ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
MÉMOIRES
DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.
VIII SÉRIE.

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ. | CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.
Томъ XXIV. № 6. | Volume XXIV. № 6.

РАСПРОСТРАНЕНІЕ ВОЛНЪ ОТЪ ВИБРАТОРА ГЕРЦА, ПОМѢЩЕННАГО ВЪ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДѢ.

А. Петровскаго.

(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 12 ноября 1908 г.).

С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1909. St.-PÉTERSBOURG.

ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
MÉMOIRES
DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG.
VIII^e SÉRIE.

ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОТДѢЛЕНІЮ. | CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.
Томъ XXIV. № 6. | Volume XXIV. № 6.

РАСПРОСТРАНЕНІЕ ВОЛНЪ ОТЪ ВИБРАТОРА ГЕРЦА, ПОМѢЩЕННАГО ВЪ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДѢ.

А. Петровскаго.

(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 12 ноября 1908 г.).

С.-ПЕТЕРБУРГЪ. 1909. St.-PÉTERSBOURG.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.

С.-Петербургъ, Іюль 1909 г.

За Непремѣннаго Секретаря, Академикъ, Князь *Б. Голицынъ.*

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.

Распространеніе волнъ отъ вибратора Герца, помѣщеннаго въ проводящей средѣ.

Распространеніе волнъ отъ вибратора Герца (отъ такъ называемаго диполя) было разобрано теоретически самимъ Герцемъ[1]). Впослѣдствіи къ нему возвращались Пирсонъ и Ли[2]), а также Лёвъ[3]). Герцъ разсматривалъ распространеніе волнъ при наличіи незатухающихъ колебаній въ вибраторѣ, Пирсонъ и Ли обобщили вопросъ, принявъ во вниманіе затуханіе, Лёвъ же считался при своихъ выводахъ не только съ затуханіемъ, но и съ начальнымъ состояніемъ системы, а именно принималъ, что до момента возникновенія колебаній вибраторъ находится въ состояніи статическаго заряженія.

Хотя за послѣднее время имѣются детальныя изслѣдованія нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, ближе отвѣчающихъ потребностямъ практики, напр. изслѣдованіе Абрагама[4]) и другія, но сложность выводовъ и получаемыхъ формулъ лишаетъ эти изслѣдованія физической наглядности, а потому работа Герца остается классической.

Всѣ вышеуказанныя изслѣдованія предполагаютъ, что среда, въ которой распространяются волны, есть идеальный изоляторъ. Между тѣмъ извѣстно, что даже воздухъ обладаетъ небольшою проводимостью; тѣмъ болѣе это имѣетъ мѣсто въ другихъ средахъ. Поэтому я полагаю цѣлесообразнымъ подвергнуть диполь новому разсмотрѣнію съ принятіемъ во вниманіе проводимости окружающей его среды.

---

1) Hertz. Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie. Ann. d. Phys. 36, I, 1888.

2) Pearson & Lee. On the Vibrations in the Field round a theoretical Hertzian Oscillator. Phyl. Trans. A, 193, 159 — 189, 1900.

3) Love. The Advancing Front of the Train of Waves emitted by a theoretical Hertzian Oscillator. Proc. Roy. Soc. 74, 73 — 83, 1904.

4) Abraham. Die elektrischen Schwingungen um einen stabförmigen Leiter, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie. Ann. d. Phys. 66, 435 — 472, 1898.

Обозначенія.

$x, y, z,$	прямоугольныя Декартовы координаты,
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	радіусъ-векторъ,
$R = \sqrt{x^2 + y^2}$	разстояніе точки до оси Z,
t	время,
θ	уголъ между r и Z.
K	діэлектрическая постоянная,
μ	магнитная проницаемость,
ρ^{-1}	удѣльная электропроводность,
v	скорость распространенія волны,
γ	коэффиціентъ поглощенія,
λ	длина волны,
τ	періодъ колебанія,
α	множитель затуханія,
D	натуральный логариѳмическій декрементъ колебанія,
δ_λ, δ	» » пространственный декрементъ,
j	плотность тока,
F_k	напряженіе электрическаго поля,
F_μ	» магнитнаго поля,
$(F)_x, (F)_y, (F)_z$	проэкціи вектора F на направленія X, Y и Z,
$(F)_r, (F)_R,$	» » F » » r, R,
$(F)_{\perp r}$	проэкція » F » направленіе перпенд. r и лежащее въ плоскости (r, Z),
$(F)_{\perp R}$	проэкція вектора F на направленіе перпенд. плоскости (R, Z), а также и плоскости (r, Z),
P	векторъ Пойнтинга,
Π	вспомогательная функція координатъ и времени,
$\left.\begin{matrix} A \\ \varphi \end{matrix}\right\}$	произвольныя постоянныя величины, входящія въ функцію Π,
$E_{k\frac{\tau}{2}}$	количество энергіи, излучаемое въ теченіе k полуперіодовъ,
E	» » » » всего времени разряда,
C, C'	произвольная постоянная, входящая въ интегралъ уравненія силовой линіи,

γ_μ, γ_R, γ_z, γ_r, $\gamma_\perp$ вспомогательные углы, входящіе въ выраженія:

$$F_\mu,\ (F_k)_R,\ (F_k)_z,\ (F_k)_r \text{ и } (F_k)_{\perp r},$$

ν число разрядовъ въ секунду,

l длина вибратора,

i сила тока, идущаго въ вибраторѣ,

q зарядъ, имѣющійся на одной половинѣ вибратора,

q_0 коэффиціентъ амплитуды колебаній этого заряда,

$q_{\max}$ максимальная величина заряда,

q_{in} начальный зарядъ,

i_{in} начальная сила тока.

Кромѣ того, я буду пользоваться слѣдующими сокращеніями:

$$\chi = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau},$$

$$a = 4\pi\rho^{-1}\mu,$$

$$b = K\mu,$$

$$\xi = \omega\tau - \chi r + \varphi,$$

$$T = t - \frac{\chi}{\omega} r,$$

$$\begin{cases} D' = \dfrac{D}{2\pi} = \dfrac{\alpha}{\omega}, \\ d' = \dfrac{\beta}{\chi}. \end{cases}$$

Всѣ величины предполагаются выраженными въ одной и той же, именно, въ электромагнитной системѣ единицъ. Величины K, μ и ρ^{-1}, характеризующія свойства среды, принимаются постоянными. За направленіе оси Z принимается ось диполя, а начало координатъ помѣщается въ центрѣ послѣдняго[1]). Система координатъ правая, т.-е., если поставить три пальца правой руки по тремъ взаимно-перпендикулярнымъ направленіямъ, то большой

1) Такъ какъ, при такомъ выборѣ координатъ, система симметрична относительно оси Z, то ясно, что проэкція магнитной силы на ось Z будетъ равна нулю. Можно предвидѣть также, что магнитная сила будетъ всюду направлена по окружностямъ, имѣющимъ центры на оси Z, а электрическая сила будетъ всюду располагаться въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ ось Z.

палецъ покажетъ направленіе оси X, указательный покажетъ направленіе оси Y, а средній дастъ направленіе оси Z.

Дифференціальныя уравненія.

Состояніе среды при распространеніи волнъ опредѣлится слѣдующими уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} \mu\,\frac{\partial (F_\mu)_x}{\partial t} &= \frac{\partial (F_k)_y}{\partial z} - \frac{\partial (F_k)_z}{\partial y} \\ \mu\,\frac{\partial (F_\mu)_y}{\partial t} &= \frac{\partial (F_k)_z}{\partial x} - \frac{\partial (F_k)_x}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial (F_k)_x}{\partial y} - \frac{\partial (F_k)_y}{\partial x} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\left.\begin{aligned} 4\pi j_x &= 4\pi\rho^{-1}(F_k)_x + K\,\frac{\partial (F_k)_x}{\partial t} = -\frac{\partial (F_\mu)_y}{\partial z} \\ 4\pi j_y &= 4\pi\rho^{-1}(F_k)_y + K\,\frac{\partial (F_k)_y}{\partial t} = \frac{\partial (F_\mu)_x}{\partial z} \\ 4\pi j_z &= 4\pi\rho^{-1}(F_k)_z + K\,\frac{\partial (F_k)_z}{\partial t} = \frac{\partial (F_\mu)_y}{\partial x} - \frac{\partial (F_\mu)_x}{\partial y} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\partial (F_\mu)_x}{\partial x} + \frac{\partial (F_\mu)_y}{\partial y} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

Введемъ вспомогательную функцію Π, удовлетворяющую слѣдующимъ условіямъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t\,\partial y} &= (F_\mu)_x \\ -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t\,\partial x} &= (F_\mu)_y \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

Тогда уравненіе (3) удовлетворится само собою.

Для того чтобы удовлетворились уравненія (2), придется положить:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\rho^{-1}(F_k)_x + K\,\frac{\partial (F_k)_x}{\partial t} &= \frac{\partial^3 \Pi}{\partial t\,\partial z\,\partial x} \\ 4\pi\rho^{-1}(F_k)_y + K\,\frac{\partial (F_k)_y}{\partial t} &= \frac{\partial^3 \Pi}{\partial t\,\partial z\,\partial y} \\ 4\pi\rho^{-1}(F_k)_z + K\,\frac{\partial (F_k)_z}{\partial t} &= -\frac{\partial^3 \Pi}{\partial t\,\partial x^2} - \frac{\partial^3 \Pi}{\partial t\,\partial y^2} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots (5)$$

Наконецъ, чтобы удовлетворить и группѣ уравненій (1), достаточно подчинить функцію П уравненію[1]):

$$4\pi\rho^{-1}\mu\frac{\partial\Pi}{\partial t} + K\mu\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

или

$$a\frac{\partial\Pi}{\partial t} + b\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = \Delta\Pi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6')$$

Интегрированіе уравненія.

Пусть въ вибраторѣ совершается колебательный процессъ съ періодомъ τ и множителемъ затуханія α. Интегралъ дифференціальнаго уравненія $(6')$ будемъ искать въ видѣ слѣдующей функціи:

$$\Pi = A\frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r}\sin(\omega t - \chi r + \varphi), \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

гдѣ α и $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ суть заданныя постоянныя, а A, φ, β и χ неопредѣленныя пока, но также постоянныя величины.

---

1) Въ самомъ дѣлѣ, продифференцировавъ второе изъ уравненій (2) по z, а третье по y и вычтя ихъ одно изъ другого, получимъ:

$$4\pi\rho^{-1}\left(\frac{\partial(F_k)_y}{\partial z} - \frac{\partial(F_k)_z}{\partial y}\right) + K\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(F_k)_y}{\partial z} - \frac{\partial(F_k)_z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2(F_\mu)_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2(F_\mu)_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2(F_\mu)_y}{\partial x\,\partial y};$$

если теперь исключить разности, стоящія въ первой части, при помощи перваго изъ уравненій (1), и замѣнить послѣдній членъ второй части при помощи уравненія (3), то получимъ:

$$4\pi\rho^{-1}\mu\frac{\partial(F_\mu)_x}{\partial t} + K\mu\frac{\partial^2(F_\mu)_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2(F_\mu)_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(F_\mu)_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(F_\mu)_x}{\partial z^2}.$$

Вводя же функцію П по первому изъ уравненій (4), получимъ:

$$\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial y}\left\{4\pi\rho^{-1}\mu\frac{\partial\Pi}{\partial t} + K\mu\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial y}\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}\right\} \ldots\ldots\ldots (6a)$$

Подобнымъ же путемъ получается уравненіе:

$$4\pi\rho^{-1}\mu\frac{\partial(F_\mu)_y}{\partial t} + K\mu\frac{\partial^2(F_\mu)_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2(F_\mu)_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(F_\mu)_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(F_\mu)_y}{\partial z^2},$$

изъ котораго, при помощи второго изъ уравненій (4) получается:

$$\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x}\left\{4\pi\rho^{-1}\mu\frac{\partial\Pi}{\partial t} + K\mu\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x}\left\{\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}\right\} \ldots\ldots\ldots (6b)$$

Легко понять, что оба уравненія (6a) и (6b) удовлетворятся, если удовлетворяется уравненіе (6).

Производныя написаннаго выраженія по r и t будутъ [для сокращенія обозначимъ $\omega t - \chi r + \varphi = \xi$]:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = A\,\frac{e^{-\alpha t - \beta r}}{r}\,\{-\alpha \sin\xi + \omega\cos\xi\} \ldots\ldots (8)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{A\,e^{-\alpha t - \beta r}}{r}\,\{(\alpha^2 - \omega^2)\sin\xi - 2\alpha\omega\cos\xi\} \ldots\ldots (9)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = A\,\frac{e^{-\alpha t - \beta r}}{r}\left\{-\left(\beta + \frac{1}{r}\right)\sin\xi - \chi\cos\xi\right\} \ldots\ldots (10)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} = A\,\frac{e^{-\alpha t - \beta r}}{r}\left\{\left[\beta^2 - \chi^2 + \frac{2}{r}\left(\beta + \frac{1}{r}\right)\right]\sin\xi + 2\chi\left(\beta + \frac{1}{r}\right)\cos\xi\right\} \ldots\ldots (11)$$

Кромѣ того извѣстно, что

$$\Delta\Pi = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial \Pi}{\partial r} \ldots\ldots (12)$$

Подставляя значенія производныхъ въ уравненіе (6′), получимъ:

$$A\,\frac{e^{-\alpha t - \beta r}}{r}\,\{-[a\alpha + b(\omega^2 - \alpha^2)]\sin\xi + [a\omega - 2b\alpha\omega]\cos\xi\} =$$

$$= A\,\frac{e^{-\alpha t - \beta r}}{r}\,\{-[\chi^2 - \beta^2]\sin\xi + 2\chi\beta\cos\xi\} \ldots\ldots (13)$$

Для того чтобы это уравненіе обратилось въ тождество, необходимо и достаточно, чтобы имѣли мѣсто два равенства:

$$\left.\begin{aligned} a\alpha + b(\omega^2 - \alpha^2) &= \chi^2 - \beta^2 \\ a\omega - 2b\alpha\omega &= 2\chi\beta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (14)$$

Рѣшая ихъ относительно χ и β, получимъ:

$$\chi = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{b^2\omega^4 + [a^2 - 2b\alpha(a - b\alpha)]\,\omega^2 + \alpha^2(a - b\alpha)^2} + b\omega^2 + \alpha(a - b\alpha)\right\}} \ldots (15)$$

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{b^2\omega^4 + [a^2 - 2b\alpha(a - b\alpha)]\,\omega^2 + \alpha^2(a - b\alpha)^2} - b\omega^2 - \alpha(a - b\alpha)\right\}} \ldots (16)$$

или

$$\chi = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\alpha)^2](\omega^2 + \alpha^2)} + b\omega^2 + \alpha(a - b\alpha)\right\}} \ldots\ldots (15')$$

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\alpha)^2](\omega^2 + \alpha^2)} - b\omega^2 - \alpha(a - b\alpha)\right\}} \ldots\ldots (16')$$

Какъ легко убѣдиться[1]), величины, стоящія подъ большими радикалами, всегда положительны, слѣд. χ и β всегда дѣйствительны. Что же касается двойныхъ знаковъ передъ этими радикалами, то слѣдуетъ руководиться слѣдующими соображеніями.

Положительное значеніе для χ означаетъ, что волнообразное состояніе распространяется *отъ вибратора* (прямая волна); *отрицательное*—что волна идетъ изъ пространства *къ вибратору* (обратная волна).

Въ настоящей статьѣ разсматривается только первый случай, а слѣд. χ будетъ приниматься всегда положительнымъ.

Что касается знака β, то онъ можетъ быть какъ плюсомъ, такъ и минусомъ. Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что ω всегда положительно, а потому, согласно второму уравненію изъ группы (14), получимъ:

при $a > 2b\alpha$ χ и β имѣютъ одинаковые знаки,

» $a < 2b\alpha$ χ и β » разные » ,

а значитъ, для прямой волны:

при $a > 2b\alpha$ β положительно,

» $a < 2b\alpha$ β отрицательно.

Кромѣ того, на основаніи уравненій (14) заключаемъ, что χ можетъ имѣть всевозможныя значенія отъ нуля до безконечности, а β^2 не можетъ быть болѣе χ^2.

Изслѣдованіе вспомогательной функціи.

Прежде чѣмъ перейти къ формуламъ, выражающимъ величины электрической и магнитной силы, разсмотримъ подробнѣе вспомогательную функцію, введенную выше.

---

1) Дѣйствительно, для этого нужно, чтобы имѣло мѣсто неравенство:

$$\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\alpha)^2](\omega^2 + \alpha^2)} > b\omega^2 + \alpha(a - b\alpha);$$

$$[b^2\omega^2 + (a - b\alpha)^2](\omega^2 + \alpha^2) > b^2\omega^4 + \alpha^2(a - b\alpha)^2 + 2b\alpha(a - b\alpha)\omega^2;$$

$$b^2\omega^2\alpha^2 + \omega^2(a - b\alpha)^2 > 2b\alpha(a - b\alpha)\omega^2;$$

$$b^2\alpha^2 + (a - b\alpha)^2 - 2b\alpha(a - b\alpha) > 0;$$

$$[b\alpha - (a - b\alpha)]^2 > 0.$$

Такъ какъ послѣднее неравенство справедливо, то справедливо и высказываемое предложеніе.

Въ нее входятъ четыре множителя:

1) *постоянный множитель* A, характеризующій общую интенсивность процесса;

2) *тригонометрическій* $\sin(\omega t - \chi r + \varphi)$, показывающій, что разсматриваемое явленіе представляетъ періодическій процессъ;

3) *функція разстоянія* $\frac{1}{r}$, показывающая пониженіе интенсивности процесса при удаленіи отъ вибратора, пониженіе, происходящее вслѣдствіе того, что энергія распредѣляется на бо́льшій и бо́льшій объемъ;

4) *показательная функція* $e^{-\alpha t - \beta r}$, показывающая постепенное ослабленіе процесса, какъ съ теченіемъ времени, такъ и съ передачей его въ дальнѣйшія точки пространства; и то и другое происходитъ вслѣдствіе безвозвратныхъ потерь энергіи (напр., перехода ея въ тепло).

Если зададимъ величинѣ r постоянное значеніе r_1, то полученная формула

$$\Pi_1 = A\frac{e^{-\alpha t - \beta r_1}}{r_1}\sin(\omega t - \chi r_1 + \varphi) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7')$$

выразитъ колебательный процессъ, совершающійся въ опредѣленной точкѣ пространства.

Періодъ колебаній этого процесса равенъ

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega};$$

декрементъ (натуральный логариѳмическій)

$$D = \alpha\tau = 2\pi\frac{\alpha}{\omega};$$

множитель временнаго затуханія

$$\alpha.$$

Каждая изъ указанныхъ величинъ сохраняетъ одно и то же значеніе для всѣхъ точекъ пространства.

Коэффиціентъ амплитуды колебаній величины Π равенъ $\frac{A}{r}$; ясно, что онъ измѣняется обратно пропорціонально разстоянію отъ вибратора.

Начальная фаза колебаній для начала координатъ характеризуется величиной φ. Изъ самаго понятія о распространеніи волны слѣдуетъ, что такова же начальная фаза и для всякой другой точки пространства. Принимая φ за характеристику начальнаго состоянія, мы тѣмъ самымъ устанавливаемъ начало счета времени, именно условливаемся считать время отъ того момента ($t = 0$), когда волна отправляется отъ вибратора ($r = 0$). Ясно, что во всякую другую точку пространства она придетъ позже, а именно въ точку съ координатой $r = r_1$ придетъ въ моментъ времени t_1, удовлетворяющій уравненію:

$$\omega t_1 - \chi r_1 = 0$$

или

$$t_1 = \frac{\chi}{\omega} r_1.$$

Только начиная съ этого момента формула (7′) выражаетъ колебательный процессъ въ разсматриваемой точкѣ; при значеніяхъ t меньшихъ, чѣмъ $\frac{\chi}{\omega} r_1$, формула (7′) не имѣетъ физическаго смысла.

Значитъ, физически моментъ $t_1 = \frac{\chi}{\omega} r_1$ играетъ для разсматриваемой точки (съ координатой r_1) ту же роль, какую играетъ моментъ $t_0 = 0$ для начала координатъ ($r = 0$); поэтому моментъ времени t_1 можно назвать *«начальный моментъ для разсматриваемой точки»*.

Разсмотримъ теперь зависимость функціи П отъ разстоянія r. Если предположить, что измѣняется только r, а время t получило постоянное значеніе t_1, то получается формула:

$$\Pi = A \frac{e^{-\alpha t_1 - \beta r}}{r} \sin(\omega t_1 - \chi r + \varphi) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7'')$$

Эта формула [1]) выражаетъ волнообразное распредѣленіе, которое имѣется въ пространствѣ въ моментъ $t = t_1$. Разстояніе между двумя ближайшими точками, находящимися въ тождественныхъ фазахъ (т. е. для которыхъ значенія аргумента подъ знакомъ sin отличаются на 2π), есть такъ называемая *длина волны* и равно:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\chi} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (17)$$

Теперь представимъ функцію П въ видѣ:

$$\Pi = A \frac{e^{-\alpha\left(t - \frac{\chi}{\omega} r\right) - \left(\beta + \chi \frac{\alpha}{\omega}\right) r}}{r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{\chi}{\omega} r\right) + \varphi\right] \dots\dots\dots (7''')$$

или сокращенно:

$$\Pi = A \frac{e^{-\alpha T - \gamma r}}{r} \sin(\omega T + \varphi) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7^{IV})$$

---

[1]) Она имѣетъ физическій смыслъ только для такихъ значеній r, для которыхъ

$$\omega t_1 - \chi r_1 > 0.$$

гдѣ буквы T и γ означаютъ [1]):

$$T = t - \frac{\chi}{\omega} r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

$$\gamma = \beta + \chi \frac{\alpha}{\omega} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Если положить, что T сохраняетъ постоянное значеніе T_1, проще всего, если положить $T = 0$, то функція Π приметъ видъ:

$$\Pi = A \frac{e^{-\gamma r}}{r} \sin\varphi = A \sin\varphi \frac{e^{-\gamma r}}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7^{\text{v}})$$

Физически сдѣланное преположеніе соотвѣтствуетъ тому, какъ будто бы наблюдатель переносится вмѣстѣ съ волною и притомъ съ тою же скоростью, такъ что все время находится на фронтѣ волны. Понятно, что при такомъ переносѣ онъ все время видитъ явленіе въ начальной фазѣ; потому то и функція Π не выражаетъ уже волнообразнаго распредѣленія, а только ослабленіе волны по мѣрѣ удаленія ея отъ вибратора. А именно, для какихъ-либо двухъ точекъ r_1 и r_2 имѣемъ:

$$\Pi_1 = A \sin\varphi \frac{e^{-\gamma r_1}}{r_1},$$

$$\Pi_2 = A \sin\varphi \frac{e^{-\gamma r_2}}{r_2};$$

откуда

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{r_2}{r_1} e^{\gamma(r_2 - r_1)}$$

Это отношеніе служитъ мѣриломъ ослабленія волны съ разстояніемъ, причемъ первый множитель $\frac{r_2}{r_1}$ показываетъ ослабленіе вслѣдствіе разсѣянія энергіи въ бо́льшемъ объемѣ, а второй $e^{\gamma(r_2 - r_1)}$ вслѣдствіе перехода части энергіи въ другіе виды, или такъ называемаго поглощенія.

Отношеніе

$$\Delta_{r_2 - r_1} = e^{\gamma(r_2 - r_1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

показывающее, во сколько разъ ослабляется амплитуда колебаній вслѣдствіе поглощенія, при перемѣщеніи волны между точками r_1 и r_2, есть *декрементъ поглощенія* волны между

---

[1]) Физически T есть время, отсчитываемое отъ начальнаго момента, соотвѣтствующаго разсматриваемой точкѣ.

разсматриваемыми точками; натуральный логарифмъ его, т. е.

$$\lg_e \Delta_{r_2 - r_1} = \gamma (r_2 - r_1) \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

есть *натуральный логарифмическій декрементъ поглощенія*; коэффиціентъ γ есть т. н. *коэффиціентъ поглощенія.*

Если разстояніе $r_2 - r_1$ равно длинѣ одной волны, то получается декрементъ поглощенія на протяженіи волны, равный:

$$\Delta_\lambda = e^{\gamma\lambda} \ldots\ldots\ldots\ldots (20')$$

и натуральный логарифмическій декрементъ на протяженіи волны, равный:

$$\delta_\lambda = \lg_e \Delta_\lambda = \gamma\lambda. \ldots\ldots\ldots\ldots (21')$$

Обыкновенно приходится имѣть дѣло именно съ этой величиной, а потому для краткости она будетъ обозначаться просто буквою δ и называться «декрементъ поглощенія». Замѣняя λ и γ ихъ выраженіями по формуламъ (17) и (19), получимъ:

$$\delta = 2\pi \left(\frac{\beta}{\chi} + \frac{\alpha}{\omega} \right) \ldots\ldots\ldots\ldots (21'')$$

Наконецъ, скорость переноса опредѣлится изъ условія:

$$T = t - \frac{\chi}{\omega} r = \text{Constant},$$

откуда

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{\chi} \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Это есть такъ называемая *скорость распространенія волны.*

Изъ изложеннаго видно, что длина волны, скорость распространенія, коэффиціентъ поглощенія и декрементъ поглощенія суть величины постоянныя для всѣхъ точекъ среды.

Выраженія для длины волны, скорости распространенія, коэффиціента поглощенія и декремента поглощенія.

Найдемъ выраженія величинъ, характеризующихъ распространеніе волны, въ зависимости отъ постоянныхъ a, b, ω и α.

Послѣ нѣкоторыхъ преобразованій получимъ:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{4\pi}{\omega(a - 2b\alpha)} \beta = \pm \frac{4\pi}{\omega(a - 2b\alpha)} \sqrt{\frac{1}{2}\left\{ \sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\alpha)^2](\omega^2 + \alpha^2)} - b\omega^2 - \alpha(a - b\alpha) \right\}} \ldots (17'),$$

Такъ какъ λ должна имѣть знакъ одинаковый съ χ, т. е. для прямой волны д. б. положительна, то передъ дробью ставится знакъ $+$ при $a > 2b\alpha$, знакъ $-$ при $a < 2b\alpha$.

$$v = \frac{\omega}{\chi} = \frac{2}{a - 2b\alpha}\beta = \pm\frac{2}{a - 2ba}\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\alpha)^2](\omega^2 + \alpha^2)} - b\omega^2 - \alpha(a - b\alpha)\right\}} \ldots (22')$$

Знаки $+$ и $-$ ставятся по тѣмъ же соображеніямъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

$$\gamma = \beta + \chi\frac{\alpha}{\omega} = \sqrt{\frac{\omega^2 + \alpha^2}{2\omega^2}\left\{\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\alpha)^2](\omega^2 + \alpha^2)} - b(\omega^2 + \alpha^2) + a\alpha\right\}} \ldots (19')$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\omega(a - 2b\alpha)}\left\{\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\alpha)^2](\omega^2 + \alpha^2)} - b(\omega^2 + \alpha^2)\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (21''')$$

Легко доказать [1]) что γ одного знака съ χ, т. е. для прямой волны передъ общимъ радикаломъ нужно ставить знакъ $+$. Отсюда слѣдуетъ, что $\delta = \frac{\gamma}{\chi}$ всегда положительно, что можно было предвидѣть по самому физическому смыслу этой величины [2]).

Проэкціи напряженій электрическаго и магнитнаго поля на оси координатъ.

Имѣя функцію Π и пользуясь уравненіями (4) и (5), найдемъ проэкціи напряженій электрическаго и магнитнаго поля на оси координатъ, а именно:

$$(F_\mu)_x = A\frac{e^{-\alpha t - \beta r}}{r}\cdot\frac{y}{r}\left\{\left[\omega\chi + \alpha\left(\beta + \frac{1}{r}\right)\right]\sin\xi - \left[\omega\left(\beta + \frac{1}{r}\right) - \alpha\chi\right]\cos\xi\right\} \ldots\ldots (23)$$

---

1) Дѣйствительно, при $a > 2b\alpha$ величина β того же знака, что и χ, стало быть и γ имѣетъ знакъ одинаковый съ χ. При $a < 2b\alpha$ величина β имѣетъ знакъ обратный знаку χ, но абсолютное значеніе произведенія $\alpha\chi$ больше, чѣмъ абсолютное значеніе произведенія $\omega\beta$; въ самомъ дѣлѣ, напишемъ неравенства, слѣдующія одно изъ другого: $\alpha^2\chi^2 > \omega^2\beta^2$,

$$\alpha^2\left[\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\alpha)^2](\omega^2 + \alpha^2)} + b(\omega^2 - \alpha^2) + a\alpha\right] > \omega^2\left[\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\alpha)^2](\omega^2 + \alpha^2)} - b(\omega^2 - \alpha^2) - a\alpha\right],$$

$$(\omega^2 + \alpha^2)[b(\omega^2 - \alpha^2) + a\alpha] > (\omega^2 - \alpha^2)\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\alpha)^2](\omega^2 + \alpha^2)},$$

$$(\omega^2 + \alpha^2)[b(\omega^2 - \alpha^2) + a\alpha]^2 > (\omega^2 - \alpha^2)^2[b^2\omega^2 + (a - b\alpha)^2],$$

$$2a\alpha^2 + (4b\alpha - a)(\omega^2 - \alpha^2) > 0.$$

Такъ какъ $\omega^2 - \alpha^2$ всегда положительно, то, при условіи $a < 2b\alpha$, послѣднее неравенство, очевидно, правильно, а слѣдовательно правильны и всѣ предшествующія ему, что и доказываетъ высказанное положеніе.

2) Для возвратной волны χ отрицательно, а потому λ, v и γ также отрицательны, но δ остается положительнымъ. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ знаки у выраженій (17'), (22'), (19') ставятся по правиламъ, обратнымъ вышесказаннымъ, знакъ же у выраженія (21''') ставится согласно прежнему правилу.

$$(F_\mu)_y = -A\frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r}\cdot\frac{x}{r}\left\{\left[\omega\chi+\alpha\left(\beta+\frac{1}{r}\right)\right]\sin\xi-\left[\omega\left(\beta+\frac{1}{r}\right)-\alpha\chi\right]\cos\xi\right\}\ldots\ldots(24)$$

$$4\pi\rho^{-1}(F_k)_x+K\frac{\partial(F_k)_x}{\partial t}=A\frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r}\cdot\frac{zx}{r^2}\left\{\left[-2\omega\chi\beta+\alpha(\chi^2-\beta^2)-\frac{3}{r}\left[\omega\chi+\alpha\left(\beta+\frac{1}{r}\right)\right]\right]\sin\xi+\right.$$

$$\left.+\left[-\omega(\chi^2-\beta^2)-2\alpha\chi\beta+\frac{3}{r}\left[\omega\left(\beta+\frac{1}{r}\right)-\alpha\chi\right]\right]\cos\xi\right\}\ldots(25)$$

$$4\pi\rho^{-1}(F_k)_y+K\frac{\partial(F_k)_y}{\partial t}=A\frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r}\cdot\frac{zy}{r^2}\left\{\left[-2\omega\chi\beta+\alpha(\chi^2-\beta^2)-\frac{3}{r}\left[\omega\chi+\alpha\left(\beta+\frac{1}{r}\right)\right]\right]\sin\xi+\right.$$

$$\left.+\left[-\omega(\chi^2-\beta^2)-2\alpha\chi\beta+\frac{3}{r}\left[\omega\left(\beta+\frac{1}{r}\right)-\alpha\chi\right]\right]\cos\xi\right\}\ldots(26)$$

$$4\pi\rho^{-1}(F_k)_z+K\frac{\partial(F_k)_z}{\partial t}=A\frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r}\left\{\left[-\frac{2}{r}\left[\omega\chi+\alpha\left(\beta+\frac{1}{r}\right)\right]-\frac{x^2+y^2}{r^2}\left\{-2\omega\chi\beta+\alpha(\chi^2-\beta^2)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{3}{r}\left[\omega\chi+\alpha\left(\beta+\frac{1}{r}\right)\right]\right\}\right]\sin\xi+\left[\frac{2}{r}\left[\omega\left(\beta+\frac{1}{r}\right)-\alpha\chi\right]+\frac{x^2+y^2}{r^2}\left\{+2\alpha\chi\beta+\omega(\chi^2-\beta^2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{3}{r}\left[\alpha\chi-\omega\left(\beta+\frac{1}{r}\right)\right]\right\}\right]\cos\xi\ldots(27)$$

Проэкціи напряженія электрическаго поля найдемъ послѣ нѣкоторыхъ преобразованій. А именно, извѣстно, что уравненіе

$$\frac{dF}{dt}+uF=\Phi$$

имѣетъ интегралъ:

$$F=e^{-ut}\int e^{ut}\,\Phi dt+e^{-ut}f$$

[Φ есть функція времени и координатъ, u не зависитъ отъ времени, f произвольная постоянная или функція координатъ, но не времени].

Обозначимъ для краткости:

$$A\frac{e^{-\beta r}}{Kr}\frac{zx}{r^2}\left[-2\omega\chi\beta+\alpha(\chi^2-\beta^2)-\frac{3}{r}\left[\omega\chi+\alpha\left(\beta+\frac{1}{r}\right)\right]\right]=N_1\ldots\ldots(28)$$

$$A\frac{e^{-\beta r}}{Kr}\frac{zx}{r^2}\left[-\omega(\chi^2-\beta^2)-2\alpha\chi\beta+\frac{3}{r}\left[\omega\left(\beta+\frac{1}{r}\right)-\alpha\chi\right]\right]=N_2\ldots\ldots(29)$$

$$A\frac{e^{-\beta r}}{Kr}\frac{zy}{r^2}\left[-2\omega\chi\beta+\alpha(\chi^2-\beta^2)-\frac{3}{r}\left[\omega\chi+\alpha\left(\beta+\frac{1}{r}\right)\right]\right]=Q_1\ldots\ldots(30)$$

$$A\frac{e^{-\beta r}}{Kr}\frac{zy}{r^2}\left[-\omega(\chi^2-\beta^2)-2\alpha\chi\beta+\frac{3}{r}\left[\omega\left(\beta+\frac{1}{r}\right)-\alpha\chi\right]\right]=Q_2\ldots\ldots(31)$$

$$A\frac{e^{-\beta r}}{Kr}\left[-\frac{2}{r}\left[\omega\chi+\alpha\left(\beta+\frac{1}{r}\right)\right]-\frac{x^2+y^2}{r^2}\left\{-2\omega\chi\beta+\alpha(\chi^2-\beta^2)-\frac{3}{r}\left[\omega\chi+\alpha\left(\beta+\frac{1}{r}\right)\right]\right\}\right]=S_1\ldots(32)$$

$$A\frac{e^{-\beta r}}{Kr}\left[\frac{2}{r}\left[\omega\left(\beta+\frac{1}{r}\right)-\alpha\chi\right]+\frac{x^2+y^2}{r^2}\left\{+2\alpha\chi\beta+\omega(\chi^2-\beta^2)+\frac{3}{r}\left[\alpha\chi-\omega\left(\beta+\frac{1}{r}\right)\right]\right\}\right]=S_2\ldots(33)$$

Тогда уравненія (25), (26) и (27) примутъ видъ:

$$\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}(F_k)_x+\frac{\partial (F_k)_x}{\partial t}=N_1 e^{-\alpha t}\sin\xi+N_2 e^{-\alpha t}\cos\xi\ldots\ldots\ldots(25')$$

$$\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}(F_k)_y+\frac{\partial (F_k)_y}{\partial t}=Q_1 e^{-\alpha t}\sin\xi+Q_2 e^{-\alpha t}\cos\xi\ldots\ldots\ldots(26')$$

$$\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}(F_k)_z+\frac{\partial (F_k)_z}{\partial t}=S_1 e^{-\alpha t}\sin\xi+S_2 e^{-\alpha t}\cos\xi\ldots\ldots\ldots(27')$$

Отсюда при интегрированіи получимъ:

$$(F_k)_x=N_1\frac{e^{-\alpha t}}{\left(\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}-\alpha\right)^2+\omega^2}\left[\left(\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}-\alpha\right)\sin\xi-\omega\cos\xi\right]+$$

$$+N_2\frac{e^{-\alpha t}}{\left(\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}-\alpha\right)^2+\omega^2}\left[\omega\sin\xi+\left(\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}-\alpha\right)\cos\xi\right]\ldots\ldots\ldots(34)$$

$$(F_k)_y=Q_1\frac{e^{-\alpha t}}{\left(\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}+\alpha\right)^2+\omega^2}\left[\left(\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}-\alpha\right)\sin\xi-\omega\cos\xi\right]+$$

$$+Q_2\frac{e^{-\alpha t}}{\left(\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}-\alpha\right)^2+\omega^2}\left[\omega\sin\xi+\left(\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}-\alpha\right)\cos\xi\right]\ldots\ldots\ldots(35)$$

$$(F_k)_z=S_1\frac{e^{-\alpha t}}{\left(\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}-\alpha\right)^2+\omega^2}\left[\left(\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}-\alpha\right)\sin\xi-\omega\cos\xi\right]+$$

$$+S_2\frac{e^{-\alpha t}}{\left(\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}-\alpha\right)^2+\omega^2}\left[\omega\sin\xi+\left(\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}-\alpha\right)\cos\xi\right]\ldots\ldots\ldots(36)$$

[Произвольная функція координатъ f всюду полагается равной нулю, такъ какъ въ вибраторѣ по условіямъ заданія происходитъ затухающее колебаніе, не сопровождающееся апеіодическими явленіями].

Подставивъ въ эти формулы значенія коэффиціентовъ N_1, N_2, Q_1, Q_2, S_1 и S_2 и исключивъ ρ^{-1}, K, a и b при помощи соотношеній:

$$K=\frac{b}{\mu}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(37)$$

$$\frac{4\pi\rho^{-1}}{K}=\frac{a}{b}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(38)$$

$$a=\frac{2}{\omega(\omega^2+\alpha^2)}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta+\omega\alpha(\chi^2-\beta^2)].\dots\dots\dots\dots(39)$$

$$b=\frac{1}{\omega(\omega^2+\alpha^2)}[\omega(\chi^2-\beta^2)-2\alpha\chi\beta],\dots\dots\dots\dots\dots(40)$$

получимъ окончательно:

$$(F_k)_x=\frac{A\mu}{(\chi^2+\beta^2)^2}\frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r}\cdot\frac{zx}{r^2}\Big\{\Big[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2+\beta^2)^2-\frac{3}{r}\Big\{[(\omega^2-\alpha^2)\beta+2\omega\alpha\chi](\chi^2+\beta^2)]+$$
$$+\frac{1}{r}[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2)+4\omega\alpha\chi\beta]\Big\}\Big]\sin\xi+\Big[-2\omega\alpha(\chi^2+\beta^2)^2+$$
$$+\frac{3}{r}\Big\{[(\omega^2-\alpha^2)\chi-2\omega\alpha\beta](\chi^2+\beta^2)+\frac{2}{r}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta+\omega\alpha(\chi^2-\beta^2)]\Big\}\Big]\cos\xi\Big\}\dots(34')$$

$$(F_k)_y=\frac{A\mu}{(\chi^2+\beta^2)^2}\frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r}\frac{zy}{r^2}\Big\{\Big[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2+\beta^2)^2-\frac{3}{r}\Big\{[(\omega^2-\alpha^2)\beta+2\omega\alpha\chi](\chi^2+\beta^2)]+$$
$$+\frac{1}{r}[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2)+4\omega\alpha\chi\beta]\Big\}\Big]\sin\xi+\Big[-2\omega\alpha(\chi^2+\beta^2)^2+$$
$$+\frac{3}{r}\Big\{[(\omega^2-\alpha^2)\chi-2\omega\alpha\beta](\chi^2+\beta^2)+\frac{2}{r}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta+\omega\alpha(\chi^2-\beta^2)]\Big\}\Big]\cos\xi\Big\}\dots(35')$$

$$(F_k)_z=\frac{A\mu}{(\chi^2+\beta^2)^2}\frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r}\Big\{\Big[-\frac{2}{r}\Big\{[(\omega^2-\alpha^2)\beta+2\omega\alpha\chi](\chi^2+\beta^2)+\frac{1}{r}[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2)+4\omega\alpha\chi\beta]\Big\}+$$
$$+\frac{x^2+y^2}{r^2}\Big\{(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2+\beta^2)^2+\frac{3}{r}\Big[[(\omega^2-\alpha^2)\beta+2\omega\alpha\chi](\chi^2+\beta^2)+$$
$$+\frac{1}{r}[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2)+4\omega\alpha\chi\beta]\Big]\Big\}\Big]\sin\xi+\Big[\frac{2}{r}\Big\{[(\omega^2-\alpha^2)\chi-2\omega\alpha\beta](\chi^2+\beta^2)+$$
$$+\frac{2}{r}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta+\omega\alpha(\chi^2-\beta^2)]\Big\}+\frac{x^2+y^2}{r^2}\Big\{2\omega\alpha(\chi^2+\beta^2)^2-$$
$$-\frac{3}{r}\Big[[(\omega^2-\alpha^2)\chi-2\omega\alpha\beta](\chi^2+\beta^2)+\frac{2}{r}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta+\omega\alpha(\chi^2-\beta^2)]\Big]\Big\}\Big]\cos\xi\Big\}\dots(36')$$

Получивъ выраженія проэкцій электрическихъ и магнитныхъ силъ, легко доказать, что магнитная сила направлена по окружностямъ, центры которыхъ лежатъ на оси Z, а линіи электрической силы расположены въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ ось Z [1]).

Проэкціи напряженія электрическаго и магнитнаго поля на направленія R, r, $\perp R$ и $\perp r$.

Такъ какъ электрическая сила располагается въ плоскости (Z, R) или, что то же самое, въ плоскости (Z, r), то для дальнѣйшаго изслѣдованія удобнѣе всего имѣть проэкціи напряженія электрическаго поля на направленія Z и R, или на направленія r и $\perp r$. Напряженіе же магнитнаго поля удобнѣе всего спроэктировать на направленіе $\perp R$, причемъ полученная проэкція будетъ равна полной величинѣ напряженія магнитнаго поля. Искомыя величины найдемъ по формуламъ:

$$(F_\mu)_{\perp R} = F_\mu = -(F_\mu)_x \frac{y}{R} + (F_\mu)_y \frac{x}{R}, \quad \ldots\ldots (41)$$

$$(F_k)_R = (F_k)_x \frac{x}{R} + (F_k)_y \frac{y}{R}, \quad \ldots\ldots (42)$$

---

1) Въ самомъ дѣлѣ:

$$\cos(R, X) = \frac{x}{R},$$

$$\cos(R, Y) = \frac{y}{R},$$

$$\cos(R, Z) = 0,$$

$$\cos(F_\mu, R) = \frac{(F_\mu)_x}{F_\mu} \cdot \frac{x}{R} + \frac{(F_\mu)_y}{F_\mu} \frac{y}{R}.$$

Подставивъ $(F_\mu)_x$ и $(F_\mu)_y$ изъ уравненій (23) и (24), найдемъ, что

$$\cos(F_\mu, R) = 0,$$

что и доказываетъ первое предложеніе.

Если теперь направленіе $\perp$-е плоскости (Z, R) обозначимъ знакомъ $\perp R$, то можно написать:

$$\cos(\perp R, X) = -\frac{y}{R},$$

$$\cos(\perp R, Y) = \frac{x}{R},$$

$$\cos(\perp R, Z) = 0,$$

$$\cos(F_k, \perp R) = \frac{(F_k)_x}{F_k} \frac{y}{R} + \frac{(F_k)_y}{F_k} \frac{x}{R}.$$

Подставивъ $(F_k)_x$ и $(F_k)_y$ изъ уравненій (34'), (35') и (36'), найдемъ, что

$$\cos(F_k, \perp R) = 0,$$

что и доказываетъ второе предложеніе.

$$(F_k)_r = (F_k)_R \frac{R}{r} + (F_k)_z \frac{z}{r}, \ldots \ldots (43)$$

$$(F_k)_{\perp r} = -(F_k)_R \frac{z}{r} + (F_k)_z \frac{R}{r}, \ldots \ldots (44)$$

Произведя указанные разсчеты и замѣняя прямолинейныя координаты сферическими по формуламъ:

$$\frac{z}{r} = \cos\theta, \ldots \ldots (45)$$

$$\frac{R}{r} = \sin\theta, \ldots \ldots (46)$$

получаемъ проэкціи въ слѣдующемъ видѣ:

$$(F_\mu)_{\perp R} = F_\mu = A \frac{e^{-\alpha t - \beta r}}{r} \sin\theta \left\{ -\left[\omega\chi + \alpha\beta + \frac{\alpha}{r}\right] \sin\xi + \left[\omega\beta - \alpha\chi + \frac{\omega}{r}\right] \cos\xi \right\} \ldots \ldots (47)$$

$$\begin{aligned}(F_k)_R = \frac{A\mu}{(\chi^2+\beta^2)^2} \frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r} \cos\theta \sin\theta \Biggl\{ \Bigl[&-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2+\beta^2)^2 - \frac{3}{r} \Bigl\{ [(\omega^2-\alpha^2)\beta + 2\omega\alpha\chi](\chi^2+\beta^2) + \\ &+ \frac{1}{r}[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2) + 4\omega\alpha\chi\beta] \Bigr\} \Bigr] \sin\xi + \Bigl[-2\omega\alpha(\chi^2+\beta^2)^2 + \\ &+ \frac{3}{r} \Bigl\{ [(\omega^2-\alpha^2)\chi - 2\omega\alpha\beta](\chi^2+\beta^2) + \frac{2}{r}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta + \omega\alpha(\chi^2-\beta^2)] \Bigr\} \Bigr] \cos\xi \Biggr\} \ldots (48)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(F_k)_z = \frac{A\mu}{(\chi^2+\beta^2)^2} \frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r} \Biggl\{ \Bigl[&-\frac{2}{r} \Bigl\{ [(\omega^2-\alpha^2)\beta + 2\omega\alpha\chi](\chi^2+\beta^2) + \frac{1}{r}[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2) + 4\omega\alpha\chi\beta] \Bigr\} + \\ &+ \sin^2\theta \Bigl\{ (\omega^2-\alpha^2)(\chi^2+\beta^2)^2 + \frac{3}{r} \Bigl[[(\omega^2-\alpha^2)\beta + 2\omega\alpha\chi](\chi^2+\beta^2) + \\ &+ \frac{1}{r}[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2) + 4\omega\alpha\chi\beta] \Bigr] \Bigr\} \Bigr] \sin\xi + \Bigl[\frac{2}{r} \Bigl\{ [(\omega^2-\alpha^2)\chi - 2\omega\alpha\beta](\chi^2+\beta^2) + \\ &+ \frac{2}{r}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta + \omega\alpha(\chi^2-\beta^2)] \Bigr\} + \sin^2\theta \Bigl\{ 2\omega\alpha(\chi^2+\beta^2)^2 - \\ &- \frac{3}{r} \Bigl[[(\omega^2-\alpha^2)\chi - 2\omega\alpha\beta](\chi^2+\beta^2) + \frac{2}{r}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta + \omega\alpha(\chi^2-\beta^2)] \Bigr] \Bigr\} \Bigr] \cos\xi \Biggr\} \ldots (49)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(F_k)_r = \frac{2A\mu}{(\chi^2+\beta^2)^2} \frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r^2} \cos\theta \Bigl\{ -\Bigl[&[(\omega^2-\alpha^2)\beta + 2\omega\alpha\chi](\chi^2+\beta^2) + \frac{1}{r}[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2) + \\ &+ 4\omega\alpha\chi\beta] \Bigr] \sin\xi + \Bigl[[(\omega^2-\alpha^2)\chi - 2\omega\alpha\beta](\chi^2+\beta^2) + \frac{2}{r}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta + \omega\alpha(\chi^2-\beta^2)] \Bigr] \cos\xi \Bigr\} \ldots (50)\end{aligned}$$

$$(F_k)_{\perp r}=\frac{A\mu}{(\chi^2+\beta^2)^2}\,\frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r}\sin\theta\left\{\left[(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2+\beta^2)^2+\frac{1}{r}\left[[(\omega^2-\alpha^2)\beta+2\omega\alpha\chi](\chi^2+\beta^2)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{r}\left[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2)+4\omega\alpha\chi\beta\right]\right]\right]\sin\xi+\left[2\omega\alpha(\chi^2+\beta^2)^2-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{r}\left[[(\omega^2-\alpha^2)\chi-2\omega\alpha\beta](\chi^2+\beta^2)+\frac{2}{r}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta+\omega\alpha(\chi^2-\beta^2)]\right]\right]\cos\xi\right\}\ldots(51)$$

Мы представимъ найденныя величины въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}F_\mu&=-A\sqrt{\omega^2+\alpha^2}\,\frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r}\sqrt{\chi^2+\beta^2+\frac{2\beta}{r}+\frac{1}{r^2}}\,\sin\theta\sin(\xi+\gamma_\mu)\\ \operatorname{tang}\gamma_\mu&=\frac{-\omega\beta+\alpha\chi-\frac{\omega}{r}}{\omega\chi+\alpha\beta+\frac{\alpha}{r}}\end{aligned}\right\}\ldots(47')$$

$$\left.\begin{aligned}(F_k)_R&=\frac{A\mu(\omega^2+\alpha^2)}{\chi^2+\beta^2}\,\frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r}\sqrt{(\chi^2+\beta^2)^2+\frac{6\beta}{r}(\chi^2+\beta^2)+\frac{3}{r^2}(\chi^2+5\beta^2)+\frac{6\beta}{r}+\frac{3}{r^2}}\,\cdot\\ &\qquad\cdot\sin\theta\cos\theta\sin(\xi+\gamma_R)\\ \operatorname{tang}\gamma_R&=\frac{-2\omega\alpha(\chi^2+\beta^2)^2+\frac{3}{r}\left\{[(\omega^2-\alpha^2)\chi-2\omega\alpha\beta](\chi^2+\beta^2)+\frac{2}{r}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta+\omega\alpha(\chi^2-\beta^2)]\right\}}{-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2+\beta^2)^2-\frac{3}{r}\left\{[(\omega^2-\alpha^2)\beta+2\omega\alpha\chi](\chi^2+\beta^2)+\frac{1}{r}[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2)+4\omega\alpha x\beta]\right\}}\end{aligned}\right\}\ldots(48')$$

$$\left.\begin{aligned}(F_k)_z&=\frac{A\mu(\omega^2+\alpha^2)}{\chi^2+\beta^2}\,\frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r}\sqrt{\sin^4\theta\left[(\chi^2+\beta^2)^2+\frac{6\beta}{r}(\chi^2+\beta^2)+\frac{3}{r^2}\left(\chi^2+5\beta^2+\frac{6\beta}{r}+\frac{3}{r^2}\right)\right]-}\\ &\quad\overline{-\frac{4\sin^2\theta}{r}\left[\beta(\chi^2+\beta^2)+\frac{2}{r}(\chi^2+2\beta^2)+\frac{6\beta}{r^2}+\frac{3}{r^3}\right]+\frac{4}{r^2}\left[\chi^2+\beta^2+\frac{2\beta}{r}+\frac{1}{r^2}\right]}\cdot\sin(\xi+\gamma_z)\\ \operatorname{tang}\gamma_z&=\frac{\begin{gathered}\frac{2}{r}\left\{[(\omega^2-\alpha^2)\chi-2\omega\alpha\beta](\chi^2+\beta^2)+\frac{2}{r}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta+\omega\alpha(\chi^2-\beta^2)]\right\}+\\ +\sin^2\theta\left\{2\omega\alpha(\chi^2+\beta^2)^2-\frac{3}{r}\left[[(\omega^2-\alpha^2)\chi-2\omega\alpha\beta](\chi^2+\beta^2)+\frac{2}{r}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta+\omega\alpha(\chi^2-\beta^2)]\right]\right\}\end{gathered}}{\begin{gathered}-\frac{2}{r}\left\{[(\omega^2-\alpha^2)\beta+2\omega\alpha\chi](\chi^2+\beta^2)+\frac{1}{r}[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2)+4\omega\alpha\chi\beta]\right\}+\sin^2\theta\left\{(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2+\beta^2)^2+\right.\\ \left.+\frac{3}{r}\left[[(\omega^2-\alpha^2)\beta+2\omega\alpha\chi](\chi^2+\beta^2)+\frac{1}{r}[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2)+4\omega\alpha\chi\beta]\right]\right\}\end{gathered}}\end{aligned}\right\}\ldots(49')$$

$$\left.\begin{aligned}(F_k)_r&=\frac{2A\mu(\omega^2+x^2)}{\chi^2+\beta^2}\,\frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r^2}\sqrt{\chi^2+\beta^2+\frac{2\beta}{r}+\frac{1}{r^2}}\,\cos\theta\sin(\xi+\gamma_r)\\ \operatorname{tang}\gamma_r&=\frac{[(\omega^2-\alpha^2)\chi-2\omega\alpha\beta](\chi^2+\beta^2)+\frac{2}{r}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta+\omega\alpha(\chi^2-\beta^2)]}{-[(\omega^2-\alpha^2)\beta+2\omega\alpha\chi](\chi^2+\beta^2)-\frac{1}{r}[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2)+4\omega\alpha\chi\beta]}\end{aligned}\right\}\ldots(50')$$

$$\left.\begin{aligned}(F_k)_{\perp r} &= \frac{A\mu(\omega^2+\alpha^2)}{\chi^2+\beta^2}\,\frac{e^{-\alpha t-\beta r}}{r}\sqrt{(\chi^2+\beta^2)^2+\frac{2\beta}{r}(\chi^2+\beta^2)+\frac{1}{r^2}\left(-\chi^2+3\beta^2+\frac{2\beta}{r}+\frac{1}{r^2}\right)}\cdot\sin\theta\sin(\xi+\gamma_\perp)\\ \operatorname{tang}\gamma_\perp &= \frac{2\omega\alpha(\chi^2+\beta^2)^2-\frac{1}{r}\left[[(\omega^2-\alpha^2)\chi-2\omega\alpha\beta](\chi^2+\beta^2)+\frac{2}{r}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta+\omega\alpha(\chi^2-\beta^2)]\right]}{(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2+\beta^2)^2+\frac{1}{r}\left[[(\omega^2-\alpha^2)\beta+2\omega\alpha\chi](\chi^2+\beta^2)+\frac{1}{r}[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2)+4\omega\alpha\chi\beta]\right]}\end{aligned}\right\}\ldots(51')$$

Уравненіе электрической силовой линіи.

Какъ было доказано выше, электрическія силовыя линіи располагаются въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ ось Z. Поэтому одно изъ уравненій, которому удовлетворяетъ такая линія, есть уравненіе соотвѣтствующей плоскости, проходящей черезъ ось Z. Найдемъ теперь второе уравненіе, опредѣляющее положеніе силовой линіи въ указанной плоскости.

Примемъ за координатныя оси въ этой плоскости направленія Z и R. Тогда тангенсъ угла, составленнаго электрической силой съ осью R, выразится отношеніемъ $\frac{(F_k)_z}{(F_k)_R}$. Предположимъ теперь, что вычерчена нѣкоторая линія $z = f(R)$, которая въ каждой точкѣ имѣетъ направленіе, совпадающее съ направленіемъ электрической силы въ этой точкѣ. Тангенсъ угла, который составляетъ касательная, проведенная къ этой линіи, съ осью R, будетъ равенъ $\frac{dz}{dR}$. Такъ какъ онъ долженъ быть тождественъ съ предыдущимъ, то уравненіе искомой линіи будетъ

$$\frac{(F_k)_z}{(F_k)_R} = \frac{dz}{dR} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(52)$$

Для интегрированія преобразуемъ это уравненіе въ полярныя координаты.

Имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}R &= r\sin\theta; \quad & dR &= r\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dr;\\ z &= r\cos\theta; \quad & dz &= -r\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, dr;\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(53)$$

Подставляя въ предыдущее уравненіе, найдемъ:

$$(F_k)_z\,[r\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dr] = (F_k)_R\,[-r\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, dr],$$

или

$$[(F_k)_z\cos\theta + (F_k)_R\sin\theta]\, d\theta = [(F_k)_R\cos\theta - (F_k)_z\sin\theta]\,\frac{dr}{r},$$

или

$$(F_k)_r\, d\theta = -(F_k)_{\perp r}\cdot\frac{dr}{r}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(54)$$

3*

Для того, чтобы интегрировать это дифференціальное уравненіе, выразимъ $(F_k)_r$ и $(F_k)_{\perp r}$ черезъ производныя функціи П.

Изъ уравненій (5) получимъ:

$$(F_k)_x = \frac{e^{-ut}}{K}\int e^{ut}\,\frac{\partial^3 \Pi}{\partial t\,\partial z\,\partial x}\,dt = \frac{xz}{r^2}\,\frac{e^{-ut}}{K}\int e^{ut}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2\Pi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right]dt,$$

$$(F_k)_y = \frac{e^{-ut}}{K}\int e^{ut}\,\frac{\partial^3 \Pi}{\partial t\,\partial z\,\partial y}\,dt = \frac{yz}{r^2}\,\frac{e^{-ut}}{K}\int e^{ut}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2\Pi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right]dt,$$

$$(F_k)_z = -\frac{e^{-ut}}{K}\int e^{ut}\left[\frac{\partial^3\Pi}{\partial t\,\partial x^2} + \frac{\partial^3\Pi}{\partial t\,\partial y^2}\right]dt = -$$

$$-\frac{x^2+y^2}{r^2}\,\frac{e^{-ut}}{K}\int e^{ut}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2\Pi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right]dt - \frac{2e^{-ut}}{K}\int e^{ut}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right]dt.$$

(Здѣсь u есть сокращенное обозначеніе: $u = \frac{4\pi\rho^{-1}}{K} = \frac{a}{b}$, интегралъ же неопредѣленный, но безъ произвольной постоянной).

Отсюда при помощи соотношеній (41), (42), (43), (44), (45) и (46) получимъ:

$$(F_k)_r = -2\cos\theta\,\frac{e^{-ut}}{K}\int e^{ut}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right]dt = -\frac{2\cos\theta}{r^2}\,\frac{e^{-ut}}{K}\int e^{ut}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(r\,\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right)dt,$$

$$(F_k)_{\perp r} = -\sin\theta\,\frac{e^{-ut}}{K}\int e^{ut}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2\Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right]dt = -\frac{\sin\theta}{r}\,\frac{e^{-ut}}{K}\int e^{ut}\,\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial r}\left(r\,\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right)dt.$$

Подставляя въ уравненіе (54), получимъ:

$$-\frac{2\cos\theta\,d\theta}{r^2}\,\frac{e^{-ut}}{K}\int e^{ut}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(r\,\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right)dt = \frac{\sin\theta\,dr}{r^2}\,\frac{e^{-ut}}{K}\int e^{ut}\,\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial r}\left(r\,\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right)dt, \ldots \quad (54')$$

или:

$$2\operatorname{ctg}\theta\,d\theta = -\frac{e^{-ut}\int e^{ut}\,\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial r}\left(r\,\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right)dt}{e^{-ut}\int e^{ut}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(r\,\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right)dt}\,dr = -\frac{\frac{\partial}{\partial r}\left[e^{-ut}\int e^{ut}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(r\,\frac{d\Pi}{\partial r}\right)dt\right]}{e^{-ut}\int e^{ut}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(r\,\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right)dt}\,dr \ldots (54'')$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$\log\sin^2\theta = \log C - \log\left[e^{-ut}\int e^{ut}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(r\,\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right)dt\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (55)$$

или:

$$\sin^2\theta = \frac{C}{e^{-ut}\int e^{ut}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(r\,\frac{\partial\Pi}{\partial r}\right)dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (55')$$

Подставляя выраженіе производной по уравненію (10) и производя дальнѣйшія дѣйствія, получимъ окончательно:

$$\sin^2\theta = \frac{Ce^{\beta r}}{\left\{[(\omega^2-\alpha^2)\beta+2\omega\alpha\chi](\chi^2+\beta^2)+\frac{1}{r}[-(\omega^2-\alpha^2)(\chi^2-\beta^2)+4\omega\alpha\chi\beta]\right\}\sin\xi - \left\{[(\omega^2-\alpha^2)\chi-2\omega\alpha\beta](\chi^2+\beta^2)+\frac{2}{r}[(\omega^2-\alpha^2)\chi\beta+\omega\alpha(\chi^2-\beta^2)]\right\}\cos\xi} \quad \ldots (55'')$$

Это уравненіе даетъ возможность построить любую силовую линію въ любой моментъ времени. Задавая, при постоянномъ t, рядъ различныхъ значеній для C, получимъ уравненія всевозможныхъ силовыхъ линій, имѣющихся въ пространствѣ въ данный моментъ времени.

Излученіе энергіи въ пространство.

Разсчитаемъ теперь количество энергіи, протекающее втеченіе нѣкотораго времени черезъ сферическую поверхность радіуса r, въ центрѣ которой находится разсматриваемый вибраторъ.

Проэкція вектора Пойнтинга на нормаль къ этой поверхности равна:

$$P_r = -\frac{F_\mu (F_k)_{\perp r}}{4\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$

Слѣдовательно, количество энергіи, протекающее по направленію r втеченіе времени dt черезъ часть сферы, ограниченную угловыми разстояніями θ_1 и θ_2, будетъ равно:

$$dE = \int_{\theta_1}^{\theta_2} P_r\, 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta\, dt = -dt \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{F_\mu (F_k)_{\perp r}\, r^2}{2} \sin\theta\, d\theta \quad \ldots\ldots\ldots (57)$$

Количество же энергіи, протекающее за время $t_2 - t_1$, будетъ:

$$E = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{F_\mu (F_k)_{\perp r}\, r^2}{2} \sin\theta\, d\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (58)$$

Подставляя въ эти формулы выраженія напряженій электрическаго и магнитнаго поля при помощи уравненій (47′) и (51′), получимъ:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{A^2\mu(\omega^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{2(\chi^2+\beta^2)} \sqrt{\chi^2+\beta^2+\frac{2\beta}{r}+\frac{1}{r^2}} \sqrt{(\chi^2+\beta^2)^2+\frac{2\beta}{r}(\chi^2+\beta^2)+\frac{1}{r^2}\left(-\chi^2+3\beta^2+\frac{2\beta}{r}+\frac{1}{r^2}\right)} \cdot$$
$$\cdot\, e^{-2\alpha t-2\beta r} \cdot \sin(\xi+\gamma_\mu) \cdot \sin(\xi+\gamma_\perp) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^3\theta\, d\theta \quad \ldots (59)$$

Легко найти, что:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{1}{12} \left| \cos 3\theta - 9\cos\theta \right|_{\theta_1}^{\theta_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

Если желаемъ знать количество энергіи, протекающее черезъ всю сферическую поверхность, то подставимъ:

$$\theta_1 = 0,$$

$$\theta_2 = \pi.$$

Тогда получимъ:

$$\frac{1}{12} \left| \cos 3\theta - 9\cos\theta \right|_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

и, слѣдовательно:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2A^2\mu(\omega^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{3(\chi^2+\beta^2)} \sqrt{\chi^2+\beta^2+\frac{2\beta}{r}+\frac{1}{r^2}} \sqrt{(\chi^2+\beta^2)^2+\frac{2\beta}{r}(\chi^2+\beta^2)+\frac{1}{r^2}\left(-\chi^2+3\beta^2+\frac{2\beta}{r}+\frac{1}{r^2}\right)} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-2\alpha t-2\beta r} \sin(\xi+\gamma_\mu) \sin(\xi+\gamma_\perp) \ldots (61)$$

Потокъ энергіи распредѣляется черезъ сферическую поверхность весьма неравномѣрно: онъ сильнѣе всего въ экваторіальномъ поясѣ и быстро ослабѣваетъ по мѣрѣ удаленія отъ него.

Разлагая произведеніе синусовъ по формулѣ:

$$\sin(\xi+\gamma_\mu)\sin(\xi+\gamma_\perp) = \frac{1}{2}\left[\cos(\gamma_\mu-\gamma_\perp) - \cos(2\xi+\gamma_\mu+\gamma_\perp)\right],$$

получимъ:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{A^2\mu(\omega^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{3(\chi^2+\beta^2)} \sqrt{\chi^2+\beta^2+\frac{2\beta}{r}+\frac{1}{r^2}} \sqrt{(\chi^2+\beta^2)^2+\frac{2\beta}{r}(\chi^2+\beta^2)+\frac{1}{r^2}\left(-\chi^2+3\beta^2+\frac{2\beta}{r}+\frac{1}{r^2}\right)} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-2\alpha t-2\beta r} \left[\cos(\gamma_\mu-\gamma_\perp) - \cos(2\xi+\gamma_\mu+\gamma_\perp)\right] \ldots (61')$$

Такъ какъ выраженіе, заключенное въ скобкахъ, мѣняетъ знакъ съ измѣненіемъ времени, то теченіе энергіи происходитъ поочередно то отъ вибратора въ пространство, то изъ пространства къ вибратору. Первый случай имѣетъ мѣсто тогда, когда $\frac{dE}{dt}$ положительно, второй — когда $\frac{dE}{dt}$ отрицательно.

Для того, чтобы найти полное количество энергіи, проходящее черезъ разсматриваемую поверхность втеченіе промежутка времени $t_2 - t_1$, нужно интегрировать эту формулу въ предѣлахъ t_1 и t_2. Наиболѣе раціонально за нижній предѣлъ принять тотъ моментъ времени, когда волна только что доходитъ до разсматриваемой поверхности; за верхній же предѣлъ примемъ моментъ времени, отстоящій отъ предыдущаго на нѣкоторое цѣлое число k полупеnecessary періодовъ колебанія. Тогда

$$t_1 = \frac{\chi}{\omega} r,$$

$$t_2 = t_1 + \frac{k\pi}{\omega} = \frac{\chi}{\omega} r + \frac{k\pi}{\omega}.$$

Получаемъ [1]):

$$E_{k\frac{\tau}{2}} = \frac{A^2 \mu (\omega^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{6(\chi^2+\beta^2)} \sqrt{\chi^2+\beta^2+\frac{2\beta}{r}+\frac{1}{r^2}} \sqrt{(\chi^2+\beta^2)^2+\frac{2\beta}{r}(\chi^2+\beta^2)+\frac{1}{r^2}\left(-\chi^2+3\beta^2+\frac{2\beta}{r}+\frac{1}{r^2}\right)}\cdot$$

$$\cdot e^{-2\left(\beta+\chi\frac{\alpha}{\omega}\right) r} \cdot \left[1-e^{-2k\pi\frac{\alpha}{\omega}}\right] \cdot \left[\frac{\cos(\gamma_\mu-\gamma_\perp)}{\alpha} + \frac{\omega \sin(2\varphi+\gamma_\mu+\gamma_\perp) - \alpha\cos(2\varphi+\gamma_\mu+\gamma_\perp)}{\omega^2+\alpha^2}\right] \ldots (62)$$

Полагая $k=1$, получимъ выраженіе для количества энергіи, проходящей черезъ разсматриваемую поверхность втеченіе одного полуперіода. Эти количества энергіи постепенно убываютъ, уменьшаясь съ каждымъ новымъ полуперіодомъ въ отношеніи $e^{2\pi\frac{\alpha}{\omega}}$.

---

1) Дѣйствительно:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-2\alpha t}\left[\cos(\gamma_\mu-\gamma_\perp)-\cos(2\xi+\gamma_\mu+\gamma_\perp)\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{-2\alpha t}\left[\cos(\gamma_\mu-\gamma_\perp)-\cos(2\omega t-2\chi r+2\varphi+\gamma_\mu+\gamma_\perp)\right] dt =$$

$$= \cos(\gamma_\mu-\gamma_\perp)\left|\frac{e^{-2\alpha t}}{-2\alpha}\right|_{t_1}^{t_2} + \left|\frac{e^{-2\alpha t}}{2(\omega^2+\alpha^2)}\left[-\omega\sin(2\omega t-2\chi r+2\varphi+\gamma_\mu+\gamma_\perp)+\alpha\cos(2\omega t-2\chi r+2\varphi+\gamma_\mu+\gamma_\perp)\right]\right|_{t_1}^{t_2}.$$

При указанныхъ значеніяхъ t_1 и t_2 получимъ:

$$\left|\sin(2\omega t-2\chi r+2\varphi+\gamma_\mu+\gamma_\perp)\right|_{t=t_1 \text{ или } t=t_2} = \sin(2\varphi+\gamma_\mu+\gamma_\perp),$$

$$\left|\cos(2\omega t-2\chi r+2\varphi+\gamma_\mu+\gamma_\perp)\right|_{t=t_1 \text{ или } t=t_2} = \cos(2\varphi+\gamma_\mu+\gamma_\perp).$$

Подставляя эти выраженія, придемъ къ формулѣ:

$$\frac{e^{-2\frac{\alpha}{\omega}\chi r}\left[1-e^{-2k\pi\frac{\alpha}{\omega}}\right]}{2}\left\{\frac{\cos(\gamma_\mu-\gamma_\perp)}{\alpha} + \frac{\omega\sin(2\varphi+\gamma_\mu+\gamma_\perp)-\alpha\cos(2\varphi+\gamma_\mu+\gamma_\perp)}{\omega^2+\alpha^2}\right\}.$$

Наконецъ, подставляя это выраженіе въ интегралъ формулы (61'), получаемъ формулу (62).

Полагая $k = \infty$, получимъ выраженіе для полнаго количества энергіи, проходящей черезъ разсматриваемую поверхность за все время распространенія волнъ, созданныхъ однимъ разрядомъ вибратора. Это выраженіе равно:

$$E = \frac{A^2 \mu (\omega^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{6(\chi^2 + \beta^2)} \sqrt{\chi^2 + \beta^2 + \frac{2\beta}{r} + \frac{1}{r^2}} \sqrt{(\chi^2 + \beta^2)^2 + \frac{2\beta}{r}(\chi^2 + \beta^2) + \frac{1}{r^2}\left(-\chi^2 + 3\beta^2 + \frac{2\beta}{r} + \frac{1}{r^2}\right)} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-2\left(\beta + \chi\frac{\alpha}{\omega}\right) r} \left[\frac{\cos(\gamma_\mu - \gamma_\perp)}{\alpha} + \frac{\omega \sin(2\varphi + \gamma_\mu + \gamma_\perp) - \alpha\cos(2\varphi + \gamma_\mu + \gamma_\perp)}{\omega^2 + \alpha^2}\right] \ldots (63)$$

Наконецъ, если втеченіе единицы времени вибраторъ заряжается и разряжается ν разъ, онъ высылаетъ ν группъ волнъ [1]) и, слѣд., при этомъ режимѣ количество энергіи, проходящее черезъ разсматриваемую поверхность втеченіе единицы времени, равно:

$$E_1 = \nu E \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$

Дальнѣйшее преобразованіе выведенныхъ формулъ.

Для изслѣдованія полученныхъ формулъ выгодно подвергнуть ихъ еще одному преобразованію, а именно вынести множители χ и ω и ввести слѣдующія сокращенныя обозначенія [2]).

$$T = t - \frac{\chi}{\omega} r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

$$D' = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha\tau}{2\pi} = \frac{D}{2\pi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

$$d' = \frac{\beta}{\chi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (67)$$

Обозначенія $\chi = \frac{2\pi}{\lambda}$ и $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ остаются по прежнему.

Съ введеніемъ вышеупомянутыхъ измѣненій, формулы примутъ слѣдующій видъ:

$$\chi = \sqrt{\frac{\omega}{2}\left\{\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\omega D')^2]\,(1 + D'^2)} + b\omega + D'(a - b\omega D')\right\}} \ldots (15'')$$

---

1) Предполагается, что затуханіе колебаній столь значительно, что, къ моменту начала разряда, колебанія, соотвѣтствовавшія предыдущему разряду, закончили свое существованіе.

2) Физически формула (65) означаетъ, что время отсчитывается отъ того начальнаго момента, который соотвѣтствуетъ разсматриваемой точкѣ.

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2}\left\{\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\omega D')^2]\,(1 + D'^2)} - b\omega - D'\,(a - b\omega D')\right\}} \quad \ldots (16'')$$

$$d' = \frac{\beta}{\chi} = \frac{1}{a - 2b\omega D'}\left\{\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\omega D')^2](1 + D'^2)} - b\omega - D'\,(a - b\omega D')\right\} \quad \ldots (67')$$

Выраженіе для β должно имѣть знакъ $+$ при $a > 2b\omega D'$ и знакъ $-$ при $a < 2b\omega D'$. Выраженіе для d' въ вышеприведенной формѣ не имѣетъ двойного знака, но въ силу знаменателя оно дѣлается положительнымъ или отрицательнымъ одновременно съ β.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\chi} = \pm \frac{4\pi}{a - 2b\omega D'}\sqrt{\frac{1}{2\omega}\left\{\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\omega D')^2]\,(1 + D'^2)} - b\omega - D'\,(a - b\omega D')\right\}} \ldots (17'')$$

$$v = \frac{\omega}{\chi} = \pm \frac{2}{a - 2b\omega D'}\sqrt{\frac{\omega}{2}\left\{\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\omega D')^2]\,(1 + D'^2)} - b\omega - D'\,(a - b\omega D')\right\}} \ldots (22'')$$

Передъ дробями въ выраженіяхъ λ и v нужно ставить знакъ $+$, если $a > 2b\omega D'$, и знакъ $-$, если $a < 2b\omega D'$.

$$\gamma = \beta + \chi\frac{\alpha}{\omega} = \chi\,(d' + D') = \sqrt{\frac{\omega\,(1 + D'^2)}{2}\left\{\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\omega D')^2]\,(1 + D'^2)} - b\omega + D'\,(a - b\omega D')\right\}} \ldots (19'')$$

$$\delta = 2\pi\left(\frac{\beta}{\chi} + \frac{\alpha}{\omega}\right) = 2\pi\,(d' + D') = \frac{2\pi}{a - 2b\omega D'}\left\{\sqrt{[b^2\omega^2 + (a - b\omega D')^2]\,(1 + D'^2)} - b\omega\,(1 + D'^2)\right\} \ldots (21^{\mathrm{IV}})$$

Какъ мы уже знаемъ, величина χ можетъ измѣняться отъ нуля до безконечности, а $\beta^2 < \chi^2$. Отсюда слѣдуетъ, что $d'^2 < 1$. Такъ какъ кромѣ того всегда $D' < 1$, то значитъ $\delta < 4\pi$. Что касается величинъ γ, λ и v, то онѣ могутъ измѣняться въ широкихъ предѣлахъ. Подробное изслѣдованіе всѣхъ этихъ измѣненій не входитъ въ задачу настоящей статьи.

$$\xi = \omega T + \varphi$$

$$\left.\begin{aligned} F_\mu &= -A\omega\chi\sqrt{1 + D'^2}\sqrt{1 + d'^2 + \frac{2d'}{\chi r} + \frac{1}{\chi^2 r^2}}\,\frac{e^{-\gamma r}}{r}\sin\theta\, e^{-D'\omega T}\sin(\omega T + \varphi + \gamma_\mu) \\ \operatorname{tg}\gamma_\mu &= \frac{-d' + D' - \dfrac{1}{\chi r}}{1 + d' D' + \dfrac{D'}{\chi r}}\,; \end{aligned}\right\} \ldots (47'')$$

$$\left.\begin{aligned} (F_k)_r &= 2A\mu\,\frac{\omega^2}{\chi}\,\frac{1 + D'^2}{1 + d'^2}\sqrt{1 + d'^2 + \frac{2d'}{\chi r} + \frac{1}{\chi^2 r^2}}\,\frac{e^{-\gamma r}}{r^2}\cos\theta\, e^{-D'\omega T}\sin(\omega T + \varphi + \gamma_r) \\ \operatorname{tg}\gamma_r &= \frac{[1 - D'^2 - 2D'd'](1 + d'^2) + \dfrac{2}{\chi r}[(1 - D'^2)\,d' + (1 - d'^2)\,D']}{-\left\{[(1 - D'^2)\,d' + 2D'](1 + d'^2) + \dfrac{1}{\chi r}[4D'd' - (1 - D'^2)(1 - d'^2)]\right\}} \end{aligned}\right\} \ldots (50'')$$

$$\left.\begin{aligned}(F_k)_{\perp r} &= A\mu\omega^2 \frac{1+D'^2}{1+d'^2} \sqrt{(1+d'^2)^2 + \frac{2d'}{\chi r}(1+d'^2) + \frac{3d'^2-1}{\chi^2 r^2} + \frac{2d'}{\chi^3 r^3} + \frac{1}{\chi^4 r^4}}\, \frac{e^{-\gamma r}}{r} \sin\theta\, e^{-D'\omega T} \sin(\omega T + \varphi + \gamma_\perp) \\ \operatorname{tg}\gamma_\perp &= \frac{2D'(1+d'^2)^2 - \frac{1}{\chi r}\left\{[(1-D'^2)-2D'd'](1+d'^2) + \frac{2}{\chi r}[(1-D'^2)d' + (1-d'^2)D']\right\}}{(1-D'^2)(1+d'^2)^2 + \frac{1}{\chi r}\left\{[(1-D'^2)d' + 2D'](1+d'^2) + \frac{1}{\chi r}[4D'd' - (1-D'^2)(1-d'^2)]\right\}}\end{aligned}\right\}\ (51'')$$

$$\sin^2\theta = \frac{C'\, e^{d'\chi r}}{\left\{[(1-D'^2)d' + 2D'](1+d'^2) + \frac{1}{\chi r}[4D'd' - (1-D'^2)(1-d'^2)]\right\}\sin(\omega t - \chi r + \varphi) - \left\{[(1-D'^2) - 2D'd'](1+d'^2) + \frac{2}{\chi r}[(1-D'^2)d' + (1-d'^2)D']\right\}\cos(\omega t - \chi r + \varphi)} \ldots (55''')$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{A^2\mu\chi\omega^3}{3}\frac{(1+D'^2)^{\frac{3}{2}}}{1+d'^2}\sqrt{1+d'^2+\frac{2d'}{\chi r}+\frac{1}{\chi^2 r^2}}\sqrt{(1+d'^2)^2 + \frac{2d'}{\chi r}(1+d'^2) + \frac{3d'^2-1}{\chi^2 r^2} + \frac{2d'}{\chi^3 r^3} + \frac{1}{\chi^4 r^4}}\cdot e^{-2\gamma r}\cdot$$
$$\cdot e^{-2D'\omega T}\cdot[\cos(\gamma_\mu - \gamma_\perp) - \cos(2\omega T + 2\varphi + \gamma_\mu + \gamma_\perp)] \ldots (61'')$$

$$E_{k\frac{\tau}{2}} = \frac{A^2\mu\chi\omega^2}{6}\frac{(1+D'^2)^{\frac{3}{2}}}{1+d'^2}\sqrt{1+d'^2+\frac{2d'}{\chi r}+\frac{1}{\chi^2 r^2}}\sqrt{(1+d'^2)^2 + \frac{2d'}{\chi r}(1+d'^2) + \frac{3d'^2-1}{\chi^2 r^2} + \frac{2d'}{\chi^3 r^3} + \frac{1}{\chi^4 r^4}}\cdot e^{-2\gamma r}\cdot$$
$$\cdot\left[1 - e^{-2k\pi D'}\right]\cdot\left[\frac{\cos(\gamma_\mu - \gamma_\perp)}{D'} + \frac{\sin(2\varphi + \gamma_\mu + \gamma_\perp) - D'\cos(2\varphi + \gamma_\mu + \gamma_\perp)}{1+D'^2}\right] \ldots (62')$$

$$E = \frac{A^2\mu\chi\omega^2}{6}\frac{(1+D'^2)^{\frac{3}{2}}}{1+d'^2}\sqrt{1+d'^2+\frac{2d'}{\chi r}+\frac{1}{\chi^2 r^2}}\sqrt{(1+d'^2)^2 + \frac{2d'}{\chi r}(1+d'^2) + \frac{3d'^2-1}{\chi^2 r^2} + \frac{2d'}{\chi^3 r^3} + \frac{1}{\chi^4 r^4}}\cdot e^{-2\gamma r}\cdot$$
$$\cdot\left[\frac{\cos(\gamma_\mu - \gamma_\perp)}{D'} + \frac{\sin(2\varphi + \gamma_\mu + \gamma_\perp) - D'\cos(2\varphi + \gamma_\mu + \gamma_\perp)}{1+D'^2}\right] \ldots (63')$$

Значенія коэффиціентовъ A и φ.

Для того, чтобы выяснить, какія численныя значенія должны имѣть коэффиціенты A и φ, разсмотримъ частный случай, именно, когда разсматриваемая точка находится весьма близко отъ вибратора, точнѣе сказать, когда χr весьма мало сравнительно съ единицей.

Формулы (47″), (50″) и (51″), выражающія проэкціи напряженій электрическаго и магнитнаго поля, приводятся къ слѣдующему виду [1]).

---

1) Дѣйствительно, при малыхъ значеніяхъ χr, имѣемъ:

$$e^{-\gamma r} = e^{-(d'+D')\chi r} = 1 - (d'+D')\chi r + \frac{(d'+D')^2}{2}\chi^2 r^2 \ldots;$$

$$\sqrt{1+d'^2+\frac{2d'}{\chi r}+\frac{1}{\chi^2 r^2}} = \frac{1}{\chi r}\left[1 + 2d'\chi r + (1+d'^2)\chi^2 r^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{\chi r}\left[1 + d'\chi r + \frac{1+d'^2}{2}\chi^2 r^2 - \frac{1}{8}(2d'\chi r + (1+d'^2)\chi^2 r^2)^2 + \ldots\right] = \frac{1}{\chi r}\left[1 + d'\chi r + \frac{1}{2}\chi^2 r^2 - \ldots\right].$$

$$\left.\begin{aligned} F_\mu &= -A\omega\sqrt{1+D'^2}\,\frac{\sin\theta}{r^2}\,e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi+\gamma_\mu) \\ \operatorname{tg}\gamma_\mu &= \frac{-1}{D'} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(47''')$$

$$\left.\begin{aligned} (F_k)_r &= 2A\mu\,\frac{\omega^2}{\chi^2}\,\frac{1+D'^2}{1+d'^2}\,\frac{\cos\theta}{r^3}\,e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi+\gamma_r) \\ \operatorname{tg}\gamma_r &= \frac{2\,[(1-D'^2)\,d'+(1-d'^2)\,D']}{-[4D'\,d'-(1-D'^2)(1-d'^2)]} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(50''')$$

$$\left.\begin{aligned} (F_k)_{\perp r} &= A\mu\,\frac{\omega^2}{\chi^2}\,\frac{1+D'^2}{1+d'^2}\,\frac{\sin\theta}{r^3}\,e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi+\gamma_\perp) \\ \operatorname{tg}\gamma_\perp &= \frac{-2\,[(1-D'^2)\,d'+(1-d'^2)\,D']}{4D'\,d'-(1-D'^2)(1-d'^2)} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(51''')$$

Подставляя значенія χ и d' изъ формулъ (15″) и (67′), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} F_\mu &= -A\omega\sqrt{1+D'^2}\,\frac{\sin\theta}{r^2}\,e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi+\gamma_\mu) \\ \operatorname{tg}\gamma_\mu &= \frac{-1}{D'} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(47^{\text{IV}})$$

Подставляя, получимъ формулу:

$$F_\mu = -A\omega\sqrt{1+D'^2}\,\frac{\sin\theta}{r^2}\left[1-D'\chi r+\frac{1+D'^2-d'^2}{2}\chi^2r^2-\ldots\right]e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi+\gamma_\mu)$$

изъ которой слѣдуетъ непосредственно формула (47‴). Подобнымъ же образомъ получается и формула (50‴).

Такъ какъ d' и D' не болѣе единицы, то, при малыхъ χr, ряды сходятся очень быстро. Поэтому ошибка, которую мы дѣлаемъ, пользуясь упрощенными формулами, приблизительно равна первому изъ отброшенныхъ членовъ; слѣдовательно, пренебрегая вторымъ и дальнѣйшими членами разложенія, мы сдѣлаемъ ошибку около $100\,D'\chi r\,\%$ при $D'\neq 0$ или около $50\,\chi^2r^2\,\%$ при $D'=0$.

Напр., формула (47‴) будетъ вѣрна съ точностью до 1% (при $D'=0{,}1$), если $\chi r=0{,}1$, т. е. r не болѣе $\frac{1}{63}$ доли длины волны.

Точно такъ же получимъ:

$$\sqrt{(1+d'^2)^2+\frac{2d'(1+d'^2)}{\chi r}+\frac{3d'^2-1}{\chi^2r^2}+\frac{2d'}{\chi^3r^3}+\frac{1}{\chi^4r^4}}=$$

$$=\frac{1}{\chi^2r^2}\left[1+2d'\chi r+(3d'^2-1)\chi^2r^2+2d'(1+d'^2)\chi^3r^3+(1+d'^2)^2\chi^4r^4\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\chi^2r^2}\left[1+d'\chi r+\frac{3d'^2-1}{2}\chi^2r^2-\frac{d'^2}{2}\chi^2r^2+\ldots\right]=\frac{1}{\chi^2r^2}\left[1+d'\chi r+\frac{2d'^2-1}{2}\chi^2r^2+\ldots\right].$$

Подставляя, получимъ:

$$(F_k)_{\perp r}=A\mu\,\frac{\omega^2}{\chi^2}\,\frac{1+D'^2}{1+d'^2}\,\frac{\sin\theta}{r^3}\cdot\left[1+d'\chi r+\frac{2d'^2-1}{2}\chi^2r^2+\ldots\right]e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi+\gamma_\perp).$$

Пренебрегая вторымъ членомъ разложенія, сдѣлаемъ ошибку около $100\,d'\chi r\,\%$ при $d'\neq 0$ или около $50\,\chi^2r^2\,\%$ при $d'=0$.

$$\left.\begin{aligned}(F_k)_r &= \frac{2A\mu\omega\sqrt{1+D'^2}}{\sqrt{b^2\omega^2+(a-b\omega D')^2}}\,\frac{\cos\theta}{r^3}\,e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi+\gamma_r)\\ \operatorname{tg}\gamma_r &= \frac{a}{-aD'+b\omega(1+D'^2)}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(50^{\mathrm{IV}})$$

$$\left.\begin{aligned}(F_k)_{\perp r} &= \frac{A\mu\omega\sqrt{1+D'^2}}{\sqrt{b^2\omega^2+(a-b\omega D')^2}}\,\frac{\sin\theta}{r^3}\,e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi+\gamma_\perp)\\ \operatorname{tg}\gamma_\perp &= \frac{-a}{aD'-b\omega(1+D'^2)}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(51^{\mathrm{IV}})$$

Съ другой стороны, напряженіе магнитнаго поля въ точкахъ, расположенныхъ весьма близко отъ вибратора, должно выражаться формулой [1]):

$$F_\mu = il\,\frac{\sin\theta}{r^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(68)$$

Отождествляя формулы (47^{IV}) и (68), напишемъ:

$$il = -A\omega\sqrt{1+D'^2}\,e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi+\gamma_\mu) = A\omega\,e^{-D'\omega T}\left[\cos(\omega T+\varphi)-D'\sin(\omega T+\varphi)\right]\ldots(69)$$

а такъ какъ $i = \frac{dq}{dt}$, то, интегрируя, получимъ:

$$ql = A\,e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(70)$$

Это означаетъ, что, при описываемомъ процессѣ распространенія волнъ, въ вибраторѣ происходитъ колебательное движеніе электричества по закону:

$$q = q_0\,e^{-D'\omega t}\sin(\omega t+\varphi),\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(71)$$

причемъ коэффиціентъ амплитуды колебаній электрическаго заряда равенъ:

$$q_0 = \frac{A}{l}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(72)$$

---

1) Дѣйствительно, магнитное поле въ какой-либо точкѣ создается, во первыхъ, токомъ, циркулирующимъ въ самомъ вибраторѣ, во вторыхъ, токами смѣщенія и проводимости, циркулирующими въ окружающей его средѣ. Эти токи смѣщенія и проводимости являются продоженіемъ тока вибратора и распредѣлены вполнѣ симметрично относительно его центра, т.-е. начала координатъ. Каждая пара такихъ токовъ создаетъ въ точкахъ, прилегающихъ къ вибратору, поля противоположнаго направленія, слѣдовательно, взаимно ослабляющія другъ друга. Поэтому съ небольшою погрѣшностью можно принять, что поле въ этихъ точкахъ зависитъ окончательно только отъ тока самого вибратора. Если же длина послѣдняго весьма мала, сравнительно съ длиной волны, то напряженіе поля можетъ быть выражено, согласно закону Лапласа-Біо-Савара, формулой (68).

Величина A есть, слѣдовательно, произведеніе изъ длины вибратора на коэффиціентъ амплитуды колеблющагося заряда [1]).

Что касается величины φ, то она опредѣляется по начальной фазѣ колебанія вибратора.

Если бы окружающая среда была идеальнымъ изоляторомъ, то передъ началомъ разряда въ этой средѣ, а также и въ вибраторѣ не существовало бы токовъ, а слѣд., и магнитнаго поля. Но такъ какъ среда обладаетъ проводимостью, то въ начальный моментъ времени въ ней уже имѣется нѣкоторое стаціонарное распредѣленіе токовъ. Точно также и вибраторъ не находится въ статическомъ состояніи, а пронизывается токомъ, сила котораго равна полной силѣ тока, идущаго въ окружающей средѣ.

Называя эту силу тока i_{in}, разность потенціаловъ между обѣими половинами вибратора V_{in}, полное сопротивленіе всей окружающей среды R, количество электричества на каждой половинѣ вибратора q_{in} и емкость вибратора C, можемъ написать равенства:

$$V_{in} = Ri_{in} \qquad (75)$$

$$q_{in} = CV_{in} \qquad (76)$$

Откуда:

$$q_{in} = RCi_{in} \qquad (77)$$

---

1) Къ этому же выводу придемъ изъ разсмотрѣнія электрическаго поля. Послѣднее создается тремя причинами: во первыхъ, зарядами самого вибратора, во вторыхъ, зарядами, разбросанными въ окружающей средѣ, и, въ третьихъ, электромагнитной индукціей. Если вибраторъ весьма малъ и на концахъ его въ данный моментъ находятся заряды $+q$ и $-q$, то проэкціи напряженія электрическаго поля, создаваемаго этими зарядами, будутъ:

$$(F_k)_r = \frac{2ql\cos\theta}{Kr^3} \qquad (73)$$

$$(F_k)_{\perp r} = -\frac{ql\sin\theta}{Kr^3} \qquad (74)$$

Вторая причина имѣетъ мѣсто лишь тогда, когда окружающая среда проводитъ, то-есть $a \neq 0$; въ идеальномъ изоляторѣ она отсутствуетъ. Третья причина всегда дѣйствуетъ, но поле, создаваемое ею, зависитъ отъ величины магнитной силы, а такъ какъ послѣдняя измѣняется обратно пропорціонально не кубамъ, а квадратамъ разстояній, то, при малыхъ разстояніяхъ, вліяніе этой причины ничтожно по сравненію съ первой причиной.

Поэтому, полагая въ формулахъ (50^{IV}) и (51^{IV}) a равнымъ нулю, пишемъ:

$$(F_k)_r = \frac{2A\cos\theta}{Kr^3} e^{-D'\omega T} \sin(\omega T + \varphi),$$

$$(F_k)_{\perp r} = \frac{A\sin\theta}{Kr^3} e^{-D'\omega T} \sin(\omega T + \varphi + \pi) = -\frac{A\sin\theta}{Kr^3} e^{-D'\omega T} \sin(\omega T + \varphi).$$

Отождествляя ихъ съ формулами (73) и (74), приходимъ къ выраженію:

$$ql = A e^{-D'\omega T} \sin(\omega T + \varphi),$$

которое тождественно съ (70).

Произведеніе RC можно замѣнить другимъ выраженіемъ, на основаніи общаго соотношенія:

$$RC = \frac{K}{4\pi\rho^{-1}} = \frac{b}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (78)$$

слѣдовательно, имѣемъ:

$$q_{in} = \frac{b}{a}\, i_{in} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$

Но по формуламъ (71) и (69) находимъ:

$$q_{in} = q_0 \sin\varphi,$$

$$i_{in} = \frac{A}{l}\, \omega\, [\cos\varphi - D' \sin\varphi].$$

Изъ этихъ формулъ, при посредствѣ уравненія (79), получаемъ:

$$q_0 \sin\varphi = \frac{b}{a} \frac{A}{l}\, \omega\, [\cos\varphi - D' \sin\varphi]$$

или, такъ какъ

$$A = q_0\, l,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b\omega}{a + b\omega D'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (80)$$

Слѣдуетъ замѣтить, что коэффиціентъ амплитуды q_0 не равенъ ни начальному [1]) количеству электричества, ни максимальному [2]), появляющемуся на половинкахъ вибратора во время колебаній.

Полагая $t = 0$ въ формулѣ (71), получимъ:

$$q_{in} = q_0 \sin\varphi = \frac{b\omega q_0}{\sqrt{b^2\omega^2 + (a + b\omega D')^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (81)$$

Дифференцируя же формулу (71), найдемъ, что максимальное значеніе q наступаетъ при

$$\operatorname{tg}(\omega T + \varphi) = \frac{1}{D'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (82)$$

$$\omega T = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b\omega(1 + D'^2) + aD'} \ldots\ldots\ldots\ldots (82')$$

и равно:

$$q_{\max} = \frac{q_0}{\sqrt{1 + D'^2}}\, e^{-D' \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b\omega(1 + D'^2) + aD'}} \ldots\ldots\ldots\ldots (83)$$

1) Это имѣло бы мѣсто въ случаѣ идеально изолирующей среды.
2) Такъ было бы въ случаѣ незатухающихъ колебаній.

Сравнивая три величины q_0, q_{in} и $q_{\max}$, получаемъ неравенство:

$$q_{in} < q_{\max} < q_0.$$

Выраженія для электрическаго и магнитнаго напряженія поля при весьма большомъ разстояніи отъ вибратора.

Пріемъ волнъ совершается обыкновенно на значительномъ разстояніи отъ вибратора. При этомъ формулы (47″), (50″) и (51″) принимаютъ болѣе простой видъ. А именно, полагая, что χr весьма велико, сравнительно съ единицей, получимъ [1]):

---

1) При большомъ χr имѣемъ:

$$\sqrt{1+d'^2+\frac{2d'}{\chi r}+\frac{1}{\chi^2 r^2}}=\sqrt{1+d'^2}\left[1+\frac{2d'}{1+d'^2}\frac{1}{\chi r}+\frac{1}{1+d'^2}\frac{1}{\chi^2 r^2}\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sqrt{1+d'^2}\left\{1+\frac{d'}{1+d'^2}\frac{1}{\chi r}+\frac{1}{2(1+d'^2)}\frac{1}{\chi^2 r^2}-\frac{1}{8}\left[\frac{2d'}{1+d'^2}\frac{1}{\chi r}+\frac{1}{1+d'^2}\cdot\frac{1}{\chi^2 r^2}\right]^2+\dots\right\}=$$

$$=\sqrt{1+d'^2}\left[1+\frac{d'}{1+d'^2}\frac{1}{\chi r}+\frac{1}{2(1+d'^2)^2}\cdot\frac{1}{\chi^2 r^2}+\dots\right].$$

Подставляя, получимъ:

$$F_\mu=-A\omega\chi\sqrt{1+D'^2}\sqrt{1+d'^2}\left[1+\frac{d'}{1+d'^2}\frac{1}{\chi r}+\frac{1}{2(1+d'^2)^2}\cdot\frac{1}{\chi^2 r^2}+\dots\right]\frac{e^{-\gamma r}}{r}\sin\theta\, e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi+\gamma_\mu).$$

Такъ какъ d' численно не болѣе единицы, то написанные ряды сходятся очень быстро, а потому, пренебрегая въ разложеніи всѣми членами, кромѣ перваго, сдѣлаемъ ошибку около $\frac{100\,d'}{\chi r}\,{}^0/_0$, при $d' \neq 0$ или около $\frac{50}{\chi^2 r^2}\,{}^0/_0$, при $d'=0$.

Напримѣръ, для того, чтобы величина F_μ, вычисленная по формулѣ (84), не отличалась численно отъ истиннаго значенія болѣе чѣмъ на $1^0/_0$, нужно, чтобы разстояніе r равнялось не менѣе, какъ 15 длинамъ волнъ (при $d'=1$). При $d'=0$ это достигается уже на разстояніи около $1^1/_4$ длины волны.

Подобнымъ же образомъ получается и выраженіе (85), для радіальной проэкціи напряженія электрическаго поля.

Для полученія формулы (86), разлагаемъ въ рядъ:

$$\sqrt{(1+d'^2)^2+\frac{2d'(1+d'^2)}{\chi r}+\frac{3d'^2-1}{\chi^2 r^2}+\frac{2d'}{\chi^3 r^3}+\frac{1}{\chi^4 r^4}}=(1+d'^2)\left[1+\frac{2d'}{1+d'^2}\cdot\frac{1}{\chi r}+\frac{3d'^2-1}{(1+d'^2)^2}\cdot\frac{1}{\chi^2 r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2d'}{(1+d'^2)^2}\frac{1}{\chi^3 r^3}+\frac{1}{(1+d'^2)^2}\cdot\frac{1}{\chi^4 r^4}\right]^{\frac{1}{2}}=(1+d'^2)\left[1+\frac{d'}{1+d'^2}\cdot\frac{1}{\chi r}-\frac{1-2d'^2}{2(1+d'^2)^2}\cdot\frac{1}{\chi^2 r^2}+\dots\right].$$

Подставляя, получимъ:

$$(F_k)_{\perp r}=A\mu\omega^2(1+D'^2)\left[1+\frac{d'}{1+d'^2}\cdot\frac{1}{\chi r}-\frac{2-5d'^2}{2(1+d'^2)^2}\cdot\frac{1}{\chi^2 r^2}+\dots\right]\frac{e^{-\gamma r}}{r}\sin\theta\, e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi+\gamma_\perp).$$

Отбрасывая второй и слѣдующіе члены разложенія, мы сдѣлаемъ ошибку при $d' \neq 0$ около $\frac{100\,d'}{\chi r}\,{}^0/_0$, а при $d'=0$ около $\frac{5}{\chi^2 r^2}\,{}^0/_0$.

$$\left.\begin{aligned} F_\mu &= -A\omega\chi\sqrt{1+D'^2}\sqrt{1+d'^2}\,\frac{e^{-\gamma r}}{r}\sin\theta\, e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi+\gamma_\mu) \\ \operatorname{tg}\gamma_\mu &= \frac{-d'+D'}{1+d'D'} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(84)$$

$$\left.\begin{aligned} (F_k)_r &= 2A\mu\,\frac{\omega^2}{\chi}\,\frac{1+D'^2}{\sqrt{1+d'^2}}\,\frac{e^{-\gamma r}}{r^2}\cos\theta\, e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi+\gamma_r) \\ \operatorname{tg}\gamma_r &= \frac{1-D'^2-2D'd'}{-[(1-D'^2)d'+2D']} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(85)$$

$$\left.\begin{aligned} (F_k)_{\perp r} &= A\mu\omega^2(1+D'^2)\,\frac{e^{-\gamma r}}{r}\sin\theta\, e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi+\gamma_\perp) \\ \operatorname{tg}\gamma_\perp &= \frac{2D'}{1-D'^2} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(86)$$

Съ перваго же взгляда видно, что магнитная сила и тангенціальная проэкція электрической силы при большихъ разстояніяхъ отъ вибратора уменьшаются, измѣняясь обратно пропорціонально первой степени разстоянія, а радіальная проэкція электрической силы уменьшается, измѣняясь обратно пропорціонально квадрату этого разстоянія. Значитъ, при большихъ разстояніяхъ радіальной составляющей можно пренебрегать, т.-е. считать, что электрическая сила направлена перпендикулярно [1]) линіи r.

Подставляя въ коэффиціенты амплитуды значенія χ и d' по формуламъ (15″) и (67′), получимъ:

$$F_\mu = -A\omega\sqrt{1+D'^2}\sqrt{\omega\sqrt{[b^2\omega^2+(a-b\omega D')^2]}\,(1+D'^2)}\,\frac{e^{-\gamma r}}{r}\sin\theta\, e^{-D'\omega T}\sin(\omega T+\varphi+\gamma_\mu)\ldots(84')$$

---

1) Отношеніе коэффиціентовъ амплитуды тангенціальной и радіальной, составляющихъ напряженія электрическаго поля, равно:

$$\frac{\chi\sqrt{1+d'^2}\,r}{2}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1+d'^2}}{2}\,\chi r\operatorname{tg}\theta.$$

Такъ какъ d'^2 заключается въ предѣлахъ 0 и 1, то это отношеніе заключается въ предѣлахъ:

$$\frac{1}{2}\,\chi r\operatorname{tg}\theta \quad\text{и}\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,\chi r\operatorname{tg}\theta.$$

Въ предшествующихъ примѣчаніяхъ было выяснено, что формулы (84), (85) и (86) при $d' \neq 0$ примѣнимы тогда, когда χr не менѣе 100. Если поставить еще условіемъ, чтобы разсматриваемое отношеніе было также не менѣе 100, то получимъ:

$$\operatorname{tg}\theta \geqslant \sqrt{2}$$

$$\theta \geqslant 55^\circ.$$

Это значитъ, что, съ точностью до 1%, электрическая сила можетъ считаться перпендикулярной къ направленію r даже при отклоненіи на 35° отъ экваторіальной плоскости вибратора.

$$(F_k)_r = \frac{2A\mu\omega^2(1+D'^2)}{\sqrt{\omega\sqrt{[b^2\omega^2+(a-b\omega D')^2](1+D'^2)}}} \cdot \frac{e^{-\gamma r}}{r^2} \cos\theta \, e^{-D'\omega T} \sin(\omega T + \varphi + \gamma_r) \ldots\ldots\ldots (85')$$

$$(F_k)_{\perp r} = A\mu\omega^2 (1 + D'^2) \frac{e^{-\gamma r}}{r} \sin\theta \, e^{-D'\omega T} \sin(\omega T + \varphi + \gamma_\perp) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (86')$$

Выраженіе количества энергіи, доходящей до отдаленныхъ точекъ пространства.

Полагая χr весьма большимъ, сравнительно съ единицей, въ формулахъ (61″), (62′) и (63′), получимъ слѣдующія выраженія для скорости теченія энергіи, для количества ея, протекающаго впродолженіе k полуперіодовъ, и для количества ея, протекающаго впродолженіе всего времени разряда вибратора.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{A^2\mu\chi\omega^3}{3}(1+D'^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+d'^2}\, e^{-2\gamma r - 2D'\omega T}\left[\cos(\gamma_\mu - \gamma_\perp) - \cos(2\omega T + 2\varphi + \gamma_\mu + \gamma_\perp)\right] \ldots (87)$$

$$E_{k\frac{\tau}{2}} = \frac{A^2\mu\chi\omega^2}{6}(1+D'^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+d'^2}\cdot e^{-2\gamma r}\left[1 - e^{-2k\pi D'}\right]\left[\frac{\cos(\gamma_\mu-\gamma_\perp)}{D'} + \frac{\sin(2\varphi+\gamma_\mu+\gamma_\perp) - D'\cos(2\varphi+\gamma_\mu+\gamma_\perp)}{1+D'^2}\right] (88)$$

$$E = \frac{A^2\mu\chi\omega^2}{6}(1+D'^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+d'^2}\, e^{-2\gamma r}\left[\frac{\cos(\gamma_\mu-\gamma_\perp)}{D'} + \frac{\sin(2\varphi+\gamma_\mu+\gamma_\perp) - D'\cos(2\varphi+\gamma_\mu+\gamma_\perp)}{1+D'^2}\right] (89)$$

Подставивъ значенія тригонометрическихъ величинъ [1]), стоящія въ скобкахъ, приведемъ два послѣднія выраженія къ виду:

---

1) Изъ формулъ (84), (86) и (80) получаемъ:

$$\sin\gamma_\mu = \frac{D' - d'}{\sqrt{(1+D'^2)(1+d'^2)}}; \qquad \cos\gamma_\mu = \frac{1 + D'd'}{\sqrt{(1+D'^2)(1+d'^2)}};$$

$$\sin\gamma_\perp = \frac{2D'}{1+D'^2}; \qquad \cos\gamma_\perp = \frac{1 - D'^2}{1+D'^2};$$

$$\sin\varphi = \frac{b\omega}{\sqrt{b^2\omega^2+(a+b\omega D')^2}}; \qquad \cos\varphi = \frac{a + b\omega D'}{\sqrt{b^2\omega^2+(a+b\omega D')^2}};$$

изъ нихъ получаемъ:

$$\cos(\gamma_\mu - \gamma_\perp) = \frac{1 - D'd'}{\sqrt{(1+D'^2)(1+d'^2)}};$$

$$\sin(\gamma_\mu + \gamma_\perp) = \frac{D'(3-D'^2) - d'(1-3D'^2)}{(1+D'^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+d'^2}};$$

$$\cos(\gamma_\mu + \gamma_\perp) = \frac{1 - 3D'^2 + d'D'(3-D'^2)}{(1+D'^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+d'^2}}.$$

$$\cos 2\varphi = \frac{(a+b\omega D')^2 - b^2\omega^2}{b^2\omega^2 + (a+b\omega D')^2};$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2b\omega(a+b\omega D')}{b^2\omega^2 + (a+b\omega D')^2}.$$

$$E_{k\frac{\tau}{2}} = \frac{A^2 \mu\chi\omega^2}{6D'} \left\{1 + D'^2 + \frac{2aD' \left[b\omega\,(1 + D'^2) + a\,(D' - d')\right]}{b^2\,\omega^2 + (a + b\omega D')^2}\right\} e^{-2\gamma r} \left[1 - e^{-2k\pi D'}\right] \ldots (88')$$

$$E = \frac{A^2 \mu\chi\omega^2}{6D'} \left\{1 + D'^2 + \frac{2aD' \left[b\omega\,(1 + D'^2) + a\,(D' - d')\right]}{b^2\,\omega^2 + (a + b\omega D')^2}\right\} e^{-2\gamma r} \ldots\ldots\ldots\ldots (89')$$

Легко убѣдиться, что выраженіе, стоящее въ фигурныхъ скобкахъ, всегда положительно, а потому положительны и сами величины $E_{k\frac{\tau}{2}}$ и E. Это означаетъ, что энергія уносится въ пространство отъ вибратора, излучается имъ. Если бы среда не обладала проводимостью, т.-е. γ равнялось нулю, то количество энергіи, проходящее черезъ какую-угодно сферу, оставалось бы однимъ и тѣмъ же, независимо отъ радіуса этой сферы. Но, при наличіи проводимости, эти количества уменьшаются по мѣрѣ удаленія отъ вибратора: разница между ними расходуется въ средѣ на необратимые процессы, поглощается средою.

Все вышеизложенное относится къ самому общему случаю распространенія волнъ вибраторомъ. Къ частнымъ случаямъ перейдемъ, сдѣлавъ соотвѣтствующія добавочныя предположенія. Такъ, напримѣръ условіе:

$$D' = 0$$

опредѣляетъ случай распространенія волнъ, создаваемыхъ незатухающими колебаніями;

$$a = 0$$

опредѣляетъ случай распространенія волнъ въ идеальномъ изоляторѣ (случай Пирсонъ и Ли);

$$a = 0 \quad \text{и} \quad D' = 0$$

опредѣляетъ случай распространенія въ идеальномъ изоляторѣ волнъ, создаваемыхъ незатухающими колебаніями (случай Герца).

Детальный разборъ явленія я оставляю до слѣдующей статьи.

Подставляя эти значенія, получимъ:

$$\frac{\cos(\gamma_\mu - \gamma_\perp)}{D'} + \frac{\sin(2\varphi + \gamma_\mu + \gamma_\perp) - D' \cos(2\varphi + \gamma_\mu + \gamma_\perp)}{1 + D'^2} =$$

$$= \frac{a^2\,(1 + D'^2 + 2D'(D' - d')) + 4ab\omega D'(1 + D'^2) + b^2\,\omega^2\,(1 + D'^2)^2}{D'\,(1 + D'^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + d'^2}\,\left[b^2\,\omega^2 + (a + b\omega D')^2\right]} =$$

$$= \left\{1 + D'^2 + \frac{2D'\,a\left[b\omega\,(1 + D'^2) + a\,(D' - d')\right]}{b^2\,\omega^2 + (a + b\omega D')^2}\right\} \cdot \frac{1}{D'\,(1 + D'^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + d'^2}}.$$

Наконецъ, поставляя это выраженіе въ формулы (88) и (89), получаемъ (88′) и (89′).

А. Петровскій.

ОПЕЧАТКИ.

Стран.:	*Строка:*	*Напечатано:*	*Должно читать:*
18	7 св.	$\frac{3}{r^2}(\chi^2 + 5\beta^2) + \frac{6\beta}{r} + \frac{3}{r^2}$	$\frac{3}{r^2}\left(\chi^2 + 5\beta^2 + \frac{6\beta}{r} + \frac{3}{r^2}\right)$
31	3 сн.	$\frac{2 - 5d'^2}{2(1 + d'^2)^2}$	$\frac{1 - 2d'^2}{2(1 + d'^2)^2}$
31	1 »	$\frac{5}{\chi^2 r^2}\ \%$	$\frac{50}{\chi^2 r^2}\ \%$

49

0 - 15к

~~Цѣна: 45 коп.; Prix: 1 Mrk.~~

Продается у коммиссіонеровъ Императорской Академіи Наукъ:
И. И. Глазунова и К. Л. Риккера въ С.-Петербургѣ, Н. П. Карбасникова въ С.-Петерб., Москвѣ, Варшавѣ и Вильнѣ, Н. Я. Оглоблина въ С.-Петербургѣ и Кіевѣ, Н. Киммеля въ Ригѣ, Фоссъ (Г. В. Зоргенфрей) въ Лейпцигѣ, Люзакъ и Комп. въ Лондонѣ.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des Sciences:
J. Glasounof et C. Ricker à St.-Pétersbourg, N. Karbasnikof à St.-Pétersbourg, Moscou, Varsovie et Vilna, N. Oglobline à St.-Pétersbourg et Kief, N. Kymmel à Riga, Voss' Sortiment (G. W. Sorgenfrey) à Leipsic, Luzac & Cie à Londres.