованиями государственного контракта, в мае-июне 2008 года осуществлена опытная эксплуатация пяти ВПС ПП на следующих предприятиях:

«Планирование производства цеха гофротары» – ЗАОр «Народное предприятие Набережночелнинский картонно-бумажный комбинат»;

«Планирование раскроев съёмов и распределения заявок для бумагоделательных машин» – ОАО «Кондопога»;

«Планирование и управление многономенклатурным производством» – ОАО «Прибой», Санкт-Петербург;

«Планирование производства фанеры» – ООО «Лахденпохский фанерный комбинат «Бумэкс»;

«Размещение грузов в транспортных средствах» – ОАО «Группа «Илим», г. Братск.

3. ОБ ОПЫТЕ РЕАЛИЗАЦИИ ОБЩЕГО ПОДХОДА

В рамках данной статьи мы ограничимся описанием процесса реализации проекта только для ВПС ПП «Планирование производства цеха гофротары», поскольку он в достаточной степени характеризует состояние дел и в других предметных областях.

Набережночелнинский картонно-бумажный комбинат изготавливает большое количество изделий из гофрокартона. Номенклатура изготавливаемых изделий насчитывает несколько тысяч видов. Большое количество видов готовой продукции связано с уникальностью требований заказчиков (например, размеров) по отношению к стандартным типам гофропродукции (гофроящики, обечайки, вкладыши и т.п.). Добавление новых видов номенклатуры происходит очень часто. Объем производства составляет 24 млн.кв.м гофропродукции в месяц. Общая численность занятого персонала составляет около 1700 человек, из них более 200 человек занято непосредственно в производстве гофропродукции.

На фабрике гофротары установлены 2 гофроагрегата со следующей производительностью: трехслойный картон – 210-220 м/мин, пятислойный картон – 150 м/мин, семислойный картон – 80-90 м/мин. Далее картон поступает на переработку для получения упаковочных средств. Линии переработки представляют собой комбинации из 20 различных агрегатов, производящих высечку, нарезку вкладышей, изготовление решеток и прокладок, нанесение печатных элементов и т.д.

Обследование процесса производства гофротары показало, что план по раскройам гофротары составляется без указания, на каком из двух гофроагрегатов его выполнять. Мастер смены в ходе работы выбирает (обычно последовательно) раскрои из этого списка и дает их на гофроагрегат. Порядок выбора раскроев зависит от текущей загруженности линий. Если в ближайшее время закончатся заготовки для некоторой линии, мастер возьмет раскрой, содержащий требуемую заготовку. То есть раскрой может вырабатываться непрерывно от начала и до конца, а частями, если его объем достаточно велик, и это препятствует своевременному выпуску других заготовок для линий. Тем не менее, мастер старается выполнять план по линиям в том порядке, как запланировал технолог.

Внедрение ВПС ПП «Планирование производства цеха гофротары» на предприятии обеспечивает реализацию следующих функций:

1. Оперативное/детальное планирование. Эта функция обеспечивает оперативное и детальное планирование работы, основанное на приоритетах, атрибутах, характеристиках и свойствах конкретного вида продукции, а также детально и оптимально вычисляет загрузку оборудования при работе. Кроме того, детальное планирование позволяет формировать оптимальные с точки зрения минимизации отходов планы раскроев гофрополотна, выпускаемого гофроагрегатами.

2. Диспетчеризация производства. Обеспечивает текущий мониторинг и диспетчеризацию процесса производства, отслеживая выполнение операций, занятость оборудования и людей, выполнение заказов, объемов, партий и контролирует в реальном времени выполнение работ в соответствии с планом. При реализации возможности организации учета выработки в цехе в режиме реального времени отслеживаются все происходящие изменения и вносятся корректировки в план цеха.

3. Управление документами. Контролирует содержание и прохождение документов, которые должны сопровождать выпускаемое изделие, включая инструкции и нормативы работ, способы выполнения, чертежи, схемы погрузки, клише и штампы-формы, процедуры стандартных операций, сообщения о технических изменениях, передачу информации от цеха к цеху, а также обеспечивает возможность вести плановую и отчетную цеховую документацию. Предусматривается архивирование информации по технологическим картам.

4. Сбор и хранение данных. Эта функция обеспечивает информационное взаимодействие различных производственных подсистем для получения, накопления и передачи технологических и управляющих данных, циркулирующих в производственной среде предприятия.

5. Управление производственными процессами. Отслеживает заданный производственный процесс на уровне контроля выполнения производственных заказов.

6. Управление производственными фондами. Поддержка процесса технического обслуживания, планового и оперативного ремонта производственного и технологического оборудования в течение всего производственного процесса.

7. Отслеживание истории продукта. Предоставляет информацию о том, где и в каком порядке велась работа с данным видом продукции.

8. Анализ производительности. Предоставляет отчеты о результатах производственных операций, а также сравнивает с предыдущими

и ожидаемыми результатами. Представленные управленческие консолидированные отчеты могут включать в себя такие измерения, как использование ресурсов, наличие ресурсов, время цикла производственного ресурса, соответствие плану, стандартам и другие.

ВПС ПП «Планирование производства цеха гофротары» управляет текущей производственной деятельностью в соответствии с поступающими заказами, требованиями технологической документации, актуальным состоянием оборудования, преследуя при этом цели максимальной эффективности и минимальной стоимости выполнения производственных процессов. Она позволяет оптимизировать управление производством и сделать его более рентабельным за счет быстрой реакции на происходящие события и применения математических методов планирования и оптимизации раскроев. Составленные планы раскроев и производства продукции обеспечивают повышение эффективности производства за счет снижения потерь материала на 2-4 процента посредством выбора рациональных вариантов раскроя гофрополотна и их сочетаний, сокращения простоев оборудования, уплотнения графиков их работы, ускорения процесса формирования производственной программы. Внедрение системы позволило существенно снизить время формирования производственной программы (с 4-5 часов до 20-30 минут). Интеграция с другими системами уменьшает влияние человеческого фактора на ввод данных, снижая вероятность некорректного ввода и появления ошибок.

Разработка и опытная эксплуатация ВПС ПП «Планирование производства цеха гофротары» показывает, что основные усилия разработчиков ПО сосредотачиваются на обследовании производственного процесса и четкой формулировке критериев оптимизации и занимают до 80% времени. Сам процесс программирования ВПС ПП с использованием конвейерной технологии производства ПО сократился с 3 до 1 месяца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В.А. Задачи раскроя и комплектовки материалов в моделировании производственных процессов // Лесной журнал, 2004, № 1, 111–116.
2. Печников А.А., Шабаев А.И. Автоматизация разработки программного обеспечения для задач целлюлозно-бумажной промышленности // Целлюлоза. Бумага. Картон, 2008, № 5, 66–68.

УДК 519.144.1 + 519.16

ГИБРИДНАЯ МЕТАЭВРИСТИКА ДЛЯ ПОТОКОВОЙ ЗАДАЧИ ШТЕЙНЕРА

В. Д. Кукин

Представлена гибридная метаэвристика для поиска оптимальных топологий в евклидовой задаче Штейнера с потоками и зависящими от них весами.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема Штейнера [1] относится к классу комбинаторных задач минимизации и является NP -трудной [2]. В цикле работ, посвящённых обобщению евклидовой задачи Штейнера на случай с потоками и весами (потокковой задаче), проведены исследования по разработке приближённого метода ее решения. Основные результаты, приведенные в [3-6], включают эволюционную модель, генетические операторы, композитный алгоритм с направленным поиском и оптимизацию управляющих параметров. Алгоритм успешно находит решение задачи не только с потоками, но и без потоков. Решение представлено полной топологией и оптимальными координатами точек Штейнера (ТШ), однозначно определяющими дерево Штейнера (ДШ) [1]. Для оптимизации положения ТШ используется один из методов непрерывной оптимизации многопараметрической целевой функции [7]. Для поиска оптимальных топологий дерева разработана гибридная метаэвристика, методический аспект которой обсуждается в этой статье.

Основные определения. Пусть $P = \langle S, f \rangle$ — комбинаторная задача минимизации. Здесь S — пространство допустимых решений (поиска); обычно S — конечное или счетное множество, а его элементы — целые числа, множества, перестановки или графические структуры. Целевая функция $f : S \rightarrow R^+$ — неотрицательная вещественная

функция. Решить задачу P — значит найти глобально минимальное решение $s^* \in S : f(s^*) \leq f(s), \forall s \in S$. Пусть $N : S \rightarrow 2^S$ — функция окрестности, назначающая $\forall s \in S$ множество соседних решений, или окрестность $N(s) \subset S$. Решение $\hat{s} \in S$ называют локально минимальным относительно окрестности $N(\hat{s})$, если $f(\hat{s}) \leq f(s), \forall s \in N(\hat{s})$.

Обозначим евклидову задачу Штейнера в комбинаторной постановке через $ESP = \langle S \times X, f \rangle$. Здесь $S \times X$ — пространство допустимых решений, $S = \{s = (s_1, \dots, s_{2n-2}) : \forall s_i \in N, i = 1, \dots, 2n-2\}$ — множество полных топологий дерева (мы рассматриваем только такие топологии); вектор топологии s описывает порядок соединения n терминальных вершин и $n-2$ точек Штейнера [1, 3]. $X = \{x = (x_1, \dots, x_{n-2}) : x_i \in R^2, i = 1, \dots, n-2\}$ — множество ТШ, задаваемых координатами. В задаче без потоков целевая функция $f : S \times X \rightarrow R^+$ — сумма длин ребер дерева в евклидовой метрике. В потоковой задаче целевая функция f — сумма взвешенных длин дуг дерева: в ней каждая длина умножается на значение весовой функции от величины потока на дуге [5]. Будем предполагать, что весовая функция — неотрицательная вещественная вогнутая функция, характерная для коммуникационных сетей. Очевидно, что f — многоэкстремальная функция. Решить задачу ESP — значит найти глобально минимальное решение $(s^*, x^*) : f(s^*, x^*) \leq f(s, x), \forall (s, x) \in S \times X$. Несложно показать, что локально минимальное решение потоковой задачи для сети с одним стоком — ориентированный граф в виде корневого ДШ; глобально минимальное решение — минимальное ДШ (МДШ) [1]. Соответствующие решения в задаче без потоков — неориентированные ДШ и МДШ.

Метаэвристики. При решении многих комбинаторных задач, в частности, задачи Штейнера, точные методы не эффективны даже при наличии мощной вычислительной техники. Это относится к задачам, для которых характерна следующая специфика:

1. принадлежность классу NP -трудных задач;
2. многоэкстремальность целевой функции;
3. большая погрешность входных данных в практических приложениях, вследствие чего огромные вычислительные затраты на поиск точного решения лишены смысла.

Для таких задач применяются приближенные методы. Они не гарантируют нахождения оптимального решения, но позволяют получать близкие к нему (хорошие) решения за приемлемое время. Приближенные методы разделяют на конструктивные (пошаговые) и методы локального поиска. Первые генерируют полное решение, начиная с пустого решения и последовательно добавляя к нему по одному элементу. Вторые итеративно заменяют текущее решение лучшим, найденным в его окрестности. Известно, что поисковые методы обеспечивают лучшее качество решений, а конструктивные считаются более быстрыми. Поисковые методы эффективны при решении евклидовой задачи Штейнера. Конструктивный алгоритм Краскала для нахождения минимального остовного дерева дает хорошее приближенное решение евклидовой задачи без потоков, но не гарантирует его получения для потоковой задачи из-за непредсказуемого перераспределения потоков при любом изменении топологии.

К настоящему времени появились приближенные методы, называемые базовыми метаэвристиками (basic metaheuristics). Общепринятого определения пока нет, но их трактуют как стратегии высокого уровня, управляющие эвристиками нижнего уровня. Различают методы траекторий (trajectory methods), сохраняющие одно решение, и популяционные методы (population-based methods), сохраняющие конечное множество (популяцию) решений. Примерами методов траекторий служат табу-поиск (поиск с запретами), моделируемый отжиг, локальный поиск с итеративным улучшением и др. [8-10]. К популяционным относятся методы оптимизации муравьиной колонии и эволюционное моделирование (эволюционные вычисления) [10-18]. Последние включают эволюционное программирование (ЭП), генетические алгоритмы (ГА), эволюционные алгоритмы (ЭА) и эволюционные стратегии (ЭС).

Сейчас наблюдается тенденция разработки гибридных метаэвристик, основанных на комбинировании методов, допускающем их чередование и взаимное внедрение. Появились следующие формы гибридизации: комбинирование базовых метаэвристик; комбинирование метаэвристик и систематических методов; системы параллельных метаэвристик.

При разработке гибридных метаэвристик для конкретных комбинаторных задач возникает вопрос о целесообразности использования тех или иных компонентов базовых метаэвристик. Для их сравнения

между собой предложен концептуальный подход [19]. Он рассматривает метаэвристику как стратегию, основанную на двух взаимосвязанных альтернативных концепциях: диверсификации и интенсификации. Диверсификация — концепция исследования пространства решений, использующая специфические знания о задаче в виде различных эвристик. Это стимулирует исследование еще не посещенных областей и генерацию решений, отличных от просмотренных ранее. Интенсификация — концепция исследования пространства, основанная на истории поиска, сохраняемой в оперативной памяти ПК. При этом поиск фокусируется на изучении окрестностей элитных решений.

Эти концепции реализуются через три основных вида критериев принятия решения: по целевой функции (ЦФ); по альтернативной функции, или набору правил; с помощью рандомизации. Основная задача при разработке метаэвристики — добиться такого взаимодействия критериев, которое позволит быстро выявлять области пространства с решениями высокого качества и не тратить время на поиск в областях, уже исследованных или содержащих худшие решения.

2. ГИБРИДНАЯ МЕТАЭВРИСТИКА

Здесь представлена метаэвристика, разработанная для потоковой задачи Штейнера. Она реализована в алгоритме, описанном в работе [5]. Внешний цикл алгоритма имитирует процесс видообразования. Начиная с общего предка, случайные родители (основатели) новых видов особей последовательно генерируются с помощью оператора случайных мутаций, а их начальные популяции — с помощью оператора селективных мутаций. Внутренний цикл алгоритма моделирует эволюцию начальной популяции как последовательность чередующихся пар поколений мутантов и гибридных особей. Они порождаются с помощью операторов селективных мутаций и кроссинговера соответственно. Процесс эволюции заканчивается, когда улучшений нет ни в одном из поколений очередной пары. Лучшая по ЦФ особь последней популяции отбирается в элитную группу, вытесняя из нее худшую. После завершения работы алгоритма из этой группы выбирается лучшее по экспертной оценке решение (им может оказаться лучшее по значению ЦФ). Решение представлено в виде ДШ с полной топологией.

Алгоритм находит хорошие решения как для задачи с потоками, так и без потоков, причем за приемлемое время [5,6]. Например, для

задачи размерностью $n = 10$ он находит МДШ на 1-й или 2-й итерации из 5 заданных, выполняя последние за 0.2 мин. на ПК с Intel Celeron, 800 Hz, 256 RAM. Чтобы найти МДШ, точный алгоритм должен проверить 2027025 вариантов. Алгоритм исчерпывающего и избыточно-го перебора полных топологий [20] затрачивает на это около 35 часов. Эффективность работы приближенного алгоритма во многом определяется эффективностью гибридной метаэвристики, реализованной в нем. Ее специфика представлена в табл.1 и поясняется ниже.

ТАБЛИЦА 1. Гибридная метаэвристика

Операция	Биологический аналог	Компоненты
	Видообразование	
1. Итеративный рестарт	Случайный родитель	Оператор случайных мутаций
2. Формирование исходной области	Начальная популяция	Оператор селективных мутаций
	Критерий останова	Число итераций
	Эволюция популяции	
3. Расширение исходной области	Поклоение мутантов	Оператор селективных мутаций с поиском
	Поклоение гибридных особей	Оператор кроссинговера с поиском
4. Локально минимальное решение	Лучшая особь	Отбор по значению ЦФ
	Критерий останова	Нет улучшений при расширении области
5. Табу-список	Элитная группа	
Пороговое решение	Худшая особь	Значение ЦФ
Лучшее решение	Лучшая особь	Экспертная оценка

Разбиение множества топологий. Приближенные алгоритмы часто используют простой и эффективный механизм рестарта: они выполняются заданное число раз с разных начальных решений. Во внешнем цикле алгоритма [5] использован рестарт, эквивалентный итеративному разбиению множества топологий на отдельные области случайным образом. Процесс может начинаться с любого решения с топологией $s_1 \in S$. Из него с помощью оператора селективных мутаций порождается начальная популяция из r особей первого вида, а их топологии образуют первую исходную область $M_1 = N_1(s_1) \subset S$, где $N_1(s_1)$ – окрестность топологии s_1 и $|N_1(s_1)| = r$. Затем оператор случайных мутаций будет применен к s_1 , чтобы генерировать случайную топологию родителя второго вида $s_2 \in S$ и $M_2 = N_2(s_2) \subset S$ и т.д. Таким образом, начиная с общего предка s_1 , топологии случайных родителей будут последовательно порождаться друг из друга.

Вероятность повторного получения топологии родителя достаточно мала. Это обеспечивается простым увеличением нормы (управляющего параметра) оператора случайных мутаций. Одной случайной мутации соответствует одна транспозиция в векторе топологии [3]. При этом вероятность повторения топологии не превышает $1/(2(2n - 6))$, где $n > 3$. Норма оператора задает число транспозиций. При выполнении k транспозиций вероятность повторного появления топологии — не более $1/(2(2n - 6))^k$.

Комбинирование базовых метаэвристик. Методы траекторий хорошо исследуют отдельные области пространства, но не всегда выходят из области локального экстремума из-за того, что последующее решение ищется в окрестности предыдущего. Популяционные методы хорошо идентифицируют перспективные области, но есть опасность потерять хорошее решение из-за того, что последующее решение может существенно отличаться от предыдущего. Комбинирование этих методов выглядит перспективным, но, насколько известно, ранее не применялось к потоковой задаче Штейнера. Во внутреннем цикле алгоритма использовано внедрение локального поиска с итеративным улучшением в оригинальные генетические операторы [3]. Эта форма гибридизации обеспечивает следующие возможности.

1. Расширение исходной области. Комбинирование оператора селективных мутаций и локального поиска позволяет динамически расширять исходную область M_i , где i – ее порядковый номер. Расширенная область $M_i \subseteq M_i^* \subset S$ формируется следующим образом. Для

каждого $s \in M_i$ строится окрестность $N_j(s)$, содержащая множество топологий, соседних с топологией s относительно вершины j , где $j = 2, \dots, 2n - 2$ — номера всех вершин дерева, кроме корня. Окрестность $N_j(s)$ просматривается до нахождения первой топологии s' , дающей улучшение целевой функции. Если оно не найдено, $N_j(s)$ отбрасывается и формируется окрестность $N_{j+1}(s)$. В противном случае $N_j(s)$ присоединяется к M_i^* , и поиск продолжается в окрестности $N_{j+1}(s')$. Таким образом, для каждого $s \in M_i$ строятся $2n - 3$ окрестностей. При этом число просматриваемых топологий — случайное число из промежутка $[2n - 3, k_1(2n - 3)]$, где k_1 — норма оператора селективных мутаций. Результат поиска — нахождение лучшей полной топологии $\hat{s} \in M_i^*$ и соответствующего локально минимального решения $(\hat{s}, \hat{x}) \in M_i^* \times X$.

2. Исследование расширенной области. Комбинирование оператора кроссинговера и локального поиска интенсифицирует нахождение улучшений целевой функции в расширенной области. С помощью оператора кроссинговера для $\hat{s} \in M_i^*$ формируются полные поддеревья заданной размерности с корнями в ТШ: $j = 1, \dots, n - 2$ [3]. По рассмотренной выше схеме для мутаций последовательно строится система $n - 2$ окрестностей $N_j(\hat{s})$. Каждая окрестность содержит $|N_j(\hat{s})| = k_2$ полных топологий, число которых однозначно определяется размерностью поддерева. Тогда число просматриваемых топологий — порядка $k_2(n - 2)$. Полученное с помощью оператора мутаций локально минимальное решение $(\hat{s}, \hat{x})$ может быть улучшено за счет интенсивного исследования расширенной области.

3. Чередование операторов. В популяционных методах действие оператора мутаций связано с диверсификацией, а оператора кроссинговера с интенсификацией поиска. Поэтому целесообразно сначала применять оператор селективных мутаций для динамического расширения исходной области, затем — оператор кроссинговера для исследования этой области.

4. Уточнение критерия останова. Указанные свойства генетических операторов позволяют упростить критерий останова внутреннего цикла алгоритма. Достаточно отслеживать улучшения целевой функции, которые находит оператор селективных мутаций благодаря внедренному в него локальному поиску. Если в какой-то итерации цикла улучшения не было, значит, множество M_i^* не изменялось, и поиск с помощью оператора кроссинговера ничего нового не даст. Останов гарантируется локальным характером поиска [6].

5. Обход вершин дерева. Привязка поиска к порядку расположения вершин дерева вносит направленность в расширение исходных областей и поиск лучших топологий. При решении потоковой задачи отмечена устойчивость конфигурации дерева в прикорневой области, где дуги имеют больший вес. Поэтому важно направление обхода вершин. Чтобы лучше отслеживать перспективные перераспределения потоков в результате мутаций, надо двигаться от периферии к корню дерева. Чтобы сохранить найденные оператором кроссинговера улучшения конфигурации, следует двигаться от корня к периферии. Эта простая эвристика хорошо работает для потоковой задачи и нейтральна для задачи без потоков.

6. Размер популяции. Этот параметр регулирует соотношение между диверсификацией и интенсификацией поиска. ЭА и ГА обычно хранят популяцию большого размера, что эквивалентно разбиению пространства решений на большие исходные области. Комбинирование метаэвристик позволяет просматривать большое число топологий и сразу отбрасывать неперспективные, поэтому можно успешно работать с популяцией небольшого размера, и в частности, с популяцией из одной особи.

Рандомизация. Случайность — неотъемлемый компонент разработанной метаэвристики. Она проявляется в действиях генетических операторов, а также в критерии останова поисковых процессов внутреннего цикла алгоритма [3, 4], хотя и не исчерпывается ими.

Элитная группа. Она является аналогом списка запрещенных решений в табу-поиске и устанавливает порог для поиска новых локально минимальных решений. После нахождения лучшей топологии в расширенной области и последующей оптимизации координат ТШ получаем ДШ. Если его значение целевой функции лучше, чем у худшего ДШ, второе вытесняется первым. При этом текущая величина порога изменится. Элитная группа небольшого размера имеет более высокий порог, что стимулирует глобальную диверсификацию поиска.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена гибридная метаэвристика для поиска оптимальной топологии в евклидовой задаче Штейнера с потоками и зависящими от них весами. Насколько известно, ни базовые, ни гибридные метаэвристики ранее не применялись к этой задаче.

Алгоритм эффективен при решении потоковой задачи, поскольку в нём использованы эвристики, разработанные с учетом специфики именно этой задачи. Однако его можно успешно применять и к задаче без потоков.

Основные приемы построения гибридной метаэвристики носят общий характер и могут быть полезными для задачи Штейнера на графе или на прямоугольной решётке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилберт Э.Н., Поллак Г.О. Минимальные деревья Штейнера // Кибернетич. сборник, новая серия, вып. 8. М.:Мир, 1971, 19–50.
2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
3. Кукин В.Д. Генетические алгоритмы и задача Штейнера с потоками и весами: подход к проблеме // Методы математического моделирования и информационные технологии / Труды ИПМИ КарНЦ РАН, вып. 3, Петрозаводск, 2002, 170–177.
4. Кукин В.Д. Эволюционная модель для решения потоковой задачи Штейнера // Методы математического моделирования и информационные технологии / Труды ИПМИ КарНЦ РАН, вып. 5, Петрозаводск, 2004, 200–211.
5. Кукин В.Д. Композитный эволюционный алгоритм для потоковой задачи Штейнера // Методы математического моделирования и информационные технологии / Труды ИПМИ КарНЦ РАН, вып. 7, Петрозаводск, 2006, 143–153.
6. Кукин В.Д. О приложении методов эволюционного моделирования к потоковой задаче Штейнера // Методы математического моделирования и информационные технологии / Труды ИПМИ КарНЦ РАН, вып. 8, Петрозаводск, 2007, 120–130.
7. Л.А. Растринин. Системы экстремального управления. М.:Наука, 1974.
8. Glover, F. and Laguna, M. Tabu Search. Kluwer Academic Publishers, 1997.
9. Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D., and Vecchi, M.P. Optimization by simulated annealing // Science, 220, 1983, 671–680.
10. Тим Джонс. Программирование искусственного интеллекта в приложениях. М.: ДМК-Пресс, 2004.
11. Dorigo, M., Maniezzo, V., and Colorni, A. Ant system: Optimization by a colony of cooperating agents // IEEE Trans. Syst. Man, Cybernet. Part B 26, 1, 1996, 29–41.
12. Fogel, L.J. Toward inductive inference automata // In Proceedings of the International Federation for Information Process Congress. Munich, 1962, 395–399.
13. Fogel L.J., Owens. A.J., and Walsu, M.J. Artificial Intelligence through Simulated Evolution. New York: Wiley, 1966.
14. Фогель Л., Оуэнс А., Уолиш М. Искусственный интеллект и эволюционное моделирование. М.: Мир, 1969.
15. Holland, J.H. Adaptation in natural and artificial systems. (2nd edn.) Boston MA: MIT Press, 1992.

16. Goldberg, D.E. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. Reading. Addison-Wesley MA, 1989.
17. Букатова И.Л. Эволюционное моделирование и его приложения. М.: Наука, 1979.
18. Емельянов В.В., Курейчик В.М., Курейчик В.В. Теория и практика эволюционного моделирования. М.: Физматлит, 2003.
19. Blum. C., and Roli A. Metaheuristics in Combinatorial Optimization: Overview and Conceptual Comparison // ACM Computing Survey, vol. 3, No. 3, September, 2003, 268–308.
20. Кукин В.Д., Кузина В.И. Методика решения задачи Штейнера с потоками и весами // Методы математического моделирования и информационные технологии / Труды ИПМИ КарНЦ РАН, вып. 2, Петрозаводск, 2000, 143–150.

УДК 681.142.2

ГЕНЕРАЦИЯ WEB 2.0 СТРАНИЦ НА ОСНОВЕ XSD СХЕМ

В. Ю. СОЛОМАТОВ

В данной статье описывается система генерации Web-сайтов на основе XSD схем.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача упрощения создания приложений является одной из наиболее важных в IT индустрии. Данная система, разработанная автором статьи, предназначена для автоматической генерации готовых ASP .Net страниц на основе XSD схем. XSD – XML Schema Definition, XML Schema – один из языков описания структуры XML документа. XML Schema получила статус рекомендации Консорциума W3C 2 мая 2001 года, став первым стандартом описания XML, получившим статус рекомендации. Как большинство языков описания XML, XML Schema была задумана для определения правил, которым должен подчиняться документ. Но, в отличие от других языков, XML Schema была разработана так, чтобы её можно было использовать в создании программного обеспечения для обработки документов XML. После проверки документа на соответствие XML Schema, читающая программа может создать модель данных документа. Каждый элемент в этой модели ассоциируется с определённым типом данных, позволяя строить в памяти объект, соответствующий структуре XML-документа. Языкам объектно-ориентированного программирования гораздо легче иметь дело с таким объектом, чем с текстовым файлом. В среде .Net XSD схемы получили широкое распространение. Они применяются для генерации типизированных DataSet объектов из ADO .Net [1,2], описывая их структуру. Т.о. образом с помощью XSD схемы можно

описать структуру данных, необходимых для выборки, на основе реляционной модели, а так же способы доступа к ним в зависимости от конечного источника данных.

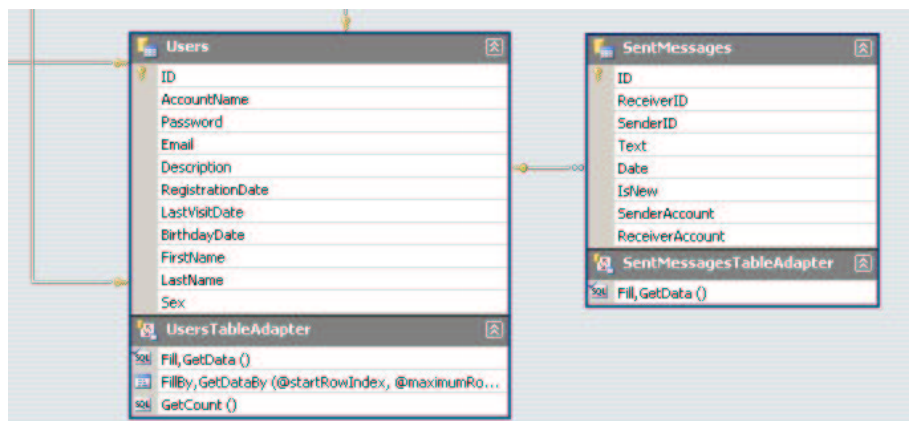


Рис. 1. Пример XSD схемы визуализированной с помощью Visual Studio

2. ШАБЛОН СГЕНЕРИРОВАННОЙ СТРАНИЦЫ

Шаблон страницы состоит из меню выбора нужной таблицы и самой таблицы. Реляционные отношения между таблицами сохранены в структуре меню. Для каждой выбранной таблицы, имеющей дочерние таблицы, можно выбрать непосредственно отчеты по первичному ключу, как это показано на рисунке ниже. Названия пунктов меню может быть задано пользователем с помощью XML файла преобразования названий с заданной структурой.

При выборе определенного пункта или подпункта из меню генерируется web таблица с данными, выбранными из источника данных, в соответствии с правилами определенными текущей XSD схемой. Если выбирается пункт из подменю, то происходит выборка данных из объекта DataSet по первичному ключу без обращения к источнику данных. Для более удобного и более информативного отображения в таблице поддерживаются:

- автоматическая сортировка данных по столбцам

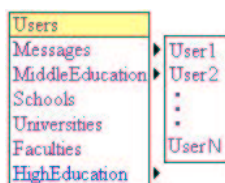


Рис. 2. Меню сгенерированной страницы

- постраничное разбиение таблиц
- поиск по таблице в соответствии с выбранными колонками или по всем колонкам

Подписи для колонок и скрытые колонки можно так же определить в файле преобразований.

Address <http://localhost:1900/Default.aspx>

Пользователи							
Отправленные сообщения							
Среднее образование							
Школы							
Университеты							
Факультеты							
Высшее образование							
Полученные сообщения							

ID	Имя	Фамилия	Имя пользователя	Пароль	Электронная почта	Дата регистрации	Последнее посещение
4	George	Bush	second	pass	bush@yahoo.com	11.10.2007 10:40:03	30.01.17:14
5	Михаил	Ломоносов	Lomonosov	pass1	lomonosov@mail.ru	11.10.2007 10:43:04	30.01.12:26
	Bush George						
	Ломоносов Михаил		Vladimir123	pass	vp@gov.ru	11.10.2007 10:43:04	08.02.17:14
	Putn Vladimir						
	Иванов Иван		login1234	12345	Ivanov@mail.com	11.10.2007 10:43:04	30.01.17:14
	Tayson Michael						
10	Michael	Tayson	Michael	11111	tayson@boxing.com	11.10.2007 10:43:04	30.01.17:14

1 2 3 4 5

Рис. 3. Часть отчета для таблицы Users (маска Пользователи)

Для данных имеющих тип из перечисления ColumnTypes реализованы специальные элементы управления для отображения этих данных.

3. РЕДАКТИРОВАНИЕ ДАННЫХ

Возможность редактирования, удаления и добавления данных может быть определена так же в файле конфигурации. Редактирование осуществляется в соответствии с типом данных. Например, данные типа string редактируются с помощью элементов управления

asp:TextBox, типа DateTime с помощью asp:Calendar и т.д.. Редактирование данных из полей, связанных с полями других таблиц, в целях ограничения целостности данных, осуществляется посредством элемента управления asp:DropDownList. Объекты из родительских таблиц становятся элементами DropDownList для редактирования полей из дочерних таблиц.

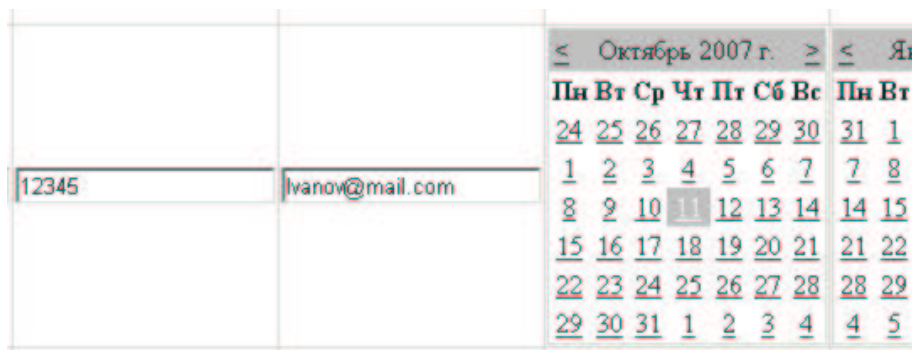


Рис. 4. Редактирование таблицы

Как уже говорилось, данные могут быть представлены типом, не являющимся стандартным (например, Media – тип отображения видео). Для всех типов из ColumnTypes разработаны соответствующие пользовательские элементы управления отображения и редактирования данных. Добавление новых данных осуществляется аналогично редактированию.



Рис. 5. Элемент управления загрузки изображения

4. ФОРМАТИРОВАНИЕ ТАБЛИЦ

Конечное форматирование таблиц осуществляется при помощи xml-файла <DataSchemaName>_СМ.xml, где DataSchemaName – имя схемы данных. При помощи этого файла можно конфигурировать формат отображения таблиц данных. На рисунке 4 представлена xsd – схема валидации файлов форматирования.

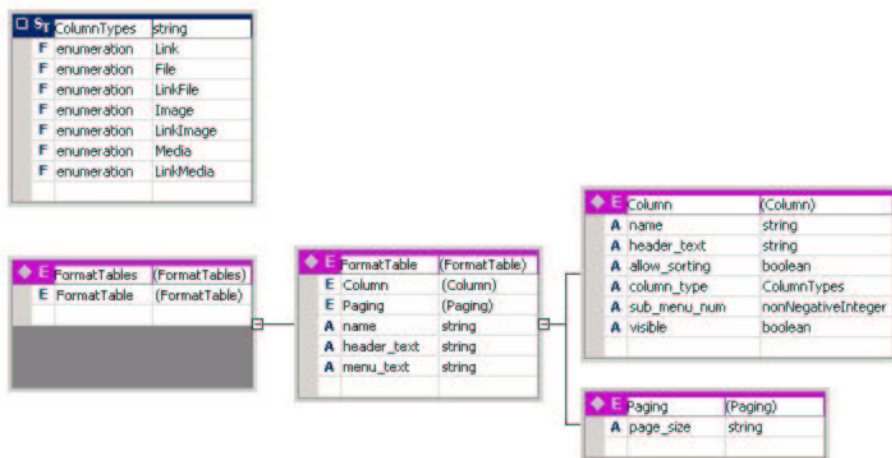


Рис. 6. Схема форматирования таблиц

Ниже представлен пример части файла форматирования таблиц.

```
<?xml version="1.0" standalone="yes"?>
```

```
<FormatTables xmlns:xsi="http://www.w3.org/2001/XMLSchema-instance"
  xsi:noNamespaceSchemaLocation="ColumnsMapping.xsd" >
```

```
<FormatTable name="Users"
  header_text="Список всех пользователей системы"
  menu_text="Пользователи">
```

```
<Column name="ID" header_text="ID" />
```

```
<Column name="FirstName" header_text="Имя"
  sub_menu_num="1" allow_sorting="true" />
```

```

    <Column name="LastName" header_text="Фамилия"
      sub_menu_num="0" allow_sorting="true" />
    <Column name="AccountName" header_text="Имя пользователя"
      allow_sorting="true" />
    <Column name="Password" header_text="Пароль" />
    <Column name="Email" header_text="Электронная почта" />
    <Column name="RegistrationDate"
      header_text="Дата регистрации" allow_sorting="true" />
    <Column name="LastVisitDate" header_text="Последний визит"
      allow_sorting="true" />
    <Column name="BirthdayDate" header_text="Дата рождения"
      allow_sorting="true" />
    <Column name="Description" header_text="Описание" />
    <Column name="Sex" header_text="Пол" />
    <Paging page_size="5" />

  </FormatTable>
  ...
  <FormatTable name="SentMessages"
    menu_text="Отправленные сообщения" >

    <Column name="ID" visible="false" />
    <Column name="ReceiverID" visible="false" />
    <Column name="SenderID" visible="false" />
    <Column name="SenderAccount" header_text="Отправитель" />
    <Column name="ReceiverAccount" header_text="Получатель" />
    <Column name="Date" header_text="Дата"
      allow_sorting="true" />
    <Column name="Text" header_text="Текст сообщения" />

  </FormatTable>
  ...

</FormatTables>

```

Структура файла форматирования таблиц состоит из набора объектов `FormatTable`, каждый такой объект описывает форматирование таблицы. Связь объекта `FormatTable` с таблицей из схемы данных осуществляется через указание имени таблицы в атрибуте `name` из `FormatTable`. Каждый объект форматирования таблицы содержит набор объектов `Column` описывающих форматирование колонок текущей таблицы. Связь между объектом `Column` и колонкой из схемы данных так же осуществляется через атрибут `name` элемента `Column`. В каждом элементе `Column` можно указать следующие атрибуты форматирования:

- `header_text` – подпись колонки в таблице
- `allow_sorting` – атрибут разрешающий или запрещающий реализацию сортировки для данной колонки, если `true` то сортировка осуществляется в соответствии с типом данных данной колонки
- `column_type` – объект типа `ColumnTypes`, определяющий типы не являющиеся стандартными (например, `Media` – тип отображения видео)
- `sub_menu_num` – атрибут для родительских таблиц, определяющий подписи для пунктов подменю
- `visible` – атрибут определяющий отображать колонку или скрывать

Для поддержки разбиения таблицы на набор страниц существует объект `Paging` с атрибутом `page_size` определяющим, сколько записей будет отображаться на странице текущей таблицы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На данный момент разработан прототип данной системы, поддерживающий режимы отображения, удаления и редактирования данных. Следующими основными шагами в создании системы будут: добавление поддержки web виджетов для создания расширяемого Web портала [3] и доработка системы в соответствии с запланированными возможностями. Так же начнется тестирование системы на создании реальных web проектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Malik S. Pro ADO.NET 2.0 // APRESS, 2005
2. Hilyard J., Teilhet S. *C# Cookbook*, 2nd Edition // O'Reilly, 2006
3. Zabir O. Building a Web 2.0 Portal with ASP.NET 3.5 // O'Reilly, 2007

ABSTRACTS

Section I. METHODS OF MATHEMATICAL MODELING

Bernikovich E.S. On limiting behavior of maximum tree size in a random unlabeled unrooted forest.

The limit distribution of the maximum tree size in a random unlabeled unrooted forest in the central zone of parameters' behavior is obtained.

Zaika Yu.V., Bormatova E.P. Determination of parameters of the hydrogen permeability model.

The inverse problem of parametric identification in the nonlinear model of hydrogen permeability is considered. A few algorithms for estimation of the transport parameters (sorption, desorption and diffusion) are presented for different sizes of experimental data .

Zaika Yu.V., Kostikova E.K. Modeling of TDS-degassing of a plate.

Degassing of a plate saturated with hydrogen is considered. The experiment is based on the thermal desorption spectrometry (TDS) method. The results of numerical modelling are presented. In the nonlinear boundary-value problem the main limiting factors, such as diffusion and desorption, are taken into account.

Ivanov A.P., Ostov Yu.Ya. Duality and algorithm of solving of a flight dynamics problem.

The paper considers a problem of maximizing kinetic energy in the end point of the trajectory of a flying object.

Ivashko E.E. Random-priority two-person full-information best-choice game with disorder.

This paper deals with a full-information two-person best-choice game with disorder where players have random priorities described by lottery. The aim of the players is to choose the maximal observation of the random sequence. Each player has a one-threshold strategy. Expected payoffs are derived. The asymptotic and the particular solutions are also studied. Numerical examples are given.

Chernov I.A. Variational approach to an inverse problem of dehydriding.

In the paper we consider the possibility of using classical methods of variations calculus and optimal control to solve a coefficient inverse

problem of dehydriding which is a system of ordinary differential equations (conservation laws).

Shchiptsova A.V. Location game on the plain.

We examine Hotelling's duopoly model on the plane. There are two firms located inside a circle. The first problem is to find the equilibrium prices with fixed firm's location, and the second problem is to find the equilibrium allocation of the firms inside the circle. The firms aim at maximal gain. In case of symmetrical location the optimal prices are derived. The equilibrium for allocation is also derived. Numerical calculation is given.

Section II. COMPUTER SCIENCE

Aksenova E.A. Optimal control of a two-priority queue in single-level memory.

The paper presents a problem of controlling a two-priority queue, that consists of two FIFO-queues. Three methods of data storing are analysed.

Kositsyn D.P., Pechnikov A.A., Shabaev A.I. Experience of applying the generalized approach to development of manufacturing control software.

The paper describes the uniform formalized approach to development of manufacturing control software of certain class. Application of the approach is illustrated with the example of software development for corrugated cardboard production.

Kukin V.D. Hybrid metaheuristics for the weighted Steiner tree problem.

The paper presents hybrid metaheuristics for searching optimal topologies in the weighted Steiner tree problem.

Solomatov V.Y. Generation of Web 2.0 pages on the basis of XSD schemes.

The problem of simplifying development of applications is one of the most important in IT industries. The paper describes a system of generating web-sites using XSD schemes.

Н а у ч н о е и з д а н и е

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Выпуск 9

Печатается по решению Ученого совета
Института прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

Оригинал-макет подготовлен Е.Н. Спектор
Подписано в печать 28.10.2008.

Формат 60×84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Times».
Уч.-изд. л. 7,0. Усл. печ. л. 7, 5. Подписано в печать 00.11.08.
Тираж 300 экз. Изд. № 128. Заказ № 759.

Карельский научный центр РАН
Редакционно-издательский отдел
185003, Петрозаводск, пр. А. Невского, 50