Российская академия наук
Институт прикладной физики

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ' 2012

Нижний Новгород
ИПФ РАН
2013

УДК 534.222.2
ББК 22.312я4
Н49

Издано по решению редакционно-издательского совета
Института прикладной физики РАН

Ответственные редакторы:
академик РАН *А. Г. Литвак,*
доктор физико-математических наук *В. И. Некоркин*

Рецензенты:
член-корр. РАН *Д. И. Трубецков*
доктор физико-математических наук *С. Н. Гурбатов*

Н49 **Нелинейные волны' 2012** / Рос. акад. наук, Ин-т приклад. физики ; отв. ред. А. Г. Литвак, В. И. Некоркин. — Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. — 464 с.

ISBN 978-5-8048-0080-3

В сборник включены статьи, написанные по материалам лекций, прочитанных на XVI школе по нелинейным волнам (Нижний Новгород, март 2012 г.). В работах обсуждаются разнообразные аспекты нелинейной науки — процессы в геофизике, в астрофизике и космологии, в квантовых системах и конденсированных средах.

Книга рассчитана на специалистов, занимающихся изучением нелинейных явлений, а также на аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

УДК 534.222.2
ББК 22.312я4

ISBN 978-5-8048-0080-3

СОДЕРЖАНИЕ

Физика экстремальных световых полей

Динамика и структуры в квантовых системах и конденсированных средах

Вечерние лекции

Предисловие

В настоящий сборник вошли обзорные и оригинальные статьи, написанные по материалам лекций, прочитанных на научной школе «Нелинейные волны — 2012». Эта, уже шестнадцатая по счету, школа представила срез наиболее актуальных и прорывных достижений нелинейной колебательно-волновой физики, полученных за последние два года. Основу программы школы составили семь циклов лекций:

- современные проблемы теории нелинейных колебаний и волн,
- нелинейные процессы в геофизике,
- нелинейные явления в астрофизике и космологии,
- физика экстремальных световых полей,
- нелинейная динамика живых систем,
- нелинейная динамика квантовых систем,
- нелинейные структуры в конденсированных средах.

Одной из ключевых тематик в программе школы были нелинейные процессы в окружающей среде. Актуальность этого направления нелинейной физики усиливается год от года. Связано это, в первую очередь, с исследованиями изменения климата и необходимостью прогнозирования природных катаклизмов. В этом лекционном цикле рассматривались различные подходы к исследованию и моделированию климатических процессов. В частности, были прочитаны лекции, посвященные аномалии арктической осцилляции, которая, по-видимому, связана с аномально холодными зимами над континентами Северного полушария.

Впервые в программе школы была выделена в отдельные циклы тематика, посвященная нелинейным структурам в конденсированных средах и нелинейной динамике квантовых систем. В них были изложены математические аспекты исследования таких систем и рассмотрены особенности моделирования разнообразных одномерных, двумерных и трехмерных магнитных структур, перспективные схемы получения перепутанных двухфотонных состояний, а также вопросы достижения максимальной степени перепутанности, основные принципы лазерного охлаждения и его применения для создания стандартов времени и для моделирования высокотемпературных сверхпроводников, поведения материи в нейтронных звездах и т. д.

В лекционном цикле «Физика экстремальных световых полей» был дан обзор работ по нелинейному поведению волн при формировании временной и пространственной структуры излучения вследствие вынужденного комбинационного и мандельштам-бриллюэновского рассеяния лазерных пучков с широкими частотным и угловым спектрами, представлены последние результаты исследований по нестабильности вакуума в сильных электромагнитных полях. Были прочитаны лекции о суперконтинууме — когерентном электромагнитном излучении со сверхшироким спектром — и о пространственном структурообразовании и динамике паттернов при нелинейном взаимодействии света с фоторефрактивными кристаллами.

В цикле лекций «Нелинейные явления в астрофизике и космологии» были затронуты проблемы, в отношении которых в последние годы удалось достичь существенного прогресса. Например, квазисферическая аккреция на нейтронные звезды в режиме дозвукового оседания, возможные механизмы набора массы у предшественников сверхновых типа Ia и их верификация, космические струны и т. д.

В лекционном цикле, посвященном нелинейной динамике живых систем, были рассмотрены теоретические и экспериментальные исследования нейронных структур мозга.

Традиционно в программе школы присутствовал лекционный курс по современным проблемам теории нелинейных колебаний и волн. Были прочитаны лекции, посвященные физике нелинейных волн, сложным динамическим сетям и задачам гетероклинической динамики, основам тензорных вычислительных методов и их применению в самых разных приложениях и т. д.

Лекционные блоки были дополнены работой семинаров по соответствующим направлениям. Научная молодежь принимала активное участие в работе школы. Молодые ученые сделали более 40 устных и более 80 стендовых докладов. Жюри, в состав которого вошли ведущие российские и зарубежные ученые, выделило 9 лучших стендовых докладов. На этой школе среди слушателей был проведен конкурс по решению задач по нелинейной динамике и по его итогам определены победители, которых наградили призами.

Впервые в сборнике «Нелинейные волны» представлены дополнительные, так называемые вечерние, лекции, которые вызвали большой интерес у слушателей.

Наряду с вошедшими в этот сборник лекциями, на школе были также прочитаны лекции Е. А. Мареева «Некоторые проблемы и нелинейные модели теории климата», Э. М. Базеляна «Нелинейные проблемы моделирования молний», А. В. Слюняева «Как предсказать волну-убийцу», В. С. Афраймовича «Математические задачи гетероклинической динамики» и «Сложные динамические сети», Е. Е. Тыртышникова «Будущее вычислительной математики: от векторов и матриц к тензорам», А. В. Турлапова «Лазерное охлаждение вещества и физика при сверхнизких температурах», К. В. Анохина «Мозг и память: результаты и перспективы исследований» и «Мозг и сознание: результаты и перспективы исследований», М. И. Рабиновича «Динамика информационных потоков человеческого мозга», А. Э. Дитятева «Внеклеточный матрикс мозга и синаптическая пластичность» и лекция N. Abraham «Pattern Formation and Spatio-Temporal Dynamics in Nonlinear Optical Systems». Многие материалы уже опубликованы ранее в монографиях и обзорных статьях.

В заключение мы выражаем признательность авторам за предоставление материалов в сборник.

А. Г. Литвак, В. И. Некоркин

Нелинейные процессы в геофизике

НЕЛИНЕЙНЫЙ ОТКЛИК АТМОСФЕРНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ НА ТАЯНИЕ АРКТИЧЕСКИХ ЛЬДОВ — ВОЗМОЖНАЯ ПРИЧИНА ХОЛОДНЫХ ЗИМ XXI ВЕКА

В. А. Семенов

1. Аномально холодные зимы XXI века

Среднегодовая приземная температура Северного полушария выросла на 1 °С с начала XX века. Потепление было неравномерным и значительно ускорилось в последние десятилетия: за последние 40 лет, с температурного минимума 1970-х по настоящее время, произошло потепление на 0,7 °С. Интересной особенностью температурных изменений является замедление темпов потепления в первое десятилетие XXI века. Хотя все среднегодовые значения температурных аномалий для Северного полушария в XXI веке превышают предшествующие значения за период инструментальных наблюдений с середины XIX века (по данным GISS [1]), рост температуры Северного полушария за первое десятилетие XXI века составил всего 0,1 °С (глобальной 0,05 °С). Пространственная картина этих изменений характеризовалась некоторым похолоданием над континентами Северного полушария преимущественно в зимний период, контрастирующим с сильным потеплением в Арктике (0,55 °С в среднем для области севернее 60° с. ш.).

Среднее за десятилетие похолодание над континентами Северного полушария стало следствием нескольких сильных отрицательных аномалий в зимний период: зим 2003, 2006 и 2010 годов (следует также отметить и аномалию 2012 года вследствие холодных февральских температур). Если аномалия 2003 года была воспринята как случайное исключительное событие на фоне продолжающегося с 1980-х годов теплого периода, зима 2005/2006 года поставила вопрос о том, являются ли подобные события случайными, и каковы их механизмы на фоне продолжающегося потепления, которое, согласно модельным оценкам, должно быть наиболее сильным в высоких широтах Северного полушария. Зимой 2005/2006 года среднемесячные аномалии приповерхностной температуры воздуха (ПТВ) достигали –4 °С в Европе и –10 °С в Центральной Сибири по данным реанализа NCEP/NCAR [2]. Данная зима стала самой холодной во многих европейских странах за последние три десятилетия. Аномальные холода и сильные снегопады были отмечены также в Восточной Азии.

Зимой 2005/2006 года не наблюдалось аномально низкого индекса Северо-Атлантического колебания (САК), негативная фаза которого приводит к отрицательным температурным аномалиям над Европой и Сибирью [3]. Явление Эль-Ниньо также может приводить к похолоданию в Западной Евразии [4—6]. Однако ни зимой 2005/2006 года, ни предшествующей зимой 2004/2005 года не было зарегистрировано явления Эль-Ниньо. Детально метеорологические характеристики аномальной зимы 2005/2006 года рассматриваются в работе [7].

В то же время, именно зимой 2005/2006 года, произошло особенно сильное (скачкообразное) уменьшение площади льда в Восточной Арктике (Баренцевом и Карском морях) [8]. Интенсивные потоки турбулентного тепла, поднимающиеся со свободной ото льда поверхности океана в атмосферу в зимний период, вызывают как локальные аномалии приповерхностной температуры над источником тепла, так и изменения крупномасштабной атмосферной циркуляции, приводящие к соответствующим температурным аномалиям в масштабах всего полушария. Это позволяет предположить, что похолодание над континентами могло быть связано с уменьшением площади ледового покрова в Восточной Арктике.

Влияние аномалий арктического ледового покрова ранее исследовалось в ряде работ с использованием глобальных моделей общей циркуляции атмосферы (МОЦА) (например, [9—13]). В этих работах отмечалось ожидаемое значительное потепление и уменьшение давления воздуха на уровне моря над областями с уменьшенной площадью льда, некоторое потепление в прилегающих районах, а также изменения крупномасштабной атмосферной циркуляции, схожие с отрицательной фазой САК, но существенно меньшие по амплитуде в сравнении с межгодовыми САК и его декадными трендами [10, 13].

Ситуация с аномально теплой Арктикой, контрастирующей с похолоданием над северной частью континентов Северного полушария, в 2005/2006 году не была беспрецедентным явлением. Аналогичные события наблюдались, например, в декабре 1984 года или феврале 1976 года (рис. 1, *б*, *в*). Общим для таких событий являлось значительное похолодание над Евразией на фоне аномально теплых (превышающих на 10 °С среднеклиматические значения) температур над Центральной Арктикой, Баренцевым и Карским морями. Следует отметить, что в некоторых работах также отмечалось образование положительной аномалии давления над областью с уменьшением ледового покрова [14, 15]. Анализ эмпирических данных за период реанализа NCEP/NCAR (1948—2010 годы) также указывает на связь отрицательных аномалий концентрации льда в Атлантическом секторе Арктики и температуры над Евразией, хотя в целом статистически незначимую [16].

Примеры аномальных холодных зим над северными континентами, контрастирующими с аномально теплой Арктикой, позволяют предположить, что причиной таких зим может быть аномалия ледового покрова некой определенной величины. Возможно, что проводившиеся ранее эксперименты с численными моделями атмосферы использовали предписанные аномалии концентрации (или границ) ледового покрова, лежащие вне нужного диапазона. Для того чтобы выявить возможный нелинейный эффект, отклик атмосферной циркуляции на изменения концентрации морских льдов исследовался во всем возможном диапазоне изменений в Баренцевом и Карском морях, от 1 до 100 % [17].

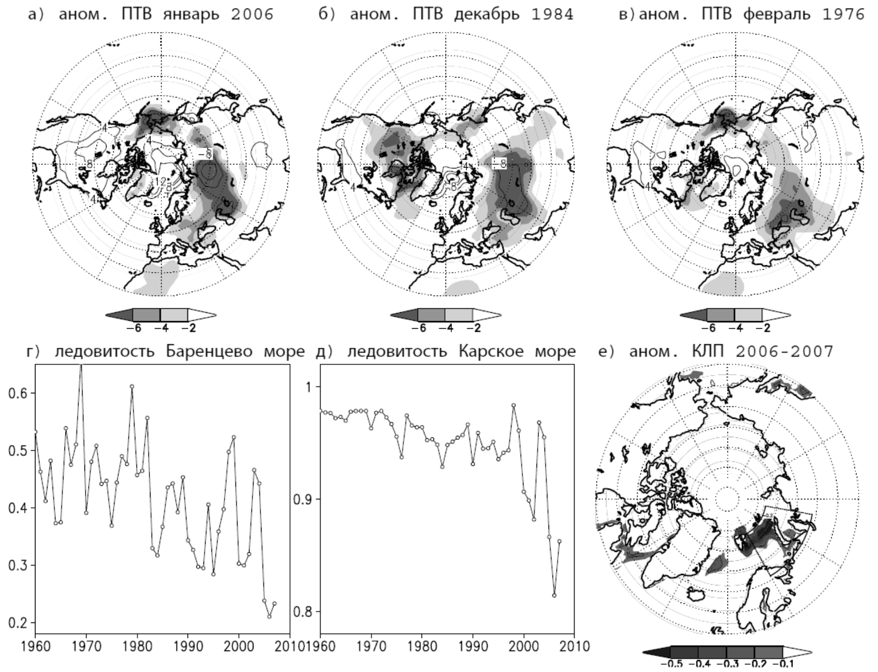


Рис. 1. Аномалии среднемесячной ПТВ (в °C) относительно периода 1948—2006 годов для января 2006-го (*а*), декабря 1984-го (*б*) и февраля 1976 года (*в*) по данным NCEP. Средняя ледовитость (часть моря, покрытая льдом, в долях единицы) для зимнего периода (декабрь — февраль) в регионе Баренцева моря (30—60° в. д., 70—80° с. ш.) (*г*) и западного Карского моря (60—80° в. д., 70—80° с. ш.) (*д*). Аномалии ледовитости, осредненные за две зимы (2006 и 2007 годов) относительно периода 1981—2000 годов (*е*); выделенный сектор 30—60° в. д., 65—80° с. ш. обозначает участок, в котором изменялись концентрации ледового покрова (от 100 до 1 %) в зимний период (с ноября по апрель) в шести численных экспериментах с МОЦА ECHAM5. Положительные аномалии температуры отмечены темной штриховкой, отрицательные — светлой

2. Описание модели общей циркуляции атмосферы и численных экспериментов

В численных экспериментах применялась МОЦА ECHAM5 Метеорологического института Макса Планка (Гамбург, Германия). Это спектральная модель, использующая современные параметризации мезомасштабных физических процессов. Подробное описание модели приведено в отчете [18]. Данная версия модели имела горизонтальное спектральное разрешение T42, приблизительно соответствующее размерам модельной ячейки 2,8×2,8° широты/долготы и 19 вертикальных уровней.

Было проведено шесть численных экспериментов, каждый длительностью 100 лет, с предписанным годовым ходом (климатологией) нижних граничных условий (температура поверхности океана и концентрации ледового покрова). Для граничных условий использовались данные проекта по сравнению атмосферных моделей AMIP II [19] (http://www-pcmdi.llnl.gov/projects/amip). Во всех шести экспериментах использовался один и тот же годовой ход температуры поверхности океана, составленный из данных для зимы 2005/2006 года. Для температуры поверхности океана с сентября по декабрь были использованы данные 2005 года, с января по май — данные 2006 года, с июня по август — средние значения для 2005 и 2006 годов (анализировались только зимние месяцы). Концентрации морского льда во всех экспериментах были одинаковыми, соответствующими средним значениям (климатологии) за период 1981—2006 годов, за исключением региона, соответствующего Баренцеву и западной части Карского морей (30—80° в. д., 65—80° с. ш. — см. рис. 1). В этом регионе концентрации морского льда были однородно (во всех модельных ячейках, принадлежащих данному сектору) изменены на 1, 20, 40, 60, 80 и 100 % в шести соответствующих экспериментах для зимней половины года, с ноября по апрель.

Таким образом, единственным отличием граничных условий в анализировавшихся численных экспериментах с МОЦА ECHAM5 были различные концентрации морского льда в Баренцевом море и западной части Карского моря (30—80° в. д., 65—80° с. ш.) в зимнюю половину года, с ноября по апрель. В каждом эксперименте использовался один и тот же годовой ход для температуры поверхности океана и концентрации морского льда. В представленных далее результатах приведены осредненные за 100 лет значения.

3. Результаты численных экспериментов

Важным результатом проведенных модельных экспериментов является нелинейный отклик ПТВ (средней за 100 лет) и зонального ветра в нижней тропосфере, проиллюстрированного значениями на уровне 850 гПа (U850) на изменения концентрации морского льда в зимние месяцы. Изменения температуры и зонального ветра связаны между собой. Это хорошо видно на рис. 2, иллюстрирующем зависимость ПТВ и U850 над Европейским регионом (10—30° в. д., 45—55° с. ш.) от концентрации ледового покрова для декабря, января и февраля.

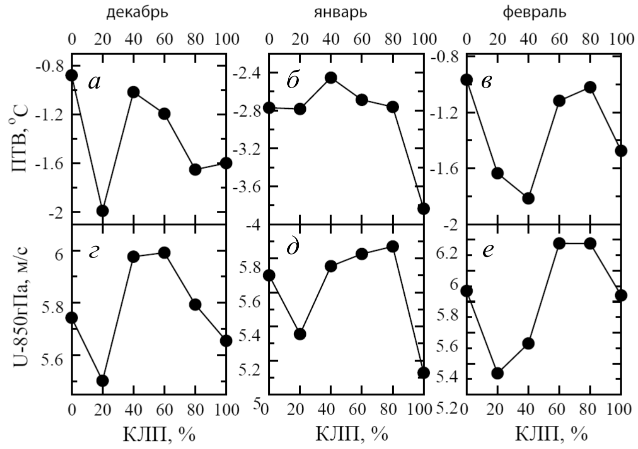


Рис. 2. Среднемесячная ПТВ (в °С, верхний ряд) и зональная компонента ветра на уровне 850 гПа (в м/с, нижний ряд), осредненные для Европейского региона (10—30° в. д., 45—55° с. ш.), по данным экспериментов с МОЦА ECHAM5 как функция предписанных концентраций морского льда в Баренцевом и Карском морях для декабря, января и февраля. КЛП — концентрация ледового покрова

Потепление и усиление зонального ветра происходит при уменьшении концентрации ледового покрова от 100 до 80 %, что особенно хорошо заметно в январе и феврале. Еще большее уменьшение концентрации ледового покрова с 80 до 60 % в феврале (или с 80 до 40 % в декабре и январе) не сопровождается заметными изменениями ПТВ и U850. Резкое уменьшение температуры и ослабление зонального ветра происходит при дальнейшем уменьшении концентрации ледового покрова до 40 % в феврале или 20 % в декабре и январе. Переход к практически свободным ото льда Баренцеву и Карскому морям снова приводит к относительному потеплению и усилению зонального ветра.

Согласно тесту Стьюдента (*t*-тест) нелинейная форма зависимости ПТВ и ветра от концентрации ледового покрова на рис. 2 (разницы между локальными минимумами и максимумами) является статистически значимой с уровнем значимости 95 и 90 % для декабря и февраля соответственно.

Значительное похолодание над континентами при уменьшении концентрации ледового покрова до 20—40 %, что соответствует практически свободной ото льда поверхности Баренцева и Карского морей — состоянию, наблюдающемуся в последние годы, дает основание предположить, что очень холодная зима 2005/2006 года над Евразийским континентом (как и другие подобные события) могла быть вызвана аномальным нагревом атмосферы турбулентными потоками тепла с поверхности Баренцева и Карского морей вследствие сильной отрицательной аномалии концентрации ледового покрова.

Пространственная структура полученных в результате численных экспериментов изменений ПТВ и характеристик атмосферной циркуляции, связанных с изменением концентрации ледового покрова, представлена на рис. 3 для февраля — месяца с наиболее ярко выраженной нелинейной зависимостью ПТВ и U850 в Европейском регионе от концентрации льда (см. рис. 2). Три вертикальных ряда карт на рис. 3 соответствуют разностям различных характеристик в экспериментах со 100 и 80 %, 80 и 40 %, 40 и 1 %, т. е. иллюстрируют изменения при последовательном уменьшении концентрации ледового покрова от 100 до 80 %, от 80 до 40 % и от 40 до 1 %. Разности всегда соответствуют эксперименту с меньшей концентрацией льда минус эксперимент с большей концентрацией льда и иллюстрируют переходы между экстремумами на *S*-образной зависимости ПТВ от концентрации ледового покрова (см. рис. 2).

Во всех случаях уменьшение концентрации льда в Баренцевом и Карском морях вызывает сильное потепление (до 10 °C) над регионом с измененной концентрацией ледового покрова с сильными температурными градиентами на границе этого региона. В случаях разницы 80—100 % и 1—40 % потепление примерно симметрично распространяется вокруг источника тепла, охватывая значительную часть Северной Евразии (включая Европу, где положительные аномалии ПТВ достигают 1,5 °C).

Изменения ПТВ при уменьшении концентрации ледового покрова от 80 до 40 % (рис. 3, *б*) разительно отличаются от случаев с переходами от 100 к 80 % (рис. 3, *а*) и от 40 к 1 % (рис. 3, *в*). Разница модельных температур на рис. 3, *б* сильно напоминает температурную аномалию зимы 2005/2006 года и других похожих случаев (см. рис. 1) и характеризуется значительным похолоданием над Евразией (и, в меньшей степени, над Северной Америкой), контрастирующим с сильной положительной аномалией ПТВ над Баренцевым и Карским морями.

Негативная аномалия приповерхностной температуры воздуха, достигающая –1,5 °C над восточной частью Северной Европы, простирается через весь континент от Западной Европы до южной оконечности Китая. Изменения ПТВ на рис. 3, *б* объясняются аномальной адвекцией, соответствующей аномалиям атмосферной циркуляции, представленным полем ветра на высоте 850 гПа и высотой геопотенциала на том же изобарическом уровне (рис. 3, *д*, *з*). Уменьшение концентрации ледового покрова от 80 до 40 % приводит к сильной восточной аномалии зонального ветра в нижней тропосфере практически во всем широтном круге от 45° до 70° с. ш. (рис. 3, *д*). Ослабление западного зонального переноса в средних широтах над континентами приводит к похолоданию. Изменения поля ветра хорошо соответствуют изменениям высоты геопотенциала, имеющим довольно симметричную структуру с максимумом в 35 м над Восточной Арктикой, окруженным отрицательными аномалиями в средних широтах. Анализ статистической значимости с помощью теста Стьюдента показывает, что изменения геопотенциала на рис. 3, *з* являются статистически значимыми на уровне 95 %. Также статистически значимыми (хотя и в меньших по размеру областях) являются изменения геопотенциала для двух остальных представленных изменений концентрации ледового покрова (на рисунке не показаны).

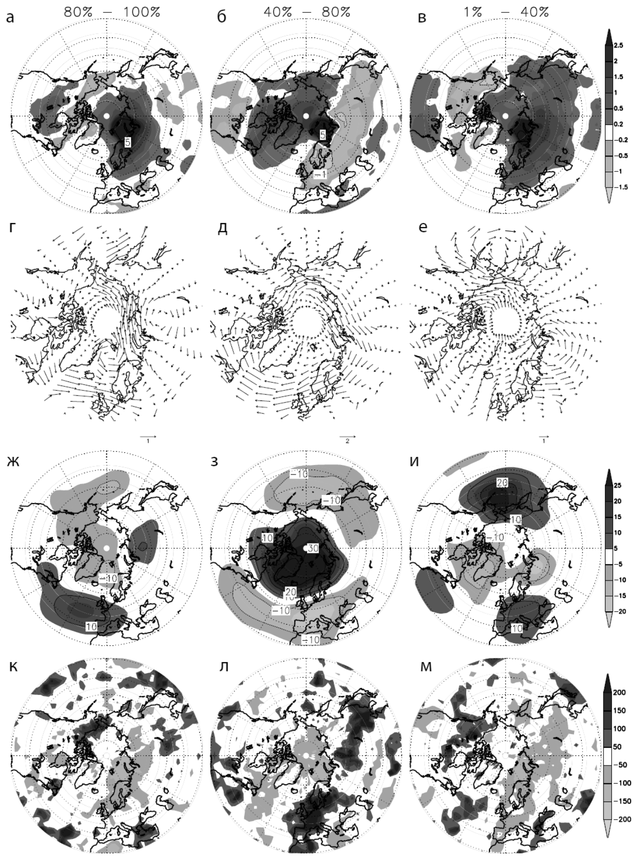


Рис. 3. Изменения ПТВ и атмосферной циркуляции в феврале, по данным экспериментов с МОЦА ECHAM5, соответствующих уменьшению концентрации морского льда в Баренцевом и Карском морях. Разницы ПТВ (в °С) между экспериментами с 80 и 100 % (*а*), 40 и 80 % (*б*) и 1 и 40 % (*в*) концентрации ледового покрова; *г*—*е* как *а*—*в*, но для ветра на уровне 850 гПа (в м/с); *ж*—*и* как *а*—*в*, но для высоты геопотенциальной поверхности на уровне 850 гПа (Z850, в м); *к*—*м* как *а*—*в*, но для вероятности (в %) февральской ПТВ быть ниже, чем полтора среднеквадратичных отклонения. Изменения вероятностей отсчитываются от эксперимента с большей концентрацией льда. Положительные аномалии отмечены темной штриховкой, отрицательные — светлой

Для переходов концентрации ледового покрова от 100 до 80 % и от 40 до 1 % (рис. 3, *а* и *в* соответственно) с симметричными аномалиями ПТВ вокруг области нагрева пространственная структура изменений ПТВ также тесно связана с аномалиями атмосферной циркуляции. В отличие от рассмотренного выше перехода концентрации ледового покрова от 80 до 40 % с антициклонической аномалией два других перехода, от 100 до 80 % и от 40 до 1 %, вызывают циклонические аномалии в полярных широтах (рис. 3, *г* и *е*, *ж* и *и*). Уменьшение концентрации ледового покрова со 100 до 80 % (рис. 3, *г* и *ж*) приводит к образованию сильной циклонической аномалии к северо-западу от Баренцева моря, сопровождающейся антициклоническим вихрем в центральной части Северной Сибири.

Хотя температурные изменения, представленные на рис. 3, *б*, в общих чертах напоминают карту регрессии индекса САК на зимние аномалии приповерхностной температуры воздуха [3], имеется ряд существенных отличий. Максимум потепления расположен в районе Баренцева моря, что нетипично для аномалий ПТВ, связанных с САК. Также аномальное похолодание над Евразией на рис. 3, *б* контрастирует с сильным потеплением к северу от континента, в то время как низкий индекс САК, обуславливающий негативные аномалии температуры над Евразией, сопровождается увеличением площади ледового покрова в Баренцевом море с соответствующим похолоданием в этом регионе [3, 20]. В отличие от арктического колебания, физический механизм пространственной структуры на рис. 3, *з* — это не модуляция полярного вихря в верхней тропосфере и стратосфере, а аномальный локальный нагрев на нижней границе тропосферы в регионе Баренцева и Карского морей.

Следует также отметить, что для экспериментов использовалась версия модели ECHAM5 лишь с пятью уровнями в стратосфере, с последним уровнем 10 гПа. Такое вертикальное разрешение не позволяет адекватно моделировать распространения динамических аномалий из стратосферы в тропосферу [21], указывая на то, что в проведенных экспериментах похолодание было вызвано не механизмом, связанным с планетарными волнами [22], а другим механизмом.

Негативная температурная аномалия над Евразией на рис. 3, *б* представляет собой среднеклиматический (осредненный за 100 лет модельного эксперимента) отклик и (являясь в три-четыре раза слабее) не может объяснить наблюдаемые экстремальные температурные аномалии, такие как зимой 2005/2006 года. Однако, помимо среднего значения, может существенно изменяться и функция распределения вероятностей ПТВ, что приводит к изменению вероятности экстремальных событий. Изменения вероятности (в процентах) того, что февральская приповерхностная температура воздуха будет ниже чем полтора среднеквадратичных отклонения, представлены на рис. 3, *к*—*м*. Важным результатом является рост этой вероятности более чем на 200 %, или в 3 раза, при уменьшении концентрации ледового покрова от 80 до 40 % в обширных областях Евразии, в частности в Европе, Центральной Сибири и Китае, над областью негативной аномалии средней ПТВ (рис. 3, *л*). Уровень в полтора среднеквадратичных отклонения для модельной ПТВ примерно равен –4 °С для Европы и Китая и около –7 °С для Центральной Сибири. Эти значения хорошо согласуются с негативными аномалиями ПТВ в экстремальные зимы, проиллюстрированные в начале статьи, в частности зимой 2005/2006 года.

4. Механизм формирования аномалий приземной циркуляции атмосферы над Баренцевым морем при изменении концентрации морского льда

Реакция атмосферной циркуляции на источник тепла на нижней границе атмосферы определяется сложным взаимодействием между локальным (бароклинным) и крупномасштабным (баротропным) откликом [9, 10, 23]. Для представленных выше результатов численных экспериментов с МОЦА самой интересной особенностью является сильная нелинейность регионального отклика атмосферы на изменения концентрации ледового покрова.

Для описания нелинейного отклика циркуляции нижней тропосферы в регионе Баренцева и Карского морей на изменения концентрации морского льда в зимний период C_{ic} в секторе, показанном на рис. 1, *е*, в работе [17] была предложена упрощенная модель пограничного слоя тропосферы вблизи источника тепла. Для этого использовалась модель Тэйлора — Экмана (см., например, [24]). В данной модели вертикальная скорость w_h вблизи границы h_f бароклинного пограничного слоя атмосферы с учетом термического ветра $\vec{V}_T$ удовлетворяет следующему уравнению [25]:

$$w_h \approx h_f \varsigma_{g0} \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 - \frac{h_f^2 \left|\vec{V}_T\right|}{2^{1/2}} \frac{\varsigma_{g0}}{\left|\vec{V}_{g0}\right|} \sin(\alpha_T - \alpha_0) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha_0\right),$$

где $\left|\vec{V}_{g0}\right|$ является абсолютным значением геострофического ветра у поверхности $\vec{V}_{g0}$; ς_{g0} — геострофическая завихренность у поверхности; $\left|\vec{V}_T\right|$ — абсолютное значение термического ветра $\vec{V}_T$; α_0 — угол между направлениями геострофической скорости $\vec{V}_{g0}$ и действительной скорости ветра $\vec{V}_0$ у поверхности, отсчитываемый от $\vec{V}_{g0}$ (cross-isobar angle). α_T обозначает угол между $\vec{V}_T$ и $\vec{V}_{g0}$, отсчитываемый от $\vec{V}_{g0}$, термический ветер $\vec{V}_T$ считается постоянным по высоте в пределах бароклинного пограничного слоя. Отметим, что первое слагаемое в правой части уравнения представляет собой выражение для вертикальной скорости на высоте бароклинного пограничного слоя [26].

Выражение для вертикальной скорости w_h в левой части вышеприведенного уравнения также можно получить из термодинамического уравнения сохранения энергии:

$$w_h \approx \frac{1}{\rho_h^* \theta_h}\left[-\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{h_f} \rho^* \theta\, dz - \int_0^{h_f} \nabla \cdot \rho^* \theta \vec{V} dz + \frac{F_{hs}}{c_p}\right],$$

где ρ^* и θ — плотность воздуха и потенциальная температура в пределах бароклинного пограничного слоя соответственно, а ρ_h^* и θ_h обозначают плотность и температуру вблизи верхней границы бароклинного пограничного слоя h_f, $\vec{V}$ — вектор горизонтального ветра в бароклинном пограничном слое атмосферы, F_{hs} — вертикальный поток турбулентного явного тепла на поверхности, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, а ∇ — горизонтальный оператор градиента. Заметим, что во всех представленных в данной статье экспериментах с моделью общей циркуляции атмосферы ECHAM5 $F_{hs} \geq 0$ над регионом Баренцева и Карского морей. Стандартно предполагается нулевая вертикальная скорость на поверхности, а также считается, что диабатический радиационный нагрев, нагрев из-за конденсации и горизонтальные мезомасштабные турбулентные потоки тепла в БПС пренебрежимо малы в сравнении с F_{hs}, а вертикальный поток турбулентного тепла на высоте $z = h_f$ пренебрежимо мал в сравнении с крупномасштабным вертикальным потоком тепла $c_p \rho_h^* \theta_h w_h$. Поскольку рассматриваются стационарные решения, соответствующие среднеклиматическим результатам, анализировавшимся в предыдущем разделе, то нестационарным слагаемым в правой части можно пренебречь. Таким образом, исключая (приравнивая правые части) w_h в двух рассмотренных уравнениях, получаем

$$\frac{F_{hs}}{c_p} - \int_0^{h_f} \nabla \cdot \rho^* \theta \vec{V} dz \approx \rho_h^* \theta_h \Bigg[h_f \varsigma_{g0} \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 -$$

$$- \frac{h_f^2 \left|\vec{V}_T\right|}{2^{1/2}} \frac{\varsigma_{g0}}{\left|\vec{V}_{g0}\right|} \sin(\alpha_T - \alpha_0) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha_0\right)\Bigg].$$

Для упрощения данного уравнения используем ряд обоснованных допущений. Предположим горизонтальную радиальную симметрию рассматриваемой системы. Это допущение подтверждается результатами, представленными на рис. 3. Для описания структуры аномалий p_0 и T_0 используем простую, но достаточно реалистичную параболическую аппроксимацию. В результате (см. подробные выкладки в [17]) получим следующее выражение для аномалии приземного давления над источником тепла в регионе Баренцева и Карского морей:

$$p_s \approx \frac{f_0}{2h_f}\frac{<F_{hs}> r_0^2 \rho^*}{c_p \rho_h^* \theta_h \sin 2\alpha_0} - \frac{\rho^* h_f}{2}\frac{g}{T^*}\left|T_s\right|(1 - \mathrm{tg}\alpha_0).$$

При использовании характерных параметров, рассчитанных по модельным данным для потоков тепла, температуры и реального и геострофического ветра у поверхности, по данной формуле была построена зависимость p_s от концентрации морского льда. Найденные значения можно сравнить с результатами МОЦА ECHAM5 для аномалии давления над Баренцевым и Карским морями (рис. 4). Принимая во внимание весьма концептуальный и упрощенный характер описанной выше модели, можно отметить очень хорошее соответствие (не только качественное, но и количественное) полученных результатов.

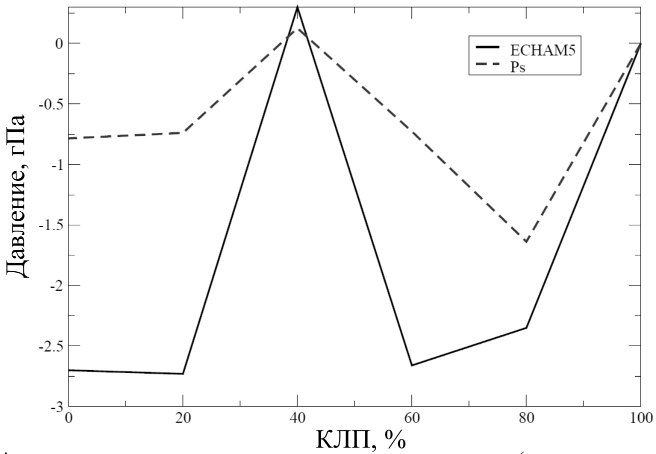


Рис. 4. Аномалия приповерхностного давления воздуха (в гигапаскалях, относительно состояния с 100 % покрытием льда) над Баренцевым и Карским морями (приблизительно в центре региона, отмеченного на рис. 1, *е*), рассчитанная в концептуальной аналитической модели (пунктирная линия) и полученная в экспериментах с МОЦА ECHAM5 (сплошная линия) как функция концентрации ледового покрова (КЛП, %).

Таким образом, обнаруженная в модельных экспериментах нелинейность отклика атмосферы на изменение концентрации морского льда в Баренцевом и Карском морях может быть связана с нелинейной зависимостью аномалии давления, представленной как сумма «конвективного» (первого) слагаемого и «бароклинного» (второго) слагаемого в уравнении для p_s.

5. Обсуждение и выводы

Важным результатом проведенных численных экспериментов стало выявление существенной роли ледовых условий в Баренцевом и Карском морях — критического параметра климатической системы, влияющего на формирование различных режимов атмосферной циркуляции в субполярных и полярных регионах.

Обнаруженная в данной статье нелинейная зависимость температуры от концентрации морского льда может объясняться взаимодействием двух основных механизмов, приводящих к противоположным тенденциям. Это конвекция над источником тепла, приводящая к образованию циклонической аномалии циркуляции в регионе Баренцева и Карского морей (баротропный отклик), и изменения горизонтальных градиентов температуры вокруг источника тепла, приводящие (благодаря изменению термического ветра) к антициклонической аномалии циркуляции (бароклинный отклик). Второй механизм, предположительно, преобладает в случае с уменьшением концентрации ледового покрова с 80 до 40 % (см. рис. 3). Удаленные от источника тепла статистически значимые аномалии атмосферной циркуляции также могут быть вызваны распространением квазибаротропных волн Россби.

Отмеченное похолодание над континентами при уменьшении площади льда предполагает также существование сильной отрицательной обратной связи между САК и изменениями ледового покрова, что было также отмечено в других работах (например, [10, 13]).

Важным выводом является возможность похолодания, а не a priori ожидаемого потепления над прилегающими к Арктике континентами в ответ на резкое потепление в самой Арктике вследствие уменьшения ледового покрова в Баренцевом и Карском морях. Для формирования такого отклика атмосферы требуется изменение концентрации ледового покрова в определенном диапазоне (в представленном случае от 80 до 40 %). Изменения подобного масштаба ожидаются при экстраполировании климатических трендов площади арктического ледового покрова при продолжающемся глобальном потеплении. Это дает основание предположить, что вероятность холодных зим может увеличиться в будущем, несмотря на потепление в Арктике и таяние льда.

Полученные результаты позволяют предположить, что происходящее потепление и уменьшение площади ледового покрова в Арктике приводит к замедлению средних темпов потепления над Евразией, вызванных другими причинами (антропогенным воздействием). Действительно, эксперименты с МОЦА ECHAM5 с использованием температуры поверхности океана и концентрации ледового покрова по данным наблюдений для периодов 1968—1976 годов и 1998—2006 годов (приходящиеся на минимум и максимум долгопериодного климатического колебания в Северной Атлантике), показали, что при изменении глобального поля температуры поверхности океана за последние 30 лет температура воздуха над Евразией в зимний период выросла бы на 0,5—1,5 °С больше, если бы площадь ледового покрова в Арктике оставалась неизменной [27].

Литература

1. *Hansen, J. R.* GISS analysis of surface temperature change / J. R. Hansen, R. Ruedy, J. Glascoe, M. Sato // J. Geophys. Res. — 1999. — V. 104. — P. 30997–31022.

2. *Kalnay, E.* The NCEP/NCAR 40-ear reanalysis project / E. Kalnay // Bull. Am. Meteorol. Soc. — 1996. — V. 77. — P. 437—470.

3. *Hurrell, J. W.* Decadal trends in the North Atlantic Oscillation : Regional temperatures and precipitation / J. W. Hurrell // Science. — 1999. — V. 269. — P. 676—679.

4. *Fraedrich, K.* Climate anomalies in Europe associated with ENSO extremes / K. Fraedrich, K. Müller // Int. J. Climatol. — 1992. — V. 12. — P. 25–31.

5. *Merkel, U.* A high resolution AGCM study of the El Niño impact on the North Atlantic/European sector / U. Merkel, M. Latif // Geophys. Res. Lett. — 2002. — V. 29. — doi:10.1029/2001GL013726.

6. *Brönnimann, S.* Extreme climate of the global troposphere and stratosphere 1940—1942 related to El Niño / S. Brönnimann, J. Luterbacher, J. Staehelin, T. M. Svendby, G. Hansen, T. Svenøe // Nature. — 2004. — V. 431. — P. 971—974.

7. *Croci-Maspoli, M.* Key dynamical features of the 2005/06 European winter / M. Croci-Maspoli, H. C. Davies // Mon. Weath. Rev. — 2009. — V. 137. — P. 664—678.

8. *Parkinson, C. L.* Arctic sea ice extents, areas, and trends, 1978—1996 / C. L. Parkinson, D. J. Cavalieri, P. Gloersen, H. J. Zwally, and J. C. Comiso // J. Geoph. Res. — 1999. — V. 104. — P. 20837—20856. (Обновленные данные в Интернете: http://nsidc.org/data/nsidc-0051.html).

9. *Murray, R. J.* Responses of climate and cyclones to reductions in Arctic winter sea ice / R. J. Murray, I. Simmonds // J. Geophys. Res. — 1995. — V. 100. — P. 4791—4806.

10. *Alexander, M. A.* The atmospheric response to realistic Arctic sea ice anomalies in an AGCM during winter / M. A. Alexander, U. S. Bhatt, J. E. Walsh, M. S. Timlin, J. S. Miller, J. D. Scott // J. Clim. — 2004. — V. 17. — P. 890—905.

11. *Seierstad, I. A.* Impact of a projected future Arctic Sea Ice reduction on extratropical storminess and the NAO / I. A. Seierstad, J. Bader // Clim. Dyn. — 2009. V. 33. — P. 937—943. — doi: 10.1007/s00382-008-0463-x.

12. *Bengtsson, L.* The early twentieth-century warming in the Arctic : A possible mechanism / L. Bengtsson, V. A. Semenov, O. M. Johannessen // J. Clim. — 2004. — V. 17. — P. 4045—4057.

13. *Deser, C.* The effects of North Atlantic SST and sea ice anomalies on the winter circulation in CCM3. Part II : Direct and indirect components of the response / C. Deser, G. Magnusdottir, R. Saravanan, A. Phillips // J. Clim. — 2004. — V. 17. — P. 877—889.

14. *Галин, В. Я.* Моделирование отклика атмосферы на таяние арктических льдов / В. Я. Галин, Е. М. Володин // Метеорология и гидрология. — 2002. — № 1. — С. 14—21.

15. *Катцов, В. М.* Влияние морского льда на термический режим и циркуляцию атмосферы Северного полушария зимой / В. М. Катцов, В. П. Мелешко, А. П. Соколов // Метеорология и гидрология. — 1992. — № 12. — С. 5—24.

16. *Hopsch, S.* Analysis of a link between fall Arctic sea ice concentration and atmospheric patterns in the following winter / S. Hopsch, J. Cohen, K. Dethloff // Tellus Series A-Dynamic Meteorology and Oceanography. — 2012. — V. 64. — doi: 10.3402/tellusa.v64i0.18624.

17. *Petoukhov, V.* A link between reduced Barents — Kara sea ice and cold winter extremes over northern continents / V. Petoukhov, V. A. Semenov // J. Geophys. Res. —2010. — V. 115. — doi: 10.1029/2009jd013568.

18. *Roeckner, E.* The atmospheric general circulation model ECHAM 5. Part I : Model description : Rep. 349 / E. Roeckner et al. — Hamburg : Max Planck Inst. for Meteorol., 2003.

19. *Hurrell, J. W.* A new sea surface temperature and sea ice boundary dataset for the Community Atmosphere Model / J. W. Hurrell, J. J. Hack, D. Shea, J. M. Caron, J. Rosinski // J. Clim. — 2008. — V. 21. — P. 5145-5153.

20. *Dickson, R. R.* The Arctic Ocean response to the North Atlantic oscillation / R. R. Dickson, T. J. Osborn, J. W. Hurrell, J. Meincke, J. Blindheim, B. Adlandsvik, T. Vinje, G. Alekseev, W. Maslowski // J. Clim. — 2000. — V. 13. — P. 2671—2696.

21. *Baldwin, M. P.* Stratospheric harbingers of anomalous weather regimes / M. P. Baldwin, T. J. Dunkerton // Science. — 2001. — V. 294. — P. 581—584.

22. *Honda, M.* Influence of low Arctic sea-ice minima on anomalously cold Eurasian winters / M. Honda, J. Inoue, S. Yamane // Geophys. Res. Lett. — 2009. — V. 36. — L08707. — doi: 10.1029/2008gl037079.

23. *Peng, S.* The modeled atmospheric response to midlatitude SST anomalies and its dependence on background circulation states / S. Peng, W. A. Robinson, M. P. Hoerling // J. Clim. — 1997. — V. 10. — P. 971–987.

24. *Hansen, J.* Efficient three-dimensional global models for climate studies : Models I and II / J. Hansen, G. Russell, D. Rind, P. Stone, A. Lacis, S. Lebedeff, R. Ruedy, L. Travis // Mon. Weath. Rev. — 1983. — V. 111. — P. 609—662.

25. *Wiin-Nielsen, A.* Vorticity, divergence, and vertical velocity in a baroclinic boundary layer with a linear variation of the geostrophic wind / A. Wiin-Nielsen // Bound.-Layer Meteorol. — 1974. — V. 6. — P. 459-476.

26. *Charney, J. G.* A numerical method for predicting the perturbation of the middle latitude westerlies / J. G. Charney, A. Eliassen // Tellus. — 1949. — V. 1. — P. 38—54.

27. *Семенов, В. А.* Влияние температуры поверхности океана и границ морского льда на изменение регионального климата в Евразии за последние десятилетия / В. А. Семенов, И. И. Мохов, М. Латиф // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. — 2012. — Т. 48, № 4. — С. 403—421.

ЭНЕРГЕТИКА ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ЗАМЫКАНИЯ ДЛЯ УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ[1]

С. С. Зилитинкевич, Н. И. Клиорин, И. Рогачевский,
Т. Эльперин, И. Н. Эзау

Введение

В последнее время проблема турбулентного замыкания для устойчиво стратифицированных геофизических течений обсуждалась в работах [12—17, 34—36, 68, 69, 71]. Большинство замыканий, используемых в оперативных атмосферных моделях, основано на уравнении баланса кинетической энергии турбулентности (КЭТ)[2] E_K и гипотезе о градиентном переносе, согласно которой вертикальные турбулентные потоки количества движения τ_i ($i = 1, 2$), потенциальной температуры F_z и любых скаляров пропорциональны их средним градиентам. Коэффициенты пропорциональности в подобных соотношениях, называемые коэффициентами турбулентной вязкости K_M, температуропроводности K_H и диффузии K_D, заранее неизвестны и подлежат определению с помощью теории замыкания. Согласно колмогоровской концепции замыкания [1, 2] эти коэффициенты полностью определяются турбулентными масштабами скорости $u_T = E_K^{1/2}$ и времени t_T, второй из которых определяется как отношение КЭТ к скорости ее диссипации:

$$t_T = E_K / \varepsilon_K. \tag{1}$$

Вместо t_T может использоваться турбулентный масштаб длины $l = E_K^{1/2} t_T$. При этом из анализа размерностей следуют выражения для коэффициентов турбулентного обмена:

$$K_M \sim K_H \sim K_D \sim u_T^2 t_T \sim u_T l, \tag{2}$$

где опущенные множители рассматриваются как универсальные константы.

Эта теория, предложенная Колмогоровым для нейтрально стратифицированных турбулентных течений и в основном оправданная для таких течений, встречает непреодолимые трудности в применении к сильно устойчивой стратификации. Согласно (2) турбулентное число Прандтля $\mathrm{Pr}_T \equiv K_M / K_H$ должно быть универсальной константой. Однако многочис-

---

[1] Основано на книге: *Зилитинкевич С. С.* Атмосферная турбулентность и планетарные пограничные слои. — М. : Физматлит, 2013. — Ч. 5, гл. 5.1.

[2] Список принятых сокращений и условных обозначений приведен в конце статьи, с. 60.

ленные эксперименты, а также вихреразрешающее и прямое численное моделирование турбулентности свидетельствуют о резком возрастании Pr_T с усилением стратификации. Поэтому обычно предполагалось, что турбулентные масштабы длины для количества движения l_M и тепла l_H зависят от стратификации по-разному. При этом колмогоровская модель замыкания становится незамкнутой.

В наших предшествующих работах [68, 69, 71] предложена теория замыкания, основанная на уравнениях баланса КЭТ (E_K), потенциальной энергии турбулентности (ПЭТ) (E_p) и турбулентных потоков количества движения (τ_i) и потенциальной температуры (F_z) и включающая новое релаксационное уравнение для турбулентного масштаба времени (t_T). Градиентный турбулентный перенос в этой теории не постулируется. Вместо этого используются уравнения баланса вертикальных турбулентных потоков τ_i и F_z, с помощью которых в предположении о равновесном режиме турбулентности выводятся соотношения, связывающие τ_i и F_z с соответствующими вертикальными градиентами, и в тех случаях, когда это возможно, определяются коэффициенты турбулентной вязкости и температуропроводности. В настоящей работе эта теория замыкания распространена на нестационарные и неоднородные режимы. В разделе 1 уточнены уравнения баланса турбулентных энергий и турбулентных потоков с учетом различий между временными масштабами времен диссипации КЭТ и ПЭТ. В разделе 2, посвященном равновесному режиму турбулентности, предложена более реалистическая, чем ранее, модель межкомпонентного обмена кинетической энергией, выведено новое выражение для диссипативного масштаба времени t_T и продемонстрировано хорошее согласие уточненной теории с данными измерений турбулентности в приземном слое воздуха. В разделе 3 получено релаксационное уравнение для турбулентного масштаба времени t_T, теория распространена на нестационарные режимы турбулентности и предложены разные варианты замыкания — от наиболее полного, основанного на прогностических уравнениях для пяти основных характеристик турбулентности (E_K, F_p, τ_i, F_z и t_T) до простейшего, основанного на одном прогностическом уравнении для суммарной энергии турбулентности СЭТ = КЭТ + ПЭТ и алгебраических выражениях для всех остальных характеристик турбулентности.

При равновесном режиме турбулентности критерием стратификации служит градиентное число Ричардсона:

$$\mathrm{Ri} \equiv N^2 / S^2 , \tag{3}$$

где S — сдвиг скорости:

$$S^2 = (\partial U / \partial z)^2 + (\partial V / \partial z)^2 , \tag{4}$$

N — частота Вяйсяля — Брента, в случае сухого воздуха зависящая только от вертикального градиента потенциальной температуры Θ:

$$N^2 = \beta \partial\Theta / \partial z. \tag{5}$$

Здесь z — высота; U и V — составляющие средней скорости ветра вдоль горизонтальных осей x и y; $\beta = g/T_0$ — параметр плавучести; $g = 9{,}81$ м/с^2 — ускорение силы тяжести; T_0 — характерное значение абсолютной температуры T, которая связана с потенциальной температурой соотношением $\Theta = T(P_0/P)^{1-1/\gamma}$, где P — давление, P_0 — его характерное значение, $\gamma = c_p/c_v$ = 1,41 — отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме.

Со времен Ричардсона [51] было принято считать, что турбулентность при равновесном режиме поддерживается лишь при условии, что число Ri не превышает некоторого критического значения Ri_c (обычно принимается $\mathrm{Ri}_c = 0{,}25$). Однако в моделях замыкания, применяемых в метеорологии, ламинаризация течения при «сверхкритических» значениях Ri всегда понималась как артефакт и предотвращалась путем введения тех или иных эвристических поправок. Наиболее успешную методику таких поправок разработали Меллор и Ямада [44]. В нашей теории замыкания, начиная с [21, 68], турбулентность поддерживается сдвигом скорости при любых числах Ri без каких-либо искусственных допущений. Иными словами, в теории отсутствует критическое число Ричардсона в энергетическом смысле, а значение Ri ~ 0,25 играет роль границы между двумя турбулентными режимами разной природы, для которых предложены названия: «сильная турбулентность» при Ri < 0,25 и «слабая турбулентность» при Ri > 0,25. Этот принципиальный результат принят практически во всех последующих работах в области турбулентного замыкания [16, 38, 43, 61].

1. Энергетически согласованные уравнения теории турбулентного замыкания

1.1. Геофизическое приближение

Наша теория замыкания предназначена для расчета характеристик турбулентности в атмосферных (а с надлежащими изменениями — и гидросферных) течениях, характеризующихся следующими свойствами:

- вертикальные масштабы движений не превышают 10 км и поэтому значительно меньше горизонтальных масштабов (~10000 км), вследствие чего типичные вертикальные скорости среднего движения W на несколько порядков меньше горизонтальных скоростей U и V; поэтому вертикальный турбулентный перенос сопоставим с вертикальным переносом благодаря адвекции, а может и доминировать, тогда как горизонтальный турбулентный перенос пренебрежимо мал по сравнению с горизонтальной адвекцией;

- составляющие градиентов средней скорости ветра $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3) = (U, V, W)$, потенциальной температуры Θ и других переменных по вертикальной координате x_3 (или z) на несколько порядков превышают составляющие этих градиентов по горизонтальным координатам x_1, x_2 (или x, y); поэтому влиянием горизонтальных градиентов средней скорости на статистические характеристики турбулентности можно пренебречь, а генерация КЭТ определяется в основном вертикальными градиентами горизонтальных составляющих скорости: $\partial U/\partial z$ и $\partial V/\partial z$.

Для замыкания уравнений Рейнольдса, описывающих такие течения, а именно уравнений горизонтального движения (см., например, [29, 33])

$$\frac{DU}{Dt} = fV - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z}, \tag{6}$$

$$\frac{DV}{Dt} = -fU - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z} \tag{7}$$

и уравнения термодинамической энергии

$$\frac{D\Theta}{Dt} = -\frac{\partial F_z}{\partial z} + J, \tag{8}$$

достаточно определить составляющие вертикального потока количества движения $\tau_{13} = \langle uw \rangle$ и $\tau_{23} = \langle \mathrm{v}w \rangle$ и вертикальный поток потенциальной температуры $F_3 = F_z = \langle \theta\, w \rangle$.

В уравнениях (6)—(8) $D/Dt = \partial/\partial t + U_k \partial/\partial x_k$; t — время; $f = 2\Omega \sin\varphi$ — параметр Кориолиса, $\mathbf{\Omega}_i$ — вектор угловой скорости вращения Земли, параллельный полярной оси ($|\mathbf{\Omega}_i| \equiv \Omega = 0,73 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$); φ — широта; ρ_0 — характерное значение плотности воздуха; J — скорость нагревания или охлаждения ($J = 0$ при адиабатических процессах); P — среднее давление; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u, \mathrm{v}, w)$ и θ — флуктуации скорости и потенциальной температуры; угловые скобки означают осреднение по ансамблю.

Система уравнений гидро- и термодинамики включает еще уравнение для удельной влажности, аналогичное (8). Входящий в него вертикальный турбулентный поток влаги F_q входит вместе с потоком потенциальной температуры F_z в выражение для потока плавучести: $F_z\beta + 0,61 g F_q$. «Геофизическое приближение» справедливо и для океана, где дополнительным фактором отрицательной плавучести служит соленость (вместо влажности, служащей в атмосфере фактором положительной плавучести), с той лишь разницей, что вместо уравнения состояния идеального газа, справедливого для воздуха, используется уравнение состояния морской воды.

Уравнения баланса для напряжений Рейнольдса, потока потенциальной температуры и «энергии» флуктуаций потенциальной температуры $E_\theta = \left\langle \theta^2 \right\rangle \big/ 2$ имеют вид

$$\frac{D\tau_{ij}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi_{ijk}^{(\tau)} = -\tau_{ik} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \left[\varepsilon_{ij}^{(\tau)} - \beta (F_j \delta_{i3} + F \delta_{j3}) - Q_{ij} \right], \tag{9}$$

$$\frac{DF_i}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi_{ij}^{(F)} = \beta \delta_{i3} \left\langle \theta^2 \right\rangle - \frac{1}{\rho_0} \left\langle \theta \nabla_i p \right\rangle - \tau_{ij} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \delta_{j3} - F_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon_i^{(F)}, \tag{10}$$

$$\frac{DE_\theta}{Dt} + \nabla \cdot \Phi_\theta = -F_z \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \varepsilon_0 . \tag{11}$$

Здесь δ_{ij} — единичный тензор ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$); $\Phi_{ijk}^{(\tau)}$, Φ_{ij}^F и Φ_θ — третьи моменты, описывающие турбулентный перенос вторых моментов:

$$\Phi_{ijk}^{(\tau)} = \left\langle u_i u_j u_k \right\rangle + \frac{1}{\rho_0} (\left\langle p u_i \right\rangle \delta_{jk} + \left\langle p u_j \right\rangle \delta_{ik}), \tag{12}$$

$$\Phi_{ij}^{(F)} = \left\langle u_i \, u_j \, \theta \right\rangle, \tag{13}$$

$$\Phi_\theta = \frac{1}{2} \left\langle \theta^2 \mathbf{u} \right\rangle; \tag{14}$$

Q_{ij} — тензор корреляций между флуктуациями давления p и сдвига скорости $\partial u_i / \partial x_j$:

$$Q_{ij} = \frac{1}{\rho_0} \left\langle p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle; \tag{15}$$

$\varepsilon_{ij}^{(\tau)}$, $\varepsilon_i^{(F)}$ и ε_θ — члены, обусловленные молекулярной вязкостью ν и температуропроводностью κ:

$$\varepsilon_{ij}^{(\tau)} = 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle, \tag{16}$$

$$\varepsilon_i^{(F)} = -\kappa \left(\left\langle u_i \Delta \theta \right\rangle + \Pr \left\langle \theta \Delta u_i \right\rangle \right), \tag{17}$$

$$\varepsilon_\theta = -\kappa \left\langle \theta \Delta \theta \right\rangle, \tag{18}$$

где $\Pr = \nu / \kappa$ — число Прандтля (см., например, [3, 17, 31]).

Величины $\varepsilon_{ij}^{(\tau)}$, $\varepsilon_i^{(F)}$ и ε_θ положительны и представляют собой скорости диссипации статистических моментов τ_{ii}, F_i и E_θ. Согласно гипотезе Колмогорова [1, 2], они определяются как отношения рассматриваемых моментов к масштабу времени турбулентной диссипации t_T:

$$\varepsilon_{ii}^{(\tau)} = \frac{\tau_{ii}}{t_T}, \quad \varepsilon_i^{(F)} = \frac{F_i}{C_F t_T}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{E_\theta}{C_p t_T}, \tag{19}$$

где $\tau_{ii} \equiv \left\langle u_i^2 \right\rangle$; C_p и C_F — безразмерные универсальные константы, учитывающие различия между временными масштабами диссипации для различных моментов. Первое из соотношений (19), в сущности, не является гипотетическим, а просто вводит определение основного турбулентного масштаба времени t_T как отношения КЭТ к скорости ее вязкой диссипации. В двух других соотношениях предполагается, что диссипативные масштабы времени для F_i и E_θ пропорциональны t_T.

1.2. Уравнения для главных вторых моментов

Диагональные элементы тензора напряжений Рейнольдса τ_{ii} представляют собой удвоенные составляющие КЭТ: $E_i \equiv \left\langle u_i^2 \right\rangle / 2$, баланс которых описывается уравнением (9) при $i = j$:

$$\frac{DE_i}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z}\Phi_i = -\tau_{i3}\frac{\partial U_i}{\partial z} + \frac{1}{2}Q_{ii} - \frac{E_i}{t_T} \quad (i = 1, 2), \tag{20}$$

$$\frac{DE_z}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z}\Phi_z = \beta F_z + \frac{1}{2}Q_{33} - \frac{E_z}{t_T}, \tag{21}$$

где

$$\Phi_i = \frac{1}{2}\left\langle u_i^2 w \right\rangle \quad (i = 1, 2), \tag{22}$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2}\left\langle w^3 \right\rangle + \frac{1}{\rho_0}\left\langle pw \right\rangle. \tag{23}$$

Суммируя все три составляющие, получаем уравнение баланса КЭТ

$$\frac{DE_K}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z}\Phi_K = -\tau_{i3}\frac{\partial U_i}{\partial z} + \beta F_z - \frac{E_K}{t_T}, \tag{24}$$

где третий член в правой части описывает скорость диссипации КЭТ:

$$\varepsilon_K = \frac{E_K}{t_T}, \tag{25}$$

Φ_K — вертикальный турбулентный поток КЭТ:

$$\Phi_K = \frac{1}{2}\langle u_i u_i w\rangle + \frac{1}{\rho_0}\langle pw\rangle . \tag{26}$$

Сумма диагональных членов тензора Q_{ij} равна нулю вследствие уравнения неразрывности: $\partial u_i/\partial x_i = 0$. Поэтому члены Q_{ii} не связаны ни с генерацией, ни с расходом энергии, а описывают обмен энергией между продольной составляющей, питаемой сдвигом скорости, и непосредственно ничем не питаемыми поперечной и вертикальной составляющими. Для описания этого обмена традиционно используется гипотеза изотропизации Ротта [53]:

$$Q_{ii} = -\frac{2C_r}{3t_T}(3E_i - E_K) , \tag{27}$$

где C_r — безразмерная универсальная константа, учитывающая различие между временными масштабами энергообмена и диссипации энергии. Однако эта гипотеза противоречит современным экспериментальным данным как для нейтральной, так и для сильно устойчивой стратификации. В частности, согласно (27) доля энергии поперечных флуктуаций скорости E_y/E_K не должна зависеть от Ri, тогда как в реальности E_y/E_K с увеличением Ri возрастает и в пределе уравнивается с долей энергии продольных флуктуаций E_x/E_K, так что турбулентность в горизонтальной плоскости становится практически изотропной (см. рис. 3 далее). В разд. 2.2 настоящей работы взамен гипотезы Ротта предлагается новая модель энергообмена, учитывающая явление горизонтальной изотропизации при сильно устойчивой стратификации.

Хотя уравнение баланса (11) для среднего квадрата флуктуаций потенциальной температуры E_θ известно давно (см., например, книги Ламли и Пановского [41], и Теннекеса и Ламли [62]), его фундаментальная роль в энергетике турбулентности и в проблеме турбулентного замыкания долгое время оставалась не понятой. По-видимому, впервые Островский и Троицкая [7], а позднее Зилитинкевич с соавт. [68] учли прямую связь между E_θ и ПЭТ и продемонстрировали фундаментальную роль уравнения баланса ПЭТ, без которого уравнение баланса КЭТ не дает полного описания энергетики турбулентности.

Принимая во внимание более чем полувековую традицию использования в теории турбулентного замыкания одного лишь уравнения баланса КЭТ, напоминаем определение ПЭТ. При устойчивой стратификации, характеризующейся частотой Вяйсяля — Брента N, перемещение объема жидкости или газа («жидкой частицы») с исходного уровня z на уровень $z+\delta z$ приводит к вариации плотности $\delta\rho = (\partial\rho/\partial z)\delta z = (\rho_0/g)N^2\delta z$, где

ρ — средняя плотность. Возникающая при этом вариация потенциальной энергии на единицу массы $\delta E_P = (1/\delta z)\int_z^{z+\delta z}(g/\rho_0)\delta\rho\, z\,dz$ выражается в виде $\delta E_P = \frac{1}{2}[(g/\rho_0)\delta\rho]^2/N^2 = \frac{1}{2}(\beta\delta\theta)^2/N^2 = (\beta/N)^2\delta E_\theta$, где $\delta E_\theta = \frac{1}{2}(\delta\theta)^2$ — вариация «энергии» флуктуаций потенциальной температуры. Отсюда следует определение ПЭТ:

$$E_p = \left(\frac{\beta}{N}\right)^2 E_\theta. \tag{28}$$

В отличие от потенциальной энергии среднего движения, линейно зависящей от вариации температуры (или плотности), ПЭТ зависит от нее квадратично. В этом качестве ПЭТ напоминает доступную потенциальную энергию, определяемую, согласно Лоренцу [40], как часть полной потенциальной энергии общей циркуляции атмосферы, способную переходить в кинетическую энергию (и обратно). Это же свойство присуще и ПЭТ: она представляет собой ту часть потенциальной энергии течения, которая способна к энергообмену с КЭТ.

В геофизическом приближении уравнение баланса E_θ (11) и соответствующее уравнение для E_p имеют вид

$$\frac{DE_\theta}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z}\Phi_\theta = -F_z\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \frac{E_\theta}{C_p t_T}, \tag{29}$$

$$\frac{DE_p}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z}\Phi_p = -\beta F_z - \frac{E_p}{C_p t_T}, \tag{30}$$

где Φ_θ и Φ_p — турбулентные потоки энергий E_θ и E_p:

$$\Phi_p = \left(\frac{\beta}{N}\right)^2\Phi_\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{N}\right)^2\left\langle\theta^2 w\right\rangle. \tag{31}$$

Вторые члены в правых частях (29) и (30) выражают скорости диссипации: $\varepsilon_\theta = E_\theta\big/(C_p t_T)$ и $\varepsilon_p = E_p\big/(C_p t_T)$.

Поток плавучести βF_z, входящий в (24) и (30) с противоположными знаками, описывает обмен энергией между КЭТ и ПЭТ. В уравнении баланса суммарной энергии турбулентности (СЭТ = КЭТ + ПЭТ), определяемой выражением

$$E = E_K + E_p = \frac{1}{2}\left(\left\langle u_i u_i\right\rangle + \left(\frac{\beta}{N}\right)^2\left\langle\theta^2\right\rangle\right), \tag{32}$$

члены $\pm\beta F_z$ взаимно уничтожаются. Поэтому сам по себе член βF_z в уравнении баланса КЭТ не может служить причиной вырождения турбулентности при сверхкритической стратификации, как ошибочно предполагалось в теориях замыкания, основанных на одном лишь уравнении баланса КЭТ.

В уравнении (9) для вертикальных составляющих турбулентного потока количества движения τ_{i3} (i = 1, 2) член $\varepsilon_{i3}^{(\tau)}$, вероятно, мал, так как наименьшие вихри, на которых и происходит вязкая диссипация, должны быть изотропны [37]. Роль диссипации при этом играет комбинация членов $\varepsilon_{i3(\text{эф})}^{(\tau)} = -\beta F_i - Q_{i3}$, которую мы называем «эффективной скоростью диссипации» и определяем в духе гипотезы замыкания Колмогорова:

$$\varepsilon_{i3(\text{эф})}^{(\tau)} \equiv -\beta F_i - Q_{i3} = \frac{\tau_{i3}}{C_\tau t_T} = \frac{\tau_{i3}\varepsilon_K}{C_\tau E_K}, \tag{33}$$

где C_τ — безразмерная константа. Таким образом, уравнение (9), описывающее баланс τ_{i3} (i = 1, 2), упрощается и принимает вид

$$\frac{D\tau_{i3}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z}\Phi_i^{(\tau)} = -2E_z\frac{\partial U_i}{\partial z} - \frac{\tau_{i3}}{C_\tau t_T}, \tag{34}$$

где $\Phi_i^{(\tau)}$ — вертикальный турбулентный поток вертикального турбулентного потока количества движения τ_{i3}:

$$\Phi_i^{(\tau)} = \left\langle u_i w^2 \right\rangle + \frac{1}{\rho_0}\left\langle p u_i \right\rangle. \tag{35}$$

Как показано в [20, 22], соотношение (33) подтверждается анализом уравнения баланса для тензора напряжений Рейнольдса в k-пространстве с использованием «τ-приближения». На рис. 1 показаны результаты проверки этого соотношения по данным вихреразрешающего моделирования двух типов атмосферного пограничного слоя: ночного устойчивого (в котором приземный поток плавучести отрицателен, а свободное течение стратифицировано нейтрально) и условно нейтрального (в котором приземный поток плавучести близок к нулю, а свободное течение стратифицировано устойчиво). Так как вихреразрешающие модели не позволяют непосредственно определять ε_K, для оценки правой части в соотношении (33) использовалось соотношение $\varepsilon_K = -\tau_{i3}\partial U_i/\partial z + \beta F_z$, вытекающее из (24) при равновесном режиме турбулентности. Разброс точек велик, но в целом рис. 1 подтверждает линейную связь между эффективной скоростью диссипации $\varepsilon_{13(\text{эф})}^{(\tau)} \equiv -\beta F_i - Q_{13}$ (ось абсцисс) и ее выражением согласно гипотезе Колмогорова $\tau_{13}\varepsilon_K/E_K$ (ось ординат). Серый коридор, в который попадает большинство точек на графике, соответствует выражению (33) при значении C_τ в диапазоне $0{,}1 < C_\tau < 1$, в который попадает и наша эмпирическая оценка $C_\tau = 0{,}2$ (см. далее разд. 2.3).

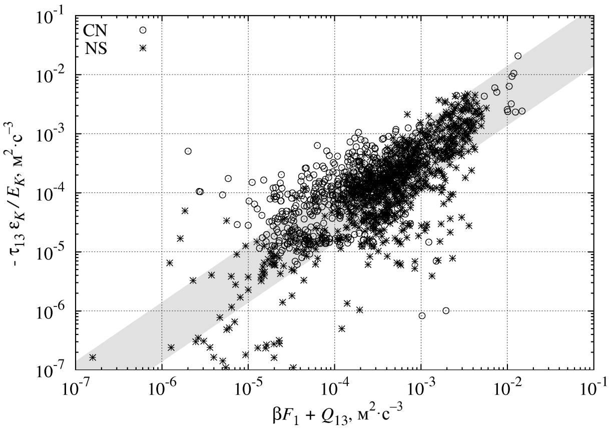


Рис. 1. Проверка параметризации колмогоровского типа в применении к эффективной скорости диссипации вертикального турбулентного потока количества движения $\varepsilon^{(\tau)}_{i3(\text{эф})}$ по данным вихреразрешающего моделирования условно нейтральных [CN] и ночных устойчивых [NS] пограничных слоев (DATABASE64 [24, 25, 26]). По оси абсцисс отложены значения $\varepsilon^{(\tau)}_{i3(\text{эф})}$ согласно определению: $\varepsilon^{(\tau)}_{i3(\text{эф})} = -\beta F_1 + Q_{13}$, по оси ординат — согласно параметризации: $\varepsilon^{(\tau)}_{i3(\text{эф})} = \tau_{13}\varepsilon_K / E_K$

Как показано в нашей предшествующей работе (приложение А в [68]), в уравнении (10), записанном для F_z, второй член левой части $\rho_0^{-1}\langle\theta\partial p/\partial z\rangle$ пропорционален первому члену $\beta\left\langle\theta^2\right\rangle$, так что их отношение можно считать константой (для которой мы принимаем обозначение $1 - C_\theta$):

$$\frac{\rho_0^{-1}\langle\theta\partial p/\partial z\rangle}{\beta\left\langle\theta^2\right\rangle} = \text{const} = 1 - C_\theta\,. \tag{36}$$

Эта аппроксимация неплохо подтверждается данными вихреразрешающего моделирования, показанными на рис. 2. Большинство точек действительно лежит в пределах узкого коридора, соответствующего соотношению (36). При этом уравнение (10) упрощается и принимает вид

$$\frac{DF_z}{Dt} + \frac{\partial}{\partial z}\Phi_z^{(F)} = -2(E_z - C_\theta E_p)\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \frac{F_z}{C_F t_T}\,. \tag{37}$$

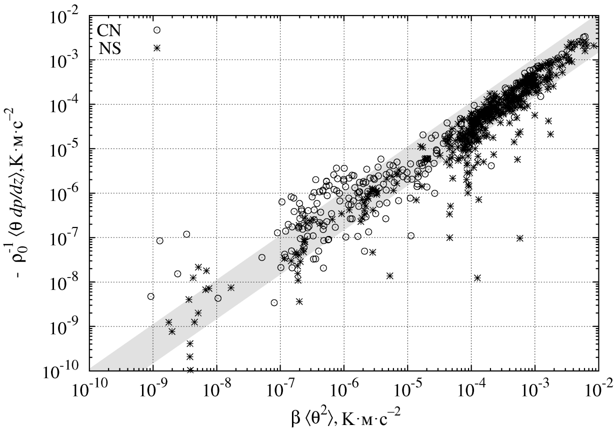


Рис. 2. Сравнение первого (абсцисса) и второго (ордината) членов в правой части уравнения (10) по данным вихреразрешающего моделирования (DATABASE64 [24—26]). Линейная зависимость, показанная в виде серой полосы, соответствует выражению (36)

Система уравнений (20), (21), (24), (29), (30), (34), (37) связывает между собой все виды энергии: E_i (i = 1, 2, 3), E_K, E_P, E_θ, $E = E_K + E_p$ и вертикальные турбулентные потоки количества движения τ_{i3} (i = 1, 2) и потенциальной температуры F_z. Для ее замыкания остается определить вертикальную составляющую КЭТ E_z (см. далее разд. 2.2) и турбулентный масштаб времени t_T (разд. 2.4).

2. Равновесный режим турбулентности

2.1. Параметры стратификации и коэффициенты турбулентного переноса

При равновесном режиме турбулентности упрощенные уравнения баланса главных вторых моментов, выведенные в разд. 1.2, превращаются в алгебраические соотношения. В правой части уравнения баланса КЭТ (24) первый член

$$-\tau_{i3}\frac{\partial U_i}{\partial z} = \tau S\,, \tag{38}$$

где τ и S — абсолютные значения векторов $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ и $\mathbf{S} = (\partial U/\partial z, \partial V/\partial z)$, описывает скорость генерации КЭТ, а второй член βF_z — скорость преобразования КЭТ в ПЭТ. Отношение этих членов

$$\mathrm{Ri}_f \equiv \frac{-\beta F_z}{\tau S}\,, \tag{39}$$

характеризующее наряду с градиентным числом Ричардсона Ri (3) степень влияния стратификации на турбулентность, естественно называть энергетическим числом Ричардсона[3]. Его можно представить в виде

$$\mathrm{Ri}_f = \frac{\tau^{1/2}}{SL}\,, \tag{40}$$

где $\tau^{1/2}/S$ — масштаб длины, характеризующий сдвиг средней скорости, а L — масштаб длины Обухова [6]:

$$L = \frac{\tau^{3/2}}{-\beta F_z}\,. \tag{41}$$

В приземном слое воздуха степень влияния стратификации на турбулентность принято характеризовать безразмерной высотой [4]:

$$\varsigma = z/L. \tag{42}$$

При равновесном режиме уравнения баланса вертикальных потоков количества движения τ_{i3} (34) и потенциальной температуры F_z (37) позволяют выразить τ_{i3} и F_z в терминах гипотезы о градиентном переносе:

$$\tau_{i3} = -K_M \frac{\partial U_i}{\partial z}, \quad K_M = 2C_\tau E_z t_T\,, \tag{43}$$

$$F_z = -K_H \frac{\partial \Theta}{\partial z}, \quad K_H = 2C_F t_T E_z \left(1 - C_\theta \frac{E_p}{E_z}\right), \tag{44}$$

где K_M и K_H — коэффициенты турбулентной вязкости и температуропроводности, отношение которых называется турбулентным числом Прандтля:

$$\mathrm{Pr}_T \equiv \frac{K_M}{K_H} \equiv \frac{\mathrm{Ri}}{\mathrm{Ri}_f} = \frac{C_\tau}{C_F}\left(1 - C_\theta \frac{E_p}{E_z}\right)^{-1}. \tag{45}$$

Как видно из уравнения баланса КЭТ (24), при равновесном режиме энергетическое число Ричардсона Ri_f с увеличением Ri возрастает, но не может быть больше единицы. Поэтому Ri_f стремится к некоторому предельному значению: $\mathrm{Ri}_f \to R_\infty < 1$, и, согласно (45), турбулентное число Прандтля асимптотически линейно возрастает:

$$\mathrm{Pr}_T \to \mathrm{Ri}/R_\infty \text{ при } \mathrm{Ri} \to \infty\,. \tag{46}$$

---

[3] В англоязычной литературе традиционно используется ничего не говорящее название *flux Richardson number*.

Похожий анализ, включающий аппроксимацию $\mathrm{Pr}_T \approx \mathrm{Pr}_t^{(0)} + \mathrm{Ri} / R_\infty$ и эмпирическую оценку $R_\infty \approx 0,25$ (совпадающую с нашей оценкой), выполнили Шуман и Герц [54]. Как следует из (45) и (46), константа C_θ, входящая в соотношение (36) и уравнение (37), должна удовлетворять соотношению

$$C_\theta = \left(E_z / E_p \right)_{\mathrm{Ri} \to \infty}, \tag{47}$$

а следовательно, не является независимой и выражается через другие константы.

2.2. Распределение КЭТ между составляющими скорости

В рассматриваемых течениях сдвиг средней скорости ветра непосредственно генерирует продольные флуктуации, энергия которых E_x частично преобразуется в энергию поперечных и вертикальных флуктуаций E_y и E_z. В уравнении (9) этот механизм описывается членом Q_{ij}, определением которого служит формула (15), а общепринятой параметризацией — гипотетическое соотношение Ротта (27). При равновесном режиме уравнения баланса КЭТ для отдельных составляющих (20) и (21) в сочетании с (27) приводят к выражениям для долей продольной $A_x = E_x / E_K$, поперечной $A_y = E_y / E_K$ и вертикальной $A_z = E_z / E_K$ составляющих КЭТ со следующими свойствами: а) при нейтральной стратификации $A_z = A_y$; б) при усилении стратификации A_x растет за счет убывания A_z, а A_y остается неизменной. Оба эти вывода противоречат атмосферным данным: при нейтральной стратификации $A_z^{(0)} \equiv A_z \big|_{\varsigma=0}$ существенно меньше, чем $A_y^{(0)} \equiv A_y \big|_{\varsigma=0}$; при усилении стратификации A_y растет, а A_x не меняется или даже убывает, в результате чего турбулентность постепенно становится изотропной в горизонтальной плоскости: $E_y \to E_x$, а доля вертикальной составляющей A_z убывает, стремясь к ненулевому предельному значению. На рис. 3 показаны A_x, A_y и A_z в зависимости от безразмерной высоты z / L. Разумно предположить, что подавление вертикальных флуктуаций силами плавучести облегчает обмен энергией между E_y и E_x, тем самым способствуя постепенному преобразованию существенно трехмерной турбулентности в квазидвухмерную горизонтальную турбулентность, наблюдающуюся в блинообразных турбулентных пятнах при очень сильной стратификации.

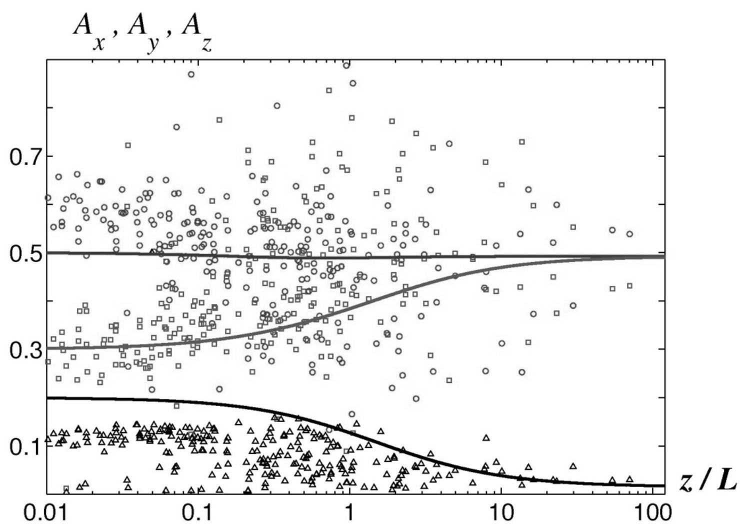


Рис. 3. Доли КЭТ E_K, приходящиеся на разные направления: $A_x = E_x / E_K$ вдоль направления ветра (кружки), $A_y = E_y / E_K$ поперек ветра (квадраты) и $A_z = E_z / E_K$ в вертикальном направлении (треугольники), по данным эксперимента «Хар-Гзыр-2007» Института физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН (данные любезно предоставлены Р. Кузнецовым). Кривые построены по соотношениям (50) при $C_0 =$ $= 0{,}125$, $C_1 = 0{,}5$ и $C_2 = 0{,}72$, преобразованным в зависимости от z/L согласно (71)

Чтобы учесть эти свойства атмосферной турбулентности, мы предлагаем следующую модель *энергообмена*, описывающую влияние стратификации в терминах нормированного *энергетического* числа Ричардсона Ri_f / R_∞, меняющегося от 0 при нейтральной стратификации до 1 при предельно устойчивой стратификации:

$$Q_{11} = -\frac{2C_r}{t_T}\left(E_1 - \frac{1 - C_1 - C_2\,\mathrm{Ri}_f / R_\infty}{3} E_\Leftrightarrow\right), \tag{48а}$$

$$Q_{22} = -\frac{2C_r}{t_T}\left(E_2 - \frac{1 + C_1 + C_2\,\mathrm{Ri}_f / R_\infty}{3} E_\Leftrightarrow\right), \tag{48б}$$

$$Q_{33} = -\frac{2C_r}{t_T}\left(E_3 - E_K + \frac{2}{3} E_\Leftrightarrow\right), \tag{48в}$$

где $E_\Leftrightarrow$ — доля КЭТ, участвующая в обмене энергией:

$$E_\Leftrightarrow = \left(1 + C_0 \frac{\mathrm{Ri}_f}{R_\infty}\right) E_K - (1 + C_0) \frac{\mathrm{Ri}_f}{R_\infty} E_3 . \tag{49}$$

Подставляя (48)—(49) в равновесные варианты уравнений (20) и (21), получаем

$$A_x = \frac{1}{(1+C_r)(1-\mathrm{Ri}_f)} +$$
$$+\left(1 - C_1 - C_2\frac{\mathrm{Ri}_f}{R_\infty}\right)\frac{C_r}{3(1+C_r)}\left[1+\frac{\mathrm{Ri}_f}{R_\infty}[C_0-(1+C_0)A_z]\right], \tag{50а}$$

$$A_y = \left(1 + C_1 + C_2\frac{\mathrm{Ri}_f}{R_\infty}\right)\frac{C_r}{3(1+C_r)}\left[1+\frac{\mathrm{Ri}_f}{R_\infty}[C_0-(1+C_0)A_z]\right], \tag{50б}$$

$$A_z = \frac{E_z}{E_K} = \frac{C_r\left(1-2C_0\,\mathrm{Ri}_f/R_\infty\right)\left(1-\mathrm{Ri}_f\right)-3\mathrm{Ri}_f}{\left(1-\mathrm{Ri}_f\right)\left\{3+C_r\left[3-2(1+C_0)\,\mathrm{Ri}_f/R_\infty\right]\right\}}, \tag{50в}$$

где C_0, C_1 и C_2 — безразмерные эмпирические константы. На рис. 3 вместе с экспериментальными данными показаны зависимости (50) с ориентировочными значениями эмпирических констант $C_1 = 0{,}5$ и $C_2 = 0{,}72$, преобразованные в функции от безразмерной высоты z/L с помощью соотношений (71) (см. далее разд. 2.4). В дальнейшем нам потребуется только выражение (50в), необходимое для определения E_z в выражениях для коэффициентов турбулентной вязкости (43) и температуропроводности (44). Согласно (50в) A_z меняется от максимального значения при нейтральной стратификации:

$$A_z\Big|_{\mathrm{Ri}=0} = A_z^{(0)} = \frac{C_r}{3(1+C_r)}, \tag{51}$$

до минимального значения при предельно устойчивой стратификации:

$$A_z\Big|_{\mathrm{Ri}\to\infty} = A_z^{(\infty)} = \frac{C_r(1-2C_0)-\dfrac{3R_\infty}{1-R_\infty}}{3+C_r(1-2C_0)}, \tag{52}$$

где C_0, C_r и R_∞ — эмпирические константы.

2.3. Простейшие следствия теории и ее эмпирическая проверка

При равновесном режиме соотношения (20), (21), (24), (29), (30), (32), (34), (37) составляют систему алгебраических уравнений, описывающих локальные балансы между продукционными и диссипативными процессами. Эта система не замкнута, пока не определен турбулентный масштаб времени t_T, тем не менее она позволяет определить основные безразмерные характеристики турбулентности как универсальные функции от энергетического и градиентного чисел Ричардсона, независимо от определения t_T.

Комбинируя (24), (30) и (32), получаем отношения КЭТ и ПЭТ к суммарной энергии турбулентности:

$$\frac{E_K}{E}=\frac{1-\mathrm{Ri}_f}{1-(1-C_p)\mathrm{Ri}_f}\,, \tag{53}$$

$$\frac{E_p}{E}=\frac{C_p\mathrm{Ri}_f}{1-(1-C_p)\mathrm{Ri}_f}\,. \tag{54}$$

Далее, используя (47), находим C_θ:

$$C_\theta=\frac{(1-R_\infty)A_z^{(\infty)}}{C_pR_\infty}\,, \tag{55}$$

и, используя (45), (53)—(55), определяем зависимости от Ri_f градиентного числа Ричардсона Ri и турбулентного числа Прандтля Pr_T:

$$\mathrm{Ri}=\mathrm{Pr}_T\,\mathrm{Ri}_f=\frac{C_\tau}{C_F}\mathrm{Ri}_f\left(1-\frac{\mathrm{Ri}_f\,(1-R_\infty)\,\mathrm{A}_z^{(\infty)}}{R_\infty\left(1-\mathrm{Ri}_f\right)\mathrm{A}_z(\mathrm{Ri}_f)}\right)^{-1}. \tag{56}$$

Согласно (50в) и (56), Ri представляет собой монотонно и неограниченно возрастающую функцию от Ri_f. Отсюда, в свою очередь, следует, что Ri_f является монотонно возрастающей функцией от Ri, стремящейся к R_∞ при $\mathrm{Ri}\to\infty$, а Pr_T является неограниченно возрастающей функцией от Ri с асимптотой $\mathrm{Pr}_T\to\mathrm{Ri}/R_\infty$ при $\mathrm{Ri}\to\infty$. Эмпирические графики этих функций, показанные на рис. 4 и 5, позволяют довольно уверенно оценить R_∞ = 0,25. При малых Ri данные, приведенные на рис. 5, согласуются с общепринятой оценкой турбулентного числа Прандтля при нейтральной стратификации [18, 19, 27]:

$$\mathrm{Pr}_T\to\mathrm{Pr}_T^{(0)}=\frac{C_\tau}{C_F}=0{,}8\ \text{при}\ \mathrm{Ri}\to 0\,. \tag{57}$$

По мере перехода от нейтральной к слабо устойчивой стратификации в линейном приближении относительно Ri турбулентное число Прандтля растет по линейному закону:

$$\mathrm{Pr}_T\approx\mathrm{Pr}_T^{(0)}+\frac{(1-R_\infty)\mathrm{A}_z^{(\infty)}}{R_\infty\mathrm{A}_z^{(0)}}\mathrm{Ri}\,. \tag{58}$$

При эмпирических значениях R_∞ = 0,25, $\mathrm{A}_z^{(0)}$ = 0,2 и $\mathrm{A}_z^{(\infty)}$ = 0,03 (рис. 6) соотношение (58) принимает вид $\mathrm{Pr}_T\approx$ 0,8 + 0,45Ri. Это означает, что в режиме «сильной турбулентности» (в интервале 0 < Ri < 0,25), типичном для атмосферных (и гидросферных) турбулентных пограничных слоев, турбулентное число Прандтля Pr_T меняется от 0,8 до 0,9, т. е. фактически в пределах погрешностей его определения. На рис. 5 рост Pr_T в этом интервале значений Ri на глаз вообще не заметен. Так как измерения турбулентности производились большей частью именно в пограничных слоях, эта особенность сильной турбулентности воспринималась как присущая любой турбулентности и получила название «аналогия Рейнольдса».

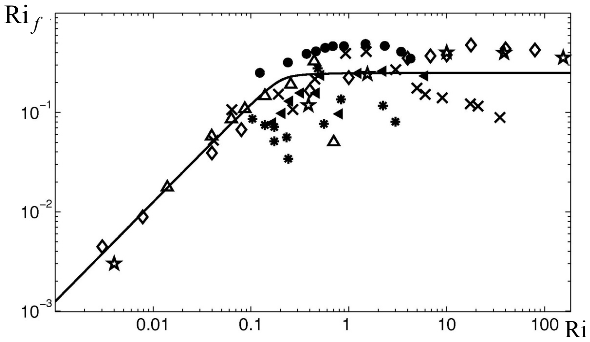


Рис. 4. Зависимость энергетического числа Ричардсона $\mathrm{Ri}_f = -\beta F_z / (\tau S)$ от градиентного числа Ричардсона Ri по данным метеорологических наблюдений (черные треугольники [32] и снежинки [10]), лабораторных экспериментов (крестики [50], ромбы [48] и черные кружки [59]), прямого численного моделирования (пятиконечные звезды [60]) и вихреразрешающего моделирования (белые треугольники [25]). Теоретическая кривая — согласно выражению (56) соответствует равновесному режиму турбулентности при предельном значении $\mathrm{Ri}_f \to R_\infty = 0{,}25$

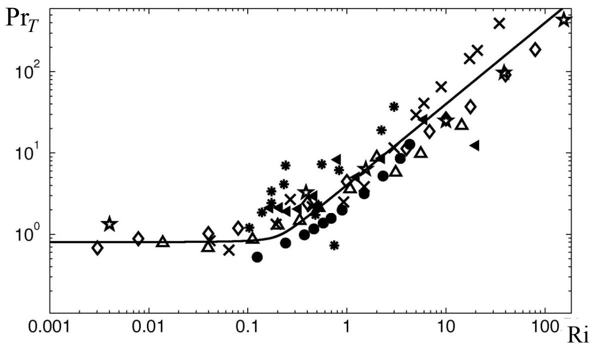


Рис. 5. Зависимость турбулентного числа Прандтля $\mathrm{Pr}_T = K_M/K_H$ от Ri по тем же данным, что и на рис. 4; теоретическая кривая — согласно (56)

Однако в режиме «слабой турбулентности», при $\mathrm{Ri} > 1$, зависимость Pr_T от Ri на порядок сильнее: $\mathrm{Pr}_T \approx 4\mathrm{Ri}$, так что аналогия Рейнольдса совершенно не применима. Принципиально разное поведение Pr_T при малых и больших Ri уже отмечалось в [67].

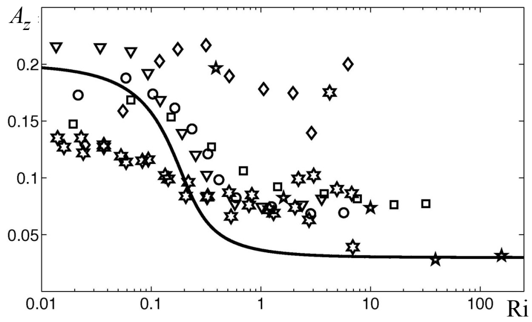


Рис. 6. Зависимость вертикальной доли КЭТ $A_z = E_z / E_K$ от Ri по данным метеорологических наблюдений (квадраты — эксперимент CME [42], кружки — эксперимент SHEBA [63], перевернутые треугольники — эксперимент CASES-99 [9, 49], шестиконечные звезды — наблюдения обсерватории Линденберг, Германия [23]), лабораторных экспериментов (ромбы [48]), прямого численного моделирования (пятиконечные звезды [60]); кривая — согласно (50в), (56) при $C_0 = 0{,}125$

В сочетании с алгебраическим уравнением (56), определяющим Ri_f как однозначную функцию от Ri, соотношения (50в), (53) и (54) определяют зависимости от Ri величин A_z, E_K/E и E_p/E. Выражение для доли энергии вертикальных флуктуаций скорости $A_z(\mathrm{Ri})$ сравнивается с имеющимися экспериментальными данными на рис. 6. Подставляя основанные на этом рисунке грубые оценки $A_z^{(0)} = 0{,}2$ и $A_z^{(\infty)} = 0{,}03$ в соотношение (51), получаем $C_r = 1{,}5$, а подставляя эти оценки и уже найденное эмпирическое значение $R_\infty = 0{,}25$ в (52), получаем $C_0 = 0{,}125$.

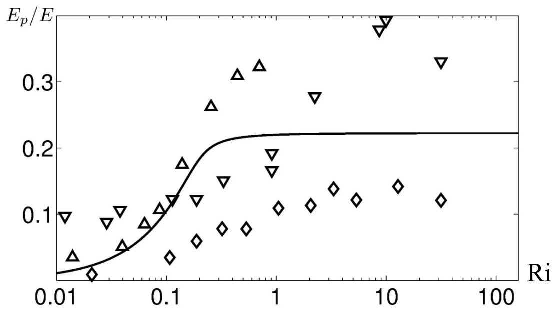


Рис. 7. Зависимость отношения ПЭТ к ее полной энергии $= E_K^{1/2} t_T$ от Ri по данным метеорологических наблюдений (перевернутые треугольники — CASES-99 [9, 49]), вихреразрешающего моделирования (белые треугольники [25]) и лабораторных экспериментов (ромбы [48]); кривая — согласно (54), (56)

Выражение (54) для отношения потенциальной энергии турбулентности к ее полной энергии E_p/E сравнивается с экспериментальными данными на рис. 7. При $\mathrm{Ri} \to \infty$ это отношение стремится к пределу:

$$\frac{E_P}{E} \to \frac{C_p R_\infty}{1-(1-C_p)Ri_\infty}\,. \tag{59}$$

Экспериментальные данные позволяют оценить предельное значение $E_p / E|_{\mathrm{Ri}\to\infty} \to 0{,}223$. Подставляя его в (59) и учитывая значение $R_\infty =$ $= 0{,}25$, получаем $C_P = 0{,}86$. Напомним, что C_p представляет собой отношение диссипативных масштабов времени для КЭТ и ПЭТ. В работах [64, 65] эти масштабы детально исследовались по данным измерений турбулентности, порождаемой осциллирующими решетками [30, 46, 56, 66], а также по данным прямого численного моделирования однородной турбулентности, порождаемой сдвигом скорости при устойчивой [55] и нейтральной [52] стратификации. Авторы работ [64, 65] установили, что отношение этих масштабов практически не зависит от стратификации. Это подтверждает нашу трактовку C_p как универсальной константы.

Комбинируя равновесные варианты уравнений (24) и (29) соответственно с соотношениями (24) и (44)—(45), получаем выражения безразмерных турбулентных потоков количества движения τ / E_K и температуры $F_z(E_K E_\theta)$ в зависимости от энергетического числа Ричардсона Ri_f:

$$\left(\frac{\tau}{E_K}\right)^2 = \frac{2C_\tau \mathrm{A}_z(\mathrm{Ri}_f)}{(1-\mathrm{Ri}_f)}\,, \tag{60}$$

$$\frac{F_z^2}{E_K E_\theta} = \frac{2C_\tau}{C_p}\frac{\mathrm{A}_z(\mathrm{Ri}_f)}{\mathrm{Pr}_T}\,. \tag{61}$$

Функция $\mathrm{A}_z(\mathrm{Ri}_f)$ определяется согласно (50в), а функция $\mathrm{Ri}_f(\mathrm{Ri})$ — согласно (56), поэтому выражения (60) и (61) позволяют определить $(\tau / E_K)^2$ и $F_z^2 / (E_K E_\theta)$ как функции от Ri. Первая из них сравнивается с доступными экспериментальными данными на рис. 8. Несмотря на разброс, данные в целом подтверждают убывание безразмерного потока количества движения с ростом Ri и согласуются с общепринятой оценкой $(\tau / E_K)_{\mathrm{Ri}\to 0} = 0{,}2$ [45]. Подставляя ее в (60), получаем $2\mathrm{C}_\tau A_z^{(0)} = 0{,}08$ и, учитывая уже оцененное значение $A_z^{(0)} = 0{,}2$ (см. рис. 6), получаем $\mathrm{C}_\tau = 0{,}2$. Зависимость $F_z^2 / (E_K E_\theta)$ от Ri, показанная на рис. 9, неплохо согласуется с экспериментальными данными. Сопоставляя эмпирическую оценку $[F_z^2 / (E_K E_\theta)]_{\mathrm{Ri}\to 0} = 0{,}12$ с теоретическим выражением

$$\left(\frac{F_z^2}{E_K E_\theta}\right)_{\mathrm{Ri}\to 0} = \frac{2\mathrm{C}_\tau}{C_p}\frac{\mathrm{A}_z^{(0)}}{\mathrm{Pr}_T^0} = \frac{2\mathrm{A}_z^{(0)}\mathrm{C}_F}{C_p} = 0{,}12\,, \tag{62}$$

получаем $C_F / C_p = 0{,}3$ и (учитывая уже полученную оценку C_p = 0,86) C_F = 0,25. Таким образом, получены эмпирические оценки шести безразмерных констант:

$$C_0 = 0{,}125;\; C_F = 0{,}25;\; C_p = 0{,}86;\; C_r = 1{,}5;\; C_\tau = 0{,}2;\; R_\infty = 0{,}25. \tag{63}$$

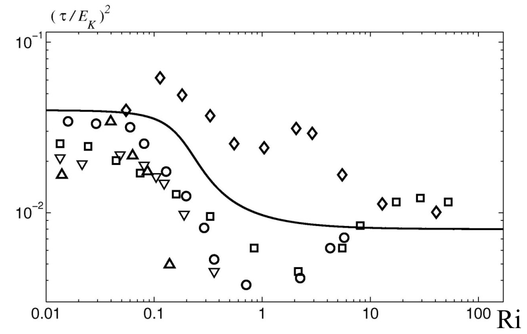


Рис. 8. Зависимость нормированного турбулентного потока количества движения от Ri по данным метеорологических наблюдений (квадраты — CME [42], кружки — SHEBA [63], перевернутые треугольники — CASES-99 [9, 49]), лабораторных экспериментов (ромбы [48]), вихреразрешающего моделирования (треугольники — DATABASE64 [25]); кривая — согласно (60)

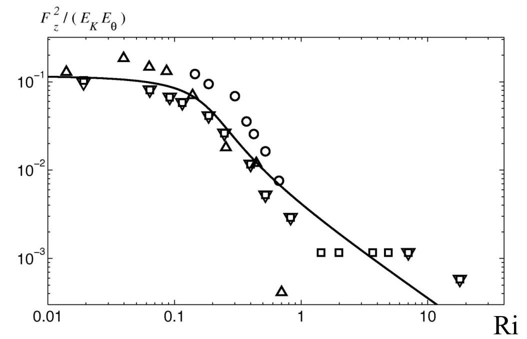


Рис. 9. Зависимость нормированного турбулентного потока потенциальной температуры от Ri по данным метеорологических наблюдений (квадраты — CME [42], кружки — SHEBA [63], перевернутые треугольники — CASES-99 [9, 49]) и вихреразрешающего моделирования (треугольники — DATABASE64 [25]); кривая — согласно (61)

Согласно (47) константа $C_\theta = \lim(E_z / E_p)\big|_{\mathrm{Ri}\to\infty}$ не является независимой. Используя уже найденные константы (63), соотношение $E_z / E_p = A_z(E / E_p - 1)$, вытекающее из (53)—(54), соотношение (52) для $A_z^{(\infty)}$ и эмпирическую оценку $\lim(E / E_p)\big|_{\mathrm{Ri}\to\infty} = 8$, вытекающую из условия (59) и данных рис. 7, получаем

$$C_\theta = \frac{C_r(1-2C_0)(1-R_\infty)-3R_\infty}{[1+(C_p-1)R_\infty][3+C_r(1-2C_0)]} = 0{,}105. \qquad (64)$$

Приведенные значения безразмерных констант весьма приблизительны. Мы сознательно отобрали немногие данные, относящиеся к условиям, наиболее близким к равновесному режиму турбулентности, чтобы избежать огромных разбросов, возникающих при нестационарных или вертикально-неоднородных режимах. Практически все доступные данные, за исключением данных прямого численного моделирования турбулентности при заданных значениях Ri, получены в условиях вертикально-неоднородной, а во многих экспериментах и нестационарной турбулентности.

Наши грубые оценки безразмерных констант, основанные на небольшом количестве не вполне надежных данных, в какой-то мере оправдывает то обстоятельство, что сами эти константы тесно связаны в контексте теории, так что подгонка любой из них к экспериментальным данным затрагивает и ряд других констант; и это сильно сужает диапазоны их взаимно согласованных эмпирических значений. Кроме того, в нашем анализе число оцениваемых констант меньше числа теоретических соотношений, сопоставлявшихся с эмпирическими данными, что налагало дополнительные ограничения на определяемые значения констант. Как бы то ни было, предстоит еще большая работа по всесторонней проверке теории при равновесных и неравновесных режимах и уточнению всех входящих в нее безразмерных констант.

В этом разделе получены универсальные зависимости основных безразмерных вторых моментов турбулентности A_x, A_y и A_z (50а), (50б), (50в), E_K / E и E_p / E (53) и (54), τ / E_K и $F_z(E_K E_\theta)$ (60) и (61) от энергетического числа Ричардсона Ri_f, а также самого этого числа Ri_f и турбулентного числа Прандтля $\mathrm{Pr}_T = \mathrm{Ri} / \mathrm{Ri}_f$ (56) от градиентного числа Ричардсона Ri (3) при равновесном режиме турбулентности. Как уже упоминалось, этот результат получен из незамкнутой системы уравнений независимо от определения турбулентного масштаба времени t_T (или турбулентного масштаба длины $l = E_K^{1/2} t_T$). Этот неожиданный факт, по-видимому, отражает не замеченное до сего времени фундаментальное свойство самоподобия равновесной турбулентности.

2.4. Турбулентные масштабы времени и длины

Как уже говорилось, соотношение (1), связывающее скорость диссипации КЭТ ε_K с турбулентным масштабом времени t_T (или турбулентным масштабом длины $l = E_K^{1/2} t_T$), не является гипотетическим, а всего лишь заменяет одну неизвестную (ε_K) другой (t_T или l). В отличие от этого, соотношения (19), не говоря уже о (33), предполагают, что диссипативные масштабы времени для потока температуры F_i, энергии температурных флуктуаций E_θ (а следовательно, и E_P) и потока количества движения τ_{i3} отличаются от t_T лишь коэффициентами пропорциональности, представляющими собой универсальные безразмерные константы. Таким образом, определение t_T и l (равносильное определению ε_K) представляет собой одну из ключевых проблем теории турбулентного замыкания.

Единственный случай, когда l (а следовательно, и $t_T = l / E_K^{1/2}$) легко определяется, это рассмотренное Колмогоровым турбулентное течение нейтрально стратифицированной жидкости или газа в полупространстве над невращающейся плоской поверхностью. Тогда размеры турбулентных вихрей ограничены лишь расстоянием от поверхности, поэтому и основной турбулентный масштаб длины при нейтральной стратификации пропорционален этому расстоянию:

$$l_0 = l\big|_{\mathrm{Ri}=0} = C_l z, \tag{65}$$

где C_l = const. Обухов [5] из геометрических соображений получил выражение основного турбулентного масштаба длины для областей со сложной геометрией.

При устойчивой стратификации в атмосферном пограничном слое затрата кинетической энергии турбулентного вихря на преодоление отрицательной силы плавучести налагает на размеры вихрей дополнительное ограничение, мерой которого может служить масштаб длины Обухова (41) или другие масштабы длины, характеризующие влияние стратификации плотности на турбулентность, например $E_K^{1/2} / N$ или масштаб Озмидова $\varepsilon_K^{1/2} / N^{3/2}$. Таким образом, если пренебречь вращением Земли, налагающим на размеры вихрей еще одно ограничение, турбулентный масштаб длины l в устойчиво стратифицированном пограничном слое атмосферы должен вблизи подстилающей поверхности (при $z << L$) расти с увеличением высоты по линейному закону $l = l_0 \sim z$, а на достаточном удалении от поверхности (при $z >> L$) стремиться к предельному значению $l \sim L$.

С учетом этих асимптотических оценок, на первый взгляд, представляется разумным определить l путем интерполяции $l \sim z / (1 + \mathrm{const}\, z / L)$

или аналогичных интерполяций, основанных на масштабах длины $E_K^{1/2}/N$, $\varepsilon_K^{1/2}/N^{3/2}$ и т. п. Однако ни одна из подобных интерполяций не привела к удовлетворительным результатам. Чисто эмпирический подход к проблеме определения $t_T \equiv E_K/\varepsilon_K$ или $l \equiv E_K^{1/2} t_T$ в устойчиво стратифицированной турбулентности до сих пор остается неконструктивным, в частности, из-за невысокого качества и ограниченного количества имеющихся данных о E_K и ε_K при сильно устойчивой стратификации.

В работе [70] развит альтернативный подход. В его основе лежит уравнение баланса КЭТ (24), позволяющее выразить t_T при равновесном режиме через легко определяемые параметры: $t_T = E_K[\tau S(1-\mathrm{Ri}_f)]^{-1}$. Это дает возможность не ограничиваться имеющимися скудными сведениями о временном t_T и пространственном l масштабах диссипации КЭТ, а обратиться к обширному материалу исследований градиента средней скорости.

Начнем с нейтральной стратификации. При Ri << 1, z/L << 1 выражение (65) в сочетании с (51), (60) и равновесным вариантом уравнения (24) приводят к известному выражению для градиента средней скорости вблизи твердой стенки

$$S = \tau^{1/2}/(kz), \tag{66}$$

где k — постоянная Кармана, выражаемая в рамках нашей теории через C_l и другие эмпирические константы:

$$k = C_l \left[\frac{2C_\tau C_r}{3(1+C_r)}\right]^{3/4}. \tag{67}$$

Подставляя в (67) значения C_r и C_τ, согласно (63) получаем C_l = 2,66. В дальнейшем изложении вместо C_l используется привычная константа k = 0,4.

При сильно устойчивой стратификации ($\mathrm{Ri} > 1$, z/L >> 1) из (39) и (46) следует асимптотическое выражение для сдвига скорости

$$S = \frac{-\beta F_z}{R_\infty \tau} = \frac{\tau^{1/2}}{R_\infty L}. \tag{68}$$

Простейшая интерполяция между асимптотическими выражениями (66) и (68) имеет вид

$$S = \frac{\tau^{1/2}}{kz}\left(1 + \frac{k}{R_\infty}\frac{z}{L}\right). \tag{69}$$

Разумеется, нет никаких оснований заранее ожидать, что это выражение окажется справедливым и при слабо устойчивой стратификации. Однако бросается в глаза, что по форме оно в точности совпадает с общепризнанной линейной аппроксимацией безразмерного градиента скорости ветра в приземном слое атмосферы:

$$\Phi_M \equiv \frac{kz}{\tau^{1/2}} S = 1 + C_u \frac{z}{L}, \tag{70}$$

полученной в свое время в рамках теории подобия Монина — Обухова [4] и подтвержденной многочисленными натурными и численными экспериментами в интервале безразмерных высот $0 < z/L < 5$, что соответствует интервалу чисел Ричардсона $0 < \mathrm{Ri} < 0{,}25$ при значениях эмпирических констант $k \approx 0{,}4$ и $C_u \approx 1{,}6$ (рис. 10).

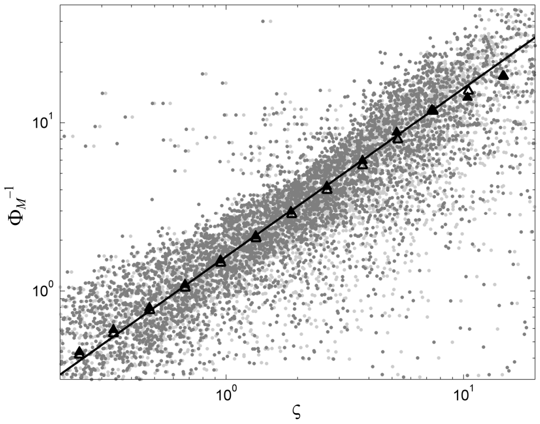


Рис. 10. Безразмерный градиент скорости ветра $\Phi_M = \left(kz/\tau^{1/2}\right)(\partial U/\partial z)$ как функция от безразмерной высоты ς в устойчиво стратифицированном пограничном слое атмосферы по данным вихреразрешающего моделирования (DATABASE64 [25]). Незакрашенные треугольники соответствуют осреднению по интервалам $\varsigma = z/L$, закрашенные треугольники — осреднению по интервалам $\varsigma = z/[(1 + C_\Omega \Omega z/E_K^{1/2})L]$ при $C_\Omega = 1$; прямая — согласно (70) при $C_u = k/R_\infty = 1{,}6$

С другой стороны, общепринятая оценка $R_\infty \approx 0{,}25$, полученная по данным лабораторных экспериментов, вихреразрешающего моделирования и прямого численного моделирования для течений с очень устойчивой стратификацией ($1 < \mathrm{Ri} < 10^2$), соответствует значению $k/R_\infty \approx 1{,}6$, совпадающему с приведенной выше оценкой C_u в соотношении (70). Иными словами, интерполяционное соотношение (69) хорошо согласуется с экспериментальными данными во всем диапазоне стратификаций — от небольших значений Ri, наблюдаемых в приземном слое атмосферы

($0 < \mathrm{Ri} < 0{,}25$), до огромных значений $\mathrm{Ri} \sim 10^2$ в численных и лабораторных экспериментах. В сочетании с определением (40) энергетического числа Ричардсона Ri_f оно устанавливает очень простую связь между Ri_f и безразмерной высотой z/L, основанной на масштабе длины Обухова:

$$\mathrm{Ri}_f = \frac{kz/L}{1+kR_\infty^{-1}z/L}, \quad \frac{z}{L} = \frac{R_\infty}{k}\frac{\mathrm{Ri}_f}{R_\infty - \mathrm{Ri}_f}. \tag{71}$$

Комбинируя (69), (71) и равновесный вариант уравнения баланса КЭТ (24), получаем следующее выражение турбулентного масштаба длины l в зависимости от z/L или Ri_f:

$$l = t_T E_K^{1/2} = kz\frac{(E_K/\tau)^{3/2}}{1+k(R_\infty^{-1}-1)z/L} = kz\left(\frac{E_K}{\tau}\right)^{3/2}\frac{1-\mathrm{Ri}_f/R_\infty}{1-\mathrm{Ri}_f}, \tag{72}$$

где E_K/τ определяется, согласно (60), как универсальная функция от Ri_f, которую при помощи (71) можно представить и как функцию от z/L. Как и ожидалось, она имеет асимптоты $l \sim z$ при $z/L \to 0$ и $l \sim L$ при $z/L \to \infty$; однако она существенно отличается от простой линейной интерполяции между $1/z$ и $1/L$, так как множитель $(E_K/\tau)^{3/2}$ в правой части (72) существенно возрастает с усилением устойчивости и приближается к конечному пределу лишь при $\mathrm{Ri} > 1$, т. е. при сильно устойчивой стратификации за пределами геофизических пограничных слоев, в которых Ri не превосходит 0,25 (см. график эмпирической зависимости E_K/τ от Ri на рис. 8).

Кроме стратификации, на турбулентные масштабы длины l и времени t_T влияет угловая скорость вращения Земли $\Omega = 7{,}29\cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$, накладывающая дополнительное ограничение в виде вращательных масштабов длины $E_K^{1/2}/\Omega$ или времени Ω^{-1}. С учетом вращения основной масштаб длины (65) переопределяется как $l_0 = C_l z/(1+C_\Omega \Omega z/E_K^{1/2})$, где C_Ω — эмпирическая безразмерная константа, а выражение (72) принимает вид

$$\begin{aligned} l = t_T E_K^{1/2} &= \frac{kz}{1+C_\Omega \Omega z/E_K^{1/2}}\frac{(E_K/\tau)^{3/2}}{1+k(R_\infty^{-1}-1)z/L} = \\ &= \frac{kz}{1+C_\Omega \Omega z/E_K^{1/2}}\left(\frac{E_K}{\tau}\right)^{3/2}\frac{1-\mathrm{Ri}_f/R_\infty}{1-\mathrm{Ri}_f}. \end{aligned} \tag{73}$$

Влияние вращения Земли на турбулентный масштаб длины, вероятно, первым исследовал Блэкедар [11]. Он предложил соотношение, аналогичное (73), в котором, однако, вращательный масштаб длины определялся как U/f — через среднюю скорость U, а не турбулентный масштаб скорости $E_K^{1/2}$, и параметр Кориолиса $f = 2\Omega \sin\varphi$, а не угловую скорость вращения Земли Ω. В наших обозначениях идея Блэкедара записывается в виде $l_0 = C_l z / (1 + C_B fz / U)$, где C_B — безразмерная константа. Используя ее эмпирическое значение C_B = 1,5·10^3 [58] и общепринятую оценку интенсивности турбулентности в свободной атмосфере $E_K^{1/2} / U \sim 10^{-3}$, получаем грубую оценку нашей безразмерной константы $C_\Omega = C_B\,(E_K^{1/2} / U\,) = 1$.

В отличие от Блэкедара [11], мы используем в качестве масштаба скорости $E_K^{1/2}$, а не U, так как сама по себе средняя скорость на турбулентность не влияет, а в качестве масштаба времени — Ω^{-1}, а не f^{-1}, так как параметр Кориолиса f характеризует влияние лишь вертикальной составляющей вектора $\boldsymbol{\Omega}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ на горизонтальные составляющие трехмерного вектора скорости.

До сих пор мы, следуя традиции, использовали общепринятые безразмерные параметры стратификации: $\mathrm{Ri}_f = -\tau S / F_z$ и $z/L = -\beta F_z z / \tau^{3/2}$. В контексте турбулентного замыкания эти параметры определяются по локальным значениям турбулентных потоков количества движения τ и потенциальной температуры F_z, что может приводить к существенной неопределенности и даже препятствовать сходимости итерационных процедур в связи с неизбежными ошибками в определении τ и F_z. Чтобы избежать этого, мы предлагаем взамен Ri_f или z/L новый *энергетический параметр стратификации*

$$\Pi = E_p / E_K. \tag{74}$$

Согласно (24) и (30) при равновесном режиме Π выражается через энергетическое число Ричардсона:

$$\Pi = \frac{C_P \mathrm{Ri}_f}{1 + \mathrm{Ri}_f}; \tag{75}$$

соотношение (73) в терминах равновесного турбулентного масштаба времени t_{TE} принимает вид

$$t_{TE} = \frac{1}{E_K^{1/2}} = \frac{kz}{E_K^{1/2} + C_\Omega \Omega z}\left(\frac{E_K}{\tau}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{\Pi}{\Pi_\infty}\right), \tag{76}$$

где $\Pi_\infty = C_P R_\infty / (1 - R_\infty)$ = 0,14 — максимальное значение Π, достигаемое при предельно устойчивой стратификации; а выражение (60) для E_k/τ и (50в) A_z принимают вид

$$\left(\frac{E_K}{\tau}\right)^2 = \frac{C_P}{2C_\tau (C_P + \Pi) A_z}, \tag{77}$$

$$A_z = \frac{E_z}{E_K} = \frac{\Pi_\infty(C_r - 3\Pi/C_P)(C_P+\Pi) - 2C_rC_0(C_P+\Pi_\infty)\Pi}{3\Pi_\infty(1+C_r)(C_P+\Pi) - 2C_r(1+C_0)(C_P+\Pi_\infty)\Pi}. \quad (78)$$

Как видно из (50в) или из (78), A_z монотонно убывает с усилением устойчивости и при $\mathrm{Ri}_f \to R_\infty$ (или $\Pi \to \Pi_\infty$) стремится к конечному положительному пределу, тогда как t_{TE} стремится к нулю. Соотношения (76)—(78) замыкают нашу систему уравнений для основных характеристик турбулентности при равновесном режиме.

2.5. Турбулентность в приземном слое атмосферы

Соотношения (71), связывающие Ri_f с z/L, справедливы при не слишком большом удалении от подстилающей поверхности (при условии $z \ll E_K^{1/2}/\Omega$), когда прямым влиянием вращения Земли на турбулентность можно пренебречь, так что $l_0 = C_l z$. В частности, они справедливы в приземном слое воздуха, определяемом как нижняя 1/10 часть пограничного слоя. В верхней части пограничного слоя условие $z \ll E_K^{1/2}/\Omega$ может нарушаться, так как E_K существенно убывает по мере приближения к его верхней границе: $z = h$. Учитывая значение $\Omega = 7{,}29\cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$ и типичное значение $E_K^{1/2}\big|_{z=h} \sim 0{,}1$ м·с$^{-1}$, получаем оценку вращательного масштаба длины $E_K^{1/2}/\Omega \sim 10^3$ м того же порядка, что и высота пограничного слоя. В приземном слое, где влияние вращения пренебрежимо мало, безразмерные характеристики турбулентности, представленные в разд. 2.2 и 2.3 как функции от Ri_f, преобразуются с помощью (71) в функции от $\varsigma = z/L$.

Теория подобия для турбулентности в приземном слое воздуха в терминах масштаба длины L (41) и безразмерной высоты z/L, предложенная Мониным и Обуховым [4] еще в 50-е годы прошлого века, получила широкое признание и была подтверждена результатами многочисленных натурных и лабораторных экспериментов [28, 45, 57], а в последнее время и результатами вихреразрешающего и прямого численного моделирования. Ньюстед [47] путем простой замены приземных значений определяющих параметров $u_*^2 = \tau\big|_{z=0}$, $F_* = F_z\big|_{z=0}$ и $L_* = L\big|_{z=0}$ их локальными, зависящими от высоты значениями $\tau(z)$, $F_z(z)$ и $L(z)$ распространил теорию подобия на весь устойчиво стратифицированный пограничный слой.

Наша теория турбулентного замыкания в применении к равновесному режиму турбулентности при отсутствии вращения согласуется с теорией подобия Монина — Обухова и с ее обобщенной формулировкой, предложенной Ньюстедом, в том отношении, что безразмерные характеристики турбулентности в теории подобия и в теории турбулентного замыкания выражаются универсальными функциями от безразмерной высоты $\varsigma = z/L$.

Однако выводы теорий подобия относительно асимптотического поведения этих универсальных функций при очень больших значениях ς в ряде случаев оказываются ошибочными. Рассмотрим в качестве примеров вытекающие из нашей теории зависимости от ς таких параметров, как отношение турбулентных энергий согласно (54), (71):

$$\frac{E_p}{E} = \frac{C_P + R_\infty \varsigma}{R_\infty / k + [1 + (C_P - 1) R_\infty] \varsigma}; \tag{79}$$

доля энергии вертикальных флуктуаций скорости (50в), (71):

$$A_z = \frac{E_z}{E_K} = \frac{R_\infty C_r + k\varsigma \left[C_r (1 - 2C_0) - \dfrac{3R_\infty (R_\infty + k\varsigma)}{R_\infty + k\varsigma (1 - R_\infty)} \right]}{3R_\infty (1 + C_r) + k\varsigma \, [3 + C_r (1 - 2C_0)]}; \tag{80}$$

турбулентное число Прандтля (56), (71):

$$\mathrm{Pr}_T = \frac{K_M}{K_H} = \frac{C_\tau}{C_F} \left[1 + \frac{a_1 \varsigma + a_2 \varsigma^2}{1 + a_3 \varsigma} \right], \tag{81}$$

где

$$a_1 = 3k(1 + C_r) \frac{(1 - 2C_0)(R_\infty^{-1} - 1) - 3C_r^{-1}}{3 + C_r (1 - 2C_0)}, \tag{82}$$

$$a_2 = \frac{k^2}{R_\infty} [(1 - 2C_0)(R_\infty^{-1} - 1) - 3C_r^{-1}], \tag{83}$$

$$a_3 = \frac{k}{R_\infty} \left(\frac{6(C_0 + 1)}{3 + C_r (1 - 2C_0)} + 2(R_\infty - C_0) - 1 \right), \tag{84}$$

и градиентное число Ричардсона (71), (81):

$$\mathrm{Ri} = \mathrm{Ri}_f \, \mathrm{Pr}_T = \frac{C_\tau k\varsigma}{C_F (1 + R_\infty^{-1} k\varsigma)} \left[1 + \frac{a_1 \varsigma + a_2 \varsigma^2}{1 + a_3 \varsigma} \right]. \tag{85}$$

И в нашей теории, и в теории подобия Монина — Обухова градиент средней скорости в приземном слое определяется выражением (69), которое соответствует выражению для коэффициента турбулентной вязкости $K_M = \tau / S = k\tau^{1/2} z [1 + (k / R_\infty)\varsigma]^{-1}$. Последнее в сочетании с (81) определяет коэффициент турбулентной температуропроводности $K_H = K_M / \mathrm{Pr}_T$, а следовательно, и градиент потенциальной температуры $\partial\Theta / \partial z = -F_z / K_H$ и характеризующую его безразмерную функцию

$$\Phi_H \equiv \frac{k_T \tau^{1/2} z}{-F_z} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \left[1 + \frac{a_1 \varsigma + a_2 \varsigma^2}{1 + a_3 \varsigma} \right] \left(1 + \frac{k}{R_\infty} \varsigma \right), \tag{86}$$

где $k_T = (C_F / C_\tau) k = 0{,}5$ — постоянная Кармана для температуры.

Результаты проверки выражения (86) по данным вихреразрешающего моделирования показаны на рис. 11. Поскольку все эмпирические константы в (86) уже определены по независимым данным, хорошее согласие теоретической кривой и данных вихреразрешающего моделирования служит дополнительным подтверждением теории. Поскольку функции Φ_M и Φ_H определены соотношениями (70) и (86), тем самым определено и градиентное число Ричардсона: $\mathrm{Ri} = k(C_\tau / C_F)\varsigma\Phi_H / \Phi_M^2$. Результаты проверки этого выражения по данным вихреразрешающего моделирования показаны на рис. 12.

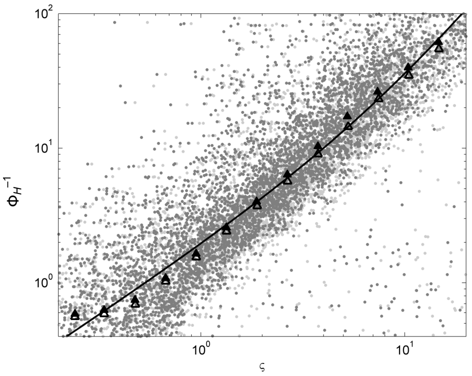


Рис. 11. Безразмерный градиент потенциальной температуры $\Phi_H = (-k_T z \tau^{1/2} / F_z) \times \times (\partial\Theta / \partial z)$ как функция от ς по тем же данным, что и на рис. 10. Незакрашенные треугольники — осреднение по интервалам $\varsigma = z/L$, закрашенные треугольники — по интервалам $\varsigma = z / [(1 + C_\Omega \Omega z / E_K^{1/2}) L]$; кривая — согласно (86)

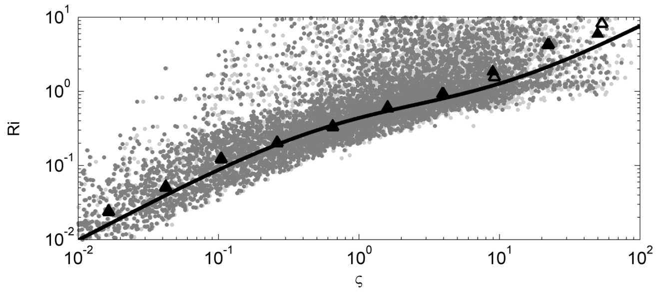


Рис. 12. Зависимость градиентного числа Ричардсона Ri от безразмерной высоты ς по данным вихреразрешающего моделирования (DATABASE64 [25]). Незакрашенные треугольники — осреднение по интервалам $\varsigma = z/L$, закрашенные треугольники — по интервалам $\varsigma = z / [(1 + C_\Omega \Omega z / E_K^{1/2}) L]$; кривая — согласно $\mathrm{Ri} = k(C_\tau / C_F)\varsigma\Phi_H / \Phi_M^2$

Осредненные данные вихреразрешающего моделирования показаны на рис. 10—12 в двух вариантах: в зависимости от $\varsigma = z/L$ (белые треугольники) и, с учетом вращения Земли, от $\varsigma = z/[(1+C_\Omega \Omega z/E_K^{1/2})L]$ при $C_\Omega = 1$ (черные треугольники). Последние лучше согласуются с теоретическими кривыми при больших ς. Этим подтверждается как сама оценка $C_\Omega = 1$, так и вывод о том, что вращение Земли начинает влиять на турбулентные масштабы времени и длины уже в верхней части планетарного пограничного слоя, т. е. на высотах порядка нескольких сотен метров.

Насколько нам известно, ни одно из соотношений (79)—(86) ранее не было получено. Более того, согласно традиционной трактовке теории подобия Монина — Обухова полагалось, что максимально возможные в приземном и пограничном слоях атмосферы значения $\varsigma = z/L$, не превышающие 10, как раз и соответствуют режиму предельно устойчивой стратификации, получившему название z-независимой стратификации. Соответственно этому считалось, что на высотах существенно больше масштаба длины Обухова L характеристики турбулентности перестают зависеть от расстояния до подстилающей поверхности z, а, следовательно, безразмерные величины, стоящие в правых частях соотношений (79)—(81) и (85) должны обращаться в универсальные константы.

Главная ошибка здесь состоит в том, что режим предельно устойчивой стратификации принципиально недостижим в пограничном слое, а тем более в приземном слое. Числа Ричардсона даже в верхней части устойчиво стратифицированного пограничного слоя, как правило, не превосходят 0,2, а значения безразмерной высоты ς не превосходят 10. Но даже и при $\varsigma \to \infty$ безразмерные параметры турбулентности не обязаны обращаться в константы, а могут стремиться к нулю (как, например, безразмерный поток тепла согласно соотношению (61) и рис. 9) или к бесконечности (как турбулентное число Прандтля Pr_T согласно соотношению (85) и рис. 5). В реальности устойчиво стратифицированные атмосферные пограничные слои стратифицированы лишь слабо устойчиво ($\mathrm{Ri} \ll 1$ и $\varsigma < 10$), что в нашей терминологии соответствует режиму «сильной турбулентности». Сильно устойчивая стратификация ($\mathrm{Ri} > 1$ и $\varsigma \gg 10$) и соответствующий ей режим «слабой турбулентности» наблюдаются лишь в свободной атмосфере, за пределами пограничных слоев.

3. Иерархия моделей турбулентного замыкания

3.1. Полная прогностическая модель

Локальная алгебраическая формулировка турбулентного замыкания, описанная в разд. 2, основана на равновесных вариантах уравнений баланса турбулентных энергий и турбулентных потоков (24), (30), (34), (37).

Разумеется, она имеет ограниченную область применения. Так, она ошибочно предписывает полное вырождение турбулентности в областях течения с нулевым сдвигом скорости, например на оси любого струйного течения. Наиболее полная формулировка замыкания основана на тех же самых уравнениях, но с учетом членов, описывающих нестационарность и пространственную неоднородность течения, включая моменты третьего порядка: Φ_K , Φ_p , $\Phi_i^{(\tau)}$ и $\Phi_z^{(F)}$, которые мы выражаем в рамках приближения турбулентной диффузии:

$$\frac{DE_K}{Dt} - \frac{\partial}{\partial z} K_E \frac{\partial E_K}{\partial z} = -\tau_{i3} \frac{\partial U_i}{\partial z} + \beta F_z - \frac{E_K}{t_T} , \tag{87}$$

$$\frac{DE_p}{Dt} - \frac{\partial}{\partial z} K_E \frac{\partial E_p}{\partial z} = -\beta F_z - \frac{E_P}{C_P t_T} , \tag{88}$$

$$\frac{D\tau_{i3}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial z} K_{FM} \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial z} = -2E_z \frac{\partial U_i}{\partial z} - \frac{\tau_{i3}}{C_\tau t_T} \quad (i = 1, 2), \tag{89}$$

$$\frac{DF_z}{Dt} - \frac{\partial}{\partial z} K_{FH} \frac{\partial F_z}{\partial z} = -2(E_z - C_0 E_p) \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{F_z}{C_F t_T} . \tag{90}$$

Коэффициенты турбулентного переноса K_E для турбулентных энергий и K_{FM} , K_{FH} для турбулентных потоков мы принимаем пропорциональными коэффициенту турбулентной вязкости K_M (43):

$$K_E / C_E = K_{FM} / C_{FM} = K_{FH} / C_{FH} = E_z t_T , \tag{91}$$

где C_E , C_{FM} и C_{FH} — безразмерные константы, подлежащие эмпирическому определению.

Вертикальная составляющая КЭТ E_z, вообще говоря, описывается прогностическим уравнением (21), в котором члены Q_{ii}, содержащие давление, определяются согласно модели обмена энергией между движениями разных направлений (48), (49). Для практических целей мы рекомендуем упрощенный подход, основанный на естественном допущении, что КЭТ переносится турбулентностью как целое, а значит, E_z и в условиях неравновесного режима определяется при известном значении E_K как $E_z = A_z E_K$, где $A_z = A_z(\Pi)$ определяется соотношением (78), а $\Pi = E_p / E_K$ — на основе прогностических уравнений (87) и (88) для E_K и E_p :

$$E_z = A_z E_K , \quad A_z = A_z(\Pi) , \quad \Pi = \frac{E_P}{E_K} . \tag{92}$$

Напомним, что кинетическая энергия E_K и скорость ее диссипации ε_K меняются во времени и пространстве и что их перенос происходит за счет как среднего течения, так и турбулентности. Поэтому и турбулентный масштаб времени $t_T = E_K / \varepsilon_K$ меняется во времени и переносится в пространстве. Его значение при равновесном режиме t_{TE} выражается через E_K, A_z и Π согласно алгебраическим соотношениям (76)—(78). В общем случае подобное равновесие, с одной стороны, нарушается вследствие нестационарности и неоднородности течения, а с другой — восстанавливается механизмами локального приспособления. Результат противодействия этих факторов описывается релаксационным уравнением

$$\frac{Dt_T}{Dt} - \frac{\partial}{\partial z} K_T \frac{\partial t_T}{\partial z} = -C_R \left(\frac{t_T}{t_{TE}} - 1 \right), \qquad (93)$$

где $t_{TE} = t_{TE}\left(E_K, A_z, \Pi\right)$ (76)—(78); время релаксации принято пропорциональным турбулентному масштабу времени t_{TE} (76)—(78); $K_T = C_T E_z t_T$ — коэффициент турбулентного обмена, аналогичный K_E, K_{FM} или K_{FH}; C_T и C_R — безразмерные эмпирические константы.

Таким образом, полная модель состоит:

а) из пяти прогностических уравнений (87)—(90) и (93) для кинетической и потенциальной энергии турбулентности E_K и E_P, вертикальных турбулентных потоков количества движения τ_{i3} (i = 1, 2) и потенциальной температуры F_z, и турбулентного масштаба времени t_T, который определяет скорость диссипации КЭТ $\varepsilon_K = E_K / t_T$;

б) из трех диагностических соотношений (76)—(78), определяющих турбулентный масштаб времени при равновесном режиме t_{TE}, отношения E_K / τ и долю вертикальной составляющей КЭТ A_z.

Кроме уже определенных эмпирических констант (63) и грубо оцененной константы $C_\Omega = 1$, в полную модель входят дополнительные константы C_E, C_{FM}, C_{FH}, C_T и C_R, которые предстоит определить по экспериментальным данным. Эта модель обладает следующими преимуществами:

• описание энергетики турбулентности на основе пары прогностических уравнений баланса для КЭТ (87) и ПЭТ (88), дающее основу для определения энергетического параметра стратификации $\Pi = E_p / E_K$ и расчета всех необходимых характеристик турбулентности во всем диапазоне от нейтральной до предельно устойчивой стратификации;

• описание турбулентного переноса на основе уравнений баланса турбулентных потоков количества движения (89) и потенциальной температуры (90), позволяющее рассчитывать неградиентные переносы в ситуациях, когда понятия коэффициентов турбулентной вязкости и температуропроводности лишаются физического смысла;

• эмпирически обоснованная релаксационная модель (76)—(78), (93) для определения турбулентного масштаба времени t_T.

3.2. Модель градиентного переноса

Большинство задач динамической метеорологии и физической океанографии успешно решаются в рамках модели градиентного переноса, согласно которой турбулентные потоки представляются в виде произведений коэффициентов турбулентной вязкости K_M, температуропроводности K_H или диффузии K_D на средние градиенты переносимых величин. Подобного типа модель получается в рамках нашей теории при использовании равновесных вариантов уравнений баланса для турбулентных потоков (89) и (90). Разумеется, при этом исключается возможность определения неградиентных переносов, зато модель турбулентного замыкания существенно упрощается и сводится к следующим элементам:

а) прогностическим уравнениям баланса КЭТ E_K (87) и ПЭТ E_p (88), которые дополняются диагностическим соотношением (92) для вертикальной составляющей КЭТ E_z;

б) прогностическому уравнению (93) для турбулентного масштаба времени t_T;

в) равновесным уравнениям баланса вертикальных турбулентных потоков количества движения τ_{i3} (89) и потенциальной температуры F_z (90), которые записываются в терминах коэффициентов турбулентной вязкости K_M и температуропроводности K_H:

$$\tau_{i3} = -K_M \frac{\partial U_i}{\partial z}, \quad F_z = -K_H \frac{\partial \Theta}{\partial z}, \tag{94}$$

$$K_M = 2C_\tau E_z t_T,$$
$$K_H = 2C_F E_z t_T \left(1 - C_\theta \frac{E_P}{E_z}\right), \tag{95}$$

где E_z, E_P и t_T определяются согласно прогностическим уравнениям, указанным в пунктах «а» и «б».

По мере необходимости модель замыкания можно еще более упростить, сохранив лишь два прогностических уравнения (87) и (88) для E_K и E_p, а все остальные параметры определять диагностически: E_z — по (92), $t_T = t_{TE}$ — по (76)—(78), вертикальные турбулентные потоки τ_{i3} и F_z — по (94), (95).

3.3. Минимальная прогностическая модель

В традиционных моделях замыкания, основанных всего на одном уравнении баланса энергии турбулентности (как правило, на уравнении баланса КЭТ, за исключением сравнительно недавних работ [43] и [8], в которых используется уравнение баланса СЭТ), некоторые важные особенности пространственно неоднородной турбулентности неизбежно упускаются. Существенным источником погрешностей может служить, например, различие между масштабами времени диссипации для ПЭТ ($C_P t_T$) и для КЭТ (t_T). Как бы то ни было, если по каким-то причинам приходится ограничиться одним прогностическим уравнением, то мы предлагаем использовать уравнение для СЭТ

$$\frac{DE}{Dt}-\frac{\partial}{\partial z}K_E\frac{\partial E}{\partial z}=-\tau_{i3}\frac{\partial U_i}{\partial z}-\frac{E}{t_T[1-(1-C_P)\mathrm{Ri}_f]}, \tag{96}$$

полученное путем сложения уравнений (87) и (88) и приближенного определения суммы $E_K + E_P / C_P$ согласно равновесным соотношениям (53) и (54). Преимущество (96) по сравнению с уравнением баланса КЭТ состоит в том, что в отличие от E_K суммарная энергия E — консервативный параметр, сохраняющийся при отсутствии генерации и диссипации энергии. За исключением E, все остальные неизвестные в данной простейшей модели находятся с помощью алгебраических соотношений:

а) E_K, E_p — согласно (53), (54):

$$E_K=E\frac{1-\mathrm{Ri}_f}{1-(1-C_P)\mathrm{Ri}_f},\quad E_p=E\frac{C_P\mathrm{Ri}_f}{1-(1-C_P)\mathrm{Ri}_f}, \tag{97}$$

б) A_z и E_z — согласно (50в):

$$A_z=\frac{C_r\left(1-2C_0\,\mathrm{Ri}_f/R_\infty\right)\left(1-\mathrm{Ri}_f\right)-3\mathrm{Ri}_f}{\left(1-\mathrm{Ri}_f\right)\left\{3+C_r\left[3-2\left(1+C_0\right)\mathrm{Ri}_f/R_\infty\right]\right\}},\quad E_z=A_zE_K, \tag{98}$$

в) t_T — согласно соотношению (76), преобразованному с помощью (71) к виду

$$t_{TE}=\frac{kz}{E_K^{1/2}+C_\Omega\Omega z}\left(\frac{E_K}{\tau}\right)^{3/2}\frac{1-\mathrm{Ri}_f/R_\infty}{1-R_f}, \tag{99}$$

г) τ_{i3} и F_z — согласно (43), (44) и (97):

$$\tau_{i3}=-K_M\frac{\partial U_i}{\partial z},\quad K_M=2C_\tau E_z t_T, \tag{100}$$

$$F_z=-K_H\frac{\partial\Theta}{\partial z},\quad K_H=2C_F E_z t_T\left(1-\frac{C_\theta C_P\mathrm{Ri}_f}{(1-\mathrm{Ri}_f)A_z}\right), \tag{101}$$

д) Ri_f — в соответствии с определением (39):

$$\mathrm{Ri}_f = \frac{-\beta F_z}{\tau_{i3}\partial U_i / \partial z}\,. \tag{102}$$

Если в этой системе приравнять левую часть (96) к нулю, то она сведется к равновесной модели, подробно рассмотренной в разд. 2.

Заключение

На протяжении десятилетий используемые в оперативной практике модели турбулентного замыкания строились в русле идей Колмогорова [1, 2] на основе уравнения баланса кинетической энергии турбулентности (КЭТ) и гипотетических выражений для коэффициентов турбулентной вязкости и температуропроводности: $K_M \sim K_H \sim E_K^{1/2} l$. Колмогоров вполне обоснованно предложил этот подход для нейтрально стратифицированных течений. Последователи Колмогорова распространили его на произвольно стратифицированные течения, упустив из виду потенциальную энергию турбулентности (ПЭТ) и гипотетический характер соотношения $K_H \sim E_K^{1/2} l$. Тем самым был упущен из виду обмен энергией между КЭТ и ПЭТ, определяемый потоком плавучести βF_z, откуда и берет начало ошибочное, но широко распространенное мнение, что стационарная турбулентность может поддерживаться сдвигом скорости лишь при малых значениях градиентного числа Ричардсона $\mathrm{Ri} < \mathrm{Ri}_c < 1$ и что при значениях $\mathrm{Ri} > \mathrm{Ri}_c$ турбулентность неизбежно вырождается, а течение становится ламинарным.

Обухов [6] был первым, кто применил колмогоровскую модель замыкания к температурно-стратифицированному течению в приземном слое атмосферы. Он учел член βF_z в уравнении баланса КЭТ, получил при этом стратификационный масштаб длины L (41), вошедший в терминологию как масштаб длины Обухова, но в целом оставил колмогоровскую модель без изменений, сохранив даже выражение для турбулентного масштаба длины $l \sim z$ в точности как у Колмогорова, хотя сам же и ввел стратификационный масштаб L, и поэтому имел все основания заметить, что при сильно устойчивой стратификации турбулентный масштаб l должен стремиться к L. Не подлежит сомнению, что построенная Обуховым модель стратифицированного приповерхностного течения, обобщившая логарифмический пристеночный закон Прандтля, явилась огромным шагом вперед; в частности, она и привела к созданию классической теории подобия Монина — Обухова [4]. Однако, что касается проблемы турбулентного замыкания, работа Обухова [6] в какой-то мере и затормозила решение этой проблемы. Авторитет Колмогорова, Обухова и их школы был настолько высок, что более половины столетия дальнейшие усилия в решении проблемы замыкания принципиально не выходили за рамки колмогоровской концепции, сводя энергетику турбулентности к уравнению баланса КЭТ и допуская лишь осторожные попытки отойти от соотношений $K_M \sim K_H \sim E_K^{1/2} l$. По-видимому, именно это стечение обстоятельств и объясняет, почему сравнительно простая теория турбулентного замыкания, основанная на паре уравнений для КЭТ и ПЭТ и уравнениях баланса турбулентных потоков (взамен эвристических выражений для коэффициентов турбулентного обмена), не была разработана значительно раньше.

Наши работы в этом направлении, начатые около десяти лет назад, были мотивированы накопившимися противоречиями между данными наблюдений и численного моделирования турбулентности в устойчиво стратифицированных средах, с одной стороны, и традиционными моделями турбулентного замыкания — с другой. Разительным примером служит асимптотически линейный рост турбулентного числа Прандтля с ростом градиентного числа Ричардсона на рис. 5, не объяснимый в рамках традиционных моделей турбулентного замыкания. Наша первая публикация, разрешающая это противоречие, появилась в 2005 году [21]. После этого потребовалось еще несколько лет работы, отраженной в статьях [68, 69, 70, 71]. Итог этой работы подводится в данной статье. Главный результат последнего времени — определение турбулентного масштаба времени t_T, формулировка релаксационного уравнения для t_T и построение иерархии моделей турбулентного замыкания различного уровня сложности для широкого круга приложений — от исследовательских задач до оперативных моделей прогноза погоды, качества воздуха или изменений климата.

Наша теория замыкания в применении к равновесному режиму турбулентности в приземном и пограничном слоях атмосферы позволила, в частности, определить зависимости от стратификации средних градиентов скорости ветра и температуры, коэффициентов турбулентной вязкости и температуропроводности и ряда других характеристик турбулентности. При этом обнаружилась вводящая в заблуждение неопределенность понятия «сильно устойчивая стратификация». Специалисты по физике атмосферного пограничного слоя по понятным причинам понимают под этим словосочетанием максимально устойчивую стратификацию, достижимую в пределах пограничного слоя, что соответствует значениям безразмерной высоты z/L, заведомо меньше десяти, а значит, как это следует из соотношения (85), связывающего z/L и Ri, значениям Ri много меньше единицы («докритическим» с точки зрения старой теории). С точки зрения нашей теории это соответствует режиму слабо устойчивой стратификации и соответствующей ей «сильной турбулентности». По-настоящему сильно устойчивая стратификация, соответствующая режиму «слабой турбулентности», наблюдается лишь за пределами пограничных слоев в свободной атмосфере, где число Ri меняется в пределах от 1 до 10^2, но может достигать и 10^3. Эта терминологическая путаница и привела в свое время к необоснованному отождествлению так называемой z-независимой стратификации при $z/L > 1$ с предельно устойчивой стратификацией, повлекшему ошибочную интерпретацию традиционной теории подобия в отношении асимптотического поведения турбулентного числа Прандтля и ряда других характеристик турбулентности при очень больших z/L.

Новое выражение (86) для градиента температуры в приземном слое воздуха уже не приводит, как это было с традиционным выражением, к артефакту вырождения турбулентности при значительном усилении стратификации и не требует эвристических поправок, применяемых до сих пор в оперативных расчетах турбулентных потоков на земной поверхности.

Эмпирическая верификация и калибрация моделей турбулентного замыкания нередко ограничивается проверкой того, насколько реалистично воспроизводятся лишь свойства среднего движения и, в лучшем случае, еще и турбулентные потоки, но почти никогда не распространяется на все прочие параметры турбулентности, фактически учитываемые в модели. Так, например, нам не приходилось встречать в литературе примеров верификации широко распространенных моделей замыкания, основанных на уравнении баланса КЭТ, в отношении того, насколько реалистично воспроизводятся зависимости от Ri (или от z/L) таких величин, как E_K / τ или $\varepsilon_K / (\tau S)$, хотя возможности к этому имелись. В отличие от этой практики, мы подвергли верификации результаты теории, относящиеся ко всем включенным в нее характеристикам турбулентности. Мы были вынуждены ограничиться равновесным режимом турбулентности, при котором теория приводит к простым универсальным зависимостям. Почти все доступные в настоящее время данные о турбулентности при сильно устойчивой стратификации лишь с большой натяжкой можно отнести к такому режиму. Поэтому эмпирические данные, показанные на наших рисунках, вынужденно подвергнуты самому тщательному отбору и ни в коем случае не претендуют на полноту. Всестороннюю верификацию теории еще предстоит выполнить. Для этой цели мы планируем новые по своей постановке лабораторные эксперименты и прямое численное моделирование сильно стратифицированных турбулентных течений, максимально приближающихся к условиям стационарности и однородности. Другим инструментом верификации теории послужат численные эксперименты по воспроизведению полевых метеорологических экспериментов с помощью атмосферных моделей, снабженных новым турбулентным замыканием.

Предложенный набор моделей турбулентного замыкания, от наиболее полной (см. разд. 3.1) до минимальной (см. разд. 3.3), позволяет выбирать наиболее подходящий вариант в зависимости от доступных вычислительных ресурсов и решаемой научной или практической задачи. Для оперативного прогноза погоды или прогноза качества воздуха и моделирования климата мы рекомендуем модель, основанную на трех прогностических уравнениях (см. разд. 3.2). Наиболее полная или градиентная модели (разд. 3.1 и 3.2) будут полезны для расчета оптической турбулентности, главным параметром которой служит энергия флуктуаций температуры $E_\theta = (N/\beta)^2 E_p$ [39].

Обозначения

$A_i = E_i / E_K$	— доля i-й составляющей E_i кинетической энергии турбулентности E_K
$E = E_K + E_P$	— суммарная энергия турбулентности (СЭТ)
$E_K = \frac{1}{2}\langle u_i u_i \rangle$	— кинетическая энергия турбулентности (КЭТ)
E_i	— продольная ($i = 1$ или $i = x$), поперечная ($i = 2$ или $i = y$) и вертикальная ($i = 3$ или $i = z$) составляющие КЭТ
$E_\theta = \frac{1}{2}\langle \theta^2 \rangle$	— «энергия» флуктуаций потенциальной температуры
E_P	— потенциальная энергия турбулентности (ПЭТ) (28)
$F_i = \langle u_i\ \theta \rangle$	— турбулентный поток потенциальной температуры
F_z	— вертикальная составляющая вектора F_i
$f = 2\Omega \sin\varphi$	— параметр Кориолиса
g	— ускорение силы тяжести
K_M	— коэффициент турбулентной вязкости
K_H	— коэффициент турбулентной температуропроводности
K_D	— коэффициент турбулентной диффузии
L	— масштаб длины Обухова (41)
l	— турбулентный масштаб длины
N	— частота Вяйсяля — Брента
P	— среднее давление
P_0	— характерное значение среднего давления
p	— флуктуация давления
$\mathrm{Pr} = \nu / \kappa$	— число Прандтля
Pr_T	— турбулентное число Прандтля (45)

Q_{ij} — члены, выражающие корреляции между флуктуациями давления и градиентов скорости (15)

Ri — градиентное число Ричардсона (3)

Ri_f — энергетическое число Ричардсона (40)

R_∞ — максимальное значение Ri_f при равновесном режиме турбулентности

$S = |\partial \mathbf{U} / \partial z|$ — вертикальный сдвиг средней скорости ветра

T — абсолютная температура

T_0 — характерное значение абсолютной температуры

$t_T = l E_K^{-1/2}$ — масштаб времени, характеризующий скорость диссипации кинетической энергии турбулентности

$\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ — вектор средней скорости ветра

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор флуктуационной скорости

$\beta = g / T_0$ — параметр плавучести

$\gamma = c_p / c_v$ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме

ε_K, ε_θ, $\varepsilon_i^{(F)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(\tau)}$ — скорости диссипации для E_K, E_θ, $F_i^{(F)}$ и τ_{ij}

$\varepsilon_{i3\,(\text{эф})}$ ($i = 1, 2$) — эффективная скорость диссипации для потока количества движения

κ — коэффициент молекулярной температуропроводности

ν — коэффициент молекулярной вязкости

$\Pi = E_P / E_K$ — энергетический параметр стратификации (74)

Φ_K, Φ_θ и Φ_F — вертикальные турбулентные потоки КЭТ E_K и турбулентных потоков «энергии» флуктуаций температуры E_θ и потока температуры F_i

φ — широта

τ_{ij} — составляющие турбулентного потока количества движения (напряжения Рейнольдса)

τ_{i3} ($i = 1, 2$) — вертикальные турбулентные потоки количества движения

τ — модуль вертикального турбулентного потока количества движения

ρ — средняя плотность

ρ_0 — характерное значение средней плотности

Θ — средняя потенциальная температура

θ — флуктуация потенциальной температуры

Ω — модуль угловой скорости вращения Земли

$\mathbf{\Omega}_i$ — вектор угловой скорости вращения Земли (параллельный полярной оси)

Основные эмпирические безразмерные константы

$C_0 = 0{,}125$ — константа, характеризующая вертикальную составляющую КЭТ (49), (50в)

$C_1 = 0{,}5$; $C_2 = 0{,}72$ — константы, характеризующие продольную и поперечную составляющие КЭТ (48)—(50)

$C_F = 0{,}25$ — константа диссипативного масштаба времени для турбулентного потока потенциальной температуры (19)

$C_P = 0{,}86$ — константа диссипативного масштаба времени для потенциальной энергии (19)

$C_r = 1{,}5$ — константа межкомпонентного энергообмена (27), (50а), (50б), (50в)

$C_\tau = 0{,}2$ — константа диссипативного масштаба времени для турбулентного потока количества движения (33)

$C_\Omega = 1$ — константа вращательного масштаба длины (73)

$R_\infty = 0{,}25$ — максимальное значение энергетического числа Ричардсона при равновесном режиме турбулентности (40), (46)

$k = 0{,}4$ — постоянная Кармана (68)

Дополнительные константы
(выражающиеся через основные константы)

$a_1 = 0{,}18$; $a_2 = 0{,}16$; $a_3 = 1{,}42$ — в соотношениях (81)—(86)

$C_u = k / R_\infty = 1{,}6$ — в соотношении (70)

$C_\theta = 0{,}105$ — в формулах (36), (37), (47), (64)

$k_T = (C_F / C_\tau)k = 0{,}5$ — постоянная Кармана для температуры (86)

$\mathrm{Pr}_T^{(0)} = 0{,}8$ — турбулентное число Прандтля при нейтральной стратификации (57)

$\Pi_\infty = 0{,}14$ — максимальное значение энергетического параметра стратификации (77)

Литература

1. *Колмогоров, А. Н.* Рассеяние энергии при локально-изотропной турбулентности / А. Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. — 1941. — Т. 32. — С. 19—21.

2. *Колмогоров, А. Н.* Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости / А. Н. Колмогоров // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1942. — Т. 6. — С. 56—68.

3. *Курбацкий, А. Ф.* Лекции по турбулентности / А. Ф. Курбацкий. — Новосибирск : Изд. Новосибир. гос. ун-та, 2000. — 118 с.

4. *Монин, А. С.* Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы / А. С. Монин, А. М. Обухов // Тр. Геофиз. ин-та АН СССР. — 1954. — № 24. — С. 163—187.

5. *Обухов, А. М.* О распределении масштаба турбулентности в потоках произвольного сечения / А. М. Обухов // Прикладная математика и механика. — 1942. — Вып. VI. — С. 209—220.

6. *Обухов, А. М.* Турбулентность в температурно неоднородной атмосфере / А. М. Обухов // Труды Ин-та теорет. геофиз. АН СССР. — 1946. — Т. 1. — С. 95—115.

7. *Островский, Л. А.* Модель турбулентного переноса и динамики турбулентности в стратифицированном сдвиговом течении / Л. А. Островский, Ю. И. Троицкая // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. — 1987. — Т. 23. — С. 1031—1040.

8. *Angevine, W. M.* Performance of an eddy diffusivity-mass flux scheme for shallow cumulus boundary layers / W. M. Angevine, H. Jiang, T. Mauritsen // Mon. Wea. Rev. — 2010. — V. 138, is. 7. — P. 2895—2912.

9. *Banta, R. M.* Nocturnal low-level jet characteristics over Kansas during Cases-99 / R. M. Banta, R. K. Newsom, J. K. Lundquist, Y. L. Pichugina, R. L. Coulter, L. Mahrt // Boundary-Layer Meteorol. — 2002. — V. 105. — P. 221—252.

10. *Bertin, F.* Energy dissipation rates, eddy diffusivity, and the Prandtl number : An in situ experimental approach and its consequences on radar estimate of turbulent parameters / F. Bertin, J. Barat, R. Wilson // Radio Sci. — 1997. — V. 32. — P. 791—804.

11. *Blackadar, A. K.* The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere / A. K. Blackadar // J. Geophys. Res. — 1962. — V. 67. — P. 3095—3102.

12. *Canuto, V. M.* Critical Richardson numbers and gravity waves / V. M. Canuto // Astron. Astrophys. — 2002. — V. 384. — P. 1119—1123.

13. *Canuto, V. M.* Turbulence in astrophysical and geophysical flows / V. M. Canuto // Interdisciplinary Aspects of Turbulence / W. Hillebrandt, F. Kupka (Eds.). — V. 756 : Lecture Notes in Physics. — Springer, 2009. — P. 107—160.

14. *Canuto, V. M.* What causes the divergences in local second-order closure models? / V. M. Canuto, Y. Cheng, A. M. Howard // J. Atmos. Sci. — 2005. — V. 62. — P. 1645—1651.

15. *Canuto, V. M.* Ocean turbulence. Part I : One-point closure model — momentum and heat vertical diffusivities / V. M. Canuto, A. Howard, Y. Cheng, M. S. Dubovikov // J. Phys. Oceanogr. — 2001. — V. 31. — P. 1413—1426.

16. *Canuto, V. M.* Stably stratified flows : A model with no Ri(cr) / V. M. Canuto, Y. Cheng, A. M. Howard, I. N. Esau // J. Atmos. Sci. — 2008. — V. 65. — P. 2437—2447.

17. *Cheng, Y.* An improved model for the turbulent PBL / Y. Cheng, V. M. Canuto, A. M. Howard // J. Atmos. Sci. — 2002. — V. 59. — P. 1550—1565.

18. *Churchill, S. W.* A reinterpretation of the turbulent Prandtl number / S. W. Churchill // Ind. Eng. Chem. Res. — 2002. — V. 41. — P. 6393—6401.

19. *Elperin, T.* Isotropic and anisotropic spectra of passive scalar fluctuations in turbulent fluid flow / T. Elperin, N. Kleeorin, I. Rogachevskii // Phys. Rev. E. — 1996. — V. 53. — P. 3431—3441.

20. *Elperin, T.* Formation of large-scale semiorganized structures in turbulent convection / T. Elperin, N. Kleeorin, I. Rogachevskii, S. Zilitinkevich // Phys. Rev. E. — 2002. — V. 66. — Pap. 066305.

21. *Elperin, T.* New turbulence closure equations for stable boundary layer. Return to Kolmogorov (1941) / T. Elperin, N. Kleeorin, I. Rogachevskii, S. Zilitinkevich // 5th Annual Meeting of

the European Meteorological Society, 12—16 September 2005, Utrecht, Netherlands. — Utrecht, 2005. — Pap. 0553.

22. *Elperin, T.* Tangling turbulence and semi-organized structures in convective boundary layers / T. Elperin, N. Kleeorin, I. Rogachevskii, S. S. Zilitinkevich // Boundary-Layer Meteorol. — 2006. — V. 119. — P. 449—472.

23. *Engelbart, D. A. M.* The Lindenberg SODAR/RASS experiment linex-2000 : Concept and first results / D. A. M. Engelbart, S. Andersson, U. Görsdorf, I. V. Petenko // Proc. 10th Int. Symp. Acoust. Rem. Sens. — 2000. — P. 270—273.

24. *Esau, I. N.* Simulation of Ekman boundary layers by large eddy model with dynamic mixed subfilter closure / I. N. Esau // Environ. Fluid Mech. — 2004. — V. 4. — P. 273—303.

25. *Esau, I. N.* Large-eddy simulations of geophysical turbulent flows with applications to planetary boundary layer research [Электронный ресурс] / I. N. Esau. — 2009. — arXiv:0907.0103v1. — Режим доступа к базе данных DATABASE64 : ftp://ftp.nersc.no/igor/NEW%20DATABASE64/.

26. *Esau, I. N.* Universal dependences between turbulent and mean flow parameters in stably and neutrally stratified planetary boundary layers / I. N. Esau, S. S. Zilitinkevich // Nonlin. Processes Geophys. — 2006. — V. 13. — P. 135—144.

27. *Foken, T.* 50 Years of the Monin–Obukhov similarity theory / T. Foken // Boundary-Layer Meteorol. — 2006. — V. 119. — P. 431—447.

28. *Garratt, J. R.* The Atmospheric Boundary Layer / J. R. Garratt. — Cambridge University Press, 1992. — 316 p.

29. *Holton, J. R.* An Introduction to Dynamic Meteorology / J. R. Holton. — New York : Academic Press, 2004. — 535 p.

30. *Itsweire, E. C.* The evolution of grid-generated turbulence in a stably stratified fluid / E. C. Itsweire, K. N. Helland, C. W. Van Atta // J. Fluid Mech. — 1986. — V. 162. — P. 299—338.

31. *Kaimal, J. C.* Atmospheric Boundary Layer Flows : Their Structure and Measurement / J. C. Kaimal, J. J. Finnigan. — New York : Oxford University Press, 1994. — 289 p.

32. *Kondo, J.* Heat and momentum transfer under strong stability in the atmospheric surface layer / J. Kondo, O. Kanechika, N. Yasuda // J. Atmos. Sci. — 1978. — V. 35. — P. 1012—1021.

33. *Kraus, E. B.* Atmosphere-Ocean Interaction / E. B. Kraus, J. A. Businger. — New York : Oxford University Press, 1994. — 362 p.

34. *Kurbatskii, A.* Three-parameter model of turbulence for the atmospheric boundary layer over an urbanized surface / A. Kurbatskii, L. Kurbatskaya // Izvestiya, Atmos. Ocean. Phys. — 2006. — V. 42. — P. 439—455.

35. *Kurbatskii, A.* On the turbulent Prandtl number in a stably stratified atmospheric boundary layer / A. Kurbatskii, L. Kurbatskaya // Izvestiya, Atmos. Ocean. Phys. — 2010. — V. 46. — P. 169—177.

36. *Kurbatskiy, A.* E–ε–$\langle\theta^2\rangle$ turbulence closure model for an atmospheric boundary layer including the urban canopy / A. Kurbatskii, L. Kurbatskaya // Meteorol. Atmos. Phys. — 2009. — V. 104. — P. 63—81.

37. *L'vov, V.* Energy conservation and second-order statistics in stably stratified turbulent boundary layers / V. L'vov, I. Procaccia, O. Rudenko // Environ. Fluid Mech. — 2009. — V. 9. — P. 267—295.

38. *L'vov, V. S.* Turbulent fluxes in stably stratified boundary layers / V. S. L'vov, I. Procaccia, O. Rudenko // Phys. Scripta. — 2008. — V. 2008, T132. — Pap. 014010.

39. *Lascaux, F.* Mesoscale optical turbulence simulations at Dome C / F. Lascaux, E. Masciadri, S. Hagelin, J. Stoesz // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2009. — V. 398. — P. 1093—1104.

40. *Lorenz, E. N.* Available potential energy and the maintenance of the general circulation / E. N. Lorenz // Tellus. — 1955. — V. 7. — P. 157—167.

41. *Lumley, J. L.* The Structure of Atmospheric Turbulence / J. L. Lumley, H. A. Panofsky. — New York : Interscience Publishers, 1964. — 239 p.

42. *Mahrt, L.* Boundary-layer adjustment over small-scale changes of surface heat flux / L. Mahrt, D. Vickers // Boundary-Layer Meteorol. — 2005. — V. 116. — P. 313—330.

43. *Mauritsen, T.* A total turbulent energy closure model for neutrally and stably stratified atmospheric boundary layers / T. Mauritsen, G. Svensson, S. S. Zilitinkevich, I. Esau, L. Enger, B. Grisogono // J. Atmos. Sci. — 2007. — V. 64. — P. 4113—4126.

44. *Mellor, G. L.* A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers / G. L. Mellor, T. Yamada // J. Atmos. Sci. — 1974. — V. 31. — P. 1791—1806.

45. *Monin, A. S.* Statistical Fluid Mechanics. V. 1 / A. S. Monin, A. M. Yaglom. — Cambridge : MIT Press, 1971. — 769 p.

46. *Mydlarski, L.* Mixed velocity — passive scalar statistics in high-Reynolds-number turbulence / L. Mydlarski // J. Fluid Mech. — 2003. — V. 475. — P. 173—203.

47. *Nieuwstadt, F. T. M.* The turbulent structure of the stable, nocturnal boundary layer / F. T. M. Nieuwstadt // J. Atmos. Sci. — 1984. — V. 41. — P. 2202—2216.

48. *Ohya, Y.* Wind-tunnel study of atmospheric stable boundary layers over a rough surface / Y. Ohya // Boundary-Layer Meteorol. — 2001. — V. 98. — P. 57—82.

49. *Poulos, G. S.* CASES-99: A comprehensive investigation of the stable nocturnal boundary layer / G. S. Poulos, W. Blumen, D. C. Fritts, J. K. Lundquist, J. Sun, S. P. Burns, C. Nappo, R. Banta, R. Newsom, J. Cuxart, E. Terradellas, B. Balsley, M. Jensen // Bull. Amer. Meteorol. Soc. — 2002. — V. 83. — P. 555—581.

50. *Rehmann, C. R.* Mean potential energy change in stratified grid turbulence / C. R. Rehmann, J. R. Koseff // Dynam. Atmos. Oceans. — 2004. — V. 37. — P. 271—294.

51. *Richardson, L. F.* The supply of energy from and to atmospheric eddies / L. F. Richardson // Proc. R. Soc. Lond. A-Mat. — 1920. — V. 97. — P. 354—373.

52. *Rogers, M. M.* An algebraic model for the turbulent flux of a passive scalar / M. M. Rogers, N. N. Mansour, W. C. Reynolds // J. Fluid Mech. — 1989. — V. 203. — P. 77—101.

53. *Rotta, J. C.* Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz / J. C. Rotta // Z. Phys. — 1951. — V. 129. — P. 547—572.

54. *Schumann, U.* Turbulent mixing in stably stratified shear flows / U. Schumann, T. Gerz // J. Appl. Meteorol. — 1995. — V. 34. — P. 33—48.

55. *Shih, L. H.* Scaling and parameterization of stratified homogeneous turbulent shear flow / L. H. Shih, J. R. Koseff, J. H. Ferziger, C. R. Rehmann // J. Fluid Mech. — 2000. — V. 412.— P. 1—20.

56. *Sirivat, A.* The effect of a passive cross-stream temperature gradient on the evolution of temperature variance and heat flux in grid turbulence / A. Sirivat, Z. Warhaft // J. Fluid Mech. — 1983. — V. 128. — P. 323—346.

57. *Sorbjan, Z.* Structure of the Atmospheric Boundary Layer / Z. Sorbjan. — Prentice Hall, 1989. — 318 p.

58. *Sorbjan, Z.* A study of the stable boundary layer based on a single-column K-theory model / Z. Sorbjan // Boundary-Layer Meteorol. — 2012. — V. 142. — P. 33—53.

59. *Strang, E. J.* Vertical mixing and transports through a stratified shear layer / E. J. Strang, H. J. S. Fernando // J. Phys. Oceanogr. — 2001. — V. 31. — P. 2026—2048.

60. *Stretch, D. D.* Transient mixing events in stably stratified turbulence / D. D. Stretch, J. W. Rottman, K. K. Nomura, S. K. Venayagamoorthy // 14th Australasian Fluid Mechanics Conference, 10—14 December 2001, Adelaide University, Australia, 2001.

61. *Sukoriansky, S.* Anisotropic turbulence and internal waves in stably stratified flows (QNSE theory) / S. Sukoriansky, B. Galperin // Phys. Scripta. — 2008. — V. 2008. — Pap. 014036.

62. *Tennekes, H.* A First Course in Turbulence / H. Tennekes, J. L. Lumley. — Cambridge ; London : MIT Press, 1972. — 300 p.

63. *Uttal, T.* Surface heat budget of the Arctic Ocean / T. Uttal, J. A. Curry, M. G. McPhee, D. K. Perovich, R. E. Moritz, J. A. Maslanik, P. S. Guest, H. L. Stern, J. A. Moore, R. Turenne, A. Heiberg, M. C. Serreze, D. P. Wylie, O. G. Persson, C. A. Paulson, C. Halle, J. H. Morison, P. A. Wheeler, A. Makshtas, H. Welch, M. D. Shupe, J. M. Intrieri, K. Stamnes, R. W. Lindsey, R. Pinkel, W. S. Pegau, T. P. Stanton, T. C. Grenfeld // Bull. Amer. Meteorol. Soc. — 2002. — V. 83. — P. 255—275.

64. *Venayagamoorthy, S. K.* Lagrangian mixing in decaying stably stratified turbulence / S. K. Venayagamoorthy, D. D. Stretch // J. Fluid Mech. — 2006. — V. 564. — P. 197—226.

65. *Venayagamoorthy, S. K.* On the turbulent Prandtl number in homogeneous stably stratified turbulence / S. K. Venayagamoorthy, D. D. Stretch // J. Fluid Mech. — 2010. — V. 644. — P. 359—369.

66. *Yoon, K.* The evolution of grid-generated turbulence under conditions of stable thermal stratification / K. Yoon, Z. Warhaft // J. Fluid Mech. — 1990. — V. 215. — P. 601—638.

67. *Zilitinkevich, S. S.* Comments on the numerical simulation of homogeneous stably-stratified turbulence / S. S. Zilitinkevich // Boundary-Layer Meteorol. — 2010. — V. 136. — P. 161—164.

68. *Zilitinkevich, S. S.* Energy- and flux-budget (EFB) turbulence closure model for stably stratified flows. Part I : Steady-state, homogeneous regimes / S. S. Zilitinkevich, T. Elperin, N. Kleeorin, I. Rogachevskii // Boundary-Layer Meteorol. — 2007. — V. 125. — P. 167—191.

69. *Zilitinkevich, S. S.* Energy- and flux-budget turbulence closure model for stably stratified flows. Part II : The role of internal gravity waves / S. S. Zilitinkevich, T. Elperin, N. Kleeorin, V. L'vov, I. Rogachevskii // Boundary-Layer Meteorol. — 2009. — V. 133. — P. 139—164.

70. *Zilitinkevich, S. S.* On the velocity gradient in stably stratified sheared flows. Part 1 : Asymptotic analysis and applications / S. S. Zilitinkevich, I. Esau, N. Kleeorin, I. Rogachevskii, R. Kouznetsov // Boundary-Layer Meteorol. — 2010. — V. 135. — P. 505—511.

71. *Zilitinkevich, S. S.* Turbulence energetics in stably stratified geophysical flows : Strong and weak mixing regimes / S. S. Zilitinkevich, T. Elperin, N. Kleeorin, I. Rogachevskii, I. Esau, T. Mauritsen, M. W. Miles // Q. J. R. Meteorol. Soc. — 2008. — V. 134. — P. 793—799.

ФРАКТАЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Д. И. Иудин

1. Немного истории

Шотландский ботаник Роберт Броун (иногда его фамилию транскрибируют как Браун) еще при жизни как лучший знаток растений получил титул «князя ботаников». В 1805 году после четырехлетней экспедиции в Австралию он привез в Англию около 4000 видов неизвестных ученым австралийских растений и много лет посвятил их изучению. Описал растения, привезенные из Индонезии и Центральной Африки. Изучал физиологию растений, впервые подробно описал ядро растительной клетки. Петербургская Академия наук сделала его своим почетным членом. Но имя учёного сейчас широко известно из-за открытого им явления броуновского движения [10]. В 1827 году Броун проводил исследования пыльцы растений. Он, в частности, интересовался, как пыльца участвует в процессе оплодотворения. Как-то он разглядывал под микроскопом выделенные из клеток пыльцы североамериканского растения Clarkia pulchella (кларкии хорошенькой) взвешенные в воде удлиненные цитоплазматические зерна. Неожиданно Броун увидел, что мельчайшие твердые крупинки, которые едва можно было разглядеть в капле воды, непрерывно дрожат и передвигаются с места на место. Он установил, что эти движения «не связаны ни с потоками в жидкости, ни с ее постепенным испарением, а присущи самим частичкам».

Наблюдение Броуна подтвердили другие ученые. Мельчайшие частички вели себя, как живые, причем «танец» частиц ускорялся с повышением температуры и с уменьшением размера частиц и явно замедлялся при замене воды более вязкой средой. Это удивительное явление никогда не прекращалось: его можно было наблюдать сколь угодно долго. Поначалу Броун подумал даже, что в поле микроскопа действительно попали живые существа, тем более что пыльца — это мужские половые клетки растений, однако так же вели себя частички из мертвых растений, даже из засушенных за сто лет до этого в гербариях. Тогда Броун подумал, не есть ли это «элементарные молекулы живых существ», о которых говорил знаменитый французский естествоиспытатель Жорж Бюффон (1707—1788), автор 36-томной «Естественной истории». Это предположение отпало, когда Броун начал исследовать явно неживые объекты; сначала это были очень мелкие частички угля, а также сажи и пыли лондонского воздуха, затем тонко растертые неорганические вещества: стекло, множество различных минералов. «Активные молекулы» оказались повсюду: «В каждом минерале, — писал Броун, — который мне удавалось измельчить в пыль до такой степени, чтобы она могла в течение какого-то времени быть взвешенной в воде, я находил, в больших или меньших количествах, эти молекулы». Броун изучил частицы огромного числа предметов (в том числе даже осколок сфинкса!) и нашел, что обнаруженное им движение проявляется у каждого из исследованных веществ. Из описанных опытов сейчас делают естественный вывод, что причина явления заключается, конечно, в беспорядочной бомбардировке частиц молекулами окружающей жидкости; сам же Броун, основываясь на универсальности эффекта, предположил, что открыл существование некой элементарной формы жизни, присущей всей органической и неорганической материи.

Надо сказать, что у Броуна не было каких-то новейших микроскопов. В своей статье он специально подчеркивает, что у него были обычные двояковыпуклые линзы, которыми он пользовался в течение нескольких лет. И далее пишет: «В ходе всего исследования я продолжал использовать те же линзы, с которыми начал работу, чтобы придать больше убедительности моим утверждениям и чтобы сделать их как можно более доступными для обычных наблюдений». Как это часто бывает в науке, спустя многие годы историки обнаружили, что еще в 1670 году изобретатель микроскопа голландец Антони Левенгук, видимо, наблюдал аналогичное явление, но из-за редкости и несовершенства микроскопов, зачаточного состояния молекулярного учения в то время наблюдения Левенгука не привлекли внимания, поэтому открытие справедливо приписывают Броуну, который впервые подробно его изучил и описал.

Сейчас, чтобы повторить наблюдение Броуна, достаточно иметь не очень сильный микроскоп и рассмотреть с его помощью дым в зачерненной коробочке, освещенный через боковое отверстие лучом интенсивного света. В газе явление проявляется значительно ярче, чем в жидкости: видны рассеивающие свет маленькие клочки пепла или сажи (в зависимости от источника дыма), которые непрерывно скачут туда и сюда. Удается наблюдать броуновское движение и в растворе туши: при 400-кратном увеличении движение частиц уже легко различимо.

В течение последующих семидесяти лет до замечательного анализа проблемы, проведенного Эйнштейном [2, 3], было поставлено много других экспериментов и высказано большое число теоретических гипотез о существе наблюдаемого эффекта. Последовательно были отвергнуты предположения о том, что природа явления связана с некой электрической силой, испарением жидкости или механическими ударами. Броуновское движение неизменно обнаруживалось после того, как образец выдерживался в течение недели в темноте, или после нагревания в течение многих часов, и в конце концов стало ясно, что эффект броуновского движения должен иметь совершенно фундаментальный характер [13].

2. Фрактальность броуновских блужданий

Траектория броуновского движения может служить примером стохастического фрактала [1, 4, 15]. Рассмотрим ситуацию, когда на каждом шаге модельного времени частица смещается на дистанцию a в случайно выбранный соседний узел d-мерной модельной решетки. Предположим, что в момент времени $t = 0$ частица стартовала из начала координат d-мерного решеточного пространства. Тогда после некоторого числа t шагов модельного времени текущая позиция диффундирующей частицы будет описываться вектором смещения

$$\mathbf{r}(t) = a\sum_{k=1}^{t} \mathbf{e}_k, \tag{1}$$

где $\mathbf{e}_k$ обозначает единичный вектор в направлении прыжка на k-м шагу модельного времени.

Характерная дистанция, на которую частица смещается в среднем в процессе случайных блужданий за t шагов модельного времени, описывается среднеквадратичным смещением $\langle r^2(t)\rangle^{1/2}$, где среднее $\langle\ldots\rangle$ понимается как среднее по всевозможным конфигурациям случайных блужданий на решетке. Из формулы (1) находим

$$\langle r^2(t)\rangle = a^2 \sum_{k,k'=1}^{t} \langle \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{k'}\rangle = a^2 t + \sum_{k\neq k'}^{t} \langle \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{k'}\rangle.$$

Поскольку прыжки частицы в различные моменты времени k и k' некоррелированы друг с другом, получаем $\langle \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{k'}\rangle = \delta_{kk'}$, что приводит нас в результате к закону диффузии Фика:

$$\langle r^2(t)\rangle = a^2 t. \tag{2}$$

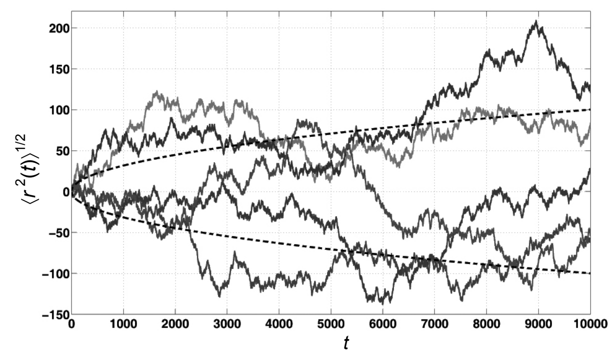


Рис. 1. Реализации одномерного случайного блуждания $r(t)$. Пунктир — среднеквадратичное смещение $\langle r^2(t)\rangle^{1/2}$ в соответствии с законом Фика (2) при a = 1

На рис. 1 представлено несколько реализаций случайных блужданий в одномерном случае на фоне графического представления результата (2). Заметим, что уравнение (2) не зависит от размерности d решетки.

В более общем случае, когда частица имеет вероятность остаться на месте, среднеквадратичное смещение описывается формулой Эйнштейна:

$$\langle r^2(t) \rangle = 2dDt, \tag{3}$$

где D — коэффициент диффузии.

Если вдоль траектории случайных блужданий прокладывать проволоку, то масса этой проволоки будет пропорциональна времени путешествия: $M \sim t$. При этом характерный радиус евклидовой сферы, содержащей всю траекторию, к моменту времени t описывается соотношением $r \sim \sqrt{t}$ (3). Таким образом, $M \sim r^2$, т. е. фрактальная размерность траектории броуновского движения равна двум и не зависит от размерности пространства [6, 7].

3. Роль флуктуаций

Замечательно, что и сам график зависимости смещения броуновской частицы от времени также оказывается инвариантным относительно так называемого аффинного преобразования, когда масштабы времени и расстояния меняются в разных пропорциях. Кривая зависимости смещения броуновской частицы сохраняет свои статистические свойства при аффинном преобразовании и поэтому называется самоаффинной. Это довольно сильно изрезанная кривая, причем характер ее изрезанности не зависит от масштаба, при его увеличении мы видим примерно такую же (статистически) частоту смен направления движения. Характерный вид такой зависимости представлен на рис. 1. Например, графики, отображенные на рис. 1, могут соответствовать интегральным результатам $F(t)$ игры в «орлянку»: двое играющих подбрасывают монету, если выпадает «орел», то $F(t+1) = F(t) + 1$; если выпадает «решка», то $F(t+1) = F(t) - 1$. Очевидно, что среднее значение функции F равно нулю: $\langle F \rangle = 0$, но ее среднеквадратичные флуктуации растут как $t^{1/2}$. Более того, пересечения функцией F нулевого уровня (игроки не должны друг другу) встречаются с течением времени все реже и реже, интервалы между соседними пересечениями тоже асимптотически увеличиваются как $t^{1/2}$. Именно этот факт лежит в основе народной мудрости: «Играй, да не отыгрывайся!» Может просто не хватить бюджета или времени для возвращения к нулевому уровню [12].

Стоит заметить, что жертвами среднеквадратичных флуктуаций броуновского процесса становятся не только любители азартных игр, но и маститые ученые. Так, справедливо полагается, что Эйнштейн первый провел в серии классических статей [2, 3] ясный теоретический анализ явления и показал, что причиной броуновского движения является непрерывная и более или менее хаотическая бомбардировка взвешенных частиц молекулами окружающей жидкости. Однако еще до Эйнштейна предположение о бомбардировке молекул как о возможной причине явления было высказано Негели [13]. Интрига заключается в том, что впоследствии ученый отказался от собственной гипотезы. Обстоятельства этого научного курьеза блестяще описаны в монографии Д. Мак-Доналда «Введение в физику шумов и флуктуаций» [13].

Негели вычислил импульс, сообщаемый макроскопической броуновской частице при единичном атомном столкновении, и нашел, что он гораздо меньше наблюдаемой скорости. Для доказательства предположим, что линейный размер частицы (масса *M*, скорость *V*) имеет величину порядка 1 мкм, размер молекул окружающей ее жидкости (масса *m*, скорость v) приближенно равен $5 \cdot 10^{-8}$ см (5 Å) и что отношение масс m/M прямо пропорционально кубу отношения линейных размеров молекулы и броуновской частицы. Изменение скорости частицы при одном соударении по порядку величины равно

$$\Delta V \sim \frac{m}{M} v, \tag{4}$$

где для скорости молекул v согласно статистической механике имеем

$$v \sim \left(\frac{\Theta}{m} \right)^{1/2}, \tag{5}$$

или более точно

$$\frac{m \left\langle v^2 \right\rangle}{2} = \frac{3}{2} \Theta. \tag{6}$$

Здесь Θ — температура в энергетической шкале ($\Theta = kT$, T — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана), а угловые скобки означают усреднение по равновесному ансамблю.

Будем далее считать, что молекулярный вес жидкости порядка 100 (т. е. $m \sim 10^{22}$ г), а $T \sim 3 \cdot 10^2$ K; тогда $v \sim 2 \cdot 10^4$ см/с и, как следует из формулы (4), $\Delta V \sim 2 \cdot 10^{-6}$ см/с. С другой стороны, визуально наблюдаемая скорость броуновского движения частицы, взвешенной в воде, оказывается по крайней мере на два порядка выше этой величины. Негели, убежденный в том, что при случайных соударениях действительная скорость частицы должна совпадать со скоростью, обусловленной единичным соударением, отверг гипотезу о возникновении броуновского движения из-за молекулярной бомбардировки. Однако подобная аргументация неверна, и выяснение ее ошибочности весьма существенно для понимания природы статистических явлений. Ошибка состоит в представлении случайного процесса, по существу, регулярным чередованием «благоприятных» и «неблагоприятных» событий. Такая последовательность событий, или «импульсов», обладала бы высокой степенью регулярности или упорядоченности. При эффекте от действия единичного импульса, характеризуемом величиной

ϑ, в результате действия N случайно сгруппированных «благоприятных» и «неблагоприятных» импульсов следует ожидать величину порядка $\sqrt{N}\vartheta$. Так как число молекул, соударяющихся с частицей за 1 с (типичный временной интервал при визуальном наблюдении), очень велико, коэффициент $\sqrt{N}$ означает, что невозмущенная скорость частицы будет гораздо больше скорости, обусловленной единичным импульсом или соударением.

4. Метод Хёрста

В общем случае, имея график зависимости какой-либо величины от времени, можно формально вычислить ее фрактальную размерность клеточным методом. Однако эта величина будет зависеть от относительных масштабов по осям. Самоаффинные множества характеризуются двумя значениями фрактальной размерности — локальной и глобальной.

Для анализа самоподобия временных рядов используются также другие методы. Наиболее часто используется R/S-метод, называемый также методом нормированного размаха [14]. Этот метод, предложенный Бенуа Мандельбротом и базирующийся на исследованиях английского ученого Хёрста, основан на анализе размаха случайной величины (наибольшего и наименьшего значения на изучаемом отрезке) и ее среднеквадратичного отклонения.

Пусть мы имеем последовательность измерений какой-либо величины $\xi(t)$. Тогда среднее значение этой величины за время τ равно

$$\langle\xi\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\sum_{t=0}^{\tau}\xi(t),$$

а *накопившееся отклонение* от среднего

$$X(t,\tau) = \sum_{k=0}^{t\le\tau}(\xi(k) - \langle\xi\rangle_\tau).$$

Разность максимального и минимального накопленных отклонений X назовем *размахом*:

$$R(\tau) = \max X(t,\tau) - \min X(t,\tau).$$

Вычислим стандартное отклонение (квадратный корень из дисперсии) для исследуемого сигнала $\xi(t)$ как

$$\langle\xi\rangle_\tau = \left(\frac{1}{\tau}\sum_{t=0}^{\tau}(\xi(t) - \langle\xi\rangle_\tau)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нормируя R на стандартное отклонение S, получим безразмерное отношение R/S. Если длительность всего исследуемого процесса равна T, то выбор фрагмента или разбиение данных на фрагменты длительностью τ

можно осуществить $T-\tau+1$ способами. Описанная выше процедура должна применяться для каждого разбиения, и затем полученный набор величин усредняется по совокупности всех результатов. Если же нас интересует диагностика некоторого случайного процесса, то мы можем рассматривать величину T как ширину окна, применяемого для анализа процесса.

Изучая динамику разливов Нила, Хёрст экспериментально показал, что наблюдаемый нормированный размах R/S хорошо описывается эмпирическим соотношением

$$\frac{R}{S} \sim \tau^{H}, \tag{7}$$

где H — показатель Хёрста, причем $H \neq 0,5$.

Этот факт вызывает интерес потому, что при отсутствии долговременной статистической зависимости отношение R/S ведёт себя в соответствии с асимптотикой $R/S \propto \tau^{1/2}$, если временной ряд изменений генерируется случайным процессом с независимыми значениями и конечной дисперсией.

Впоследствии оказалось, что и многие другие природные явления хорошо описываются этим законом. Временные последовательности измерений таких величин, как температура, сток рек, количество осадков, толщина колец деревьев или высота морских волн можно исследовать методом нормированного размаха, или методом Хёрста.

Значения показателя H, превышающие 0,5, при достаточно длительной последовательности измерений указывают на поддерживающиеся тенденции (персистентность) в данном временном ряду. Если приращения были положительными в течение некоторого времени в прошлом, т. е. происходило увеличение значений процесса $\xi(t)$, то с большой вероятностью и впредь в среднем будет происходить увеличение. Таким образом, для процесса с $0,5 < H < 1$ тенденция к увеличению в прошлом означает тенденцию к увеличению в будущем. И наоборот, тенденция к уменьшению в прошлом означает в среднем продолжение уменьшения в будущем. Чем больше H, тем сильнее тенденция.

При $H = 0,5$ никакой выраженной тенденции процесса не выявлено, и нет оснований считать, что она появится в будущем.

При $0 < H < 0,5$ ряд является антиперсистентным. В этом случае рост в прошлом означает уменьшение в будущем, а тенденция к уменьшению в прошлом делает вероятным увеличение в будущем. И чем меньше H, тем больше эта вероятность. В таких процессах после возрастания переменной обычно происходит ее уменьшение, а после уменьшения — возрастание.

Наличие изломов в зависимости $R/S(\tau)$ свидетельствует о наличии характерных временных масштабов и/или периодичностей.

Понятие показателя Хёрста позволяет достаточно просто определить обобщенное броуновское движение как случайный процесс, при котором в соотношении (7) $0 < H < 1$ [14]. Для обычного броуновского движения H = 0,5. Используются также другие названия: случайный процесс с H = 0,5 называют «коричневым шумом», персистентный — «розовым шумом», антиперсистентный — «чёрным шумом».

Реализация описанного алгоритма в одномерном случае представлена на рисунке 2 для трех различных значений показателя Хёрста.

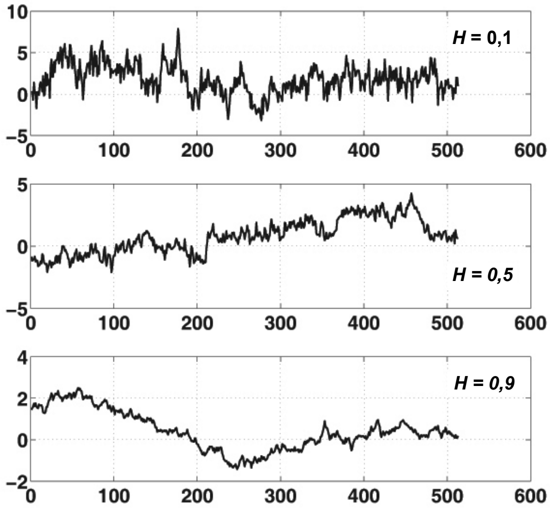


Рис. 2. Реализации обобщенных броуновских процессов с различными показателями Хёрста

Показатель Хёрста связан с фрактальной размерностью (локальной размерностью) соотношением $D = E - H$, где E — евклидова размерность задачи. Для броуновской кривой $D = 2 - 0,5 = 1,5$. Показатель Хёрста может быть получен также другими, в ряде случаев более эффективными методами: по показателю спектра мощности, методом «первого возвращения». В частности, показатель спектра мощности β и показатель Хёрста H для самоаффинных временных рядов связаны соотношением

$$\beta \approx 2H + 1 \text{ при } 1 < \beta < 3. \quad (8)$$

Характеристики шумов разного типа приведены в таблице. Отметим, что при интегрировании шума также получается случайный процесс (шум) с показателем спектра мощности на 2 больше, чем для исходного шума. Например, интегрирование белого шума приводит к случайному процессу типа неперсистентного (обычного) броуновского движения.

Соотношение между характеристиками обобщенного броуновского движения (ОБД)

Тип шума	Показатель спектра мощности β	Показатель Хёрста H	Фрактальная размерность графика D
Белый шум	$\beta = 0$	—	$D = 2$
«Цветной» шум	$0 < \beta < 1$	—	$D = 2$
$1/f$-шум	$\beta = 1$	$H = 1$	$D = 2$
Антиперсистентное ОБД	$1 < \beta < 2$	$0 < H < 0,5$	$1,5 < D < 2$
Броуновское движение	$\beta = 2$	$H = 0,5$	$D = 1,5$
Персистентное ОБД	$2 < \beta < 3$	$0,5 < H < 1$	$1 < D < 1,5$

5. Броуновские пейзажи

Рассмотрим теперь модель формирования фрактальных поверхностей, которая связана с реализацией пространственного аналога броуновского движения. Поверхность в этом случае имеет характер горного ландшафта и может быть промоделирована пространственным распределением, называемым обобщенным броуновским распределением или броуновским пейзажем. Для формирования обобщенного броуновского пейзажа над простой квадратной решеткой используем двухмерный вариант алгоритма случайных сложений Фосса [9, 14].

Координаты ячеек модельной решетки задаются двумя целыми числами, изменяющимися в интервале от единицы до $N = 2^n + 1$, где n — фиксированное целое число. В численном моделировании линейные размеры модельного квадрата составили $N = 129$ при $n = 7$. На первом шаге процедуры четырем ячейкам в вершинах модельного поля с координатами $(1, 1)$, $(1, N)$, $(N, 1)$, (N, N) присваиваются случайные числа, выбранные из нормального распределения с нулевым средним и единичной дисперсией. Значения величины h в пяти ячейках, имеющих координаты $(1, 2^{n-1}+1)$, $(2^{n-1}+1, 1)$, $(2^{n-1}+1, N)$, $(N, 2^{n-1}+1)$, $(2^{n-1}+1, 2^{n-1}+1)$ и содержащих середины сторон и центр исходного квадрата, вычисляются методом линейной интерполяции. Например, центральной ячейке присваивается значение h, равное среднему арифметическому значений h в вершинах: $h(2^{n-1}+1, 2^{n-1}+1) = \frac{1}{2}(h(1, 1) + \ldots + h(N, N))$. Ячейки в вершинах модельного квадрата и упомянутые пять ячеек, содержащие середины его сторон и центр, формируют решетку из четырех одинаковых квадратов с линейными размерами, равными $2^{n-1}+1$. На следующем шаге к значениям величины h во всех девяти вершинах полученной решетки добавляются случайные числа, выбранные из нормального распределения с нулевым средним и уменьшенной дисперсией $\sigma_2^2 = (1/2)^{2H}\sigma_1^2$, где H — любое действительное число из интервала $0 < H < 1$. Далее снова выполняется интерполяция значений величины h в ячейках, содержащих середины сторон и центр уже каждого из полученных квадратов. На k-м шаге процедуры к $(2k-1)^2$ вершинам промежуточной сверхрешетки добавляются случайные числа, выбранные из нормального распределения с нулевым средним и дисперсией $\sigma_k^2 = (1/2)^{2Hk}\sigma_1^2$. Процедура заканчивается, когда все N^2 ячеек исходной модельной решетки заполнены случайными числами. Полное число шагов процедуры равно $2^{n-1}+1$. Генерируемый таким образом рельеф характеризуется пространственным ростом дисперсии распределения потенциала. При этом значение $H = 0{,}5$ соответствует броуновскому потенциальному рельефу, а значения показателя H, отличающиеся от $0{,}5$, — обобщенному броуновскому рельефу. Пример классического броуновского пейзажа с показателем Хёрста $H = 0{,}5$ приведен на рис. 3.

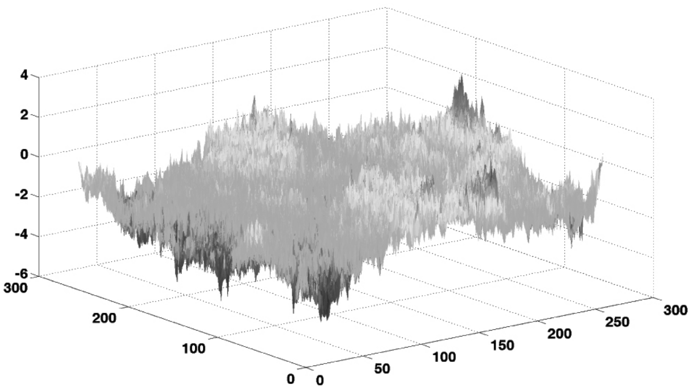


Рис. 3. Броуновский потенциальный рельеф с показателем Хёрста $H = 0{,}5$

6. Квазиэлектростатика заряженного аэрозоля

Ярким примером трехмерного броуновского распределения является квазиэлектростатическое распределение электрического потенциала заряженного аэрозоля [12]. Аэрозоли — дисперсные системы, состоящие из мелких твердых или жидких частиц, взвешенных в газовой среде (обычно в воздухе), чрезвычайно распространены в природе и технике. Естественные аэрозоли образуются вследствие природных явлений, прежде всего атмосферных (грозы, смерчи, песчаные бури), а также при вулканических извержениях и масштабных лесных пожарах, выбрасывающих облака пепла и дыма. Искусственные аэрозоли образуются в результате хозяйственной деятельности человека, в частности при абразивоструйной обработке поверхностей, камерном напылении или, например, при ядерных взрывах.

Практически все перечисленные выше естественные и технологические процессы, приводящие к возникновению аэрозольных систем, сопровождаются их интенсивной электризацией с последующей инициацией электрического пробоя атмосферного воздуха [5].

Электрический пробой заряженного аэрозоля, как и обычный разряд в газе, — лавинный процесс, связанный с тем, что носитель заряда, электрон, на длине свободного пробега приобретает энергию, достаточную для ионизации молекул газа, и увеличивает концентрацию носителей заряда. Генерация носителей происходит лавинообразно. Однако в аэрозольной системе при этом не только создаются свободные носители заряда (увеличивается концентрация электронов), но и уменьшается связанный заряд, локализованный на взвешенных частицах. Таким образом, общий ток разряда, представленный, разумеется, свободными носителями, осуществляет нейтрализацию связанного объемного заряда аэрозоля.

Наиболее распространенным и изученным примером пробоя заряженного аэрозоля является молния. Несмотря на значительные теоретические и экспериментальные усилия последних десятилетий, проблема инициации молниевого разряда остается одной из самых интригующих загадок атмосферного электричества. Основные усилия направлены на поиск возможных механизмов усиления локальных электрических полей в грозовом облаке и группируются вокруг инициации положительного стримера на гидрометеорах, индуцированного космическими лучами пробоя на убегающих электронах или их комбинации [8]. Не углубляясь в детали физики молниевого разряда, остановимся на рассмотрении особенностей электрического поля заряженного аэрозоля, обусловленных локализацией связанного заряда на взвешенных частицах.

Особенностями аэрозолей являются малая вязкость газовой дисперсионной среды и большой пробег молекул газа по сравнению с размером частиц. Поэтому, несмотря на сравнительно большой размер частиц, в аэрозолях всегда происходит интенсивное броуновское движение. Ввиду разряженности газовой среды на частицах аэрозолей не возникает двойного электрического слоя. По этой же причине, в отличие от коллоидных систем, заряд у частиц может быть неодинаковым по величине и даже разным по знаку. Кроме того, во всех практически интересных случаях характерный размер частиц a существенно уступает среднему расстоянию между ними: $a \ll n^{-1/3}$.

Исходя из сказанного, будем предполагать, что распределение заряда на частицах имеет нормальный вид:

$$P(q)=\frac{1}{Q\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\frac{q}{Q})^2\right), \tag{9}$$

где Q — некая характерная абсолютная величина заряда частиц, которая, в свою очередь, зависит от функции распределения частиц по размерам. Для выбранного нами распределения выполняются следующие очевидные соотношения: $\overline{q}=0$ и $\overline{q}^2=Q^2$. Этот же результат можно обнаружить и для однородного ($P(q)=\frac{1}{2\sqrt{3}Q}\ -\sqrt{3}Q<q<\sqrt{3}Q$), и для бинарного ($P(q)=\frac{1}{2}\delta(q+Q)+\frac{1}{2}\delta(q-Q)$) распределений заряда.

Предположим также, что частицы случайно-однородно распределены в объеме облака и объемная плотность заряда $\rho(\mathbf{r})$ представляет собой пространственный белый шум, удовлетворяющий следующим соотношениям:

$$\langle\rho(\mathbf{r})\rangle=0;\quad \langle\rho(\mathbf{r}_1),\rho(\mathbf{r}_2)\rangle=Q^2n\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2), \tag{10}$$

где n — концентрация облачных частиц и $\delta(\mathbf{r})$ — дельта-функция Дирака (произведение Q^2n характеризует интенсивность источника пространственного белого шума).

Далее строится квазиэлектростатическое описание ансамбля внутриоблачных зарядов, основанное на выполнении следующих условий:

$$Q\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^{-1}\gg\frac{L}{c}\ \text{и}\ \left(\frac{n^{-1/3}}{u}\right)^{-1}\gg\frac{L}{c}, \tag{11}$$

где L — линейные размеры грозовой ячейки, u — характерная скорость частиц, c — скорость света.

Потенциал электростатического поля системы зарядов с пространственной плотностью $\rho(\mathbf{r})$ определяется решением уравнения Пуассона $\Delta\varphi=-4\pi\rho(\mathbf{r})$, которое в трехмерном случае имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r})=\iiint d^3\mathbf{r}'\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{12}$$

где $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ — функция Грина уравнения Пуассона.

Первый момент потенциала распределения (10) обращается в нуль.

Второй момент:

$$\langle\varphi(\mathbf{r}_1),\varphi(\mathbf{r}_2)\rangle=Q^2n\int d^3\mathbf{r}'\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\frac{1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}'|}\,.$$

Тогда

$$\left\langle \varphi^2(\mathbf{r})\right\rangle = Q^2 n\int d^3\mathbf{r}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} = Q^2 n\int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{r}'^2 d\mathbf{r}'\int_0^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta\int_0^{2\pi} d\psi\frac{1}{\mathbf{r}'^2} = 4\pi Q^2 n\mathbf{r}.$$

Окончательно

$$\left\langle \varphi^2(\mathbf{r})\right\rangle^{\frac{1}{2}} = 2Q\sqrt{\pi n\mathbf{r}}. \tag{13}$$

Из соотношения (13) следует, что квазиэлектростатическое поле, создаваемое заряженным аэрозолем, характеризуется значительными пространственными флуктуациями и обладает свойством масштабной инвариантности. При этом среднеквадратичные флуктуации разности потенциалов между пространственно разнесенными областями системы пропорциональны корню квадратному из ее линейных размеров и могут достигать значительных величин даже в отсутствие регулярного поля. Интенсивность флуктуаций пропорциональна концентрации аэрозоля и квадрату характерной абсолютной величины заряда составляющих его частиц.

На рис. 4 представлено распределение нулевой эквипотенциали в системе из 3000 точечных зарядов. Видно, что эквипотенциальная поверхность является чрезвычайно нерегулярной и многосвязной геометрической структурой.

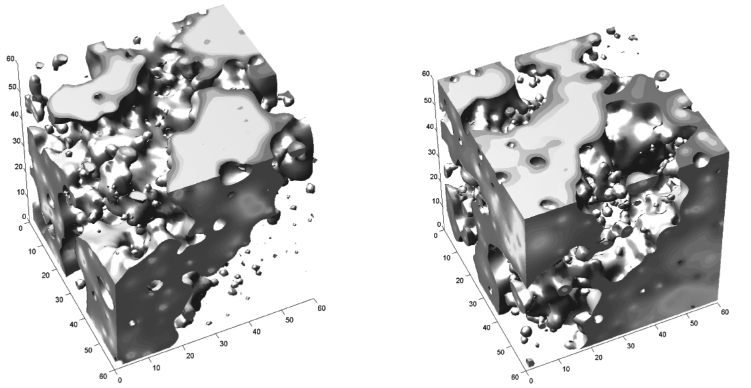


Рис. 4. Распределение нулевой эквипотенциали в системе из 3000 точечных зарядов. Структуры справа и слева комплиментарны друг другу и соответствуют положительным и отрицательным значениям потенциала

Итак, если двигаться вдоль прямой линии в среде, заполненной аэрозолем, зависимость величины электрического потенциала от пространственной координаты будет выглядеть совершенно аналогично графикам на рис. 1. Нужно только заменить отложенное по оси абсцисс время t на пространственную координату r, а отложенное по оси ординат смещение броуновской частицы — на значение электрического потенциала.

***

В заключение хотелось бы отметить, что мощный прикладной потенциал концепции броуновского движения связан с возможностью разделения совокупности флуктуаций динамики реальных систем на «быстрые» и «медленные» движения согласно принятой в статистической физике терминологии. Важно, что на временах реакции медленных переменных на внешнее воздействие быстрые переменные теряют память об их предыдущем состоянии и могут рассматриваться как случайный процесс с заданной статистикой. В предельном случае воздействие быстрых переменных на медленные рассматривается как воздействие белого шума — случайного процесса с исчезающе малым временем корреляции, так называемого дельта-коррелированного случайного процесса [11]. Хочется верить, что пространственные и пространственно-временные обобщения этой идеологии дождутся своих апологетов.

Литература

1. *Bunde, A.* Fractals and Disordered Systems / A. Bunde, S. Halvin. — Berlin : Springer-Verlag, 1995. — 408 p.

2. *Einstein, A.* // Ann. d. Phys. — 1905. — V. 17. — P. 549 ; *Эйнштейн, А.* Броуновское движение : сб. статей / А. Эйнштейн, М. Смолуховский. — М., 1936. — С. 13.

3. *Einstein, A.* // Ann. d. Phys. — 1906. — V. 19. — P. 289, 371 ; *Эйнштейн, А.* Броуновское движение : сб. статей / А. Эйнштейн, М. Смолуховский. — М., 1936. — С. 43, 28.

4. *Falcone, K.* Fractal geometry. Mathematical foundations and applications / K. Falcone. — John Wiley & Sons, 1995. — 299 с.

5. *Iudin, D., Trakhtengerts, V., and Hayakawa, M.* // Phys. Rev. E. — 2003. — V. 68. — 016601.

6. *Mandelbrot, B.* The fractal geometry of nature / B. Mandelbrot. — San Francisco : Freeman, 1982. — 461 p. ; *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. — М. : Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.

7. *Mandelbrot, B. B.* Multifractal measures, especially for the geophysicist / B. B. Mandelbrot // PAGEOPH. — 1989. — V. 131, № 1/2. — P. 5—42.

8. *Petersen, D.* A brief review of the problem of lightning initiation and a hypothesis of initial lightning leader formation / D. Petersen, M. Bailey, W. H. Beasley, and J. Hallett // J. Geophys. Res. — 2008. — V. 113. — D17205. — doi:10.1029/2007JD009036.

9. *Voss, R. F.* Random fractals: Characterization and measurement // Scaling Phenomena in Disordered Systems / eds. R. Pynn & A. Skjeltorp. — New York : Plenum Press, 1985. — P. 1—11.

10. Броуновское движение // Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона : в 86 т. (82 т. и 4 доп.). — СПб., 1890—1907.

11. *Демченко, П. Ф.* Стохастическая динамика природных объектов: броуновское движение и геофизические приложения / П. Ф. Демченко, А. В. Кислов. — М. : ГЕОС, 2010. — 243 с.

12. *Иудин, Д. И.* Фракталы: от простого к сложному : монография / Д. И. Иудин, Е. В. Копосов. — Н. Новгород : ННГАСУ, 2012.

13. *Мак-Доналд, Д.* Введение в физику шумов и флуктуаций : пер. с англ. / Д. Мак-Доналд. — М. : Мир, 1964. — 158 с.

14. *Федер, Е.* Фракталы : пер. с англ. / Е. Федер. — М. : Мир, 1991. — 214 с.

15. *Шредер, М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая / М. Шредер. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 528 с.

Современные проблемы теории нелинейных колебаний и волн

О СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ И ВОЛНАХ С СИЛЬНО ВЫРАЖЕННОЙ СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

О. В. Руденко

Введение

Даже опытные люди не всегда подчеркивают разницу между двумя объектами: волной с сильно выраженной слабой нелинейностью и сильно нелинейной волной.

Сейчас изучают в основном слабо нелинейные волны. Например, классическая нелинейная оптика рассматривает лазерные поля, напряженность которых мала по сравнению с полем внутри атома:

$$E << E_{AT} \sim e / r_b^2 \sim 10^{11} \text{ В/м}$$

(где r_b — боровский радиус). Тем не менее, накапливаясь во времени (за многие периоды колебаний) или в пространстве (на многих длинах волн), слабая нелинейность может приводить к сильно выраженным эффектам. Примерами служат почти полная перекачка энергии из волны одной частоты в другую (генерация 2-й гармоники, параметрическое усиление), формирование солитонов или самофокусировка.

В сильно нелинейных волнах (поля которых сравнимы с полем внутри атомов $E \sim E_{AT}$) нелинейные превращения происходят быстро, за времена порядка периода колебаний или на расстояниях порядка длины волны. В среде часто идут необратимые изменения, вплоть до ее разрушения. Но даже такая волна, сильная в сравнении с внутриатомными полями, будет слабой при ее распространении в вакууме. Здесь сильной станет волна с напряженностью поля $E \sim E_{VAC} \sim m^2 c^3 / e\hbar \sim 10^{18}$ В/м, в котором могут измениться свойства вакуума и возникнуть эффекты квантовой электродинамики, например рождение и аннигиляция электрон-позитронных пар.

Аналогично следует различать сильно и слабо нелинейные волны иной физической природы. Например, когда в профиле акустической волны, прошедшей в воде расстояние порядка сотен или тысяч длин волн, образуются ударные фронты, это — слабый нелинейный эффект, который сильно выражен. При этом акустические давления в интенсивной волне обычно бывают порядка 10^5—10^6 Па, т. е. много меньше характерного внутреннего давления, равного для воды $2{,}2 \cdot 10^9$ Па.

Типичные сильно выраженные эффекты слабой нелинейности: превращение одиночного импульса с исходным гладким профилем в виде «колокола» в «треугольный» импульс с ударным передним фронтом; трансформация гармонической волны в пилообразную, содержащую по одному разрыву в каждом своем периоде.

Иная ситуация возникает при наличии в воде зародышей кавитации, когда акустическая волна может «разорвать» среду. В жидкости при этом образуются парогазовые пузырьки. Взрывная волна обычно также является сильно нелинейной. Она разрушает среды. При ядерных взрывах даже образуются новые химические элементы. Экстремальные состояния вещества реализуются в белых карликах, нейтронных звездах и особенно в черных дырах — в результате гравитационного коллапса и аккреции вещества. Волну, стимулирующую «безынерционный» фазовый переход, также имеет смысл считать сильно нелинейной.

Подводя итог этому обсуждению, нужно сформулировать ответ на вопрос: сильный или слабый по сравнению с чем?

Если волна (ее спектр, форма, другие характеристики) сравнивается сама с собой в начальный момент времени или в исходной точке пространства (и при этом наблюдается заметное различие), можно говорить о сильно выраженной слабой нелинейности (рис. 1, *а*).

Если же поле волны сравнивается с характерными значениями того же поля в среде (и при этом оба значения близки), можно говорить о сильной нелинейности (рис. 1, *б*).

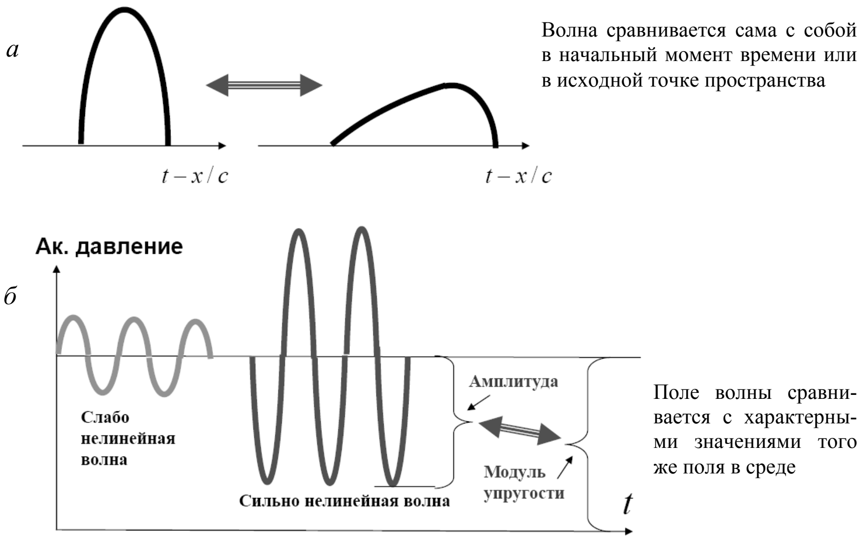


Рис. 1. Сильное искажение формы слабо нелинейного акустического сигнала (*а*) и сильно нелинейный сигнал (*б*), амплитуда которого сравнима с модулем упругости среды

Большинство задач нелинейной волновой физики имеет дело со слабо нелинейными волнами, для которых материальные уравнения (или уравнения состояния, или определяющие уравнения) могут быть разложены в обычные степенные или функциональные ряды. Примером служит разложение адиабатического уравнения состояния по степеням возмущений плотности ρ' и давления p' в окрестности равновесного состояния (p_0, ρ_0):

$$p' = p_0\left(\frac{\rho_0+\rho'}{\rho_0}\right)^{\gamma} = p_0 + c_0^2\rho_0\left[\frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 + \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{6}\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^3 + \ldots\right]. \quad (1)$$

Здесь $\gamma = c_p / c_v$ — отношение теплоемкостей, $c_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0$ — квадрат скорости звука. Разложение (1) по малому отношению возмущения плотности среды к ее равновесному значению используется в нелинейной акустике [1]. При этом второй член в квадратных скобках формулы (1) связывают с квадратичной нелинейностью, третий член — с кубичной нелинейностью.

В нелинейной оптике [2] рассматривают разложение вектора поляризации по степеням отношения электрического поля к внутриатомному полю:

$$\begin{aligned}\vec{P} = &\int_0^{\infty}\hat{\kappa}(\tau)\vec{E}(t-\tau)\,d\tau + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\hat{\chi}^{(2)}(\tau_1,\tau_2)\vec{E}(t-\tau_1)\,\vec{E}(t-\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\hat{\chi}^{(3)}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\vec{E}(t-\tau_1)\,\vec{E}(t-\tau_1-\tau_2)\,\vec{E}(t-\tau_1-\tau_2-\tau_3)\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.\end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\hat{\kappa}(\tau)$ — тензор линейной поляризуемости, $\hat{\chi}^{(2)}, \hat{\chi}^{(3)}$ — тензоры квадратичной и кубичной нелинейностей.

Представление Фреше через кратные интегралы, обобщающие ряд Тейлора, использовал еще Вольтерра в нелинейной наследственной теории упругости. Скалярный функциональный ряд здесь имеет вид [3]

$$\begin{aligned}\sigma = &\int_0^{\infty} G_1(\tau)de(t-\tau) + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} G_2(\tau_1,\tau_2)\,de(t-\tau_1)\,de(t-\tau_1-\tau_2) + \\ &+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} G_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)de(t-\tau_1)\,de(t-\tau_1-\tau_2)\,de(t-\tau_1-\tau_2-\tau_3).\end{aligned} \quad (3)$$

Принятые обозначения: σ — напряжение, e — деформация, G_i — функции релаксации для линейного $(i=1)$, квадратичного и кубичного процессов $(i = 2, 3)$.

Однако разложения (1)—(3) неудобно использовать по крайней мере в трех случаях.

Во-первых, когда определяющие соотношения (имеются в виду функциональные связи $p(\rho)$, $\vec{P}(\vec{E})$ или $\sigma(e)$) содержат особенности. Примером могут служить «хлопающая» и герцевская нелинейности в акустике структурно-неоднородных сред [4], а также нелинейность механических виброударных систем [5].

Во-вторых, когда разложения типа (1)—(3) расходятся в очень сильных полях, достигаемых, например, при механических взрывах, или в полях петаваттных лазеров [6]; обычно такие поля с характерным механическим напряжением порядка величины модуля упругости или с напряженностью электрического поля порядка внутриатомной разрушают среду или необратимо изменяют ее свойства. Сверхсильные поля могут даже изменить свойства вакуума.

В-третьих, когда в разложениях отсутствует линейный член, зато доминирует одна из высших нелинейностей. Такие модели известны в квантовой теории поля [7] и в механике [8].

Приведем примеры сосредоточенных и распределенных систем первого, второго и третьего типа. Начнем с колебательных систем.

1. Примеры трех типов колебательных систем

1.1. Пример сильной нелинейности 1-го типа
(есть особенность)

Рассмотрим ангармонический осциллятор с «модульным» потенциалом

$$m\frac{d^2x}{d\,t^2} = F = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad U = -kx_0|x|, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}x_0. \tag{4}$$

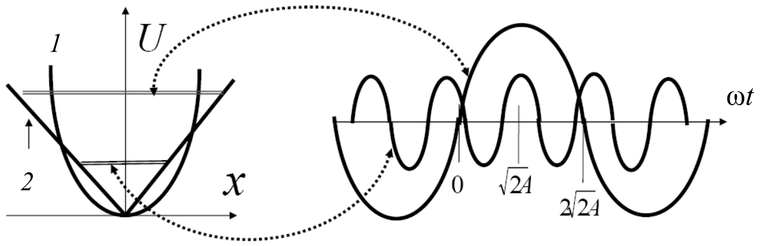


Рис. 2. Движение в потенциальной яме с особенностью при $x = 0$

«Модульная» потенциальная яма изображается двумя полупрямыми (кривая *2* на рис. 2). Она похожа на параболическую яму (кривая *1*) обычного гармонического осциллятора. Решение здесь еще проще, чем у линейной задачи, — оно описывается даже не тригонометрическими, а квадратичными функциями времени:

$$x = A - \frac{1}{2}\left(\omega_0 t - \sqrt{2A}\right)^2, \quad 0 < \omega_0 t < 2\sqrt{2A},$$
$$x = \frac{1}{2}\left(\omega_0 t + \sqrt{2A}\right)^2 - A, \quad -2\sqrt{2A} < \omega_0 t < 0. \tag{5}$$

Спектральное представление этого решения дается рядом

$$x = \frac{32}{\pi^3} A \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^{-3} \sin\left[\frac{\pi}{2}(2m+1)\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2A}}\right]. \tag{6}$$

Видно, что все гармоники нечетные. Амплитуды гармоник пропорциональны A, период растет как $\sqrt{2A}$. С уменьшением амплитуды A материальная частица спускается все ближе к дну потенциальной ямы, где имеется особенность. Линейного предельного перехода при малых амплитудах $A \to 0$ здесь нет.

1.2. Пример сильной нелинейности 2-го типа

(есть расходимость для сильного колебания)

Примером такой колебательной системы может служить ангармонический осциллятор

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0^2 x}{\sqrt{1 - x^2/a^2}} = 0. \tag{7}$$

Особенность появляется при $|x| \to a$. При малых смещениях $|x| << a$ осциллятор ведет себя почти как гармонический. Интеграл энергии

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - X^2}\right), \quad X = \frac{x}{a}, \quad \tau = \omega_0 t, \tag{8}$$

при $|X| << 1$ переходит в простую квадратичную форму, как у обычного гармонического осциллятора:

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}X^2. \tag{9}$$

В случае больших смещений $|X| > 1$ колеблющаяся частица «исчезает» в пространстве действительных координат и импульсов.

1.3. Пример сильной нелинейности 3-го типа

(в разложении отсутствует линейный член)

Рассмотрим уравнение типа Дуффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right) = 0 \tag{10}$$

для случая, когда в круглых скобках нет единицы. При этом получается уравнение

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} + X^3 = 0, \quad X = \frac{x}{a}, \ \tau = \omega_0 t, \tag{11}$$

которое использовалось ранее в различных квантовых [7] и классических [8] задачах. Его решение выражается в эллиптических функциях Якоби

$$\frac{x}{a} = A \cdot sd\left(A\omega_0 t \,\middle|\, \frac{1}{2} \right), \quad T = \frac{\Gamma^2(1/4)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega_0 A}. \tag{12}$$

Разложение в ряд Фурье по нечетным гармоникам имеет вид

$$\frac{x}{a} = A \frac{16\pi^{3/2}}{\Gamma^2(1/4)} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\exp(-\pi(m-1/2))}{1+\exp(-2\pi(m-1/2))} \sin\left[(2m-1) \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma^2(1/4)} A\omega_0 t \right]. \tag{13}$$

Форма колебания показана на рис. 3.

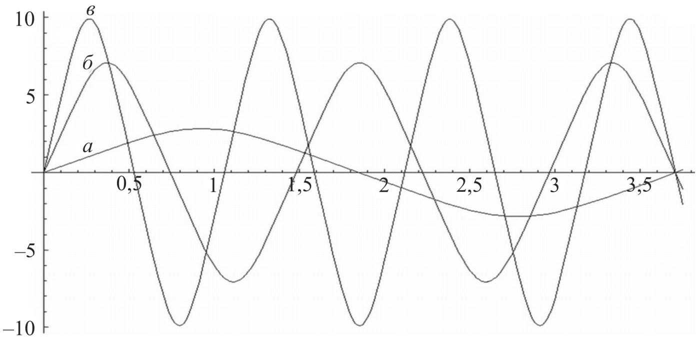
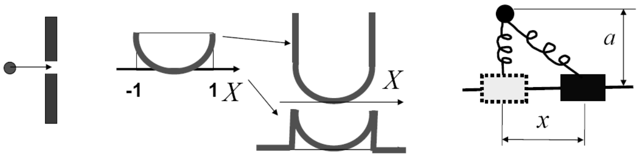


Рис. 3. Колебание (12) сильно нелинейного осциллятора, уравнение движения которого (11) не содержит линейного по смещению члена

«Сильно нелинейные» модели трех перечисленных типов описывают реальные физические ситуации, изображенные на рис. 4. Рисунок 4, *а* соответствует осциллятору 1-го типа (4), описывающему колебания вокруг точки $x = 0$. При этом силовое поле однородно, но при переходе через точку $x = 0$ изменяет свое направление. Такое движение реализуется в окрестности плоскопараллельной массивной пластины, которая создает однородное поле сил тяготения. Если в пластине имеется небольшое отверстие, точечная масса по инерции будет проходить отверстие, а затем притягиваться к нему с другой стороны. Колебательная система 2-го типа (7) имеет потенциал в виде ямы (рис. 4, *б*) в области $-1 < X < 1$. Если яму ограничить отражающими стенками, все движение будет происходить внутри указанной области. Если же потенциал положить равным нулю при $|X| > 1$, на краях ямы возникнут два потенциальных барьера. Частица с достаточно большой энергией действительно выскочит из ямы и «исчезнет».



а *б* *в*

Рис. 4. Иллюстрация сильно нелинейных систем 1, 2 и 3-го типа

Простейшая сильно нелинейная колебательная система 3-го типа изображена на рис. 4, *в*. Это система со связью: масса может скользить только вдоль направляющего стержня. Пружина линейная. Она не растянута, если нет смещения. Уравнение движения для массы имеет вид, соответствующий (11):

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_0^2}{2a^2}x^3=0, \quad \omega_0^2=\frac{k}{m}. \tag{14}$$

Поскольку коэффициент жесткости пружины k — константа, «физической» нелинейности нет. Нелинейность связи можно назвать «геометрической» — по аналогии с нелинейной акустикой.

2. Примеры трех типов распределенных систем

2.1. Волновая система 1-го типа
(есть особенность)

Кубично-нелинейная среда для сильно нелинейных волн имеет уравнение состояния $u/u_0=\beta(p/p_0)^3$. Для определенности считаем, что рассматривается сплошная среда, у которой переменные u и p имеют смысл колебательной скорости и давления. Иногда бывает удобно аппроксимировать кубичную нелинейность двумя ветвями квадратичной параболы $u/u_0=\beta(p/p_0)|p/p_0|$. В дальнейшем такую нелинейность будем называть квадратично-кубичной нелинейностью. Она во многих случаях адекватна реальным распределенным системам, а иногда просто удобна для качественного анализа — задача легче решается.

Плоские волны в квадратично-кубичной системе без дисперсии описываются уравнением типа простых (римановых) волн

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\beta}{c_0^2}|u|\frac{\partial u}{\partial \tau}. \tag{15}$$

Решение уравнения (15) для волны с заданным профилем $\Phi(\tau)$ на границе среды $z=0$ дается неявной функцией

$$u=\Phi\left(\tau+\frac{\beta}{c_0^2}|u|z\right). \tag{16}$$

Если исходная волна — гармоническая, легко найти ее спектр Фурье — разложение в ряд по нечетным гармоникам:

$$u = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} C_n(Z) \sin\left(n\omega\tau + \varphi_n(Z)\right), \quad Z = \frac{z}{z_{SH}} = \frac{\beta}{c_0^2}\omega u_0 z, \tag{17}$$

$$C_n = \left[1-(-1)^n\right]\frac{2}{nZ}\left[\left(\frac{2}{\pi n} - \mathrm{E}_n(nZ)\right)^2 + J_n^2(nZ)\right]^{1/2}, \ \operatorname{tg}\varphi_n = \frac{(2/\pi n) - \mathrm{E}_n(nZ)}{J_n(nZ)}.$$

Здесь J_n и E_n — функции Бесселя и Вебера.

Интересно найти решение уравнения (15) на таких расстояниях, когда в профиле волны образовались разрывы. Отыскивая решение в виде $u = A(z)\Phi(\tau - \tau_{SH}(z))$, где функция $\tau_{SH}(z)$ описывает положение фронта, а $\Phi(\tau)$ — квазистационарную форму гладких участков профиля, найдем

$$A(z) = \frac{u_0}{1 + z/z_0},$$
$$\omega(\tau - \tau_{SH}(z)) + C = \ln|\Phi| + Z_0|\Phi|, \quad \omega\tau_{SH}(z) = -\ln\left(1 + \frac{z}{z_0}\right). \tag{18}$$

Здесь $Z_0 = z_0/z_{SH} = \left(\beta/c_0^2\right)\omega u_0 z_0$. Размещая фронты в соответствующих точках профиля, получим периодическую волну, изображенную на рис. 5. В отличие от обычной «пилы» в квадратично-нелинейной среде без дисперсии, здесь «зубцы пилы» имеют не треугольную, а трапециевидную форму. При этом каждый период содержит две ударные волны: сжатия и разрежения. Последняя, как известно, в обычной квадратичной среде существовать не может.

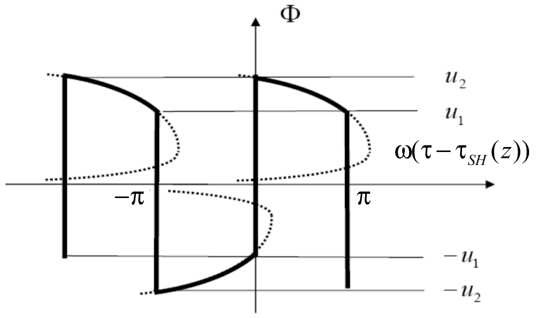


Рис. 5. Трапециевидная «пила» в квадратично-кубичной среде без дисперсии

Чтобы описать форму ударных фронтов, имеющих малую, но конечную ширину, нужно учесть высокочастотное поглощение и рассмотреть квадратично-кубичное уравнение типа Бюргерса с такой же, как в уравнении (15), особенностью:

$$\frac{\partial V}{\partial Z}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(|V|V\right)+\Gamma\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2},\quad V=\frac{u}{u_0},\quad \theta=\omega\tau,\quad Z=\frac{z}{z_{SH}}. \qquad (19)$$

Это уравнение замечательно тем, что сводится к линейному уравнению заменой типа Флорина — Хопфа. Следовательно, можно найти множество его точных решений.

Одно из важных решений описывает форму устойчивой ударной волны сжатия:

$$\begin{gathered} V=\alpha^2\left(\frac{\theta_*-\theta_0}{2\Gamma}\right)\left[1-\alpha\left(\frac{\theta_*-\theta_0}{2\Gamma}\right)\right]^{-1},\quad -\infty<\theta_*<\theta_0, \\ V=\alpha\left[1+\sqrt{2}\,\mathrm{th}\left(\alpha\sqrt{2}\,\frac{\theta_*}{2\Gamma}\right)\right],\ \theta_0<\theta_*<\infty. \end{gathered} \qquad (20)$$

Здесь

$$\alpha\equiv\left(\sqrt{2}-1\right),\ \theta_0/2\Gamma=-\left(\sqrt{2}/2\right)^{-1}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}/2\right),\ \theta_*=\omega(\tau-\tau_{SH}(z)).$$

Форма фронта изображена на рис. 6 для двух различных значений параметра Γ. Аналогично рассчитывается фронт разрежения.

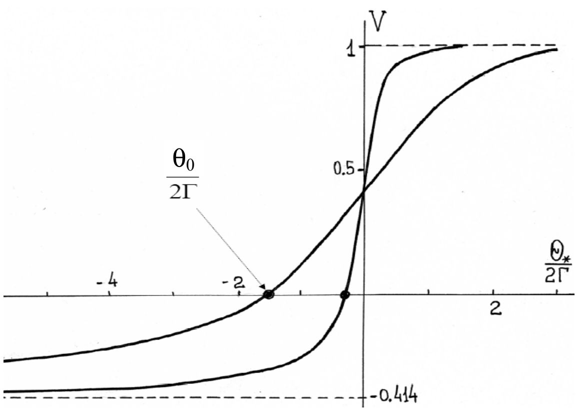


Рис. 6. Устойчивый ударный фронт сжатия в квадратично-кубичной среде

Зная решение для гладких участков профиля квадратично-кубичной нелинейной волны и решение, описывающее структуру фронтов, можно построить «погранслойную асимптотику» с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений и описать профиль волны полностью, после чего рассчитать спектральный состав.

Интересно проанализировать квадратично-кубичные обобщения уравнений Кортевега — де Вриза (КдВ), нелинейного уравнения Шредингера и других «эталонных» уравнений теории волн.

2.2. Волновая система 2-го типа
(есть расходимость для сильных возмущений)

Хорошо известна одна система такого типа [9] — это уравнение Ирншоу, описывающее (по Лагранжу) одномерное движение сжимаемого газа:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=c_0^2\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^{-(\gamma+1)}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}. \tag{21}$$

Здесь ξ — смещение частиц сплошной среды. Приближение нелинейной акустики соответствует малым акустическим числам Маха (малые деформации $|\partial\xi/\partial x|<<1$). С учетом лишь основного (квадратичного) нелинейного члена упрощенное уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=(\gamma+1)\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}. \tag{22}$$

Это уравнение учитывает лишь слабую нелинейность. Но нелинейные эффекты могут накапливаться и приводить к сильно выраженным нелинейным явлениям.

Поскольку такие явления уже хорошо изучены, интересно обратить внимание на сильную нелинейность, когда деформации среды нельзя считать малыми. Прежде всего, отметим, что при больших отрицательных деформациях $\partial\xi/\partial x<-1$ в уравнении (21) возникает особенность. Она соответствует разрыву сплошности среды. В реальных жидкостях из-за присутствия различных примесей среда «рвется» при значительно меньших разрежениях.

Уравнение (21) имеет аналитические решения. Перепишем его для удобства в виде

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\tau^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{V^{\gamma+1}}\frac{\partial V}{\partial x}\right),\quad V\equiv 1+\frac{\partial\xi}{\partial x},\quad \tau\equiv c_0 t. \tag{23}$$

Как нетрудно проверить, решение уравнения первого порядка

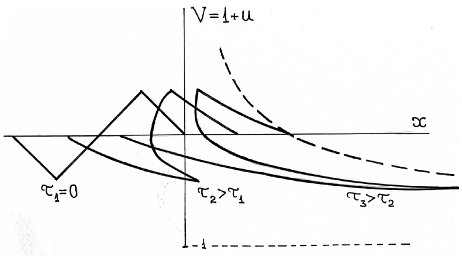
$$\frac{\partial V}{\partial\tau}+\frac{1}{V^{\varepsilon}}\frac{\partial V}{\partial x}=0,\ \varepsilon=\frac{\gamma+1}{2}, \tag{24}$$

будет решением и уравнения (23). В частности, решением является неявная функция

$$V=\Phi\left(x-V^{-\varepsilon}\tau\right). \tag{25}$$

Искажение исходной волны в виде двух следующих один за другим треугольных импульсов показано на рис. 7. Особенность возникает практически сразу при $\partial\xi / \partial x \to -1,\ V \to 0$, когда среда «рвется».

Рис. 7. Процесс искажения сильно нелинейного возмущения, описываемый моделью (23), (24)



Уравнение (23) имеет множество решений, содержащих особенности. Например, одним из его стационарных решений будет функция

$$V = \frac{C}{(x - x_0)^{1/\gamma}}. \tag{26}$$

Решения с особенностью имеют и «эталонные» уравнения теории слабо нелинейных волн. Пример: обычное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} = \Gamma\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \tag{27}$$

имеет такие решения:

$$V = -\frac{2\Gamma}{x - x_0},\ V = -\mathrm{tg}\frac{x - x_0}{2\Gamma}. \tag{28}$$

Особенности обнаруживают внешнее сходство с поведением частиц. Они устойчивы и могут взаимодействовать между собой. Аналогичные решения есть у КдВ и других известных уравнений. Часто считают, что неограниченные решения не имеют ясного физического смысла. Тем не менее интересно понять, как возникает сингулярность и как ее можно устранить.

2.3. Волновая система 3-го типа

(ряд определяющего уравнения не содержит линейного члена)

Рассмотрим цепочку масс, каждая из которых движется вдоль одного из семейств параллельных стержней, расположенных на одинаковом удалении *a* друг от друга (см. рис. 8).

Цепочка на рис. 8 есть обобщение осциллятора, изображенного на рис. 4, *в*, на случай распределенной системы [8]. Если в положении равновесия пружины не натянуты, линейный режим не реализуется. Нелинейность полностью определяет движение при сколь угодно малых колебаниях. Очевидно, что такие колебания можно назвать сильно нелинейными.

Методы возмущений, основанные на близости к линейной системе, здесь не применимы. Нужны точные либо численные решения.

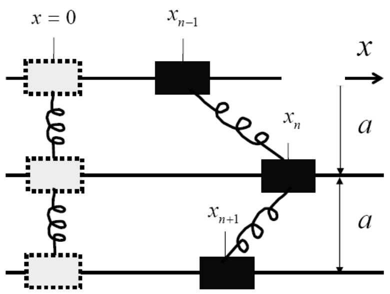


Рис. 8. Цепочка масс, совершающих сильно нелинейные сдвиговые колебания

Уравнение колебаний массы с номером n в цепочке имеет вид

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} = -\frac{k}{2a}\left[\left(x_n - x_{n-1}\right)^3 - \left(x_{n+1} - x_n\right)^3\right]. \tag{29}$$

В континуальном приближении, полагая $x_n = x(z)$, $x_{n+1} = x(z+a)$, $x_{n-1} = x(z-a)$; $a << \lambda$, из дифференциально-разностного уравнения (29) получим нелинейное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \frac{\beta}{3}\frac{\partial^2\zeta^3}{\partial z^2}\ , \quad \zeta = \frac{\partial x}{\partial z},\ \beta = \frac{3k}{2m}a^2\,. \tag{30}$$

Интересно, что уравнение (30) имеет решение в виде стоячей волны. Бегущие волны появляются только в том случае, если в равновесии пружинки растянуты. Скорость распространения увеличивается с ростом их натяжения.

Уравнение (30) имеет ряд замечательных свойств. Во-первых, оно допускает разделение переменных. Во-вторых, его можно линеаризовать, перейдя к новым независимым переменным

$$\eta = \frac{\partial x}{\partial t},\ \zeta = \frac{\partial x}{\partial z};\ t = T(\eta,\zeta),\ z = Z(\eta,\zeta). \tag{31}$$

Соответствующее линейное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial\zeta^2} = \beta\zeta^2\frac{\partial^2 T}{\partial\eta^2}. \tag{32}$$

В-третьих, его решениями будут решения уравнения первого порядка

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \pm\sqrt{\beta}\,|\zeta|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\,, \tag{33}$$

которое отличается от рассмотренного ранее уравнения (15) только обозначениями.

Чтобы смоделировать сильно нелинейные колебания цепочки масс (см. рис. 8), нужно уменьшить трение между массами и направляющими стержнями. Это удалось сделать, перейдя к цепочке дисков, находящихся на одной оси и связанных пружинками [8]. Пружинки, как и ранее, деформируются по линейному закону. Фотография цепочки дана на рис. 9.

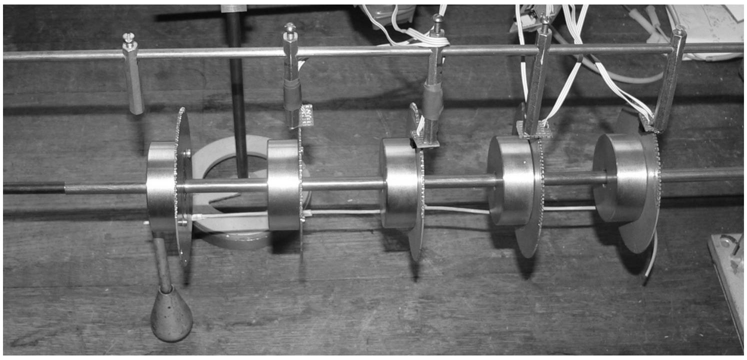


Рис. 9. Цепочка дисков, совершающих сильно нелинейные крутильные колебания

Уравнение движения цепочки имеет вид

$$\frac{d^2\varphi_n}{dt^2} = -\omega^2\left[(\varphi_n - \varphi_{n-1})^3 - (\varphi_{n+1} - \varphi_n)^3\right], \quad \omega^2 = \frac{kR^4}{2a^2J}. \tag{34}$$

Здесь φ_n — угол поворота диска с номером n, a — расстояние между дисками, R — радиус диска, J — его момент инерции.

Предварительные эксперименты с цепочкой на рис. 9 обнаружили ряд интересных особенностей сильно нелинейной динамики [8].

3. Сильная нелинейность и локализация

Сильно нелинейные волны связаны с проблемой значительной локализации энергии. Этот термин связан с такими понятиями, как фокусировка во времени и в пространстве, коллапс, кумуляция и др.

Значительная локализация энергии происходит в жидкости при схлопывании парогазового пузырька. В 1934 году обнаружено явление сонолюминесценции — излучение света при схлопывании пузырьков воздуха в воде под действием звука. В 1998 году наблюдалось схлопывание одиночных пузырьков, созданных сфокусированной звуковой волной. Согласно оценкам, температура плазмы в пузырьках была порядка 25000 К. Увеличивая исходный радиус пузырька и добиваясь идеальной сферической симметрии схлопывания, видимо, можно еще больше повысить давление и температуру в центре. Предел такой локализации пока неизвестен. Эти вопросы подробно обсуждались на школе «Нелинейные волны' 2006» [10].

Повышение плотности энергии обычно происходит поэтапно. Рост плотности на каждом этапе ограничивается либо нелинейным насыщением, либо развитием неустойчивости. Эту мысль высказал Е. И. Забабахин, назвав ее «Гипотеза о неустойчивости кумуляции» (1965): «Всякая неограниченная кумуляция неустойчива; неустойчивость не только видоизменяет ее, но и устраняет вообще (из неограниченной делает ограниченной)... Это соображение интуитивно».

Обсудим в качестве примера вопрос о том, как накопить большую энергию и создать сильную волну в акустическом резонаторе.

На первом этапе, очевидно, нужно повысить добротность Q. Поскольку Q есть отношение амплитуды колебаний внутри резонатора к амплитуде колебаний внешнего источника, обеспечивающего приток энергии, при $Q >> 1$ амплитуда внутренних колебаний в резонаторе может стать большой. «Мировой рекорд» примерно равен $Q \sim 10^9$. При $Q >> 1$ лучше выражены нелинейные эффекты. Но они приводят к появлению ударных волн (УВ), нелинейному затуханию, и добротность резко падает.

На втором этапе, чтобы увеличить плотность энергии в резонаторе, нужно остановить процесс образования УВ. Известны по крайней мере три способа. 1) Искусственно ввести фазовые расстройки между гармониками. Например, сделать стенку с частотно-зависимой мнимой частью коэффициента отражения. Расстройки между сфазированными гармониками, формирующими ударный фронт, «затягивают» (уширяют) фронт и уменьшают нелинейные потери. 2) Фазовые сдвиги можно ввести с помощью резонаторов сложной формы — конических, бульбообразных и др. В газонаполненных объемах удалось получить положительное акустическое давление в несколько атмосфер и подавить УВ в условиях сильной нелинейности. 3) Ввести в среду селективные поглотители на частоте 2-й гармоники. В эксперименте одна граница пропускала наружу 2-ю гармонику, отражая внутрь волну основной частоты. УВ при этом не образовывались, а добротность росла. Таким образом, для повышения Q можно ввести селективные потери.

Итак, существуют способы подавления как линейных, так и нелинейных потерь в резонаторе, ведущие к увеличению его добротности.

Третий этап. Если процесс образования УВ остановить удалось, начинает влиять граничная нелинейность, обусловленная конечностью смещения подвижной стенки. Чтобы продолжить закачку энергии в резонатор, нужно изменить закон колебаний границы. Если при слабо выраженной нелинейности закон колебания стенки должен быть почти гармоническим, то при сильно выраженной нелинейности стенка должна периодически совершать короткие «рывки» в нужной фазе.

Четвертый этап. Если удалось «победить» образование УВ и граничную нелинейность, то при дальнейшей закачке энергии в резонатор либо мы столкнемся с новым нелинейным эффектом, либо среда разрушится.

Соответствующие этапы можно выделить при накачке энергии в кубично нелинейный резонатор, при фокусировке волновых пучков, при создании сильных световых полей и в других задачах для нелинейных волн различной природы.

Выводы

• Полезно различать сильно нелинейные волны и волны с сильно выраженной слабой нелинейностью.

• Сильно нелинейные волны, кажется, изучены менее полно.

• Интересен как анализ соответствующих математических моделей, так и анализ новых физических явлений, возникающих в сильных полях.

• Создание сильных полей связано с проблемой нелинейной локализации энергии. Рост плотности энергии и вещества в процессе локализации обычно состоит из нескольких этапов, ограниченных эффектами нелинейного насыщения или развитием неустойчивости.

Работа поддержана грантом Правительства РФ для научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в образовательных учреждениях высшего профессионального образования (Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского), а также грантами Президиума РАН, РФФИ и президентским грантом ведущих научных школ.

Литература

1. *Rudenko, O. V.* Theoretical Foundations on Nonlinear Acoustics / O. V. Rudenko, S. I. Soluyan. — N. Y. : Plenum, Consultants Bureau, 1977. — 274 p.

2. *Akhmanov, S. A.* Problems of Nonlinear Optics / S. A. Akhmanov, R. V. Khokhlov. — N. Y. : Gordon and Breach, 1972. — 294 p.

3. *Rabotnov, Yu. N.* Elements of hereditary solid mechanics. — M. : Mir Publishers, 1980. — 387 p.

4. *Rudenko, O. V.* Giant nonlinearities in structurally inhomogeneous media and the fundamentals of nonlinear acoustic diagnostic techniques / O. V. Rudenko // Physics Uspekhi (Adv. Phys. Sci.). — 2006. — V. 49, № 1. — P. 69—87.

5. *Babitsky, V. I.* Vibration of strongly nonlinear discontinuous systems / V. I. Babitsky, V. L. Krupenin. — Berlin : Springer, 2001. — 420 p.

6. Нелинейные волны' 2010 / Рос. акад. наук, Ин-т приклад. физики ; отв. ред. А. В. Гапонов-Грехов, В. И. Некоркин. — Н. Новгород : ИПФ РАН, 2011. — С. 127—186.

7. *Heisenberg, W.* Zur Quantisierung nichtlinearer Gleichungen / W. Heisenberg // Nachr. Acad. Wiss. Goettingen. — 1953. — Bd IIa, № 8. — S. 111—127.

8. *Rudenko, O. V.* Strongly Nonlinear Shear Perturbations in Discrete and Continuous Cubic Nonlinear Systems / O. V. Rudenko, E. V. Solodov // Acoust. Physics. — 2011. — V. 57, № 1. — P. 51—58.

9. *Rudenko, O. V.* Nonlinear Acoustics through Problems and Examples / O. V. Rudenko, S. N. Gurbatov, C. M. Hedberg. — Victoria, Canada : Trafford, 2010. — 178 p.

10. *Руденко, О. В.* Актуальные проблемы, связанные с нелинейной акустикой / О. В. Руденко // Нелинейные волны' 2006 / отв. ред. А. В. Гапонов-Грехов, В. И. Некоркин. — Н. Новгород : ИПФ РАН, 2007. — С. 151—169.

КОЛЛАПС И КОЛМОГОРОВСКИЕ СПЕКТРЫ

Е. А. Кузнецов

Введение

Вопрос, который будет здесь обсуждаться, уже однажды затрагивался на этой Школе, но сравнительно давно — в 2002 году. Речь пойдет о коллапсе в гидродинамике и его связи с колмогоровским спектром. Новое, что появилось совсем недавно, связано с численным моделированием коллапса невязких жидкостей, которое было проведено группой П. Орланди из университета Рима I [1, 2].

Практически все численные результаты, полученные в этом эксперименте, находят объяснение в рамках развиваемой автором теории коллапса, который в гидродинамике понимается как процесс опрокидывания вихревых линий. Как известно, в самом простом варианте одномерной газодинамики опрокидывание может быть описано с помощью решения в виде простой волны Римана. Такое решение получается после применения метода характеристик к квазилинейному уравнению для скорости (или плотности), которое следует из уравнений для плотности (уравнение непрерывности) и скорости (уравнение Эйлера), если один из инвариантов Римана в начальный момент времени не зависит от координаты x. Это решение, записанное в неявном виде, показывает, что каждая «жидкая частица» двигается со своей скоростью, так что более быстрые частицы догоняют более медленные. В результате профиль скорости становится все более крутым, растут градиенты. Наконец, существует такой момент времени t_0, когда градиенты становятся бесконечными. Это и есть опрокидывание, или, как говорят математики, градиентная катастрофа.

Физическая первопричина опрокидывания связана со сжимаемостью газа. Математически оно может быть описано посредством перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым, т. е. на языке отображения. При этом опрокидыванию соответствует обращение якобиана отображения J в нуль. Такое отображение является *сжимаемым* — значение якобиана не фиксировано. В несжимаемой жидкости переход от эйлеровых переменных к лагранжевым является несжимаемым, т. е. якобиан фиксирован, и поэтому, казалось бы, процесс опрокидывания невозможен. В действительности это не так. Оказывается, пучок линий завихренности можно сжимать — это следует непосредственно из уравнений движения для завихренности. В отсутствие вязкости это уравнение — уравнение Гельмгольца для завихренности $\mathbf{\Omega}$,

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega}], \tag{1}$$

показывает, что всякое движение жидкости вдоль вихревой линии (в силу свойства векторного произведения) не изменяет $\mathbf{\Omega}$. Только нормальная к $\mathbf{\Omega}$ компонента скорости $\mathbf{v}_n$ может изменить завихренность. При этом скорость $\mathbf{v}_n$ представляет собой скорость вихревой линии. Этот факт имеет простое геометрическое объяснение: для произвольной линии всякие деформации, ей параллельные, не изменяют саму линию; она может меняться только благодаря поперечным деформациям. В ситуации общего положения дивергенция вектора $\mathbf{v}_n$ не равна нулю: $\operatorname{div} \mathbf{v}_n \neq 0$. Именно это наблюдение показывает, что линии завихренности можно сжимать. Наличие в несжимаемой жидкости сжимаемой субстанции является главным для понимания, почему в несжимаемой гидродинамике возможно опрокидывание — опрокидывание вихревых линий. Такой процесс, как и в газовой динамике, должен происходить за конечное время (к сожалению, до сих пор это обстоятельство остается всего лишь предположением, несмотря на некоторые подсказки, которые нам дает численный счет).

Опрокидывание относится к коллапсам — процессам образования особенности за конечное время для изначально гладкого распределения. Конкретный вид особенности зависит от физической модели. Так, например, для волн на воде особенности имеют вид каспа — в этом случае профиль поверхности непрерывен, а вот его вторая производная в точке излома будет бесконечной. Для самофокусировки света — другого примера коллапса — интенсивность света становится аномально большой с приближением к точке фокуса.

Основная идея этой статьи — продемонстрировать, что коллапс в гидродинамике, понимаемый как опрокидывание вихревых линий, тесно связан с колмогоровским спектром развитой гидродинамической турбулентности. Данное соображение не ново. Хорошо известно, что всякая особенность в физическом пространстве волновых векторов $\mathbf{k}$ порождает для спектра степенное поведение в области больших волновых чисел. Если особенности распределены по пространству и по времени случайным образом с некоторой мерой, то от особенностей в спектре турбулентности возникнут соответствующие степенные «хвосты». Впервые эту идею использовал О. Филлипс в 1958 году [6] при нахождении спектра волн на воде с помощью образования каспов (называемого ныне спектром Филлипса). Затем в 1973 году Б. Б. Кадомцев и В. И. Петвиашвили [7] применили эту же идею для определения спектра звуковой турбулентности с помощью скачков плотности на ударных волнах. Как в случае волн на воде, так и для звуковой турбулентности каспы и скачки плотности представляют собой сильно нелинейные объекты, возникшие в результате волновых коллапсов. Образование каспов происходит вследствие нелинейных эффектов в результате конкуренции с линейными процессами, ответственными за дисперсионное расплывание волн, их дифракцию и т. д.

В развитой гидродинамической турбулентности при больших числах Рейнольдса, Re >> 1, в инерционном интервале масштабов — промежуточной области между энергосодержащей и вязкой областями — спектр турбулентности, согласно А. Н. Колмогорову [3] и А. М. Обухову [4], определяется единственной величиной P — постоянным потоком энергии по масштабам (совпадающим с темпом диссипации энергии в единице объема):

$$\varepsilon_k = CP^{2/3}k^{-5/3}. \tag{2}$$

Этот спектр легко может быть получен из соображений размерности [5]. Эти же размерностные соображения для флуктуации скорости v с заданным масштабом r из инерционного интервала дают распределение

$$v \sim P^{1/3}r^{1/3}, \tag{3}$$

которое представляет собой другую формулировку того же закона Колмогорова (2).

Отсюда для завихренности скорости, $\mathbf{\Omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$, мы можем записать

$$\Omega \sim P^{1/2}r^{-2/3}, \tag{4}$$

так что распределение завихренности имеет особенность при $r \to 0$. При этом время перекачки энергии из энергосодержащей области с характерным масштабом L в область вязких масштабов оказывается конечным. Это время, зависящее от L и P, дается оценкой $T \sim L^{2/3}P^{-1/3}$.

Что это за особенность и каковы физические причины ее возникновения? На эти вопросы возможно несколько вариантов ответов. Один из них — особенность (4) — может быть «отголоском» реальных коллапсов, в результате которых в поле завихренности за конечное время происходит формирование особенностей. Если реализуется такой сценарий, то спектр (2) следует трактовать как аналог спектра Филлипса. Важно отметить, что развитая гидродинамическая турбулентность относится к системам с сильным взаимодействием, точнее — со сверхсильным. Для нее при больших числах Рейнольдса отсутствует как таковое понятие частоты малых колебаний. Это означает, что не может быть никакого режима слабой турбулентности, как не может сосуществовать спектр слабой турбулентности и спектр сильной турбулентности, как это имело место, например, для турбулентного морского волнения: спектр Филлипса и спектр Захарова — Филоненко [8]. Разница между ними в режиме развитой гидродинамической турбулентности должна исчезнуть ввиду отсутствия предела слабой нелинейности.

В данной статье мы рассмотрим вопрос о связи коллапсов с колмогоровскими спектрами развитой гидродинамической турбулентности, однако не столь подробно, поскольку частично этот материал уже излагался мною на школе «Нелинейные волны — 2002» [9]. С тех пор прошло уже

10 лет, и многое в этом направлении было понято и сделано, особенно в численном моделировании. Конечно, для двумерной турбулентности численные эксперименты более доступны, они не требуют столь больших численных ресурсов, что необходимо при интегрировании уравнений гидродинамики в трехмерном случае.

У двумерной гидродинамической турбулентности есть кое-что похожее на трехмерную турбулентность, но много и отличий. Эти отличия касаются, во-первых, существования двух спектров — колмогоровского с точно такой же зависимостью, что и в трехмерном случае, но который отвечает постоянному потоку энергии, направленному в область малых k (обратный каскад), и спектра Крейчнана [10], соответствующего постоянному потоку энстрофии, текущему в область малых масштабов (прямой каскад):

$$E(k) \sim k^{-3}. \tag{5}$$

Существование двух спектров связано с наличием в инерционном интервале масштабов двух интегралов движения: энергии и энстрофии — интеграла от квадрата завихренности $\int \Omega^2 d\mathbf{r}$. Р. Крейчнан предсказал свой спектр в 1967 году, и практически сразу в численных экспериментах он был обнаружен (укажем только некоторые из этих экспериментов [11—18]; более полный список можно найти в работе [19]). Вместе с тем уже в первых численных экспериментах (см., например, [11]) многие наблюдали появление резких (в меру великости числа Рейнольдса) градиентов завихренности, что для завихренности соответствует появлению скачков, похожих на ударные волны, толщины которых были малы по сравнению с их длиной. Это послужило основанием для П. Саффмана [20] предложить другой спектр, отличный от распределения Крейчнана: $E(k) \sim k^{-4}$. Спектр Саффмана был получен на основе предположения, что основной вклад в спектр вносят распределенные изотропно скачки завихренности. С другой стороны, из простых соображений следует, что спектр из-за скачков должен иметь скорее крейчнановское поведение, нежели в виде распределения Саффмана. Действительно, если рассмотреть фурье-образ Ω_k от скачка завихренности $\Omega \propto \theta(x)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, то $\Omega_k \propto k^{-1}$, что немедленно приводит к спектру $E(k) \sim k^{-3}$. Однако не все так просто. Если считать, что характерная длина ступеньки $L >> k^{-1}$, то распределение энергии от одной такой ступеньки в k-пространстве будет иметь вид джета с угловым раствором порядка $(kL)^{-1}$. При этом максимальное значение распределения энергии вдоль джета будет убывать пропорционально k^{-3} [19, 21, 22]. Такая оценка, как показано в работах [19, 21], следует из точного анализа при $kL >> 1$.

Важно отметить, что численные эксперименты, результаты которых опубликованы в 2007 году [19] и недавно [23], по моделированию вырождающейся двумерной гидродинамической турбулентности показали, что спектр крейчнановского типа объясняется квазиударными скачками завихренности. Появление такого рода скачков может объясняться также процессом опрокидывания. В отличие от трехмерного уравнения (1) в двумерной геометрии для плоских течений, когда скорость имеет только две компоненты в плоскости течения, завихренность является лагранжевым инвариантом, переносится вместе с жидкостью. Поэтому можно ожидать появления особенностей для градиента завихренности. Забегая вперед, отмечу, что появление каких-либо особенностей *за конечное время* в двумерной гидродинамике невозможно. Это было доказано впервые В. Волибнером в 1933 году, а в 1960-х годах — В. И. Юдовичем и Т. Като [29]. Однако тенденция к опрокидыванию в двумерной гидродинамике присутствует, что будет показано в следующем разделе. Заметим также, что Юдовичем был построен пример появления особенности за бесконечное время.

Тенденция к опрокидыванию в двумерной гидродинамике

В развитой гидродинамической турбулентности при больших числах Рейнольдса, Re >> 1, в инерционном интервале масштабов можно пренебречь вязкостью и оперировать с уравнением Эйлера при условии несжимаемости $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$. Для плоских течений завихренность имеет только одну компоненту $\Omega = \partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y$, перпендикулярную течению ($\parallel \hat{z}$). Поэтому три уравнения (1) для вектора $\mathbf{\Omega}$ превращаются в одно:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\Omega = 0 \qquad \text{при} \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{6}$$

Отсюда следует, что Ω есть лагранжев инвариант, т. е. завихренность является постоянной вдоль траектории жидкой частицы, определяемой как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \ \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{a}. \tag{7}$$

Как было показано в работах [19, 21], причина появления резких градиентов завихренности в двумерной турбулентности связана со сжимаемостью поля $\mathbf{B} = \operatorname{rot}(\Omega\hat{z})$, получившего по-английски название di-vorticity. Этот вектор направлен по касательной к линиям уровня $\Omega(\mathbf{r}) = \text{const}$, при этом поле $\mathbf{B}$ вморожено в жидкость, т. е. подчиняется уравнению [15, 26]

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]. \tag{8}$$

В терминах материальных производных,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla),$$

уравнение (8) может быть переписано как

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{v} \equiv \frac{1}{2}\left[\,\Omega\hat{z}\times\mathbf{B}\,\right] + \hat{S}\mathbf{B}. \tag{9}$$

Здесь первый член в правой части уравнения описывает вращение вектора **B** с угловой скоростью $-\Omega/2$, второй член ответствен за растяжение линий **B**, где

$$\hat{S}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) \tag{10}$$

представляет собой так называемый тензор натяжений. Из уравнения (9) видно, что длина вектора $|\mathbf{B}|$ будет локально расти за счет растяжений, если

$$\frac{1}{2}\frac{d\mathbf{B}^2}{dt} = (\mathbf{B}\cdot\hat{S}\mathbf{B}) > 0. \tag{11}$$

Интересно отметить, что это уравнение напоминает уравнение для квадрата завихренности $\mathbf{\Omega}^2$ для трехмерной турбулентности, когда усиление завихренности обязано растяжению ее линий [31]. Однако, чтобы прояснить физическую причину роста, этого недостаточно.

Как видно из уравнения (8), только одна компонента скорости, $\mathbf{v}_n$, нормальная к вектору **B**, изменяет поле **B**. При этом тангенциальная компонента $\mathbf{v}_\tau$ (параллельная **B**) играет пассивную роль, обеспечивая выполнение условия несжимаемости $\nabla\cdot\mathbf{v}_\tau + \nabla\cdot\mathbf{v}_n = 0$. При этом нормальная компонента скорости, благодаря вмороженности, представляет собой скорость линий поля **B**. Лагранжевые траектории, определяемые $\mathbf{v}_n$,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_n(\mathbf{r},t); \quad \mathbf{r}\,|_{t=0} = \mathbf{a}, \tag{12}$$

задают отображение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a},t), \tag{13}$$

с помощью которого уравнение (8) допускает интегрирование [19, 21].

Вначале легко устанавливается, что матрица Якоби (с элементами $\hat{J}_{ij} = \dfrac{\partial x_j}{\partial a_i}$) подчиняется уравнению

$$\frac{d}{dt}\hat{J} = \hat{J}U, \tag{14}$$

где матрица $U_{ij} = \dfrac{\partial v_{nj}}{\partial x_i}$. Отсюда получаются уравнения для якобиана $J = \det \hat{J}$ и для обратной матрицы $\hat{J}^{-1}$, $\partial a_j / \partial x_i$, где $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ есть отображение, обратное (13):

$$\frac{d}{dt} J = J \operatorname{div} \mathbf{v}_n \tag{15}$$

и

$$\frac{d}{dt} \hat{J}^{-1} = -U\hat{J}^{-1}. \tag{16}$$

Так как div $\mathbf{v}_n$ в общем случае отлична от нуля, отображение (13) сжимаемое и якобиан J может принимать произвольные значения, в том числе стремиться к нулю. Это наблюдение является центральным при обсуждении возможного опрокидывания в двумерной гидродинамике.

С помощью (15) и (16) уравнение (8) может быть преобразовано:

$$D_t \left(JB_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) = 0, \tag{17}$$

где $D_t = \partial_t + (\mathbf{v}_n \cdot \nabla)$ совпадает с материальной производной d/dt, которая стоит в выражении (12). Интегрирование этого уравнения приводит к «новому» лагранжеву инварианту

$$I_j(\mathbf{a}) \equiv JB_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}, \tag{18}$$

который совпадает с вектором **B** в начальный момент времени, т. е. $\mathbf{B}_0(\mathbf{a})$. Этот лагранжев инвариант является аналогом инварианта Коши (подробнее об этом см. следующий раздел). Из этого уравнения находится векторное поле **B** как функция от координат и времени:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{(\mathbf{B}_0(\mathbf{a}) \cdot \nabla_a)\mathbf{r}(\mathbf{a}, t)}{J}. \tag{19}$$

В силу того что траектории (13) задаются не самой скоростью, а ее нормальной компонентой, якобиан J не фиксирован, он может принимать произвольные значения, в частности стремиться к нулю. Это означает сжимаемость поля **B**.

Следует отметить, что соотношение (19) является аналогом представления вихревых линий, введенного в работах [27, 28] для трехмерного уравнения Эйлера (см. также следующий раздел).

Как уже отмечалось, появление разрывов в газодинамике связано с обращением в нуль якобиана соответствующего сжимаемого отображения — преобразования от эйлерова описания к лагранжеву. Именно уменьшение J и есть причина появления резких градиентов завихренности, которое обязано сжимаемости: $\mathbf{div}\,\mathbf{v}_n \neq 0$. Однако в двумерной несжимаемой гидродинамике Эйлера образование особенности за *конечное* время невозможно [29], а возможно, по-видимому, за бесконечное время. Численные эксперименты [19, 22, 23] показывают скорее экспоненциальный рост градиентов завихренности с характерным инкрементом порядка максимального значения завихренности, нежели в виде двойной экспоненты, как это следует из оценок [30].

В заключение этого раздела приведем некоторые результаты численного моделирования вырождающейся двумерной турбулентности из недавно опубликованной работы [23], в которой достигнуто достаточно хорошее пространственное разрешение — 8192×8192 точки.

Начальное условие выбиралось в виде двух наборов вихрей с положительной и отрицательной завихренностью. Все вихри имели гауссову форму с максимальным значением $|\Omega|$, равным единице, со случайными размерами (значениями радиусов, равномерно распределенными в некотором интервале); центры вихрей были распределены по всей области также случайно. Число положительных и отрицательных вихрей совпадало, так что общая завихренность была равна нулю.

На рис. 1 представлено распределение $|\mathbf{B}| \equiv |\nabla\Omega|$ при $t = 100$, демонстрирующее значительное увеличение (~100) начальных градиентов в окрестности линий, соответствующих положению скачков завихренности. При этом между линиями $|\mathbf{B}|$ практически не растет. При бóльших временах

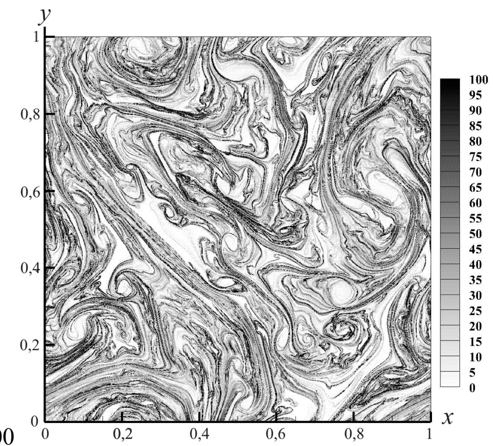


Рис. 1. Распределение $|\mathbf{B}|$ при $t = 100$

(t > 100) длина линий значительно увеличивается, соответственно плотность заполнения линиями растет, и картина распределения линий становится запутанной — турбулентной. На начальном этапе, на временах нескольких оборотов n ($T_* = n2\pi/\Omega_{max}$), рост $|\mathbf{B}|$ близок к экспоненциальному, а затем возникает насыщение. Так, для рис. 1 это число оборотов $n \approx 4$, а усиление $|\mathbf{B}|$ оказалось порядка 300. Таким образом, усиление векторного солиноидального поля **B** обязано тенденции к опрокидыванию, но оно, по-видимому, реализуется только за бесконечное время. Однако наблюдаемые в численном эксперименте градиенты завихренности столь значительны, что на временах $t \geq 100$ распределение завихренности можно считать квазисингулярным в виде большого количества ступенек.

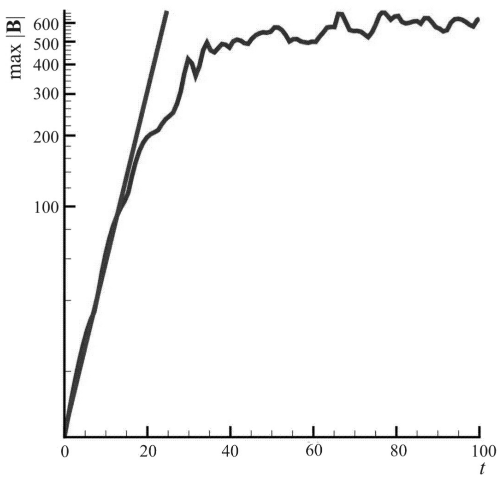


Рис. 2. Зависимость максимального значения $|\mathbf{B}|$ от времени с тем же начальным условием, что и на рис. 1 (логарифмическая шкала, прямая линия соответствует экспоненте)

Представление вихревых линий в трехмерной гидродинамике

В трехмерной турбулентности при больших числах Рейнольдса для масштабов из инерционной области можно пренебречь вязким затуханием и воспользоваться уравнениями Эйлера, а для завихренности — уравнением Гельмгольца (1). Последнее уравнение по своей форме ничем не отличается от соответствующего уравнения (8) для вектора **B**, и по этой причине многие формулы, полученные в предыдущем разделе, один к одному переписываются путем замены **B** на **Ω**. Прежде чем заняться этим, необходимо сделать несколько замечаний.

Первое замечание связано с тем, что при переходе от двумерной к трехмерной гидродинамике роль нелинейных эффектов усиливается. Это достаточно общий факт (см., например, недавний обзор [24]), особенно он хорошо известен для нелинейного уравнения Шредингера. В теории фазовых переходов хорошо известно, что роль кооперативных эффектов растет с увеличением размерности пространства. Особенно ясно это видно на примере модели Изинга: увеличение размерности влечет за собой рост числа соседей. По этой причине, если в двумерной гидродинамике коллапс запрещен, то в трехмерном случае его уже можно ожидать.

Второе замечание относится к тому, почему завихренность $\mathbf{\Omega}$ является вмороженным вектором. Этот факт также хорошо известен, я его хочу только напомнить. Рассмотрим две траектории двух близких лагранжевых частиц. Траектория каждой такой частицы задается начальным ее положением $\mathbf{r}\,|_{t=0} = \mathbf{a}$:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \tag{20}$$

Отсюда следует, что вектор $\delta\mathbf{r}(a, t)$, соединяющий две близкие частицы, будет подчиняться уравнению

$$\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = (\delta\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{v} \equiv \frac{1}{2}[\mathbf{\Omega}\times\delta\mathbf{r}] + \hat{S}\delta\mathbf{r}, \tag{21}$$

где $\hat{S}$ есть тензор натяжений, задаваемый прежним выражением (10). Это уравнение показывает, что вектор $\delta\mathbf{r}$ прецессирует с угловой частотой $-\Omega/2$ и растягивается благодаря $\hat{S}$. При этом прецессия отсутствует для частиц, находящихся на одной вихревой линии ($[\Omega\times\delta\mathbf{r}] = 0$), т. е. когда уравнение (21) приобретает вид

$$\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \hat{S}\delta\mathbf{r}. \tag{22}$$

Оказывается, уравнение для вектора $\mathbf{\Omega}$, согласно (1), записывается в терминах материальных производных в том же виде, что и (22):

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = (\mathbf{\Omega}\nabla)\mathbf{v} \equiv \hat{S}\mathbf{\Omega}. \tag{23}$$

Из этого сравнения сразу следует, что жидкие частицы, находящиеся в начальный момент на данной вихревой линии, все время на ней остаются, двигаясь вместе со своей вихревой линией. Это и есть свойство вмороженности. Благодаря этому у частиц есть только одна степень свободы — движение вдоль вихревой линии, но такое движение, согласно (1), не меняет самой завихренности.

Все это и есть основание для разложения скорости на две компоненты по отношению к вектору завихренности: нормальную $\mathbf{v}_n$ и тангенциальную $\mathbf{v}_\tau$. В этом случае соответствующие формулы (18) и (19) переписываются как

$$I_j(\mathbf{a}) \equiv J\Omega_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}, \tag{24}$$

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r},t) = \frac{(\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})\cdot\nabla_a)\mathbf{r}(\mathbf{a},t)}{J}. \tag{25}$$

Инвариант (24) представляет собой лагранжев интеграл движения, впервые он был получен О. Л. Коши для трехмерных несжимаемых отображений (7). Существование этих инвариантов представляет собой локальную формулировку теоремы Кельвина о сохранении циркуляции[1]. Впервые на этот факт обратил внимание Р. Салмон [32] (обсуждение этих вопросов можно найти в обзоре [25], а также в работе [28]).

Для сжимаемых отображений (13), определяемых $\mathbf{v}_n$, формула (24), а также соотношение (25) были найдены в работе В. П. Рубана и автора [27] и позже в работе автора [28]. Уравнения (25) и (13) вместе с определением завихренности

$$\mathbf{\Omega} = \mathrm{rot}_r\ \mathbf{v}, \quad \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0 \tag{26}$$

образуют замкнутую систему уравнений, которая представляет собой частично проинтегрированное уравнение Эйлера. Эти уравнения разрешены относительно бесконечного числа лагранжевых инвариантов — инвариантов Коши, что весьма важно с точки зрения численного исследования коллапса, особенно важно держать постоянным инвариант при приближении к точке коллапса.

Такое представление уравнений Эйлера получило название представления вихревых линий (ПВЛ). В уравнениях ПВЛ главным объектом являются вихревые линии, нормальная компонента скорости $\mathbf{v}_n$ привязана к вихревой линии и описывает ее движение.

Опрокидывание вихревых линий

Мы подошли к самому интересному — опрокидыванию вихревых линий. Нужно сказать, что это до сих пор предположение, из которого, однако, можно многое извлечь и затем сравнить с существующими численными экспериментами. Это предположение основано на нашей интуиции и на тех знаниях, которые нам известны из газодинамики.

---

[1] *Интересная историческая справка*: Кельвин доказал свою теорему примерно двадцать лет спустя после того, как Коши нашел инварианты (все эти даты можно извлечь из классической книги Г. Лэмба «Гидродинамика» [33]).

Итак, давайте будем предполагать, что якобиан J обращается в нуль за конечное время. Сразу отметим, что такое не всегда возможно. Очевидно, что в двумерной гидродинамике якобиан фиксирован, равен единице, поскольку в этом случае скорость совпадает с нормальной компонентой. Такая же ситуация возникает для трехмерных цилиндрически-симметричных течений с нулевой угловой компонентой скорости. Именно в этом случае Э. Майда [34] доказал, что решение остается регулярным во все моменты времени. Иными словами, опрокидывание вихревых линий, если, конечно, оно существует, — это сугубо трехмерное явление.

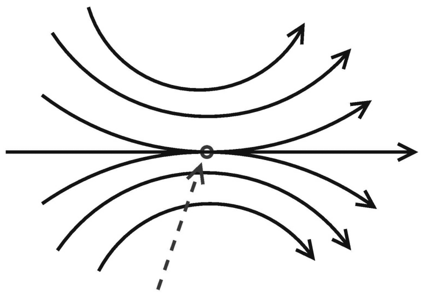


Рис. 3. Схема касания вихревых линий

Рассмотрим уравнение $J(\mathbf{a}, t) = 0$ и выделим только положительные решения этого уравнения: $t = \tilde{t}(\mathbf{a}) > 0$. Минимум функции $\tilde{t}(\mathbf{a})$ будет определять время $t_0 = \min_a \tilde{t}(\mathbf{a})$ и соответствующую этому минимуму точку $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$, где впервые возникнет опрокидывание. Геометрически это соответствует касанию вихревых линий (рис. 3). Вблизи минимальной точки $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$ якобиан J в ситуации общего положения имеет следующее разложение:

$$J(a,t) = \alpha(t_0 - t) + \gamma_{ij}\Delta a_i \Delta a_j, \tag{27}$$

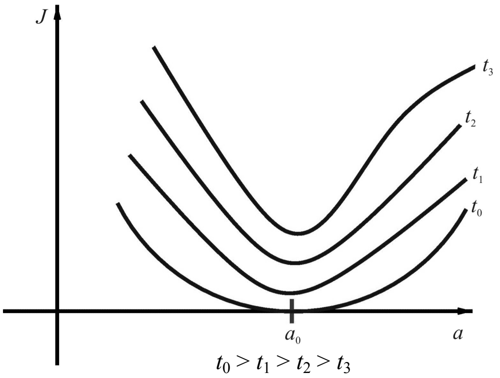
где константа $\alpha > 0$, тензор γ_{ij} положительно определен, $\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$. Это разложение, которое мы будем называть условием выпуклости, аналогично разложению для восприимчивости в теории Ландау фазовых переходов второго рода. Для фазовых переходов t — температура, t_0 — температура фазового перехода, а $\Delta\mathbf{a}$ — параметр порядка. Сразу из разложения (27) для завихренности получается автомодельная асимптотика:

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \frac{(\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a}) \cdot \nabla_a)\mathbf{r}\,|_{a_0}}{\tau(\alpha + \gamma_{ij}\eta_i\eta_j)}, \quad \eta = \frac{\Delta\mathbf{a}}{\tau^{1/2}}, \quad \tau = t_0 - t. \tag{28}$$

Отметим, что эта асимптотика является предельной, если учитывать критерий Била — Като — Майда [36]. Этот критерий гласит:

$$\int_0^T \max_r |\mathbf{\Omega}|\, dt = \left\{ \begin{array}{ll} \infty & \text{для коллапсирующих решений,} \\ < \infty & \text{для неколлапсирующих решений} \end{array} \right\}.$$

Подстановка (28) в этот критерий дает при $T \to t_0$ логарифмическую расходимость интеграла. При $T < t_0$ интеграл в (29) конечен, и поэтому в соответствии с этим критерием решение для всех времен $t < T$ сохраняет свою первоначальную гладкость, что является основанием для разложения якобиана (27) и соответственно для (28).



$t_0 > t_1 > t_2 > t_3$

Рис. 4. Схематическое поведение поверхности $J = J(a, t)$ в разные моменты времени при $t \le t_0$. Поверхность $J = J(a, t) > 0$ при своей деформации в момент $t = t_0$ впервые касается плоскости $J = 0$. В ситуации общего положения такое касание имеет место в отдельной точке, и оно квадратично

Таким образом, исходя из самых простых соображений, мы пришли к автомодельному закону (28). При этом все направления в (28) выглядят равноправно, т. е. по каждому из направлений Δa_i сжимается пропорционально $\tau^{1/2}$. Ниже покажем, что такое поведение специфично для вспомогательного пространства — пространства лагранжевых маркеров. В физическом пространстве возникает неравноправие направлений.

Автомодельные асимптотики в физическом пространстве

Чтобы почувствовать эту разницу, достаточно обратиться к одномерной ситуации, или, говоря на языке теории катастроф, к одномерной складке, когда

$$J \equiv \frac{\partial x}{\partial a} = \alpha\tau + \gamma a^2. \qquad (29)$$

Здесь для простоты начало координат помещено в точку $a = a_0$.

Такая зависимость якобиана (29) в точности соответствует поведению вблизи точки опрокидывания для одномерной газодинамики пыли, когда давление равно нулю:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \qquad (30)$$

В этом случае уравнение просто интегрируется, решение записывается в неявном виде:

$$v = v_0(a),\ \ x = a + v_0(a)t,$$

откуда следует, что якобиан J как функция a и t является линейным относительно времени t. При этом плотность пыли $n = n_0/J$ и градиент скорости $\partial v / \partial x = v_0'(a) / J$ приобретают сингулярность в точке опрокидывания.

Интегрирование уравнения (29) приводит к кубической параболе

$$x = \alpha\tau a + \frac{1}{3}\gamma a^3, \tag{31}$$

откуда следует, что сжатие области вблизи особенности в физическом пространстве происходит значительно быстрее, $x \sim \tau^{3/2}$, чем во вспомогательном — пространстве лагранжевых маркеров, где $a \sim \tau^{1/2}$. При $\tau = 0$ (в момент возникновения особенности) $x \sim a^3$ или $a \sim x^{1/3}$. В результате якобиан J в момент опрокидывания ведет себя как $J \sim x^{2/3}$, соответственно плотность и градиент скорости приобретают особенность $n \sim \partial v/\partial x \sim x^{-2/3}$. Интересно отметить, что получилась та же самая степень –2/3, что и для завихренности в теории Колмогорова (4). Далее будет показано, что это совпадение не случайное — оно возникает для самой завихренности после соответствующего перехода из вспомогательного пространства к физическим переменным $\mathbf{r}$.

В трехмерном случае якобиан J — определитель матрицы Якоби — представляет собой произведение собственных значений, и поэтому обращение якобиана $J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \to 0$ означает, что в ситуации общего положения одно из собственных значений, скажем λ_1, стремится к нулю ($\lambda_1 \to 0$), а два других стремятся к константе: $\lambda_2, \lambda_3 \to \text{const} \neq 0$. Отсюда следует, что вблизи точки опрокидывания для завихренности возникают два разных типа автомодельностей:

1) вдоль «мягкого» направления, соответствующего направлению опрокидывания ($\lambda_1 \to 0$), $x_1 \sim \tau^{3/2}$, что подобно формированию одномерной складки;

2) вдоль двух «жестких» (λ_2, λ_3) направлений $x_{2,3} \sim \tau^{1/2}$.

Таким образом, распределение завихренности $\mathbf{\Omega}$ оказывается сильно анизотропным:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{\tau}\mathbf{G}\left(\frac{x_\alpha}{\tau^{1/2}}, \frac{x_3}{\tau^{3/2}}\right), \tag{32}$$

имеющим при $\tau \to 0$ блинообразную форму с сильно различающимися масштабами — форму, типичную при образовании протогалактик [37]. С приближением к точке опрокидывания $\tau = 0$ завихренность приобретает сильно анизотропную сингулярность. Основная зависимость $\mathbf{\Omega}$ при $\tau \to 0$ связана с направлением опрокидывания x_1: $\mathbf{\Omega} \approx \mathbf{b}\big/x_1^{2/3}$, $\mathbf{b} = \text{const}$, т. е. завихренность имеет степенное поведение с колмогоровским индексом 2/3!

Эта зависимость реализуется всюду, за исключением малых областей между двумя кубическими параболоидами: $-cx_{\perp}^3 < x_1 < cx_{\perp}^3$. В этой узкой области завихренность ведет себя как $\mathbf{\Omega} \approx \mathbf{b}_1 / x_{\perp}^2$. В колмогоровской области (рис. 5) завихренность может быть оценена как $\Omega \sim P^{1/3} / x_1^{2/3}$, где $P \sim \Omega_0^3 L^2$ имеет смысл потока энергии, а $L \sim \gamma^{-1/2}$.

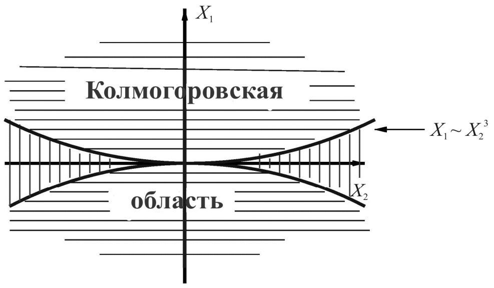


Рис. 5. Характерные области поведения завихренности в момент опрокидывания

Формула (32) позволяет определить поведение скорости в окрестности точки опрокидывания. Введем локальную систему координат, поместив ее начало в точку максимальной завихренности. Пусть ось $\hat{x}$ направлена вдоль $\Omega_{\max}$, ось $\hat{z}$ перпендикулярна вихревому слою, и соответственно ось $\hat{y}$ лежит в плоскости этого слоя.

Согласно точному уравнению для $\Omega_{\max}$, которое непосредственно следует из (1),

$$\frac{1}{\Omega_{\max}} \frac{d\Omega_{\max}}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x},$$

легко получить, что в точке максимума завихренности $r = r_{\max}$

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_{r=r_{\max}} = \frac{1}{t_0 - t}.$$

Поскольку $x \propto (t_0 - t)^{1/2}$, то продольная ($\|\Omega_{\max}$) компонента скорости оказывается растущей при $t \to t_0$ как $v_x \propto (t_0 - t)^{-1/2}$. При малых x эта компонента скорости растет линейно с x, $v_x \approx (t_0 - t)^{-1} x$, при бóльших x насыщается на масштабе порядка $(t_0 - t)^{1/2}$. Важно, что данная компонента скорости параллельна завихренности и по этой причине не оказывает обратного влияния на завихренность.

Появление бесконечно больших значений параллельной компоненты скорости обязано сжатию области повышенной завихренности в z-направлении. Соответствующая компонента скорости может быть определена из условия несжимаемости:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \sim \frac{v_z}{z} \sim \frac{v_z}{(t_0 - t)^{3/2}} \sim \frac{\partial v_x}{\partial x} = (t_0 - t)^{-1}, \text{ или } v_z \sim (t_0 - t)^{1/2}.$$

Именно эта компонента скорости обеспечивает сжатие области повышенной завихренности до тонкого вихревого слоя. Компонента мала, стремится к нулю при $t \to t_0$, а y-компонента скорости определяет завихренность $\Omega_{\max} \approx \left|\partial v_y / \partial z\right|$. Отсюда нетрудно получить, что $v_y \sim (t_0 - t)^{1/2}$. При этом другая, z-компонента дает малый вклад в $\Omega_{\max}$ — порядка единицы.

Численный эксперимент

Численные эксперименты по наблюдению коллапса в гидродинамике ведутся уже на протяжении двадцати лет. Первая публикация на эту тему датируется 1992 годом [38]. В 1993 году Р. Керром были опубликованы наиболее интересные результаты по коллапсу [39], где наблюдался коллапс двух антипараллельных вихревых филаментов. Такая конфигурация неустойчива из-за тенденции к пересоединению, благодаря неустойчивости Кроу [40]. Большие значения завихренности появлялись в коре филаментов, т. е. неустойчивость Кроу в этом случае, по-видимому, только способствует коллапсу. В эксперименте Керра, а также последующих — Р. Пелца [41], О. Боратава и Р. Пелца [42], Р. Грауэра, К. Марлиани и К. Гермашевского [43] поведение завихренности вблизи точки коллапса хорошо укладывалось на зависимость $(t_0 - t)^{-1}$, что согласуется с разложением (28). Что касается пространственной структуры, то здесь имеются только качественные свидетельства. В численных экспериментах [44] (1992) было показано, что для случайных начальных условий, а также начального условия в виде вихря Тейлора — Грина распределения завихренности эволюционируют к тонкому вихревому слою с высокой величиной завихренности. Авторы этой работы, однако, считают, что рост завихренности имеет не степенное поведение, а экспоненциальное. Следует отметить также результат [45] (1991) по наблюдению блинообразной структуры для цилиндрически симметричных течений в присутствии ненулевой угловой компоненты скорости. Во всех этих численных экспериментах фиксировалось в основном поведение завихренности, не было выяснено, какова пространственная структура коллапсирующей области.

В 2006 и 2008 годах Т. Хоу и Р. Ли опубликовали две работы [46, 47], в которых предприняли попытку повторить численные результаты Керра [39]. Главное заключение этих работ состояло в том, что для начальных условий Керра [39] авторы не обнаружили коллапса. Основная критика работ Керра была связана с численным алгоритмом, используемым в исследовании [39], а именно в процедуре фильтрации высокочастотных шумов, возникающих из-за специфической численной неустойчивости (bottle-neck instability). Критика значительно повлияла на умонастроение научного сообщества, занимающегося данной проблемой.

Несмотря на эту критику, в 2012 году П. Орланди, С. Пироззоли и Г. Ф. Карневале опубликовали работу [1], в которой наблюдался коллапс. В качестве начального условия были выбраны два вихря Лэмба, двигающихся навстречу друг другу. Вихрь Лэмба — это точное решение двумерного уравнения Эйлера с дипольным распределением завихренности внутри круга радиуса a:

$$\Omega_z = -U\kappa \frac{J_1(\kappa r)}{J_o(\kappa a)} \sin(\theta - \theta_0), \text{ если } r \le a,$$

$$\Omega_z = 0, \qquad\qquad \text{если } r > a,$$

где U — скорость диполя, $\kappa a = 3{,}8317$ — первый положительный нуль функции Бесселя J_1. Изначально оба вихря Лэмба были повернуты относительно друг друга на угол $\pi/2$. Численные эксперименты имели достаточно высокое пространственное разрешение: 1024^3 и 1536^3.

В ходе этих экспериментов было обнаружено:

• завихренность обращалась в бесконечность по закону $(t_0 - t)^{-1}$;

• размер коллапсирующей области сокращался как $(t_0 - t)^{1/2}$;

• компонента скорости, параллельная завихренности в максимальной точке, вела себя как $(t_0 - t)^{-1/2}$;

• область максимальной завихренности представляла собой вихревой слой.

Как видно, данные результаты полностью укладываются в приведенную выше теорию и свидетельствуют в пользу того, что наблюдаемый коллапс представляет собой опрокидывание вихревых линий. Единственный вопрос, который остается открытым, это процесс формирования вихревых слоев, который, как предсказывает теория, является наиболее быстрым и по этой причине несет определенную трудность для численного эксперимента, в частности для определения временного скейлинга формирования вихревого слоя.

Следует отметить, что все без исключения рассмотренные выше численные эксперименты были основаны на прямом интегрировании уравнений Эйлера, т. е. на дискретизации уравнения Эйлера. Ясно, что при такой процедуре немедленно теряется бесконечное число интегралов движения — инвариантов Коши, которые представляют собой локальную формулировку теоремы Кельвина о сохранении циркуляции скорости (об этом см. [28]). Таким образом, при прямом численном интегрировании уравнений Эйлера можно надеяться на приближенное сохранение циркуляции по большому контуру, но не вблизи коллапсирующей области. Представление вихревых линий в этом смысле лишено этого недостатка — уравнения ПВЛ разрешены относительно инвариантов Коши, поэтому при численном интегрировании уравнений ПВЛ инварианты Коши сохраняются автоматически. Второй важный момент уравнений ПВЛ состоит в том, что появление особенности прямо связано с опрокидыванием вихревых линий. Численный алгоритм, основанный на представлении вихревых линий, был реализован в работах [48, 49]. Несмотря на недостаточно высокое пространственное разрешение (число точек — 128^3), было показано, что коллапс имеет место благодаря обращению якобиана в нуль.

На рис. 6 представлена зависимость минимального (по пространству) значения якобиана как функция времени. Начальные условия выбирались случайными, т. е. задавались в виде спектра, сосредоточенного в области малых k. Лучшее временное разрешение при $t \to t_0$ показывает, что $\min J$ обращается в нуль по *линейному* закону (рис. 7).

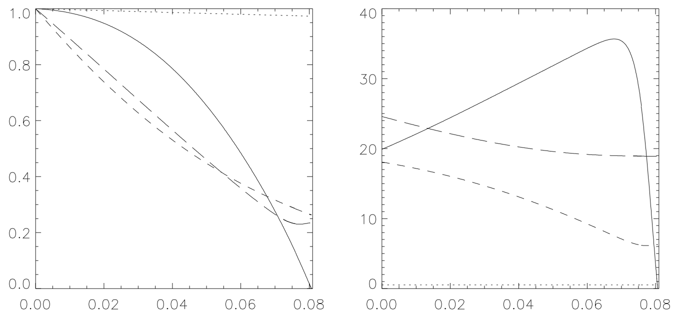


Рис. 6. Зависимости минимального якобиана (слева) и $\Omega_{\max}^{-1}$ (справа) от времени

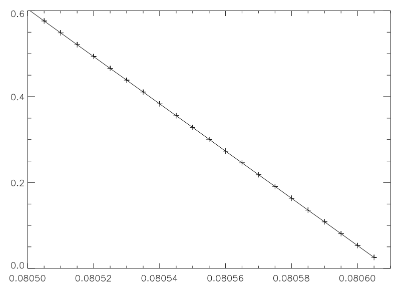


Рис. 7. Поведение $\min J$ при $t \to t_0$

Помимо этого в работах [48, 49] показано, что коэффициенты $+\gamma_{ij}$ в разложении якобиана (27) при приближении к точке коллапса практически не зависели от времени. Тем самым в численном эксперименте была проверена справедливость разложения (27). Если это действительно так, то из этого следует, что формирование особенности происходит благодаря опрокидыванию вихревых линий.

Заключение

Результаты этой статьи показывают, что коллапсы играют принципиально важную роль в формировании спектров развитой гидродинамической турбулентности. Как мы видели, даже в двумерной турбулентности, где процесс образования особенности за конечное время запрещен, а имеется только тенденция к этому, квазисингулярности в виде резких градиентов завихренности вносят основной вклад в формирование спектров колмогоровского типа — спектров Крейчнана. То обстоятельство, что в трехмерной гидродинамике при опрокидывании вихревых линий возникает особенность колмогоровского типа, указывает, что оба явления — коллапс, как процесс опрокидывания вихревых линий (который еще не до конца изучен), и колмогоровский спектр — тесно связаны между собой. Они характеризуют наиболее ярко развитую гидродинамическую турбулентность.

Данная работа выполнялась при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (договор 11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 года между Минобрнауки РФ, НГУ и ведущим ученым), а также при поддержке гранта РФФИ 12-01-00943, программы президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках» и гранта ведущих научных школ РФ НШ 6170.2012.2.

Литература

1. *Orlandi, P.* Vortex events in Euler and Navier-Stokes simulations with smooth initial conditions / P. Orlandi, S. Pirozzoli and G. F. Carnevale // J. Fluid Mech. — 2012. — V. 690. — P. 288—320.

2. *Orlandi, P.* Nonlinear amplification of vorticity in inviscid interaction of orthogonal Lamb dipoles / P. Orlandi, G. F. Carnevale // Phys. Fluids. — 2007. — V. 19. — P. 057106.

3. *Колмогоров, А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса / А. Н. Колмогоров // ДАН СССР. — 1941. — Т. 30. — С. 9.

4. *Обухов, А. М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока / А. М. Обухов // ДАН СССР. — 1941. — Т. 32. — С. 22.

5. *Ландау, Л. Д.* Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Изд. 4-е, стер. — М. : Наука, 1988. — 736 с. — (Теоретическая физика : в 10 т. т. 6).

6. *Phillips, O. H.* The equilibrium range in the spectrum of wind-generated water waves / O. H. Phillips // J. Fluid Mech. — 1958. — V. 4. — P. 426.

7. *Кадомцев, Б. Б.* О звуковой турбулентности / Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили // ДАН СССР. — 1973. — Т. 208. — С. 794.

8. *Захаров, В. Е.* Спектр энергий стохастических колебаний поверхности жидкости / В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко // ДАН СССР. — 1967. — Т. 170. — С. 1292.

9. *Кузнецов, Е. А.* Коллапс в гидродинамике / Е. А. Кузнецов // Нелинейные волны' 2002 / отв. ред. А. В. Гапонов-Грехов, В. И. Некоркин. — Н. Новгород : ИПФ РАН, 2003. — С. 156—178.

10. *Kraichnan, R. H.* Inertial ranges in 2D turbulence / R. H. Kraichnan // Phys. Fluids. — 1967. — V. 11. — P. 1417.

11. *Lilly, D. K.* Numerical simulation of developing and decaying two-dimensional turbulence / D. K. Lilly // J. Fluid Mech. — 1971. — V. 45. — P. 395.

12. *McWilliams, J. C.* The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow / J. C. McWilliams // J. Fluid Mech. — 1984. — V. 146. — P. 21.

13. *Kida, S.* Numerical simulations of two-dimensional turbulence with high-symmetry / S. Kida // J. Phys. Soc. Jpn. — 1985. — V. 54. — P. 2840.

14. *Brachet, M. E.* Small scale dynamics of high Reynolds number two-dimensional turbulence / M. E. Brachet, M. Meneguzzi, P. L. Sulem // Phys. Rev. Lett. — 1986. — V. 57. — P. 683.

15. *Brachet, M. E.* The dynamics of freely decaying two-dimensional turbulence / M. E. Brachet, M. Meneguzzi, H. Politano, P. L. Sulem // J. Fluid Mech. — 1988. — V. 194. — P. 333—349.

16. *Benzi, R.* On the statistical properties of two-dimensional decaying turbulence / R. Benzi, S. Patarnello, P. Santangelo // Europhys. Lett. — 1986. — V. 3. — P. 811.

17. *Legras, B.* High resolution numerical experiments for forced of two-dimensional turbulence / B. Legras, B. Santangelo, R. Benzi // Europhys. Lett. — 1988. — V. 5. — P. 37 ; *Santangelo, B.* The generation of vorticers in high-resolution two-dimensional decaying turbulence and the influence of initial conditions on the breaking of self-similarity / B. Santangelo, R. Benzi, B. Legras // Phys. Fluids A. — 1989. — V. 1. — P. 1027.

18. *Okhitani, K.* Wave number space dynamics of enstrophy cascades in a forced two-dimensional turbulence / K. Okhitani // Phys. Fluids A. — 1991. — V. 3. — P. 1598.

19. *Kuznetsov, E. A.* Effects of sharp vorticity gradients in two-dimensional hydrodynamic turbulence / E. A. Kuznetsov, V. Naulin, A. H. Nielsen, J. Juul Rasmussen // Phys. Fluids. — 2007. — V. 19. — P. 105110.

20. *Saffman, P. G.* On the spectrum and decay of random 2D vorticity distributions at large Reynolds number / P. G. Saffman // Stud. Appl. Maths. — 1971. — V. 50. — P. 377.

21. *Кузнецов, Е. А.* Спектры турбулентности, порождаемые сингулярностями / Е. А. Кузнецов // Письма в ЖЭТФ. — 2004. — Т. 80. — С. 92—98.

22. *Kuznetsov, E. A.* Effects of sharp vorticity gradients in two-dimensional hydrodynamic turbulence / E. A. Kuznetsov, V. Naulin, A. H. Nielsen, J. J. Rasmussen // Theor. Comput. Fluid Dyn. — 2010. — V. 24. — P. 253—258.

23. *Кудрявцев, А. Н.* Статистические особенности вырождающейся двумерной гидродинамической турбулентности / А. Н. Кудрявцев, Е. А. Кузнецов, Е. В. Серещенко // Письма в ЖЭТФ. — 2012. — Т. 24. — С. 253—258.

24. *Захаров, В. Е.* Солитоны и коллапсы — два сценария эволюции нелинейных волновых систем / В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов // УФН. — 2012. — Т. 182. — С. 569—592.

25. *Захаров, В. Е.* Гамильтоновский формализм для нелинейных волн / В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов // УФН. — 1997. — Т. 167. — С. 1137—1168.

26. *Weiss, J.* The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics / J. Weiss // Physica D. — 1991. — V. 48. — P. 273.

27. *Кузнецов, Е. А.* Гамильтоновская динамика вихревых линий для систем гидродинамического типа / Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан // Письма в ЖЭТФ. — 1998. — Т. 67. — С. 1015 ; *Kuznetsov, E. A.* Hamiltonian dynamics of vortex and magnetic lines in the hydrodynamic type models / E. A. Kuznetsov, V. P. Ruban // Phys. Rev. E. — 2000. — V. 61. — P. 831—841.

28. *Кузнецов, Е. А.* Представление вихревых линий для течений идеальной и вязкой жидкостей / Е. А. Кузнецов // Письма в ЖЭТФ. — 2002. — Т. 76. — С. 406.

29. *Wolibner, W.* Un theoreme sur l'existence du movement plan d'un fluide parfait, homogine, incompressible, pedant un temp infiniment long / W. Wolibner // Math. Z. — 1933. — Bd 37. — S. 698 ; *Юдович, В. И.* Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости / В. И. Юдович // ЖВМ и МФ. — 1963. — Т. 3. — С. 1032—1066 ; *Kato, T.* On classical solutions of two-dimensional non-stationary Euler equation / T. Kato // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1967. — V. 25. — P. 189.

30. *Rose, H. A.* Fully developed turbulence and statistical mechanics / H. A. Rose, P. L. Sulem, // Journal de Physique. — 1978. — V. 39. — P. 441—484.

31. *Kimura, Y.* Gradient enhancement and filament ejection for a non-uniform elliptic vortex in two-dimensional turbulence / Y. Kimura, J. R. Herring // J. Fluid Mech. — 2001. — V. 493. — P. 43.

32. *Salmon, R.* Hamiltonian Fluid Mechanics / R. Salmon // Ann. Rev. Fluid Mech. — 1988. — V. 20. — P. 225.
33. *Lamb, H.* Hydrodynamics / H. Lamb. — Cambridge : Cambridge University Press, 1932.
34. *Majda, A.* Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow / A. Majda // Commun. Pure Appl. Math. — 1986. — V. 39. — P. S187—S220 ; *Majda, A. J.* Vorticity and Incompressible Flow / A. J. Majda, A. L. Bertozzi. — Cambridge : Cambridge University Press, 2002.
35. *Constantin, P.* Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3-D Euler equations / P. Constantin, C. Fefferman, A. Majda // Comm. P. D. E. — 1996. — V. 21. — P. 559—571.
36. *Beale, J. T.* Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations / J. T. Beale, T. Kato, A. J. Majda // Comm. Math. Phys. — 1984. — V. 94. — P. 61.
37. *Zeldovich, Ya. B.* Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations / Ya. B. Zeldovich // Astron. Astrophys. — 1970. — V. 5. — P. 84—89 ; Shandarin, S. F. Cosmology and elementary particles / *S. F. Shandarin*, Ya. B. Zeldovich // Rev. Mod. Phys. — 1989. — V. 61. — P. 185.
38. *Pumir, A.* Collapsing solutions to the 3D Euler equations / A. Pumir, E. Siggia // Phys. Fluids A. — 1990. — V. 2. — P. 220—241.
39. *Kerr, R. M.* Evidence for a singularity of the 3-dimensional, incompressible Euler equations / R. M. Kerr // Phys. Fluids A. — 1993. — V. 5. — P. 1725.
40. *Crow, S. C.* Stability theory for a pair of trailing vortices / S. C. Crow // AIAA J. — 1970. — V. 8. — P. 2172—2179.
41. *Pelz, R. B.* Locally self-similar, finite-time collapse in a high-symmetry vortex filament model / R. B. Pelz // Phys. Rev. E. — 1997. — V. 55. — P. 1617.
42. *Boratav, O. N.* Direct numerical simulation of transition to turbulence from high-symmetry initial condition / O. N. Boratav, R. B. Pelz // Phys. Fluids. — 1994. — V. 6. — P. 2757.
43. *Grauer, R.* Adaptive mesh refinement for singular solutions of the incompressible Euler equations / R. Grauer, C. Marliani, K. Germaschewski // Phys. Rev. Lett. — 1998. — V. 80. — P. 4177.
44. *Brachet, M. E.* Numerical evidence of smooth self-similar dynamics and possibility of subsequent collapse for three-dimensional ideal flows / M. E. Brachet, M. Meneguzzi, A. Vincent, H. Politano, P. L. Sulem // Phys. Fluids A. — 1992. — V. 4. — P. 2845.
45. *Grauer, R.* Numerical computation of three-dimensional incompressible ideal fluids with swirl / R. Grauer, T. C. Sideris // Phys. Rev. Lett. — 1991. — V. 67. — P. 3511—3514.
46. *Hou, T. Y.* Dynamic depletion of vortex stretching and non-blowup of the 3D incompressible Euler equations / T. Y. Hou, R. Li // J. Nonlinear Sci. — 2006. — V. 16. — P. 639—664.
47. *Hou, T. Y.* Blowup or no blowup? The interplay between theory and numerics / T. Y. Hou, R. Li // Physica D. — 2008. — V. 237. — P. 1937—1944.
48. *Желиговский, В. А.* Численное моделирование коллапса в идеальной несжимаемой гидродинамике / В. А. Желиговский, Е. А. Кузнецов, О. Н. Подвигина // Письма в ЖЭТФ. — 2001. — Т. 74. — С. 402.
49. *Kuznetsov, E. A.* Numerical evidence of breaking of vortex lines in an ideal fluid / E. A. Kuznetsov, O. N. Podvigina, V. A. Zheligovsky // Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics / eds. K. Bajer, H. K. Moffatt. — Kluwer Academic Publishers, 2003. — P. 305—316. — (Fluid mechanics and its applications ; v. 71). — physics/0110046.

АВТОВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМАХ ПЕРИСТАЛЬТИЧЕСКОГО ТИПА

О. А. Дудченко, Г. Т. Гурия

Введение

Изучение механизмов пространственно-временной самоорганизации в биологических системах является одной из главных задач современной биологической физики. Успехи, достигнутые в ее решении за последние пятьдесят лет, в значительной степени связаны с применением математических моделей, методов и подходов нелинейной динамики. В этой связи достаточно вспомнить классические работы Н. Винера и А. Розенблюта [1], А. Тьюринга [2], А. Ходжкина и Э. Хаксли [3], А. Гирера и Г. Майнхарта [4].

Перистальтика — волнообразное сокращение стенок полых трубчатых органов, обеспечивающее транспорт во многих биологических системах[1] — один из наиболее ярких, но мало изученных примеров пространственно-временной самоорганизации в биологии. В настоящей статье предпринята попытка восполнить пробелы в понимании механизмов, управляющих перистальтическим транспортом, подойдя к вопросу с позиций теории автоволновых процессов.

В пользу справедливости гипотезы об автоволновой природе перистальтического прокачивания[2] свидетельствуют многочисленные эксперименты по «запуску» перистальтики в изолированных биологических препаратах [6, 7, 22—29]. Анализ этих экспериментов позволяет сделать следующие качественные выводы:

1) координация перистальтических сокращений осуществляется главным образом автономно, без участия центральной нервной системы;

2) скорость перистальтических волн остается практически постоянной на расстояниях, много больше характерной длины волны;

3) результаты измерений скорости в одном и том же препарате демонстрируют хорошую повторяемость и слабо зависят от способа инициации перистальтических сокращений;

---

[1]К перистальтическим системам относятся органы желудочно-кишечного тракта [5—8], лимфатическая и репродуктивная система [9, 10]. Многие животные используют перистальтические механизмы для локомоции [11]. Имеются определенные указания на присутствие эффектов перистальтической подкачки в сердечно-сосудистой системе высших животных [12, 13].

[2]Термин «перистальтическое прокачивание» используется в настоящей работе как сужение более общего термина «перистальтика» для обозначения пропульсивных режимов, т. е. режимов, связанных с направленным массопереносом. Математическому моделированию «перемешивающих» перистальтических сокращений посвящены работы [14—21].

4) физические и химические воздействия (например, промывка фармакологическими препаратами) приводят к (зависящему от дозы) изменению скорости перистальтических волн в системе.

На последнем факте основан один из методов экспериментального исследования побочного действия лекарственных препаратов на органы перистальтического прокачивания [29].

Несмотря на значительный практический интерес к экспериментальным исследованиям такого рода, до последнего времени было не ясно, какие именно параметры транспортной системы определяют значение скорости перистальтической волны, а также каков вид зависимости скорости перистальтических волн от этих параметров. Для ответа на эти вопросы в работе предложена феноменологическая модель перистальтического прокачивания, в рамках которой перистальтическая волна трактуется как автоволна.

1. Автоволновая модель перистальтического прокачивания

Ключевую роль в управлении перистальтическими сокращениями, повидимому, играет электрическое возбуждение в клетках так называемой энтеральной нервной системы (ЭНС). ЭНС представляет собой автономную систему клеточной коммуникации достаточно сложной архитектуры. Детальному исследованию этой архитектуры посвящено в настоящее время большое количество исследований (см., например, [30, 31]). Однако уже сейчас могут быть выделены следующие принципиально важные свойства этой клеточной сети:

1) электрические и химические синапсы в ЭНС обеспечивают «горизонтальный» перенос электрического сигнала между клетками сети;

2) сопряжение между электрическими процессами и механической реакцией мышечной клетки не является односторонним: специальные механорецепторные клетки ЭНС могут приводить к изменению электрической активности при изменении ее напряженно-деформированного состояния.

Перечисленные выше «базовые» свойства легли в основу предлагаемой в работе математической модели. Согласно положениям модели «включение» активных компонентов стенки — ее сократительного аппарата — происходит в ответ на локальное электрическое возбуждение в ЭНС. Возникающее в результате активное мышечное усилие вносит вклад в напряженно-деформированное состояние стенки сосуда наряду с «пассивной» линейной упругостью.

Клеточные структуры ЭНС представлены в рамках модели цепочкой диффузионно-связанных возбудимых элементов. При этом каждый из возбудимых элементов полагается охваченным петлей механоэлектрической обратной связи.

Распространение перистальтической волны рассматривается в одномерном приближении. Основные уравнения модели имеют вид

$$(1+\varepsilon)\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\frac{R_0^{\ 2}}{16\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left((1+\varepsilon)^4\frac{\partial p}{\partial z}\right), \tag{1}$$

$$p+\tau_s\frac{\partial p}{\partial t}=E\left(\varepsilon+\tau_c\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)+p_a(u)\ , \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=I(\varepsilon)+f(u)-v+D\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\ , \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\kappa(u-\delta v)\ . \tag{4}$$

Уравнение (1) описывает связь между распределением давления $p=p(z,t)$ и деформацией стенки $\varepsilon=\varepsilon(z,t)$ в области применимости допущений теории смазки к течению в просвете сосуда [32]. На рис. 1 профиль сосуда описывается функцией $R=R(z,t)$, распределение давления внутри сосуда задается функцией $p_i=p_i(z,t)$. Связь между $\{p_i,R\}$ и переменными $\{p,\varepsilon\}$ модели задается следующими соотношениями: $\varepsilon=(R-R_0)/R_0$, $p=p_i-p_e(1+h_0/R_0)$. На рис. 1 R_0, h_0 — радиус и толщина сосуда в ненапряженном состоянии (при отсутствии стимуляции), p_e — внешнее давление (p_e = const).

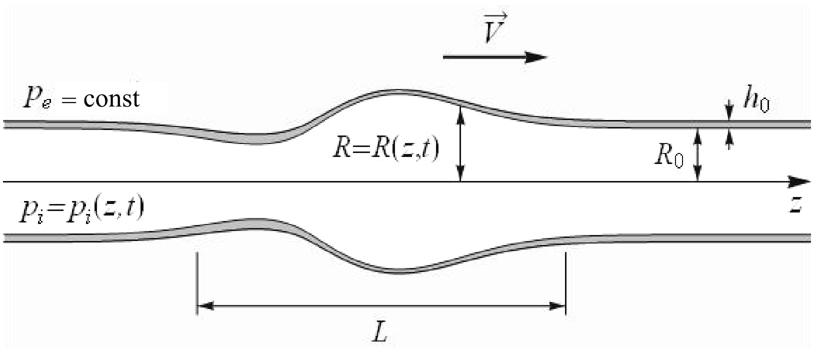


Рис. 1. Схематическое изображение перистальтирующего сосуда

Уравнение (2), отражающее реологические свойства стенки сосуда, следует из стандартной эмпирической модели активной мышечной ткани [33]. Для перехода от напряжений и деформаций стенки к внутрисосудистому давлению p и деформации профиля ε используется допущение о малой толщине стенки сосуда, уравнение Лапласа, а также предположение о несжимаемости материала стенки [34—36]. Параметры τ_s, τ_c в уравнении (2) определяют характерные времена релаксации напряжений и деформаций материала стенки. Параметр E является мерой жесткости стенки сосуда ($E \simeq Yh_0 / R_0$, где через Y обозначен модуль Юнга материала стенки).

Слагаемое $p_a(u)$, отражающее влияние сократительного аппарата стенки на напряженно-деформированное состояние сосуда, полагается (в первом приближении) линейно зависящим от феноменологической переменной *u*, отражающей уровень электрического возбуждения стенки:

$$p_a(u) = \Upsilon u\,,\ \Upsilon = \text{const}\,. \tag{5}$$

Уравнения (3)—(4), описывающие процесс передачи электрического сигнала вдоль сосуда, представляют собой модификацию известных уравнений Фитц-Хью — Нагумо [37, 38].

Кубический член $f(u) = -\beta u(u - u_{thr})(u-1)$, $\beta > 0$, $0 < u_{thr} < 1$, определяет автокаталитический характер наработки *u*. Уравнение на v линейно, причем для параметров κ и δ справедливы соотношения $\kappa > 0$, $0 < \delta < 4\big/\left(\beta(1-u_{thr})^2\right)$.

Диффузионный член в уравнении (3) для электрического «активатора» сократительной реакции u отражает процессы «горизонтальной» синаптической передачи возбуждения по сети электрически активных клеток стенки перистальтирующего сосуда. Наличие механочувствительных элементов в цепи управления сокращениями отражено с помощью включения токового члена $I(\varepsilon)$ в уравнение (3) модели:

$$I(\varepsilon) = \alpha\varepsilon,\ \alpha = \text{const}. \tag{6}$$

2. Анализ уравнений модели

Численное исследование уравнений модели (1)—(6) показывает, что при определенных значениях управляющих параметров может иметь место формирование и распространение самоподдерживающихся волн деформации профиля сосуда. Характеристики этих волн — скорость распространения, амплитуда, форма и т. д. — в установившемся режиме являются постоянными и не зависящими от особенностей постановки начальных условий задачи.

Проведя обезразмеривание уравнений (1)—(6), нетрудно показать, что анализ условий существования решений в описанной выше системе предполагает численное картирование 8-мерного пространства управляющих параметров. Иными словами, численное решение такого рода задачи является достаточно сложной и громоздкой процедурой.

В то же время, как показывает практика [39—42], нередко качественное представление о характере решения и области его существования можно получить аналитически, проанализировав кусочно-линейную аппроксимацию задачи.

2.1. Кусочно-линейное приближение

Заменим кубический полином в уравнении (3) на функцию $\tilde{f}(u) = -\beta\left(u - H(u - u_{thr})\right)$, где $H(u)$ — функция Хевисайда, и линеаризуем уравнение (1), ограничившись рассмотрением волн малой амплитуды.

Соотношение (1) после перехода к автомодельной переменной имеет вид

$$-16\mu V(1+\varepsilon)\varepsilon' = R_0^2\left((1+\varepsilon)^4 p'\right)'.$$

Проинтегрировав его с учетом граничных условий $\{p', \varepsilon\} \to \{0, 0\}$ при $\xi \to \pm\infty$ (см. (12)), после преобразований получим

$$-16\mu V\varepsilon = R_0^2 p'(1+\varepsilon)^4 \big/ (1+\varepsilon/2).$$

Из разложения правой части полученного соотношения по степеням ε в окрестности $\varepsilon = 0$ видно, что гидродинамическое уравнение (1) допускает линеаризацию при рассмотрении волновых решений с $|\varepsilon| \ll 2/7$:

$$R_0^2 p'(1+\varepsilon)^4 \big/ (1+\varepsilon/2) = R_0^2 p'(1 + 7\varepsilon/2 + O(\varepsilon^2)).$$

Осуществляя переход к автомодельной переменной $\xi = z - Vt$ $(V > 0)$ и обезразмеривая полученные уравнения, получим:

$$-\tilde{V}\tilde{\varepsilon}' = \tilde{p}'', \tag{7}$$

$$\tilde{p} - \tilde{V}\tilde{\tau}_s \tilde{p}' = \tilde{E}\left(\tilde{\varepsilon} - \tilde{V}\tilde{\tau}_c \tilde{\varepsilon}'\right) + \tilde{u}, \tag{8}$$

$$-\tilde{V}\tilde{u}' = \tilde{\varepsilon} - \tilde{u} + H(\tilde{u} - \tilde{u}_{thr}) + \tilde{D}\tilde{u}'' - \tilde{v}, \tag{9}$$

$$-\tilde{V}\tilde{v}' = \tilde{\kappa}(\tilde{u} - \tilde{\delta}\tilde{v}). \tag{10}$$

(С помощью штриха обозначено дифференцирование по переменной $\tilde{\xi}$). Безразмерные величины, введенные в (7)—(10), определяются соотношениями

$$\begin{gathered}\tilde{\xi} = \xi \Bigg/ \left(\frac{R_0}{4\beta}\sqrt{\frac{\alpha\Upsilon}{\mu}}\right),\ \tilde{p} = \frac{p}{\Upsilon},\ \tilde{\varepsilon} = \frac{\alpha\varepsilon}{\beta},\ \tilde{u} = u,\ \tilde{v} = \beta v,\ \tilde{V} = V \Bigg/ \left(\frac{R_0}{4}\sqrt{\frac{\alpha\Upsilon}{\mu}}\right),\\ \tilde{\tau}_s = \beta\tau_s,\ \tilde{\tau}_c = \beta\tau_c,\ \tilde{E} = \frac{\beta E}{\alpha\Upsilon},\ \tilde{u}_{thr} = u_{thr},\ \tilde{D} = \frac{16\mu\beta D}{\alpha\Upsilon R_0^2},\ \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{\beta},\ \tilde{\delta} = \beta\delta.\end{gathered} \tag{11}$$

В качестве «базовой» рассмотрим задачу о распространении одиночной самоподдерживающейся перистальтической волны по исходно ненапряженному недеформированному сосуду ($\tilde{\varepsilon} = \tilde{p} = \tilde{u} = \tilde{v} \equiv 0$). Полагая длину перистальтической волны малой по сравнению с длиной транспортного сосуда, сформулируем граничные условия для такой задачи в виде

$$\{\tilde{p}', \tilde{p}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{u}, \tilde{u}', \tilde{v}\} \to \{0,0,0,0,0,0\} \text{ при } \tilde{\xi} \to \pm\infty . \qquad (12)$$

Условия (12) по принятой в теории активных сред классификации соответствуют промежуточно-асимптотическому решению типа «бегущий импульс» [43]. Нетрудно видеть, что порядок системы (7)—(10) меньше, чем количество граничных условий, определяемых соотношением (12), т. е. мы имеем задачу на собственные значения [44].

Процедура поиска решений кусочно-линейных задач на собственные значения такого типа неоднократно описывалась в литературе (см., например, [39, 42]). Применение этой процедуры к задаче (7)—(10), (12) сводит вопрос о существовании перистальтических автоволн к вопросу о существовании решений системы двух трансцендентных уравнений: на скорость волны и длину сокращающегося участка. Эти же уравнения определяют (в неявном виде) зависимость скорости перистальтической волны от параметров задачи $\{\tilde{\tau}_s, \tilde{\tau}_c, \tilde{E}, \tilde{u}_{thr}, \tilde{D}, \tilde{\kappa}, \tilde{\delta}\}$.

Отметим, что задача (7)—(10), (12) при перечисленных выше параметрах имеет два решения. На рис. 2 приведено решение с бо́льшим стационарным значением скорости ($\tilde{V} = 0,9$). Можно показать, что второе решение — с меньшим значением скорости — является неустойчивым.

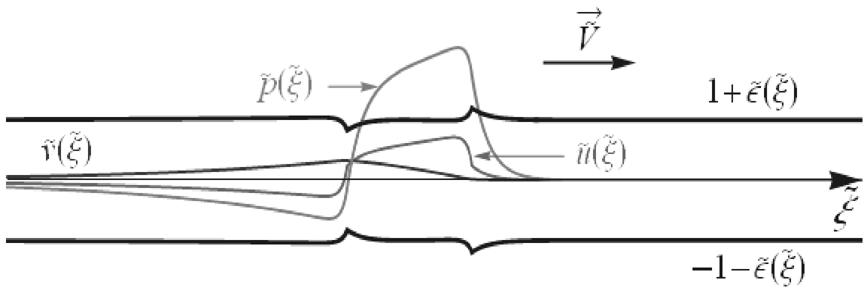


Рис. 2. Типичное решение кусочно-линейной задачи при $\tilde{\tau}_s = 0$, $\tilde{\tau}_c = 0$, $\tilde{E} = 0,8$, $\tilde{u}_{thr} = 0,3$, $\tilde{D} = 0$, $\tilde{\kappa} = 0,05$, $\tilde{\delta} = 0,01$

2.2. Асимптотический анализ: явные уравнения для скорости перистальтической волны

Асимптотическое исследование описанной выше кусочно-линейной задачи позволило получить ряд явных формул для установившихся значений скорости перистальтической волны (см. таблицу). Формулы получены в так называемом сильнорелаксационном приближении [43, 45]: характерные времена изменения восстанавливающей переменной v полагаются большими по сравнению с характерными временами изменения других переменных задачи[3].

Асимптотические формулы для скорости распространения самоподдерживающихся перистальтических волн

№	Предел[4]	Безразмерная скорость перистальтической волны	Область существования решения
1	$I(\varepsilon) \to 0$, $D \neq 0$	$\tilde{V}_S = \gamma\sqrt{\tilde{D}}$, $\gamma = (1 - 2\tilde{u}_{thr}) / \sqrt{\tilde{u}_{thr} - \tilde{u}_{thr}^2}$	$\tilde{u}_{thr} < 1/2$
2[а]	$D \to 0$, $I(\varepsilon) \neq 0$, $\tau_s, \tau_c \ll \tau_u$	$\tilde{V}_{HE} = \sqrt{1 - \tilde{E} + \gamma\sqrt{\tilde{E}}}$	$\tilde{E} < (1 - \tilde{u}_{thr}) / \tilde{u}_{thr}$
2[б]	$D \to 0$, $I(\varepsilon) \neq 0$, $\tau_u \ll \tau_s, \tau_c$	$\tilde{V}_{HE} = \sqrt{\dfrac{\hat{E}}{\tilde{\tau}_s}} \times$ $\times \sqrt{1 - \dfrac{2\hat{\tau}_c}{\tilde{\tau}_s} \pm \sqrt{\left(1 - \dfrac{2\hat{\tau}_c}{\tilde{\tau}_s}\right)^2 + \dfrac{1}{\left(\hat{E}\tilde{u}_{thr}\right)^2}} - 1}$ $\hat{\tau}_c = \tilde{\tau}_c \tilde{E} / \hat{E}$, $\hat{E} = \tilde{E} + 1$	$\left\{\hat{E}\tilde{u}_{thr} < 1\right\} \cup$ $\cup \left\{2\hat{\tau}_c / \tilde{\tau}_s < 1 - \sqrt{1 - 1/\left(\hat{E}\tilde{u}_{thr}\right)^2}\right\}$
3	$E \to 0$, $I(\varepsilon) \neq 0$, $D \neq 0$, $\tau_s, \tau_c \ll \tau_u$	$\tilde{V}_\Sigma = \tilde{V}_S / 2 + \sqrt{\tilde{V}_{HE}^2 + \tilde{V}_S^2 / 4}$	$\forall$ [5]

[3] Формально принимается $\kappa \equiv 0$.

[4] Предельные соотношения сформулированы в терминах системы (1)—(6).

[5] Формула для $\tilde{V}_\Sigma$ формально применима при $\tilde{u}_{thr} > 1/2$ ($\tilde{V}_S = \gamma\sqrt{\tilde{D}}$ в этом случае следует положить отрицательным).

Анализ рассмотренных в работе предельных случаев позволяет сделать вывод, что в основе самоорганизации перистальтических движений лежат, как минимум, два принципиально различных механизма пространственной координации сокращений, которые для образности мы далее будем называть «синаптический» и «гидроупругий».

В системах с доминирующим синаптическим механизмом определяющее значение для пространственной координации сокращений имеет синаптическая передача сигнала по сети клеток ЭНС. Влиянием напряженно-деформированного состояния стенки сосуда на электрический сигнал при этом можно пренебречь (асимптотический предел 1: $I(\varepsilon) \to 0$, $D \neq 0$).

В системах с доминирующим гидроупругим механизмом (асимптотические пределы 2^{а} и 2^{б}: $D \to 0$) пространственное сопряжение обеспечивает гидродинамическое уравнение (1) (или уравнение (7) в линеаризованной задаче). Ключевую роль в координации сокращений по гидроупругому механизму играет механорецепция ($I(\varepsilon) \neq 0$)[6].

Перечисленные механизмы могут рассматриваться как независимые, т. е. каждый из них, в принципе, способен обеспечить самоподдерживающееся распространение перистальтических волн даже в отсутствие функциональной координации сокращений по второму механизму. Избыточное, на первый взгляд смешанное, синапто-гидроупругое управление (характерное, по всей видимости, для большинства биологических транспортных систем) может быть понято в контексте теории эволюции [47, 48].

Представление о том, как эти механизмы дополняют друг друга в случае смешанной синапто-гидроупругой координации, дает рассмотренный в работе асимптотический предел 3. Формула для скорости V_Σ в этом случае может быть выражена через V_S и V_{HE} — значения скорости перистальтических волн, которые установились бы в рассматриваемой системе при функционировании только синаптического и только гидроупругого механизма соответственно. Отметим также, что вид формулы для $\tilde{V}_\Sigma$ не меняется при переходе к размерным значениям скорости V_Σ, V_S и V_{HE}.

Анализ формулы для V_Σ позволяет предположить, что определяющим для величины скорости распространения в системе с избыточным управлением является механизм, обеспечивающий наиболее высокую скорость волны: при $V_S \gg V_{HE}$ получим $V_\Sigma \approx V_S$, и наоборот — при $V_{HE} \gg V_S$ получим $V_\Sigma \approx V_{HE}$. Численные исследования подтверждают справедливость этого предположения в широком диапазоне значений параметров системы, в том числе вне рассмотренного асимптотического предела.

---

[6] См. подробное обсуждение предельных случаев 1 и 2 в работе [46].

3. Обсуждение результатов

Основной целью настоящей работы было выяснение характера зависимости скорости перистальтической волны от параметров, определяющих функциональное состояние транспортной системы. Рассматривались следующие ключевые параметры: вязкость прокачиваемой жидкости, геометрические размеры сосуда, механические свойства сосудистой ткани, а также параметры, характеризующие электрические свойства управляющих нервных структур (интенсивность электромеханического и механоэлектрического сопряжения, способность к «горизонтальной» синаптической передаче, возбудимость). Было выделено 7 безразмерных комбинаций параметров, определяющих значение скорости.

В рамках предложенной в работе модели перистальтические волны интерпретировались как самоподдерживающиеся волны (автоволны типа бегущего импульса) локальной деформации профиля сосуда, сохраняющие свои характеристики постоянными за счет локального высвобождения энергии сократительным аппаратом стенки сосуда. Поиск значения скорости сводился к решению задачи на собственные значения.

Представленная в работе модель тесно связана с другими автоволновыми моделями транспорта в живых каналах. К ним относятся, например, модели медленных электрических волн в желудочно-кишечном тракте (см., например, работы [14—21]), автоволновые модели миокарда [1, 49—53], модели течения крови в микрососудах с нелинейной реологией [54—57], модели распространения кольцевой перетяжки по поверхности оплодотворенной яйцеклетки [58], а также модели самоорганизации амебоидной подвижности протоплазмы [59—61].

3.1. Некоторые ограничения модели

Модель может рассматриваться как объединение трех отдельных моделей-компонентов: течения жидкости, динамики стенки и электрических процессов в управляющих нервных структурах. Каждая из компонент использовалась ранее для описания соответствующих аспектов перистальтического прокачивания (см., например, работы [20, 32, 34, 36]). Попытка интегрировать эти компоненты в единое замкнутое описание предпринимается, насколько нам известно, впервые.

Границы применимости, преимущества и недостатки моделей-компонентов неоднократно обсуждались ранее. Так, вопрос о пригодности допущений теории смазки для описания перистальтических течений подробно рассматривается в работах [32, 34, 36]. Использование эмпирических моделей для описания динамического поведения мышечной ткани обсуждается в общих руководствах [62, 63], применение уравнений типа Фитц-Хью — Нагумо для моделирования возбудимых биологических сред — в книгах [43, 51]. Использование безынерционного приближения в задачах описания перистальтического прокачивания обсуждается в работах [34, 36].

Допущение о малой толщине стенки сосуда принимается в работе в качестве первого приближения, учитывающего только самые грубые обстоятельства и факты, влияющие на перистальтический перенос. Из тех же соображений пренебрегли зависимостью активного напряжения p_a от деформации и скорости деформации [36], а также не анализировали зависимость процессов мышечной релаксации от особенностей механического состояния стенки сосуда [24].

Настоящая работа ограничена рассмотрением одиночных перистальтических волн в сосудах, наполненных однофазными ньютоновскими жидкостями. К системам, наиболее близко соответствующим проанализированному нами случаю, относятся, по-видимому, мочеточник и пищевод. Предложенная в работе модель с легкостью может быть использована для описания и анализа периодических последовательностей перистальтических волн — типичного явления в таких органах, как кишечник, фаллопиевы трубы и некоторые другие [6, 7, 22, 64].

Определенный интерес представляет анализ перистальтического прокачивания материалов с более сложными реологическими свойствами, чем рассмотренные в настоящей работе [65, 66]. Все большее значение приобретает также изучение особенностей перистальтического про-качивания недеформируемых объектов, в частности, в связи с внедрением так называемых умных таблеток [67]. Охват более широкого спектра реологических свойств прокачиваемого материала и учет зависимости мышечной релаксации от механических процессов в стенке сосуда представляются нам наиболее перспективными направлениями развития модели.

Допущение о малости деформаций профиля, позволяющее линеаризовать «гидродинамическое» уравнение (1), сделано для перехода к аналитически разрешимой версии модели. Специально проведенное численное исследование нелинейной системы (1)—(6) показало, что линеаризация не меняет качественных особенностей решения.

Кусочно-линейная аппроксимация реакционного члена $f(u)$ в уравнении (3) модели также использована для перехода к аналитически разрешимой версии модели. Опыт использования такого рода аппроксимации для анализа самых разных нелинейных задач свидетельствует о широкой применимости полученных с ее помощью аналитических результатов [39, 40, 42].

Необходимо, однако, отметить, что использование разрывной аппроксимации для $f(u)$ приводит в явно разрешимых асимптотических пределах (см. таблицу) к решениям с разрывными $\varepsilon'(\xi)$ и $\varepsilon(\xi)$. Строго говоря, это означает, что при приближении к области параметров, соответствующей аналитически разрешимым предельным случаям, мы выходим (локально, в окрестности точки сращивания решений) за рамки применимости допущений модели (в частности, теории смазки и тонкостенного приближения).

Сравнение значений скорости, полученных с использованием разрывной аппроксимации, со значениями, реализующимися в численных экспериментах при использовании кубической функции $f(u)$, показывает, что явные асимптотические формулы, приведенные в таблице, дают, тем не менее, хорошую оценку для скорости перистальтической волны в широком диапазоне значений параметров нелинейной задачи. Другими словами, величина скорости перистальтической автоволны (в отличие от ее профиля) представляется малочувствительной к использованным разрывно-аппроксимационным упрощениям.

3.2. Потенциальные практические приложения

Полученные в работе явные соотношения для скорости перистальтической волны (см. таблицу), по-видимому, могут быть использованы в клинической практике для оценки влияния фармакологических препаратов на работу перистальтирующих органов [29].

Знание перечисленных выше явных зависимостей также открывает дорогу к использованию значения скорости перистальтической волны в качестве диагностического критерия. В частности, представляется возможным использовать результаты изменения скорости для оценки механического состояния транспортной системы (по аналогии с тем, как используются сведения о скорости пульсовой волны для оценки тонуса кровеносных сосудов [68]). Явные формулы для скорости в этом смысле могут рассматриваться как перистальтические эквиваленты известной формулы Моэнса — Кортевега для скорости распространения пульсовой волны [69]. Вопрос о диагностическом потенциале скорости перистальтической волны тем более актуален, что неинвазивные методы ее измерения уже внедрены в медицинскую практику [70].

Представляется интересным провести параллель между пульсовыми и перистальтическими волнами еще и в следующей плоскости. Анализ нелинейных эволюционных уравнений для описания распространения возмущений давления в потоке крови показывает, что пульсовым волнам в асимптотическом пределе соответствуют солитонные решения [71—75]. Таким образом, пульсовые и перистальтические волны могут рассматриваться как стационарные волны в некотором смысле противоположной с точки зрения нелинейной науки природы. В первых нелинейность конкурирует в основном с дисперсией, во вторых — с диссипацией в транспортной системе[7].

---

[7]Любопытно, что Джон Скотт Рассел, известный прежде всего как человек, впервые описавший уединенную волну трансляции [76], впоследствии получившую название «солитон», еще раньше описал явление, которое на поверку может оказаться феноменом рождения

Представляется, что выделение двух независимых механизмов координации сокращений, полученное в результате асимптотического анализа уравнений модели, имеет фундаментальное значение для развития представлений об управлении двигательной активностью в перистальтирующих органах. Отметим также, что продемонстрированная в работе возможность поддерживать пространственный массоперенос исключительно благодаря механическому сопряжению открывает новые возможности для развития методов электрической стимуляции перистальтической активности.

Применение точечной электростимуляции для лечения острых случаев непроходимости перистальтирующих органов известно достаточно давно [22]. Точечная стимуляция, однако, не всегда дает удовлетворительные результаты [78, 79]. В частности, она не может обеспечить массоперенос в протяженных системах с нарушенным синаптическим сопряжением между участками сосудистого русла (такого рода нарушения являются типичными, например, при диабете [31]). В этой связи в настоящее время активно развиваются методы стимуляции перистальтической активности на основе множественных электродов, соединенных в единую функциональную систему под управлением микропроцессора [78, 79].

Нетрудно видеть в свете изложенных в настоящей работе результатов, что от центрального управления в таких системах можно отказаться. Для этого достаточно сделать электроды разряжающимися в ответ на растяжение окружающей их мышечной ткани. Представляется, что автономность отдельных электродов существенно облегчила бы процесс их имплантации. Еще одним преимуществом такого рода автоматических систем было бы функционирование «по требованию», в ответ на появление в окрестности электродов достаточно больших количеств материала, подлежащего трансляции.

волны второго, «автоволнового», типа. Вот что пишет Рассел об открытии этого явления [77] (перевод): «Насколько мне известно, открытие было сделано случайно на малом канале Глазго — Ардроссан. Горячая лошадь, впряженная в лодку Уильяма Хаустона, эсквайра, одного из владельцев предприятия, испугалась и понесла, волоча лодку за собой. При этом мистер Хаустон, к своему удивлению, увидел, что пенящаяся кормовая волна, которая обычно опустошала берега, исчезла, и судно шло по воде сравнительно плавно, с очень сильно уменьшенным сопротивлением. М-р Хаустон сумел распознать коммерческое значение этого факта для компании и посвятил себя внедрению на этом канале судов, двигающихся с этой более высокой скоростью».

Можно предположить, что сущность явления, описанного в процитированном выше фрагменте, состояла в закритическом формировании присоединенного гидродинамического течения (присоединенной волны), выталкивающего лодку из воды и, тем самым, уменьшающего испытываемое ею сопротивление (эффект глиссирования). Поддержание течения при этом обеспечивалось «активным элементом» — лошадью, развившей мощность, необходимую для компенсации вязких потерь в системе.

Заключение

Теоретический анализ механизмов координации сокращений в органах перистальтического прокачивания позволяет сделать вывод, что в основе самоорганизации перистальтических движений лежат, как минимум, два независимых механизма: синаптический и гидроупругий.

Использование математического аппарата, развитого в теории активных сред, позволило — по-видимому, впервые — вывести ряд явных соотношений, дающих представление о характере зависимости значения скорости перистальтических волн от таких параметров, как вязкость прокачиваемой жидкости, модуль Юнга транспортного сосуда, степень активации его сократительного аппарата и т. д.

Полученные в работе явные соотношения для скорости, по-видимому, могут быть использованы в клинической практике: в диагностических целях и для оценки влияния фармакологических препаратов на работу перистальтирующих органов. Кроме того, результаты работы могут найти применение при конструировании искусственных сосудов и имплантируемых систем поддержания моторной функции.

Авторы выражают глубокую признательность А. И. Воробьеву за стимулирующие указания, а также Ю. М. Романовскому и В. А. Васильеву за плодотворное обсуждение различных аспектов задачи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке компании Шлюмберже (программа “Faculty for the Future”) и МНТЦ (грант № 3744).

Литература

1. *Wiener, N.* The mathematical formulation of the problem of conduction of impulses in a network of connected excitable elements, specifically in cardiac muscle / N. Wiener, A. Rosenblueth // Arch. Inst. Cardiol. Mex. — 1946. — V. 16, № 3. — P. 205—265.

2. *Turing, A. M.* The chemical basis of morphogenesis / A. M. Turing // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B : Biological sciences. — 1952. — V. 237, № 641. — P. 37—72.

3. *Hodgkin, A. L.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve / A. L. Hodgkin, A. F. Huxley // J. Physiol. — 1952. — V. 117, № 4. — P. 500—544.

4. *Gierer, A.* A theory of biological pattern formation / A. Gierer, H. Meinhardt // Kybernetik. — 1972. — V. 12, № 1. — P. 30—39.

5. *Павлов, И. П.* Лекции о работе главных пищеварительных желез / И. П. Павлов. — СПб. : И. Н. Кушнерев и К°, 1897. — 223 с.

6. *Bayliss, W. M.* The movements and innervation of the small intestine / W. M. Bayliss, E. H. Starling // J. Physiol. (Lond.). — 1899. — V. 24, № 2. — P. 99—143.

7. *Bayliss, W. M.* The movements and the innervation of the large intestine / W. M. Bayliss, E. H. Starling // J. Physiol. (Lond.). — 1900. — V. 26, № 1/2. — P. 107—118.

8. *Ingelfinger, F. J.* Esophageal motility / F. J. Ingelfinger // Physiol. Rev. — 1958. — V. 38, № 4. — P. 533—584.

9. *Smith, R. O.* Lymphatic contractility; a possible intrinsic mechanism of lymphatic vessels for the transport of lymph / R. O. Smith // J. Exp. Med. — 1949. — V. 90, № 5. — P. 497—509.

10. *Орлов, Р. С.* Лимфатические сосуды. Структура и механизмы сократительной активности / Р. С. Орлов, А. В. Борисов, Р. П. Борисова. — Л. : Наука, 1983. — 254 с.

11. *Dobrolyubov, A. I.* The mechanism of locomotion of some terrestrial animals by travelling waves of deformation // J. Theor. Biology. — 1986. — V. 119, № 4. — P. 457—466.

12. *Яновский, М. В.* О периферическом артериальном сердце / М. В. Яновский // Курс диагностики внутренних болезней. — Петроград, 1922. — С. 213—250.

13. *Nilsson, H.* Vasomotion : mechanisms and physiological importance / H. Nilsson, C. Aalkjaer // Mol. Interv. — 2003. — V. 3, № 2. — P. 79—89.

14. *Nelsen, T. S.* Simulation of the electrical and mechanical gradient of the small intestine / T. S. Nelsen, J. C. Becker // Am. J. Physiol. — 1968. — V. 214, № 4. — P. 749—757.

15. *Sarna, S. K.* Electrical stimulation of gastric electrical control activity / S. K. Sarna, E. E. Daniel // Am. J. Physiol. — 1973. — V. 225, № 1. — P. 125—131.

16. *Robertson-Dunn, B.* A mathematical model of the slow-wave electrical activity of the human small intestine / B. Robertson-Dunn, D. A. Linkens // Med. Biol. Eng. — 1974. — V. 12, № 6. — P. 750—758.

17. *Linkens, D. A.* Multioscillator simulator for gastrointestinal electrical activity modelling / D. A. Linkens, M. Khelfa, G. Nicklin // Med. Biol. Eng. Comput. — 1983. — V. 21, № 5. — P. 591—598.

18. *Дрендель, С. Д.* Режим синхронизации клеток гладкомышечных тканей / С. Д. Дрендель, Н. П. Хорс, В. А. Васильев // Динамика клеточных популяций. — Горький : Изд-во Горьк. ун-та, 1984. — С. 108—117.

19. *Васильев, В. А.* Автоволновые явления в тканях гладкомышечных органов желудочно-кишечного тракта / В. А. Васильев, С. Д. Дрендель, О. Л. Нотова // Коллективная динамика возбуждений и структурообразование в биологических тканях. — Горький : ИПФ АН СССР, 1988. — С. 137—145.

20. *Aliev, R. R.* A simple nonlinear model of electrical activity in the intestine / R. R. Aliev, W. Richards, J. P. Wikswo // J. Theor. Biol. — 2000. — V. 204, № 1. — P. 21—28.

21. *Lin, A. S.-H.* Modelling slow wave activity in the small intestine / A. S.-H. Lin, M. L. Buist, N. P. Smith, A. J. Pullan // J. Theor. Biol. — 2006. — V. 242, № 2. — P. 356—362.

22. *Богач, П. Г.* Механизмы нервной регуляции моторной функции тонкого кишечника / П. Г. Богач. — Киев : Изд-во Киев. гос. ун-та, 1961. — 121 с.

23. *McHale, N. G.* The effect of transmural pressure on pumping activity in isolated bovine lymphatic vessels / N. G. McHale, I. C. Roddie // The Journal of Physiology. — 1976. — V. 261, № 2. — P. 255—269.

24. *Bertuzzi, A.* An analysis of the peristaltic reflex / A. Bertuzzi, R. Mancinelli, M. Pescatori, S. Salinari // Biol. Cybernetics. — 1979. — V. 35, № 4. — P. 205—212.

25. *Bercik, P.* Origins of motility patterns in isolated arterially perfused rat intestine / P. Bercik, D. Armstrong, R. Fraser, P. Dutoit, C. Emde, M. P. Primi, A. L. Blum, P. Kucera // Gastroenterology. — 1994. — V. 106, № 3. — P. 649—657.

26. *Santicioli, P.* Myogenic and neurogenic factors in the control of pyeloureteral motility and ureteral peristalsis / P. Santicioli, C. A. Maggi // Pharmacol. Rev. — 1998. — V. 50, № 4. — P. 683—722.

27. *Brookes, S. J. H.* Initiation of peristalsis by circumferential stretch of flat sheets of guinea-pig ileum / S. J. H. Brookes, B. N. Chen, M. Costa, C. M. S. Hum-phreys // J. Physiol. (Lond.). — 1999. — V. 516 (Pt. 2). — P. 525—538.

28. *Lammers, W. J.* Two-dimensional high-resolution motility mapping in the isolated feline duodenum: methodology and initial results / W. J. Lammers, S. Dhanase-karan, J. R. Slack, B. Stephen // Neurogastroenterol. Motil. — 2001. — V. 13, № 4. — P. 309—323.

29. *Hoffman, J. M.* Gastrointestinal Motility Monitor (GIMM) / J. M. Hoffman, E. M. Brooks, G. M. Mawe // Journal of Visualized Experiments. — 2010. — № 46. — doi:10.3791/2435.

30. *Costa, M.* Anatomy and physiology of the enteric nervous system / M. Costa, S. J. Brookes, G. W. Hennig // Gut. — 2000. — V. 47, Suppl. 4. — P. iv15—19 ; discussion iv26.

31. *Hanani, M.* Intercellular coupling of interstitial cells of Cajal in the digestive tract / M. Hanani, G. Farrugia, T. Komuro // Int. Rev. Cytol. — 2005. — V. 242. — P. 249—282.

32. *Регирер, С. А.* О движении жидкости в трубе с деформируемой стенкой / С. А. Регирер // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1968. — № 4. — С. 202—208.

33. *Усик, П. И.* Модель сосудистого тонуса / П. И. Усик, С. А. Регирер, И. М. Руткевич // Механика полимеров. — 1975. — Т. 4. — С. 585—589.

34. *Fung, Y.-C.* Peristaltic pumping : A bioengineering model / Y.-C. Fung // Urodynamics of the Ureter and Renal Pelvis. — New York : Academic Press, 1971. — P. 177—198.

35. *Bertuzzi, A.* A mathematical model of intestinal motor activity / A. Bertuzzi, R. Mancinelli, G. Ronzoni, S. Salinari // J. Biomech. — 1978. — V. 11, № 1/2. — P. 41—47.

36. *Carew, E. O.* An active membrane model for peristaltic pumping. Part I : Periodic activation waves in an infinite tube / E. O. Carew, T. J. Pedley // J. Biomech. Eng. — 1997. — V. 119, № 1. — P. 66—76.

37. *Fitzhugh, R.* Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane / R. Fitzhugh // Biophys. J. — 1961. — V. 1, № 6. — P. 445—466.

38. *Nagumo, J.* An active pulse transmission line simulating nerve axon / J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // Proc. IRE. — 1962. — V. 50. — P. 2061—2070.

39. *Rinzel, J.* Traveling wave solutions of a nerve conduction equation / J. Rinzel, J. B. Keller // Biophys. J. — 1973. — V. 13, № 12. — P. 1313—1337.

40. *Livshits, M. A.* Positional differentiation as pattern formation in reaction-diffusion systems with permeable boundaries. Bifurcation analysis / M. A. Livshits, G. Th. Guria, B. N. Belintsev and M. V. Volkenstein // J. Math. Biology. — 1981. — V. 11, № 3. — P. 295—310.

41. *Koga, S.* A variety of stable persistent waves in intrinsically bistable reaction-diffusion systems. From one-dimensional periodic waves to one-armed and two-armed rotating spiral waves / S. Koga // Physica D : Nonlinear Phenomena. — 1995. — V. 84, № 1/2. — P. 148—161.

42. *Zemskov, E. P.* Analytically solvable models of reaction–diffusion systems / E. P. Zemskov, K. Kassner // Eur. J. Phys. — 2004. — V. 25, № 3. — P. 361—367.

43. *Васильев, В. А.* Автоволновые процессы / В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно. — М. : Наука, 1987. — 240 с.

44. *Баренблатт, Г. И.* Автомодельные явления: анализ размерностей и скейлинг. — Долгопрудный : Интеллект, 2009. — 216 с.

45. *Островский, Л. А.* Формирование импульсов в возбудимой среде / Л. А. Островский, В. Г. Яхно // Биофизика. — 1975. — Т. 20, № 3. — С. 489—493.

46. *Dudchenko, O. A.* Self-sustained peristaltic waves : Explicit asymptotic solutions / O. A. Dudchenko, G. Th. Guria // PRE. — 2012. — V. 85. — P. 020902(R) 1—5.

47. *Huizinga, J. D.* The many facets of intestinal peristalsis / J. D. Huizinga, C. M. McKay, E. J. White // Am. J. Physiol. Gastrointest. Liver Physiol. — 2006. — V. 290, № 6. — P. G1347—1349 ; author reply G1348—1349.

48. *Huizinga, J. D.* Gut peristalsis is governed by a multitude of cooperating mechanisms / J. D. Huizinga, W. J. Lammers // Am. J. Physiol. Gastrointest. Liver Physiol. — 2009. — V. 296, № 1. — P. G1—8.

49. *Noble, D.* A modification of the Hodgkin—Huxley equations applicable to Purkinje fibre action and pacemaker potentials / D. Noble // J. Physiol. — 1962. — V. 160, № 2. — P. 317—352.

50. *Кринский, В. И.* Распространение возбуждения в неоднородной среде (режимы, аналогичные фибрилляции сердца) / В. И. Кринский // Биофизика. — 1966. — Т. 11. — С. 676—683.

51. *Романовский, Ю. М.* Математическое моделирование в биофизике / Ю. М. Романовский, Н. В. Степанова, Д. С. Чернавский. — М., 1975. — 304 с.

52. *Kohl, P.* Mechanoelectric feedback in cardiac cells / P. Kohl, F. Sachs // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2001. — V. 359, № 1783. — P. 1173—1185.

53. *Nash, M. P.* Electromechanical model of excitable tissue to study reentrant cardiac arrhythmias / M. P. Nash, A. V. Panfilov // Prog. Biophys. Mol. Biol. — 2004. — V. 85, № 2/3. — P. 501—522.

54. *Клочков, Б. Н.* Автоволновые процессы в кровеносных сосудах мышечного типа / Б. Н. Клочков // Автоволновые процессы в системах с диффузией. — Горький : ИПФ АН СССР, 1981. — С. 233—242.

55. *Клочков, Б. Н.* Нестационарные течения жидкости в трубках из вязкоупругого активного материала / Б. Н. Клочков, А. М. Рейман, Ю. А. Степанянц // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1985. — № 3. — С. 94—102.

56. *Клочков, Б. Н.* О моделях течения жидкости в микрососудах // Коллективная динамика возбуждений и структурообразование в биологических тканях. — Горький : ИПФ АН СССР, 1988. — С. 156—164.

57. *Клочков, Б. Н.* Волновые процессы в активных средах, насыщенных жидкостью : дис. … д. ф.-м. н. / Борис Николаевич Клочков. — Н. Новгород, 2008.

58. *Lane, D. C.* Analysis of wave phenomena in a morphogenetic mechanochemical model and an application to post-fertilization waves on eggs / D. C. Lane, J. D. Murray, V. S. Manoranjan // Mathematical Medicine and Biology. — 1987. — V. 4, № 4. — P. 309—331.

59. *Романовский, Ю. М.* Математическая теория подвижности протоплазмы / Ю. М. Романовский, Е. Б. Черняева, В. Г. Колинько, Н. П. Хорс // Автоволновые процессы в системах с диффузией. — Горький : ИПФ АН СССР, 1981. — С. 202—219.

60. *Романовский, Ю. М.* Физические основы клеточного движения. Механизмы самоорганизации амебоидной подвижности / Ю. М. Романовский, В. А. Теплов // Успехи физических наук. — 1995. — Т. 165, № 5. — С. 555—578.

61. *Teplov, V. A.* Auto-oscillaroty processes and feedback mechanisms in Physarum plasmodium motility / V. A. Teplov, Y. M. Romanovsky, D. A. Pavlov, W. Alt // Dynamics of cell and tissue motion. — Birkhäuser, 1997. — P. 83—92.

62. *Волькенштейн, М. В.* Общая биофизика / М. В. Волькенштейн. — М. : Наука, 1978. — 592 с.

63. *Регирер, С. А.* Лекции по биологической механике (Т. 1). — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1980. — 144 с.

64. *Blake, J. R.* A model of ovum transport / J. R. Blake, P. G. Vann, H. Winet // Journal of Theoretical Biology. — 1983. — V. 102, № 1. — P. 145—166.

65. *Srivastava, L. M.* Peristaltic transport of a non-Newtonian fluid: applications to the vas deferens and small intestine / L. M. Srivastava, V. P. Srivastava // Ann. Biomed. Eng. — 1985. — V. 13, № 2. — P. 137—153.

66. *Pandey, S. K.* Peristaltic transport of multilayered power-law fluids with distinct viscosities : A mathematical model for intestinal flows / S. K. Pandey, M. K. Chaube, D. Tripathi // Journal of Theoretical Biology. — 2011. — V. 278, № 1. — P. 11—19.

67. *Dario, P.* Robot Pills: Scientific American [Online] / P. Dario, A. Menciassi. — Mode of access: URL: http://www.scientificamerican.com/article.cfm?id=robot-pills.

68. *Mancia, G.* Guidelines for the Management of Arterial Hypertension / G. Mancia et al. // Journal of Hypertension. — 2007. — V. 25, № 6. — P. 1105— 1187.

69. *Moens, A. I.* Die Pulscurve / A. I. Moens // EJ. Brill.Verlag. — 1878. — P. 87—95.

70. *Schwizer, W.* Non-invasive investigation of gastrointestinal functions with magnetic resonance imaging: towards an “ideal” investigation of gastrointestinal function / W. Schwizer // Gut. — 2003. — V. 52, № 90004. — P. 34iv—39.

71. *Yomosa, S.* Solitary Waves in Large Blood Vessels / S. Yomosa // Journal of the Physics Society Japan. — 1987. — V. 56, № 2. — P. 506—520.

72. *Paquerot, J.-F.* Dynamics of nonlinear blood pressure waves in large arteries / J.-F. Paquerot, M. Remoissenet // Physics Letters A. — 1994. — V. 194, № 1/2. — P. 77—82.

73. *Волобуев, А. Н.* Течение жидкости в трубках с эластичными стенками / А. Н. Волобуев // Успехи физических наук. — 1995. — Т. 165, № 2. — С. 177—186.

74. *Волобуев, А. Н.* Солитонная природа пульсовой волны / А. Н. Волобуев, В. А. Неганов, В. Ю. Болочагин // Вестник новых медицинских технологий. — 2000. — № 2. — С. 42—45.

75. *Кудряшов, Н. А.* Нелинейные волны при течении жидкости в вязкоэластичной трубке / Н. А. Кудряшов, И. Л. Чернявский // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. — 2006. — № 1. — С. 54—67.

76. *Russell, J. S.* Report on waves: made to the meetings of the British Association in 1842-43 / J. S. Russell. — London : R.&J. E. Taylor, 1845. — 136 p.

77. *Russell, J. S.* Experimental researches into the laws of certain hydrodynamical phenomena that accompany the motion of floating bodies, and have not previously been reduced into conformity with the known laws of the resistance of fluids / J. S. Russell // Transactions of the Royal Society of Edinburgh. — 1839. — V. 14. — P. 47—109.

78. *Rashev, P. Z.* Microprocessor-controlled colonic peristalsis: dynamic parametric modeling in dogs / P. Z. Rashev, M. Amaris, K. L. Bowes, M. P. Mintchev // Dig. Dis. Sci. — 2002. — V. 47, № 5. — P. 1034—1048.

79. *Sevcencu, C.* A review of electrical stimulation to treat motility dysfunctions in the digestive tract: effects and stimulation patterns / C. Sevcencu // Neuromodulation. — 2007. — V. 10, № 2. — P. 85—99.

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ В НЕЙРОДИНАМИКЕ: ОТ НЕЙРОНА К СЕТИ

О. В. Масленников, В. И. Некоркин

Введение

Моделирование процессов в живых системах с помощью систем с дискретным временем имеет достаточно долгую историю. В частности, в 40-е годы прошлого века Н. Винер и А. Розенблют для моделирования процессов распространения импульсов возбуждения в сердечной ткани предложили клеточно-автоматную систему. Клеточно-автоматные системы представляют собой решётки из элементов, каждый из которых имеет определённые наборы состояний. Состояния элементов изменяются синхронно в дискретные моменты времени в соответствии с одним и тем же правилом. В последнее время для исследования кооперативных явлений в крупномасштабных нейронных сетях возрастающий интерес вызывает новый класс систем с дискретным временем — системы взаимосвязанных точечных отображений. В отличие от элементов клеточно-автоматных систем состояние точечных отображений изменяется непрерывно, но в дискретные моменты времени. Модели в форме точечных отображений обладают рядом преимуществ по сравнению с моделями в форме дифференциальных уравнений. Например, если для воспроизведения колебательных свойств в системах дифференциальных уравнений требуется, как минимум, два измерения, а хаотического поведения — три, то в дискретном времени и тот и другой тип динамики можно описать в рамках даже одномерного отображения. Это преимущество проявляется при моделировании сложных режимов активности даже отдельных нейронов и в значительной степени крупномасштабных нейронных цепей, состоящих из взаимодействующих между собой различных структурных единиц. Например, для моделирования режима хаотических спайк-бёрстовых колебаний, одного из важнейших режимов нейронной активности, с помощью систем с непрерывным временем потребуется, как минимум, трёхмерная нелинейная система дифференциальных уравнений. С другой стороны, известны [1, 2] дискретные модели в форме двумерных точечных отображений, которые достаточно хорошо воспроизводят режим спайк-бёрстовых колебаний. Точечные отображения позволяют моделировать и многие другие режимы нейронной активности. Например, модель Д. Киалво [3] позволяет имитировать режимы так называемой нормальной и супернормальной возбудимости и др. Модель Н. Рулькова имеет несколько модификаций [4, 5], одна из которых настроена на воспроизведение различных спайковых и бёрстовых колебательных режимов, а другая способна генерировать так называемые подпороговые колебания, т. е. колебания малой амплитуды ниже порога возбуждения. Здесь мы представим авторскую [6—9] модель нейронной активности в форме двумерного точечного отображения и опишем режимы нейронной активности, которые она воспроизводит. Покажем, что модель является достаточно универсальной и описывает многие режимы нейронной активности. Далее представим результаты моделирования, основанного на использовании нашей модели нейронной активности, динамики сложной нейронной структуры — оливо-мозжечковой системы позвоночных.

1. Дискретная модель нейронной активности

Рассмотрим систему точечных отображений [6] следующего вида:

$$\begin{cases} \bar{x} = x + F(x) - \beta H(x-d) - y, & \text{(1а)} \\ \bar{y} = y + \varepsilon(x - J). & \text{(1б)} \end{cases}$$

Здесь переменная x качественно характеризует изменение мембранного потенциала клетки, y отвечает за совокупное действие ионных токов (так называемая восстанавливающая переменная). Параметр ε определяет скорость изменения переменной y, параметры β, d, J контролируют форму генерируемого сигнала. Отметим, что модель основана на дискретной версии известной в нейродинамике системы Фитц-Хью — Нагумо с кубической нелинейностью $F(x)$ и дополнительно введённой ступенчатой функцией Хевисайда $H(x)$:

$$F(x) = x(x-a)(1-x), \quad H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{2}$$

На рис. 1 качественно показаны изоклины горизонтальных (прямая $x = J$) и вертикальных (кривая $y = F(x) - \beta H(x - d)$) наклонов системы (1) на фазовой плоскости (x, y).

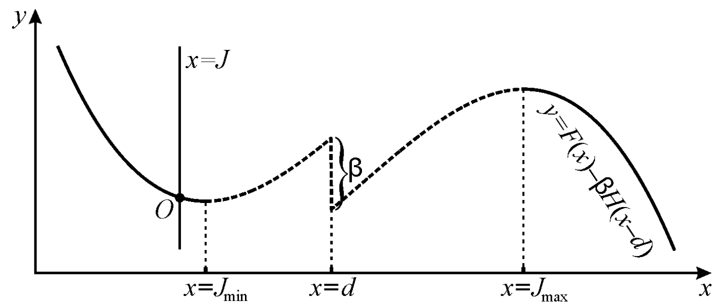


Рис. 1. Качественный вид изоклин горизонтальных и вертикальных наклонов на фазовой плоскости отображения (1)

1.1. Регулярные режимы активности

Одним из основных свойств нейронов, изначально находящихся в состоянии покоя, является их способность к генерации потенциала действия при превышении некоторого порога в результате действия внешнего стимула (свойство возбудимости). Состоянию покоя нейрона в системе (1) отвечает устойчивая неподвижная точка O. На фазовой плоскости при этом существуют два порога, фактически определяемых неустойчивыми инвариантными кривыми W_1^u и W_2^u (точнее, тонкими слоями, состоящими из медленных траекторий, локализованных в окрестности этих инвариантных кривых), где

$$W_1^u = \{(x, y): y = F(x) + ..., J_{\min} < x < d\},$$
$$W_2^u = \{(x, y): y = F(x) - \beta + ..., d < x < J_{\max}\}.$$

При действии на систему стимула, которого недостаточно для преодоления первого порога возбуждения (W_1^u), генерации потенциала действия не происходит — образуется лишь ответный отклик малой амплитуды (рис. 2, *а*, *б* (i)). Если амплитуда стимула оказывается достаточной для преодоления второго порога (W_2^u), то траектория попадает в область притяжения устойчивой инвариантной кривой W_2^s, где $W_2^s = \{(x, y): y = F(x) - \beta + ..., x > J_{\max}\}$, и описывает характерную кривую, оканчивающуюся в устойчивой неподвижной точке O. Такому поведению на фазовой плоскости отвечает режим генерации одиночного потенциала действия, или спайка (рис. 2, *а*, *б* (ii)).

Другой важный режим, который наблюдается в системе, — это подпороговые колебания. На фазовой плоскости ему соответствует устойчивая замкнутая инвариантная кривая $C_{\text{подп}}$ (рис. 2, *в*), рождённая при смене устойчивости неподвижной точки в результате бифуркации Неймарка — Сакера. Данные колебания квазисинусоидальной формы (рис. 2, *г*), которые происходят ниже порога возбуждения потенциала действия, имеют большое значение, в частности, в работе оливо-мозжечковой системы позвоночных [10], о которой речь пойдёт далее.

Ещё один регулярный нейронный режим, воспроизводимый в системе, — периодические спайковые колебания. Установлено [6], что одним из условий их появления является относительная малость параметра β. При этом становятся возможными движения между слоями медленных движений, локализованных в окрестности двух устойчивых кривых W_1^s ($W_1^s = \{(x, y): y = F(x) + ..., x < J_{\min}\}$) и W_2^s, без изменения направления движения при прохождении прямой разрыва $x = d$. В результате на фазовой плоскости формируется устойчивая замкнутая инвариантная кривая $C_{\text{сп}}$ (рис. 2, *д*), соответствующая периодическим спайковым колебаниям (рис. 2, *е*).

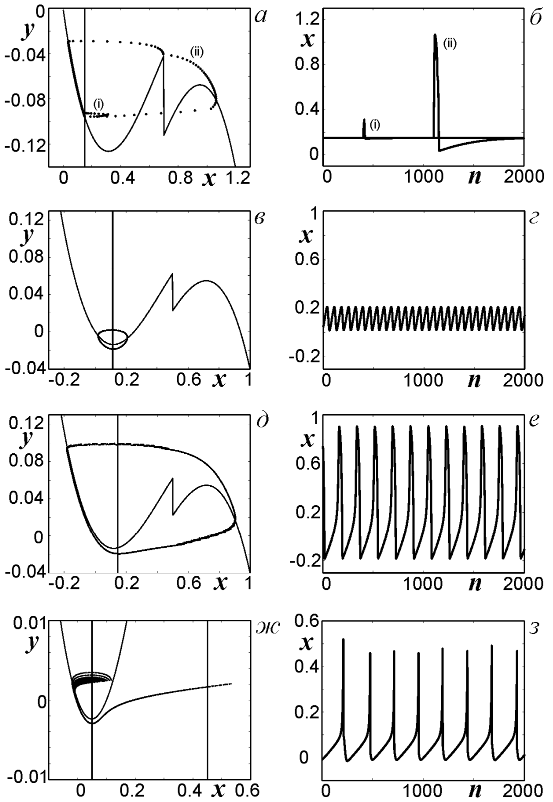


Рис. 2. Фазовые портреты (левый столбец) и соответствующие осциллограммы (правый столбец) регулярных режимов нейронной активности в модели (1)

В работе [10] показано, что в модели (1), помимо указанных, наблюдается иной тип спайковой активности. При этом на фазовой плоскости образуется разрывный аттрактор $A_{сп}$ (рис. 2, *ж*), определяющий колебания данной формы (рис. 2, *з*).

1.2. Хаотические режимы активности

В работе [6] установлено, что в системе (1) могут существовать различные хаотические аттракторы. Один из таких аттракторов, $A_{сп}$, представлен на рис. 3, *а*, а соответствующий режим нейронной активности — на рис. 3, *б*. В этом режиме потенциалы действия генерируются, перемежаясь с подпороговыми колебаниями. Динамический механизм таких колебаний заключается в том, что в окрестности линии разрыва $x = d$ инвариантная кривая W_2^u разделяет траектории системы (1) на два потока. Первый поток состоит из траекторий, которые совершают движения в окрестности $x = d$. Второй поток образован траекториями, преодолевшими второй порог и движущимися в окрестности кривой W_2^s. В результате такого разделения траектория хаотически переходит из одного потока в другой, формируя аттрактор $A_{\text{сп}}$.

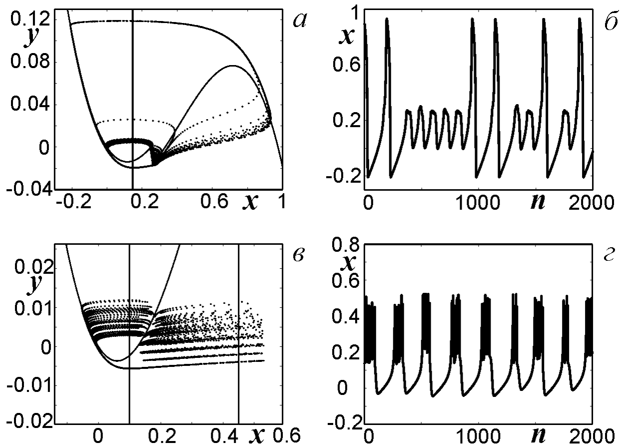


Рис. 3. Фазовые портреты (левый столбец) и соответствующие осциллограммы (правый столбец) хаотических режимов нейронной активности в модели (1)

Один из наиболее важных динамических режимов, встречающихся в различных нейронных структурах, — это хаотические спайк-бёрстовые колебания. В системе (1) данный режим с различными характеристиками воспроизводится в широком диапазоне значений параметров. На фазовой плоскости ему отвечает релаксационный хаотический аттрактор $A_{\text{сб}}$ (рис. 3, *в*), соответствующие ему колебания приведены на рис. 3, *г*. В силу важности режима хаотических спайк-бёрстовых колебаний подробнее остановимся на динамическом механизме их установления.

1.3. Спайк-бёрстовые колебания

Хаотические спайк-бёрстовые колебания условно можно разделить на две фазы — быструю и медленную (см. рис. 3, *в*, *г*). Рассмотрим, как происходит формирование таких двухмасштабных колебаний. Пусть сначала $\varepsilon = 0$ и, следовательно, переменная $y = y^0 = \text{const}$ и играет роль параметра в уравнении (1а). В зависимости от значения y^0 отображение быстрых движений

$$\bar{x} = x + F(x) - \beta H(x - d) - y^0 \qquad (3)$$

может демонстрировать как регулярную, так и хаотическую динамику (рис. 4). В случае регулярной динамики единственным аттрактором отображения (3) является устойчивая неподвижная точка x_s. При квазистатическом уменьшении параметра y^0 состояние равновесия x_s при некотором бифуркационном значении сливается с неустойчивой неподвижной точкой x_u и исчезает (происходит касательная, или седло-узловая, бифуркация).

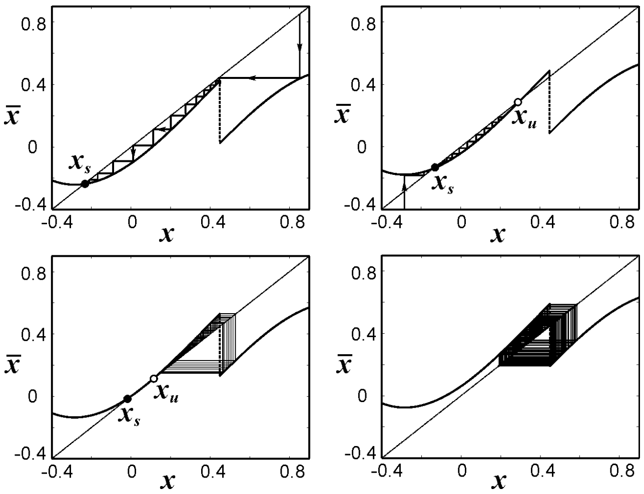


Рис. 4. Динамика отображения (1) при различных значениях y^0

В случае хаотической динамики отображение (3) действует подобно отображению Лоренца и имеет инвариантный интервал, содержащий хаотический аттрактор. При квазистатическом увеличении параметра y^0 этот аттрактор претерпевает внутренние бифуркации, и, наконец, при некотором значении $y^0 = y^0_{\text{кр}}$ происходит его граничный кризис [11]: одна из его границ сливается с неустойчивой неподвижной точкой x_u, и аттрактор разрушается.

Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$. В этом случае семейство устойчивых неподвижных точек отображения (3) образует на фазовой плоскости (x, y) при $x < J$ устойчивую инвариантную кривую W_1^s. А при $x > J$ семейство одномерных хаотических аттракторов образует переходное хаотическое множество. Допустим, что в начальный момент времени траектория стартует в окрестности кривой W_1^s. Переменная y медленно убывает вдоль этой кривой, а переменная x поддерживается в квазиравновесном состоянии в соответствии с уравнениями

$$\bar{y} = y + \varepsilon(x - J), \quad y = F(x). \tag{4}$$

Данная фаза образует медленный регулярный участок двумерного хаотического аттрактора, соответствующий пассивной фазе спайк-бёрстовых колебаний.

В окрестности значения y, при котором устойчивая W_1^s и неустойчивая W_1^u кривые сливаются, траектория покидает слой медленных движений и попадает в область притяжения переходного хаотического множества. Поскольку теперь мы находимся в той части плоскости, где $x > J$, то переменная y начинает медленно расти. Итерируя отображение (1а) численно, можно обнаружить, что хаотические колебания продолжают существовать в системе (1) и после значения $y^0 = y^0_{\text{кр}}$, соответствующего кризису хаотического аттрактора в статическом случае $\varepsilon = 0$ (рис. 5). Следовательно, имеет место эффект задержки исчезновения хаотических колебаний[1]. Данная фаза движений образует быстрый хаотический участок аттрактора, который соответствует активной фазе или фазе деполяризации спайк-бёрстовых колебаний.

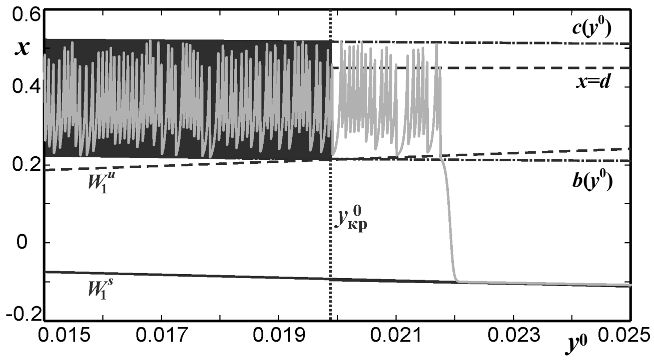


Рис. 5. Траектории на плоскости в стационарном случае (показаны чёрным цветом) и одна типичная траектория в динамическом случае, когда переменная y медленно растёт во времени (серый цвет)

Подробнее остановимся на эффекте задержки исчезновения хаотических колебаний.

Рассмотрим ансамбль траекторий с различными начальными условиями при $y < y^0_{\text{кр}}$, заключенными в пределах инвариантного интервала, границы которого определяются значениями $b(y^0)$ и $c(y^0)$ (см. рис. 5). Изучим закономерности выхода траекторий из области хаотических движений при

[1]Обратим внимание на то, что в теории динамических бифуркаций [12], т. е. бифуркаций, происходящих при медленном «дрейфе» контрольных параметров, эффект задержки потери устойчивости в настоящее время изучен лишь для случая регулярных аттракторов состояний равновесия и предельных циклов.

медленном увеличении y. При $y > y^0_{кр}$ критерием выхода из хаотической области является попадание траектории в область ниже кривой $W_1{}^u$ (см. рис. 5). Поскольку для траекторий хаотических аттракторов характерна высокая чувствительность к начальным условиям, то выход траекторий из области хаотических колебаний происходит при различных значениях $y_{задерж}$ медленной переменной y. Время задержки $T_{задерж}$ исчезновения хаотических колебаний также, очевидно, зависит от начальных условий.

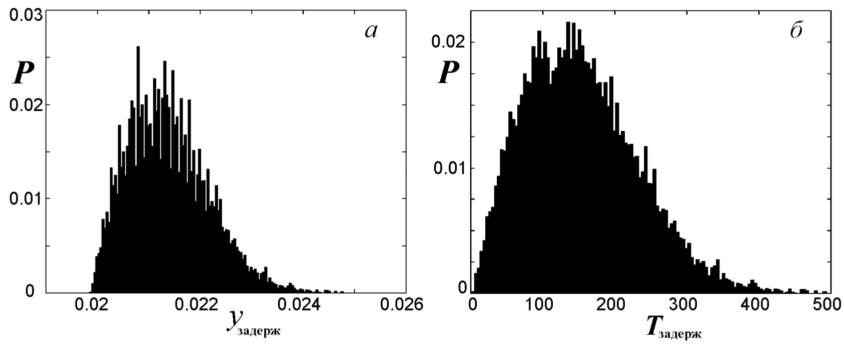


Рис. 6. Гистограммы координаты выхода из хаотической области (*а*) и времени задержки в ней (*б*). Параметр $\varepsilon = 10^{-5}$, критическое значение $y^0_{кр} \approx 0{,}02$

На рис. 6 представлены гистограммы распределения координат таких точек выхода и времён задержки для $N = 2{,}5 \cdot 10^5$ начальных условий. Время задержки отсчитывается от момента пересечения траекториями значения $y = y^0_{кр}$. Гистограммы показывают, что эти величины распределены случайным образом, однако существуют их наиболее вероятные значения (отличное от $y^0_{кр}$ для $y_{задерж}$ и отличное от нуля для $T_{задерж}$). Кроме того, время задержки можно характеризовать законом убывания числа изображающих точек из области хаотических колебаний.

На рис. 7 представлена зависимость логарифма этого числа от времени, имеющая квадратичный вид. Отметим, что для большинства переходных хаотических множеств, описанных в литературе [11], логарифм числа остающихся в области хаоса траекторий (или аналогичная характеристика — логарифм вероятности выживания траекторий) убывает во времени по линейному закону. При таком законе убывания наиболее вероятным является нулевое значение для времени задержки в хаотической области. Иными словами, для этих множеств нет такого явления, как задержка исчезновения хаотических колебаний. Напротив, в системе (1) наличие этого эффекта определяет флуктуации длительности активных фаз спайк-бёрстовых колебаний (см. рис. 3, *г*) около некоторого среднего значения, зависящего от среднего времени задержки.

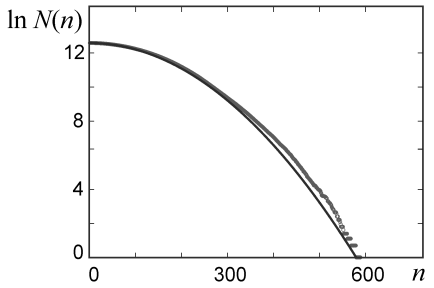


Рис. 7. Логарифм числа траекторий, остающихся в хаотическом множестве, как функция времени при изменении медленной переменной с постоянной скоростью $\varepsilon = 10^{-5}$. Отсчёт времени $n = 0$ начинается от значения $y = y^0_{\text{кр}}$. Зависимость достаточно хорошо описывается кривой $\ln N(n) = \ln N_0 - \kappa n^2$

2. Динамика оливо-мозжечковой системы

Одной из важных форм коллективной электрической активности нейронных сетей является образование колебательных структур (паттернов) — групп нейронов, синхронно генерирующих потенциалы действия на фоне относительного покоя нейронов вне группы. Такие формы активности были обнаружены экспериментально в различных нейронных структурах, в том числе в зрительной [13] и соматосенсорной [14] коре, в височной доле [15], в нижних оливах [16] и др. Однако, несмотря на значительный прогресс и успехи в современных экспериментальных нейрофизиологических исследованиях нейронных систем, достигнутые с их помощью результаты всё-таки остаются ограниченными. Они пока ещё не позволяют достаточно полно понять работу крупномасштабных нейронных сетей и цепей, требующих одновременной регистрации активности очень большого числа нейронов, которые часто принадлежат различным структурным единицам.

В частности, во многих случаях остаются неясными механизмы возникновения и разрушения паттернов электрической активности в больших нейронных системах, состоящих из нескольких взаимодействующих структурных единиц, т. е. подсистем нейронов, каждая из которых образована клетками определённого типа. Одним из возможных путей выявления таких механизмов может быть моделирование. Здесь представим результаты моделирования оливо-мозжечковой системы — специального отдела мозга, имеющегося у всех позвоночных. Большое число экспериментальных данных свидетельствует о её важной роли в осуществлении моторной функции организма, т. е. контроле двигательных систем, адаптации движения в изменяющихся внешних условиях, моторном обучении [17, 18]. Нейроны оливо-мозжечковой системы объединены в высокоупорядоченные группы, каждая из которых играет свою функциональную роль. Исключительная важность этой системы обуславливает её изучение исследователями различных направлений [18—27] и стимулирует моделирование её свойств для создания искусственных нейроподобных структур, имитирующих возможности реальной оливо-мозжечковой системы.

В наших исследованиях используется концепция работы оливо-мозжечковой системы, предложенная (см., в частности, [24]) американским нейрофизиологом Р. Ллинасом из медицинской школы Нью-Йоркского университета. В ней определяющая роль отводится процессам формирования и разрушения кластерных состояний электрической активности входящих в эту систему нейронных сетей.

Заметим, что в более ранних работах [28—31] используются непрерывные модели структурных единиц оливо-мозжечковой системы, с разной степенью полноты использующие формализм Ходжкина — Хаксли. В настоящей работе описана структура и динамика дискретной модели оливо-мозжечковой системы. Важно отметить, что в нашей модели все входящие в оливо-мозжечковую систему нейроны, несмотря на их различные функциональные свойства, описаны с помощью одной и той же системы нелинейных точечных отображений с различным набором параметров.

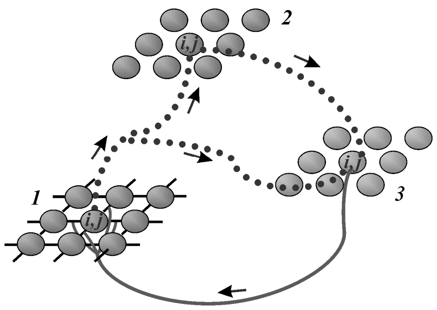


Рис. 8. Структура дискретной модели оливо-мозжечковой системы

Наша модель оливо-мозжечковой системы состоит из трёх слоёв (рис. 8). Первый — это слой нейронов нижних олив (IO, inferior olives), который далее будем называть основным, поскольку его динамика является выходной в нашей модели. Второй слой состоит из клеток Пуркинье (PC, Purkinje cells), третий — из нейронов ядер мозжечка (CN, cerebellar nuclei). Соседние элементы основного слоя связаны друг с другом через электрические синапсы, обладающие свойством пластичности. От каждого нейрона нижних олив с индексами i, j отходит аксон (так называемое лазающее волокно), разветвляющийся надвое. Обе аксональные ветви (коллатерали) оканчиваются возбуждающими синапсами: одна на нейроне Пуркинье с номером (i, j), другая — на нейроне ядра (i, j). Каждая клетка Пуркинье (i, j) имеет аксон, оканчивающийся тормозным синапсом на соответствующем нейроне ядра с индексами i, j. Таким образом, каждый нейрон ядра принимает сигналы различных типов через свои синаптические входы: с нейрона нижних олив — возбуждающие, а с клетки Пуркинье — тормозящие. В свою очередь, от каждого нейрона ядра (i, j) отходит аксон с ингибиторными синаптическими окончаниями, подавляющими электрические связи соответствующего нейрона нижних олив (i, j) с соседними элементами основного слоя, т. е. с нейронами с номерами $(i - 1, j)$, $(i + 1, j)$, $(i, j - 1)$ и $(i, j + 1)$.

Полная система отображений, описывающая динамику модели, выглядит следующим образом:

$$\bar{x}_i^{IO} = x_i^{IO} + F(x_i^{IO}) - 0{,}9H(x_i^{IO} - 0{,}85) - y_i^{IO} + I_i^{IO},\ i = 1 \ldots N^2, \quad (5)$$

$$\bar{y}_i^{IO} = y_i^{IO} + 0{,}005(x_i^{IO} - 0{,}049),\ i = 1 \ldots N^2, \quad (6)$$

$$I_i^{IO} = \sum_{j=1}^{m} g_{i,j}^{IO}(x_j^{IO} - x_i^{IO}),\ i = 1 \ldots N^2, m = 4, \quad (7)$$

$$\bar{g}_{i,j}^{IO} = \gamma g_{i,j}^{IO} + \delta\left[1 - H(v_i + v_j - v_{thresh})\right],\ i, j = 1 \ldots N^2, \quad (8)$$

$$v_i = x_i^F, \text{ последний элемент } CN\text{-аксона}, \quad (9)$$

$$\bar{x}_i^F = x_i^F + F(x_i^F) - y_i^F + I_i^F,\ i = 1 \ldots 7N^2, \quad (10)$$

$$\bar{y}_i^F = y_i^F + 0{,}011(x_i^{IO} - 0{,}04),\ i = 1 \ldots 7N^2, \quad (11)$$

$$I_i^F = 0{,}15 \sum_{j=1}^{m} (x_j^F - x_i^F),\ i = 1 \ldots 7N^2, m = 1, 2 \text{ или } 3, \quad (12)$$

$$\bar{x}_i^{PC} = x_i^{PC} + F(x_i^{PC}) - 0{,}5H(x - 0{,}6) - y_i^{PC} + I_i^{PC},\ i = 1 \ldots N^2, \quad (13)$$

$$\bar{y}_i^{PC} = y_i^{PC} + 0{,}001(x_i^{PC} - 0{,}045),\ i = 1 \ldots N^2, \quad (14)$$

$$I_i^{PC} = -0{,}3H(x_i^{PC,pre} - 0{,}48)(x_i^{PC} + 0{,}6),\ i = 1 \ldots N^2, \quad (15)$$

$$x_i^{PC,pre} = x_i^F, \text{ последний элемент } IO\text{-аксона}, \quad (16)$$

$$\bar{x}_i^F = x_i^F + F(x_i^F) - y_i^F + I_i^F,\ i = 1 \ldots 15N^2, \quad (17)$$

$$\bar{y}_i^F = y_i^F + 0{,}011(x_i^{IO} - 0{,}04),\ i = 1 \ldots 15N^2, \quad (18)$$

$$I_i^F = 0{,}15 \sum_{j=1}^{m} (x_j^F - x_i^F),\ i = 1 \ldots 15N^2, m = 1 \text{ или } 2, \quad (19)$$

$$\bar{x}_i^{CN} = x_i^{CN} + F(x_i^{CN}) - 0{,}6H(x_i^{CN} - 0{,}6) - y_i^{CN} + I_i^{exc} + I_i^{inh}, i = 1 \ldots N^2, \quad (20)$$

$$I_i^{exc} = -0{,}2H(x_1 - 0{,}3)(x_i^{CN} - 0{,}6), i = 1 \ldots N^2, \quad (21)$$

$$I_i^{inh} = -0{,}2H(x_2 - 0{,}7)(x_i^{CN} + 0{,}2),\ i = 1 \ldots N^2, \quad (22)$$

$x_1 = x_i^F$, последний элемент IO-аксона, (23)

$x_2 = x_i^F$, последний элемент PC-аксона, (24)

$$\bar{x}_i^F = x_i^F + F(x_i^F) - y_i^F,\ i = 1 \ldots N^2, \quad (25)$$

$$\bar{y}_i^F = y_i^F + 0{,}011(x_i^{IO} - 0{,}04),\ i = 1 \ldots N^2, \quad (26)$$

где отображения (5)—(9) относятся к динамике слоя нейронов нижних олив, (10)—(12) — к аксонам нейронов нижних олив, (13)—(16) — к слою клеток Пуркинье, (17)—(19) — к аксонам клеток Пуркинье, (20)—(24) — к слою нейронов глубоких ядер, (25), (26) — к их аксонам. Остановимся подробнее на различных отделах системы.

2.1. Нейроны нижних олив

Нейроны нижних олив обладают рядом исключительных динамических свойств [24—27]. Во-первых, в состоянии покоя мембранный потенциал этих клеток находится в режиме так называемых подпороговых колебаний. Это квазисинусоидальные колебания с малой амплитудой и частотой порядка 10 Гц. По достижении мембранным потенциалом клетки некоторого порогового значения на пике этих колебаний генерируется потенциал действия — спайк. Во-вторых, нейроны нижних олив взаимодействуют друг с другом посредством электрических синапсов, т. е. щелевых контактов, причём сила этого взаимодействия динамически меняется с помощью особого механизма — гломерула (от лат. glomerulus — клубочек). Работа электрического синапса управляется активностью нейронов глубоких ядер.

Одно из ключевых свойств нейронов нижних олив, которое воспроизводится в модели (1), — способность к переходу из режима подпороговых колебаний в режим генерации спайков на пиках таких колебаний при изменении синаптического тока $I_{\text{син}}$ (рис. 9).

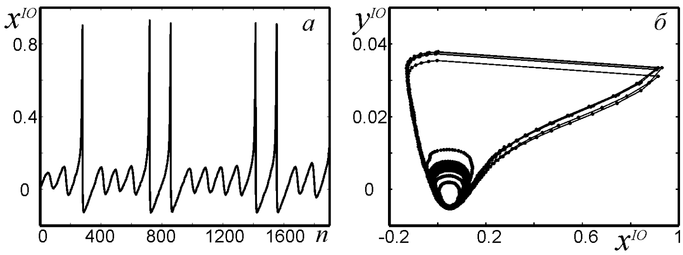


Рис. 9. Осциллограмма (*а*) и соответствующий фазовый портрет (*б*) системы (1) при воздействии переменного синаптического тока для $J^{IO} = 0{,}049$, $\varepsilon = 0{,}005$

2.2. Нейроны Пуркинье и глубоких ядер мозжечка

В соответствии со схемой оливо-мозжечковой системы (см. рис. 8) нейроны Пуркинье и нейроны глубоких ядер мозжечка — элементы второго и третьего слоёв соответственно. При моделировании этих клеток мы учли их ключевые свойства, которые вносят основной вклад в работу оливо-мозжечковой системы. В модели клетки Пуркинье (13), (14) учтено свойство генерации так называемого комплексного спайка при возбуждении лазающим волокном (рис. 10, *а*). Другими словами, элемент второго слоя — это система, находящаяся в возбудимом режиме, которая генерирует залп (бёрст) спайков при возбуждении.

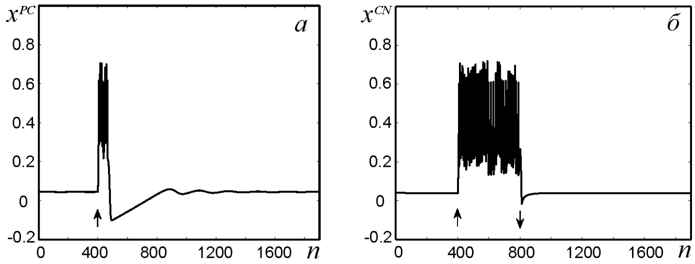


Рис. 10. Динамические свойства модельных нейронов Пуркинье (*а*) и глубоких ядер мозжечка (*б*)

В модели нейрона глубоких ядер отражено следующее его свойство. Он переходит в активное спайковое состояние при возбуждении через синаптическое окончание соответствующей коллатерали аксона нейрона нижних олив и возвращается в состояние покоя при ингибировании синаптического окончания аксона клетки Пуркинье (рис. 10, *б*). Иными словами, элемент третьего слоя — это бистабильная система, имеющая два состояния. Для качественного воспроизведения этих свойств оказывается достаточным одномерное отображение (20) для переменной x^{CN}, характеризующей мембранный потенциал клетки.

2.3. Аксоны

Аксоны, или нервные волокна, представлены в модели в виде цепочек элементов, связанных с ближайшими соседями электрически. Каждый из элементов находится в возбудимом режиме, генерируя потенциал действия при возбуждении. Последовательное возбуждение соседних элементов цепочки моделирует распространение импульса по нервному волокну. Заметим, что такая модель не только применима для описания динамики линейных волокон, но и, как в случае нашей модели, способна воспроизводить процессы распространения импульса через ветвящиеся аксоны (см., например, [32]). Система отображений, описывающая каждый такой элемент, указана выше под номерами (10), (11), (17), (18), (25), (26).

Синаптический ток суммируется по ближайшим соседним элементам цепочки, число которых может быть равно единице (на конце волокна), двум (в середине волокна) и трём (в точке ветвления). Это слагаемое описывает электрическое взаимодействие, сила которого характеризуется параметром c. Стоит отметить, что представление нервного волокна в виде цепочки дискретных элементов не является лишь удобной для анализа математической абстракцией. Многие типы нервных волокон, в частности миелинизированные аксоны, в том числе и в оливо-мозжечковой системе, в действительности состоят из отдельных блоков, разделённых так называемыми перехватами Ранвье.

2.4. Динамическая связь между нейронами нижних олив

Взаимодействие между нейронами нижних олив, как было указано выше, осуществляется через щелевые контакты — электрические синапсы. Сила этой связи управляется ГАМК-эргическими (ГАМК — гамма-аминомасляная кислота) синапсами аксонов клеток глубоких ядер, т. е. электрические синапсы пластичны. Этот контроль является ингибиторным: в отсутствие управляющих импульсов сила связи равна некоторому положительному значению, что приводит к синхронизации подпороговых колебаний взаимодействующих нейронов нижних олив; при поступлении сигнала, напротив, происходит подавление связи и электрическая связь между нейронами разрывается. Уравнения, определяющие динамическую связь между двумя нейронами нижних олив, которая управляется сигналами, поступающими по аксонам нейронов ядер, приведены выше под номерами (7)—(9).

2.5. Качественное описание динамики модели

Пусть в некоторый момент времени мембранный потенциал на одном из нейронов нижних олив достиг порогового значения. В результате этого происходит возбуждение потенциала действия в аксоне нейрона. Распространяясь по обоим ответвлениям лазающего волокна, этот спайк порождает активность в клетках Пуркинье и ядрах мозжечка, т. е. в соответствующих элементах второго и третьего слоёв. В нейроне Пуркинье генерируется короткая серия быстрых спайков, т. е. комплексный спайк, в нейроне ядра мозжечка возбуждается длительная последовательность потенциалов действия. Комплексный спайк в клетке Пуркинье вызывает распространение тормозящего потенциала действия по аксону к нейрону ядра. Длительная серия спайков в последнем прерывается при ингибировании пришедшим с нейрона Пуркинье потенциалом действия. Залп спайков, переданный по аксону нейрона ядра к синаптическим связям соответствующего нейрона нижних олив, приводит к подавлению последних. Таким образом, в течение времени, равного длительности сгенерированного в нейроне ядра залпа спайков, происходит разрыв синаптических связей нейрона нижних олив с соседними элементами основного слоя.

2.6. Спонтанные структуры активности в оливо-мозжечковой системе

Процесс образования кластеров в слое нейронов нижних олив исследуемой модели управляется, в первую очередь, максимальной силой связи g_{max} между ними. Физиологическим прототипом этого параметра служит уровень ГАМК-эргического блокатора электрической связи между нейронами нижних олив, выделение которого управляется ингибиторными синапсами аксонов нейронов глубоких ядер. Более высокая степень подавления связей соответствует меньшему значению параметра g_{max}, и наоборот. Другой важный параметр — это длительность разрыва синаптических связей между нейронами нижних олив. В нашей модели будем изменять это характерное время, меняя длину аксонов клеток Пуркинье, оканчивающихся на нейронах ядер. Время распространения потенциала действия по ним, как было показано выше, зависит от их длины. Чем быстрее потенциал действия дойдёт до нейрона ядра, тем раньше произойдёт подавление активности последнего и тем короче будет фаза деполяризации его колебаний. Следовательно, разрыв электрической связи соответствующего нейрона нижних олив с соседними нейронами основного слоя будет происходить в течение меньшего времени.

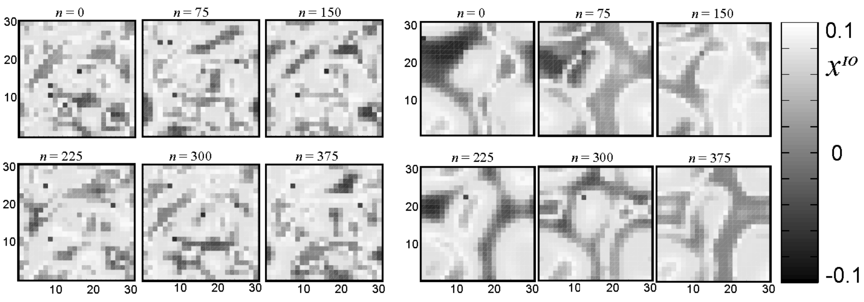


Рис. 11. Динамика кластеров активности в слое нейронов нижних олив с размером 30×30 элементов в случае наличия электрического взаимодействия между соседними элементами и петли обратной связи. Максимальное значение связи g_{max} = = 0,005 (*а*) и 0,02 (*б*)

На рис. 11 представлены мгновенные снимки кластеров активности в ансамбле нейронов нижних олив для случая, когда связь между элементами слоя управляется динамически через петлю обратной связи. Кластеры соответствуют конфигурации модельной системы, характеризуемой длиной аксонов клеток Пуркинье, равной 15 элементам, и максимальной силой связи между нейронами нижних олив g_{max} = 0,005 и g_{max} = 0,02. Даже из визуального сравнения видно, что при малом значении g_{max} размеры кластеров также малы (рис. 11, *а*), а их пространственное расположение изменяется в течение времени порядка периода колебаний. В случае большего значения максимальной силы связи между элементами размер кластеров в среднем увеличивается и их пространственное положение остаётся постоянным в продолжение нескольких периодов колебаний. Указанная качественная зависимость подтверждается, как будет показано ниже, количественными характеристиками.

2.7. Оценка степени пространственной организации

Для количественного описания коллективной активности нейронов нижних олив мы применили теорию марковских случайных полей [16]. Этот метод, изначально развитый для характеристики пространственной организации двумерных матриц, используется при анализе экспериментальных данных, полученных при оптической визуализации срезов мозга и мультиэлектродном измерении нейронной активности. В нашем случае он применяется для анализа полученных в рамках рассматриваемой модели численных данных.

Введём параметр Маркова, который для двумерной квадратной решётки элементов определяется следующим образом. Обозначим через $x_{i,j}$ значения мембранных потенциалов нейронов, расположенных в узлах решётки с номерами (i, j). Тогда для оценки степени кластеризации этого слоя вычисляется параметр

$$\eta = \frac{\sum\limits_{i,j\in\Omega} x_{i,j} y_{i,j} - \left(\sum\limits_{i,j\in\Omega} x_{i,j}\right)\left(\sum\limits_{i,j\in\Omega} y_{i,j}\right)\Big/ m}{\sum\limits_{i,j\in\Omega} y_{i,j}^2 - \left(\sum\limits_{i,j\in\Omega} y_{i,j}\right)^2\Big/ m}, \tag{27}$$

где $y_{i,j} = x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1}$. Здесь через Ω обозначена одна из двух подрешёток, образующих исходную решётку, элементы которых распределены относительно друг друга, как белые и чёрные клетки шахматной доски, m — число элементов в Ω. Окончательное значение η получается после взятия среднего арифметического значения этого параметра по обеим подрешёткам.

Количественный смысл величины η состоит в следующем. Чем более отличается от нуля абсолютное значение η, тем выше уровень пространственной организации слоя. Это означает, что если значения потенциалов элементов распределены случайно, то величина η стремится к нулю. Противоположный случай имеет место, когда значения потенциалов равны для всех элементов, т. е. все элементы решётки образуют один кластер. Тогда величина η принимает своё максимальное значение. Чем больше параметр η отличается от нуля, тем крупнее характерный размер кластеров в решётке.

На рис. 12 приведены зависимости от времени параметра Маркова η и соответствующие гистограммы вероятности его распределения для двух значений параметра связи $g_{\max}$. Представленные результаты показывают, что при малых значениях $g_{\max}$ величина η изменяется в относительно широких пределах, но абсолютные значения η близки к нулю (рис. 12, *а*, *б*). С ростом параметра связи $g_{\max}$ повышается среднее значение η, а дисперсия значений η уменьшается (рис. 12, *в*, *г*).

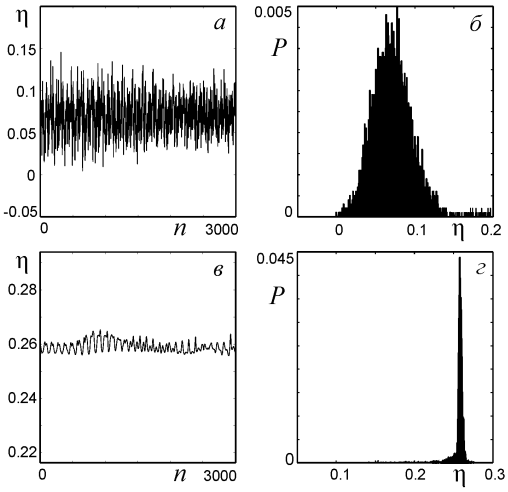


Рис. 12. Параметр Маркова η для элементов слоя нейронов нижних олив как функция времени (*а*, *в*), а также гистограммы вероятности распределения параметра η (*б*, *г*). Максимальная сила связи $g_{\max}$ равна 10^{-3} (*а*, *б*) и 10^{-2} (*в*, *г*)

Этот результат вполне согласуется с экспериментальными измерениями параметра Маркова при различном уровне блокирования электрической связи между нейронами нижних олив. При слабой связи между нейронами слой разбивается на множество кластеров малого размера, и картина такого разбиения со временем значительно меняется. С усилением связи размеры кластеров увеличиваются, и пространственная конфигурация синхронной активности слоя с течением времени не исчезает.

2.8. Вынужденные шаблоны активности

Для моторного управления оливо-мозжечковая система не просто генерирует и сохраняет во времени пространственно-временные структуры (паттерны) — шаблоны активности, а изменяет их в зависимости от входных сигналов. В соответствии с этими сигналами образуются подгруппы нейронов нижних олив с синхронными и сдвинутыми по фазе колебаниями, и в течение нескольких периодов колебаний эта пространственная структура сохраняется. При поступлении нового шаблона колебания нейронов нижних олив изменяют свою фазу в соответствии с ним. Такое поведение системы лежит в основе управления двигательной функцией организма [24].

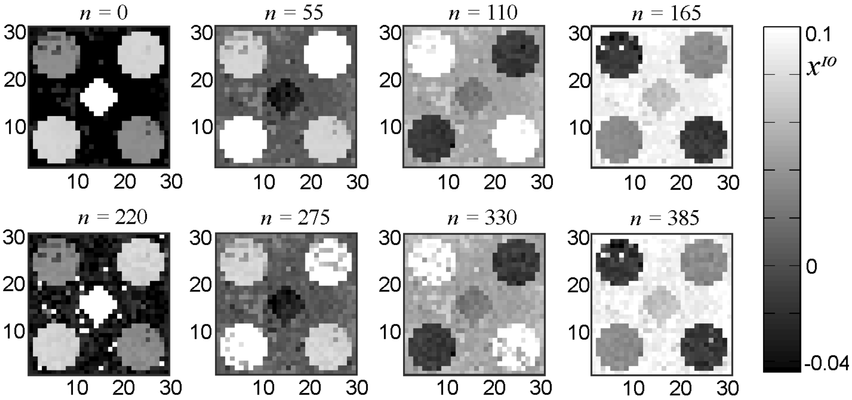


Рис. 13. Динамика вынужденного шаблона активности в слое нейронов нижних олив с размером 30 × 30 элементов. Обратная связь активирована, максимальная сила электрической связи $g_{\max} = 0{,}02$, длина аксонов клеток Пуркинье равна 18 элементам

На рис. 13 представлена динамика кластеров активности в слое нейронов нижних олив. Начальные значения переменных x^{IO} выбраны случайно. Затем на слой подаётся внешний стимул в виде пространственно-временного шаблона активности, для примера взятого в виде пяти кластеров в форме кругов. Стимулы, действующие на элементы всех кластеров, одинаковы по амплитуде и длительности. Отличие состоит в том, что на различные кластеры стимуляция действует в различные моменты времени, создавая тем самым фазовый сдвиг колебательной активности между кластерами шаблона. В силу того, что генерация спайков происходит на пиках подпороговых колебаний, фазовый сдвиг подпороговых колебаний однозначно соответствует фазовому сдвигу потенциалов действия, передаваемых в лазающее волокно и далее в глубокие ядра и кору мозжечка.

Заключение

Таким образом, модели нейронной активности в форме точечных отображений являются эффективным инструментом изучения динамики как отдельных нейронов, так и сложных нейронных цепей.

Мы показали, что оставаясь в рамках одного и того же двумерного отображения (1) и выбирая лишь подходящим образом значения его параметров, можно получить широкий набор различных режимов нейронной активности: от простейшего возбудимого до хаотических спайк-бёрстовых колебаний. Благодаря этой универсальности мы смогли построить модель очень сложной нейронной структуры — оливо-мозжечковой системы, используя один и тот же базовый элемент — отображение (1). В нашей дискретной модели оливо-мозжечковой системы три слоя нейронов взаимодействуют между собой через аксональные связи, причём распространение нервных импульсов по аксонам моделируется с цепочек возбудимых элементов. Изучены динамические свойства отдельных элементов системы, найдены параметры, отвечающие динамике, адекватной биологическим прототипам. Предложена модель динамической связи между нейронами нижних олив и изучены процессы образования структур (паттернов) в образованном ими слое. Установлена взаимосвязь размеров спонтанных паттернов синхронной активности со значением максимального коэффициента электрической связи. Показана возможность формирования в системе вынужденных шаблонов активности определённой конфигурации и их переустановки внешним стимулом. Последнее свойство лежит в основе нейронных систем контроля моторной функции.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 годы (гранты 14.132.21.1354, 8497, 8205) и РФФИ (гранты 12-02-31252, 12-02-00526, 12-02-31825, 12-04-31963).

Литература

1. *Courbage, M.* Map based models in neurodynamics / M. Courbage, V. I. Nekorkin // Int. J. Bifurcation and Chaos. — 2010. — V. 20. — P. 1631.

2. *Ibarz, B.* Map-based models in neuronal dynamics / B. Ibarz, J. M. Casado, M. A. F. Sanjuán // Phys. Reports. — 2011. — V. 501. — P. 1.

3. *Chialvo, D. R.* Generic excitable dynamics on a two-dimensional map / D. R. Chialvo // Chaos Solit. Fract. — 1995. — V. 5. — P. 461.

4. *Rulkov, N. F.* Modeling of Spiking-Bursting Neural Behavior Using Two-Dimensional Map / N. F. Rulkov // Phys. Rev. E. — 2002. — V. 65. — Art. № 041922.

5. *Shilnikov, A. L.* Subthreshold oscillations in a map-based neuron model / A. L. Shilnikov, N. F. Rulkov // Phys. Lett. A. — 2004. — V. 328. — P. 177—184.

6. *Некоркин, В. И.* Дискретная модель нейронной активности / В. И. Некоркин, Л. В. Вдовин // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2007. — Т. 15, № 5. — С. 36.

7. *Courbage, M.* Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity / M. Courbage, V. I. Nekorkin, L. V. Vdovin // Chaos. — 2007. — V. 17. — Art. № 043109.

8. *Courbage, M.* Synchronization in time-discrete model of two electrically coupled spike-bursting neurons / M. Courbage, O. V. Maslennikov and V. I. Nekorkin // Chaos Solit. Fract. — 2012. — V. 45, is. 5. — P. 645—659.

9. *Некоркин, В. И.* Спайк-бёрстовая синхронизация в ансамбле электрически связанных дискретных модельных нейронов / В. И. Некоркин, О. В. Масленников // Изв. вузов. Радиофизика. — 2011. — Т. 54, № 1. — С. 60—80.

10. *Масленников, О. В.* Дискретная модель оливо-мозжечковой системы: структура и динамика / О. В. Масленников, В. И. Некоркин // Изв. вузов. Радиофизика. — 2012. — Т. 55, № 3. — С. 219—236.

11. *Lai, Y.-C.* Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite Time Scales / Y.-C. Lai, T. Tél. — Berlin : Springer, 2011. — (Applied Mathematical Sciences).

12. *Benoît, E. (Ed.).* Dynamic Bifurcations / ed. E. Benoît. — Berlin : Springer, 1991. — 219 p. — (Lect. Notes in Math.; v. 1493).

13. *König, P.* Relation between oscillatory activity and long-range synchronization in cat visual cortex / P. König, A. K. Engel, W. Singer // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1995. — V. 92, № 1. — P. 290.

14. *Yang, J.-W.* Three Patterns of Oscillatory Activity Differentially Synchronize Developing Neocortical Networks In Vivo / J.-W. Yang, I. L. Hanganu-Opatz, J.-J. Sun, H. J. Luhmann // J. Neuroscience. — 2009. — V. 29, № 28. — P. 9011.

15. *Manning, J. R.* Oscillatory patterns in temporal lobe reveal context reinstatement during memory search / J. R. Manning, S. M. Polyn, G. H. Baltuch et al. // PNAS. — 2011. — V. 108, № 31. — P. 12893.

16. *Leznik, E.* Electrotonically Mediated Oscillatory Patterns in Neuronal Ensembles: An In Vitro Voltage-Dependent Dye-Imaging Study in the Inferior Olive / E. Leznik, V. Makarenko, R. Llinas // J. Neuroscience. — 2002. — V. 22, № 7. — P. 2804.

17. *Kandel, E. R.* Principles of Neural Science / E. R. Kandel, J. H. Schwartz, T. M. Jessel. — New York : McGraw-Hill, 2000.

18. *Николлс, Дж.* От нейрона к мозгу / Дж. Николлс, Р. Мартин, Б. Валлас, П. Фукс. — М. : УРСС, 2003. — 672 с.

19. *Marr, D.* A theory of cerebellar cortex / D. Marr // J. Physiol. — 1969. — V. 202. — P. 437.

20. *Albus, J. S.* A Theory of Cerebellar Function / J. S. Albus // Math. Sciences. — 1971. — V. 10. — P. 25.

21. *Llinas, R.* Electrotonic coupling between neurons in cat inferior olive / R. Llinas, R. Baker, C. Sotelo // J. Neurophysiol. — 1974. — V. 37. — P. 560.

22. *Llinas, R.* Electrophysiology of mammalian inferior olivary neurones in vitro. Different types of voltage-dependent ionic conductances / R. Llinas, Y. Yarom // J. Physiol. — 1981. — V. 315. — P. 549.

23. *Sotelo, C.* Structural study of inferior olivary nucleus of the cat: morphological correlates of electrotonic coupling / C. Sotelo, R. Llinas, R. Baker // J. Neurophysiol. — 1974. — V. 37. — P. 541.

24. *Llinas, R.* The cerebellum, LTD, and memory: alternative views / R. Llinas, E. J. Lang, J. P. Welsh // Learn. Mem. — 1997. — V. 3. — P. 445.

25. *Jacobson, G. A.* Invariant phase structure of olivo-cerebellar oscillations may underlie cerebellar pattern generation / G. A. Jacobson, I. Lev, Y. Yarom, D. Cohen // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 2009. — V. 106, № 9. — P. 3579.

26. *Jacobson, G. A.* A model of the olivo-cerebellar system as a temporal pattern generator / G. A. Jacobson, D. Rokni, Y. Yarom // Trends in Neurosciences. — V. 31, № 12. — P. 617.

27. *Devor, A.* Generation and Propagation of Subthreshold Waves in a Network of Inferior Olivary Neurons / A. Devor, Y. Yarom // J. Neurophysiol. — 2002. — V. 87. — P. 3 059.

28. *Velarde, M. G.* Clustering behavior in a three-layer system mimicking olivo-cerebellar dynamics / M. G. Velarde, V. I. Nekorkin, V. A. Makarov et al. // Neural Networks. — 2004. — V. 17. — P. 191.

29. *Kazantsev, V. B.* Olivo-cerebellar cluster-based universal control system / V. B. Kazantsev, V. I. Nekorkin, V. I. Makarenko, R. Llinas // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 2003. — V. 100. — P. 13064.

30. *Kazantsev, V. B.* Self-referential phase reset based on inferior olive oscillator dynamics / V. B. Kazantsev, V. I. Nekorkin, V. I. Makarenko, R. Llinas // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 2004. — V. 101, № 52. — P. 18183.

31. *Katori, Y.* Quantitative modeling of spatio-temporal dynamics of inferior olive neurons with simple conductance-based model / Y. Katori, E. J. Lang, M. Onizuka et al. // Int. J. Bifurcation and Chaos. — 2010. — V. 20, № 3. — P. 583.

32. *Yanagita, T.* Input-output relation of FitzHugh-Nagumo elements arranged in a trifurcated structure / T. Yanagita // Phys. Rev. E. — 2007. — V. 76. — Art. № 056215.

ФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ХАОТИЧЕСКИМИ АТТРАКТОРАМИ

С. П. Кузнецов

Введение

Однородно гиперболические хаотические аттракторы начали рассматриваться в рамках так называемой гиперболической теории, связанной с именами Д. В. Аносова, В. М. Алексеева, С. Смейла, Р. Ф. Вильямса, Я. Г. Синая, Д. Рюэля и других, в 60—70-х годах XX века [1—4]. В то время ожидалось, что такие аттракторы могут быть пригодны для описания многих ситуаций, где приходится иметь дело с хаосом, например гидродинамической турбулентности [5]. Однако по мере появления конкретных примеров систем с хаотической динамикой стало ясно, что рамки ранней гиперболической теории слишком узки, и гиперболические аттракторы стали считаться лишь рафинированным образом хаоса, не имеющим отношения к реальным системам. Математики направили усилия на разработку обобщений для более широких классов систем (квазигиперболические, частично гиперболические и неоднородно гиперболические аттракторы, квазиаттракторы). Забытым и мало исследованным остался вопрос: можно ли найти или сконструировать физические системы с однородно гиперболическими аттракторами?

Одно из главных свойств этих аттракторов — структурная устойчивость, или грубость, т. е. нечувствительность динамики к вариации функций и параметров в уравнениях. В теории колебаний, начиная с работ А. А. Андронова и его школы [6, 7], грубые системы принято считать подлежащими первоочередному исследованию и наиболее важными для практики, в силу нечувствительности к вариации параметров и характеристик, техническим погрешностям, помехам и шумам. По идее, то же самое должно относиться к системам со структурно устойчивым гиперболическим хаосом, и отсутствие физических примеров в этой связи кажется непонятным и неприемлемым. В последнее время это несоответствие отчасти преодолено: физически реализуемые системы с гиперболическими аттракторами предложены и исследованы в работах [8, 9]. О некоторых из них рассказано в данной статье.

1. Интерпретация динамики в терминах фазовой жидкости и примеры гиперболических аттракторов

Напомним, что под динамической системой понимают объект, состояние которого, заданное в любой момент времени точкой в пространстве состояний (фазовом пространстве), получается из начального состояния по установленному для этой системы правилу.

Для интерпретации динамики в терминах фазовой жидкости берется ансамбль одинаковых систем с разными начальными условиями, представленный в пространстве состояний облаком изображающих точек, трансформирующимся с течением времени вследствие перемещения этих точек согласно динамическим уравнениям. В диссипативных системах объем облака убывает и оно оседает на аттрактор.

Хаос реализуется в ситуации, когда имеют место многократно повторяющиеся преобразования растяжения, изгибания и сплющивания облака изображающих точек.

При таких преобразованиях чаще всего не обеспечивается однородного, хотя бы приблизительно, распределения фазовой жидкости вдоль слоев, возникающего в пространстве состояний объекта. Этому мешает тенденция к концентрации субстанции в местах складок с появлением особенностей в распределении плотности. Причина в том, что в определенных местах направление сжатия совпадает с касательной на краю складываемого образования и сплющивание приводит к локально повышенной плотности. В диссипативных системах такие ситуации могут ассоциироваться с негиперболическим хаосом, как в отображении Эно, или с оседанием облака на регулярные аттракторы — притягивающие точки или циклы.

Гиперболический хаос отвечает тому, что трансформация облака изображающих точек, включающая продольное растяжение и поперечное сжатие, осуществляется совершенным образом, без нарушения непрерывности и без формирования локальных уплотнений.

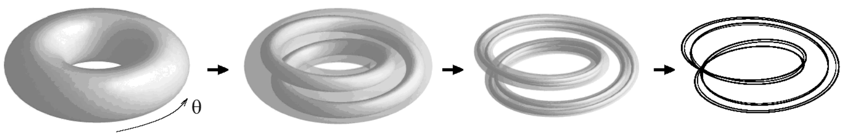


Рис. 1. Область в виде тора в трехмерном пространстве состояний, результат ее преобразования за первые две итерации отображения и соленоид Смейла — Вильямса, получающийся после большого числа итераций

Чтобы уяснить принципиальную возможность таких объектов, обратимся к *аттрактору Смейла — Вильямса* [1—4], который может встретиться в системе, заданной трехмерным отображением. Рассмотрим область в трехмерном пространстве в виде тора, который представим как бублик из пластичного материала. Один шаг преобразования состоит в том, что мы растягиваем бублик вдвое, производим поперечное сжатие, складываем двойной петлей и помещаем внутрь исходного тора (рис. 1). На каждом шаге преобразования объем объекта уменьшается (отображение диссипативное), а число витков удваивается. В пределе оно стремится к бесконечности, и возникает образование, называемое *соленоидом*. Поперечная структура соленоида похожа на канторово множество. Существенный момент состоит в том, что угловая координата θ удваивается на каждом шаге дискретного времени.

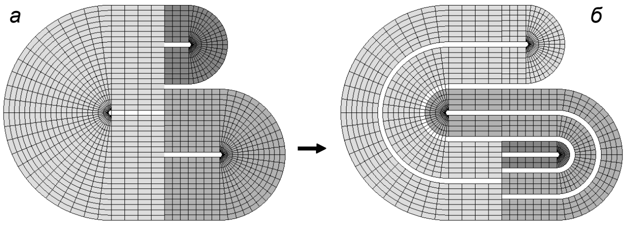


Рис. 2. Исходная область (*а*) и ее трансформация при действии отображения (*б*) для аттрактора типа Плыкина

Второй пример — это *аттрактор типа Плыкина* в специальном двумерном отображении на плоскости [10]. На рис. 2 изображена область, составленная из трех подобластей с узкими вырезами. Штриховкой показаны два определенных там поля направлений, по одному из которых осуществляется растяжение, а по другому — сжатие. Отображение производится так, что его действие на состояния, представленные точками данной области, дает в результате фигуру, изображенную на рисунке справа, причем поля направлений после преобразования совпадают с исходными. Этим обеспечивается гиперболическая природа аттрактора.

2. Краткий обзор гиперболической теории

Введение в гиперболическую теорию уместно начать с обсуждения точки седла, отвечающей, например, неустойчивому состоянию маятника. На фазовой плоскости, где по осям координат отложены угол отклонения φ и угловая скорость $\dot{\varphi}$, седло имеет координаты $(\varphi, \dot{\varphi}) = (\pi, 0)$ (рис. 3, *а*). При малом возмущении система уходит из него по неустойчивой сепаратрисе U. Имеется также ведущая в седло устойчивая сепаратриса S. Точка седла *гиперболическая* (термин связан с тем, что фазовые траектории вблизи нее локально имеют вид гипербол).

Представление о гиперболичности допускает обобщение. Траекторию называют гиперболической, если для каждой ее точки в векторном пространстве всевозможных бесконечно малых возмущений V (касательном пространстве) можно определить подпространство векторов, убывающих по норме при эволюции в прямом времени V_S, и подпространство векторов, убывающих в обратном времени V_U (см. рис. 3, *б*). При этом векторы, относящиеся к V_S и V_U, по норме ограничены экспоненциальной функцией, убывающей соответственно в прямом или в обратном времени. Однородная гиперболичность подразумевает, что показатели экспоненциального роста или затухания векторов из V_S и V_U ограничены и отделены от нуля некоторыми константами. В случае систем с дискретным временем все векторы в пространстве V представляются линейной комбинацией векторов из V_S и V_U: $V = V_U \oplus V_S$. В системе с непрерывным временем добавляется нейтральное подпространство V_N, отвечающее возмущениям вдоль фазовой траектории, которые не нарастают и не убывают во времени, так что $V = V_U \oplus V_N \oplus V_S$.

В фазовом пространстве множество точек, которые асимптотически приближаются к данной траектории, образуют ее *устойчивое многообразие*, а множество точек, приближающихся к ней в обратном времени, — *неустойчивое многообразие*. Это действительно многообразия, т. е. гладкие объекты, что является заключением специальной теоремы.

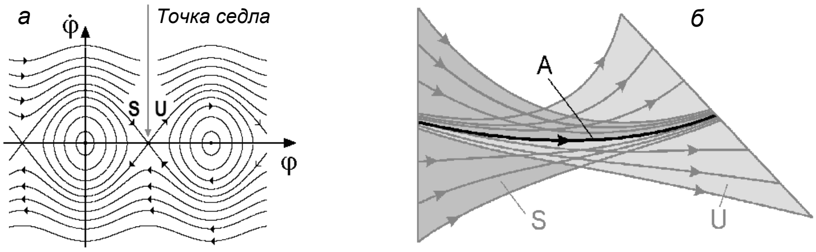


Рис. 3. Точка седла на фазовом портрете маятника, где кривая S есть устойчивая сепаратриса, а U — неустойчивая сепаратриса (*а*), и иллюстрация обобщения понятия гиперболической траектории (*б*). Символами S и U помечены устойчивое и неустойчивое многообразия траектории A

Существует критерий гиперболичности, который можно проверить в расчетах на компьютере, — *критерий конусов* [3, 4]. Предположим, что динамика в дискретном времени задана гладким обратимым отображением и при этом для каждой точки анализируемого множества в пространстве векторов малых возмущений (касательном пространстве) можно определить расширяющийся и сжимающийся конусы. Расширяющийся конус есть множество векторов, норма которых при применении отображения увеличивается в γ и более раз, где $\gamma > 1$ — некоторая константа. Сжимающийся конус есть множество векторов, норма которых увеличивается в γ и более раз при действии обратного отображения. Критерий выполнен, если всегда образ расширяющегося конуса попадает внутрь расширяющегося конуса, определенного для точки-образа, а прообраз сжимающегося конуса — в сжимающийся конус для точки-прообраза. Этот критерий годится и для систем с непрерывным временем, если использовать описание с помощью отображения Пуанкаре.

Однородно гиперболический аттрактор — это притягивающее множество, составленное из однородно гиперболических траекторий. Подразумевается, что размерности многообразий одинаковы для всех траекторий и пересечения между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями могут встречаться только под ненулевыми углами. Примерами служат аттракторы Смейла — Вильямса и Плыкина. Для аттрактора Смейла — Вильямса устойчивые многообразия двумерные и представлены семейством плоских меридиональных сечений тора, а неустойчивые многообразия одномерные — это волокна соленоида. У аттрактора Плыкина устойчивые и неустойчивые многообразия одномерные, они располагаются вдоль семейств линий, по которым фазовый объем соответственно сжимается и растягивается.

Заметим, что неустойчивое многообразие каждой точки на аттракторе совпадает с собственно аттрактором. И как следствие — чувствительность движения на аттракторе к малым возмущениям начальных условий, что является главным атрибутом динамического хаоса. В самом деле, изображающие точки, смещенные одна относительно другой вдоль неустойчивого многообразия, разбегаются с течением времени в среднем по экспоненциальному закону $\|\Delta\mathbf{x}\| \sim e^{\Lambda n}$, по крайней мере пока возмущение мало. Здесь n — дискретное время, а $\Lambda > \ln\gamma > 0$ — старший показатель Ляпунова. Если неустойчивые многообразия одномерные, отображение имеет один положительный показатель Ляпунова, а остальные отрицательные.

Наличие структуры, образованной устойчивыми и неустойчивыми многообразиями, дает возможность разбить содержащую аттрактор область на конечное число не перекрывающихся односвязных подобластей, границы которых идут по соответствующим линиям или поверхностям. При выполнении некоторых условий (в частности, образы границ, проходящих по устойчивым многообразиям, должны попадать на такие же границы) это разбиение называется *марковским* и служит основой описания движений на аттракторе в рамках *символической динамики.* Обозначая каждый элемент разбиения конечной буквой алфавита, соотносим траекторию с последовательностью символов в порядке посещения траекторией этих элементов. При этом для конкретных аттракторов последовательности подчиняются определенным «правилам грамматики».

Возможность полного символического описания траекторий устанавливает связь соответствующей проблематики с теорией информации и кодирования. Это может быть важным с точки зрения использования систем с гиперболическими аттракторами в информационных и коммуникационных приложениях.

На рис. 4 показаны марковские разбиения для аттрактора Смейла — Вильямса и аттрактора типа Плыкина, а также графы, конкретизирующие «правила грамматики». В первом случае один сегмент границы между элементами разбиения — это сечение тора плоскостью, отображающейся на себя, а другой — сечение, отображающееся на первый сегмент. Для аттрактора типа Плыкина граница между элементами разбиения состоит из вертикальной линии, совпадающей с устойчивым многообразием принадлежащей аттрактору неподвижной точки R, и сегментов, отображающихся на эту линию при итерациях отображения.

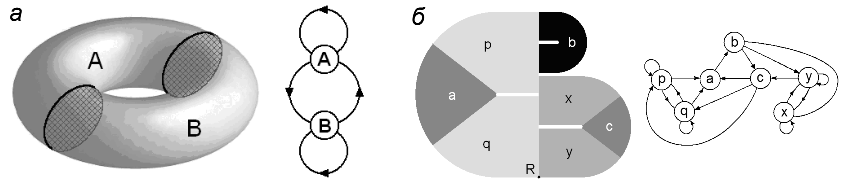


Рис. 4. Марковские разбиения и графы переходов для аттрактора Смейла — Вильямса (*а*) и аттрактора типа Плыкина (*б*). (В последнем случае граница между элементами раздела представлена устойчивым многообразием седловой неподвижной точки R.)

Графы на рис. 4 обеспечивают возможность перехода из каждой вершины в любую другую за конечное число шагов. Из некоторых вершин выходит более одного ребра, так что при построении символической последовательности переход можно выбрать произвольно из представленных альтернатив. Любой полученный код будет отвечать траектории на аттракторе, посещающей области разбиения согласно предписанной последовательности, что можно трактовать как цепь Маркова — случайный процесс с дискретным временем и конечным множеством состояний (с этим связан термин «марковское разбиение»).

Структурная устойчивость аттрактора обусловлена тем, что растяжение и сжатие элементов фазового объема в ходе эволюции во времени осуществляется по направлениям, которые всегда образуют ненулевой угол. В терминах устойчивых и неустойчивых многообразий это отвечает трансверсальному (без касаний) их взаимному расположению при пересечении. Если варьировать параметры или функции в определении оператора эволюции, то, благодаря трансверсальности пересечения многообразий, это «шевеление» не разрушит присущую фазовому пространству топологическую структуру, по крайней мере пока возмущение не слишком велико. В частности, это относится к системе линий и поверхностей, используемых при построении марковских разбиений, так что неизменной при этом остается и символическая динамика.

Множество периодических орбит на аттракторе соответствует периодическим символическим последовательностям и имеет мощность счетного множества. С ростом периода орбит T их количество N увеличивается по экспоненциальному закону $N \sim e^{hT}$, где величина $h > 0$ называется *топологической энтропией*. Ее считают характеристикой сложности множества траекторий на аттракторе.

Движение на однородно гиперболическом аттракторе Смейла — Вильямса или Плыкина характеризуется свойствами *эргодичности* и *перемешивания*. Эргодичность означает, что типичная траектория посещает любую окрестность любой точки на аттракторе. Это обеспечивает эквивалентность усреднения по времени и по инвариантной мере и дает основание для статистического подхода к анализу динамики. Свойство перемешивания означает, что для любого элемента фазового объема за достаточное время облако изображающих точек распределится по всему аттрактору. Оно также связано с затуханием корреляций: корреляционная функция для сигнала, порождаемого динамикой системы с дискретным временем на однородно гиперболическом аттракторе, характеризуется экспоненциальным спадом.

Для однородно гиперболических аттракторов существует *абсолютно непрерывная инвариантная мера Синая — Рюэля — Боуэна*, или *SRB-мера*. Взяв траекторию на аттракторе, договоримся приписывать любой области фазового пространства меру, равную относительной продолжительности пребывания в ней, когда время наблюдения движения изображающей точки по этой траектории стремится к бесконечности. Для принадлежащих однородно гиперболическому аттрактору типичных траекторий построенная таким образом мера одна и та же; это и есть SRB-мера. С ней ассоциируется распределение фазовой жидкости на волокнах аттрактора, не имеющее выраженных локальных уплотнений и описываемое непрерывной функцией координаты, отсчитываемой вдоль волокон.

3. Модель с аттрактором типа Смейла — Вильямса

Обратимся к простой механической задаче, в которой получается отображение с гиперболическим аттрактором типа Смейла — Вильямса [8, 11]. Рассмотрим движение частицы единичной массы на плоскости при наличии трения, пропорционального мгновенной скорости, и в стационарном потенциальном поле $U(x,y) = -\frac{1}{2}\mu(x^2+y^2)+\frac{1}{4}\mu(x^2+y^2)^2$ с минимумом на единичной окружности. Примем, что с периодом T на короткое время включается дополнительное силовое поле, величина и направление которого зависят от мгновенного положения частицы, и частице сообщается импульс $\mathbf{P} = \{P_x(x,y),\, P_y(x,y)\}$. Здесь x и y — координаты частицы, функции $P_{x,y}$ описывают распределение силового поля. Полагая коэффициент трения единичным, запишем уравнения

$$\begin{aligned} &\ddot{x}+\dot{x}-\mu x(1-x^2-y^2) = P_x(x,y)\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT), \\ &\ddot{y}+\dot{y}-\mu y(1-x^2-y^2) = P_y(x,y)\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT). \end{aligned} \qquad (1)$$

Подберем теперь подходящее распределение силового поля $\mathbf{P}(x, y)$. Пусть вначале имеем кольцо из частиц, покоящихся на единичной окружности, с координатами $x = \cos\varphi$ и $y = \sin\varphi$. После толчка силового поля каждая частица, характеризуемая начальным углом φ, получит импульс $\mathbf{P}(x, y)$, что приведет через некоторое время к изменению ее положения на плоскости. Если пока не учитывать потенциальное поле (μ = 0), частица остановится в точке с координатами $x' = x + P_x(x, y)$, $y' = y + P_y(x, y)$. Зададим функции P_x и P_y так, чтобы частицы расположились опять по единичной окружности, но один обход исходного кольца отвечал двукратному обходу при новом их размещении. Для этого должно быть $x' = \cos\varphi' = \cos 2\varphi$, $y' = \sin\varphi' = \sin 2\varphi$ и $P_x + i\,P_y = (x+iy)^2 - (x+iy)$. На единичной окружности $y^2 = 1 - x^2$, поэтому можно взять $P_x(x, y) = 2x^2 - x - 1$, $P_y(x, y) = 2xy - y$.

Параметр μ примем относительно малым, чтобы отклонение частицы под действием потенциального поля $U(x, y)$ за время движения, вызванного толчком, было невелико. С другой стороны, величину интервала между толчками T выберем достаточно большой, чтобы частица успевала подойти к минимуму потенциального поля.

Задав начальное состояние в момент перед n-м импульсом, $\mathbf{x}_n = \{x, \dot{x}, y, \dot{y}\}_{t=nT-0}$, можно определить состояние перед $(n + 1)$-м импульсом из решения на периоде T уравнений (1) с нулевыми правыми частями и условиями после толчка, $x\big|_{nT+0} = x_n$, $\dot{x}\big|_{nT+0} = \dot{x}_n + P_x(x_n, y_n)$, $y\big|_{nT+0} = y_n$, $\dot{y}\big|_{nT+0} = \dot{y}_n + P_y(x_n, y_n)$. В результате приходим к четырехмерному отображению Пуанкаре. Хотя оно не выводится аналитически, его действие нетрудно определить численно, решая дифференциальные уравнения на компьютере.

Для возникновения аттрактора Смейла — Вильямса существенным является топологическое свойство ансамбля частиц, а именно появление двойной петли, охватывающей начало координат, с двукратным растяжением по циклической (угловой) переменной. Сжатие в фазовом пространстве в поперечном направлении осуществляется за счет трения, пока частица дрейфует в потенциальном поле к потенциальному минимуму на единичной окружности. В отличие от классического построения аттрактор Смейла — Вильямса вложен в четырехмерное фазовое пространство, а не в трехмерное.

На рис. 5 показана траектория частицы на плоскости (x, y) в процессе движения, отвечающего пребыванию на аттракторе. Приведен также портрет аттрактора в стробоскопическом сечении и итерационная диаграмма для угловой координаты, определенной перед каждым очередным толчком как $\varphi_n = \arg(x(nT-0)+iy(nT-0))$. Аттрактор соответствует изображению соленоида с различимой канторовой поперечной структурой. Диаграмма для угловой координаты отвечает растягивающему отображению окружности, или отображению Бернулли. На рис. 5, *г* приводятся полученные при численных расчетах графики показателей Ляпунова в зависимости от параметра μ при фиксированном периоде *T*. Заметим, что старший показатель Ляпунова остается приблизительно постоянным и для стробоскопического отображения близок к величине $\Lambda_1 \approx \ln 2$, которая соответствует отображению Бернулли, приближенно описывающему динамику угловой переменной. Остальные показатели Ляпунова отрицательные. Оценка фрактальной размерности аттрактора в сечении Пуанкаре при μ = 0,44 дает *D* = 1,33.

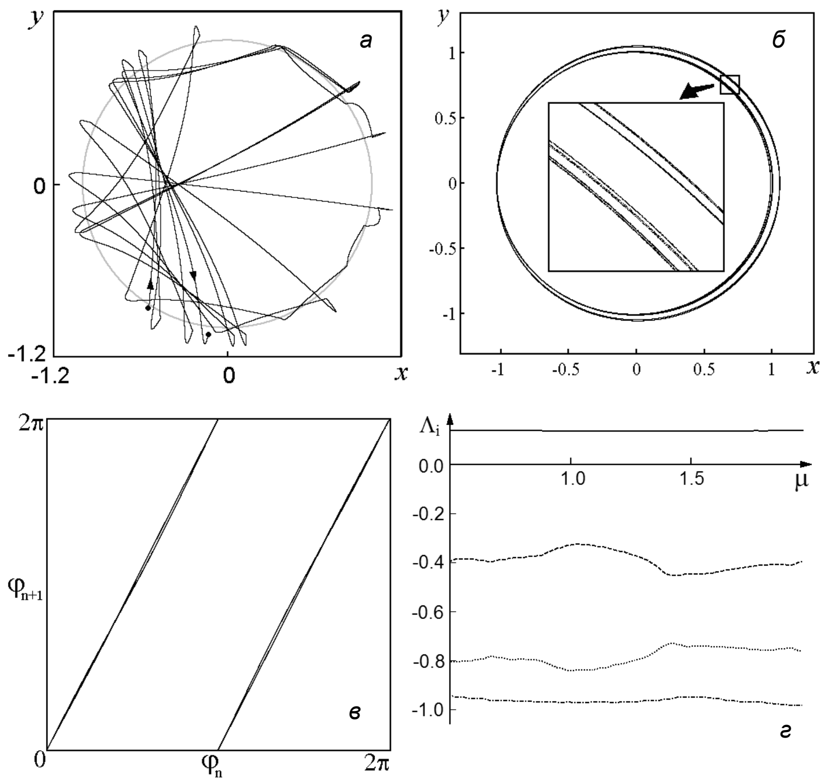


Рис. 5. Траектория частицы на плоскости (*а*), портрет аттрактора отображения Пуанкаре в проекции на плоскость (*x*, *y*) (*б*), диаграмма для угловой координаты при μ = 0,44, *T* = 5 (*в*) и графики зависимости показателей Ляпунова от параметра μ при *T* = 5 (*г*)

4. Модель с аттрактором типа Плыкина

В этом разделе будет рассмотрена модельная система с аттрактором типа Плыкина [8, 9].

Недавно в работе автора [12] было показано, как можно реализовать соответствующее электронное устройство, и выполнено моделирование в схемотехнической программной среде Multisim, позволившее продемонстрировать присутствие хаотической динамики, отвечающей данному типу аттрактора.

Начнем с построения динамической системы, мгновенные состояния которой отвечают точкам единичной сферы и задаются переменными x, y, z, подчиненными условию $x^2+y^2+z^2=1$ (рис. 6, *a*). Роль «дырок», наличие которых обязательно для обеспечения существования аттрактора типа Плыкина, будут играть окрестности точек, отмеченных как A, B, C, D. Северный и южный полюсы обозначим N и S.

Рассмотрим последовательность выполняемых одно за другим непрерывных преобразований, каждое из которых продолжительностью в единицу времени, описываемых приведенными ниже дифференциальными уравнениями.

Первая стадия состоит в смещении изображающих точек на сфере от меридианов *NABS* и *NCDS* вдоль параллелей к равноудаленной меридиональной окружности:

$$\dot{x}=-\varepsilon xy^2,\quad \dot{y}=\varepsilon x^2 y,\quad \dot{z}=0. \tag{2}$$

Вторая стадия отвечает дифференциальному вращению вокруг оси z с угловой скоростью, линейно зависящей от z, так что на параллели *BC* точки не смещаются, а на параллели *AD* совершают поворот на 180°:

$$\dot{x}=\pi(z/\sqrt{2}+1/2)y,\quad \dot{y}=-\pi(z/\sqrt{2}+1/2)x,\quad \dot{z}=0. \tag{3}$$

На третьей и четвертой стадии производятся аналогичные преобразования, но оси x и z меняются ролями, т. е. уравнения имеют вид

$$\dot{x}=0,\ \dot{y}=\varepsilon yz^2,\ \dot{z}=-\varepsilon y^2 z \tag{4}$$

и

$$\dot{x}=0,\ \dot{y}=-\pi(x/\sqrt{2}+1/2)z,\ \dot{z}=\pi(x/\sqrt{2}+1/2)y. \tag{5}$$

Интуитивно кажется правдоподобным, что такая последовательность преобразований породит на сфере поток, формирующий слоистую поперечную структуру, характерную для аттракторов типа Плыкина.

Решая аналитически дифференциальные уравнения для каждой стадии, можно получить отображение за период как композицию отображений, отвечающих всем четырем стадиям:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}_+ \circ \mathbf{f}_-(\mathbf{x}_n),$$

$$\mathbf{f}_\pm(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \pm z \\ \dfrac{y e^{\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \cos\frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1) \pm x e^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \sin\frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1)}{\sqrt{\operatorname{ch}\varepsilon(x^2+y^2) + \varepsilon(y^2-x^2)\dfrac{\operatorname{sh}\varepsilon(x^2+y^2)}{\varepsilon(x^2+y^2)}}} \\ \dfrac{y e^{\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \sin\frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1) \mp x e^{-\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)} \cos\frac{\pi}{2}(z\sqrt{2}+1)}{\sqrt{\operatorname{ch}\varepsilon(x^2+y^2) + \varepsilon(y^2-x^2)\dfrac{\operatorname{sh}\varepsilon(x^2+y^2)}{\varepsilon(x^2+y^2)}}} \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Заметим, что точка C является неподвижной (неустойчивой) точкой отображения, а точки A, B, D образуют цикл (неустойчивый) периода 3.

На рис. 6, *а* показан аттрактор отображения на сфере при ε = 0,77. Отметим наличие характерной поперечной фрактальной структуры,

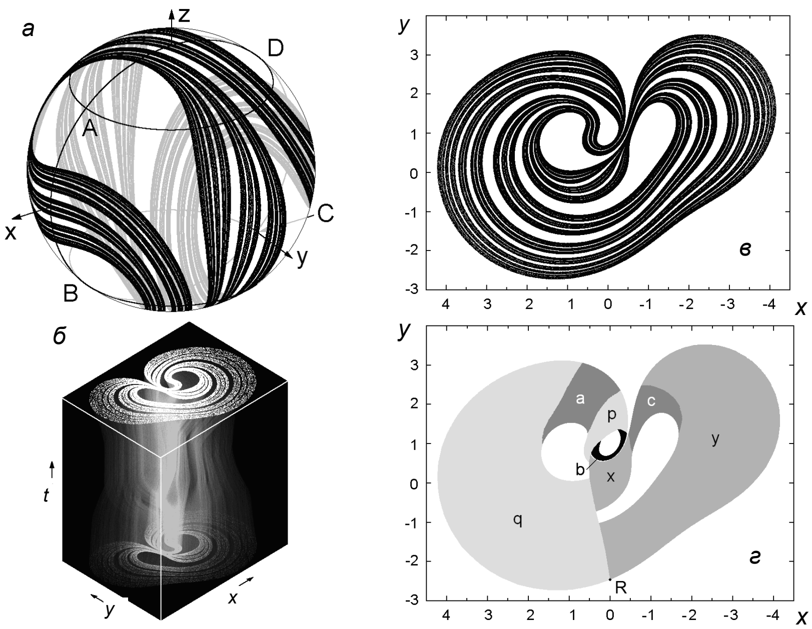


Рис. 6. Аттрактор отображения (6) при ε = 0,77 на единичной сфере (*а*); аттрактор системы, заданной уравнениями (2)—(5) в расширенном фазовом пространстве (*б*); портрет аттрактора в сечении Пуанкаре на плоскости (*в*) и марковское разбиение содержащей аттрактор области (*г*). Для более наглядного сравнения с рис. 4, *б*, направление горизонтальной оси на диаграммах *в* и *г* инвертировано. Анимации, показывающие преобразования на сфере и на плоскости, можно посмотреть в Интернете на странице http://www.sgtnd.narod.ru/science/hyper/rus/index.htm

как бы составленной из полосок, каждая из которых содержит полоски следующего уровня. Показатели Ляпунова аттрактора при выбранных параметрах равны $\Lambda_1 = 0{,}959$, $\Lambda_2 = -1{,}141$.

Описание динамики можно переформулировать так, чтобы состояния системы представлялись на плоскости. Для этого делаем замену

$$W = X + iY = (x - z + iy\sqrt{2})/(x + z + \sqrt{2}), \tag{7}$$

что отвечает стереографической проекции сферы на плоскость с выбором в качестве центра проецирования точки *C*. Эта точка на протяжении всех стадий находится в «дырке», поэтому изображение аттрактора на плоскости расположится в ограниченной области. Можно вывести уравнения, описывающие динамику на плоскости в непрерывном времени в переменных *X*, *Y* [9], но они здесь не приводятся из-за их громоздкости.

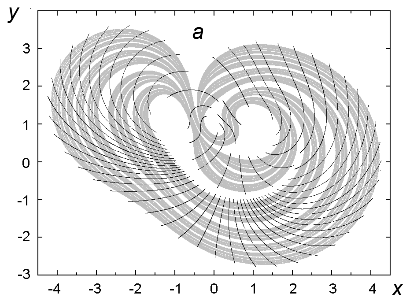
На рис. 6, *б* показан портрет аттрактора системы в трехмерном расширенном фазовом пространстве. В сечении горизонтальной плоскостью имеет место объект, показанный отдельно на рис. 6, *в*. Его можно получить так же, как аттрактор отображения (6), в координатах, определяемых заменой (7). На рис. 6, *г* представлено марковское разбиение области, содержащей аттрактор. Граница между областями разбиения дается устойчивым многообразием неподвижной точки *R*. Сопоставляя эту диаграмму с рис. 4, *б*, можно убедиться в топологической эквивалентности этих аттракторов. Обозначения элементов разбиения буквами установлены так, чтобы «правила грамматики» при символическом описании динамики соответствовали друг другу на одном и другом рисунке.

5. Проверка гиперболичности

Физические и технические устройства обычно не приспособлены для облегчения математических доказательств в отношении описывающих их уравнений. Поэтому для проверки аттракторов, которые являются или потенциально могут быть равномерно гиперболическими, жизненно важным становится применение вычислительного инструментария. Обоснование гиперболичности необходимо для того, чтобы иметь возможность опираться в исследованиях и приложениях на выводы математической теории, которые могут иметь практическое значение, как, например, структурная устойчивость, или возможность описывать динамику с использованием марковских разбиений с конечным алфавитом.

Один подход к проверке гиперболичности основан на критерии конусов, упоминавшемся в разд. 1. Иллюстрации применения этого критерия не отличаются наглядностью, так что ограничимся здесь ссылками на работы, где с его помощью подтверждена гиперболичность аттракторов в нескольких моделях [9, 13].

Как отмечалось выше, принципиальной для гиперболических аттракторов является трансверсальность многообразий. Простой и убедительный способ проверить это свойство в случае двумерного отображения Пуанкаре (когда аттрактор имеет один положительный и один отрицательный показатель Ляпунова) состоит в том, чтобы представить многообразия графически. Поскольку неустойчивые многообразия располагаются вдоль волокон аттрактора, для заключения о наличии трансверсальности достаточно изобразить устойчивые многообразия на фоне самого аттрактора. Для построения устойчивого многообразия стартуем из точки на аттракторе **x** и проводим некоторое число итераций отображения, а затем придаем конечному состоянию малое случайное возмущение и выполняем такое же число шагов назад во времени, отмечая на графике полученную в итоге точку. При достаточно большом числе повторений операции эти точки прорисуют кривую, отвечающую устойчивому многообразию точки **x**. Далее процедура производится для других точек, чтобы получить представительное семейство кривых. На рис. 7 показан результат описанного построения для обсуждавшегося в предыдущем разделе аттрактора типа Плыкина на плоскости, и для сравнения рядом приведена аналогичная диаграмма для негиперболического хаотического аттрактора в отображении Эно. Как можно видеть, в первом случае устойчивые многообразия, обозначенные черным цветом, везде проходят поперек волокон аттрактора, изображенного серым цветом. Во втором случае устойчивые многообразия расположены так, что касания с волокнами аттрактора неизбежно присутствуют.



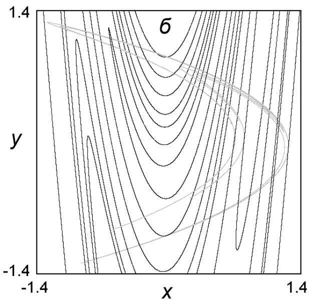


Рис. 7. Портреты аттракторов (серый цвет), на фоне которых представлены семейства устойчивых многообразий (черный цвет): однородно гиперболический аттрактор типа Плыкина в системе (6) при ε = 0,77 (*а*) и аттрактор в отображении Эно $x_{n+1} = 1 - 1{,}4x_n^2 + 0{,}3y_n$, $y_{n+1} = x_n$ (*б*)

Другой метод, пригодный также и при более высокой размерности анализируемых отображений, заключается в рассмотрении статистического распределения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами векторов возмущений для множества точек на аттракторе.

Вкратце, алгоритм состоит в том, что сначала путем решения системы линейных уравнений в вариациях вдоль траектории на аттракторе строим набор неустойчивых векторов возмущения в точках этой траектории. Потом решением линейной системы уравнений вдоль той же траектории назад во времени определяем в точках траектории ортогональное дополнение к устойчивому подпространству. Эти данные дают возможность найти углы между устойчивым и неустойчивым подпространством на множестве рассмотренных точек траектории и построить соответствующую гистограмму. Если распределение удалено от области нулевых углов, то это указывает на гиперболическую природу аттрактора. На рис. 8 приводятся гистограммы распределений углов для модели с аттрактором Плыкина и для аттрактора отображения Эно. Их вид свидетельствует о гиперболической природе аттрактора в первом случае и негиперболической во втором. Для более детального ознакомления с методикой можно обратиться к работам [9, 14—16].

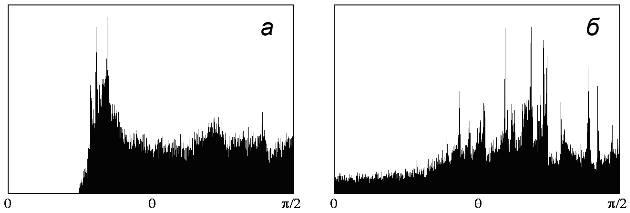


Рис. 8. Гистограммы распределения углов между устойчивым и неустойчивым подпространствами для гиперболического аттрактора типа Плыкина в системе (6) при ε = 0,77 (*а*) и для негиперболического аттрактора в отображении Эно $x_{n+1} = 1 - 1,4x_n^2 + 0,3y_n$, $y_{n+1} = x_n$ (*б*)

Наконец, еще один наглядный метод идентификации гиперболических аттракторов основан на визуализации распределений вероятности, отвечающих инвариантной мере. Для гиперболических аттракторов распределение фазовой жидкости вдоль волокон аттрактора должно выглядеть как непрерывная функция, а для негиперболических аттракторов характерно присутствие сингулярностей типа локальных уплотнений. Простое разбиение области, содержащей аттрактор, на ячейки, с подсчетом вероятностей попадания в эти ячейки, обычно не позволяет четко различить эти случаи из-за достаточно сильных флуктуаций чисел заполнения ячеек. К успеху приводит модифицированная процедура, нацеленная специально на выявление характера распределения вдоль неустойчивых многообразий (детали см. в главе 7 книги [9]). На рис. 9 приводятся диаграммы распределений, полученных для гиперболического аттрактора типа Плыкина и для негиперболического аттрактора отображения Эно. Во втором случае хорошо виден набор пиков, отвечающих локальным уплотнениям (сингулярностям). Чтобы представить эти пики в сопоставимом масштабе, по вертикальной оси использован логарифмический масштаб.

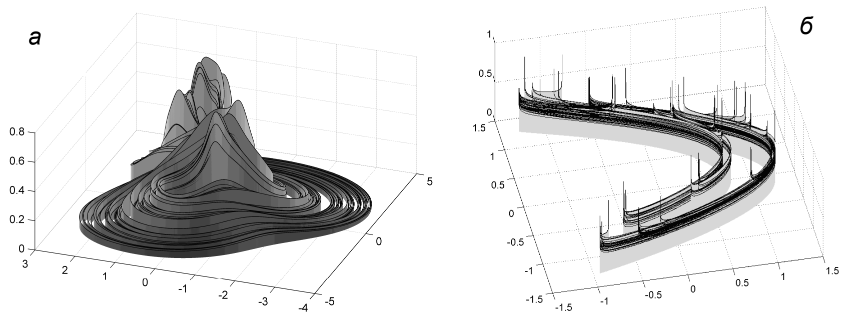


Рис. 9. Диаграммы, иллюстрирующие распределения «фазовой жидкости» вдоль волокон аттракторов для гиперболического аттрактора типа Плыкина в системе (6) (*а*) и для аттрактора в отображении Эно $x_{n+1} = 1 - 1,4x_n^2 + 0,3y_n$, $y_{n+1} = x_n$ (*б*)

Заключение

Подводя итоги, можно сказать, что к настоящему времени установлена возможность конструирования физических систем со структурно устойчивыми хаотическими аттракторами, известными ранее только как абстрактные математические образы. Если математики разрабатывают примеры, используя геометрические, топологические, алгебраические конструкции, то физики вправе привлечь для целенаправленного построения моделей со структурно устойчивым хаосом свой инструментарий (частицы, поля, осцилляторы, цепи обратной связи). Этот подход дает перспективы приложений для хорошо развитой математической теории. Возникает основа для проведения сравнительных исследований гиперболического и негиперболического хаоса, в том числе в рамках компьютерного моделирования и в эксперименте. Можно думать, что модели, реализующие гиперболический хаос, окажутся полезными для приложений и для понимания фундаментальных вопросов, например в отношении проблемы турбулентности [5] или в контексте такой быстроразвивающейся дисциплины, как нейродинамика [17].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 11-02-91334.

Литература

1. *Смейл, С.* Дифференцируемые динамические системы / С. Смейл // УМН. — 1970. — Т. 25, № 1(151). — С. 113—185.

2. *Аносов, Д. В.* Динамические системы с гиперболическим поведением / Д. В. Аносов и др. // Динамические системы – 9. — М. : ВИНИТИ, 1991. — 248 с. — (Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления ; т. 66).

3. *Синай, Я. Г.* Стохастичность динамических систем / Я. Г. Синай // Нелинейные волны. — М. : Наука, 1979. — С. 192—212.

4. *Каток, А. Б.* Введение в современную теорию динамических систем / А. Б. Каток, Б. Хасселблат. — М. : Факториал, 1999. — 768 с.

5. *Рюэль, Д.* О природе турбулентности / Д. Рюэль, Ф. Такенс // Странные аттракторы / под ред. Синая Я. Г. и Шильникова Л. П. — М. : Мир, 1981. — С. 117—151.

6. *Андронов, А. А.* Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. — М. : Физматгиз, 1959. — 915 с.

7. *Шильников, Л. П.* Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. — М. ; Ижевск : Ин-т компьют. исслед., 2003. — 428 с.

8. *Кузнецов, С. П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике / С. П. Кузнецов // УФН. — 2011. — Т. 181, № 2. — С. 121—149.

9. *Kuznetsov, S. P.* Hyperbolic Chaos: A Physicist's View / S. P. Kuznetsov. — Berlin, Heidelberg : Higher Education Press : Beijing and Springer-Verlag, 2012. — 336 p.

10. *Гукенхеймер, Дж.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. — М. ; Ижевск : Ин-т компьют. исслед., 2002. — 560 с.

11. *Кузнецов, С. П.* Аттракторы типа Смейла — Вильямса в модельных системах с импульсным периодическим воздействием / С. П. Кузнецов, Л. В. Тюрюкина // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2010. — Т. 18, № 5. — С. 80—92.

12. *Kuznetsov, S. P.* Plykin type attractor in electronic device simulated in Multisim / S. P. Kuznetsov // CHAOS. — 2011. — V. 21, № 4. — P. 043105.

13. *Кузнецов, С. П.* Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля / С. П. Кузнецов, И. Р. Сатаев // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2006. — Т. 14, № 5. — С. 3—29.

14. *Lai, Y.-C.* How often are chaotic saddles nonhyperbolic? / Y.-C. Lai, C. Grebogi, J. A. Yorke, I. Kan // Nonlinearity. — 1993. — V. 6, № 5. — P. 779—798.

15. *Anishchenko, V. S.* Studying hyperbolicity in chaotic systems / V. S. Anishchenko et al. // Physics Letters A. — 2000. — V. 270, № 6. — P. 301—307.

16. *Kuptsov, P. V.* Fast numerical test of hyperbolic chaos / P. V. Kuptsov // Phys. Rev. E. — 2012. — V. 85, № 1. — P. 015203.

17. *Belykh, V.* The hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models / V. Belykh, I. Belykh, E. Mosekilde // Int. J. of Bifurcation and Chaos. — 2005. — V. 15, № 11. — P. 3567—3578.

АКТИВНЫЕ КОЛЛОИДЫ[1]

И. С. Арансон

Введение

Коллоиды представляют собой среды, состоящие из макроскопических частиц, существенно больших, чем атомы и молекулы, которые распределены в другой сплошной среде, например в жидкости или газе [1]. Коллоиды играют значительную роль в нашей повседневной жизни (например, молоко, пигментированные красители, кровь) и важны для многих отраслей промышленности — от пищевой, фармацевтической, медицинской до нанотехнологий [2] и микроэлектроники (коллоидные частицы используются в высокоэффективных электрофоретических дисплеях для электронных книг [3]). Междисциплинарная область коллоидных суспензий активно исследуется. Физика коллоидов также составляет существенную часть «мягкой материи» (soft matter) — быстро расширяющейся области современного естествознания, имеющей дело с состояниями вещества, легко деформируемыми тепловыми напряжениями, флуктуациями или внешними силами. Область исследований мягкой материи включает коллоиды, полимеры, гели, гранулированные материалы, а также некоторые биологические системы, такие как взвеси живых микроорганизмов (последние обзоры можно найти в работах [4—9]).

Взаимодействие между коллоидными частицами определяется разнообразными силами: от стерического отталкивания, электростатических, магнитных сил (в магнитных коллоидах), сил Ван-дер-Ваальса, обусловленных электрическим дипольным моментом коллоидных частиц, силы тяжести, энтропийных сил до гидродинамических сил и сил, возникающих благодаря градиентам концентрации [9]. При определенных условиях взаимодействие между коллоидными частицами может приводить к формированию различных устойчивых состояний — от коллоидных стекол [10] и гелей [11] до высокоупорядоченных коллоидных кристаллов [12]. Упорядоченные коллоидные суспензии применяются в качестве материалов с фотонной щелью [13, 14] (рис. 1).

Важно подчеркнуть связь между коллоидами и близкими к ним метаматериалами. В XX веке значительно изменилось наше представление на атомарном уровне о традиционных твердых материалах (керамики, сплавы, полупроводники и т. д.). Лишь недавно возникло понятие метаматериалов — материалов, построенных на основе искусственных элементарных блоков и созданных, например, для контроля распространения волн [15] или изменения оптико-механических свойств [16]. Новые функцио-

[1] На основе статьи И. С. Арансона «Активные коллоиды» из журнала «Успехи физических наук» (2013. Т. 183, № 1. С. 87—102).

нальные возможности метаматериалов, такие как отрицательный показатель преломления или существование оптической щели, обусловлены запрограммированными функциями искусственных метаатомов. Функционализованные коллоидные частицы, играющие роль метаатомов, становятся перспективной базой для создания функциональных мягких метаматериалов путем контролируемой и гибкой анизотропной самосборки.

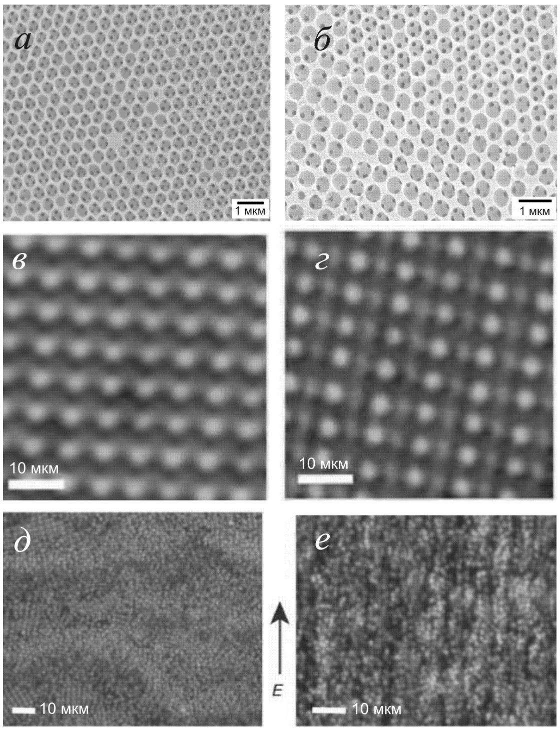


Рис. 1. Самоорганизующиеся коллоидные структуры: *а* — высокоупорядоченные области с гексагональной симметрией протяженностью 10 мкм, собранные из функционализированных (пятнистых) коллоидных частиц кремния, коллоидная структура обладает фотонной щелью в видимом диапазоне света; *б* — области сосуществования структур с гексагональной и квадратной симметрией [13]; *в*, *г* — высокоупорядоченные самоорганизующиеся структуры в «ионных» коллоидных кристаллах, состоящих из противоположно заряженных частиц — положительных (1,08 мкм) и отрицательных (0,99 мкм) полиметилметакрилатных сфер (снято с помощью конфокальной микроскопии); *д, е* — структуры, индуцированные электрическим полем *E* в той же системе: стационарные полосы, перпендикулярные направлению поля, и дорожки из частиц, движущихся параллельно вектору поля в противоположных направлениях, возникающие при увеличении амплитуды приложенного электрического поля [20, 47]

Значительное количество работ посвящено различным аспектам в основном равновесных коллоидных структур, полученных в результате статической самосборки [17—30]. Некоторые примеры упорядоченных структур, таких как фотонные кристаллы с оптической щелью и ионные коллоидные кристаллы, полученные в результате равновесной самосборки, показаны на рис. 1, *а—г*.

В нашей работе исследуются последние достижения в области активных (или неравновесных) коллоидных систем, как живых, так и синтетических, в которых динамические структуры формируются в неравновесных условиях. В частности, активно самоорганизующиеся коллоидные структуры обеспечивают новые возможности, недоступные в равновесных условиях: способность к самодвижению [31—33], самозалечиванию [34, 35], манипуляции карго-частицами [36] и другие функции, обычно свойственные живым системам [37]. Хотя изучение активных коллоидов является быстроразвивающейся областью, но по этой теме существует всего несколько обзоров [38—40].

Естественно классифицировать коллективное движение в активных коллоидных системах с точки зрения метода инжекции энергии. Один большой класс представлен системами, накачиваемыми внешними полями, такими как электрические, магнитные поля или гидродинамические потоки. Внешнее поле индуцирует силы или вращательные моменты на коллоидных частицах как в объеме, так и на границе раздела между жидкостью и твердым телом или двумя жидкостями. Другой класс составляют частицы, которые приводятся в движение изнутри, например, в результате химических реакций, ультрафиолетового излучения (см., например, [41]). Следовательно, поскольку полная внешняя сила, приложенная к частице, равна нулю, частица движется благодаря созданию локальных силовых диполей [42]. К этому классу принадлежит целый ряд самоподвижных частиц, таких как биметаллические химические микропловцы (microswimmers), асимметричные янус-частицы (названные в честь двуликого римского бога), и даже большинство плавающих микроорганизмов [43]. На примере плавающих бактерий недавно было показано, что суспензии активных микропловцов могут проявлять свойства, отличающиеся от свойств аналогичных равновесных материалов: семикратное снижение вязкости [44], резкое увеличение коэффициента диффузии [45, 46] и т. д. Однако воспроизведение подобных эффектов в суспензиях синтетических микропловцов остается серьезной проблемой.

1. Коллективное поведение коллоидных систем, накачиваемых внешними полями

В этом разделе рассматриваются крупномасштабные коллективные состояния, возникающие в коллоидных системах при накачке внешними электрическими и магнитными полями. Рисунки 1—5 иллюстрируют характерные самоорганизованные состояния, наблюдаемые в этом большом классе систем — от неравновесных стационарных образований (полосы и дорожки, самовосстанавливающиеся мембраны [35, 47]) до динамических структур (вращающиеся бинарные вихри, пульсирующие кольца [48], самособирающиеся микропловцы [33]).

1.1. Коллоидные системы, накачиваемые внешним электрическим полем

Классифицировать коллективное поведение и самосборку в системах, накачиваемых внешними полями, достаточно сложно. В одной и той же коллоидной системе, накачиваемой электрическим полем, результат самосборки зависит от амплитуды и частоты электрического поля, свойств жидкости, в которой взвешены частицы (например, вязкости, проводимости), а также размера, состава и материальных свойств коллоидных частиц. Так, система, образованная противоположно заряженными коллоидными частицами в водном растворе, накачиваемом низкочастотным переменным электрическим полем, разделяется на полосы, перпендикулярные направлению приложенного поля [47] (см. рис. 1, *д*). После выключения поля полосы постепенно исчезают из-за броуновской диффузии частиц. Авторы работы [47] утверждают, что формирование полос обусловлено столкновениями частиц, движущихся в противоположных направлениях.

В похожей системе, состоящей из противоположно заряженных коллоидов, но при несколько иных условиях (постоянное электрическое поле большей амплитуды) вместо статических полос, ориентированных перпендикулярно полю, наблюдается формирование дорожек. Дорожки образованы частицами противоположной полярности, движущимися в противоположных направлениях, как автомобили на двустороннем шоссе. В отличие от статических полос дорожки ориентированы вдоль приложенного поля. Авторы работы [18] считают, что динамическим механизмом, ответственным за формирование дорожек, является увеличение боковой подвижности, индуцированной столкновениями между частицами, движущимися в противоположных направлениях. Мобильность частиц резко снижается после образования дорожек. Авторы утверждают, что частицы в дорожках можно считать находящимися в динамически «заблокированном» состоянии. Обзор различных неустойчивостей в системе противоположно заряженных коллоидных частиц можно найти в работе [49].

Интересные динамические самособирающиеся структуры возникают, когда сильное постоянное электрическое поле (до 2—3 кВ/мм) приложено к проводящим микросферам (100-микрометровые бронзовые частицы), взвешенным в тонком слое слабопроводящей жидкости (раствор спирта в толуоле) [48]. Некоторые из этих состояний показаны на рис. 2. При изменении амплитуды постоянного электрического поля, его направления по отношению к силе тяжести и содержания алкоголя в толуоле наблюдается большое разнообразие самоорганизующихся структур[2]. Когда значения приложенного поля и концентрации спирта низкие, структуры в основном статические: кластеры, коллоидные кристаллы или периодические решетки. При более высоких значениях приложенного поля и концентрации алкоголя статические структуры превращаются в динамические состояния — самоорганизующиеся вращающиеся бинарные звезды-вихри (рис. 2, *а*—*в*). С изменением полярности приложенного электрического поля вращающиеся вихри превращаются в хаотически пульсирующие кольца (рис. 2, *г*—*и*).

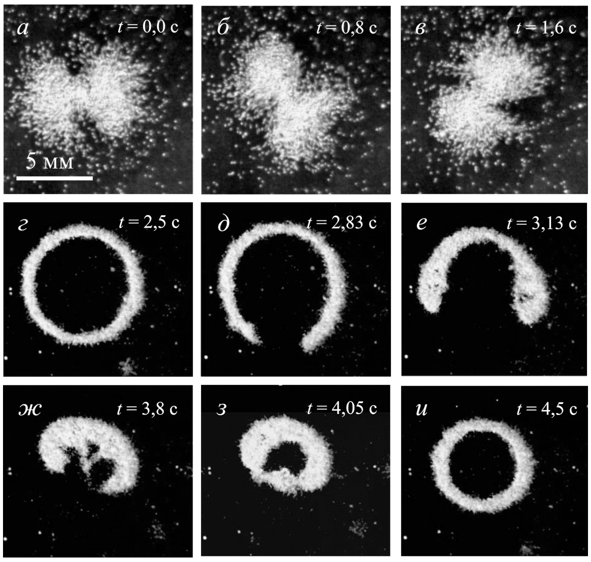


Рис. 2. Динамические самособирающиеся структуры, образованные из проводящих микрочастиц (100-микрометровые бронзовые сферы) в слабопроводящей неполярной жидкости (раствор толуола и спирта) в постоянном электрическом поле. *а*—*в* — снимки вращающейся бинарной звезды-вихря. Каждый вихрь возбуждает тороидальные электроосмотические потоки в растворе. При изменении направления электрического поля вращающиеся «двойные звезды» превращаются в пульсирующие кольца (*г*—*и*). (Из работы [48])

[2] Проводящая частица в контакте с проводящей плоскостью приобретает электрический заряд путем прямой электрификации. Частица отделяется от плоскости и начинает двигаться вверх, если электрическая сила $F_e = \kappa a^2 E^2$ превышает силу тяжести $F_g = 4/3\rho g a^3$, где a — радиус частицы, E — величина приложенного постоянного вертикального электрического поля, g — ускорение свободного падения, ρ — плотность частицы, κ — постоянная, зависящая от формы частицы. Для проводящей сферической частицы $\kappa = \zeta(3) + 1/3 \approx 1{,}36$, где ζ — дзета-функция Римана [50].

Основными механизмами, ответственными за взаимодействие между частицами, являются электрофорез (перенос заряженных частиц электрическим полем в жидкости) и электроосмос (перенос жидкости электрическим полем). Толуол является неполярной, непроводящей жидкостью, но присутствие алкоголя делает раствор слабым ионным проводником из-за небольшой диссоциации молекул спирта. Для типичных условий эксперимента (несколько процентов спирта в толуоле) соответствующая длина Дебая превышает 1—10 мкм, это на много порядков больше, чем в воде. В результате статическое электрическое поле в растворе становится практически неэкранированным, что сильно отличается от коллоидных экспериментов в водных растворах [18, 49], где длина Дебая очень мала, порядка 10 нм. Электрическое поле вызывает движение ионов в жидкости. Присутствие макроскопических проводящих частиц в жидкости приводит к возмущению потока ионов, в результате чего создаются тороидальные электроосмотические потоки в непосредственной близости от частиц [48, 51]. Электрофорез вместе с электростатическими взаимодействиями между частицами и силой тяжести ответствен за возникновение динамических состояний. Феноменологическая теория образования структур в такой системе была разработана в работе [52]. Эксперименты, проведенные с гораздо меньшими частицами (2—3-микрометровые золотые сферы), показали, что в дополнение к вихрям вдоль направления поля возникают динамически самособирающиеся провода и перемежающиеся дендритные структуры [53].

1.2. Коллоидные системы, накачиваемые переменными магнитными полями

Если коллоидные частицы обладают магнитным моментом, как постоянным (ферромагнитным), так и индуцированным (суперпарамагнитным), самосборку можно контролировать внешним магнитным полем. Статическое поле индуцирует либо цепочечные кластеры, либо объемные коллоидные кристаллы [54]. В противоположность этому в переменном магнитном поле могут образовываться самособирающиеся структуры различной сложности: от квазистатических листов и мембран [35] до динамически самособирающихся микропловцов [33]. Приложенное магнитное поле может быть одноосным [33], двух- или трехосным [35, 55].

Завораживающие самособирающиеся структуры возникают, когда ферромагнитные микрочастицы (100-микрометровые никелевые сферы) взвешены на границе раздела вода — воздух и накачиваются внешним переменным магнитным полем $H = H_0\sin(2\pi f t)$, приложенным перпендикулярно к границе раздела (рис. 3, *а*). В зависимости от частоты f и амплитуды H_0 внешнего магнитного поля частицы самособираются в линейные змеевидные объекты (магнитные змеи) (рис. 3, *б*, *в*). Змея состоит

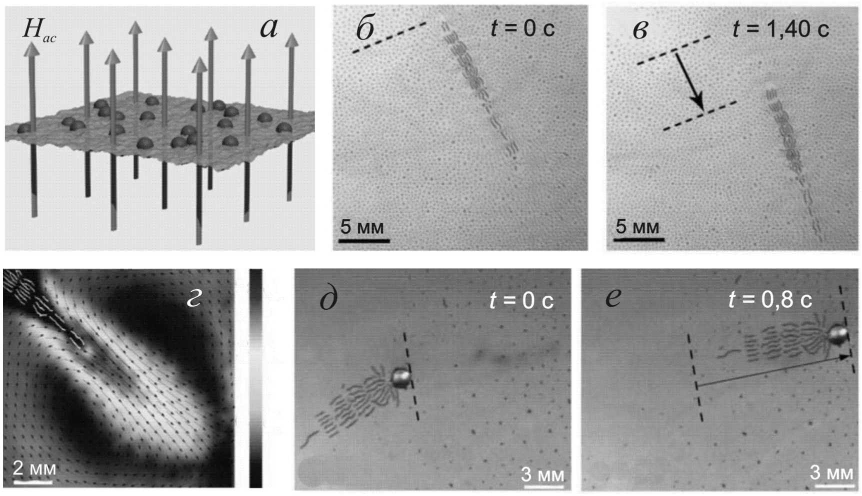


Рис. 3. Самособирающийся поверхностный микропловец (магнитная змея), образованный из ферромагнитных микрочастиц (80—100-микрометровые никелевые сферы) на границе раздела вода — воздух: *а* — схема эксперимента, однородное переменное магнитное поле (60—80 Гц), приложенное перпендикулярно к границе воздух — вода, обеспечивает энергию для ферромагнитных частиц, плавающих на поверхности воды; *б*, *в* — снимки самособирающегося микропловца (магнитная змея), сформированного спонтанно из случайного распределения ферромагнитных частиц; *г* — крупномасштабный вихревой поток, порожденный хвостом магнитной змеи, стрелки показывают направление течения, оттенки цвета указывают величину поверхностной скорости; *д*, *е* — микропловец, образованный змеей, присоединенной к 1-мм немагнитной стеклянной бусинке [33]

из нескольких параллельных ферромагнитно упорядоченных цепочек (сегментов). Сегменты, однако, имеют антиферромагнитное упорядочение. Расстояние между соседними сегментами λ контролируется частотой приложенного поля, а ширина змеи W определяется амплитудой поля. Хорошим приближением для расстояния λ в зависимости от частоты приложенного магнитного поля f является дисперсионное соотношение для гравитационно-капиллярных волн на поверхности глубокой жидкости:

$$f^2 \approx \frac{g}{2\pi\lambda} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda^3}, \qquad (1)$$

где g — ускорение свободного падения, σ — поверхностное натяжение и ρ — плотность жидкости.

Таким образом, основными механизмами формирования змей являются магнитное дипольное взаимодействие между частицами, способствующее формированию цепочек, и гидродинамические потоки на поверхности жидкости, возбуждаемые осциллирующими цепочками на границе воздух — вода.

Змеи неподвижны при низких частотах f поля и превращаются в самоподвижные объекты при более высоких частотах [33]. Из-за инерции жидкости хвосты змей возбуждают крупномасштабные ректифицированные вихревые потоки [56], каждый из хвостов представляет собой мощный самособирающийся насос (рис. 3, *г*), аналогично явлению акустического потокообразования Рэлея [57]. Величина ректифицированного потокового течения пропорциональна H_0^2 и увеличивается приблизительно линейно с частотой f. При относительно низких частотах приложенного поля (ниже 60 Гц) крупномасштабное потоковое течение, вызываемое змеями, является симметричным и змеи неподвижны, при более высоких частотах симметрия течения спонтанно нарушается, приводя к самодвижению змей (см. рис. 3, *б*, *в*). По-видимому, этот механизм самодвижения не имеет прямого аналога в природе. Кроме того, симметрию крупномасштабных потоков змей можно нарушить искусственно, поместив большой немагнитный шарик (бусинку) вблизи одного из хвостов змеи. Бусинка ослабляет поток, порожденный хвостом, что приводит к асимметрии потокового течения. В этом случае змея присоединяется к бусинке и приводится в движение оставшимся свободным хвостом (рис. 3, *д*, *е*). Многие аспекты динамической самосборки этой системы можно описать микроскопической моделью, основанной на динамике частиц, связанной с деформациями поверхности тонкого слоя жидкости [58].

Разнообразные динамические самособирающиеся структуры наблюдаются, когда ферромагнитные микрочастицы размещаются на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей, например силиконового масла и воды. В этом случае расстояние между сегментами λ определяется разностью плотностей между двумя жидкостями (ср. с уравнением (1)):

$$f^2 \approx \frac{g(\rho_1-\rho_2)}{2\pi\lambda(\rho_1+\rho_2)} + \frac{2\pi\sigma_{12}}{(\rho_1+\rho_2)\rho\lambda^3}, \tag{2}$$

где $\rho_{1,2}$ — плотности нижней и верхней жидкостей соответственно, а σ_{12} — поверхностное натяжение границы раздела[3]. Таким образом, снижая разность плотностей между жидкостями $\rho_1 - \rho_2$ или величину натяжения границы раздела σ_{12}, можно уменьшать размер самособирающихся магнитных змей λ.

При довольно большой вязкости верхней жидкости (вязкость силиконового масла примерно в 20 раз выше вязкости воды) в дополнение к маг-

[3] Чтобы избежать неустойчивости Рэлея — Тейлора на границе раздела между двумя несмешивающимися жидкостями разных плотностей, нижняя жидкость должна быть тяжелее верхней жидкости [59].

нитным змеям наблюдается новый тип динамических самоорганизующихся структур: осесимметричные звезды (asters) и кластеры из звезд. Звезды состоят из цепочек с магнитными моментами, моменты направлены к центру (звезды) или из центра (антизвезды) — это показано на рис. 4, *а*—*в*.

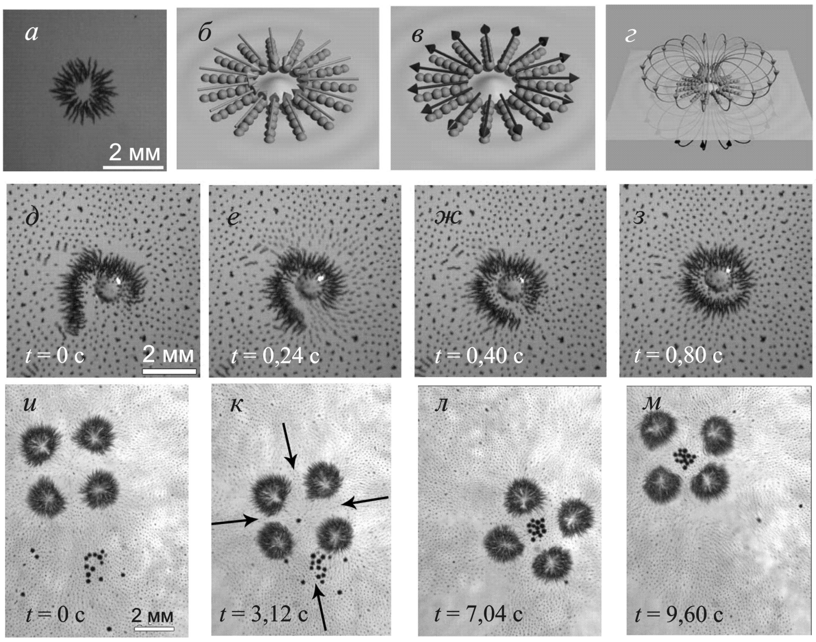


Рис. 4. Самособирающиеся коллоидные структуры на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей (силиконовое масло — вода): *а* — изолированный звездоподобный объект (звезда); *б, в* — магнитное упорядочение для звезды и антизвезды; *г* — схематическое представление тороидальных вихревых потоков, генерируемых звездой в верхней и нижней жидкостях [36]; *д*—*з* — действие самособирающейся звезды-робота (звезда, дистанционно управляемая внешним постоянным магнитным полем, приложенным параллельно границе раздела, выполняет простые функции робота: захват, перенос и выброс большой немагнитной частицы — 1-мм стеклянной бусинки); *и* — *м* — кластер из четырех звезд захватывает все немагнитные частицы, рассеянные в промежуточной области между звездами на границе между маслом и водой, стрелки показывают направление поверхностного течения, созданного кластером [36]

Хотя звезды неподвижны, они создают значительные ректифицированные тороидальные вихревые потоки, направленные вниз в нижней жидкости и вверх в верхнем слое жидкости (рис. 4, *г*). Очевидно, что магнитный порядок звезд очень неблагоприятен для равновесных условий: звезды быстро распадаются при отключении приложенного переменного магнитного поля. Применение слабого постоянного магнитного поля H_{dc} параллельно границе раздела между жидкостями приводит к хорошо контролируемому самодвижению звезд: звезды открываются и плывут параллельно полю, причем звезды и антизвезды плывут в противоположных направлениях. Важно подчеркнуть, что в однородном постоянном магнитном поле суммарная внешняя сила равна нулю: движение является результатом искажения магнитной структуры звезд и последующего отклонения ректифицированного потокового течения от вертикального направления.

Компонента ректифицированного течения, направленная вдоль границы раздела, заставляет звезду двигаться параллельно направлению поля. Скорость движения V первоначально возрастает с увеличением поля H_{dc}, достигает максимума при некотором значении и, наконец, обращается в нуль при относительно сильном поле (около 20 Э для типичных экспериментальных условий). Простое теоретическое предсказание, основанное на аппроксимации звезды парой магнитных сфер, дает следующую зависимость скорости звезды V от поля H_{dc}:

$$V \sim H_{dc}(H_c^2 - H_{dc}^2). \tag{3}$$

Таким образом, формой звезды и направлением ее движения можно дистанционно управлять с помощью небольшого магнитного поля, приложенного параллельно поверхности раздела. Эта функциональность позволяет использовать звезды и кластеры из звезд в качестве простых роботов, пригодных для захвата, переноса и позиционирования карго-частиц (рис. 4, *д*—*з*). Группа из четырех звезд (рис. 4, *л*—*м*) обладает дополнительной функциональностью, отсутствующей в одиночной звезде, — возможностью захвата немагнитных частиц в промежуточной области между звездами.

Кроме коллоидной самосборки на поверхности, структуры могут также сформироваться в объеме. Как было показано в работах [35, 55, 60, 61], в переменном поле, как электрическом так и магнитном, дипольные коллоидные частицы могут собираться в плоские листы: вращающееся поле порождает $1/r^3$-дипольное парное притяжение в плоскости вращения (r — расстояние между частицами) и отталкивание вдоль оси вращения. Эти анизотропные силы взаимодействия заставляют частицы собираться в плоские листы параллельно плоскости поля [60]. В случае трехосного поля взаимодействия являются более сложными, и, как было показано в работах [55, 61], при определенных условиях могут стать изотропными. Частный случай прецессирующего трехосного магнитного поля изучался Н. Остерманом и др. [35]: поле имело конус открытия с углом θ_m, который определялся отношением статической составляющей (z-компонента) к вращающейся компоненте (x- и y-компоненты). Взаимодействие между суперпарамагнитными частицами, вызванное полем, спадает как α/r^3 с увеличением расстояния между частицами r. Константа α зависит от угла открытия θ_m: при малых θ_m коллоид ведет себя как дипольная жидкость. Для угла открытия $\theta_m \approx 90°$ коллоидные частицы испытывают эффективное притяжение в плоскости [60, 62]. Для так называемого магического угла

$$\theta_m = \mathrm{arctg}(1/\sqrt{3}) \approx 54,7° \qquad (4)$$

усредненный по времени член взаимодействия обращается в нуль независимо от взаимного расположения частиц. В этом случае взаимодействие становится изотропным, притягивающим и спадает как $1/r^6$, аналогично силе Ван-дер-Ваальса между молекулами.

Приложение к суспензии суперпарамагнитных частиц микрометрового размера трехосного магнитного поля с углом открытия, близким к магическому углу, приводит к образованию упорядоченных плоских мембран, состоящих из плотно упакованных частиц [35]. Постепенное формирование мембран из не слишком сильно разбавленной суспензии частиц показано на рис. 5, *а—д*. Частицы первоначально собираются в димеры, димеры в цепочки и Y-образные узлы, которые постепенно соединяются, приводя к загрублению структуры, порождая участки мембран всех возможных ориентаций. Мембраны демонстрируют замечательную тенденцию

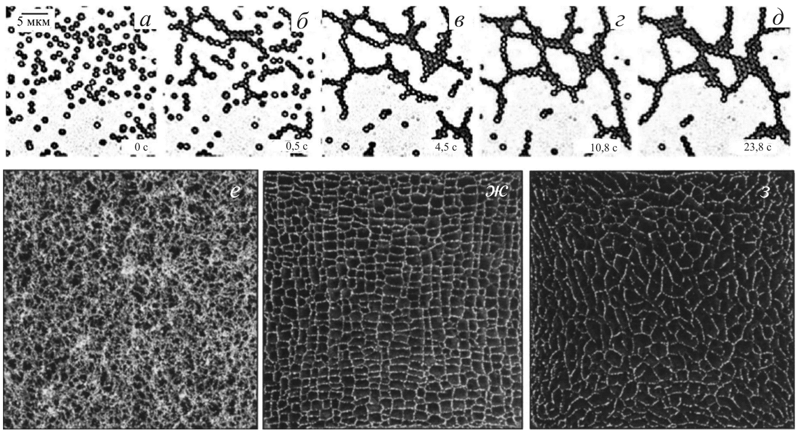


Рис. 5. Формирование самозалечивающейся мембраны из разреженной суспензии суперпарамагнитных частиц (0,15 частиц на 1 мкм^3) после включения вращающегося магнитного поля (*а—д*). За появлением коротких цепочек (0,5 с) следует их рост, ветвление и формирование неплотной сети (4,5 с). Большинство оставшихся несвязанных кластеров быстро захватывается сетью с последующим огрублением структуры, вследствие этого куски мембраны растут за счет сегментов из цепочек (10,8 и 23,8 с) [35]. Наиболее типичные структуры, наблюдаемые в трехосном магнитном поле: *е* — неупорядоченные структуры (гель из частиц); *ж* — периодические решеточные структуры в двумерно-гетеродинированном поле (с двумя разными частотами); *з* — пена из частиц, возникающая при трехмерном гетеродинировании магнитного поля. Использовались никелевые частицы (50 мкм), размер снимков 1 см. (Из работы [55])

к самозалечиванию: мембрана восстанавливает свою структуру после того, как в ней было искусственно создано отверстие. Кроме плотноупакованных мембран, во вращающихся (вихревых) магнитных полях наблюдается большое разнообразие сложных структур: от периодических решеток до сотообразной «пены частиц» (рис. 5, *е—з*) [61], листов из вращающихся цепочек [63] и различных динамически собирающихся кластеров и т. д. [64]. Когда одновременно приложены электрическое и магнитное поля, наблюдается обратимая сборка (разборка) магнитных янус-частиц в новый тип цепочек с шахматным порядком [65].

2. Самоподвижные коллоидные системы

В этом разделе мы рассмотрим коллоидные суспензии самодвижущихся частиц. Интерес к таким системам обусловлен растущим спросом на нанотехнологические приложения на базе автономно движущихся устройств, способных выполнять полезные функции на микроскопическом уровне, например доставку лекарства наночастицами к специфической клеточной цели (целевая доставка лекарств) или массивно-параллельную сборку микроскопических машин автономно движущимися объектами. Ряд оригинальных концепций таких микроскопических пловцов реализован в последние годы: от химических самодвижущихся микропловцов, запитываемых от каталитических химических реакций, до микропловцов, использующих энергию электрического или магнитного поля или ультрафиолетового светового излучения (см. недавний обзор [41]).

2.1. Практические реализации самодвижущихся частиц

Несколько практических реализаций микропловцов приведено на рис. 6. Созданный в группе Сена и Маллоука (государственный университет Пенсильвании) [66, 70] золото-платиновый стержень, плавающий в растворе перекиси водорода, изображен на рис. 6, *а*. Для стержня размером 2—3 мкм типичная скорость движения составляет 6—10 мкм/с. Современная точка зрения состоит в том, что стержень движется из-за самоиндуцированных электрофоретических потоков, образующихся при каталитическом распаде H_2O_2 в точке контакта золота и платины. Согласно [70] скорость движения V может быть оценена приравниванием движущей силы (вызванной электрохимической реакцией) силе вязкого сопротивления:

$$V \sim \frac{SR^2\gamma}{\eta DL}, \tag{5}$$

где L и R — длина и радиус стержня, η — динамическая вязкость воды, D — коэффициент диффузии кислорода, γ — натяжение между твердой поверхностью и жидкостью, S — скорость генерации кислорода на единицу площади. Детальное теоретическое рассмотрение электрохимического самодвижения биметаллических стержней можно найти в работе [71].

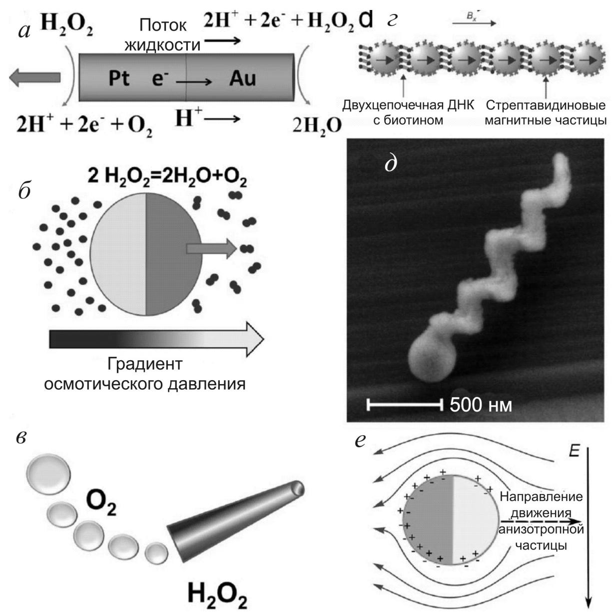


Рис. 6. Примеры практической реализации микропловцов: *а* — золото-платиновый микростержень приводится в движение самоэлектрофорезом в водном растворе H_2O_2 [66]. Разность потенциалов на Au/Pt-контакте из-за каталитического разложения H_2O_2 создает электрофоретические потоки, приводящие в движение стержень. Направление движения показывает стрелка; *б* — янус-частица (1,62-мкм полистирольная сфера, с одной стороны покрытая платиной) приводится в движение самодиффузиофорезом в растворе H_2O_2 [67]; *в* — высокоскоростные двухслойные полианилин-платиновые микротрубки (ракеты), выращенные в порах конической формы шаблонной поликарбонатной мембраны, приводимые в движение с помощью микропузырьков кислорода в H_2O_2 [68]; *г* — искусственный магнитный микропловец. Суперпарамагнитные частицы покрыты стрептавидином, при воздействии магнитного поля B_x образуют цепочку вдоль направления поля. Частицы соединяются двухцепочечной ДНК с биотином на каждом из концов (биотин и стрептавидин — взаимные белки, формирующие прочные связи). Цепочка прикрепляется к эритроциту и накачивается переменным магнитным полем, перпендикулярным B_x (из [31]); *д* — снимок стеклянного наноштопора (нанопропеллера) с наноструктурированной спиральностью, полученный со сканирующего электронного микроскопа. На одну половину спирали нанесен 30-нм слой ферромагнитного материала (кобальта). Пропеллер возбуждается вращающимся трехосным магнитным полем [69]; *е* — металл-диэлектрическая частица (4-мкм полистирольная сфера, частично покрытая золотом) приводится в движение переменным электрическим полем. Двойной электрический слой на золотой стороне (темное полушарие) сильнее поляризован, что приводит к более сильному проскальзованию, чем на полистирольной половине, из-за электроосмоса индуцированного заряда. Это приводит к электрофорезу индуцированного заряда в направлении диэлектрической стороны [43]

На рис. 6, *б* показана полистириновая частица, наполовину покрытая платиной (янус-частица), которая приводится в движение градиентом осмотического давления, обусловленного самодиффузиофорезом. Платина катализирует распад перекиси водорода (топлива) на кислород и воду, в результате чего молекул продуктов реакции становится больше, чем было молекул потребляемого топлива. Характеристическая скорость движения составляет около 2—3 мкм/с [67]. Скорость движения V можно оценить, используя перпендикулярный градиент избытка концентрации раствора вблизи частицы, что дает

$$V \sim \frac{k_B T l^2 k}{\eta D}, \tag{6}$$

где k — скорость реакции, k_B — постоянная Больцмана, T — температура, l — размер зоны взаимодействия между частицей и раствором. Хотя детали кинетики движения биметаллических стержней и янус-частиц различны (электрофорез и диффузиофорез соответственно), выражения для скорости движения похожи (ср. уравнения (5) и (6)).

Высокоскоростная коническая микротрубочная ракета, разработанная в группе Джо Ванга из Калифорнийского университета, показана на рис. 6, *в*. Ракета приводится в движение микропузырьками O_2 в растворе перекиси водорода и может развивать скорость до 350 длин в секунду при длине ракеты всего 5—10 мкм [68]. Похожие микропловцы, приводимые в движение пузырьками (наносубмарины), разработаны в группе О. Шмидта (Технический университет Дрездена) [72]. В отличие от янус-частиц и золото-платиновых стержней, распад перекиси водорода осуществляется на внутренней платиновой поверхности конической ракеты и не имеет ограничения на ионную силу каталитических биметаллических стержней.

Самоподвижные коллоидные частицы могут получать энергию не только от химических реакций, но и от переменных электрического или магнитного полей. Некоторые из этих концепций были вдохновлены природой. На рис. 6, *г* изображен искусственный микропловец (магнитная сперма) [31]. Пловец собран из разреженной суспензии суперпарамагнитных наночастиц, связанных молекулами ДНК, и прикреплен к красному кровяному тельцу (груз). Направление движения определяется приложенным постоянным магнитным полем B_x, которое ориентирует магнитную цепочку (жгутик, или флагелла). Затем пловец возбуждается переменным магнитным полем B_{ac}, приложенным перпендикулярно B_x. Типичный размер пловца около 5 мкм, а скорость около 20 мкм/с, что близко к скорости плавающих бактерий. Для этого вида искусственных пловцов соответствующим безразмерным параметром, характеризующим способность движения, является так называемое сперм-число S_p:

$$S_p = L\left(\frac{\xi_\perp \omega}{\kappa}\right)^{1/4}, \tag{7}$$

где L — длина жгутика, κ — изгибная жесткость, $\omega = 2\pi f$, f — частота переменного магнитного поля B_{ac}, $\zeta_\perp$ — перпендикулярный коэффициент вязкого сопротивления[4]. Сперм-число характеризует значимость вязких напряжений по отношению к упругим напряжениям. Эксперименты продемонстрировали, что оптимальная безразмерная скорость движения $V / L\omega$ достигается при $S_p \approx 3$ [31].

Микропловец другой конструкции, навеянной вращательным движением спирального бактериального жгутика, представлен на рис. 6, *д*. Половина стеклянного наноразмерного штопора покрыта ферромагнитным материалом (кобальт) и приводится в движение с помощью вращающегося магнитного поля [69]. Эти штопор-частицы могут плавать со скоростью до 40 мкм/с. Магнитный пловец на основе вращения магнитного дублета, взаимодействующего с границей, изучался в работе [32]. Рассмотренные в разд. 1.2 самособирающиеся змеи в широком смысле тоже являются магнитными пловцами [33], но отличаются от всех конструкций, поскольку самодвижение змей основано на спонтанном нарушении симметрии.

Металл-диэлектрические янус-частицы могут приводиться в движение переменным электрическим полем [43, 74]. В этом случае частицы движутся перпендикулярно направлению поля вследствие электрофореза индуцированного заряда, возникающего из-за электроосмоса «индуцированного заряда», т. е. действия приложенного электрического поля на собственный индуцированный диффузионный заряд вблизи поляризуемой поверхности. В типичных экспериментальных условиях скорости частиц, перпендикулярные приложенному полю, составляли около 30 мкм/с (см. рис. 6, *е*). Это явление может найти применение в различных микропотоковых устройствах.

2.2. Индивидуальное и коллективное движение коллоидных микропловцов

На рис. 7, *а* изображены траектории отдельных самоподвижных золото-платиновых стержней и янус-частицы из платины и диоксида кремния. Траектории сильно отличаются от прямых линий, вероятно, из-за тепловой диффузии и взаимодействия с микропузырьками, созданными другими частицами. На диффузионнообразное движение частиц также влияют неидеальность поверхности, кривизна и т. д. Такое движение напоминает так называемый бег с кувырками (run-and-tumble) — движение плавающих бактерий [75]. В этом контексте можно говорить о среднеквадратичном смещении (СКС) коллоидальной частицы Δr^2. Согласно соотношению Стокса — Эйнштейна для броуновской частицы радиуса R СКС линейно

[4] Гидродинамическая теория для вытянутого тела дает соотношение для длинных тонких жгутиков $\zeta_\parallel / \zeta_\perp \approx 2$, где $\zeta_\parallel$ — касательный коэффициент сопротивления [73].

зависит от времени: $\Delta r^2 \sim 6Dt$ в трехмерном случае и $\Delta r^2 \sim 4Dt$ в двумерном, где $D = k_BT/(6\pi\eta R)$ — коэффициент диффузии частицы[5]. На частицу также влияет вращательная диффузия с характерным масштабом времени τ_r. Для самоподвижной частицы, движущейся со скоростью V, направление движение также подвержено вращательной диффузии, что приводит к «сцеплению» поступательного и вращательного движений. В этом случае самодвижение приводит к значительному увеличению эффективного коэффициента диффузии. Согласно [67] двумерная проекция СКС может быть записана в виде[6]

$$\Delta r^2 = 4D\Delta t + \frac{V^2\tau_r^2}{2}\left[\frac{2\Delta t}{\tau_r} + \exp(-2\Delta t/\tau_r) - 1\right], \qquad (8)$$

где Δt — время наблюдения. На малых временах, $\Delta t \ll \tau_r$, движение примерно баллистическое, $\Delta r^2 \approx 4D\Delta t + V^2\Delta t^2$. На больших временах, $\Delta t \gg \tau_r$, уравнение (8) дает

$$\Delta r^2 \approx 4D\Delta t + V^2\tau_r\Delta t = 4D_{eff}\Delta t. \qquad (9)$$

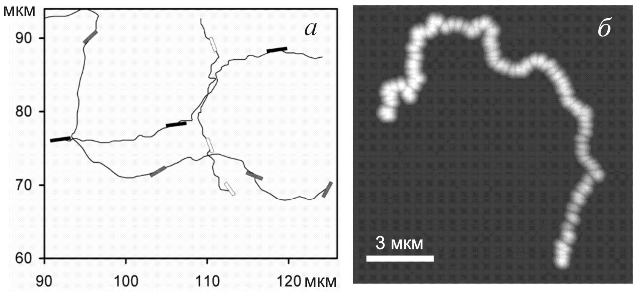


Рис. 7. Траектории самоподвижных частиц: *а* — типичные траектории нескольких отдельных золото-платиновых стержней в растворе H_2O_2 [70]. Интервалы баллистического движения прерываются резкими поворотами, подобно бегу с кувырками плавающих бактерий; *б* — проекции 120 снимков 1-мкм янус-частицы, плывущей в 10%-м растворе H_2O_2 [81]

Таким образом, вследствие «сцепления» поступательного и вращательного движения частица совершает случайные блуждания с эффективным коэффициентом диффузии $D_{eff} = D + V^2\tau_r/4$. Это означает, что самоподвижность приводит к значительному увеличению самодиффузии.

[5] Здесь использовано соотношение для силы вязкого сопротивления F_d, действующей на сферическую частицу: $F_d = 6\pi\eta RV$ [59].

[6] Систематическое слежение за частицами в большинстве коллоидных систем возможно только в двух измерениях.

Одной из основных проблем при создании искусственных микропловцов является реализация коллективного движения при более высоких концентрациях, подобно коллективному движению плавающих бактерий, при котором крупномасштабные коллективные потоки возникают только от столкновений и гидродинамических взаимодействий [76, 77] (см. рис. 10, *а*). Коллективное движение микропловцов имеет много преимуществ по сравнению с индивидуальным движением, например возможностью коллективной доставки груза или утилизации механической энергии хаотического движения [78]. Однако пока в концентрированных суспензиях искусственных микропловцов коллективное поведение, аналогичное поведению бактериальных систем, не наблюдалось. Основной причиной, возможно, является слишком высокая вращательная диффузия отдельных частиц, которая разрушает коллективное состояние. Кроме того, золото-платиновые частицы имеют тенденцию к образованию агрегатов после столкновений. Эксперименты с концентрированными суспензиями самоподвижных янус-коллоидов [79] и моделирование [80] продемонстрировали слияние и разрушение переходных агрегатов частиц со средним размером агрегатов, растущим линейно с увеличением скорости движения.

Разнообразные коллективные отклики искусственных химических микропловцов на ультрафиолетовое световое облучение исследовались в работах [82—84]. Было отмечено, что при ультрафиолетовом облучении 1-микрометровые янус-частицы из серебра и диоксида кремния мигрируют из облученных областей [83]. Такое поведение напоминает фототактический отклик (тенденция движения к свету) биологических систем, свойственный, например, некоторым зеленым водорослям. Интересное «стайное» (schooling) поведение было обнаружено при ультрафиолетовом (УФ) облучении частиц хлорида серебра (AgCl) микрометрового размера [82]. AgCl-частицы движутся автономно в деионизированной воде вследствие самодиффузиофореза из-за асимметричного разложения AgCl. Под воздействием УФ-облучения движущееся AgCl-частицы выделяют ионы, на которые другие частицы реагируют дрейфом или «стайным движением» в области с более высокой концентрацией частиц. При смешении фотонеактивных частиц диоксида кремния (SiO_2) с AgCl-частицами SiO_2-частицы реагируют на выделение ионов дрейфом, окружая отдельные AgCl-частицы (рис. 8). В суспензии AgCl-частиц в разбавленном растворе перекиси водорода при УФ-облучении наблюдались одновременно одночастичный и коллективный, многочастичный, отклики, вызванные колебательным, обратимым, преобразованием AgCl в серебро на поверхности частиц [84]. Коллективное движение этих микропловцов при УФ-облучении приводит к образованию кластеризованных химических осцилляторов со значительной пространственно-временной корреляцией между частицами.

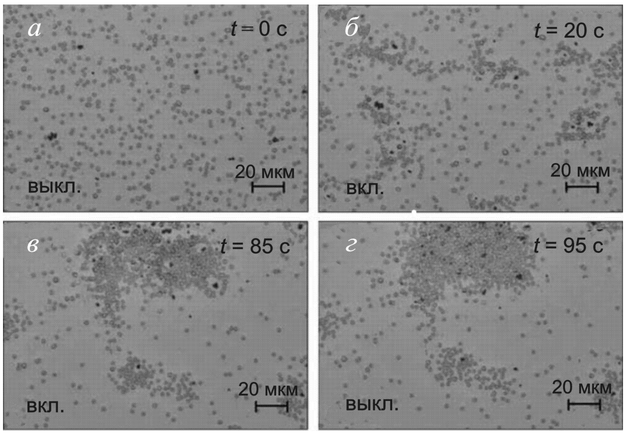


Рис. 8. Поведение «хищник — жертва», показываемое 1-мкм AgCl-частицами (темные объекты) и 2,34-мкм SiO_2-сферами, смешанными в деионизированной воде. После УФ-облучения (*а—в*) SiO_2-сферы активно ищут и окружают AgCl-частицы. Когда включено УФ-облучение, вокруг AgCl-частиц видна 2—3-мкм недоступная зона; при выключении УФ-облучения зона изчезает (*г*) [82]

3. Биоколлоиды: суспензии плавающих микроорганизмов

Хотя существуют очевидные различия между суспензиями живых бактерий и синтетическими коллоидными системами, у них есть также и много общего, особенно с системами искусственных микропловцов, рассмотренных в разд. 2. Например, размер широко распространенной аэробной палочковидной бактерии *Bacillus subtilis* составляет 5 мкм, ее типичная скорость движения около 20 мкм/с, как и у большинства искусственных микропловцов. В дополнение к чисто биологическим механизмам, таким как хемотаксис, деление клеток и т. д., бактерии испытывают тот же спектр сил, что и коллоидные самоподвижные частицы аналогичного размера: гидродинамическое увлечение, стерическое отталкивание, выталкивающую силу (при плавучести), тепловые флуктуации. Так как число Рейнольдса для отдельных бактерий чрезвычайно мало, эффектом инерции жидкости можно пренебречь[7]. Кроме того, некоторые бактерии могут обладать постоянным магнитным моментом (так называемые магнитотактические бактерии, как, например, *Magnetospirillium magnetotacticum*), и, следовательно, их можно контролировать и собирать с помощью внешнего магнитного поля [85, 86].

[7] Для бактерии длиной 5 мкм, плывущей в воде со скоростью 20 мкм/с, соответствующее число Рейнольдса $\mathrm{Re} = LV/\nu \approx 10^{-4}$, где $\nu = 0{,}01$ см^2/с — кинематическая вязкость воды.

3.1. Коллективное поведение

Подвижные (плавающие) микроорганизмы, например многие бактерии, передвигаются в вязкой жидкости с помощью вращения геликоидального жгутика, при этом часто развиваются крупномасштабные коллективные течения (стаи, swarms) с характерным масштабом длины, значительно превышающим размер индивидуального микроорганизма (см. далее рис. 10, *а*). Коллективное поведение подвижных аэробных бактерий, особенно при высокой концентрации, определяется сложным балансом между плавучестью, гидродинамическим взаимодействием, потреблением кислорода и столкновениями. Считается, что коллективное движение и самоорганизация в суспензиях плавающих бактерий часто возникают в результате действия чисто «физических механизмов»: гидродинамического взаимодействия между организмами и столкновений (рис. 9), в то время как специфические биологические механизмы, такие как хемотаксис [75], играют относительно незначительную роль. Крупномасштабная самоорганизация вызвана механической энергией, передающейся от вращающихся бактериальных жгутиков. Таким образом, в отличие от гидродинамической турбулентности при высоких числах Рейнольдса передача энергии в бактериальной суспензии происходит на микроскопическом уровне.

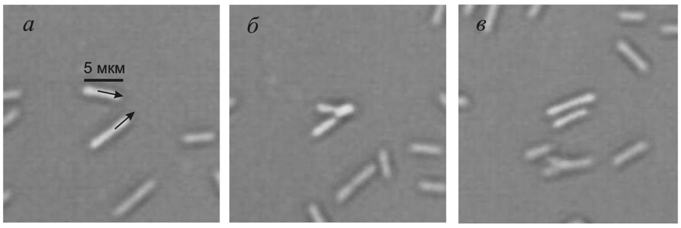


Рис. 9. Последовательность снимков, иллюстрирующих столкновение двух плавающих бактерий *Bacillus subtilis* в тонкой свободно подвешенной жидкой пленке [77]. Стрелки показывают направление движения. Столкновение приводит к выравниванию ориентаций бактерий

Экспериментальные исследования суспензий *Bacillus subtilis* показали, что при концентрации выше некоторой критической наблюдается постепенный переход от случайного блуждания к коллективному движению [76, 77]. Коллективное движение характеризуется увеличением длины корреляции поля скоростей в 6—8 раз и 6-кратным увеличением скорости плавания бактерий. Такое резкое увеличение скорости в режиме коллективного движения является, скорее всего, результатом двух эффектов: гидродинамического снижения сопротивления в более плотно упакованной бактериальной «стае» и более эффективной передачи энергии вследствие синхронизации жгутиков бактерий путем гидродинамической связи [87].

3.2. Ректификация случайного движения

Суспензии плавающих бактерий демонстрируют материальные свойства, сильно отличающиеся от свойств суспензий пассивных частиц. Недавно было обнаружено, что в концентрированной суспензии подвижных бактерий, таких как *Bacillus subtilis, Escherichia coli* и т. д., активность (т. е. самодвижение) приводит к уменьшению вязкости [44] и резкому увеличению коэффициента диффузии [45, 46, 89]. Кроме того, было показано, что можно извлекать полезную механическую энергию из случайного бактериального движения [78]. Согласно законам термодинамики нельзя совершить полезную работу с помощью броуновского движения частиц в равновесии, однако эти движения могут быть «ректифицированы» в неравновесных условиях, например при наличии асимметричных геометрических препятствий. На рис. 10, *б*, *в* показано, как аэробные бактерии *Bacillus subtilis*, случайно движущиеся в подвешенной пленке жидкости, заставляют вращаться субмиллиметровые шестеренки с асимметричными зубцами и сборки из шестеренок. Угловой скоростью шестеренки можно управлять, изменяя количество кислорода, доступного бактериям. В отличие от пассивных частиц, бактерии могут скользить по наклонному краю зубца шестеренки, попадать в ловушку в углах на стыках зубцов и оставаться в ней длительное время, прежде чем наконец смогут покинуть эти ловушки. Так как бактерии являются самоподвижными, они оказывают давление на стенку зубца шестеренки в период захвата и эффективно передают импульс шестеренке.

Можно оценить мощность W_g случайного движения бактерий, вращающего шестеренку: $W_g \sim f_r\Omega^2$, где f_r — вращательный коэффициент вязкого сопротивления, Ω — скорость вращения шестеренки. Аппроксимируя шестеренку тонким диском радиуса R, получаем $f_r \approx 32\eta R^3/3$ [73]. Для типичных условий эксперимента, $R \approx 200$ мкм и $\Omega \approx 1/10$ рад/с (1 оборот в минуту), получаем $W_g \sim 10^{-16}$—10^{-15} Вт, т. е. порядка нескольких фемтоватт. Одна бактерия развивает мощность $W_b \sim f_b V^2 \sim 10^{-18}$—$10^{-17}$ Вт, где f_b — трансляционный коэффициент вязкого сопротивления для одной бактерии. Таким образом, требуется всего лишь несколько сот бактерий, чтобы заставить шестеренку вращаться. (Здесь использованы значения скорости бактерии $V \approx 20$ мкм/с, эффективного размера бактерии $a = 2$—5 мкм и трансляционного коэффициента вязкого сопротивления $f_r = 6\pi\eta a$.) Возможность использовать и контролировать энергию коллективного движения является важным условием для дальнейшего развития механических систем, управляемых микроорганизмами или синтетическими микропловцами.

Рисунок 10, *г* иллюстрирует ректификацию концентрации бактерий в микропотоковых камерах с воронкообразными (храповыми) стенками [88]. В состоянии равновесия усредненная концентрация бактерий во всех

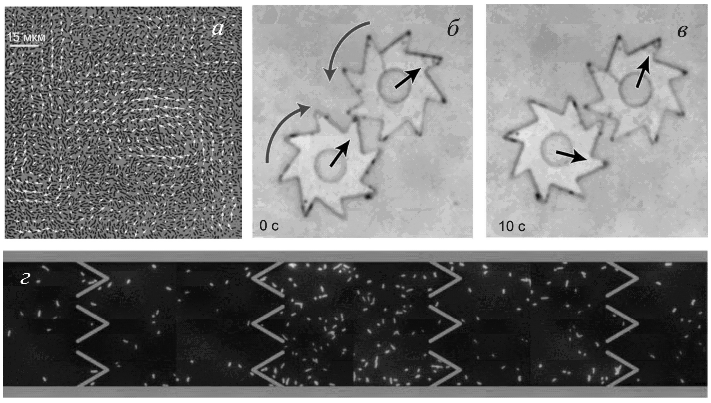


Рис. 10. Коллективное движение в концентрированной суспензии плавающих бактерий *Bacillus subtilis* (*а*), они видны как короткие темные полоски, стрелки указывают направление бактериального потока [77]. Коллективное движение проявляется в формировании водоворотов и струй с характерным масштабом, превышающим длину бактерий на порядок. Плавающие бактерии *Bacillus subtilis* вращают микроскопические (0,5 мм) шестеренки, каждая из которых тяжелее, чем одна бактерия, примерно в миллион раз [78] (*б, в*). Флюоресцентная микрофотография отдельных плавающих бактерий *Escherichia coli* внутри микроканала с воронкообразными барьерами (*г*). В микрокамерах, ограниченных барьерами с противоположно направленными воронками, концентрация бактерий более высокая [88]

камерах должна быть одинаковой. Однако, поскольку бактериальная суспензия является неравновесной системой, большинство бактерий может скапливаться в одной камере из-за ректификационного смещения, введенного воронками. Механизм ректификации похож на описанный выше.

3.3. Понижение вязкости

От способа движения зависит, каким образом плавающие микроорганизмы изменяют эффективные свойства суспензии. Например, большинство плавающих бактерий имеют расположенный сзади пропеллер — вращающийся геликоидальный жгутик. В отличие от бактерий, некоторые одноклеточные водоросли, такие как *Chlamydomonas reinhardtii,* плавают благодаря колебательному движению двух выступающих вперед ресничек (cilia). В результате структуры потоков, которые создаются плавающими микроорганизмами, сильно различаются. Так как суммарная сила, приложенная к самоподвижным частицам, равна нулю, микроорганизм накладывает силовой диполь на подвешивающую жидкость — сила движения компенсируется вязким сопротивлением. Вдали от микроорганизма гидродинамическая скорость потока **v** описывается точечным гидродинамическим диполем:

$$\mathbf{v} = -u_0 \mathbf{r} \left(\frac{3(\mathbf{rd})^3}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right), \qquad (10)$$

где $\mathbf{d}$ — единичный вектор ориентации диполя; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор относительно центра диполя; $u_0 = \alpha V_0 L^2$ — сила гидродинамического диполя [73]; V_0 — магнитуда скорости движения; L — длина бактерии; $\alpha \sim 0{,}1$—$0{,}3$ — коэффициент, определяемый формой микропловца. Знак диполя u_0 зависит от деталей расположения пропеллера: отрицателен для бактериеподобных пловцов, или толкателей (pushers), и положителен для водорослеподобных пловцов, или гребцов (pullers). Асимптотическое поле течений для отдельной бактерии показано на рис. 11, *а*. Соответствующие поля течений для плавающих бактерий и одноклеточных водорослей были измерены экспериментально [90, 91].

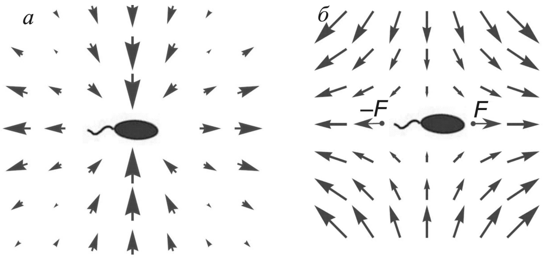


Рис. 11. Гидродинамическое поле скоростей, созданное плывущей бактерией: *а* — точечный диполь вызывает гидродинамическое течение с квадрупольной симметрией [73]; *б* — чисто сдвиговое (elongational) течение ориентирует бактерии вдоль устойчивого направления. Бактерия создает диполь сил величиной F и ускоряет течение, что приводит к уменьшению эффективной вязкости

Чтобы понять влияние бактерий на реологические свойства суспензии, рассмотрим следующие простые аргументы [92]. Поскольку тело бактерии имеет палочковидную форму (соотношение сторон составляет около 5), бактерия будет реориентирована сдвиговым потоком. Например, в чистом потоке сдвига бактерия будет ориентироваться по устойчивой оси потока (рис. 11, *б*). Поскольку бактерия является силовым диполем, она не создает дополнительных сил, действующих на внешнюю стенку, и, следовательно, измеряемое напряжение сдвига не меняется. Тем не менее это ускорит течение жидкости вдоль направления движения, увеличив тем самым скорость сдвиговых деформаций потока. В результате эффективная вязкость, являясь отношением напряжения сдвига к скорости сдвиговых деформаций, при наличии бактерий будет уменьшаться. В отличие от бактерий, водорослеобразные пловцы (гребцы) увеличивают вязкость суспензии.

Экспериментальное исследование суспензий различных микроорганизмов действительно продемонстрировало значительное снижение вязкости суспензии бактерий [44] и увеличение вязкости суспензии водорослей [93]. Зависимость вязкости от концентрации бактерий показана на рис. 12. В режиме коллективного движения при относительно высоких концентрациях наблюдается семикратное снижение вязкости. При дальнейшем увеличении концентрации бактерий вязкость снова повышается, вероятно, из-за застревания бактерий и замедления обмена веществ, накопления отходов и т. д.

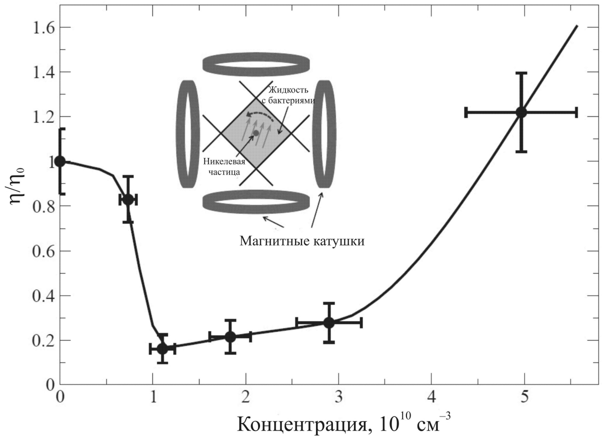


Рис. 12. Снижение вязкости для суспензии плавающих бактерий *Bacillus subtilis* [44]. С увеличением концентрации бактерий эффективная вязкость суспензии η уменьшается в 7 раз по сравнению с вязкостью чистой жидкости η_0. На вставке — схема экспериментальной установки. Магнитная (никелевая) частица погружается в пленку жидкости, содержащей бактерии *Bacillus subtilis*. Частица вращается под действием магнитного поля, создаваемого набором катушек; вязкость вычисляется исходя из измерений вращательного момента, действующего на частицу

Хотя экспериментальные результаты качественно соответствуют тенденции, предсказанной на основании простых аргументов [92], в действительности дело обстоит гораздо сложнее. В частности, эксперименты проводятся в геометрии, близкой к плоскому сдвиговому течению (поток между двумя параллельными движущимися стенками), а не к чисто сдвиговому течению. В этом случае бактерии будут вращаться течением по отдельности, а не выстраиваться по устойчивой оси [73]. Как было показано в теоретических работах, чтобы объяснить снижение вязкости в случае плоского сдвигового течения, в дополнение к инжекции энергии плавающими бактериями нужно учитывать гидродинамическое взаимодействие между микропловцами и их случайные реориентации (кувыркания) [94, 95].

4. Теоретические подходы

Поскольку активные коллоиды находятся в неравновесном тепловом состоянии, мощный аппарат термодинамики и статистической физики, разработанный для равновесных систем, например различные методы, основанные на минимизации энергии или максимизации энтропии, в большинстве случаев не применим. Таким образом, прямое численное моделирование коллоидной суспензии и упрощенные феноменологические модели стали самыми популярными инструментами исследования. Здесь представлен очень короткий (и далеко не полный) обзор некоторых теоретических и вычислительных подходов. Различные теоретические подходы часто применяются к одной и той же экспериментальной системе. Использование континуальных крупнозернистых моделей, полученных для макроскопических степеней свободы (концентрация, скорость, поляризация и т. д.), как правило, более эффективно для вычислений, чем прямое моделирование движения частиц, и в общем обеспечивает более глубокое понимание. Эти модели зависят от значительно меньшего числа параметров и позволяют изучать большие системы на более длительном масштабе времени. С другой стороны, систематическое получение крупнозернистых уравнений в неравновесном случае является сложной задачей.

4.1. Модели классической молекулярной динамики

На рис. 13 представлено сравнение результатов компьютерного моделирования и эксперимента с суспензиями под воздействием электрического [96] или магнитного поля [55] (см. рис. 1, 5). В большинстве случаев наблюдается хорошее качественное, а иногда даже количественное соответствие между экспериментом и компьютерным моделированием. Несмотря на то что изучаемые системы весьма различны (заряженные частицы в работах [18, 47] и магнитные частицы в исследовании [55]), подходы моделирования имеют некоторые общие черты. В обоих случаях временная эволюция индивидуальных коллоидных частиц описывается уравнениями Ланжевена с тепловым шумом и сильной диссипацией (броуновская динамика). Коллоидные частицы, как правило, рассматриваются как твердые сферы или диски с фиксированным дипольным моментом [55] либо электрическим зарядом [96], но гидродинамические взаимодействия между частицами не учитываются. Поскольку реализация столкновений между жесткими дисками или сферами связана со значительными вычислительными трудностями (см., например, [97]), часто используется «смягченный» потенциал взаимодействия — потенциал Леннарда-Джонса — и более жесткий потенциал $V(r_{ij}) = V_0 \exp(-(r_{ij} - a)/\lambda)/(r_{ij} - a)$, где $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| > a$ — расстояние между частицами, a — радиус частицы, V_0 и λ — сила и длина затухания потенциала соответственно.

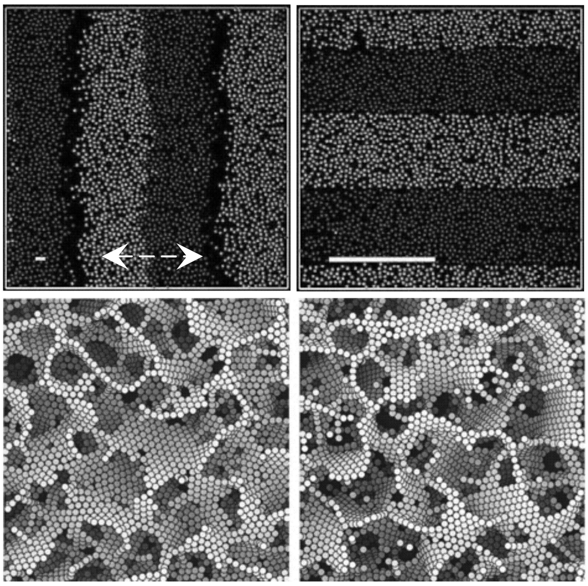


Рис. 13. Результаты моделирования методом броуновской динамики смеси двух противоположно заряженных коллоидов (*а*, *б*). Направление переменного электрического поля показано пунктирной белой стрелкой, масштабная шкала пропорциональна движущей силе, т. е. амплитуде поля. В согласии с экспериментом [18, 47] (см. рис. 1, *д*, *е*) в случае малых движущих сил статические полосы формируются перпендикулярно направлению поля, а в случае движущих сил большей амплитуды дорожки формируются параллельно направлению поля [96]. Результаты компьютерного моделирования структур, возникающих в суспензии магнитных коллоидов при воздействии переменного трехосного магнитного поля (*в*, *г*). Снимок *в*, полученный для трехмерных гетеродинированных полей, мало отличается от снимка *г*, сделанного при имитации отжига (путем тепловых флуктуаций, нет поля) (ср. рис. 5, *ж*) [55]

Броуновскую динамику можно проиллюстрировать на примере системы из двух противоположно заряженных коллоидов, находящихся под воздействием электрического поля [96]. На частицы типа A и B действуют периодические силы $\mathbf{f}^{A}(t) = -\mathbf{f}^{B}(t) = f_0 \sin(\omega t)\mathbf{e}_x$, где f_0 и ω — амплитуда и частота накачивающего поля. Уравнения движения записываются в виде

$$\zeta^{A,B}\dot{\mathbf{r}}_i^{A,B} = \mathbf{f}^{A,B} - \sum_{i \neq j} \frac{dV(r_{ij})}{dr_j} + \xi_i(t), \qquad (11)$$

где $\zeta^{A,B}$ — подвижность частиц, $\dot{\mathbf{r}}_i^{A,B}$ — положения частиц, ξ — случайная сила (тепловой шум). Несмотря на эти серьезные упрощения, моделирование часто воспроизводит ключевые экспериментальные наблюдения:

формирование полос [96] и «коллоидной пены» [55]. Как было показано в работе [98], гидродинамическое взаимодействие между частицами, критичное в некоторых случаях, по всей видимости, не важно для сильно возбужденных противоположно заряженных коллоидов, т. е. для дорожек.

4.2. Континуальные модели

Теоретическое описание становится значительно более сложной задачей, если потоки, порожденные коллоидными частицами, играют большую роль, как в случае пульсирующих колец и вращающихся вихрей [48] и самособирающихся магнитных пловцов [33]. Феноменологическая континуальная модель, основанная на системе уравнений для концентрации частиц и самоиндуцированного электроосмотического потока, была предложена в работе [52]. Модель оперирует двумерными концентрациями (усредненными вдоль вертикальной координаты z) для двух типов частиц: концентрацией газа ρ_g, т. е. быстро движущихся частиц, и концентрацией малоподвижных частиц осадка ρ_p. Хотя разделение на газ и осадок представляется достаточно искусственным, оно позволяет значительно уменьшить вычислительные сложности задачи. Поскольку полное число частиц N сохраняется, $N = \int(\rho_p + \rho_g)dxdy = \text{const}$, то динамика описывается с помощью законов сохранения:

$$\partial_t \rho_g = -\nabla \mathbf{J}_g + f, \quad \partial_t \rho_p = \nabla \mathbf{J}_p - f, \qquad (12)$$

где $\mathbf{J}_{g,p}$ — потоки газа и осадка, функция f описывает скорость преобразования газа в осадок, которая зависит от $\rho_{g,p}$, приложенного электрического поля E и проводимости электролита (пропорциональной концентрации алкоголя c). Потоки (комбинация диффузионных и адвективных потоков) можно представить в следующем общем виде:

$$\mathbf{J}_{g,p} = -D_{g,p}\nabla\rho_{g,p} - \alpha_{g,p}(E)\rho_{g,p}\mathbf{v}_\perp\left[1-\beta_{g,p}(E)\rho_{g,p}\right]. \qquad (13)$$

Здесь $D_{g,p}$ — коэффициенты диффузии; $\alpha_{g,p}$, $\beta_{g,p}$ — линейные/квадратичные коэффициенты адвекции для каждой из фракций; член $1 - \beta_{g,p}\rho_{g,p}$ описывает насыщение потока при высоких концентрациях; $\mathbf{v}_\perp$ — горизонтальная (в плоскости) скорость жидкости, которая может быть получена из условия несжимаемости $\nabla\mathbf{v}_\perp + \partial_z v_z = 0$. Предполагая, что вертикальная завихренность $\omega_z = \partial_y v_x - \partial_x v_y$ мала по сравнению с завихренностью в плоскости (для $\omega_z = 0$), горизонтальную скорость можно вывести из квазипотенциала ϕ: $\mathbf{v}_\perp = -\nabla\phi$. Тогда из условия несжимаемости следует

$$\nabla^2\phi = \partial_z v_z. \qquad (14)$$

В свою очередь, усредненную вертикальную компоненту скорости $V = h^{-1}\int_0^h v_z dz$ (h — толщина экспериментальной ячейки) можно получить из соответствующего уравнения Навье — Стокса (см. детали в [52]):

$$\partial_t V = \nu \nabla^2 V - \zeta V + cE\int K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)(\rho_g + \rho_p)dr', \tag{15}$$

где ν — кинематическая вязкость, ζ учитывает диссипацию из-за трения о дно, а последний член описывает усредненную по глубине силу, действующую на слабозаряженную жидкость, содержащую заряженные частицы. $K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ является феноменологическим локализованным интегральным ядром, задающим размер возникающих структур. При соответствующем выборе параметров модели и функциональной формы скорости конверсии f модель описывает на качественном уровне все детали фазовой диаграммы, а также все основные структуры, наблюдаемые в эксперименте: статические кристаллы, сотообразные решетки и даже пульсирующие кольца и вращающиеся вихри (рис. 14, *а*—*е*).

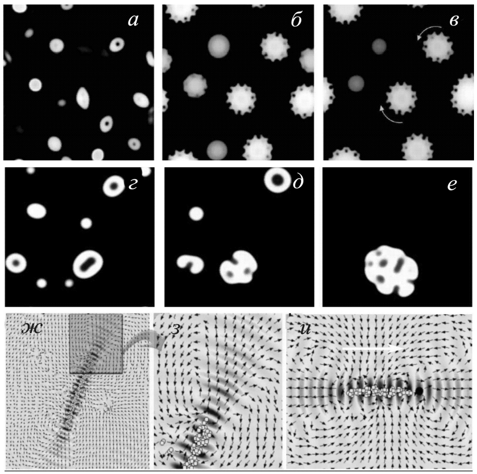


Рис. 14. Формирование вращающихся вихрей-звезд в модели неводной суспензии проводящих микрочастиц, возбуждаемой постоянным электрическим полем [52] (*а*—*в*). Вращающиеся вихри превращаются в пульсирующие кольца при изменении полярности электрического поля (*г*—*е*). Структуры, полученные с помощью компьютерного моделирования, качественно воспроизводят наблюдаемые в эксперименте (см. рис. 2, *а*—*в*) вращающиеся звезды и пульсирующие кольца. Магнитная змея, полученная из 225 частиц, случайно распределенных на поверхности вода — воздух (*ж*), цвета показывают возвышение поверхности, стрелки указывают направление гидродинамических поверхностных течений, созданных змеей [58]; *з* — структура течения вблизи хвоста змеи; *и* — самособирающийся микропловец, образованный змеей, присоединившейся к немагнитной бусинке (большой черный кружок); белая стрелка указывает направление движения (см. также рис. 3, *б*—*е*)

Гибридная модель, основанная на дискретной динамике частиц и континуальном гидродинамическом описании для жидкости, была использована для описания формирования самоорганизующихся магнитных змей и пловцов [58] (рис. 14, *ж—и*). При таком подходе уравнения Ньютона для позиций и ориентаций коллоидных частиц на границе между воздухом и водой связаны с уравнением Навье — Стокса для жидкости. Для описания ректифицированных крупномасштабных потоков, порожденных змеей, необходимо полное нелинейное уравнение Навье — Стокса (а не линейное уравнение Стокса). Чтобы снизить вычислительную нагрузку, связанную с численным решением трехмерных нелинейных уравнений в частных производных для потока жидкости, уравнение Навье — Стокса решалось в гораздо более простом приближении мелкой воды для усредненной по глубине горизонтальной скорости **v** [59]. Такое приближение справедливо, когда толщина слоя воды h становится малой по сравнению с размером магнитной змеи. Эти уравнения имеют вид

$$\partial_t h + \nabla h\mathbf{v} = 0, \tag{16}$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla\mathbf{v} = \nu(\nabla^2\mathbf{v} - \zeta\mathbf{v}) - \nabla h + \sigma\nabla\nabla^2 h + H_0 \sin(\omega t)\sum_j s(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)\mathbf{p}_j, \tag{17}$$

где σ — поверхностное натяжение, ζ описывает трение о дно. Последний член в правой части уравнения (17) описывает поток, создаваемый переменным вертикальным магнитным полем с амплитудой H_0 и частотой ω, действующим на магнитные диполи с ориентацией $\mathbf{p}_j = (\cos(\phi_j), \sin(\phi_j))$, функция $s(r)$ определяется формой частиц. Положения $\mathbf{r}_j$ и ориентации ϕ_j частиц в свою очередь вычисляются из уравнений Ньютона:

$$m_p\ddot{\mathbf{r}}_j + \mu_t\dot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{F}_j + \mu_t\mathbf{v} - \beta\nabla h, \tag{18}$$

$$I_p\ddot{\phi}_j + \mu_r\ddot{\phi}_j = T_j + \Sigma_j + \kappa H_0 \sin(\omega t)\nabla h \times \mathbf{p}_j, \tag{19}$$

где m_p, I_p, μ_t и μ_r — масса частицы, момент инерции, трансляционный и вращательный коэффициенты вязкого сопротивления соответственно, $\mathbf{F}_j$ и T_j — силы и вращательные моменты, связанные с магнитным диполь-дипольным взаимодействием и стерическим отталкиванием между частицами (вращательные моменты имеют только одну ненулевую компоненту), Σ_j — вращательный момент, создаваемый сдвиговым гидродинамическим течением[8]. Уравнения (17)—(19) имеют следующий смысл: в дополнение к тому, что на частицы действуют магнитные и гидродинамические силы и моменты сил $\mathbf{F}_j$, T_j, Σ_j, частицы переносятся гидродинамическим потоком ($\sim \mathbf{v}$), скользят вниз по градиенту поверхности под действием

[8] Для типичных условий эксперимента эти моменты малы по сравнению с другими членами уравнения (19).

силы тяжести ($\beta\nabla h$). Последний член в правой части уравнения (19) заслуживает особого внимания: он описывает магнитное ориентирование частиц вдоль проекции внешнего переменного магнитного поля, параллельной поверхности жидкости. Эта осциллирующая на той же частоте ω плоскостная компонента поля, появляющаяся из-за деформации поверхности, пропорциональна наклону ∇h. Такое плоскостное магнитное поле вызывает антиферромагнитное упорядочение соседних сегментов и необходимо для формирования змей и звезд. Уравнения (16)—(19) успешно воспроизводят весь процесс самосборки магнитных змей из случайного распределения частиц на поверхности, а также формирования гибрида змеи-бусинки (рис. 14, *ж—и*).

4.3. Кинетический подход

Хотя в понимании коллективного движения в суспензиях самодвижущихся микропловцов на основе анализа упрощенных вероятностных моделей был достигнут значительный прогресс, детальная роль конкретных физических механизмов является предметом активного обсуждения. Самые последние теоретические подходы основаны на решении кинетических уравнений среднего поля вида уравнений Фоккера — Планка — Смолуховского для нестационарной плотности вероятности $P(\mathbf{r}, \mathbf{d}, t)$ нахождения частицы в определенном положении $\mathbf{r}$ с ориентацией $\mathbf{d}$. В большинстве из этих подходов гидродинамические взаимодействия описываются в пределе низкой концентрации, когда потоки, создаваемые большим числом бактерий, можно аппроксимировать суперпозицией полей отдельных бактерий [99, 100]. Бактериальные столкновения часто вводятся через бинарный интеграл столкновений [101]. В наиболее общей форме это кинетическое уравнение может быть записано в виде

$$\partial_t P = -\nabla_r((V_0\mathbf{d}+\mathbf{u})P) - \nabla_n(\omega P) + I_c + D_t\nabla_r^2 P + D_r\nabla_d^2 P, \qquad (20)$$

где V_0 — скорость отдельной бактерии по отношению к жидкости в направлении ее единичного вектора ориентации $\mathbf{d}$; $\mathbf{u}$ — гидродинамическая скорость, создаваемая всеми плывущими бактериями; $\omega = (\mathbf{I} - \mathbf{dd})\cdot(\gamma\mathbf{E} + \mathbf{W})\cdot\mathbf{d}$ — угловая скорость течения, образованная всеми бактериями, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{W}$ — тензоры скорости деформаций и завихренности, γ — формфактор, который близок к единице для вытянутых объектов типа бактерий; D_t и D_r — коэффициенты трансляционной и вращательной диффузии (из-за кувыркания бактерий); ∇_r и ∇_d — векторные дифференциальные операторы для позиций $\mathbf{r}$ и ориентаций $\mathbf{d}$ [73]; I_c — бинарный интеграл столкновений, описывающий короткодействующее ориентационное взаимодействие между бактериями: непосредственные стерические столкновения между бактериями приводят к совпадению их ориентаций и соответственно к более коррелированному состоянию [101] (см. рис. 9). Бактерии взаимодействуют не только через столкновения, но и посредством дальнодействующих гидродинамических сил, описываемых трансляционными и вращательными скоростями **v**, ω. Различные версии уравнения (20) решались численно (в основном для двумерного случая) или сводились к упрощенной системе крупнозернистых уравнений для усредненных величин, таких как локальная концентрация $\rho = \int P d\mathbf{d}$, средняя ориентация $\tau = \int \mathbf{d} P d\mathbf{d}$ и т. д. Хотя кинетические модели воспроизвели многие ключевые экспериментальные наблюдения (например, возникновение движения при превышении критической концентрации), согласие результатов моделирования с данными экспериментов остается в основном качественным.

Заключение

Изучение активных коллоидов является быстро растущей и развивающейся областью, в которой в ближайшем будущем могут произойти многие научные и технологические прорывы. Одним из интригующих направлений исследований является коллективное поведение коллоидов с частицами анизотропной формы, такими как стержни, пластинки, или даже более сложной формы, например киральной. Как и в жидких кристаллах [6], где различные нетривиальные фазы возникают из-за анизотропии форм молекул, мы можем ожидать богатого спектра нетривиальных динамических состояний и структур в случае, когда суспензия анизотропных частиц накачивается электрическими или магнитными полями. Эти состояния, обладающие уникальными оптическими и механическими свойствами, будут играть большую роль в создании реконфигурируемых умных материалов для новых технологий на основе самосборки анизотропных коллоидов в самых разных областях: от фотоники [102, 103] до микропотоковых устройств [62] и роботики [36, 104, 105].

Научные прорывы ожидаются в области искусственных микропловцов. Скорее всего, будут развиваться дизайн микропловцов, оптимизация их способов плавания и функционализация для конкретных приложений. Современные конструкции микропловцов основаны главным образом на перекиси водорода, что делает их непригодными для большинства медицинских применений, например для целевой доставки лекарств. Весьма желательно и перспективно использование в конструкции микропловцов общих биологических видов носителей энергии, таких как глюкоза. Еще одним интересным приложением является разработка и оптимизация микропловцов для конкретных коллективных задач, таких как целевые доставки грузов, параллельная сборка, очистка от загрязнений, и других задач, обычно связанных с «роевым интеллектом» (swarm intelligence), подходом к управлению сложной многороботной системой, состоящей из большого числа простых микророботов [106].

Благодаря революционному увеличению мощности компьютеров ожидается значительное повышение точности численных алгоритмов для активных коллоидных суспензий. Большинство современных теоретических подходов основано на прямом моделировании отдельных частиц со случайными силами из-за тепловых флуктуаций, в то время как гидродинамическое взаимодействие учитывается в сильно упрощенном виде, в основном в виде вязкого трения, действующего на частицу, или в приближении среднего поля (см., например, [58, 61, 98, 107]). Более адекватное описание гидродинамических сил между коллоидными частицами, не ограничивающееся рамками парного взаимодействия, является весьма желательным, но пока вычислительные затраты непомерно высоки. Кроме моделирования отдельных частиц, различные континуальные феноменологические подходы были предложены для описания динамических состояний, таких как вращающиеся бинарные кластеры и самодвижущиеся магнитные змеи [33, 52]. Таким образом, дальнейший прогресс ожидается в разработке нестационарных крупнозернистых моделей для динамических состояний в коллоидных суспензиях. Модели, полученные из первых принципов, например в рамках кинетической теории, должны наряду с локальными взаимодействиями (столкновениями, силами смачивания) и т. д. включать дальнодействующие силы (гидродинамические, магнитные).

Быстро возрастает число теоретических и вычислительных работ, посвященных общим динамическим и статистическим свойствам коллективного поведения, демонстрируемого самоподвижными частицами с упрощенным взаимодействием — от точечных частиц до жестких стержней и плавающих жгутиков (см., например, [108—113]). Были предсказаны различные динамические фазы — от движущихся кластеров и групп до роевых состояний. Тем не менее сейчас связь между таким упрощенным моделированием и экспериментально наблюдаемой динамикой самодвижущихся коллоидов остается не вполне удовлетворительной. Улучшенные вычислительные модели, скорее всего, будут более реалистично описывать специфические свойства самоподвижных коллоидов и разнообразие сил, действующих между частицами, — от электрических и магнитных до стерических и гидродинамических.

Работа поддержана Министерством энергетики США, Управлением фундаментальных наук об энергии, Отделом материаловедения и инженерии (договор DEAC02-06CH11357).

Литература

1. *Hunter, R. I., White, L. P., Chan, D. Y. C.* Foundations of colloid science. V. 1. Oxford : Clarendon Press, 1987.

2. *Norde, W.* Colloids and interfaces in life sciences. Boca Raton : CRC, 2003.

3. *Anscombe, N., Craig, F., Harris, S.* // Engineering & Technology. 2012. V. 7. P. 68—71.

4. *Sagis, L. M. C.* // Rev. Mod. Phys. 2011. V. 83. P. 1367—1403.
5. *Frenkel, D.* // Physica A : Statistical Mechanics and its Applications. 2002. V. 313. P. 1—31.
6. *Kléman, M., Lavrentovich, O. D.* Soft Matter Physics: an Introduction. Berlin : Springer-Verlag, 2003.
7. *Witten, T. A.* // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. P. S367—S373.
8. *Aranson, I. S., Tsimring, L. S.* Granular Patterns. Oxford : Oxford University Press, 2009.
9. *Israelachvili, J. N.* Intermolecular and Surface Forces. Burlington : Academic Press, 2011.
10. *Ebert, F., Keim, P., Maret, G.* // Europ. Phys. J. E : Soft Matter and Biological Physics. 2008. V. 26. P. 161—168.
11. *Royall, C. P., Vermolen, E., Van Blaaderen, A., Tanaka, H.* // J. Phys. : Condensed Matter. 2008. V. 20. P. 404225.
12. *Hiltner, P. A., Krieger, I. M.* // J. Phys. Chem. 1969. V. 73. P. 2386—2389.
13. *Subramanian, G., Manoharan, V. N., Thorne, J. D., Pine, D. J.* // Advanced Materials. 1999. V. 11. P. 1261—1265.
14. *Hynninen, A. P., Thijssen, J. H. J., Vermolen, E. C. M., Dijkstra, M., Van Blaaderen, A.* // Nature Materials. 2007. V. 6. P. 202—205.
15. *Cai, W., Shalaev, V.* Optical Metamaterials : Fundamentals and Applications. Berlin : Springer-Verlag, 2009.
16. *Lapine, M., Shadrivov, I. V., Powell, D. A., Kivshar, Y. S.* // Nature Materials. 2011. V. 11. P. 30—33.
17. *Miszta, K., de Graaf, J., Bertoni, G., Dorfs, D., Brescia, R., Marras, S. et al.* // Nature Materials. 2011. V. 10. P. 872—876.
18. *Vissers, T., Wysocki, A., Rex, M., Löwen, H., Royall, C. P., Imhof, A. et al.* // Soft Matter. 2011. V. 7. P. 2352—2356.
19. *Vissers, T., Imhof, A., Carrique, F., Delgado, A. V., Van Blaaderen, A.* // J. Colloid Interface Sci. 2011. V. 361. P. 443—455.
20. *Leunissen, M. E., Christova, C. G., Hynninen, A. P., Royall, C. P., Campbell, A. I., Imhof, A. et al.* // Nature. 2005. V. 437. P. 235—240.
21. *Leunissen, M. E., Vutukuri, H. R., Van Blaaderen, A.* // Advenced Materials. 2009. V. 21. P. 3116—3120.
22. *Martinez-Veracoechea, F. J., Mladek, B. M., Tkachenko, A. V., Frenkel, D.* // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. P. 045902.
23. *Li, F., Josephson, D., Stein, A.* // Angewandte Chemie International Edition. 2011. V. 50. P. 360—388.
24. *Frenkel., D, Wales, D. J.* // Nature Materials. 2011. V. 10. P. 410—411.
25. *Löwen, H.* // J. Phys. : Condensed Matter. 2008. V. 20. P. 404201.
26. *Sacanna, S., Irvine, W. T. M., Chaikin, P. M., Pine, D. J.* // Nature. 2010. V. 464. P. 575—578.
27. *Chen, Q., Bae, S. C., Granick, S.* // Nature. 2011. V. 469. P. 381—384.
28. *Erb, R. M., Son, H. S., Samanta, B., Rotello, V. M., Yellen, B. B.* // Nature. 2009. V. 457. P. 999—1002.
29. *Nykypanchuk, D., Maye, M., Van Der Lelie, D., Gang, O.* // Nature. 2008. V. 451. P. 549—552.
30. *Kraft, D. J., Ni, R., Smallenburg, F., Hermes, M., Yoon, K., Weitz, D. A. et al.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2012. V. 109. P. 10787—10792. doi: 10.1073/pnas.1116820109.
31. *Dreyfus, R., Baudry, J., Roper, M. L., Fermigier, M., Stone, H. A., Bibette, J.* // Nature. 2005. V. 437. P. 862—865.
32. *Tierno, P., Golestanian, R., Pagonabarraga, I., Sagues, F.* // J. Phys. Chem. B. 2008. V. 112. P. 16525—16528.

33. *Snezhko, A., Belkin, M., Aranson, I. S., Kwok, W. K. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. P. 118103.

34. *Kumacheva, E., Garstecki, P., Wu, H., Whitesides, G. P.* // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 128301.

35. *Osterman, N., Poberaj, I., Dobnikar, J., Frenkel, D., Ziherl, P., Babić, D.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 228301.

36. *Snezhko, A., Aranson, I. S.* // Nature Materials. 2011. V. 10. P. 698—703.

37. *Sanchez, C., Arribart, H., Guille, M. M. G.* // Nature Materials. 2005. V. 4. P. 277—288.

38. *Grzybowski, B. A., Wilmer, C. E., Kim, J., Browne, K. P., Bishop, K. J. M.* // Soft Matter. 2009. V. 5. P. 1110—1128.

39. *Li, F., Josephson, D. P., Stein, A.* // Angewandte Chemie International Edition. 2011. V. 50. P. 360—388.

40. *Snezhko, A.* // J. Phys. : Condensed Matter. 2011. V. 23. P. 153101.

41. *Ebbens, S. J., Howse, J. R.* // Soft Matter. 2010. V. 6. P. 726—738.

42. *Lauga, E., Powers, T. R.* // Rep. Prog. Phys. 2009. V. 72. P. 09601.

43. *Gangwal, S., Cayre, O. J., Bazant, M. Z., Velev, O. D.* // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. P. 58302.

44. *Sokolov, A., Aranson, I. S.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 148101.

45. *Wu, X. L., Libchaber, A.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 3017—3020.

46. *Sokolov, A., Goldstein, R. E., Feldchtein, F. I., Aranson, I. S.* // Phys. Rev. E. 2009. V. 80. P. 031903.

47. *Vissers, T., Van Blaaderen, A., Imhof, A.* // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. P. 228303.

48. *Sapozhnikov, M. V., Tolmachev, Y. V., Aranson, I. S., Kwok, W. K.* // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90. P. 114301.

49. *Löwen, H.* // Soft Matter. 2010. V. 6. P. 3133—3142.

50. *Aranson, I. S., Blair, D., Kalatsky, V. A., Crabtree, G. W., Kwok, W. K., Vinokur, V. M. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 3306—3309. doi: 10.1103/PhysRevLett.84.3306.

51. *Yeh, S., Seul, M., Shraiman, B. I.* // Nature. 1997. V. 386. P. 57—59.

52. *Aranson, I. S., Sapozhnikov, M. V.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 234301.

53. *Sapozhnikov, M. V., Aranson, I. S., Kwok, W. K., Tolmachev, Y. V.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 84502.

54. *Yethiraj, A., Van Blaaderen, A.* // Nature. 2003. V. 421. P. 513—517.

55. *Martin, J., Venturini, E., Gulley, G., Williamson, J.* // Phys. Rev. E. 2004. V. 69. P. 021508.

56. *Belkin, M., Snezhko, A., Aranson, I. S., Kwok, W. K.* // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. P. 158301.

57. *Riley, N.* // Theoretical and computational fluid dynamics. 1998. V. 10. P. 349—356.

58. *Belkin, M., Glatz, A., Snezhko, A., Aranson, I. S.* // Phys. Rev. E. 2010. V. 82. P. 015301.

59. *Landau, L. D., Lifshitz, E. M.* Fluid Mechanics. Oxford : Pergamon, 1987.

60. *Elsner, N., Royall, C. P., Vincent, B., Snoswell, D. R. E.* // J. Chem. Phys. 2009. V. 130. P. 154901.

61. *Martin, J. E., Anderson, R. A., Williamson, R. L.* // J. Chem. Phys. 2003. V. 118. P. 1557.

62. *Grzybowski, B. A., Stone, H. A., Whitesides, G. M.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2002. V. 99. P. 4147.

63. *Solis, K. J., Bell, R. C., Martin, J. E. //* J. Appl. Phys. 2010. V. 107. P. 114911.

64. *Nagaoka, Y., Morimoto, H., Maekawa, T.* // Langmuir. 2011. V. 27. P. 9160—9164.

65. *Smoukov, S. K., Gangwal, S., Marquez, M., Velev, O. D.* // Soft Matter. 2009. V. 5. P. 1285—1292.

66. *Paxton, W. F., Baker, P. T., Kline, T. R., Wang, Y., Mallouk, T. E., Sen, A. //* J. Am. Chem. Soc. 2006. V. 128. P. 14881—14888.

67. *Howse, J. R., Jones, R. A. L., Ryan, A. J., Gough, T., Vafabakhsh, R., Golestanian, R.* // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. P. 048102.
68. *Gao, W., Sattayasamitsathit, S., Orozco, J., Wang, J.* // J. Am. Chem. Soc. 2011. V. 133. P. 11862—11864.
69. *Ghosh, A., Fischer, P.* // Nano Letters. 2009. V. 9. P. 2243—2245.
70. *Paxton, W. F., Kistler, K. C., Olmeda, C. C., Sen, A., Angelo, S. K. S., Cao, Y., et al.* // J. Am. Chem. Soc. 2004. V. 126. P. 13424—13431.
71. *Moran, J., Posner, J.* // J. Fluid Mech. 2011. V. 680. P. 31—66.
72. *Sanchez, S., Solovev, A. A., Harazim, S. M., Schmidt, O. G.* // J. Am. Chem. Soc. 2011. V. 133. P. 701.
73. *Kim, S., Karrila, S.* Microhydrodynamics. N. Y. : Butterworth-Heinemann, 1991.
74. *Bazant, M. Z., Squires, T. M.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 66101.
75. *Berg, H. C.* E. coli in Motion. N. Y. : Springer, 2004.
76. *Dombrowski, C., Cisneros, L., Chatkaew, S., Goldstein, R. E., Kessler, J. O.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 98103.
77. *Sokolov, A., Aranson, I. S., Kessler, J. O., Goldstein, R. E.* // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 98. P. 158102.
78. *Sokolov, A., Apodaca, M. M., Grzybowski, B. A., Aranson, I. S.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2010. V. 107. P. 969—974.
79. *Theurkauff, I., Cottin-Bizonne, C., Palacci, J., Ybert, C., Bocquet, L.* // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108. P. 268303. doi: 10.1103/PhysRevLett.108.268303.
80. *Thakur, S., Kapral, R.* // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. P. 026121. doi: 10.1103 /PhysRevE.85.026121.
81. *Ke, H., Ye, S., Carroll, R. L., Showalter, K.* // J. Phys. Chem. A. 2010. V. 114. P. 5462—5467.
82. *Ibele, M., Mallouk, T. E., Sen, A.* // Angewandte Chemie International Edition. 2009. V. 48. P. 3308—3312.
83. *Sen, A., Ibele, M., Hong, Y., Velegol, D.* // Faraday Discuss. 2009. V. 143. P. 15—27.
84. *Ibele, M. E., Lammert, P. E., Crespi, V. H., Sen, A. //* ACS nano. 2010. V. 4. P. 4845.
85. *Cēbers, A., Ozols, M.* // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. P. 021505.
86. *Godoy, M., Moreno, A. J., Jorge, G. A., Ferrari, H. J., Antonel, P. S., Mietta, J. L. et al.* // J. Appl. Phys. 2012. V. 111. P. 044905.
87. *Elfring, G. J., Lauga, E.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 088101.
88. *Lambert, G., Liao, D., Austin, R. H.* // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 104. P. 168102.
89. *Miño, G., Mallouk, T. E., Darnige, T., Hoyos, M., Dauchet, J., Dunstan, J. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. P. 048102.
90. *Drescher, K., Dunkel, J., Cisneros, L. H., Ganguly, S., Goldstein, R. E.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2011. V. 108. P. 10940.
91. *Drescher, K., Goldstein, R. E., Michel, N., Polin, M., Tuval, I.* // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 105. P. 168101.
92. *Hatwalne, Y., Ramaswamy, S., Rao, M., Simha, R. A.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 118101.
93. *Rafa, S., Jibuti, L., Peyla, P.* // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 104. P. 098102.
94. *Haines, B. M., Sokolov, A., Aranson, I. S., Berlyand, L., Karpeev, D. A.* // Phys. Rev. E. 2009. V. 80. P. 041922.
95. *Ryan, S. D., Haines, B. M., Berlyand, L., Ziebert, F., Aranson, I. S.* // Phys. Rev. E. 2011. V. 83. P. 050904.
96. *Wysocki, A., Löwen, H.* // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. P. 041408.
97. *Aranson, I., Tsimring, L.* // Rev. Mod. Phys. 2006. V. 78. P. 641.
98. *Rex, M., Löwen, H.* // Europ. Phys. J. E : Soft Matter and Biological Physics. 2008. V. 26. P. 143—150.

99. *Koch, D. L., Subramanian, G.* // Annu. Rev. Fluid Mech. 2011. V. 43. P. 637—659.
100. *Saintillan, D., Shelley, M. J.* // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. P. 178103.
101. *Aranson, I. S., Sokolov, A., Kessler, J. O., Goldstein, R. E.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. P. 040901.
102. *Tang, S. K. Y., Derda, R., Mazzeo, A. D., Whitesides, G. M.* // Advanced Materials. 2011. V. 23. P. 2413—2418.
103. *Golovin, A. B., Lavrentovich, O. D.* // Appl. Phys. Lett. 2009. V. 95. P. 254104.
104. *Ilievski, F., Mazzeo, A. D., Shepherd, R. F., Chen, X., Whitesides, G. M.* // Angewandte Chemie. 2011. V. 123. P. 1930—1935.
105. *Donald, B., Levey, C., Paprotny, I., Rus, D.* // Algorithmic Foundation of Robotics VIII. Berlin : Springer-Verlag, 2009. P. 69—84.
106. *Beni, G.* // Swarm Robotics. Berlin : Springer, 2005. P. 1—9.
107. *Martin, J. E.* // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. P. 011503.
108. *Grégoire, G., Chaté, H.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 025702.
109. *Ginelli, F., Peruani, F., Bär, M., Chaté, H.* // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 104. P. 184502.
110. *Ripoll, M., Holmqvist, P., Winkler, R., Gompper, G., Dhont, J. K. G., Lettinga, M. P.* // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. P. 168302.
111. *Bialké, J., Speck, T., Löwen, H*. // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108. P. 168301.
112. *Saintillan, D., Shelley, M. J.* // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. P. 58102.
113. *Yang, Y., Marceau, V., Gompper, G.* // Phys. Rev. E. 2010. V. 82. P. 031904.

Нелинейные явления в астрофизике и космологии

КОСМИЧЕСКИЕ СТРУНЫ И ИХ ПОИСКИ ВО ВСЕЛЕННОЙ

М. В. Сажин, О. С. Сажина

В соответствии с современными наблюдательными данными по изучению расширения Вселенной с помощью сверхновых, а также судя по анизотропии реликтового излучения современная Вселенная находится в стадии ускоренного расширения, которое успешно объясняется наличием темной энергии [1] — особой формы энергии вакуумного типа. Однако природа темной энергии до сих пор не выяснена, что является фундаментальной проблемой современной космологии, а также ключевой областью исследования на стыке таких дисциплин, как космология, астрономия и физика элементарных частиц.

Согласно представлениям современной космологии при расширении и охлаждении Вселенной из начальной симметричной фазы Вселенная прошла серию фазовых переходов, теряя часть первоначальной симметрии. Каждая симметрия определяется фундаментальными взаимодействиями. Так, например, теория Великого объединения предсказывает фазовый переход при энергиях порядка 10^{16} ГэВ, нарушающий группу симметрий, которая ассоциируется с объединенными сильными и электрослабыми взаимодействиями. В ранней Вселенной в постинфляционный период при ее расширении и остывании могли бы происходить фазовые переходы вакуума с формированием топологических дефектов.

С наблюдательной точки зрения наибольший интерес представляют топологические космические струны. Механизм их образования не требует специальных предположений о динамике Вселенной, а основывается только на том, что Вселенная остывала. Топологические дефекты формируются потому, что направления нарушений симметрии различны в разных точках пространства. Объединение таких разных участков пространства приводит к топологическим проблемам, в результате чего и формируются дефекты разных размерностей, состоящие из симметричного высокоэнергетического вакуума, который будем называть реликтовой темной энергией.

Минимальная модель, содержащая струны, обладает лагранжевой плотностью, калибровочно инвариантной относительно группы $U(1)$, в то время как основное состояние такой модели не является калибровочно-инвариантным относительно $U(1)$. Множество отличных от нуля вакуумов определяется характерным масштабом энергии, при которой происходит нарушение симметрии. При этом система случайным образом переходит в одно из энергетически выгодных состояний. Непрерывность поля требует существования точки, в которой среднее значение вакуума убывает по всем направлениям. Эта точка расположена в центре поверхности, задающей потенциал. Множество таких точек в трехмерном физическом пространстве и есть струна. Следовательно, область новой фазы содержит внутри себя «вмороженную» область старой, реликтовой фазы. В силу сохранения топологического заряда струны устойчивы, не имеют концов. Основной параметр космической струны — ее масса на единицу длины (μ), которая эквивалентна натяжению струны, есть величина порядка квадрата шкалы энергии, при которой происходит фазовый переход. Отношение квадрата энергии к квадрату массы Планка есть безразмерная величина, равная произведению μ на постоянную Ньютона G. Для струн энергий порядка 10^{16} ГэВ эта безразмерная величина составляет 10^{-6}. Наблюдательные ограничения дают величину того же порядка.

Космические струны были впервые введены Кибблом [2] и на протяжении последних десятилетий служили предметом активных обсуждений в теоретической космологии и в наблюдательной космологии [3, 4]. В присутствии космической струны Вселенная из трехмерно плоской (т. е. обладающей пространственно-временной метрикой Минковского) становится конической. Это глобальный эффект. Глобальная эвклидова геометрия сохраняется всюду, кроме особой точки — вершины конуса. Основной наблюдательный параметр космической струны — это дефицит угла:

$$\alpha = 8\pi G\mu.$$

Исследования последних лет выявили глубокие теоретические связи между топологическими космическими струнами и теорией фундаментальных суперструн, которые в настоящее время являются наиболее многообещающими кандидатами для построения материи и объединения всех типов физических взаимодействий. Такая связь стала возможной с помощью механизмов понижения энергии струн фундаментальной теории (так называемых суперструн). Так, в моделях с некомпактными дополнительными измерениями энергетическая шкала суперструн может быть понижена, чтобы удовлетворять наблюдательным ограничениям на линейную плотность струны. Кроме того, в моделях с большим пятым измерением (модель Рубакова — Шапошникова, согласно которой есть четырехмерная «брана» и пространство дополнительных измерений, так называемый балк) энергия суперструны также может быть понижена за счет того, что часть энергии струна может передавать в балк.

Существует два основных метода поиска космических струн.

Первый метод заключается в поиске гравитационно-линзовых событий, индуцируемых космическими струнами. Если между наблюдателем и космической струной находится внегалактический объект, то лучи света, идущие от этого объекта, будут двигаться в коническом пространстве, а потому формировать два изображения этого объекта. Изображения характеризуются рядом специфических наблюдательных особенностей. Важнейшие из них следующие: одинаковое отношение потоков во всех доступных оптических фильтрах, одинаковая морфология и спектры изображений, а также наличие дублированных структур в изображениях и наличие резких срезов их внешних изофот (уровней яркости) для возможности наблюдать объекты высокого углового разрешения. Наблюдательная база этого метода — глубокие оптические обзоры неба наземными и космическими телескопами. Подобные исследования проводились российско-итальянской группой, возглавляемой профессором М. В. Сажиным [4]. Был исследован двойной внегалактический объект CSL-1, который являлся кандидатом в гравитационно-линзовое событие на космической струне. Моделирование и наблюдения, проведенные с помощью наземных телескопов, а также космического телескопа HST, показали, что объект представляет собой очень редкую пару двух близких и слабовзаимодействующих эллиптических галактик.

Второй метод заключается в поиске сигналов в данных анизотропии микроволнового фонового реликтового излучения. Этот метод основан на изучении радиоданных космического аппарата WMAP. Остановимся на втором методе более подробно.

Реликтовое излучение возникает, когда в первичной плазме нарушается равновесие и фотоны начинают распространяться свободно. Образуется так называемая поверхность последнего рассеяния — самый далекий источник излучения. Температура этой поверхности однородна. Степень ее однородности очень высока и составляет несколько сотых процента. Тем не менее на этой поверхности существует небольшая разница температур. Она называется анизотропией реликтового излучения. В результате обработки семилетних данных спутника WMAP была получена карта анизотропии реликтового излучения. С помощью наблюдений на разных частотах удалось вычесть вклад Галактики. Анизотропия реликтового излучения составляет величину порядка 100 мкК.

Зависимость амплитуды колебаний поверхности последнего рассеяния от мультипольного числа может быть представлена в виде графика углового спектра анизотропии реликтового излучения. График состоит из нескольких характерных частей: плато Харрисона — Зельдовича, первого, второго и третьего доплеровских пиков. Амплитуда плато характеризует физику ранней Вселенной, амплитуда и положение доплеровских пиков по горизонтальной оси зависит от глобальных параметров нашей Вселенной. Для малых мультипольных чисел стандартная модель плохо согласуется с наблюдательными данными. Это можно объяснить нетривиальной замкнутой топологией пространства-времени (которая, однако, с высокой точностью отвергается полученными в 2013 году данными космического аппарата PLANCK), а можно и наличием одной или нескольких космических струн.

Движущаяся космическая струна может генерировать анизотропию реликтового излучения согласно простому механизму Доплера (эффект Кайзера — Стеббинса).

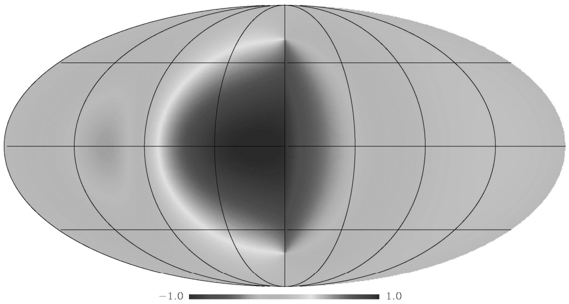


Рис. 1. Модельное распределение анизотропии реликтового излучения, генерируемой одиночной космической струной. Струна расположена вдоль линии, соединяющей полюса карты, и движется слева направо

Движущаяся струна создает очень характерное распределение флуктуаций температуры на небесной сфере (рис. 1), позволяя таким образом отличить анизотропию, генерированную космическими струнами, от анизотропии, созданной другими физическими механизмами (например, адиабатическими возмущениями плотности). Основная структура анизотропии на космической струне такова: пятно пониженной яркости, образующееся в области перед движущейся струной, а также пятно повышенной яркости, образующееся в области позади струны. Перепад яркости между пятнами есть ступенчатая функция, что позволяет эффективно использовать для ее обнаружения ортонормальный набор модифицированных функций Хаара. «Модификация» заключается во введении в классическое определение функций Хаара циклического сдвига для учета поворота струны относительно луча зрения. Сверткой карты реальных данных по анизотропии реликтового излучения, полученных аппаратом WMAP, с модифицированными функциями Хаара были найдены кандидаты в космические струны. Несмотря на то что большое количество найденных кандидатов представляет собой «ложное обнаружение», использованный метод впервые позволил доказать, что во Вселенной нет космических струн с уровнем анизотропии меньше стандартного адиабатического почти в два с половиной раза (т. е. 40 мкК и выше — рис. 2). Результаты других авторов, основанные на исследованиях негауссовости карт WMAP, позволили доказать отсутствие струн с той же температурной амплитудой, что и стандартная анизотропия (т. е. порядка 100 мкК).

При объединении методов радио- и оптических наблюдений для независимого поиска космических струн необходимо принимать во внимание, что объем Вселенной, доступной оптическим наблюдениям, представляет собой малую часть шара, ограниченного поверхностью последнего рассеяния (являющуюся источником реликтового излучения). Высота пятна

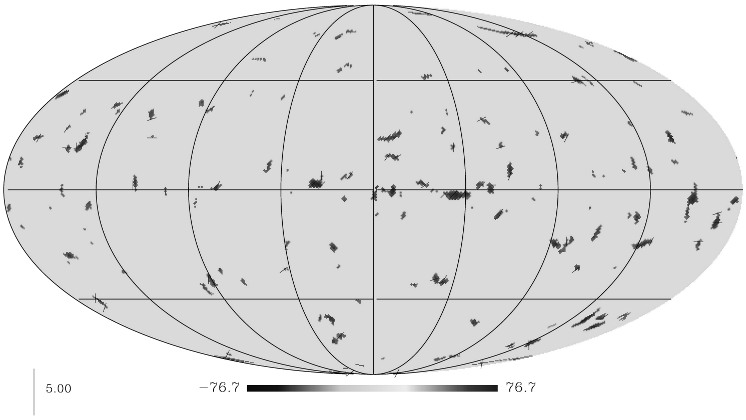


Рис. 2. Кандидаты в космические струны, обнаруженные при обработке реальной карты анизотропии реликтового излучения — так называемой ILC-карты (Internal Linear Combination), которая объединяет информацию различных частотных каналов аппарата WMAP. Обработка производилась путем свертки реальной карты с модифицированными ступенчатыми функциями Хаара. Амплитуда анизотропии найденных кандидатов почти в два с половиной раза ниже фоновой анизотропии

генерируемой анизотропии зависит от того, какая часть струны находится под поверхностью последнего рассеяния. Для простейшей модели это определяется расстоянием до струны. Таким образом, минимальная высота пятна от струны, которая должна быть видна в оптике, не менее 100 градусов. Основной недостаток метода поиска космических струн с помощью оптических наблюдений (поиска линзированных изображений) заключается в том, что оптические обзоры покрывают 1/6 часть неба. Современные оптические обзоры позволяют наблюдать объекты на расстоянии до $z = 7$.

Литература

1. *Горбунов, Д. С.* Введение в теорию ранней Вселенной. В 2 т. / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков. — М. : УРСС, 2008 ; 2010. — 557 с. ; 543 с.

2. *Kibble, T. W. B.* Topology of cosmic domains and strings / T. W. B. Kibble // J. Phys. A : Math. Gen. — 1976. — V. 9, № 8. — P. 1387.

3. *Vilenkin, A.* Gravitational field of vacuum domain walls and strings / A. Vilenkin // Phys. Rev. D. — 1981. — V. 23, is. 4. — P. 852.

4. *Sazhin, M. V.* CSL-1: chance projection effect or serendipitous discovery of a gravitational lens induced by a cosmic string? / M. V. Sazhin, G. Longo, M. Capaccioli, J. M. Alcalá, R. Silvotti, G. Covone, O. S. Khovanskaya, M. Pavlov, M. Pannella, M. Radovich, V. Testa // MNRAS. — 2003. — V. 343, is. 2. — P. 353.

ЭФФЕКТИВНОЕ НАСЫЩЕНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ ПРИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССАХ В ПЛАЗМЕННЫХ МАГНИТОСФЕРНЫХ И КОСМИЧЕСКИХ МАЗЕРАХ

П. А. Беспалов

Введение

Во многих случаях космическая плазма находится в открытых магнитных ловушках. Такая ситуация характерна для магнитосфер планет и активных областей атмосферы Солнца. Лучше других экспериментально изучены свойства плазмы в геомагнитной ловушке. Этот интересный физический объект важен для многих приложений и удобен для опробования самосогласованных теоретических моделей, которые затем удается использовать для объяснения явлений в других космических и лабораторных плазменных системах.

Частицы и волны в геомагнитной ловушке. В области замкнутых силовых линий геомагнитного поля плазма состоит из высокотемпературной и холодной фракций. Электроны с энергиями $w \geq 40$ кэВ, протоны и ионы с энергиями $w_i \geq 10^2$ кэВ образуют так называемые радиационные пояса [1]. Многие из этих частиц прошли трудный путь. Они в течение недели двигались от Солнца в составе солнечного ветра. Затем попали на периферию магнитосферы в результате эффектов пересоединения. Потом в составе диффузионного потока продвигались внутрь магнитосферы из-за нарушения электромагнитными импульсами третьего адиабатического инварианта, ассоциированного с долготным дрейфом частиц в неоднородном магнитном поле. Частицы испытывают бетатронное ускорение, так как переходят в область со сравнительно сильным магнитным полем, а первый адиабатический инвариант $\mu = V_{\perp}^2 / 2B$ сохраняется ($V_{\perp}$ — компонента скорости частицы, перпендикулярная магнитному полю $\vec{B}$). Во время магнитных возмущений возрастают электростатические поля и частицы могут попасть в область радиационных поясов благодаря конвекции, естественно, тоже ускорившись. Небольшая доля еще более энергичных частиц возникает при распаде вторичных нейтронов в магнитосфере (вторичные нейтроны образуются при столкновении высокоэнергичных космических частиц с ионосферной «мишенью»).

Источником холодной и по крайней мере на четыре порядка более концентрированной плазмы является земная ионосфера. Чтобы иметь представление о порядке величин, можно исходить из значений концентрации $n_p \sim 10^2 \div 10^3$ см$^{-3}$. Эти частицы заполняют магнитную трубку в дневной магнитосфере, стремясь обеспечить баланс давлений, и частично возвращаются в ионосферу в ночной зоне. Таким образом, область радиационных поясов — место встречи солнечного и земного вещества.

Плазма радиационных поясов является бесстолкновительной в том смысле, что длина пробега энергичных частиц между кулоновскими столкновениями велика по сравнению с размером магнитосферы. Поэтому при изучении движения отдельных частиц полезно ввести в рассмотрение пространство скоростей в экваториальной области магнитной ловушки: $V_{|L}$, $V_{\perp L}$, где $V_{|L}$ и $V_{\perp L}$ — продольная и поперечная магнитному полю компоненты скорости частицы в момент пересечения магнитного экватора (с индексом L принято записывать величины на экваторе). Удобными также являются такие переменные, как модуль скорости V и синус экваториального питч-угла $x = V_{\perp L} / V$. Если частицы движутся свободно, то из условия сохранения первого адиабатического инварианта и модуля скорости легко найти координату точки отражения z, так как $V_{\perp L}^2 / B_L = V^2 / B(z)$. Траектории частиц с $x < x_{\text{кп}} = \sigma^{-1/2}$ заходят в ионосферу, и в этом «конусе потерь» нет движущихся свободно частиц. Здесь $\sigma = B_E / B_L$ — пробочное отношение, B_E — магнитное поле на земной поверхности. Для дипольного магнитного поля $\sigma = L^3(4 - 3/L)$, где L — расстояние от центра Земли до вершины магнитной трубки в земных радиусах R_E. В области внешнего радиационного пояса $\sigma \sim 10^2$.

Реально адиабатические инварианты частиц могут эффективно нарушаться из-за рассеяния частиц волнами. При этом происходит изменение величины x и часть частиц высыпается в ионосферу. Можно ожидать, что эффективно взаимодействовать с радиационным поясом могут волны, которые канализируются магнитным полем, так как они, отражаясь от торцов магнитной ловушки, многократно проходят область радиационных поясов. Как известно [2], такими свойствами обладают альфвеновские и свистовые волны. Для первых $\vec{V}_{\text{гр}} \parallel \vec{B}$, а у вторых, согласно теореме Стори, угол между групповой скоростью $\vec{V}_{\text{гр}}$ и магнитным полем не превосходит $19°29'$, если частота волны выше нижнегибридной [3].

Довольно очевидно, на какие частицы влияют эти волны. Частицы радиационного пояса участвуют в трех квазипериодических движениях: крутятся в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, с гирочастотой ω_B, осциллируют между зеркальными точками с баунс-частотой $\Omega_b \sim \omega_B (r_B / a)$ и дрейфуют по азимуту в неоднородном магнитном поле (электроны к востоку, протоны к западу) с угловой скоростью

$\Omega_{\text{др}} \sim \omega_B (r_B / a)^2$, где r_B — гирорадиус, $a = R_E L$ — масштаб продольной неоднородности магнитного поля. Из механики известно, что каждому квазипериодическому движению отвечает адиабатический инвариант. Чтобы какой-то из этих инвариантов изменялся наиболее эффективно, частота воздействия должна быть порядка частоты соответствующего квазипериодического движения. Поэтому альфвеновские волны в радиационном поясе влияют на все три инварианта протонов, а также на второй и третий инварианты электронов. Высыпание электронов в конус потерь обычно связано с изменением первого адиабатического инварианта, поэтому динамику электронных радиационных поясов контролируют в основном свистовые волны. Отметим, что между указанными выше частотами есть простое соотношение: $\Omega_b^2 \cong \omega_B \Omega_{\text{др}}$.

В данной работе мы ограничимся анализом явлений в электронных радиационных поясах, связанных со свистовыми волнами. Свистовые волны имеют частоты $\omega_{\text{нгр}} < \omega < \omega_B$ ($\omega_{\text{нгр}}$ — нижнегибридная частота) и дисперсионное уравнение [3]

$$\omega = \omega_B \left(\frac{k^2 c^2}{\omega_p^2 + k^2 c^2}\right) |\cos\phi| , \tag{1}$$

где ω_p — плазменная частота, ϕ — угол между волновым вектором $\vec{k}$ и магнитным полем. Обычно свистовые волны регистрируются в интервале циклических частот от 300 Гц до 10 кГц.

1. Взаимодействие волн и частиц на циклотронном резонансе

В действительности фон свистовых волн может быть обусловлен несколькими причинами. Например, такие волны излучаются молниевыми разрядами в атмосфере. Эффективным источником свистовых волн в магнитосфере являются сами радиационные пояса. В этом смысле электронные радиационные пояса и свистовое излучение образуют подсистему магнитосферы, которую можно изучать независимо от всего остального для конкретных источников и стоков частиц.

Допустим, что электрон поглотил квант свистовых волн ω, $\vec{k}$. Тогда из условия сохранения энергии и импульса получаем

$$\begin{gathered} \Delta\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \hbar\omega, \\ \Delta\left(mV_\parallel\right) = \hbar k_\parallel. \end{gathered} \tag{2}$$

Это отнюдь не значит, что в задаче важны квантовые эффекты и в конечные формулы постоянная Планка не входит. Из системы (2) следует, что

$\Delta(mV_\perp^2) + \hbar k_\| V_\| = \hbar\omega$. В свою очередь, перескоки частиц в магнитном поле при поглощении кванта происходят между уровнями Ландау. Поэтому $\Delta(mV_\perp^2/2) = s\omega_B$, где s — целое число. С учетом этого соотношения получается хорошо известное условие Доплера эффективного взаимодействия волн и частиц в магнитном поле: $\omega - k_\| V_\| = s\omega_B$. Кроме того, из приведенных формул следует равенство $\Delta(V^2) = 2(\omega/k_\|)\Delta(V_\|)$. Заменяя здесь $k_\|$ из условия Доплера, находим, что взаимодействующая со свистовой волной частица в пространстве скоростей перемещается вдоль так называемых линий диффузии

$$V^2 + \frac{\omega}{s\omega_B - \omega} V_\|^2 = \mathrm{const}, \tag{3}$$

имеющих форму эллипсов.

Расчеты показывают, что в магнитосфере при не очень больших углах $\phi \le 1$ наиболее важен циклотронный резонанс $s = 1$

$$\omega - k_\| V_\| = \omega_B. \tag{4}$$

При $\phi = 0$ взаимодействие на других резонансах ($s \ne 1$) отсутствует. Отметим, что при выполнении условия (4) частицы и волны движутся в противоположные стороны, так как $k_\| V_\| < 0$.

Особое значение циклотронного резонанса связано с возможностью циклотронной неустойчивости при его выполнении. В. Ю. Трахтенгерц показал [4], что плазма радиационного пояса с поперечной анизотропией в пространстве скоростей неустойчива относительно возбуждения свистовых волн (реально такая анизотропия связана с наличием конуса потерь в пространстве скоростей и со спецификой ускорительных механизмов, действующих в магнитосфере). Это утверждение опиралось на основополагающую статью Р. З. Сагдеева и В. Д. Шафранова по линейной теории электромагнитной неустойчивости анизотропной плазмы [5]. Практически циклотронная неустойчивость может быть не экспоненциально слабой только в том случае, если параметр

$$\beta_* = (\omega_{pL} V_{|L} / \omega_{BL} c)^2 \ge 1. \tag{5}$$

Отметим, что в области радиационных поясов $\beta = 8\pi P / B^2 << 1$ и магнитная структура стабильна. Реально условие (5) является довольно жестким и обычно может выполняться в плазмосфере или в облаках оторвавшейся от нее плазмы, которые наблюдаются в дневной магнитосфере после сильных магнитных возмущений. Понятно, что удобной интегральной характеристикой нестабильности радиационных поясов является величина усиления свистовых волн при одном прохождении через магнитную ловушку:

$$\Gamma(\omega) = \int_{-l/2}^{l/2} \eta\, dz, \tag{6}$$

где η — входящий в уравнение переноса коэффициент усиления, l — длина магнитной ловушки. Частота ω_0, отвечающая наибольшему усилению излучения, может быть записана в виде [6]

$$\omega_0 = \omega_{BL} \min\left\{\frac{1}{\beta_*}, \left(1 - \frac{T_|}{T_\perp}\right)\right\}, \tag{7}$$

где $T_| / T_\perp$ — анизотропия температур на экваторе. Для максимума усиления Γ при $\beta_* >> 1$ справедлива оценка $\Gamma_{\max} \cong 30 e n_L V_{\perp L} R_E L / B_L$, где e — величина заряда электрона, n_L — концентрация энергичных частиц в области минимума магнитного поля.

Обычно усиление оказывается небольшим, и эффект накопления энергии волн характеризуется коэффициентом отражения от ионосферы R. Абсолютная неустойчивость реализуется при превышении порога циклотронной неустойчивости

$$\Gamma_{\max} > |\ln R|. \tag{8}$$

Естественные электромагнитные излучения свистового диапазона в области радиационных поясов. Эти излучения были систематизированы в книге Р. А. Хеллиуэлла [3]. При выполнении неравенства (8) возбуждаются шумовые электромагнитные излучения.

Если функция распределения частиц радиационных поясов является гладкой функцией в пространстве скоростей, то полное усиление свистовых волн в результате коллективных процессов и эффектов распространения в условиях применимости приближения геометрической оптики также гладкая функция частоты. При этом любая модель, основанная на неустойчивости среды, может объяснить только шумовые в своей основе свистовые излучения и плавные энергетические спектры частиц в радиационных поясах. Экспериментально наблюдаемые усредненные функции распределения энергичных электронов действительно оказываются сравнительно плавными функциями.

В данной работе мы постараемся разобраться с условиями возбуждения наиболее хорошо организованных из этих излучений. Это квазипериодические ОНЧ-излучения (QP-2), не связанные с геомагнитными пульсациями, пример которых показан на рис. 1. В таких излучениях отдельные спектральные всплески длительностью от 5 до 15 с повторяются с периодом от 10 до 300 с почти без изменения формы в течение длительного времени — порядка нескольких часов.

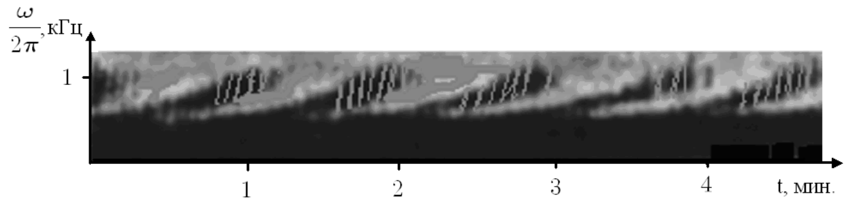


Рис. 1. Типичный динамический спектр квазипериодических свистовых излучений ОНЧ-диапазона (QP-2), не связанных с геомагнитными пульсациями

2. Эффективное насыщение поглощения в плазменном магнитосферном мазере

В условиях развитой циклотронной неустойчивости в геомагнитной ловушке накапливаются электромагнитные волны, на которых частицы горячей плазмы рассеиваются и попадают в ионосферу. Реально в локальной трубке магнитного поля действуют источники энергичных частиц, такие как перенос поперек магнитного поля и ускорительные механизмы. Выполненные исследования показали, что такая активная область радиационных поясов во многом аналогична мазерам и лазерам. В магнитосферном мазере сравнительно плотная замагниченная плазма и сопряженные торцы магнитной ловушки образуют квазиоптический резонатор для электромагнитных волн. Активным веществом служат энергичные частицы радиационных поясов. Поперечная анизотропия функции распределения энергичных частиц играет роль инверсии населенностей. Накачкой в магнитосферном мазере являются источники быстрых частиц. Приведенные рассуждения позволяют ожидать наличия аналогий и в поведении обсуждаемых систем.

Для управления режимами генерации в лазерах широко используются так называемые насыщающиеся поглотители. Это специально разработанные нелинейные элементы, в которых для определенного диапазона частот поглощение уменьшается с ростом интенсивности излучения. В плазменном магнитосферном мазере тоже возможно эффективное насыщение поглощения. При определенных угловых зависимостях мощности источника энергичных электронов взаимодействие волн и частиц происходит таким образом, что за счет изменения анизотропии функции распределения на переднем фронте отдельного электромагнитного импульса инкремент не уменьшается, а возрастает. Это может приводить к неустойчивости режима стационарной генерации и формированию импульсного электромагнитного излучения.

Усредненные квазилинейные уравнения. Для обоснования сделанных утверждений и количественного описания взаимодействия сравнительно широких волновых пакетов с энергичными частицами, имеющими достаточно гладкую функцию распределения, хорошо подходит самосогласованная система квазилинейных уравнений [7, 8]. При рассмотрении сравнительно медленных процессов систему квазилинейных уравнений можно существенно упростить, выполнив усреднение по периодам осцилляции волн и частиц между точками отражения. В результате получаются интуитивно понятные уравнения. Энергичные частицы испытывают много слабых толчков со стороны электромагнитных возмущений, каждый из толчков слегка меняет адиабатические инварианты. Поэтому изменение функции распределения в пространстве адиабатических инвариантов описывается уравнением типа уравнения Фоккера — Планка. Уравнение для спектральной плотности энергии волн можно получить из интеграла энергий. Если частоты волн много меньше гирочастоты, то рассеяние частиц по питч-углам близко к упругому и усредненные квазилинейные уравнения имеют следующий вид [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(D\varepsilon \frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{F}{T} + j, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \left(\int_0^{\infty}\int_{x_{\text{кп}}}^{x_{\max}} K \frac{\partial F}{\partial x} dx dV\right)\varepsilon - \nu\varepsilon. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь изменение функции распределения $F(t,x,V)$ происходит в соответствии с поступлением частиц от источника с мощностью $j(x,V)$ и питч-угловой диффузии по x. Указанная диффузия происходит тем быстрее, чем больше средняя плотность энергии свистовых волн $\varepsilon(t)$. В свою очередь, плотность энергии волн определяется усредненным уравнением переноса, в которых интеграл учитывает инкремент неустойчивости, а $\nu = 2|\ln R|/T_{\text{гр}}$ — средний декремент затухания плотности энергии волн из-за эффектов распространения, D, K и $x_{\max}(V)$ — известные положительные функции, $x_{\text{кп}}$ — граница конуса потерь.

Если для определенности ограничиться случаем малого разброса по модулю скорости у мощности источника частиц, то естественно ввести в рассмотрение задачу Штурма — Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial Z_q}{\partial x}\right) = -\delta_q Z_q \tag{10}$$

для функций Z_q. Эти функции удовлетворяют тем же граничным условиям, что и функция распределения. Можно проверить, что это задача о собственных функциях и собственных значениях самосопряженного оператора. Собственные значения самосопряженного оператора положительны, а собственные функции можно выбрать действительными. Мощность источника частиц в трубке магнитного поля при малом разбросе по модулю скорости можно записать в виде

$$j = \left(\sum_{q=1}^{\infty} J_q Z_q \right) \delta(V - V_0).$$

В таком случае решение задачи для функции распределения можно успешно искать в аналогичной форме:

$$F = \left(\sum_{q=1}^{\infty} F_q Z_q \right) \delta(V - V_0) \cdot \qquad (11)$$

После подстановки этих выражений в систему уравнений (8) и использования условий ортогональности собственных функций мы получаем систему уравнений в полных производных. Для теоретического анализа наиболее прост случай, когда мощность источника частиц по своей угловой зависимости совпадает с первой угловой функцией оператора питч-угловой диффузии. Тогда анизотропия функции распределения не меняется со временем, а динамика плазменного магнитосферного мазера (ПММ) подчиняется простой системе уравнений в полных производных, совпадающей со скоростными уравнениями одномодового лазера с быстрой релаксацией поляризации:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= -\delta\varepsilon N - \frac{N}{T} + J, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= h\varepsilon N - \nu N, \end{aligned} \qquad (12)$$

где δ и h — константы, N и J — полное содержание и мощности источника энергичных электронов в трубке магнитного поля с единичным сечением на уровне ионосферы. При подходящих условиях в ПММ возможны слабозатухающие колебания, частота и декремент затухания которых около состояния равновесия определяются следующими выражениями:

$$\Omega_{\text{РП}} = (hJ)^{1/2}, \qquad \nu_{\text{РП}} = \frac{hJ}{2v}. \qquad (13)$$

Существование колебательных режимов можно пояснить следующим образом. Предположим, что в начальный момент радиационный пояс был устойчив и свистовая турбулентность была на низком уровне. Действие источника приводит к накоплению энергичных частиц. Достигается порог возбуждения циклотронной неустойчивости. Сначала интенсивность свистовых волн невелика и накопление частиц продолжается. Затем уровень турбулентности быстро нарастает и «проскакивает» состояние равновесия, в котором действие источника точно компенсируется высыпаниями частиц через магнитные пробки. После этого усиление волн сменяется затуханием и система возвращается в состояние, близкое к исходному, если источник частиц достаточно слабый. На фазовой плоскости, отвечающей системе, имеется состояние равновесия типа устойчивого фокуса.

Для реальных условий в дневной магнитосфере период колебаний лежит от 10 до 150 с, а их добротность порядка нескольких десятков. Можно отметить, что добротность пропорциональна декременту затухания ν. Если затухание свистовых волн относительно небольшое, как это имеет место в ночной магнитосфере, то уровень волн адиабатически подстраивается под содержание частиц и колебательный процесс, в котором доминируют то частицы, то волны, становится невозможным.

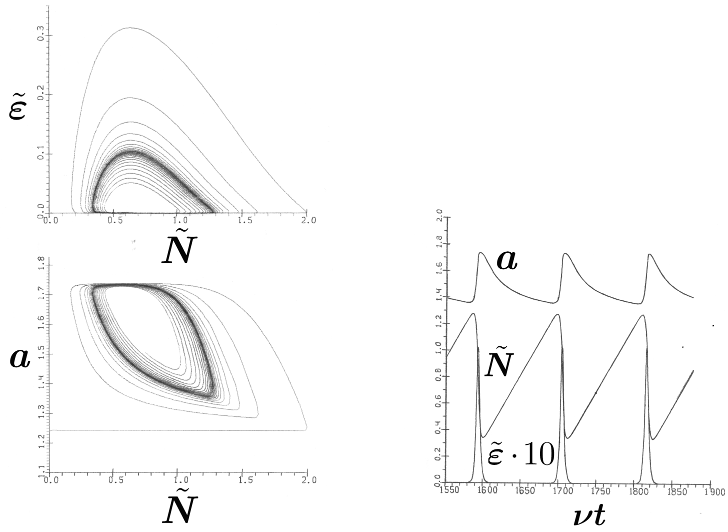
Преобразование уравнений к многоуровневой форме, эффективное насыщение поглощения и автоколебания. Рассмотренные колебания могут раскачиваться при подходящих угловых распределениях мощности источника частиц, не совпадающих с первой собственной функцией оператора диффузии по питч-углам [9, 10]. Пояснить эту возможность проще всего на следующем примере. Допустим, что мощность источника частиц может быть представлена суперпозицией угловых мод (10). Тогда систему уравнений (9) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dF_q}{dt} &= -\delta_q \varepsilon F_q - \frac{F_q}{T} + J_q, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \left(\sum_{q=1}^{\infty} h_q F_q - \nu \right) \varepsilon, \end{aligned} \qquad (14)$$

где $h_q = \int\limits_{x_{\text{кп}}}^{x_{\max}} K \frac{dZ_q}{dx} dx.$ Собственные значения δ_q быстро растут с номером угловой моды q. Поэтому при описании относительно медленных процессов в уравнениях для $F_q\,(q \geq 2)$ можно опустить производную по времени. Для простоты ограничимся случаем, когда мощность источника частиц представляет суперпозицию двух первых угловых мод. Тогда мы можем подставить амплитуду второй угловой моды $F_2 \cong J_2 T\left(\delta_2 T \varepsilon + 1\right)^{-1}$ в остальные уравнения системы (14). В результате снова (12)

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{dt} &= -\delta_1 \varepsilon F_1 - \frac{F_1}{T} + J_1, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \left(h_1 F_1 - \nu_{\text{эфф}} \right) \varepsilon \end{aligned} \qquad (15)$$

с заменой декремента затухания ν на эффективный декремент затухания $\nu_{эфф} = \nu - \dfrac{h_2 J_2}{\delta_2 \varepsilon + T^{-1}}$. Более подробные выкладки показывают, что при положительных мощностях источника частиц с подходящей угловой зависимостью может выполняться неравенство $h_2 J_2 < 0$, соответствующее эффективному насыщению поглощения. Учет этого обстоятельства позволяет количественно объяснить свойства электромагнитных излучений на основе анализа фазовой плоскости и временного хода процессов в радиационных поясах, описываемых системой (15). На рис. 2, *а* верхний график на осциллограммах отвечает временному ходу анизотропии функции распределения в установившихся автоколебаниях, которая ответственна за возрастание частоты излучения в пределах отдельного всплеска электромагнитных излучений. Сделанные выводы согласуются с известными и новыми экспериментальными результатами [11].



а *б*

Рис. 2. Квазипериодические процессы в радиационных поясах, обусловленные внутренней динамикой ПММ: *а* — фазовые плоскости ($\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{N}$) и (a, $\tilde{N}$) автоколебательного процесса; *б* — периодическая зависимость анизотропии функции распределения (a), содержания энергичных частиц в трубке магнитного поля с единичным сечением на уровне ионосферы ($\tilde{N} \sim N$), плотности энергии свистовых излучений ($\tilde{\varepsilon} \sim \varepsilon$) от безразмерного времени в установившихся автоколебаниях

3. Естественная десятичасовая синхронизация процессов в электронных радиационных поясах Юпитера

В последние десятилетия большое внимание уделяется изучению плазменной оболочки Юпитера. Уже по данным космического аппарата PIONEER-10 был открыт так называемый часовой эффект. Первоначально было просто отмечено, что потоки энергичных электронов промодулированы с периодом 10 ч, совпадающим с периодом орбитального вращения планеты.

Было предложено несколько моделей для объяснения этого эффекта. Например, согласно дисковой модели [12] предполагалось, что энергичных частиц больше в области плоскости магнитного экватора, а из-за наклона оси орбитального вращения к оси намагниченности космический аппарат периодически попадает в область более высоких потоков частиц. Это предположение не нашло подтверждения в данных космических аппаратов VOYAGER, траектории которых проходили не в области низких широт. Значительно позднее по данным космического аппарат ULYSSES был сделан вывод о том, что потоки энергичных электронов меняются синхронно в разных областях магнитосферы Юпитера [13]. Недавно были проведены одновременные эксперименты на космических аппаратах CASSINI-HUYGENS и GALILEO на фланге и в магнитосфере Юпитера [14, 15]. Эксперименты доказали синхронность десятичасовой модуляции свистовых излучений в разных секторах магнитосферы. Эти результаты послужили хорошим поводом для дальнейшего развития теории коллективных процессов в радиационных поясах Юпитера [16, 17].

Особенности условий в области радиационных поясов Юпитера. Условия формирования электронных радиационных поясов Юпитера и Земли имеют много общего: энергичные частицы в рамках диффузионного потока проникают внутрь магнитосферы, где их потоки ограничиваются циклотронной неустойчивостью. Неустойчивость ответственна за возбуждение свистовых электромагнитных волн, приводящих к питч-угловому рассеянию и высыпаниям в ионосферу. Однако у радиационных поясов Юпитера есть важные особенности: электроны имеют релятивистские энергии, фоновая плазма сосредоточена в плазменном диске и имеет совершенно другое радиальное распределение концентрации. Магнитосфера быстро вращается и не симметрична. Для энергичных электронов экспериментально установлен отличный от земного коэффициент радиальной диффузии поперек магнитных оболочек [18, 19]. Все эти факторы надо учитывать в расчетах.

Особенности плазменного магнитосферного мазера в радиационных поясах Юпитера. Поведение плазменного магнитосферного мазера определяется самосогласованной системой релятивистских квазилинейных уравнений. Мы будем интересоваться сравнительно медленными процессами, для описания которых квазилинейные уравнения, как мы с вами уже знаем, могут быть представлены в простой балансной форме:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\delta\varepsilon N + J;$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \varepsilon(hN - \nu_{\text{эфф}}). \tag{16}$$

Здесь J — мощность источника частиц, связанная с радиальной диффузией:

$$J \approx L^2 \frac{\partial}{\partial L}\left(DL^2 \frac{\partial N}{\partial L}\right), \tag{17}$$

где D — константа.

Осцилляции параметров радиационных поясов Юпитера. Вопрос о малых осцилляциях параметров радиационных поясов около стационарного состояния решается весьма просто. Подставляя $N = N_0 + N_{\sim}$ и $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_{\sim}$ в балансные уравнения, мы получаем в нулевом приближении параметры стационарного состояния, а в первом приближении — частоту и декремент затухания колебаний на разных магнитных оболочках. Подставляя общепринятые оценки для параметров плазмы, можно показать, что резонансная частота системы практически не зависит от магнитной оболочки и дается выражением [16, 17]

$$\Omega_{\text{РП}} \cong \left(cD\left|\ln R\right| / R_J\right)^{1/2} \cong (0{,}5 \div 3)\cdot 10^{-4}\ \text{с}^{-1}, \tag{18}$$

где c — скорость света. Указанный диапазон частот содержит угловую скорость вращения Юпитера $\Omega_J \cong 1{,}76\cdot 10^{-4}\,\text{с}^{-1}$. Эти результаты служат предпосылкой глобального резонанса в рассматриваемой системе.

Пространственное детектирование добротности магнитосферного резонатора. Рассмотрим поподробнее входящий в систему (16) усредненный декремент затухания свистовых волн в отдельной трубке. Его можно записать в виде

$$\nu_{\text{эфф}}(t, \varphi) = 2\,|\ln R\,|\,T_{\text{гр}}^{-1}. \tag{19}$$

Коэффициент R зависит в первую очередь от состояния ионосферы. Реально вращающаяся вместе с планетой ионосфера Юпитера несимметрична (рис. 3). С учетом этого можно записать

$$2\,|\ln R\,| = f_1(\varphi - \Omega_J t). \tag{20}$$

Период группового распространения свистовых волн в магнитосферном резонаторе $T_{\text{гр}}$ имеет величину порядка нескольких минут и является периодической функцией азимутального угла φ, так как он определяется структурой магнитосферы: степенью сплюснутости магнитосферы и концентрацией плазмы вдоль магнитной трубки. Оба эти показателя в основном зависят от местного времени, поэтому

$$T_{\text{гр}}^{-1} = f_2(\varphi). \tag{21}$$

Таким образом, усредненный декремент затухания свистовых волн может быть представлен в виде

$$\nu_{\text{эфф}}(t,\varphi) = f_1(\varphi - \Omega_J t) f_2(\varphi). \tag{22}$$

Из формулы (22) следует, что декремент затухания свистовых волн представим в виде суммы трех слагаемых [20]: слагаемого, периодического во времени с периодом вращения Юпитера T_J, не зависящего от азимутального угла; слагаемого, зависящего только от азимутального угла; слагаемого, зависящего от времени и азимутального угла, но в среднем по углу равного нулю. Наличие первого из этих слагаемых — это уже не предпосылка, а конкретная причина глобального резонанса.

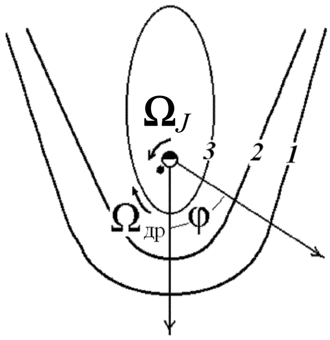


Рис. 3. Экваториальное сечение магнитосферы Юпитера: *1* — отошедшая ударная волна; *2* — магнитопауза; *3* — сечение магнитной оболочки; Ω_J — угловая скорость Юпитера; $\Omega_{\text{др}}$ — угловая скорость азимутального дрейфа энергичных электронов; φ — азимутальный угол

Особенности пространственно-временной динамики циклотронной неустойчивости радиационных поясов Юпитера. Численные расчеты с декрементом затухания (22) показали, что колебательный процесс на разных долготах происходит с разной эффективностью. Однако максимумы интенсивности свистовых излучений достигаются во всей магнитосфере довольно синхронно, и вся гигантская магнитосфера Юпитера в свистовых излучениях вспыхивает как гигантская лампочка. Модельная пространственно-временная картина колебательного процесса показана на рис. 4. Были рассмотрены детали параметрической синхронизации. Для 10- и 5-часовых периодических процессов аналитически были определены амплитуды и начальные фазы колебаний [21].

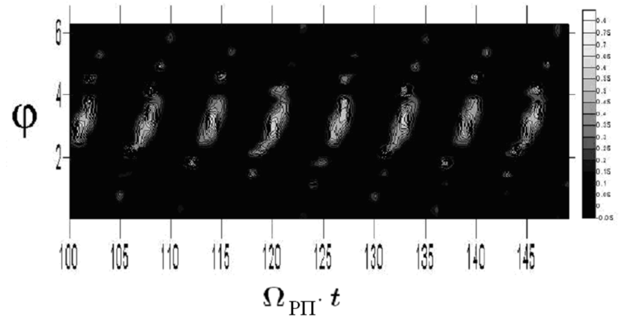


Рис. 4. Модельная пространственно-временная картина колебательного процесса. Разными оттенками серого цвета показана зависимость плотности энергии свистовых излучений ε от азимутального угла φ и безразмерного времени

Естественным представляется вопрос о причине глобального резонанса в магнитосфере Юпитера. Это может быть как уникальное совпадение, так и проявление более глубокой самосогласованности системы. Ответ на этот вопрос может дать более подробное рассмотрение факторов, ответственных за глобальный резонанс. Прежде всего, это касается функциональной зависимости и величины коэффициента радиальной диффузии энергичных электронов. По нашему мнению, квазипериодические осцилляции потоков частиц в электронных радиационных поясах Юпитера могут быть важным фактором, определяющим радиальную диффузию частиц в магнитосфере. Дело в том, что потоки энергичных частиц меняют параметры плазменного тора спутника Ио и ионосферы. При этом происходит периодическое изменение степени ионизации и температуры плазмы, что и определяет эффективность радиальной диффузии. Предварительные расчеты подтверждают это предположение [22].

Работа выполнена при частичной поддержке по программе № 22 РАН и по гранту РФФИ № 12-02-00344.

Литература

1. *Тверской, Б. А.* Динамика радиационных поясов Земли / Б. А. Тверской. — М. : Наука, 1968.

2. *Шафранов, В. Д.* Электромагнитные волны в плазме / В. Д. Шафранов // Вопросы теории плазмы. — М. : Госатомиздат, 1963. — Вып. 3. — С. 3—140.

3. *Helliwell, R. A.* Whistlers and related ionospheric phenomena / R. A. Helliwell. — Stanford, California : Stanford University Press, 1965.

4. *Трахтенгерц, В. Ю.* О механизме генерации ОНЧ-излучения во внешнем радиационном поясе Земли / В. Ю. Трахтенгерц // Геомагнетизм и аэрономия. — 1963. — Т. 3, № 3. — С. 442—451.

5. *Сагдеев, Р. З.* О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле / Р. З. Сагдеев, В. Д. Шафранов // ЖЭТФ. — 1960. — Т. 39, вып. 1. — С. 181—184.

6. *Беспалов, П. А.* Циклотронная неустойчивость радиационных поясов Земли / П. А. Беспалов, В. Ю. Трахтенгерц // Вопросы теории плазмы. — М. : Атомиздат, 1980. — Вып. 10. — С. 88—163.

7. *Андронов, А. А.* Кинетическая неустойчивость внешнего радиационного пояса Земли / А. А. Андронов, В. Ю. Трахтенгерц // Геомагнетизм и аэрономия. — 1964. — № 2. — С. 233—242.

8. *Kennel, C. F.* Limit on stably trapped particle fluxes / C. F. Kennel, H. E. Petchek // J. Geophys. Res. — 1966. — V. 71, № 1. — P. 1—28.

9. *Беспалов, П. А.* Самомодуляция излучения плазменного циклотронного мазера / П. А. Беспалов // Письма в ЖЭТФ. — 1981. — Т. 33, вып. 1. — С. 192—195.

10. *Bespalov, P. A.* Self-exitation of periodic cyclotron instability regimes in a plasma magnetic trap / P. A. Bespalov // Physica Scripta. — 1982. — V. T2/2. — P. 576—579.

11. *Manninen, J.* Non-typical ground-based quasi-periodic VLF emissions observed at $L = 5.3$ under quiet geomagnetic conditions at night / J. Manninen, N. G. Kleimenova, O. V. Kozyreva, P. A. Bespalov, A. E. Kozlovsky // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. — 2013. — V. 99. — P. 123—128.

12. *Hill, T. W.* Magnetospheric models / T. W. Hill, A. J. Dessler, C. K. Goertz // Physics of the Jovian Magnetosphere. — Cambridge : Univ. Press, 1983. — P. 353—394.

13. *Simpson, J. A.* Energetic charged particle phenomena in the Jovian magnetosphere — first results from the Ulysses COSPIN collaboration / J. A. Simpson, J. D. Anglin, A. Balogh, J. R. Burrows, S. W. H. Cowley, P. Ferrando, B. Heber, R. J. Hynds, H. Kunow, R. G. Marsden // Science. — 1992. — V. 257, № 5076. — P. 1547—1550.

14. *Hospodarsky, G. B.* Simultaneous observations of Jovian quasi-periodic radio emissions by the Galileo and Cassini spacecraft / G. B. Hospodarsky, W. S. Kurth, B. Cecconi, D. A. Gurnett, M. L. Kaiser, M. D. Desch, P. Zarka // J. Geophys. Res. — 2004. — V. 109. — A09S07. — doi:10.1029/2003JA010263.

15. *Kaiser, M. L.* New observations from Cassini and Ulysses of Jovian VLF radio emissions / M. L. Kaiser, W. M. Farrell, W. S. Kurth, G. B. Hospodarsky, D. A. Gurnett // J. Geophys. Res. — 2004. — V. 109. — A09S08. — doi:10.1029/2003JA010233.

16. *Беспалов, П. А.* Глобальный резонанс радиационных поясов Юпитера / П. А. Беспалов // Письма в АЖ. — 1985. — Т. 11, № 1. — С. 72—77.

17. *Bespalov, P. A.* Self-consistent model of clock event in outer Jovian electron radiation belts / P. A. Bespalov // Planetary and Space Science. — 1996. — V. 44, № 6. — P. 565—568.

18. *Barbosa, D. D.* Relativistic electrons and whistlers in Jupiter's magnetosphere / D. D. Barbosa, F. V. Coroniti // J. Geophys. Res. — 1976. — V. 81, № 25. — P. 4531—4536.

19. *Barbosa, D. D.* Lossy radial diffusion of relativistic Jovian electrons / D. D. Barbosa, F. V. Coroniti // J. Geophys. Res. — 1976. — V. 81, № 25. — P. 4553—4560.

20. *Беспалов, П. А.* Глобальная синхронизация колебаний уровня свистовых излучений вблизи Юпитера, как следствие пространственного детектирования добротности магнитосферного резонатора / П. А. Беспалов, О. Н. Савина // Письма в ЖЭТФ. — 2005. — Т. 81, № 4. — С. 186—191.

21. *Bespalov, P. A.* Synchronized oscillations in whistler wave intensity and energetic electron fluxes in Jupiters middle magnetosphere / P. A. Bespalov, O. N. Savina, S. W. H. Cowley // J. Geophys. Res. — 2005. — V. 110. — A09209. — doi:10:1029/ 2005JA011147.

22. *Беспалов, П. А.* Некоторые особенности коллективных процессов в магнитосфере быстровращающегося Юпитера / П. А. Беспалов // Плазменная гелиофизика. — М. : Физматгиз, 2008. — С. 71—79.

ПРОБЛЕМА ПРЕДШЕСТВЕННИКОВ СВЕРХНОВЫХ Ia

М. Р. Гильфанов

Введение

Сверхновые Ia (СНIa) играют важную роль в современной космологии — с их помощью было продемонстрировано, что Вселенная расширяется с ускорением, и сделан вывод о существовании темной энергии [23, 25]. Однако их природа до сих пор точно не известна. Почти нет сомнений, что они являются результатом термоядерного взрыва белого карлика, достигшего массы Чандрасекара ($\approx 1{,}38 M_{\odot}$) [16], но не ясно, как происходит увеличение его массы. Из двух ныне существующих сценариев наиболее популярным является аккреционный, в котором масса белого карлика растет за счет аккреции вещества звезды-донора в полуразделенной двойной системе [31]. В альтернативном сценарии взрыв происходит в результате слияния двух белых карликов в компактной двойной системе [13, 29]. К сожалению, в отличие от сверхновых-коллапсаров, многочисленные попытки обнаружить предшественников сверхновых Ia в разных диапазонах длин волн в данных, полученных до взрыва, до сих пор не увенчались успехом, поэтому приходится либо обращаться к расчетам методами популяционного синтеза [3, 11, 14, 34], либо исследовать различные наблюдательные следствия сценариев их происхождения [1, 2, 8, 9, 32]. Последнему подходу и посвящена данная статья.

Два основных сценария происхождения сверхновых Ia радикально отличаются по уровню электромагнитного излучения, предшествующего сверхновой. Хотя два белых карлика, движущихся по кеплеровским орбитам вокруг друг друга в компактной двойной системе, могут стать мощным источником гравитационных волн, электромагнитное излучение такой системы пренебрежимо мало вплоть до последнего момента, предшествующего слиянию и взрыву. В то же время белый карлик, аккрецирующий вещество звезды-донора, является мощным источником ультрафиолетового и мягкого рентгеновского излучения в течение примерно нескольких миллионов лет до взрыва сверхновой. Это излучение может наблюдаться непосредственно как от отдельных источников, так и от галактики в целом [1, 8]. Присутствие популяции аккрецирующих белых карликов способно также изменить спектр ионизирующего ультрафиолетового фона в галактике, добавляя в него более жесткую компоненту, и тем самым отразиться на ионизационном балансе межзвездной среды. Это приведет к появлению в спектре излучения межзвездной среды линий, не характерных для случая ионизации излучением обычного (старого) звездного населения, например рекомбинационных линий гелия II [32]. При малом темпе аккреции, в режиме нестационарного горения, аккреция вещества на белый карлик будет сопровождаться взрывами классических новых, частота которых непосредственно связана с частотой взрывов сверхновых Ia в галактике [9]. Сравнение этих предсказаний с наблюдениями в рентгеновском и оптическом диапазонах спектра и со статистикой классических новых в близких галактиках может ограничить вклад различных режимов аккреции в производство сверхновых Ia.

1. Режимы термоядерного горения и излучение аккрецирующих белых карликов

Пик распределения масс углеродно-кислородных белых карликов, сформированных в результате стандартной звездной эволюции, приходится приблизительно на 0,6—0,7$M_\odot$, максимальное значение массы не превышает примерно 1,1$M_\odot$ [30]. Поэтому для достижения предела Чандрасекара белому карлику необходимо аккрецировать приблизительно более 0,3$M_\odot$ вещества звезды-донора. Хотя детонация белого карлика, в принципе, возможна и при меньших массах, так называемые субчандрасекаровские модели пока не способны воспроизвести наблюдаемые свойства сверхновых Ia [12, 19], несмотря на продолжающиеся попытки [7]. Поэтому в данной статье мы их рассматривать не будем.

Аккреция вещества звезды-донора сопровождается термоядерным горением водорода на поверхности белого карлика, которое является доминирующим источником энергии, примерно в 20—30 раз превосходя энерговыделение за счет гравитационной энергии аккрецирующего вещества. Термоядерное горение устойчиво и происходит в стационарном режиме, если темп аккреции превышает критическое значение. Точное значение критического темпа аккреции зависит от массы белого карлика и несколько различается в разных расчетах. Согласно результатам К. Номото и др. [18] оно составляет:

$$\dot{M}_{\min} \approx 3{,}1 \cdot 10^{-7} (M_{WD} / M_\odot - 0{,}54) M_\odot \,/\, \text{год}. \qquad (1)$$

При более низких значениях темпа аккреции термоядерное горение на поверхности белого карлика неустойчиво и происходит в форме термоядерных вспышек, приводя к явлению классических и рекуррентных новых. Время рекуррентности вспышек определяется главным образом массой белого карлика и, в меньшей мере, темпом аккреции (см. далее разд. 5). Зависимость от массы белого карлика такова, что в случае более массивных белых карликов время рекуррентности значительно сокращается — аккреция на белые карлики с массой вблизи чандрасекаровского предела приводит к частым вспышкам, повторяющимся раз в несколько лет. Исторически такие объекты называются рекуррентными новыми.

Темп стационарного горения ограничен сверху значением порядка светимости красного гиганта с массой ядра, равной массе белого карлика [21]. Соответствующее значение максимального темпа аккреции $\dot{M}_{\max}$, при котором возможно стационарное горение, также зависит от массы белого карлика и примерно в два-три раза превышает $\dot{M}_{\min}$ [18]. Конфигурация аккреционного потока при значениях темпа аккреции, превышающих $\dot{M}_{\max}$, недостаточно исследована. Долгое время предполагалось, что возможно формирование квазистационарной протяженной оболочки вокруг белого карлика, состоящей из «лишнего» вещества, фактически прекращающей аккрецию и превращающей белый карлик в красный гигант [16]. В начале 90-х годов И. Хачису, М. Като и К. Номото [10] продемонстрировали, что под действием давления излучения в линиях «лишнее» вещество может сформировать квазистационарный ветер, поддерживаемый излучением от термоядерного горения на поверхности белого карлика с темпом, равным $\dot{M}_{\max}$.

В случае, если темп аккреции находится в пределах между $\dot{M}_{\min}$ и $\dot{M}_{\max}$, полная светимость аккрецирующего белого карлика определяется темпом аккреции $\dot{M}$ и химическим составом аккрецирующего вещества:

$$L_{nuc} = \varepsilon_{\mathrm{H}} X \dot{M}, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_{\mathrm{H}} \approx 6 \cdot 10^{18}$ эрг/г — удельное энерговыделение при термоядерном горении водорода, X — удельное содержание водорода по массе в аккрецирующем веществе. При значениях темпа аккреции и массы белого карлика, типичных для аккреционного сценария, спектр излучения аккрецирующего белого карлика со стационарным ядерным горением на поверхности приближенно описывается спектром излучения абсолютно черного тела с эффективной температурой [24]:

$$T_{eff} = \left(\frac{L_{nuc}}{4\pi R_{WD}^2 \sigma_{SB}} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 5,3 \cdot 10^5 \ \dot{M}_{-7}^{1/4} \ R_{-2}^{-1/2} \ \mathrm{K}. \qquad (3)$$

Пик такого спектра приходится на мягкий рентгеновский диапазон. Компактные рентгеновские источники с такими параметрами (светимость $\log(L_X) \sim 37,5$—38, мягкие спектры с цветовой температурой $kT_c \sim 30$—70 эВ) — так называемые сверхмягкие источники — действительно наблюдаются в нашей и других близких галактиках. Их открытие и интерпретация в качестве белых карликов с ядерным горением водорода на поверхности в течение многих лет рассматривалось как серьезнейший аргумент в поддержку аккреционного сценария происхождения сверхновых Ia [15].

Мягкость спектра излучения сверхмягких источников затрудняет их наблюдение из-за поглощения межзвездной средой. Действительно, для спектра с температурой 50 эВ при колонковой плотности (интеграл плотности газа вдоль луча зрения) межзвездной среды $N_{\mathrm{H}} = 5{\cdot}10^{20}$ см$^{-2}$ в мягком рентгеновском диапазоне (0,3—0,7 кэВ) порядка 60 % излучения поглощается межзвездной средой (рис. 1). Всего же в диапазоне 0,3—0,7 кэВ, с учетом поглощения, будет регистрироваться примерно 6 % болометрической светимости источника. Роль межзвездного поглощения стремительно растет с уменьшением температуры излучения, поэтому рентгеновское излучение от сверхмягких источников с температурой ниже 10—20 эВ практически невозможно обнаружить. Из-за экспоненциального множителя $e^{-\tau(E)}$, входящего в коэффициент поглощения, последнее утверждение практически не зависит от расстояния до источника. При заданной светимости (темпе аккреции) белого карлика температура излучения растет с уменьшением его радиуса. Так как радиус белого карлика сокращается с увеличением его массы (рис. 2), наиболее жесткие спектры будут иметь белые карлики наибольшей массы, т. е. находящиеся вблизи предела Чандрасекара. Для типичных параметров аккреционного сценария в рентгеновском диапазоне будут преимущественно наблюдаться белые карлики массой выше $1{,}1 — 1{,}2 M_{\odot}$.

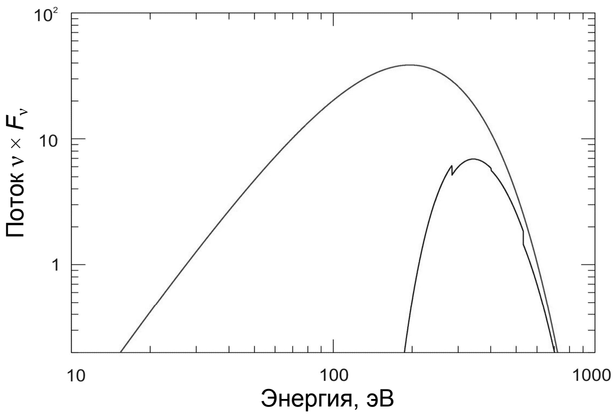


Рис. 1. Влияние межзвездного поглощения на спектры сверхмягких источников. Пример поглощения спектра с температурой 50 эВ при прохождении через межзвездную среду с колонковой плотностью (интеграл плотности газа вдоль луча зрения) $N_{\mathrm{H}} = 5 \cdot 10^{20}$ см$^{-2}$ (верхняя кривая — исходный спектр, нижняя — поглощенный)

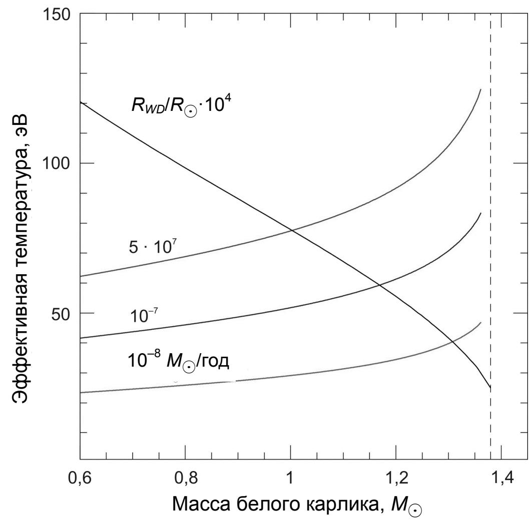


Рис. 2. Зависимость радиуса и эффективной температуры излучения белого карлика от его массы. Эффективная температура показана для трех разных значений темпа аккреции в предположении стационарного горения водорода. Зависимость радиуса от массы взята из работы [22]

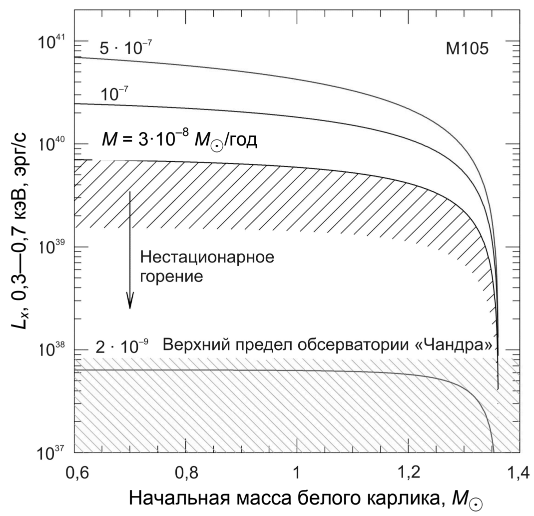


Рис. 3. Светимость популяции белых карликов со стационарным горением водорода на поверхности в галактике M105, предсказываемая аккреционным сценарием. Сплошные линии — зависимость светимости от начальной массы белого карлика для разных темпов аккреции. Заштрихованная область в нижней части рисунка — интервал светимостей, совместимых с наблюдениями обсерватории «Чандра»

На рис. 3 верхняя граница нижней заштрихованной области соответствует абсолютному верхнему пределу, включающему светимость неразрешенного излучения и излучения компактных источников с температурой ниже $kT_c \leq 200$ эВ [1]. Реальная рентгеновская светимость аккрецирующих белых карликов, вероятно, в несколько раз меньше этого абсолютного верхнего предела. В рамках аккреционного сценария вероятное значение темпа аккреции лежит в диапазоне $\dot{M} \geq 10^{-7} M_{\odot}$/год [16]. Ниже $\sim 3 \cdot 10^{-8} M_{\odot}$/год термоядерное горение на поверхности белого карлика неустойчиво и приводит к вспышкам классических и рекуррентных новых (см. разд. 5). Данные рис. 2 и 3 взяты из работы [9].

В случае, когда темп аккреции превышает $\dot{M}_{\max}$, радиус фотосферы будет заметно больше радиуса белого карлика, что приведет к формированию более мягкого спектра излучения. Согласно расчетам И. Хачису, М. Като и К. Номото [10] для темпов аккреции, ожидаемых в таком сценарии, $\dot{M} \sim 10^{-6} M_{\odot}$/год, эффективная температура излучения будет порядка 10^5 К. Как продемонстрировали Т. Вудс и М. Гильфанов [32], водород и гелий выше фотосферы будут полностью ионизованы и спектральный поток вблизи порогов ионизации водорода, гелия и гелия II будет близок к планковскому. Хотя рентгеновское излучение таких источников практически невозможно обнаружить у Земли, они могут оказать заметное влияние на характеристики фона ультрафиолетового излучения в галактике и на ионизационное состояние межзвездной среды (см. разд. 4).

2. Излучение популяции аккрецирующих белых карликов

В аккреционном сценарии, в предположении, что все предшественники сверхновых Ia рождаются с одинаковой начальной массой M_i и имеют одинаковый темп аккреции $\dot{M}$, полное число аккрецирующих белых карликов N_{WD}, необходимое для того, чтобы обеспечить одну вспышку сверхновой в интервал времени $\langle \Delta t \rangle$, равно

$$N_{WD} \sim \frac{\Delta M}{\dot{M} \langle \Delta t \rangle} \sim \frac{\Delta M}{\dot{M}} \dot{N}_{SN\mathrm{Ia}}, \quad (4)$$

где $\Delta M = M_{Ch} - M_i$ — разница между начальной массой белого карлика и пределом Чандрасекара, а темп вспышек сверхновых равен $\dot{N}_{SN\mathrm{Ia}} = \langle \Delta t \rangle^{-1}$.

Из наблюдений известно, что темп вспышек сверхновых пропорционален светимости галактики в ближнем инфракрасном K-диапазоне L_K. Так, например, для старых эллиптических галактик это соотношение имеет вид $\dot{N}_{SN\mathrm{Ia}} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-4}$ год$^{-1}$ на 10^{10} $L_{K,\odot}$ [17]. Заметим, что светимость в K-диапазоне является мерой звездной массы галактики. Также известно, что в более молодых галактиках темп вспышек сверхновых Ia растет примерно обратно пропорционально возрасту галактики. Эта зависимость описывается так называемым распределением времен задержек (delay-time distribution). Одно из приближенных описаний этого распределения в галактиках старше примерно 100—200 млн. лет было предложено Т. Тотани и др. [28] в следующей форме:

$$\dot{N}_{SN\mathrm{Ia}} = 0,57(t/\text{миллиард лет})^{-1,11}\ \text{СНIa/столетие}\,/\,10^{10}\,L_{\mathrm{K},\odot}. \qquad (5)$$

Таким образом, при темпе аккреции в диапазоне порядка 10^{-7}—$10^{-6}\ M_{\odot}$/год аккреционный сценарий предсказывает, что в типичной галактике должно быть порядка 10^3—10^4 аккрецирующих белых карликов, на поверхности которых происходит стационарное горение водорода. Это число значительно превосходит число сверхмягких источников, наблюдающихся в нашей Галактике и ряде других близких галактик, например в Туманности Андромеды [6], что, на первый взгляд, должно говорить о несоответствии между аккреционным сценарием и наблюдениями. Однако количественное сравнение требует учета зависимости предсказываемого числа источников от темпа аккреции (см. соотношение (4)) и, что еще более важно, аккуратного учета эффекта межзвездного поглощения на наблюдаемое число источников. Последнее затруднено распределением аккрецирующих белых карликов по светимости и температуре.

Полную болометрическую светимость популяции белых карликов можно определить, зная их число и светимость одного источника:

$$L_{tot} \approx N_{WD} \cdot L_{nuc} = \varepsilon_{\mathrm{H}} X \Delta M \dot{N}_{SN\mathrm{Ia}}, \qquad (6)$$

где $\Delta M = M_{Ch} - M_i$. Заметим, что темп аккреции сокращается — полная светимость не зависит от темпа аккреции в индивидуальных источниках и определяется лишь полной массой водорода, которая должна быть преобразована на поверхности белого карлика в гелий и затем в углерод и кислород. Отвлекаясь от проблемы устойчивости термоядерного горения, заметим, что с точки зрения темпа вспышек сверхновых Ia в галактике неважно, обеспечивается ли он небольшим числом активно аккрецирующих белых карликов или большой популяцией слабых источников с низким темпом аккреции.

Зная спектр излучения аккрецирующего белого карлика заданной массы при заданном темпе аккреции, $L_{\lambda}(M, \dot{M})$, можно вычислить спектр излучения популяции источников:

$$L_{\lambda}^{tot} = \dot{N}_{SN\mathrm{Ia}} \int_{M_i}^{M_{Ch}} \frac{L_{\lambda}(M, \dot{M})}{\dot{M}}\, dM. \qquad (7)$$

Интегрируя это соотношение по энергии, можно определить светимость популяции белых карликов в заданном диапазоне энергий:

$$L_{tot} = \dot{N}_{SN\mathrm{Ia}} \int_{M_i}^{M_{Ch}} \dot{M}^{-1} dM \int_{E_1}^{E_2} L_\lambda (M, \dot{M}) \exp[-\sigma_{ISM}(E) N_\mathrm{H}] dE, \qquad (8)$$

где член $\exp[-\sigma_{ISM}(E) N_\mathrm{H}]$ учитывает межзвездное поглощение. В простейшем приближении чернотельного спектра излучения белого карлика (см. обсуждение после уравнения (2))

$$L_\lambda (M, \dot{M}) = 4\pi R_{WD}(M)^2 B(E, T_{eff}), \qquad (9)$$

где $B(E, T_{eff})$ — планковский спектр с температурой T_{eff}, определяемой соотношением (3), а $R_{WD}(M)$ — радиус белого карлика, зависящий от его массы (см. рис. 2).

3. Сравнение с рентгеновскими наблюдениями

Таким образом, прямым следствием аккреционного сценария является существование многочисленной популяции мягких рентгеновских источников в галактиках. Наиболее яркие и жесткие из них, соответствующие наиболее массивным белым карликам, будут наблюдаться рентгеновскими телескопами в виде сверхмягких источников. Основная же их масса приведет к формированию яркого протяженного гало мягкого рентгеновского излучения у эллиптических галактик. Наблюдения внешних галактик орбитальными обсерваториями «Чандра» и «Спитцер» в рентгеновском и инфракрасном диапазонах спектра дают возможность проверить это предсказание аккреционного сценария (рис. 3).

С этой целью мы проанализировали [1, 8] архивные данные орбитальных обсерваторий «Чандра» и «Спитцер» и обзора всего неба в *K*-диапазоне 2MASS для нескольких близких эллиптических галактик с низким содержанием горячего газа и для балджа галактики Туманность Андромеды (M31). Используя данные наблюдений в инфракрасном *K*-диапазоне, мы определили темп вспышек сверхновых для каждой галактики и предсказали число и суммарную светимость аккрецирующих белых карликов — предшественников сверхновых Ia, предсказываемых аккреционным сценарием. При вычислении предсказываемой рентгеновской светимости был учтен эффект межзвездного поглощения в соответствии с уравнением (8), который не превышал трех-четырех раз. Обработка рентгеновских и инфракрасных данных описана в работе [1]. Наблюдаемые рентгеновские светимости не имеют поправки на межзвездное поглощение, так что соответствующие столбцы в таблице допускают прямое сравнение.

Очевидно, что наблюдаемые светимости, приведенные в таблице, являются верхним пределом на светимость аккрецирующих белых карликов, так как в нее вносят вклад другие типы компактных источников и диффузное излучение горячего ионизованного газа, присутствующего в этих галактиках.

Сравнение предсказаний аккреционного сценария с наблюдениями

Галактика	L_K [$L_{K,\odot}$]	N_{WD}	L_X [эрг/с]	
	наблюдаемое	предсказанное	наблюдаемое	предсказанное
M32	$8{,}5 \cdot 10^8$	25	$1{,}5 \cdot 10^{36}$	$7{,}1 \cdot 10^{37}$
NGC3377	$2{,}0 \cdot 10^{10}$	$5{,}8 \cdot 10^2$	$4{,}7 \cdot 10^{37}$	$2{,}7 \cdot 10^{39}$
M31 bulge	$3{,}7 \cdot 10^{10}$	$1{,}1 \cdot 10^3$	$6{,}3 \cdot 10^{37}$	$2{,}3 \cdot 10^{39}$
M105	$4{,}1 \cdot 10^{10}$	$1{,}2 \cdot 10^3$	$8{,}3 \cdot 10^{37}$	$5{,}5 \cdot 10^{39}$
NGC4278	$5{,}5 \cdot 10^{10}$	$1{,}6 \cdot 10^3$	$1{,}5 \cdot 10^{38}$	$7{,}6 \cdot 10^{39}$
NGC3585	$1{,}5 \cdot 10^{11}$	$4{,}4 \cdot 10^3$	$3{,}8 \cdot 10^{38}$	$1{,}4 \cdot 10^{40}$

Примечание. Для каждой галактики приведены ее светимость в K-диапазоне, число аккрецирующих белых карликов и их полная светимость, предсказываемые аккреционным сценарием, а также наблюдаемая суммарная светимость неразрешенного излучения и компактных источников с мягкими спектрами. Рентгеновские светимости приведены для диапазона 0,3—0,7 кэВ. При вычислении предсказанных значений уменьшен темп вспышек сверхновых Ia вдвое, чтобы учесть вклад только старых эллиптических галактик, другие параметры были зафиксированы при следующих значениях: темп аккреции $\dot{M} = 10^{-7}\, M_\odot$ /год, начальная масса белого карлика 1,2 $M_\odot$. Предсказанная рентгеновская светимость имеет поправку на межзвездное поглощение. Из работы [8].

Как это очевидно из таблицы, верхний предел на рентгеновскую светимость популяции аккрецирующих белых карликов в рассматриваемых галактиках примерно в 30—50 раз меньше, чем следовало бы ожидать, если бы все сверхновые Ia в этих галактиках были связаны со взрывами белых карликов, аккрецирующих в режиме стационарного ядерного горения.

4. Рекомбинационные линии гелия II

Наблюдения в линии 21 см обнаружили во многих галактиках раннего типа значительное количество нейтрального газа с массой $M_{\rm HI} \sim 10^8$—$10^9\, M_\odot$ [27]. Нейтральный газ, наблюдаемый примерно в 40 % исследуемых галактик, имеет разнообразную морфологию, от рассеянных облаков, распределенных по объему галактики, до регулярных структур, имеющих форму диска или кольца. Последние составляют большинство. Диски нейтрального водорода в этих галактиках имеют размер от нескольких килопарсек до десятков килопарсек, выходя за пределы галактики. Типичное значение колонковой плотности газа в направлении, перпендикулярном плоскости диска, составляет $N_{\rm H} \sim 10^{20}$ см$^{-2}$. С другой стороны, во многих галактиках раннего типа наблюдается протяженное оптическое линейчатое излучение, характерное для слабоионизованного газа с температурой порядка 10^4 К [26]. Доминирующим в спектре этого излучения являются рекомбинационные линии водорода и запрещенные линии металлов —

кислорода, азота, серы и других. Происхождение линейчатого излучения связано с фотоионизацией газа диффузным излучением галактики. Среди различных возможных источников ионизирующего излучения наиболее вероятными являются так называемые postAGB-звезды[1], представляющие собой конечную стадию эволюции звезд с начальной массой не более 8—9 $M_\odot$. Ионизация излучением этих объектов может объяснить наблюдаемые спектральные линии и соотношение их интенсивностей.

Присутствие многочисленной популяции аккрецирующих белых карликов — предшественников сверхновых Ia с температурой излучения не менее 10^5 K значительно изменит спектр диффузного фона в галактике, добавив к нему более жесткую компоненту (рис. 4). Это, в свою очередь, отразится на ионизационной структуре газа. Наиболее легко обнаружимое изменение будет связано с ионизацией гелия II и появлением его рекомбинационных линий в спектре. Отметим, что в спектрах postAGB-звезд континуум выше потенциала ионизации HeII 54,4 эВ сильно ослаблен из-за поглощения оболочкой (см. рис. 3), поэтому в стандартной модели формирования линейчатых спектров за счет ионизации газа излучением звезд рекомбинационные линии HeII не ожидаются. Эти линии наблюдаются в молодых галактиках с интенсивным звездообразованием и главным образом ассоциируются с присутствием ионизирующего излучения от звезд Вольфа — Райе, но совершенно не характерны для галактик раннего типа, за исключением компактных областей вблизи активного ядра.

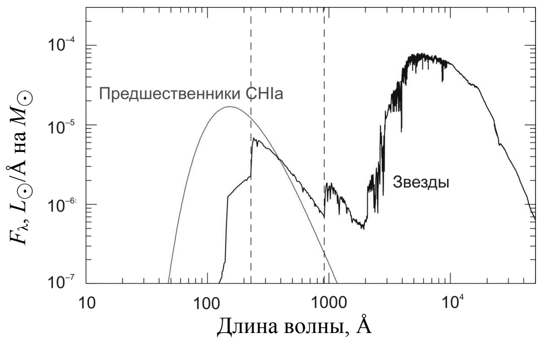


Рис. 4. Спектр излучения звездного населения с возрастом 5 млрд. лет (кривая, помеченная «звезды») и популяции аккрецирующих белых карликов, необходимой для объяснения всех сверхновых Ia в рамках аккреционного сценария (кривая, помеченная «предшественники СНIa»). Предполагалось, что температура фотосферы белых карликов равна $2{\cdot}10^5$ K. Спектр излучения звездного населения взят из расчетов Г. Брузаль и С. Шарло [4]. Штриховой линией показаны потенциалы ионизации водорода и однократно ионизованного гелия

[1] Звезды, находящиеся на стадии эволюции, следующей за асимптотической ветвью гигантов.

Наиболее яркая рекомбинационная линия гелия II, расположенная ниже потенциала ионизации водорода (т. е. не подверженная сильному поглощению нейтральной межзвездной средой), соответствует переходам с главными квантовыми числами $n = 3 \rightarrow 2$ на длине волны $\lambda \approx 640$ Å. Наиболее сильная линия в оптическом диапазоне — переходы с $n = 4 \rightarrow 3$ на длине волны $\lambda \approx 4686$ Å. Так как светимости этих линий определяются главным образом потоком ионизирующего излучения на $h\nu \geq 54{,}4$ эВ, они могут быть использованы для диагностики популяции аккрецирующих белых карликов с температурой порядка несколько сотен тысяч градусов, мягкое рентгеновское излучение которых может быть сильно ослаблено межзвездным поглощением.

В простейшем случае одноатомного газа большой оптической толщи, в пределе большого ионизационного параметра светимость в рекомбинационной линии определяется потоком ионизирующего излучения и долей рекомбинаций, приводящих к излучению в линии [20]. Например, для линии 4686 Å [32]

$$L_{4686,\,\max} = h\nu_{4686} \frac{\alpha^{eff}_{\mathrm{HeII}\,4\rightarrow 3}(T_{gas})}{\alpha_{\mathrm{B}}(T_{gas})} \int_{54,4\ \text{эВ}}^{\infty} \frac{L_\nu}{h\nu} \mathrm{d}\nu. \tag{10}$$

Это выражение представляет максимально возможное значение светимости рекомбинационной линии. В реальной ситуации малых значений ионизационного параметра и газа с солнечным обилием элементов часть фотонов будет поглощаться водородом и нейтральным гелием, и поток в рекомбинационных линиях гелия II будет меньше, чем предсказывается уравнением (10). Эта задача подробно рассмотрена в численных расчетах Т. Вудса и М. Гильфанова [32]. Результаты этих расчетов приведены на рис. 5, на котором показана зависимость удельной светимости (на единицу звездной массы) рекомбинационной линии гелия II 4686 Å от возраста галактики. Рассмотрены два случая ионизации: 1) излучением звездного населения и 2) популяцией аккрецирующих белых карликов, число которых достаточно для объяснения всех сверхновых Ia аккреционным сценарием. В расчетах, показанных на рис. 4, предполагалось, что температура фотосферы белого карлика равна $2 \cdot 10^5$ К. В случае ионизации излучением звезд поток ионизирующего излучения при энергиях порядка потенциала ионизации гелия II практически постоянен на временах $t \geq 1$ млрд. лет, поэтому светимость линии 4686 Å почти не зависит от возраста галактики. С другой стороны, так как частота вспышек сверхновых Ia в молодых галактиках значительно выше (уравнение (5)), поток ионизирующего излучения и светимость рекомбинационной линии 4686 Å сильно зависят от возраста галактики, $L_{\lambda 4686} / M_* \propto t^{-1,7}$ [32]. Очевидно, что присутствие в галактике популяции аккрецирующих белых карликов в количестве, необходимом для объяснения наблюдаемого темпа вспышек сверхновых типа Ia приведет к значительному усилению рекомбинационных линий гелия II в ее спектре. Этот эффект будет наиболее заметен в более молодых галактиках, возраст которых не больше 3—5 млрд. лет.

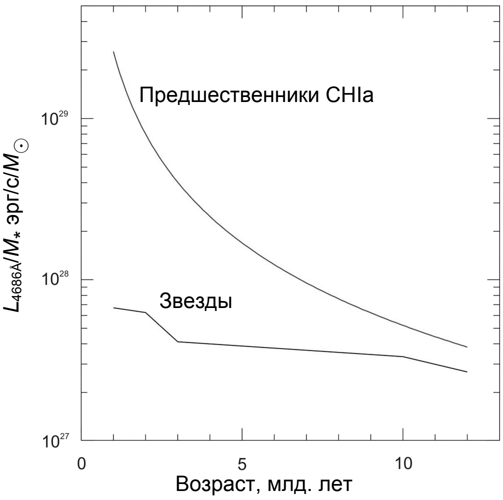


Рис. 5. Светимость рекомбинационной линии гелия 4686 Å в предположении, что диффузный ионизационный фон в галактике создается: а) стандартным звездным населением (кривая, помеченная «звезды») и б) популяцией аккрецирующих белых карликов, необходимых для объяснения всех сверхновых Ia в рамках аккреционного сценария (кривая, помеченная «предшественники СНIa»). Предполагалось, что температура фотосферы белых карликов равна $2{\cdot}10^5$ К. Из работы [32]

Несмотря на интенсивные исследования линейчатого излучения ионизованного газа в галактиках ранних типов, область длин волн вблизи рекомбинационных линий гелия исследована плохо. Низкая светимость этих линий в старых (не меньше миллиарда лет) галактиках, следовавшая из общих соображений и предсказывавшаяся более точными теоретическими расчетами, делала данную область неинтересной для спектроскопических исследований. Поэтому не является удивительным, что в литературе нет опубликованных измерений рекомбинационных линий геля II в галактиках ранних типов. Тем не менее, как показали расчеты Т. Вудса и М. Гильфанова [32], даже в случае ионизации излучением звезд следует ожидать излучение в линии 4686 Å на уровне примерно 10 % от светимости в линии H_β. Присутствие же в галактиках с возрастом порядка 1—5 млрд. лет популяции аккрецирующих белых карликов в количестве, необходимом для объяснения происхождения сверхновых Ia в аккреционном сценарии, приведет к усилению излучения в рекомбинационных линиях гелия II приблизительно в 5—10 раз, до 10^{39} эрг/с для типичной галактики. Этого вполне достаточно для ее обнаружения современными телескопами, однако требует оснащения телескопа спектрометром высокого разрешения с большой апертурой. При наличии такого спектрометра вполне достижима чувствительность на уровне порядка 10^{-16} эрг/(с·см^2), что позволит искать излучение в линии 4868 Å в галактиках, расположенных на расстояниях до 100—200 Мпк. Чувствительности данных слоановского обзора неба (SDSS) также может оказаться достаточно для обнаружения линии 4686 Å, если не в индивидуальных объектах, то в сумме спектров многих галактик. Светимость линии или верхние пределы в случае ее необнаружения позволят наложить верхний предел на вклад аккрецирующих белых карликов с температурой фотосферы порядка нескольких сотен тысяч кельвин в темп вспышек сверхновых типа Ia.

5. Статистика классических и рекуррентных новых

При нестационарном горении водорода во вспышках классических новых теряется значительная часть аккрецированного вещества [33], поэтому ожидается, что в этом режиме масса белого карлика не растет или растет несущественно. Соответственно, стандартный аккреционный сценарий не рассматривает источники классических новых, с темпами аккреции значительно ниже предела устойчивого горения $\dot{M}_{\min}$, в качестве серьезных кандидатов в предшественники сверхновых Ia. Тем не менее расчеты О. Яруна и др. [33] показывают, что вблизи границы устойчивого горения возможно удержание заметной доли оболочки во время взрыва новой. Этот факт вдохновил некоторых авторов предположить, что рекуррентные новые могут быть предшественниками сверхновых Ia. Как будет продемонстрировано ниже, в этом случае ожидаемая частота вспышек классических и рекуррентных новых будет заметно превосходить наблюдаемую величину [9].

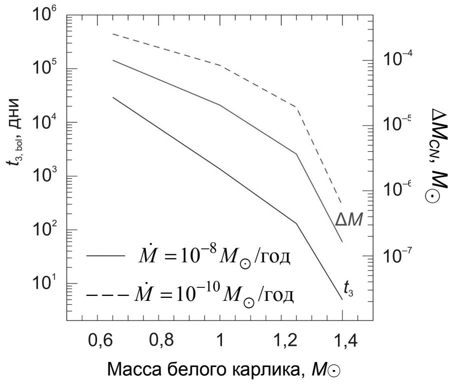
Предполагая, что источники классических и рекуррентных новых являются основными предшественниками сверхновых типа Ia, легко показать, что частоты вспышек сверхновых $\dot{N}_{SN}$ и классических новых $\dot{N}_{CN}$ связаны между собой:

$$\Delta M_{acc}\,\dot{N}_{CN} \sim \Delta M_{SN}\,\dot{N}_{SN}, \qquad (11)$$

где $\Delta M_{acc} \leq 10^{-7}$—$10^{-4}$ $M_\odot$ — увеличение массы белого карлика за один цикл классической новой (набор массы — вспышка), $\Delta M_{SN} \sim 0{,}5 M_\odot$ — масса, необходимая белому карлику для достижения предела Чандрасекара. Так как ΔM_{acc} зависит от темпа аккреции $\dot{M}$, массы и температуры белого карлика (рис. 6), более точное соотношение будет следующим:

$$\frac{\dot{N}_{CN}}{\dot{N}_{SN\mathrm{Ia}}} = \int \frac{dM_{WD}}{\Delta M_{acc}(M_{WD}, \dot{M})} \geq \int \frac{dM_{WD}}{\Delta M_{CN}(M_{WD}, \dot{M})}, \tag{12}$$

где ΔM_{CN} — критическая масса оболочки, при которой происходит детонация водорода на поверхности белого карлика. Неравенство в этом уравнении отражает тот факт, что из-за потери массы оболочки во время взрыва новой $\Delta M_{acc} \leq \Delta M_{CN}$. Так как ΔM_{CN} сильно падает с увеличением массы белого карлика (см. рис. 6), основной вклад в частоту вспышек классических новых вносят наиболее массивные белые карлики, так же как и в рентгеновское излучение в режиме стационарного горения водорода. Они станут источниками частых рекуррентных всплесков с относительно короткими временами распада [33], приводя, таким образом, к появлению большой популяции быстрых (в том числе рекуррентных) новых.



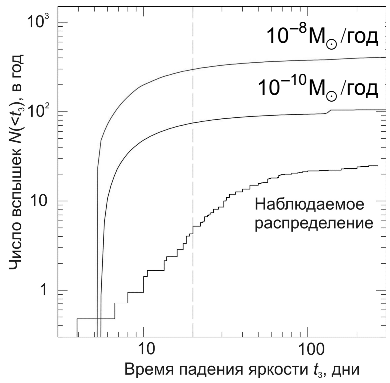


Рис. 6. Зависимость критической массы оболочки ΔM_{CN}, при которой происходит детонация водорода на поверхности белого карлика, и времени распада кривой блеска классической новой t_3 от массы белого карлика M_{WD} и темпа аккреции $\dot{M}$ — по результатам расчетов О. Яруна и др. [33].

Рис. 7. Кумулятивное распределение времен распада кривой блеска t_3 для классических новых в галактике Туманность Андромеды (M31). Гистограммой показано наблюдаемое распределение по результатам М. Капаччиоли и др. [5]. Эффекты наблюдательной неполноты могут слегка изменить ее форму, однако в интервале рассматриваемых значений t_3 эти изменения будут незначительны [5] и не повлияют на главные выводы. Гладкими кривыми показаны распределения, ожидаемые в аккреционном сценарии при предположении, что все сверхновые Ia образуются из аккрецирующих белых карликов с нестационарным горением водорода на поверхности. Результаты расчета показаны для двух значений темпа аккреции. Теоретические кривые получены на основе расчетов О. Яруна и др. [33] для температуры ядра белого карлика 10^7 К. Вертикальной штриховой линией показана граница быстрых новых, обсуждаемых в тексте

Это предсказание аккреционного сценария противоречит статистике классических и рекуррентных новых, наблюдаемых, например, в галактике Туманность Андромеды, как показано на рис. 7. Действительно, наблюдаемая частота вспышек классических новых с временем распада $t_3 < 20$ дней в этой галактике равна приблизительно $(5{,}2 \pm 1{,}1)$ год$^{-1}$ [5], в то время как уравнение (12) предсказывает примерно 300 год$^{-1}$ при темпе аккреции $\dot{M} \sim 10^{-8} M_{\odot}$/год, ожидаемом в сценарии рекуррентных новых. Так как ΔM_{CN} растет с уменьшением темпа аккреции, противоречие между наблюдаемой и предсказываемой частотой вспышек классических и рекуррентных новых становится менее драматичным при меньших темпах аккреции. Тем не менее очень низкие темпы аккреции $\dot{M} \leq 10^{-10} M_{\odot}$/год, скорее всего, не являются реалистичными в контексте предшественников сверхновых Ia. Реалистичные же модели с темпом аккреции $\dot{M} \geq 10^{-8} M_{\odot}$/год могут произвести не более 2 % сверхновых Ia, не вступая в противоречие со статистикой классических и рекуррентных новых.

Заключение

Аккреционный сценарий в его стандартной формулировке рассматривает стационарное горение водорода как наиболее эффективный режим увеличения массы белого карлика. В этом режиме по мере приближения к пределу Чандрасекара предшественники сверхновых Ia становятся мощными источниками мягкого рентгеновского излучения. Популяция из 10^3—10^4 таких источников, ожидаемая в типичной галактике, должна создать гало мягкого рентгеновского излучения вокруг нее. Его предсказываемая светимость в десятки раз превышает светимость неразрешенного излучения вокруг эллиптических галактик, наблюдаемого обсерваторией «Чандра». Таким образом, вклад сверхмягких источников в производство сверхновых Ia в эллиптических галактиках не может превышать нескольких процентов.

В определенном интервале параметров (малые массы белых карликов или большие значения темпа аккреции) температура фотосферы белого карлика может быть слишком низка, так что его излучение будет сильно ослаблено поглощением межзвездной средой и необнаружимо. Поэтому аргумент, основанный на измерении светимости в мягком рентгеновском диапазоне, будет неприменим. Однако аккрецирующие белые карлики и в этом случае являются самыми горячими источниками в галактике, с температурой фотосферы значительно выше, чем характерные температуры звезд. Существование их многочисленной популяции способно изменить диффузный фон ионизирующего излучения в родительской галактике, что отразится на ионизационном балансе межзвездной среды и на спектре ее линейчатого излучения. На длинах волн $\lambda \geq 912$ Å (потенциал ионизации водорода), т. е. в оптическом и ближнем ультрафиолетовом диапазонах спектра, излучение межзвездной среды не будет подвержено заметному межзвездному поглощению и будет наблюдаемо у Земли. Таким образом, исследуя линейчатое излучения межзвездной среды, в частности излучение в рекомбинационных линиях гелия II, возможно «калориметрировать» популяцию белых карликов с низкими фотосферными температурами, не наблюдаемую другими методами, и измерять суммарный темп термоядерного горения водорода на поверхности белых карликов в галактике. Этот метод еще предстоит реализовать на практике.

Расчеты показывают, что накопление массы белым карликом возможно и в нестационарном режиме, вблизи порога устойчивости термоядерного горения. В этом случае энергия термоядерного горения водорода будет преимущественно выделяться в межзвездную среду в виде кинетической энергии классических новых и их оптического излучения. Вклад этого излучения в полное излучение родительской галактики невелик и интегрально ненаблюдаем. Однако в силу их яркости классические новые обнаруживаются индивидуально, и их статистика в ближайших галактиках достаточно хорошо известна. В этом режиме на каждую вспышку сверхновой, требующей накопления приблизительно 0,3—0,5 $M_{\odot}$ вещества, на поверхности аккрецирующего белого карлика произойдет порядка 10^6 вспышек классических новых. Это противоречит статистике классических новых в близких галактиках, в том числе в галактике Туманность Андромеды. Таким образом, вклад источников классических и рекуррентных новых в производство сверхновых Ia также не может превышать нескольких процентов.

Вышеприведенные аргументы практически полностью исключают аккрецирующие белые карлики, взрывающиеся при достижении ими предела Чандрасекара, из списка кандидатов в предшественники сверхновых Ia. Подчеркнем, что основная доля наблюдаемого рентгеновского излучения от сверхмягких источников и большая часть вспышек частых рекуррентных новых связана с массивными белыми карликами вблизи предела Чандрасекара. Поэтому субчандрасекаровские модели, в которых взрыв сверхновой происходит при массе порядка 1,1—1,2 $M_{\odot}$, этими аргументами ограничиваются в (гораздо) меньшей степени. Дальнейшее развитие этих моделей покажет, появится ли их модификация, способная описать всю совокупность наблюдаемых свойств сверхновых Ia. В настоящее же время субчандрасекаровские модели не могут воспроизвести наблюдаемые спектры и кривые блеска сверхновых Ia, и единственной альтернативой аккреционному сценарию остается слияние белых карликов. Именно этот механизм в данный момент представляется главным в образовании сверхновых типа Ia в галактиках, возраст которых превышает 1 млрд. лет.

Литература

1. *Bogdán, Á.* Soft band X/K luminosity ratios for gas-poor early-type galaxies / Á. Bogdán, M. Gilfanov // Astron. Astrophys. — 2010. — V. 512. — P. 168.

2. *Bogdán, Á.* Soft-band X/K luminosity ratios in late-type galaxies and constraints on the population of supersoft X-ray sources / Á. Bogdán, M. Gilfanov // Monthly Notices of The Royal Astronomical Society. — 2011. — V. 412. — P. 401—410.

3. *Богомазов, А. И.* Слияния компонент тесных двойных систем: сверхновые типа Ia, массивные белые карлики и Ap-звезды / А. И. Богомазов, А. В. Тутуков // Астрономический журнал. — 2009. — Т. 86, № 3. — С. 240—249.

4. *Bruzual, G.* Stellar population synthesis at the resolution of 2003 / G. Bruzual, S. Charlot // Monthly Notices of The Royal Astronomical Society. — 2003. — V. 344. — P. 1000.

5. *Capaccioli, M.* Properties of the nova population in M31 / M. Capaccioli, M. della Valle, L. Rosino, M. D'Onofrio // Astron. J. — 1989. — V. 97. — P. 1622.

6. *Di Stefano, R.* The Progenitors of Type Ia Supernovae. I. Are they Supersoft Sources? / R. Di Stefano // Astrophys. J. — 2010. — V. 712. — P. 728.

7. *Fink, M.* Double-detonation supernovae of sub-Chandrasekhar mass white dwarfs / M. Fink, W. Hillebrandt, F. K. Röpke // Astron. Astrophys. — 2007. — V. 476. — P. 1133—1143.

8. *Gilfanov, M.* An upper limit on the contribution of accreting white dwarfs to the type Ia supernova rate / M. Gilfanov, Á. Bogdán // Nature. — 2010. — V. 463. — P. 924.

9. *Gilfanov, M.* Progenitors of type Ia supernovae in elliptical galaxies / M. Gilfanov, Á. Bogdán // A Conference in Honor of M. Ali Alpar : AIP Conference Proceedings. — 2011. — V. 1379. — P. 17—22.

10. *Hachisu, I.* A New Model for Progenitor Systems of Type IA Supernovae / I. Hachisu, M. Kato, K. Nomoto //Astrophys. J. Lett. — 1996. — V. 470, № 2. — P. L97—L100.

11. *Han, Z.* The formation of bipolar planetary nebulae and close white dwarf binaries / Z. Han, P. Podsiadlowski, P. Eggleton // Monthly Notices of The Royal Astronomical Society. — 1995. — V. 272. — P. 800—820.

12. *Hoeflich, P.* Explosion Models for Type IA Supernovae: A Comparison with Observed Light Curves, Distances, H_0, and q_0 / P. Hoeflich, A. Khokhlov // Astrophys. J. — 1996. — V. 457. — P. 500—528.

13. *Iben, I. Jr.* Supernovae of type I as end products of the evolution of binaries with components of moderate initial mass (M not greater than about 9 solar masses) / I. Jr. Iben, A. V. Tutukov // Astrophys. J. Suppl. — 1984. — V. 54. — P. 335—372.

14. *Jorgensen, H. E.* Evolution of Supernova Explosion Rates in the Universe / H. E. Jorgensen et al. // Astrophys. J. — 1997. — V. 486. — P. 110—116.

15. *Kahabka, P.* Luminous Supersoft X-Ray Sources / P. Kahabka, E. P. J. van den Heuvel // Annu. Rev. Astron. Astrophys. — 1997. — V. 35. — P. 69—100.

16. *Livio, M.* The Progenitors of Type Ia Supernovae / M. Livio // Type Ia Supernovae : Theory and Cosmology / eds.: J. C. Niemeyer and J. W. Truran. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000. — P. 33.

17. *Mannucci, F.* The supernova rate per unit mass / F. Mannucci et al. // Astron. Astrophys. — 2005. — V. 433, № 3. — P. 807—814.

18. *Nomoto, K.* Thermal Stability of White Dwarfs Accreting Hydrogen-rich Matter and Progenitors of Type Ia Supernovae / K. Nomoto et al. // Astrophys. J. — 2007. — V. 663. — P. 1269—1276.

19. *Nugent, P.* Synthetic Spectra of Hydrodynamic Models of Type Ia Supernovae / P. Nugent et al. // Astrophys. J. — 1997. — V. 485. — P. 812—819.

20. *Osterbrock, D. E.* Astrophysics of gaseous nebulae and active galactic nuclei / D. E. Osterbrock. —Mill Valley : University Science Books, 1989. — 422 p.

21. *Paczynski, B.* Evolution of Single Stars. I. Stellar Evolution from Main Sequence to White Dwarf or Carbon Ignition / B. Paczynski // Acta Astron. — 1970. — V. 20. — P. 47.

22. *Panei, J. A.* Mass-radius relations for white dwarf stars of different internal compositions / J. A. Panei, L. G. Althaus, O. G. Benvenuto // Astron. Astrophys. — 2000. — V. 353. — P. 970—977.

23. *Perlmutter, S.* Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae / S. Perlmutter et al. // Astrophys. J. — 1999. — V. 517. — P. 565—586.

24. *Rauch, T.* Non-LTE model atmospheres for supersoft X-ray sources / T. Rauch, K. Werner // Astron. Nachr. — 2010. — V. 331, № 2. — P. 146—151.

25. *Riess, A. G.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant / A. G. Riess et al. // Astron. J. — 1998. — V. 116. — P. 1009—1038.

26. *Sarzi, M.* The SAURON project. XVI. On the sources of ionization for the gas in elliptical and lenticular galaxies / M. Sarzi et al. // Monthly Notices of The Royal Astronomical Society. — 2010. — V. 402. — P. 2187—2210.

27. *Serra, P.* The ATLAS 3D project. XIII. Mass and morphology of H I in early-type galaxies as a function of environment / P. Serra et al. // Monthly Notices of The Royal Astronomical Society. — 2012. — V. 422. — P. 1835—1862.

28. *Totani, T.* Delay Time Distribution Measurement of Type Ia Supernovae by the Subaru/XMM-Newton Deep Survey and Implications for the Progenitor / T. Totani et al. // Publ. Astron. Soc. Japan. — 2008. — V. 60. — P. 1327.

29. *Webbink, R.* Double white dwarfs as progenitors of R Coronae Borealis stars and type I supernovae / R. Webbink // Astrophys. J. — 1984. — V. 277. — P. 355—360.

30. *Weidemann, W.* Revision of the initial-to-final mass relation / W. Weidemann // Astron. Astrophys. — 2000. — V. 363. — P. 647—656.

31. *Whelan, J.* Binaries and supernovae of type I / J. Whelan, I. Jr. Iben // Astrophys. J. — 1973. — V. 186. — P. 1007—1014.

32. *Woods, T.* He II recombination lines as a test of the nature of SN Ia progenitors in elliptical galaxies / T. Woods, M. Gilfanov // Monthly Notices of The Royal Astronomical Society. — 2013. — arXiv:1302.5911. — [submitted].

33. *Yaron, O.* An Extended Grid of Nova Models. II. The Parameter Space of Nova Outbursts / O. Yaron, D. Prialnik, M. M. Shara, A. Kovetz // Astrophys. J. — 2005. — V. 623. — P. 398—410.

34. *Юнгельсон, Л. Р.* Эволюция численности аккрецирующих белых карликов с слоевым ядерным горением и частоты СН Ia / Л. Р. Юнгельсон // Письма в Астрономический журнал. — 2010. — Т. 36, № 11. — Р. 823—831.

КВАЗИСФЕРИЧЕСКАЯ ДОЗВУКОВАЯ АККРЕЦИЯ НА РЕНТГЕНОВСКИЕ ПУЛЬСАРЫ

К. А. Постнов, Н. И. Шакура, А. Ю. Кочеткова, Л. Ялмарсдоттер

Введение

Феномен рентгеновского пульсара возникает при аккреции вещества на вращающиеся нейтронные звезды с сильным магнитным полем в тесных двойных системах. Если второй компонент системы (оптическая звезда) заполняет полость Роша, вокруг нейтронной звезды образуется аккреционный диск. Если второй компонент является массивной звездой раннего спектрального класса (O, B), аккреция вещества на нейтронную звезду может происходить из мощного звездного ветра, и тогда, в зависимости от параметров ветра, вокруг нейтронной звезды может образоваться аккреционный диск, или аккреция будет идти в квазисферическом режиме. Сильное магнитное поле нейтронной звезды (порядка 10^{12}—10^{13} Гс) изменяет характер течения вблизи магнитосферы, образующейся на определенном расстоянии от поверхности. Поток плазмы вмораживается в силовые линии магнитного поля и направляется в область полярных шапок, где образуются горячие пятна. Если ось магнитного диполя не совпадает с осью вращения нейтронной звезды, наблюдается пульсирующее рентгеновское излучение. От большинства известных рентгеновских пульсаров наблюдаются стохастические вариации частоты вращения и рентгеновского потока. У многих источников также видны долговременные тренды частоты вращения (когда последняя в среднем увеличивается или уменьшается), а также изменения режимов ускорения на режим замедления (так называемые обращения спина от англ. «spin reversal») (см. подробный обзор [1] и ссылки там).

Лучше всего изучен режим аккреции через геометрически тонкие диски на релятивистские компактные звезды [2]. В этом режиме момент сил, ускоряющий нейтронную звезду, может быть записан в виде [3] $K_{su} \approx \dot{M}\sqrt{GMR_A}$. Внутренний радиус диска вокруг рентгеновского пульсара определяется альвеновской поверхностью R_A, которая находится на расстоянии $R_A \sim \dot{M}^{-2/7}$, поэтому $K_{su} \sim \dot{M}^{6/7}$, т. е. для дисковой аккреции ускоряющий момент сил почти линейно зависит от темпа аккреции (рентгеновской светимости). Тормозящий момент сил в случае дисковой аккреции в первом приближении не зависит от $\dot{M}$: $K_{sd} \sim -\mu^2 / R_c^3$, где R = $= (GM / (\omega^*)^2)^{1/3}$ — радиус коротации, ω^* — частота вращения нейтронной звезды и μ — дипольный магнитный момент нейтронной звезды. В действительности моменты сил при дисковой аккреции определяются сложным взаимодействием диска и магнитосферы (см., например, [4, 5] и обсуждение вопроса в работе [6]) и поэтому могут иметь более сложную зависимость от темпа аккреции и от других параметров.

Измерение темпов замедления и ускорения частоты вращения нейтронных звезд в рентгеновских пульсарах может быть использовано для оценки важнейшей физической характеристики нейтронной звезды — ее магнитного поля. Период вращения нейтронных звезд в рентгеновских пульсарах обычно близок к равновесному значению P_{eq}, при котором суммарный момент сил, приложенный к нейтронной звезде, равен нулю $K = K_{su} + K_{sd} = 0$. Поэтому, предполагая, что наблюдаемое значение частоты вращения нейтронной звезды $\omega^* = 2\pi / P_{eq}$, из выражения для равновесного периода при дисковой аккреции и при известном $\dot{M}$ можно оценить магнитное поле нейтронной звезды.

В случае квазисферической аккреции, которая может происходить в двойных системах, где оптическая звезда не заполняет свою полость Роша и диска не образуется, ситуация оказывается более сложной. Очевидно, что для ускорения или торможения нейтронной звезды в этом режиме важны количество и знак момента импульса в веществе, захватываемом из звездного ветра. С точностью до множителя порядка единицы (который может быть положительным или отрицательным — см., например, численные расчеты [7, 8, 9]) момент сил, приложенный к нейтронной звезде, в этом случае пропорционален величине $\dot{M}\omega_B R_B^2$, где $\omega_B = 2\pi / P_B$ — угловая частота орбитального движения, $R_B = 2GM / (V_w^2 + v_{orb}^2)$ — радиус гравитационного захвата Бонди, V_w — скорость звездного ветра вблизи нейтронной звезды, $v_{\rm orb}$ — орбитальная скорость нейтронной звезды. В реально наблюдаемых массивных рентгеновских двойных системах эксцентриситет орбиты отличен от нуля, звездный ветер может быть переменным и неоднородным, поэтому K_{su} может быть сложной функцией времени. Тормозящий момент сил в этом случае еще более не определен, так как для него уже невозможно записать простое выражение типа $-\mu^2 / R_c^3$ (радиус коротации R_c не имеет четкого смысла для квазисферической аккреции; в медленно вращающихся пульсарах он гораздо больше альвеновского радиуса, на котором в действительности и происходит передача момента импульса от аккрецирующего вещества магнитосфере). Например, при использовании выражения для момента тормозящих сил в виде $-\mu^2 / R_c^3$ магнитное поле долгопериодических пульсаров получается формально очень большим (порядка 10^{14} Гс и выше). Представляется, что это результат недооценки тормозящего момента сил, приложенного к магнитосфере нейтронной звезды в режиме квазисферической аккреции.

Вещество, захватываемое из звездного ветра, может аккрецировать на нейтронную звезду по-разному. Действительно, если поток рентгеновского излучения от аккрецирующей нейтронной звезды достаточно большой, вещество звездного ветра, нагретое за фронтом головной ударной волны, быстро охлаждается излучением (комптоновское охлаждение) и свободно падает на магнитосферу. Скорость падающего вещества быстро превосходит звуковую, поэтому над магнитосферой возникает ударная волна. Этот режим аккреции изучался в работе [10]. В зависимости от направления вектора удельного момента импульса захватываемого вещества (вдоль или против орбитального момента импульса) нейтронная звезда может ускорять или замедлять свое вращение. Однако если поток рентгеновского излучения (точнее, плотность энергии фотонов) оказывается ниже некоторого значения, нагретая плазма вблизи радиуса Бонди не успевает остывать, и падение к магнитосфере происходит в дозвуковом режиме (режим оседания). При этом вокруг магнитосферы образуется горячая квазисферическая оболочка [11] (см. рис. 1). Вследствие дополнительного энерговыделения (особенно у основания оболочки) температурный градиент становится сверхадиабатическим, поэтому в оболочке с неизбежностью возникают крупномасштабные конвективные движения. Конвекция порождает турбулентность, поэтому движение жидкого элемента в такой оболочке крайне сложное. Если плазма способна проникнуть в магнитосферу и далее падать на нейтронную звезду, темп аккреции во всей оболочке будет определяться именно магнитосферой (например, при некоторых условиях оболочка может существовать, но темп аккреции в ней может быть чрезвычайно мал или вообще равен нулю).

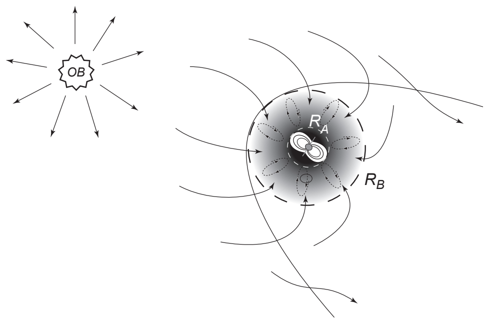


Рис. 1. Схема квазисферической аккреции из звездного ветра оптического компонента двойной системы (*справа*) на замагниченную нейтронную звезду (*слева*). В режиме дозвукового оседания между фронтом головной ударной волны (параболическая кривая) над вращающейся магнитосферой нейтронной звезды с радиусом R_A образуется квазисферическая оболочка (затемненная область), в которой развиваются крупномасштабные конвективные движения, способные отводить момент импульса от магнитосферы. Внешний радиус оболочки определяется радиусом Бонди R_B

Таким образом, в оболочке на фоне крупномасштабной конвекции может происходить медленное дозвуковое оседание вещества. Такая картина аккреции возможна при относительно малых рентгеновских светимостях $L_X < 4\cdot10^{36}$ эрг/с (см. ниже), и в корне отличается от численных расчетов, упомянутых выше. При наличии оболочки ее взаимодействие с вращающейся магнитосферой будет ускорять или замедлять нейтронную звезду в зависимости от знака разности угловой скорости аккрецирующего вещества и границы магнитосферы. Поэтому в режиме аккреционного оседания возможно как ускорение, так и замедление вращения нейтронной звезды, даже если удельный момент импульса захваченного вещества всегда сонаправлен с орбитальным. При этом через оболочку будет переноситься поток момента импульса от или по направлению к вращающейся нейтронной звезде.

В литературе можно найти несколько моделей (см. особенно [12, 13]), в которых тормозящий момент сил, приложенный к магнитосфере нейтронной звезды на стадии квазисферической аккреции, записывается в виде $K_{sd} \sim -\dot{M}R_A^2\omega^*$. С учетом стандартного определения альвеновского радиуса $R_A \sim \dot{M}^{-2/7}\mu^{4/7}$ этот момент сил пропорционален $K_{sd} \sim -\mu^{8/7}\dot{M}^{3/7}$. В нашей модели вещество оболочки оседает с дозвуковой скоростью по мере охлаждения вблизи границы магнитосферы, и альвеновский радиус определяется иначе: $R_A \sim \dot{M}^{-2/11}\mu^{6/11}$ (см. ниже). Можно указать на два разных механизма отвода момента импульса от вращающейся магнитосферы наружу по оболочке. В первом случае (мы называем его случаем *умеренной связи*) отвод момента осуществляется конвективными движениями в оболочке и тормозящий момент сил в режиме оседания с конвективным выносом момента импульса по оболочке зависит от темпа аккреции как $K_{sd} \sim -\dot{M}^{3/11}$ (см. раздел 4). В этом режиме характерная скорость конвективных движений околозвуковая. Также возможен режим оседания, в котором отвод момента импульса происходит за счет сдвиговой турбулентности в оболочке (случай *слабой связи*). В этом режиме характерные скорости сдвигового течения вблизи магнитосферы порядка ее линейной скорости вращения. В этом случае $K_{sd} \sim \mu^2/R_c^3 \sim \mu^2\omega^{*2}/(GM)$, т. е. в режиме слабой связи тормозящий момент сил вообще не зависит от темпа аккреции.

Чтобы подчеркнуть разницу между двумя возможными режимами дозвуковой аккреции (умеренной и слабой связи), перепишем выражение для тормозящего момента сил при конвекции (умеренная связь) через радиус коротации и альвеновский радиус в виде $K_{sd} \sim -\mu^2/\sqrt{R_c^3R_A^3} \sim$ $\sim -(\mu^2/R_c^3)(R_c/R_A)^{3/2}$ (см. подробнее в разделе 3). Так как сомножитель $(R_c/R_A)^{3/2} \sim (\omega_K(R_A)/\omega^*)$ в реальных системах может быть порядка 10 или больше, использование выражения для тормозящего момента сил в виде μ^2 / R_c^3 может приводить к переоценке магнитного поля нейтронной звезды.

Зависимость тормозящего момента сил в случае сферической аккреции от темпа аккреции показывает, что вариации темпа аккреции (и рентгеновской светимости) должны приводить к замене режима ускорения (при высоких светимостях) на режим замедления (при низких светимостях) при некотором критическом значении темпа аккреции $\dot{M}$ (или R_A), различном в разных источниках. Это явление (также известное как «обращение моментов сил», англ. «torque reversal») действительно наблюдается в некоторых рентгеновских пульсарах со сферической аккрецией, например у Vela X-1, GX 301-2 и GX 1+4, и ниже мы рассмотрим эти объекты подробнее.

Статья построена на основе оригинальных работ [14, 15]. Для удобства чтения сохранены подробные выводы основных уравнений, но опущен ряд дополнений.

1. Квазисферическая аккреция

Рассмотрим моменты сил, приложенные к замагниченной нейтронной звезде при квазисферической аккреции из звездного ветра. Вещество ветра гравитационно захватывается движущейся нейтронной звездой, при этом на характерном расстоянии $R \sim R_B$, где R_B — радиус Бонди, формируется головная ударная волна. Момент импульса может отводиться от нейтронной звезды двумя разными способами — либо вместе с веществом, отбрасываемым от вращающейся магнитосферы на стадии пропеллера [16] (при этом аккреции как таковой на нейтронную звезду не происходит), либо крупномасштабными конвективными движениями в квазистатической оболочке вокруг магнитосферы (при этом аккреция на нейтронную звезду осуществляется со скоростью, определяемой пропускной способностью магнитосферы в режиме дозвукового оседания).

В такой квазистатической оболочке температура остается высокой (порядка вириальной температуры, см. [11]), и возникает ключевой вопрос: может ли горячая плазма войти в магнитосферу. Двумерные расчеты Р. Ф. Элснера и Ф. К. Ламба [17] показали, что горячий одноатомный идеальный газ не подвержен неустойчивости Рэлея — Тейлора на границе магнитосферы, поэтому для аккреции требуется охлаждение плазмы. Однако тщательное рассмотрение трехмерных расчетов [18] показывает, что горячая плазма находится на границе устойчивости вблизи экватора магнитосферы (с 5%-ной точностью этих расчетов). Комптоновское охлаждение и возможные диссипативные процессы (магнитное пересоединение и т. д.) облегчают проникновение плазмы в магнитосферу. Ниже мы покажем, что замедление вращения нейтронной звезды возможно при аккреции вещества из горячей оболочки в режиме дозвукового оседания.

В нулевом приближении мы можем пренебречь как вращением, так и радиальными движениями вещества в оболочке и рассмотреть ее структуру в гидростатическом равновесии. Скорость радиального движения вещества в оболочке u_r меньше скорости звука c_s. При этих предположениях характерное время нагрева/охлаждения гораздо больше характерного времени свободного падения.

1.1. Структура квазистатической дозвуковой оболочки вокруг магнитосферы нейтронной звезды

В общем случае в оболочке есть газовое давление и анизотропные турбулентные движения, поэтому закон Паскаля нарушается. Тогда уравнение гидростатического равновесия может быть выведено из уравнений движения (49) с компонентами тензора напряжений (52)—(54) и нулевой вязкостью:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dP_g}{dR}-\frac{1}{\rho R^2}\frac{d(P_\parallel^t R^2)}{dR}+\frac{2P_\perp^t}{\rho R}-\frac{GM}{R^2}=0. \qquad (1)$$

Здесь $P_g=\rho c_s^2/\gamma$ — газовое давление, а P^t означает вклад из-за турбулентных движений:

$$P_\parallel^t=\rho\left\langle u_\parallel^2\right\rangle=\rho m_\parallel^2 c_s^2=\gamma P_g m_\parallel^2, \qquad (2)$$

$$P_\perp^t=\rho\left\langle u_\perp^2\right\rangle=\rho m_\perp^2 c_s^2=\gamma P_g m_\perp^2 \qquad (3)$$

($\left\langle u_t^2\right\rangle=\left\langle u_\parallel^2\right\rangle+2\left\langle u_\perp^2\right\rangle$ есть дисперсия турбулентных скоростей, $m_\parallel^2$ и $m_\perp^2$ — квадраты турбулентных чисел Маха в радиальном и тангенциальном направлении соответственно, например для изотропной турбулентности $m_\parallel^2=m_\perp^2=(1/3)m_t^2$, где m_t — турбулентное число Маха). Полное давление дается суммой газового и турбулентного слагаемых: $P_g+P_t=P_g(1+\gamma m_t^2)$. Вообще говоря, турбулентные числа Маха в оболочке могут зависеть от радиуса, однако в нашей модели мы будем считать их постоянными.

В первом приближении будем считать энтропию S в оболочке постоянной. Для идеального газа с показателем адиабаты γ и уравнением состояния $P=Ke^{S/c_V}\rho^\gamma$ плотность может быть выражена как функция температуры: $\rho\sim T^{1/(\gamma-1)}$. Интегрируя при этих предположениях уравнение гидростатического равновесия (1), находим

$$\frac{\mathcal{R}T}{\mu_m} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{GM}{R}\left(\frac{1}{1+\gamma m_{\parallel}^2 - 2(\gamma-1)(m_{\parallel}^2 - m_{\perp}^2)}\right) = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{GM}{R}\psi(\gamma, m_t). \quad (4)$$

(В этом решении мы пренебрегли постоянной интегрирования, которая не важна в глубине оболочки. Она играет роль во внешних частях оболочки, но, так как они близки к ударной волне, которая вблизи $\sim R_B$ не является сферически-симметричной, их структура должна находиться численно.) Ниже мы увидим, что в оболочках реальных пульсаров скорее всего устанавливается изомоментное распределение угловой скорости $\omega(R) \sim R^{-2}$.

Теперь запишем, как изменяется плотность в квазистатической оболочке при $R << R_B$. Для полностью ионизованного газа с $\gamma = 5/3$ находим закон изменения плотности:

$$\rho(R) = \rho(R_A)\left(\frac{R_A}{R}\right)^{3/2}, \quad (5)$$

и газового давления:

$$P(R) = P(R_A)\left(\frac{R_A}{R}\right)^{5/2}. \quad (6)$$

Эти уравнения описывают структуру идеальной статической адиабатической оболочки над магнитосферой. Конечно, при $R \sim R_B$ задача становится существенно сферически-несимметричной, и для расчета структуры внешних частей оболочки требуются численные методы. Поправки к адиабатическому градиенту температуры из-за конвективного переноса энергии в оболочке вычислены в приложении D работы [14].

1.2. Альвеновская поверхность

На границе магнитосферы (альвеновской поверхности) полное давление (включающее изотропное газовое давление и — возможно, анизотропное — турбулентное давление) равно давлению магнитного поля $B^2/(8\pi)$:

$$P_g + P_t = P_g(R_A)(1+\gamma m_t^2) = \frac{B^2(R_A)}{8\pi}. \quad (7)$$

Магнитное поле на альвеновском радиусе определяется дипольным магнитным моментом нейтронной звезды и полем, создаваемым токами, текущими по поверхности магнитосферы (в магнитопаузе)

$$P_g(R_A) = \frac{K_2}{(1+\gamma m_t^2)}\frac{B_0^2}{8\pi}\left(\frac{R_0}{R_A}\right)^6 = \frac{\rho\mathcal{R}T}{\mu_m}, \quad (8)$$

где безразмерный коэффициент K_2 учитывает вклад магнитосферных токов, а множитель $1/(1+\gamma m_t^2)$ возникает из-за вклада турбулентного давления. Например, в модели Дж. Аронса и С. М. Ли [18] (см. их уравнение (31)) $K_2 = (2{,}75)^2 \approx 7{,}56$. В области магнитосферного каспа (в которой кривизна магнитных силовых линий наибольшая) размер альвеновской поверхности составляет около 0,51 от экваториального размера [18]. Ниже везде будем предполагать, что R_A есть экваториальный альвеновский радиус, если не оговорено иначе.

Плазма проникает в магнитосферу в основном из-за неустойчивости Рэлея — Тейлора. В стационарном режиме введем темп аккреции $\dot{M}$ на нейтронную звезду. Из уравнения неразрывности в оболочке находим

$$\rho(R_A) = \frac{\dot{M}}{4\pi u_r(R_A) R_A^2}. \tag{9}$$

Очевидно, скорость радиального движения вещества в оболочке при входе вещества в магнитосферу меньше скорости свободного падения, поэтому мы вводим безразмерный коэффициент $f(u) = u_r / \sqrt{2GM/R} < 1$. Тогда плотность вблизи границы магнитосферы записывается в виде

$$\rho(R_A) = \frac{\dot{M}}{4\pi f(u)\sqrt{2GM/R_A}\, R_A^2}. \tag{10}$$

Например, в модели [18] $f(u) \approx 0{,}1$; в нашем случае при высоких рентгеновских светимостях безразмерная скорость $f(u)$ может достигать значения приблизительно 0,5. Если представить, что магнитосфера вообще непроницаема и темп аккреции в оболочке $\dot{M} \to 0$, то в этом случае $u_r \to 0$, $f(u) \to 0$, однако плотность вблизи магнитосферы остается конечной. В некотором смысле вещество просачивается сквозь магнитосферу на нейтронную звезду, и скорость протечки может быть как очень малой $(\dot{M} \to 0)$, так и иметь конечное ненулевое значение $(\dot{M} \neq 0)$.

Исключая плотность из соотношения (8) с помощью уравнения неразрывности и используя (4) вместе с определением дипольного магнитного момента

$$\mu = \frac{1}{2} B_0 R_0^3$$

(где R_0 — радиус нейтронной звезды), находим выражение для альвеновского радиуса на стадии квазисферической аккреции:

$$R_A = \left[\frac{4\gamma}{(\gamma-1)} \frac{f(u) K_2}{\psi(\gamma, m_t)(1+\gamma m_t^2)} \frac{\mu^2}{\dot{M}\sqrt{2GM}} \right]^{2/7}. \tag{11}$$

Следует подчеркнуть, что при наличии горячей оболочки альвеновский радиус определяется статическим газовым давлением (и возможным вкладом турбулентных движений) на границе магнитосферы и имеет определенное значение даже при нулевом темпе аккреции через оболочку.

Зависимость коэффициента $f(u)$ от $\dot{M}$ в режиме оседающей оболочки с учетом охлаждения будет получена ниже (см. формулу (32)). В режиме сверхзвукового падения (режим Бонди) очевидно, что $f(u) = 1$.

Заметим, что и в режиме Бонди [19] может иметь место падение с дозвуковой скоростью, но с меньшим (по сравнению с максимально возможным) значением темпа аккреции $\dot{M}$. В режиме Бонди (т. е. в адиабатическом режиме без нагрева и/или охлаждения газа) выбор решения определяется граничными условиями.

1.3. Средняя скорость прохождения вещества через границу магнитосферы

Как отмечалось выше, плазма проникает в магнитосферу медленно вращающейся нейтронной звезды в основном из-за неустойчивости Рэлея — Тейлора. Граница между плазмой и магнитосферой будет устойчивой для горячей плазмы с температурой $T > T_{cr}$, неустойчива при $T < T_{cr}$ и останется в безразличном равновесии при $T = T_{cr}$ [17]. Критическая температура

$$\mathcal{R}T_{cr} = \frac{1}{2(1+\gamma m_t^2)} \frac{\cos\chi}{\kappa R_A} \frac{\mu_m GM}{R_A}. \tag{12}$$

Здесь κ — локальная кривизна магнитосферных силовых линий, χ — угол между внешней нормалью и радиус-вектором в данной точке, а сомножитель $(1+\gamma m_t^2)$ учитывает вклад в полное давление турбулентных пульсаций в плазме. Эффективное ускорение силы тяжести записывается в виде

$$g_{eff} = \frac{GM}{R_A^2} \cos\chi \left(1 - \frac{T}{T_{cr}}\right). \tag{13}$$

Температура в квазистатической оболочке определяется выражением (4), поэтому условие магнитосферной неустойчивости можно переписать в следующем виде:

$$\frac{T}{T_{cr}} = \frac{2(\gamma-1)(1+\gamma m_t^2)}{\gamma} \psi(\gamma, m_t) \frac{\kappa R_A}{\cos\chi} < 1. \tag{14}$$

Согласно [18], когда внешнее газовое давление изменяется с радиусом как $P \sim R^{-5/2}$, форма магнитосферы вдали от полярного каспа может быть с 10%-ной точностью описана как $(\cos\lambda)^{0{,}2693}$ (здесь λ — широтный угол, отсчитываемый от экватора магнитосферы). Неустойчивость легче всего развивается вблизи экватора, где кривизна магнитных силовых линий минимальна. Вблизи плоскости экватора ($\lambda = 0$) для полоидальной границы магнитосферы с зависимостью примерно $(\cos \lambda)^{0,27}$ получаем $k_p R_A = 1 + 0{,}27$. Кривизна тороидального поля вблизи экватора $k_1 R_A = 1$. Касательная сфера вблизи экватора не может иметь радиус больше, чем обратная полоидальная кривизна, поэтому $\kappa R_A = 1{,}27$ при $\lambda = 0$. Это несколько больше значения $\kappa R_A = \gamma / (2(\gamma - 1)) = 5/4 = 1{,}25$ (для $\gamma = 5/3$ при отсутствии турбулентности или для полностью изотропной турбулентности), но находится в пределах точности вычислений формы магнитосферы [1]. Вклад анизотропной турбулентности уменьшает критическую температуру; например, для $\gamma = 5/3$ в случае сильно анизотропной турбулентности с $m_{\|} = 1$, $m_{\perp} = 0$, при $\lambda = 0$ получаем $T / T_{cr} \sim 2$, т. е. анизотропная турбулентность увеличивает устойчивость магнитосферы. Таким образом, без охлаждения граница плазмы и магнитосферы устойчива, а при охлаждении плазмы до $T < T_{cr}$ развивается неустойчивость, преимущественно в области магнитосферного экватора, где кривизна магнитных силовых линий минимальна.

Рассмотрим подробнее развитие перестановочной неустойчивости при наличии охлаждения плазмы. Охлаждение наиболее эффективно благодаря комптоновским процессам рентгеновскими фотонами, которые рождаются вблизи магнитных полярных шапок аккрецирующей нейтронной звезды. При этом температура плазмы меняется как [20, 21]

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T - T_X}{t_C}, \tag{15}$$

где время комптоновского охлаждения есть

$$t_C = \frac{3}{2\mu_m} \frac{\pi R_A^2 m_e c^2}{\sigma_T L_X} \approx 10{,}6 R_9^2 \dot{M}_{16}^{-1} \text{ [с]}. \tag{16}$$

Здесь m_e — масса электрона, σ_T — томсоновское сечение, $L_X = 0{,}1\dot{M}c^2$ — рентгеновская светимость, T — электронная температура (которая равна ионной температуре, так как при характерных условиях рассматриваемой задачи время обмена энергией между электронами и ионами является самым коротким), T_X — температура рентгеновских фотонов и $\mu_m = 0{,}6$ — молекулярный вес полностью ионизованной плазмы солнечного химсостава. Фотонная температура $T_X = (1/4)T_{cut}$ для теплового излучения с экспоненциальным завалом при T_{cut}, и ее типичное значение для рентгеновских пульсаров T_X = 3—5 кэВ.

Решение уравнения (15) записывается в виде

$$T = T_X + (T_{cr} - T_X)\mathrm{e}^{-t/t_C}. \tag{17}$$

[1] В работе [33] кривизна вблизи экватора $\kappa R_A \approx 1{,}34$, т. е. совпадает с критическим значением 1,25 в пределах точности вычислений.

Заметим, что характерное значение $T_{cr} \sim 30$ кэВ >> $T_X \sim 3$ кэВ. При таком соотношении T_{cr} и T_X видно, что при $t \approx 2t_C$ температура падает до T_X. В линейном приближении изменение температуры есть

$$T \approx T_{cr}(1 - t / t_C). \tag{18}$$

Подставляя это выражение в (13), находим, что эффективное ускорение силы тяжести линейно нарастает со временем:

$$g_{eff} \approx \frac{GM}{R_A^2} \frac{t}{t_C} \cos\chi. \tag{19}$$

Соответственно радиальная скорость вещества при развитии неустойчивости растет со временем как

$$u_r = \int_0^{t_{inst}} g_{eff}\, dt = \frac{GM}{R_A^2} \frac{t_{inst}^2}{2t_C} \cos\chi. \tag{20}$$

Характерное время неустойчивости t_{inst} естественно выбрать в виде

$$t_{inst} = \frac{K_0}{\omega_K(R_A)} \frac{u_{ff}}{u} = \frac{K_0}{\omega_K(R_A) f(u)}. \tag{21}$$

Выбор такого выражения связан с тем, что в случае быстрого охлаждения радиальная скорость вещества u_r порядка скорости свободного падения u_{ff}, а в случае медленного охлаждения $u << u_{ff}$. Мы также ввели обозначение $f(u) \equiv u_r / u_{ff}$, которое будет использоваться везде ниже. K_0 – безразмерная константа порядка единицы.

Подставляя t_{inst} в (20), находим скорость, приобретаемую веществом за время неустойчивости

$$u_r(t_{inst}) = \frac{K_0^2}{2} \frac{R_A}{t_C f(u)^2} \cos\chi. \tag{22}$$

Деля обе части этого выражения на u_{ff} и разрешая относительно $f(u)$, получаем выражение для безразмерного фактора $f(u)$:

$$f(u) = \left(\frac{K_0^2}{2}\right)^{1/3} \left(\frac{t_{ff}}{t_C}\right)^{1/3} (\cos\chi)^{1/3}. \tag{23}$$

Здесь введено время свободного падения

$$t_{ff} \equiv \frac{R_A}{u_{ff}(R_A)} = \frac{R_A^{3/2}}{\sqrt{2GM}}. \tag{24}$$

Тогда характерное время неустойчивости переписывается в виде

$$t_{inst} = \frac{(2K_0)^{1/3}}{\omega_K(R_A)} \left(\frac{t_C}{t_{ff}}\right)^{1/3} (\cos\chi)^{-1/3}. \tag{25}$$

Отсюда видно, что при $t_C >> t_{ff}$ время неустойчивости намного превосходит время свободного падения:

$$\frac{t_{inst}}{t_{ff}} = 2^{1/2}(2K_0)^{1/3}\left(\frac{t_C}{t_{ff}}\right)^{1/3}(\cos\chi)^{-1/3}. \tag{26}$$

С другой стороны, время неустойчивости меньше времени комптоновского охлаждения:

$$\frac{t_{inst}}{t_C} = 2^{1/2}(2K_0)^{1/3}\left(\frac{t_{ff}}{t_C}\right)^{2/3}(\cos\chi)^{-1/3} < 1, \tag{27}$$

что позволяет использовать линейный участок в разложении роста температуры со временем (18).

Характерное расстояние, на котором развивается неустойчивость

$$\Delta = \int_0^{t_{inst}} u_r dt = \frac{1}{6}\frac{GM}{R_A^2}\frac{t_{inst}^3}{t_C}\cos\chi = \frac{1}{3}u_r t_{inst} = \frac{\sqrt{2}}{3}K_0 R_A. \tag{28}$$

Таким образом, за время t_{inst} неустойчивость развивается на масштабах, сравнимых с радиусом магнитосферы, а скорость падения оказывается гораздо меньше скорости свободного падения u_{ff}. Ясно, что на более поздней нелинейной стадии развития неустойчивости скорость приближается к скорости свободного падения. Мы же рассматриваем линейную стадию, на которой температура плазмы еще не слишком низка (хотя энтропия начинает уменьшаться вглубь магнитосферы). Именно в этой зоне прежде всего формируется тороидальная компонента магнитного поля и происходит эффективный обмен моментом импульса между оболочкой и магнитосферой. На более поздней стадии развития неустойчивости энтропия падает столь сильно, что условия для возникновения конвекции исчезают.

Можно оценить точность нашего приближения, удерживая члены второго порядка в разложении экспоненты. Тогда скорость вещества, развиваемого за время неустойчивости t_{inst}, есть

$$u_r(t_{inst}) = K_0^{2/3}\left(\frac{GM}{t_C}\right)^{1/3}(\cos\chi)^{1/3}\left[1 - \frac{2^{5/6}K_0^{1/3}}{3}\left(\frac{t_{ff}}{t_C}\right)^{2/3}(\cos\chi)^{-1/3}\right]. \tag{29}$$

Очевидно, чем меньше темп аккреции, тем меньше отношение t_{ff} / t_C и тем лучше наше приближение.

Заметим, что для границы магнитосферы в виде $\cos\lambda^n$ имеем $\mathrm{tg}\chi = n\mathrm{tg}\lambda$, поэтому для $n \simeq 0{,}27$ вблизи экватора магнитосферы с хорошей точностью $\cos\chi \simeq 1$, и всюду ниже будем опускать этот фактор. Также отметим, что в области магнитосферного каспа $\cos\chi \simeq 0$, и в этой области вещество почти не проникает в магнитосферу.

Подставляя (16) в (23) и затем $f(u)$ в определение (11), для альвеновского радиуса в режиме оседания для $\gamma = 5/3$ находим

$$R_A \approx 1{,}55 \cdot 10^9 K_0^{2/11} \left[\left(1 + \frac{5}{3} m_t^2\right) \psi\left(\frac{5}{3}, m_1\right) \right]^{-3/11} \left(\frac{\mu_{30}^3}{\dot{M}_{16}}\right)^{2/11} \text{ [см].} \tag{30}$$

Подчеркнем разницу в полученном выражении со стандартным значением альвеновского радиуса для сферической аккреции $R_A \sim \mu^{4/7} / \dot{M}^{-2/7}$, который получается из равенства динамического давления свободно падающего газа давлению магнитного поля; эта разница связана с учетом фактора $f(u)$, который зависит от магнитного момента нейтронной звезды и темпа аккреции в режиме оседания.

Коэффициент, возникающий из-за учета турбулентности,

$$K_t = \left(1 + \frac{5}{3} m_t^2\right) \psi\left(\frac{5}{3}, m_t\right), \tag{31}$$

очевидно, равен 1 для изотропной турбулентности (см. выражение для ψ (4)) и интересен только в случае сильно анизотропной турбулентности.

Подставляя (30) в (23), получаем явное выражение для $f(u)$:

$$f(u) \approx 0{,}39 K_0^{7/11} K_t^{1/22} \dot{M}_{16}^{4/11} \mu_{30}^{-1/11}. \tag{32}$$

Необходимым условием отвода момента импульса от магнитосферы путем конвекции в оболочке является условие дозвукового оседания (число Маха для скорости оседания $\mathcal{M} \equiv u_r / u_s < 1$), что при $\gamma = 5/3$ сводится к неравенству $f(u) < 1/\sqrt{3}$. Очевидно, при темпах аккреции около 10^{16} г/с и ниже это условие выполняется. Важно также отметить, что конвекция и отвод момента импульса по оболочке практически прекращаются, когда усредненная радиальная скорость оседания вещества u_r оказывается больше конвективной скорости u_c, т. е. когда конвективное число Маха $m_c = u_c / c_s \sim m_t$ меньше обычного числа Маха $\mathcal{M} = u_r / c_s$. И наоборот, когда число Маха радиального течения меньше турбулентного числа Маха $\mathcal{M} < m_t \sim m_c$, может иметь место отвод момента импульса по оболочке.

Когда темп аккреции вещества через оболочку превосходит некоторое критическое значение $\dot{M} > \dot{M}^\dagger$, скорость аккрецирующего потока вблизи альвеновской поверхности может превысить скорость звука и над магнитосферой возникает область сверхзвукового течения со свободным падением вещества, через которую нельзя отводить момент импульса от вращающейся магнитосферы. В таком случае режим аккреционного оседания не применим: над магнитосферой встает ударная волна, и взаимодействие с магнитосферой рассматривается по схеме, изученной, например, в работе [10]. В зависимости от характера неоднородностей в захваченном звездном ветре удельный момент импульса вещества может быть как положительным, так и отрицательным, и в сверхзвуковом режиме возможны чередующиеся эпизоды ускорения и замедления вращения нейтронной звезды. Поэтому переход от дозвукового режима оседания (при низких рентгеновских светимостях) к режиму аккреции Бонди — Хойла — Литтлтона (при высоких рентгеновских светимостях) может произойти еще до того, как значение y превысит величину y_0. Действительно, предполагая предельное значение безразмерной скорости оседания $f(u) = 0{,}5$ (при которой еще возможно отведение момента импульса от магнитосферы через оболочку, см. подробнее в приложении E работы [15]), из уравнения (32) получаем максимально возможное значение темпа аккреции для режима оседания с отводом момента импульса:

$$\dot{M}_{16}^{\dagger} \approx 2K_0^{-7/4} K_t^{-1/8} \mu_{30}^{1/4}. \tag{33}$$

Заметим, что близкое значение критического темпа аккреции в режиме оседания получится из сравнения характерного времени комптоновского охлаждения с временем конвекции вблизи альвеновского радиуса.

В заключение этого раздела отметим, что нетрудно провести похожий анализ для скорости входа вещества в магнитосферу из-за радиационного охлаждения плазмы, когда комптоновское охлаждение менее эффективно [22]. Этот случай может реализоваться в рентгеновских пульсарах при низких темпах аккреции, когда происходит перестройка диаграммы направленности рентгеновского излучения и основной поток фотонов формирует крандашную диаграмму, освещающую магнитосферный касп. Таким образом удается объяснить временное появление «выключенных» состояний (с низкой рентгеновской светимостью) у пульсара Vela X-1 и других, сопровождающееся фазовым скачком профиля рентгеновских импульсов [23].

2. Закон дифференциального вращения в квазисферической оболочке с аккрецией

2.1. Структура квазисферической вращающейся оболочки с аккрецией

2.1.1. Основные уравнения

Начнем с записи уравнений Навье — Стокса в сферических координатах R, θ, ϕ. Из-за громадных значений числа Рейнольдса в оболочке (порядка 10^{15}—10^{16} для типичных значений темпов аккреции 10^{17} г/с при радиусе магнитосферы порядка 10^8 см) в оболочке развивается сильная турбулентность. В этом случае уравнения Навье — Стокса обычно называются уравнениями Рейнольдса. В общем случае турбулентная вязкость может зависеть от координат, поэтому гидродинамические уравнения принимают следующий вид:

1) уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\rho u_r\right)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\;\rho u_\theta\right)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\rho u_\phi}{\partial\phi}=0; \tag{34}$$

2) R-компонента уравнения движения:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial R}+\frac{u_\theta}{R}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{u_\phi}{R\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}-\frac{u_\phi^2+u_\theta^2}{R}=-\frac{GM}{R^2}+N_R; \tag{35}$$

3) θ-компонента уравнения движения:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial R}+\frac{u_\theta}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_\phi}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi}+\frac{u_r u_\theta-u_\phi^2\mathrm{ctg}\theta}{R}=N_\theta; \tag{36}$$

4) ϕ-компонента уравнения движения:

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\phi}{\partial R}+\frac{u_\theta}{R}\frac{\partial u_\phi}{\partial\theta}+\frac{u_\phi}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\phi}+\frac{u_r u_\phi+u_\phi u_\theta\mathrm{ctg}\theta}{R}=N_\phi. \tag{37}$$

Здесь компоненты сил (включая вязкую силу и градиент давления) записаны в виде

$$\begin{aligned}\rho N_R=&\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2W_{RR}\right)+\frac{1}{\sin\theta R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(W_{R\theta}\sin\theta\right)+\\&+\frac{1}{\sin\theta R}\frac{\partial}{\partial\phi}W_{R\phi}-\frac{W_{\theta\theta}}{R}-\frac{W_{\phi\phi}}{R},\end{aligned} \tag{38}$$

$$\rho N_\theta=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2W_{\theta R}\right)+\frac{1}{\sin\theta R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(W_{\theta\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{\sin\theta R}\frac{\partial}{\partial\phi}W_{\theta\phi}-\mathrm{ctg}\theta\frac{W_{\theta\theta}}{R}, \tag{39}$$

$$\rho N_\phi=\frac{1}{R^3}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^3W_{\phi R}\right)+\frac{1}{\sin\theta R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(W_{\phi\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{\sin\theta R}\frac{\partial}{\partial\phi}W_{\phi\phi}. \tag{40}$$

В компоненты тензора напряжений дают вклад как газовое давление P_g (предполагаем его изотропным), так и давление от турбулентных степеней свободы P^t (вообще говоря, анизотропное). При их определении будем следовать классическому рассмотрению Ландау и Лифшица [24], однако с учетом анизотропного турбулентного давления

$$W_{RR}=-P_g-P_{RR}^t+2\rho\nu_t\frac{\partial u_r}{\partial R}-\frac{2}{3}\rho\nu_t\;\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \tag{41}$$

$$W_{\theta\theta}=-P_g-P_{\theta\theta}^t+2\rho\nu_t\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{R}\right)-\frac{2}{3}\rho\nu_t\;\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \tag{42}$$

$$W_{\phi\phi}=-P_g-P_{\phi\phi}^t+2\rho\nu_t\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}+\frac{u_r}{R}+\frac{u_\theta\mathrm{ctg}\theta}{R}\right)-\frac{2}{3}\rho\nu_t\;\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \tag{43}$$

$$W_{R\theta} = \rho\nu_t\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial R} - \frac{u_\theta}{R}\right), \tag{44}$$

$$W_{\theta\phi} = \rho\nu_t\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi} + \frac{1}{R}\frac{\partial u_\phi}{\partial\theta} - \frac{u_\phi \mathrm{ctg}\theta}{R}\right), \tag{45}$$

$$W_{R\phi} = \rho\nu_t\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial R} - \frac{u_\phi}{R}\right). \tag{46}$$

В нашей задаче анизотропия турбулентности такова, что $P^t_{RR} = P^t_{\|}$, $P^t_{\theta\theta} = P^t_{\phi\phi} = P^t_{\perp}$. Компоненты турбулентного давления могут быть выражены через турбулентные числа Маха и приведены в формулах (2) и (3).

В сферических координатах

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 u_r\right) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta u_\theta\right) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}. \tag{47}$$

2.1.2. Симметрии задачи

Будем рассматривать аксиально-симметричную ($\partial/\partial\phi = 0$), стационарную ($\partial/\partial t = 0$) и чисто радиальную аккрецию газа ($u_\theta = 0$). При такой постановке задачи из уравнения неразрывности (34) получаем

$$\dot{M} = 4\pi R^2\rho u_r = \mathrm{const}. \tag{48}$$

Постоянная в этом соотношении определяется условиями проникновения плазмы в магнитосферу.

Перепишем уравнения Рейнольдса при данных предположениях. R-компонента уравнения движения (35) выглядит так:

$$\rho\left(u_r\frac{\partial u_r}{\partial R} - \frac{u_\phi^2}{R}\right) = -\rho\frac{GM}{R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 W_{RR}\right) + \\ + \frac{1}{\sin\theta R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(W_{R\theta}\sin\theta\right) - \frac{W_{\theta\theta}}{R} - \frac{W_{\phi\phi}}{R}. \tag{49}$$

θ-компонента уравнения движения:

$$-\rho\frac{u_\phi^2 \mathrm{ctg}\theta}{R} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 W_{\theta R}\right) + \frac{1}{\sin\theta R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(W_{\theta\theta}\sin\theta\right) - \mathrm{ctg}\theta\frac{W_{\theta\theta}}{R}. \tag{50}$$

ϕ-компонента уравнения движения:

$$\rho\left(u_r\frac{\partial u_\phi}{\partial R} + \frac{u_r u_\phi}{R}\right) = \frac{1}{R^3}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^3 W_{\phi R}\right) + \frac{1}{\sin\theta R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(W_{\phi\theta}\sin\theta\right). \tag{51}$$

Компоненты тензора вязких напряжений принимают вид

$$W_{RR} = -P_g - P_{\parallel}^t - \frac{4}{3}\rho\nu_t\left(\frac{u_r}{R} - \frac{\partial u_r}{\partial R}\right), \tag{52}$$

$$W_{\theta\theta} = -P_g - P_{\perp}^t + \frac{2}{3}\rho\nu_t\left(\frac{u_r}{R} - \frac{\partial u_r}{\partial R}\right), \tag{53}$$

$$W_{\phi\phi} = -P_g - P_{\perp}^t + \frac{2}{3}\rho\nu_t\left(\frac{u_r}{R} - \frac{\partial u_r}{\partial R}\right), \tag{54}$$

$$W_{R\theta} = \rho\nu_t \frac{1}{R}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}, \tag{55}$$

$$W_{\theta\phi} = \rho\nu_t\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u_\phi}{\partial\theta} - \frac{u_\phi \operatorname{ctg}\theta}{R}\right), \tag{56}$$

$$W_{R\phi} = \rho\nu_t\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial R} - \frac{u_\phi}{R}\right). \tag{57}$$

Главная проблема в описании газодинамических потоков с развитой турбулентностью заключается в записи коэффициента кинематической вязкости ν_t. Как хорошо известно, в случае ламинарных потоков коэффициент вязкости ν зависит только от свойств среды (жидкости или газа), в то время как при турбулентности этот коэффициент определяется еще и макроскопическими свойствами самого течения. Существуют некие эмпирические соотношения, которые в принципе можно экспериментально проверить. Наиболее часто вводится так называемая длина турбулентного перемешивания l_t. Еще Л. Прандтль в своих работах для плоскопараллельных сдвиговых течений (вдоль оси x для определенности) вводил соотношение между длиной турбулентного перемешивания l_t, скоростью турбулентного потока u_t и характерной величиной сдвига в направлении, перпендикулярном усредненному течению (z):

$$\nu_t = C_0 l_t \left|\frac{du}{dz}\right|, \tag{58}$$

где $C_0 \sim 1$ — универсальная безразмерная константа, точное значение которой должно определяться из теории, в настоящее время отсутствующей. Таким образом, зависимость турбулентных напряжений от величины сдвига является квадратичной: $W_{zx} = \rho C_0 \left(\frac{du}{dz}\right)^2$, и появляется нелинейность, которая в общем случае значительно усложняет задачу.

Сначала рассмотрим обобщение закона Прандтля для турбулентной вязкости на случай аксиально-симметричного течения. При сильно анизотропной турбулентности есть еще один эмпирический закон для записи турбулентной вязкости — закон Васютинского (см. ниже), который не сводится к закону Прандтля в случае изотропной турбулентности. Этот более общий случай для анизотропной турбулентности обсудим отдельно.

2.2. Структура оболочки в случае турбулентной вязкости по Прандтлю

2.2.1. Эмпирический закон Прандтля для турбулентной вязкости для аксиально-симметричных течений

Рассмотри осесимметричное течение с очень большим числом Рейнольдса. Обобщая закон Прандтля для турбулентных скоростей, выведенный для плоскопараллельных течений, запишем зависимость скорости $u_t \sim l_t R(\partial\omega/\partial R)$. Из газодинамических законов подобия предположим $l_t \sim R$, так что

$$u_t = C_1 R^2 \left|\frac{\partial\omega}{\partial R}\right|. \tag{59}$$

Заметим, что в нашем случае турбулентная скорость определяется конвекцией, поэтому $u_t \lesssim 0{,}5u_{ff}$. Это означает, что константа

$$C_1 \sim u_t / \langle u_\phi \rangle, \tag{60}$$

может быть весьма велика, поскольку $\langle u_\phi \rangle \ll u_t$. Поэтому коэффициент турбулентной вязкости

$$\nu_t = \langle u_t l_t \rangle = C_2 C_1 R^3 \left|\frac{\partial\omega}{\partial R}\right|. \tag{61}$$

Здесь $C_2 \approx 1/3$ — числовой множитель, возникающий при статистическом усреднении. Для дальнейшего введем новый коэффициент $C = C_1C_2$, который может быть гораздо больше единицы.

При таком законе для вязкости турбулентные напряжения $W_{R\phi}$ равны

$$W_{R\phi} = \rho\nu_t R\frac{\partial\omega}{\partial R} = \rho C R^4 \left(\frac{\partial\omega}{\partial R}\right)^2. \tag{62}$$

2.2.2. Уравнение переноса момента импульса

Схожая проблема (вращение сферы в вязкой жидкости) решена в учебнике Ландау и Лифшица [24], где показано, что в этой задаче переменные разделяются, и можно записать $u_\phi(R,\theta) = u_\phi(R)\sin\theta$. Заметим, что угловая скорость вращения $\omega(R) = u_\phi(R)/R$ не зависит от полярного угла θ. Наша постановка задачи отличается от вращения сферы в вязкой жидкости в нескольких аспектах: 1) есть сила тяжести, 2) турбулентная вязкость меняется с расстоянием R и, вообще говоря, может зависеть от угла θ, 3) есть радиальное движение вещества (аккреция). Эти отличия приводят, как будет показано ниже, к радиальной зависимости скорости вращения $u_\phi(R) \propto R^{-1/2}$. (Напомним, что в случае вращающейся сферы в вязкой жидкости $u_\phi \propto R^{-2}$.)

Начнем с решения уравнения (51). Во-первых, заметим, что для $u_\phi(\theta) \sim \sin\theta$ согласно (56) $W_{\theta\phi} = 0$. Далее, используя уравнение неразрывности (48) и определение угловой скорости, запишем уравнение (51) в виде уравнения переноса момента импульса вязкими силами:

$$\sin\theta \frac{\dot{M}}{R}\frac{\partial}{\partial R}\omega R^2 = \frac{4\pi}{R}\frac{\partial}{\partial R}R^3 W_{R\phi}. \tag{63}$$

Перепишем уравнение (57) через производную от угловой скорости вращения:

$$W_{R\phi} = \rho\nu_t R\frac{\partial\omega}{\partial R}\sin\theta. \tag{64}$$

Подставляя это выражение в (63) и интегрируя по R, получаем

$$\dot{M}\omega R^2 = 4\pi\rho\nu_t R^4\frac{\partial\omega}{\partial R} + D. \tag{65}$$

Это уравнение для переноса момента импульса турбулентной вязкостью похоже на аналогичное уравнение для аккреционных дисков [2], однако отличается от него сферической симметрией рассматриваемой задачи.

Левая часть уравнения (65) описывает адвективный перенос усредненного по сфере момента импульса ($1/2\int_0^\pi \omega R^2 \sin^2\theta \sin\theta \, d\theta = (1/3)\omega R^2$) при среднем движении по направлению к тяготеющему центру (аккреция). Темп аккреции $\dot{M}$ при этом имеет отрицательный знак, также как и значение производной $\partial\omega/\partial R$. Первое слагаемое справа описывает перенос момента импульса наружу турбулентными вязкими силами.

Константа D определяется из уравнения

$$D = \left(\frac{K_1}{\zeta}\right)K_2\frac{\mu^2}{R_A^3}\frac{\omega_m - \omega^*}{\omega_K(R_A)} \tag{66}$$

(см. уравнение (104)). Мы рассматриваем аккрецию на замагниченную нейтронную звезду. При $D < 0$ адвективное слагаемое в левой части (65) доминирует над вязким переносом момента импульса наружу. При $D > 0$ в правой части уравнения (65) доминирует вязкий перенос. В случае $M = 0$

(плазма не проникает в магнитосферу) остается только перенос момента импульса наружу вязкими силами.

Теперь перепишем (66) в виде

$$D = \left(\frac{K_1}{\zeta}\right) K_2 \frac{\mu^2}{R_A^6} R_A^3 \frac{\omega_m - \omega^*}{\omega_K(R_A)} \tag{67}$$

и используем условие равенства давлений

$$P(R_A) = P_g(R_A)(1+\gamma m_t^2) = \frac{B^2(R_A)}{8\pi} = \frac{K_2}{2\pi}\frac{\mu^2}{R_A^6}. \tag{68}$$

Применив уравнение неразрывности в виде

$$|\dot{M}| = 4\pi R^2 \rho f(u)\sqrt{GM/R}$$

и использовав выражение для газового давления (8), перепишем константу интегрирования $D/|\dot{M}|$ в виде

$$\frac{D}{|\dot{M}|} = \left(\frac{K_1}{\zeta}\right)\frac{(\gamma-1)}{\gamma}\psi(\gamma, m_t)\frac{(\omega_m - \omega^*)R_A^2}{2\sqrt{2}f(u)}(1+\gamma m_t^2). \tag{69}$$

Рассмотрим случай вращения нейтронной звезды вблизи равновесия с $\dot{\omega}^* = 0.$ Тогда согласно (111)

$$\omega_m - \omega^* = -\frac{z}{Z}\omega^*, \tag{70}$$

поэтому с использованием выражения (109) для Z получаем

$$\frac{D}{|\dot{M}|} = -zR_A^2\omega^*. \tag{71}$$

Подчеркнем, что при равновесном вращении нейтронной звезды значение константы D полностью определяется безразмерным удельным моментом импульса вещества вблизи альвеновской поверхности z.

2.2.3. Закон вращения в оболочке

Воспользуемся уравнением (65) для нахождения закона вращения $\omega(R)$. На больших расстояниях $R >> R_A$ (напомним читателю, что R_A определяет положение основания оболочки) постоянная D мала по сравнению с остальными слагаемыми, и можно положить $D \approx 0$. При выводе закона вращения будем пренебрегать этой константой в правой части уравнения (65). Далее, подставим (90) и решение для плотности (которое, как будет показано ниже, не отличается от гидростатического распределения)

$$\rho(R) = \rho(R_A)\left(\frac{R_A}{R}\right)^{3/2} \tag{72}$$

в уравнение (65). Получим

$$\left|\dot{M}\right|\omega R^2 = 4\pi\rho(R_A)\left(\frac{R_A}{R}\right)^{3/2} CR^7\left(\frac{\partial\omega}{\partial R}\right)^2. \tag{73}$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем

$$2\omega^{1/2} = \pm\frac{4}{3}\frac{K^{1/2}}{R^{3/4}} + D_1, \tag{74}$$

где

$$K = \frac{|\dot{M}|}{4\pi\rho(R_A)CR_A^{3/2}} \tag{75}$$

и D_1 — постоянная интегрирования. В уравнении (74) мы взяли только положительное решение (знак минус с константой $D_1 > 0$ соответствует решению с угловой скоростью вращения, растущей наружу, что возможно, если период вращения нейтронной звезды очень большой). Если $D_1 \neq 0$, на больших расстояниях $R >> R_A$ (вблизи внешней ударной волны) твердотельное вращение привело бы $\omega \to \text{const} \approx \omega_B$. (Однако напомним читателю, что наше рассмотрение не применимо в области вблизи внешней ударной волны). На малых расстояниях от альвеновской поверхности влияние этой константы незначительно, и в дальнейшем будем ей пренебрегать. Тогда находим

$$\omega(R) = \frac{4}{9}\frac{|\dot{M}|}{4\pi\rho(R_A)CR_A^3}\left(\frac{R_A}{R}\right)^{3/2}, \tag{76}$$

т. е. получаем квазикеплеровский закон вращения $\omega(R) = \omega_m(R_A/R)^{3/2}$. Константа ω_m в решении (76) получается после подстановки $\dot{M}$ из уравнения неразрывности при $R = R_A$ в уравнение (76):

$$\omega_m \equiv \tilde{\omega}\omega(R_A) = \frac{4}{9}\tilde{\omega}\frac{|u_r(R_A)|}{CR_A}. \tag{77}$$

(Здесь введен корректирующий коэффициент $\tilde{\omega} > 1$ для учета отклонений точного решения от квазикеплеровского закона вблизи R_A).

Поскольку радиальная скорость $u_r(R_A)$ меньше скорости свободного падения, формула выше означает, что $\omega_m < \omega_K(R_A)$, т. е. меньше кеплеровской угловой частоты вращения. Для самосогласованности решения коэффициент C в законе Прандтля может быть определен, согласно уравнению (77), из отношения радиальной скорости вещества u_r к угловой скорости вращения u_ϕ:

$$C = \frac{4}{9}\tilde{\omega}\frac{|u_r(R_A)|}{\omega_m R_A} = \frac{4}{9}\tilde{\omega}\frac{|u_r(R_A)|}{u_\phi(R_A)}. \qquad (78)$$

Заметим, что это отношение не зависит от радиуса R и остается постоянным вдоль радиуса оболочки. Действительно, радиальная зависимость скорости u_r следует из уравнения неразрывности с учетом распределения плотности (72):

$$u_r(R) = u_r(R_A)\left(\frac{R_A}{R}\right)^{1/2}. \qquad (79)$$

Для квазикеплеровского закона $u_\phi(R) \sim 1/R^{1/2}$, поэтому отношение u_r / u_ϕ остается постоянным.

Наконец, угловая скорость вращения оболочки вблизи магнитосферы ω_m связана с угловой скоростью вращения вещества вблизи внешней ударной волны как

$$\omega_m = \tilde{\omega}\omega_B\left(\frac{R_B}{R_A}\right)^{3/2}. \qquad (80)$$

В действительности при приближении к R_A константу интегрирования D (которой мы пренебрегли на больших расстояниях $R >> R_A$) нужно учесть. Поэтому закон вращения вблизи магнитосферы будет несколько отличаться от квазикеплеровского.

Подчеркнем принципиальное отличие рассматриваемого режима аккреции от дисковой аккреции. В случае дисковой аккреции радиальная скорость движения вещества намного меньше скорости турбулентных движений, а тангенциальная скорость почти кеплерова и намного превосходит скорость турбулентных движений. При квазисферической дозвуковой аккреции радиальная скорость движения вещества не определяется темпом отвода момента импульса. Эта скорость зависит только от «проницаемости» магнитосферы нейтронной звезды для падающего вещества. В нашем случае она оказывается порядка скорости конвективных движений в оболочке. Тангенциальная скорость в полученном квазикеплеровском законе вращения намного меньше скорости конвективных движений в оболочке. Также заметим, что при дисковой аккреции турбулентность может быть охарактеризована одним безразмерным параметром $\alpha \approx u_t^2 / u_s^2$ с $0 < \alpha < 1$ [2]. Вещество в аккреционном диске дифференциально вращается со сверхзвуковой (почти кеплеровской) скоростью, тогда как в нашем случае оболочка вращается дифференциально с существенно дозвуковой скоростью на любом радиусе, и турбулентность в оболочке дозвуковая. Очевидно также, что наш случай существенно отличается от режима свободного падения на магнитосферу с образованием ударной волны, который рассматривался, например, в работе [18].

2.3. Структура оболочки и закон вращения при других законах для турбулентной вязкости

2.3.1. Изомоментное вращение оболочки при изотропной вязкости

Обратим внимание на возможность установления изомоментного дифференциального вращения в оболочке $\omega = \mathrm{const} / R^2$ при стандартной записи турбулентной вязкости в виде $\nu_t \sim u_t l_t$ без использования закона Прандтля. Действительно, используя шкалирование для турбулентных пульсаций в случае горячей квазисферической оболочки $l_t \sim R$, $u_t \sim u_s \sim R^{-1/2}$, а также закон изменения плотности $\rho \sim R^{-3/2}$ (5), из уравнения (65) легко усмотреть, что при $\dot{M} = \mathrm{const}$ и $D = \mathrm{const}$ решение $\omega(R) \sim 1 / R^2$ имеет место. В следующем разделе мы увидим, что изомоментный закон вращения в оболочке может устанавливаться и при более сложной записи компоненты тензора вязких напряжений $W_{R\phi}$ в случае анизотропной турбулентности.

2.3.2. Закон вращения для турбулентной вязкости по Васютинскому

Правило Прандтля для вязкости, которое было использовано выше, связывает масштаб и скорость турбулентных пульсаций со средней угловой скоростью вращения и успешно применяется в случаях, когда турбулентность порождается самим сдвиговым течением. В нашей задаче турбулентность возникает из-за крупномасштабных конвективных движений в оболочке в поле тяжести. При радиальной конвекции могут образоваться сильно анизотропные турбулентные движения (радиальная дисперсия хаотических движений может быть много больше дисперсии в тангенциальном направлении) и закон Прандтля может быть не применим. Анизотропная турбулентность более сложна и недостаточно изучена.

Следуя Васютинскому [25], запишем компоненту тензора вязких напряжений в виде

$$\frac{W_{R\phi}}{\rho} = \left[\nu_t \left(\frac{d\omega}{dR} \right) + (\nu_r - \nu_t) \left(\frac{d\omega R^2}{dR} \right) \right] \sin\theta, \tag{81}$$

или

$$W_{R\phi} = \left[2\rho(-\nu_t + \nu_r)\omega + \nu_r \rho R \frac{d\omega}{dR} \right] \sin\theta, \tag{82}$$

где радиальный и тангенциальный коэффициенты кинематической вязкости есть $\nu_r = C_{||} \langle | u_{||}^t | \rangle R$, $\nu_t = C_{\perp} \langle | u_{\perp}^t | \rangle R$ соответственно. Безразмерные константы $C_{||}$ и $C_{\perp}$ порядка единицы. В изотропном случае $\nu_r = \nu_t$, $W_{R\phi} \sim$

$\sim d\omega/dR$, а в сильно анизотропном случае $v_r >> v_t$, $W_{R\phi} \sim d(\omega R^2)/dR$. Используя эти определения и подставляя (82) в (63), после интегрирования по R получаем

$$\omega R^2 \left(1 - \frac{2C_\perp \langle |u_\perp^t|\rangle}{|u_r|}\right) = C_\| \frac{\langle |u_\|^t|\rangle}{|u_r|} \frac{Rd(\omega R^2)}{dR} - \frac{D}{|\dot{M}|}. \tag{83}$$

Из-за автомодельности структуры оболочки $u_\|^t \sim u_\perp^t \sim u_r \sim R^{-1/2}$, поэтому отношения $\langle |u_\|^t|\rangle / u_r$ и $\langle |u_\perp^t|\rangle / u_r$ являются константами. У выписанного уравнения есть очевидное решение:

$$\omega R^2 + \frac{D}{|\dot{M}|} \frac{1}{1 - 2C_\perp \dfrac{\langle |u_\perp^t|\rangle}{|u_r|}} =$$

$$= \left[\omega_B R_B^2 + \frac{D}{|\dot{M}|} \frac{1}{1 - 2C_\perp \dfrac{\langle |u_\perp^t|\rangle}{|u_r|}}\right] \left(\frac{R_B}{R}\right)^{\frac{|u_r|}{C_\| \langle |u_\|^t|\rangle}\left(1 - 2C_\perp \frac{\langle |u_\perp^t|\rangle}{|u_r|}\right)} \tag{84}$$

(здесь постоянная интегрирования определена так, что $\omega(R_B) = \omega_B$).

Теперь рассмотрим равновесную ситуацию, когда $\dot{\omega}^* = 0$. Тогда, как мы помним, $\dfrac{D}{|\dot{M}|} = -z\omega^* R_A^2$, $\omega_m = (1 - z/Z)\omega^*$. Сначала рассмотрим случай сильно анизотропной почти радиальной турбулентности, при которой $\langle |u_\perp^t|\rangle = 0$. При этом удельный момент импульса на альвеновском радиусе есть

$$\omega_m R_A^2 \left[1 + \frac{z}{1 - z/Z} \left(\left(\frac{R_B}{R_A}\right)^{\frac{|u_r|}{C_\| \langle |u_\|^t|\rangle}} - 1\right)\right] = \omega_B R_B^2 \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^{\frac{|u_r|}{C_\| \langle |u_\|^t|\rangle}}. \tag{85}$$

Видно, что при очень слабой аккреции (или в пределе, когда аккреции нет вовсе) $|u_r| = C_\| \langle |u_\|^t|\rangle$, т. е. реализуется практически изомоментный закон вращения в оболочке.

Следующий случай: анизотропия такова, что $C_\perp \langle |u_\perp^t|\rangle / |u_r| = 1/2$. Тогда имеем строго изомоментное распределение вращения в оболочке: $\omega_m R_A^2 = \omega_B R_B^2$.

Если турбулентность полностью изотропна, то $C_\perp\langle|u_\perp^t|\rangle = C_\parallel\langle|u_\parallel^t|\rangle = \tilde{C}\langle|u^t|\rangle$. Обозначая $\varepsilon = |u_r|/(\tilde{C}\langle|u^t|\rangle)$, находим

$$\omega_m R_A^2\left[1+\left(\frac{z}{1-z/Z}\right)\left(\frac{1}{2/\varepsilon-1}\right)\left(1-\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^{2-\varepsilon}\right)\right] = \omega_B R_B^2\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^{2-\varepsilon}. \tag{86}$$

Заметим, что при $\varepsilon \to 0$ (аккреция через магнитосферу отсутствует) $\omega_m \to \omega_B$, т. е. устанавливается твердотельный закон вращения без аккреции (ср. первый случай выше). При $\varepsilon = 3/2$ может установиться почти квазикеплеровский закон вращения. Напомним, что квазикеплеровское вращение было получено выше при использовании правила Прандтля для записи турбулентной вязкости. Тогда это было единственное решение. При анизотропной турбулентности, напротив, квазикеплеровский закон является лишь частным случаем общего решения, получаемого при использовании правила Васютинского для записи анизотропной турбулентной вязкости.

Как было показано ранее, квазикеплеровский закон вращения в оболочке хуже соответствует данным наблюдений. Поэтому мы заключаем, что в квазисферических оболочках в режиме дозвуковой аккреции наиболее вероятна реализация почти изомоментного распределения вращения с анизотропной турбулентностью, вызванной конвекцией. Напомним, что в тонких аккреционных дисках, в которых масштаб турбулентности ограничен толщиной диска, закон Прандтля для вязкости работает очень хорошо [2].

3. Передача момента импульса магнитосфере

Рассмотрим квазистатическую оболочку над магнитосферой нейтронной звезды, в которой установился режим дозвукового оседания. Подчеркнем, что в этом режиме темп аккреции на нейтронную звезду определяется плотностью у основания оболочки, которая напрямую связана с плотностью вещества за фронтом головной ударной волны в звездном ветре в области гравитационного захвата и способностью плазмы проникать в магнитосферу вблизи альвеновской поверхности.

Как было показано в предыдущем разделе, закон вращения в оболочке зависит от трактовки турбулентной вязкости, а также возможной анизотропии турбулентности из-за конвекции. В последнем случае анизотропия приводит к турбулентным движениям более мощным в радиальном направлении, чем в тангенциальном. Таким образом получается серия квазистепенных решений, описывающих радиальную зависимость угловой скорости вращения вещества в конвективной оболочке. Далее будем использовать чисто степенной закон вращения

$$\omega(R) \sim R^{-n}. \tag{87}$$

При приближении к головной ударной волне $R \to R_B$ угловая скорость вещества стремится к орбитальной: $\omega \to \omega_B$. Вблизи ударной волны задача не является сферически-симметричной, характер течения может быть очень сложным (например, часть вещества может огибать горячую оболочку), и решение должно искаться численным моделированием. Поскольку таких решений в настоящее время не существует, будем предполагать, что степенное распределение вращения в оболочке устанавливается вплоть до головной ударной волны, положение которой характеризуется радиусом Бонди R_B: $R_B \simeq 2GM/(V_w^2 + v_{orb}^2)$, где V_w — скорость звездного ветра вблизи орбиты нейтронной звезды, v_{orb} — скорость ее орбитального движения. Это означает, что скорость углового вращения вещества вблизи границы магнитосферы ω_m связана с орбитальной угловой скоростью ω_B соотношением

$$\omega_m = \tilde{\omega}\omega_B \left(\frac{R_B}{R_A} \right)^n . \tag{88}$$

(Здесь численный коэффициент $\tilde{\omega} > 1$ учитывает отклонение истинного закона вращения вещества в оболочке вблизи магнитосферы от предполагаемой чисто степенной зависимости.)

Пусть магнитосфера нейтронной звезды вращается с угловой скоростью $\omega^* = 2\pi/P^*$, где P^* — период вращения нейтронной звезды. Вещество у основания оболочки вращается с угловой скоростью ω_m, которая, вообще говоря, отличается от ω^*. Если $\omega^* > \omega_m$, взаимодействие плазмы с магнитосферой вызывает передачу момента импульса от магнитосферы в оболочку, а если $\omega^* < \omega_m$ — наоборот, от оболочки к магнитосфере. В общем случае связь вещества с магнитосферой может быть умеренной или сильной. В режиме сильной связи тороидальная компонента магнитного поля B_t пропорциональна полоидальной компоненте B_p, и можно записать $B_t \sim -B_p(\omega_m - \omega^*)t$, так что $|B_t|$ может расти вплоть до $|B_p|$. Этот режим может реализоваться у быстро вращающихся магнитосфер, когда ω^* сравнима или даже превосходит кеплеровскую угловую частоту $\omega_K(R_A)$; в последнем случае устанавливается режим пропеллера. В режиме умеренной связи плазма может войти в магнитосферу в результате неустойчивостей быстрее, чем требуется для роста тороидальной компоненты поля до значения полоидальной компоненты, поэтому $B_t < B_p$.

3.1. Случай сильной связи

Сначала рассмотрим режим сильной связи. В этом режиме мощные крупномасштабные движения вещества в оболочке могут привести к турбулентной диффузии магнитного поля и его диссипации. Этот процесс характеризуется коэффициентом турбулентной диффузии магнитного поля η_t. Тогда тороидальное магнитное поле (см., например, [5] и ссылки там) равно

$$B_t = \frac{R^2}{\eta_t}(\omega_m - \omega^*)B_p. \tag{89}$$

Коэффициент турбулентной магнитной диффузии связан с кинематическим коэффициентом вязкости: $\eta_t \simeq \nu_t$. Последний может быть записан как

$$\nu_t = \langle u_t l_t \rangle. \tag{90}$$

Согласно феноменологическому закону Прандтля, который связывает средние характеристики турбулентного потока (скорость u_t, характерный пространственный масштаб l_t и сдвиг $\omega_m - \omega^*$),

$$u_t \simeq l_t \,|\, \omega_m - \omega^* \,|. \tag{91}$$

В нашем случае турбулентный масштаб должен определяться максимальной шкалой накачки энергии в турбулентные движения от вращающейся несферической поверхности магнитосферы. Эта шкала определяется разностью скоростей твердотельно вращающейся магнитосферы и аккрецирующего вещества, которое еще не взаимодействует с магнитосферой, т. е. $l_t \simeq R_A$; этот масштаб определяет скорость оборота самых крупных турбулентных вихрей, а на меньших масштабах развивается турбулентный каскад. Подставляя его в уравнения (89)—(91), получаем, что в режиме сильной связи $B_t \simeq B_p$.

Момент сил, возникающий из-за взаимодействия плазмы с магнитосферой, действует на нейтронную звезду и изменяет ее момент вращения согласно уравнению

$$I\dot{\omega}^* = \int \frac{B_t B_p}{4\pi} \varpi dS = \pm \tilde{K}(\theta) K_2 \frac{\mu^2}{R_A^3}, \tag{92}$$

где I — момент инерции нейтронной звезды, ϖ — расстояние до оси вращения, а $\tilde{K}(\theta)$ — численный коэффициент, зависящий от угла между осью вращения и осью магнитного диполя. Коэффициент K_2 появляется в выражении (92) по той же причине, что и в уравнении (8). Положительный знак соответствует передаче момента импульса нейтронной звезде ($\omega_m > \omega^*$). Отрицательный знак соответствует потоку момента импульса от нейтронной звезды через магнитосферу ($\omega_m < \omega^*$).

На альвеновском радиусе вещество входит в магнитосферу и приобретает угловую скорость вращения нейтронной звезды. Затем оно свободно падает на нейтронную звезду и возвращает ей обратно момент импульса, приобретенный на альвеновском радиусе R_A посредством магнитного поля. В результате этого процесса нейтронная звезда ускоряется с темпом, определяемым выражением

$$I\dot{\omega}^* = +z\dot{M}R_A^2\omega^*, \qquad (93)$$

где z — числовой коэффициент, учитывающий средний удельный угловой момент падающего вещества. Если вещество падает с экватора магнитосферы, $z = 1$; если вещество падает строго вдоль оси вращения нейтронной звезды, $z = 0$. Если бы все вещество проникало равномерно по всей поверхности сферической магнитосферы, то $z = 2/3$.

Окончательно получаем, что полный момент сил, приложенный к нейтронной звезде в режиме сильной связи, приводит к изменению частоты вращения нейтронной звезды согласно уравнению

$$I\dot{\omega}^* = \pm\tilde{K}(\theta)K_2\frac{\mu^2}{R_A^3} + z\dot{M}R_A^2\omega^*. \qquad (94)$$

Используя (11), можно исключить $\dot{M}$ из этого уравнения и получить в режиме ускорения ($\omega_m > \omega^*$)

$$I\dot{\omega}^* = \frac{\tilde{K}(\theta)K_2\mu^2}{R_A^3}\left[1 + z\frac{4\gamma f(u)}{\sqrt{2}(\gamma-1)(1+\gamma m_t^2)\psi(\gamma, m_t)\tilde{K}(\theta)}\left(\frac{R_A}{R_c}\right)^{3/2}\right], \qquad (95)$$

где $R_c^3 = GM/(\omega^*)^2$ — радиус коротации. В режиме замедления ($\omega_m < \omega^*$) находим

$$I\dot{\omega}^* = -\frac{\tilde{K}(\theta)K_2\mu^2}{R_A^3}\left[1 - z\frac{4\gamma f(u)}{\sqrt{2}(\gamma-1)(1+\gamma m_t^2)\psi(\gamma, m_t)\tilde{K}(\theta)}\left(\frac{R_A}{R_c}\right)^{3/2}\right]. \qquad (96)$$

Заметим, что в обоих случаях R_A должен быть меньше, чем R_c; в противном случае установится режим пропеллера и аккреция остановится. В режиме пропеллера $R_A > R_c$, вещество не доходит до поверхности нейтронной звезды и не генерируется рентгеновское излучение. Тогда оболочка за фронтом ударной волны быстро остынет (см. ниже) и «сдуется», и установится стандартный режим пропеллера Илларионова — Сюняева [16], сопровождаемый оттоком вещества от магнитосферы.

В обоих режимах (ускорения и замедления) угловая скорость вращения нейтронной звезды ω^* почти сравнивается со скоростью вращения вещества вблизи границы магнитосферы, $\omega^* \to \omega_m(R_A)$. Разность угловых скоростей ω^* и ω_m мала, поэтому второе слагаемое в квадратных скобках уравнений (95) и (96) много меньше единицы. Также заметим, что по мере приближения к режиму пропеллера ($R_A \to R_c$) темп аккреции уменьшается $f(u) \to 0$, второе слагаемое в квадратных скобках обнуляется и эволюция периода вращения нейтронной звезды определяется только тормозящим моментом сил $-\tilde{K}(\theta)\mu^2/R_A^3$. (В режиме пропеллера $\omega_m < \omega_K(R_A)$, $\omega_m < \omega^*$, $\omega^* > \omega_K(R_A)$). Поэтому нейтронная звезда тормозится до достижения кеплеровской частоты на альвеновском радиусе. В этом режиме удельный момент импульса вещества, которое течет к магнитосфере или от нее, разумеется, сохраняется.

Вблизи равновесного состояния ($\omega^* \sim \omega_m$) относительно малые флуктуации темпа аккреции $\dot{M}$ в оболочке приводят к очень сильным флуктуациям частоты вращения пульсара $\dot{\omega}^*$, так как тороидальная компонента магнитного поля может менять знак, принимая значения от $+B_p$ до $-B_p$. Если режим сильной связи действительно реализуется в природе, это свойство могло бы служить его отличительной особенностью. Известно (см., например, [1, 26]), что реальные рентгеновские пульсары иногда показывают быстрые переходы из состояния ускорения в состояние замедления без изменения рентгеновской светимости. Не исключено, что включение режима сильной связи может происходить из-за магнитного поля, вмороженного в плазму, которая еще не вошла в магнитосферу. Более подробно аккреция замагниченной плазмы на нейтронные звезды рассматривалась в недавней работе [27].

3.2. Случай умеренной связи

Рассмотренный выше режим сильной связи может осуществиться в предельном случае, когда тороидальное магнитное поле B_t достигает максимально возможного значения порядка B_p из-за магнитной турбулентной диффузии. Обычно связь плазмы с магнитосферой осуществляется посредством различных неустойчивостей, характерное время развития которых недостаточно для существенного роста тороидального поля. Как обсуждалось выше в разд. 1.1, оболочка вблизи магнитосферы очень горячая, поэтому без охлаждения плазма над магнитосферой оказывается вблизи границы устойчивости относительно неустойчивости Рэлея — Тейлора (см. модельные расчеты [18]).

Выпишем момент сил, приложенный к нейтронной звезде со стороны магнитного поля:

$$I\dot{\omega}^* = \int \frac{B_t B_p}{4\pi} \varpi dS. \tag{97}$$

Со стороны основания оболочки к магнитосфере приложен механический момент сил, вызванный турбулентными напряжениями $W_{R\phi}$:

$$\int W_{R\phi} \varpi dS, \tag{98}$$

где вязкие турбулентные напряжения записываются в виде

$$W_{R\phi} = \rho \nu_t R \frac{\partial \omega}{\partial R}. \tag{99}$$

Далее, учитывая, что турбулентная вязкость

$$\nu_t = \langle u_c l_t \rangle, \tag{100}$$

считаем, что вблизи магнитосферы характерный масштаб турбулентности $l_t \sim R_A$, а характерная скорость турбулентных пульсаций определяется механизмом турбулизации надмагнитосферной плазмы. Если в оболочке над магнитосферой существуют мощные конвективные движения, вызванные нагревом основания оболочки, то $u_c \sim c_s$, где c_s — скорость звука. Если же конвекция затруднена, то остается турбулентность, вызванная сдвиговым течением в оболочке. В этом случае $u_c(R_A) \sim u_\phi(R_A) \sim \omega^* R_A << c_s$. Очевидно, отношение напряжений в разных случаях оказывается порядка величины $\omega^*/\omega_K(R_A)$, которая для медленно вращающихся пульсаров составляет около 0,03—0,3. Приравнивая моменты сил (97) и (98), получаем

$$\rho u_c R_A \frac{\partial \omega}{\partial R} = \frac{B_t B_p}{4\pi}. \tag{101}$$

Исключим из этого выражения плотность через баланс давлений на границе магнитосферы (8), использовав выражение для температуры (4), и сделаем замену

$$\frac{\partial \omega}{\partial R} = \frac{\omega_m - \omega^*}{\zeta R_A}. \tag{102}$$

Здесь введен безразмерный фактор $\zeta < 1$, характеризующий размер зоны, в которой эффективно происходит обмен угловым моментом между основанием оболочки и магнитосферой. Находим отношение тороидальной и полоидальной компоненты поля в магнитосфере:

$$\frac{B_t}{B_p} = \frac{\gamma}{\sqrt{2}(\gamma - 1)K_t} \left(\frac{u_c}{u_{ff}} \right) \left(\frac{\omega_m - \omega^*}{\zeta \omega_K (R_A)} \right). \tag{103}$$

(Здесь и ниже использованы обозначения: скорость свободного падения $u_{ff} \equiv \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$, кеплеровская частота на границе магнитосферы $\omega_K(R_A)$, поправочный коэффициент из-за учета турбулентности $K_t \equiv (1 + \gamma m_t^2)\psi(\gamma, m_t)$.)
Подставляя (103) в (97), в случае конвекции $u_c = m_c u_s$ (где введено число Маха конвективных движений m_c) закон торможения вращения нейтронной звезды можно записать в виде

$$I \dot{\omega}^* = \left(\frac{K_1}{\zeta} \right) K_2 \frac{\mu^2}{R_A^3} \frac{\omega_m - \omega^*}{\omega_K (R_A)}, \tag{104}$$

где K_1 — константа порядка единицы из комбинации параметров в формуле (103). При этом формулу (103) можно переписать в виде

$$\frac{B_t}{B_p} = \tilde{K}\left(\frac{K_1}{\zeta}\right)\frac{\omega_m - \omega^*}{\omega_K(R_A)}, \tag{105}$$

где геометрические факторы, возникающие при интегрировании в (97), включены в коэффициент $\tilde{K} \sim 1$.

В случае возбуждения турбулентности дифференциальным вращением у основания оболочки $u_c \sim u_\phi = \omega^* R_A$ и закон торможения принимает вид

$$I\dot{\omega}^* = \left(\frac{\tilde{K}_1}{\zeta}\right)K_2\frac{\mu^2}{R_A^3}\left(\frac{R_A}{R_c}\right)^{3/2}\frac{\omega_m - \omega^*}{\omega_K(R_A)}, \tag{106}$$

где

$$R_c \equiv \left(\frac{GM}{\omega^{*2}}\right)^{1/3} \tag{107}$$

— радиус коротации (см. также [28]). Видно, что тормозящий момент сил в этом случае оказывается в $(R_A/R_c)^{3/2}$ раз слабее, чем при наличии конвективных движений в оболочке. Будем называть эту ситуацию случаем *слабой связи*. Нетрудно увидеть, что тормозящий момент сил и скорость замедления пульсара не зависит от темпа аккреции (в пределе $\omega_m \to 0$ имеем просто $K_{sd} \sim \mu^2 / R_c^3$ [28]). Как обсуждается далее, неравновесный пульсар GX 1+4 демонстрирует на стадии торможения обратную зависимость $\dot{\omega}^*$ от вариаций светимости [29], поэтому мы отдаем предпочтение торможению с законом (104) (т. е. с умеренной связью).

Используя определение альвеновского радиуса R_A (11) и выражение для кеплеровской частоты ω_K, формулу (104) можно привести к виду

$$I\dot{\omega}^* = Z\dot{M}R_A^2(\omega_m - \omega^*). \tag{108}$$

Здесь безразмерный коэффициент

$$Z = \frac{\left(\frac{K_1}{\zeta}\right)}{f(u)}\frac{\sqrt{2}(\gamma - 1)}{4\gamma}K_t. \tag{109}$$

Подставляя в эту формулу $\gamma = 5/3$ и выражение (23), находим

$$Z \approx 0{,}363\left(\frac{K_1}{\zeta}\right)K_0^{-7/11}K_t^{21/22}\dot{M}_{16}^{-4/11}\mu_{30}^{1/11}. \tag{110}$$

Учитывая, что падающее на нейтронную звезду вещество приносит угловой момент $z\dot{M}R_A^2\omega^*$ (см. уравнение (93) выше), получаем

$$I\dot{\omega}^* = Z\dot{M}R_A^2(\omega_m - \omega^*) + z\dot{M}R_A^2\omega^*. \tag{111}$$

Очевидно, что для отвода момента импульса от нейтронной звезды через подобную оболочку коэффициент Z должен быть больше, чем z. Тогда аккрецирующая нейтронная звезда сможет эпизодически замедляться (ниже мы уточним это утверждение). И обратно, если $Z < z$, то нейтронная звезда может только ускоряться.

Если горячей оболочки над магнитосферой нейтронной звезды не образуется (при высоких рентгеновских светимостях или малой скорости звездного ветра — см., например, [30] и ниже), то устанавливается режим сверхзвуковой аккреции Бонди и момент импульса от нейтронной звезды не отводится. При этом $Z = z$, уравнение (111) принимает простой вид $I\dot{\omega}^* = Z\dot{M}R_A^2\omega_m$, и нейтронная звезда в таком режиме будет ускоряться до частоты порядка $\omega_K(\mathrm{R}_A)$ независимо от знака разности угловых скоростей вещества и силовых линий магнитного поля $\omega_m - \omega^*$ вблизи границы магнитосферы. В силу сохранения удельного момента импульса $\omega_m = \omega_B(R_B / R_A)^2$, поэтому при отсутствии оболочки эволюция частоты вращения нейтронной звезды описывается уравнением

$$I\dot{\omega}^* = Z\dot{M}\omega_B R_B^2, \qquad (112)$$

где коэффициент Z играет роль удельного момента импульса захваченного вещества. Например, в модели [16] $Z \simeq 1/4$. Однако численное моделирование аккреции Бонди — Хойла — Литтлтона в двумерных (например, [7, 31]) и трехмерных (например, [8, 9]) расчетах показало, что из-за неоднородностей звездного ветра аккреция идет в нестационарном режиме и знак захватываемого момента импульса может меняться. Поэтому знак коэффициента Z также может быть отрицательным, т. е. эпизоды аккреционного ускорения могут чередоваться с эпизодами замедления. Таким сценарием часто объясняют наблюдаемую смену знака моментов сил в аккрецирующих рентгеновских пульсарах (см. обсуждение в работе [32]). Подчеркнем еще раз, что такая картина вполне возможна для рентгеновских пульсаров с высокой светимостью больше $4 \cdot 10^{36}$ эрг/с, когда из-за сильного комптоновского охлаждения вокруг вращающейся магнитосферы нейтронной звезды не образуется конвективной квазигидростатической оболочки.

Если же горячая оболочка сформировалась (при умеренных рентгеновских светимостях ниже $4 \cdot 10^{36}$ эрг/с — см. (33)), момент импульса от магнитосферы нейтронной звезды может передаваться наружу через конвективную оболочку посредством турбулентной вязкости. Поэтому, подставляя ω_m из (88) в (111), получаем

$$I\dot{\omega}^* = Z\dot{M}\tilde{\omega}\omega_B R_B^2\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^{2-n} - Z(1 - z / Z)\dot{M}R_A^2\omega^*. \qquad (113)$$

Это основная формула, которую будем использовать в дальнейшем для описания эволюции вращения нейтронной звезды.

Безразмерные коэффициенты в этом уравнении рассчитываются через коэффициент $f(u)$, который входит в формулы для Z и R_A, так что единственным безразмерным параметром модели останется коэффициент K_1/ζ. Ниже мы покажем, как можно определить этот коэффициент из данных наблюдений реальных рентгеновских пульсаров.

4. Ускорение и замедление рентгеновских пульсаров

В этом разделе мы рассмотрим зависимость ускоряющего и замедляющего момента сил, приложенных к аккрецирующей нейтронной звезде в режиме оседания, от темпа аккреции $\dot{M}$. Подчеркнем еще раз, что в этом случае аккреция осуществляется в дозвуковом режиме и именно пропускная способность магнитосферы определяет темп аккреции вещества сквозь оболочку. Скорость вхождения плазмы в магнитосферу при этом зависит, главным образом, от плотности на границе магнитосферы. С другой стороны, распределение плотности в оболочке непосредственно связано с плотностью вещества в области головной ударной волны, поэтому вариации плотности в звездном ветре приводят к соответствующим вариациям плотности вблизи границы магнитосферы. Это означает, что вариации темпа аккреции вещества на нейтронную звезду в двойных системах на круговых или слабо эксцентричных орбитах практически не должны зависеть от орбитальной фазы и определяются только вариациями плотности звездного ветра. Напротив, возможные изменения радиуса захвата R_B (например, из-за вариаций скорости звездного ветра или изменения орбитальной скорости движения нейтронной звезды) слабо влияют на темп аккреции вещества через оболочку, но существенно изменяют значение моментов сил, приложенных к нейтронной звезде (см. уравнение (113)).

Уравнение (113) можно переписать в виде

$$I\dot{\omega}^* = A\dot{M}^{\frac{2n+3}{11}} - B\dot{M}^{3/11}. \tag{114}$$

Для характерного значения темпа аккреции $\dot{M}_{16} \equiv \dot{M}/10^{16}$ г/с коэффициенты в этом уравнении, не зависящие от темпа аккреции, равны (в единицах СГС):

$$\begin{aligned} A \approx 4,22\cdot 10^{31}(0,0388)^{2-n}\tilde{\omega}\left(\frac{K_1}{\zeta}\right)K_0^{-\frac{2n+3}{11}}K_t^{\frac{9+6n}{22}} \times \\ \times \mu_{30}^{\frac{13-6n}{11}}\left(\frac{v_8}{\sqrt{\delta}}\right)^{-2n}\left(\frac{P_b}{10\,[\text{сут}]}\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{115}$$

$$B \approx 5,47 \cdot 10^{32}(1 - z/Z)\left(\frac{K_1}{\zeta}\right) K_0^{-3/11} K_t^{9/22} \mu_{30}^{13/11} \left(\frac{P^*}{100\,[\text{c}]}\right)^{-1} \tag{116}$$

(здесь и далее при численных оценках полагаем $\gamma = 5/3$). Безразмерный множитель $\delta < 1$ учитывает истинное положение радиуса гравитационного захвата, который в холодном звездном ветре может быть несколько меньше, чем радиус Бонди [34]. Значение радиуса захвата может также уменьшаться из-за радиационного нагрева звездного ветра рентгеновским излучением от нейтронной звезды (см. ниже). При получении числовых значений коэффициентов в уравнениях (115) и (116) мы использовали выражения (109) для коэффициента Z с учетом выражения (32), а также уравнение (30) для альвеновского радиуса.

Ниже будем рассматривать случай $Z - z > 0$, т. е. $B > 0$, так как в противном случае возможно только ускорение вращения нейтронной звезды.

4.1. Равновесные пульсары

Для них $\dot{\omega}^* = 0$ и из формулы (111) получаем

$$Z_{eq}(\omega_m - \omega^*) + z\omega^* = 0. \tag{117}$$

Вблизи равновесия можно проварьировать формулу (111) по $\dot{M}$. Введем безразмерный параметр $y \equiv \dot{M}/\dot{M}_{eq}$, так что вблизи равновесия $y = 1$. Вообще говоря, вариации $\delta\dot{M}$ могут быть вызваны как изменением плотности $\delta\rho$, так и изменением скорости (радиуса Бонди) в звездном ветре δv. Из уравнения неразрывности с учетом зависимости $f(u)$ от $\dot{M}$ (32) в оболочке имеем

$$\frac{7}{11}\frac{\delta\dot{M}}{\dot{M}} = \frac{\delta\rho}{\rho} - 3\frac{\delta v}{v}. \tag{118}$$

Рассмотрим сначала только вариации плотности. Полагая $R_B = \text{const}$, находим

$$I\left.\frac{\partial\dot{\omega}^*}{\partial\dot{M}}\right|_{eq} = I\frac{1}{\dot{M}_{eq}}\left.\frac{\partial\dot{\omega}^*}{\partial y}\right|_{y=1} = \frac{4}{11} z\omega^* R_A^2 + \frac{2n}{11} Z_{eq}\omega_m R_A^2. \tag{119}$$

Выражая из (117) ω_m и подставляя в (119), имеем

$$Z_{eq,\rho} - \frac{n-2}{n} z = \frac{I\frac{\partial\dot{\omega}^*}{\partial\dot{M}}|_{eq}}{\frac{2n}{11}\omega^* R_A^2} \approx$$
$$\approx \frac{3,64}{n}\left(\frac{\frac{\partial\dot{\omega}^*}{\partial y}|_{y=1}}{10^{-12}}\right)\left(\frac{P^*}{100\,[\text{c}]}\right) K_0^{-4/11} K_T^{6/11} \dot{M}_{16}^{-7/11} \mu_{30}^{-12/11}. \tag{120}$$

Теперь фиксируем плотность и рассматриваем только вариации скорости. Тогда из (118) имеем связь $\delta v / v = -(7/33)\delta\dot{M} / \dot{M}$. Варьируя (111), получаем

$$Z_{eq,v} - \frac{5n-3}{5n} z = \frac{I \left.\dfrac{\partial\dot{\omega}^*}{\partial\dot{M}}\right|_{eq}}{\dfrac{20n}{33}\omega^* R_A^2} \approx$$
$$\approx \frac{1{,}1}{n}\left(\frac{\left.\dfrac{\partial\dot{\omega}^*}{\partial y}\right|_{y=1}}{10^{-12}}\right)\left(\frac{P^*}{100\,[\text{с}]}\right) K_0^{-4/11} K_T^{6/11} \dot{M}_{16}^{-7/11} \mu_{30}^{-12/11}. \tag{121}$$

Большинство нейтронных звезд в рентгеновских пульсарах имеют периоды вращения, близкие к равновесным, при которых в среднем $\dot{\omega}^* = 0$. Для этого случая в режиме аккреционного оседания из уравнения (114) получаем

$$\mu_{30}^{(eq)} \approx \left(\frac{0{,}077 \cdot (0{,}0388)^{(2-n)}\tilde{\omega}}{1 - z/Z}\right)^{\frac{11}{6n}} K_0^{-1/3} K_t^{1/2} \left(\frac{\sqrt{\delta}}{v_8}\right)^{\frac{11}{3}} \times$$
$$\times \dot{M}_{16}^{1/3} \left(\frac{P^*/100\,[\text{с}]}{P_b / 10\,[\text{сут}]}\right)^{\frac{11}{6n}}. \tag{122}$$

Это выражение можно обратить и выписать значение равновесного периода вращения пульсара по известному магнитному полю:

$$P_{eq} \approx \frac{1300}{0{,}0388^{2-n}} (1 - z/Z_{eq}) \tilde{\omega}^{-1} K_0^{2n/11} K_t^{-3n/11} \times$$
$$\times \mu_{30,eq}^{6n/11} \left(\frac{P_b}{10\,[\text{сут}]}\right) \dot{M}_{16}^{-2n/11} \left(\frac{v_8}{\sqrt{\delta}}\right)^{2n} [\text{с}]. \tag{123}$$

Отношение частоты вращения пульсара к кеплеровской частоте на альвеновском радиусе не зависит от *n*:

$$\frac{\omega^*}{\omega_K(R_A)} \approx 0{,}27 K_0^{3/11} K_t^{-9/22} \left(\frac{P^*}{100\,[\text{с}]}\right)^{-1} \mu_{30}^{9/11} \dot{M}_{16}^{-3/11}. \tag{124}$$

Отношение тороидальной компоненты магнитного поля к полоидальной на альвеновском радиусе в равновесии (уравнение (103)) принимает вид

$$\left.\frac{B_t}{B_p}\right|_{eq} = -\left(\frac{K_1}{\zeta}\right)\left(\frac{z}{Z_{eq}}\right)\left(\frac{\omega^*}{\omega_K(R_A)}\right) = \frac{10f(u)z}{\sqrt{2}K_t}\left(\frac{\omega^*}{\omega_K(R_A)}\right). \qquad (125)$$

Подставляя в это выражение $f(u)$ и (124), получаем

$$\left|\left.\frac{B_t}{B_p}\right|_{eq}\right| \approx 0,75z\frac{K_0^{10/11}}{K_t^{15/11}}\left(\frac{P^*}{100\,[\text{с}]}\right)^{-1}\mu_{30}^{8/11}\dot{M}_{16}^{1/11}. \qquad (126)$$

Подчеркнем, что для медленных аккрецирующих пульсаров отношение частоты вращения к кеплеровской частоте на альвеновском радиусе всегда много меньше единицы, поэтому для типичных значений $f(u) \sim 0,3$ и $z = 2/3$ имеем $B_t / B_p < 1,5(\omega^*/\omega_K(R_A)) < 1$, т. е. эти пульсары далеки от режима пропеллера.

Обратим внимание, что в важном случае $n = 2$ (изомоментное распределение вращения в оболочке) в уравнении (120) коэффициент при втором слагаемом обнуляется, поэтому, приравнивая Z_{eq} выражению (110), находим значение магнитного момента нейтронной звезды только через равновесный период пульсара и производной $(\partial\dot{\omega}/\partial y)_{eq}$:

$$\mu_{30,eq} \approx 5\left(\frac{\left.\dfrac{\partial\dot{\omega}^*}{\partial y}\right|_{y=1}}{10^{-12}\,\text{рад/с}^2}\right)\left(\frac{P^*}{100\,[\text{с}]}\right)\left(\frac{K_1}{\zeta}\right)^{-1}K_0^{3/11}K_t^{-3/7}\dot{M}_{16}^{-3/11}. \qquad (127)$$

В случае $n = 2$ при известном μ_{eq} из формулы (122) находим скорость ветра

$$\frac{v_8}{\sqrt{\delta}} \approx 0,53(1 - z/Z_{eq})^{-1/4}K_0^{-1/11}K_t^{3/22}\dot{M}_{16}^{1/11}\mu_{30,eq}^{-3/11}\left(\frac{P^*/100\,[\text{с}]}{P_b/10\,[\text{сут}]}\right)^{1/4}. \qquad (128)$$

Как будет показано ниже, у реальных равновесных пульсаров $z / Z_{eq} = 1$, поэтому приведенная формула дает истинную оценку скорости ветра. Подчеркнем слабую зависимость от безразмерных констант модели и от темпа аккреции на нейтронную звезду. Таким образом, в рамках нашей модели только из измерения периода равновесного пульсара P^*, периода двойной системы P_b и оценки магнитного поля нейтронной звезды μ появляется возможность оценивать скорость звездного ветра оптического компонента, не прибегая к сложным спектроскопическим измерениям.

4.2. Неравновесные пульсары

Ниже будем рассматривать случай $Z - z > 0$, т. е. $B > 0$, так как в противном случае возможно только ускорение вращения нейтронной звезды.

Прежде всего заметим, что функция $\dot{\omega}^*(\dot{M})$ достигает минимума при некотором $\dot{M}_{cr}$. Дифференцируя уравнение (114) по $\dot{M}$ и приравнивая полученное выражение к нулю, находим

$$\dot{M}_{cr} = \left[\frac{B}{A}\frac{3}{(3+2n)}\right]^{\frac{11}{2n}}. \qquad (129)$$

При $\dot{M} = \dot{M}_{cr}$ значение $\dot{\omega}^*$ достигает абсолютного минимума (рис. 2).

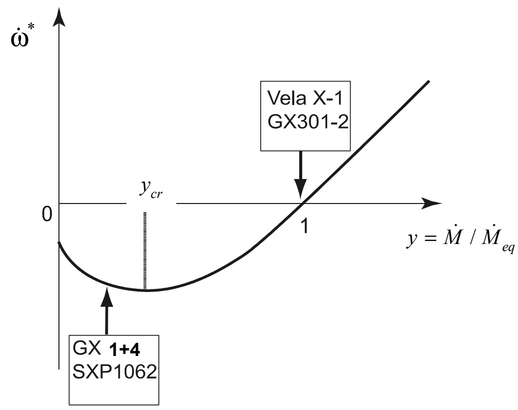


Рис. 2. Иллюстрация зависимости $\dot{\omega}^*$ от безразмерного темпа аккреции y (см. (134)). В действительности при $y \to 0$ $\dot{\omega}^*$ стремится к некоторому отрицательному значению, так как нейтронная звезда переходит на режим пропеллера при малых темпах аккреции. Показано положение равновесных пульсаров при $y \sim 1$ и неравновесных пульсаров на стадии устойчивого торможения при $y < y_{cr}$

Удобно ввести безразмерный параметр

$$y \equiv \frac{\dot{M}}{\dot{M}_{eq}}, \qquad (130)$$

где $\dot{M}_{eq}$ соответствует темпу аккреции, при котором $\dot{\omega}^* = 0$:

$$\dot{M}_{eq} = \left(\frac{B}{A}\right)^{11/2n}. \qquad (131)$$

Очевидно,

$$\dot{M}_{cr} = \dot{M}_{eq}\left(\frac{3}{2n+3}\right)^{\frac{11}{2n}}, \qquad (132)$$

иными словами, минимум $\dot{\omega}^*$ достигается при значении безразмерного параметра

$$y_{cr} = \left(\frac{3}{2n+3}\right)^{\frac{11}{2n}} < 1. \qquad (133)$$

Можно переписать (114) в виде

$$I\dot{\omega}^* = A\dot{M}_{eq}^{\frac{3+2n}{11}} y^{\frac{3+2n}{11}} \left(1 - y^{-\frac{2n}{11}}\right). \qquad (134)$$

Минимум $\dot{\omega}^*$ при $y = y_{cr}$ (т. е. максимально возможный темп торможения вращения пульсара) задается формулой

$$I\dot{\omega}^*_{\min} = -\frac{2n}{3} A\dot{M}_{eq}^{\frac{3+2n}{11}} y^{\frac{3+2n}{11}}. \qquad (135)$$

Теперь проварьируем (134) по y:

$$I(\delta\dot{\omega}^*) = I\frac{\partial\dot{\omega}^*}{\partial y}(\delta y) = \frac{3}{11} A\dot{M}_{eq}^{\frac{3+2n}{11}} y^{-8/11} \left(\frac{2n+3}{3} y^{\frac{2n}{11}} - 1\right)(\delta y). \qquad (136)$$

Видно, что в зависимости от того, $y > y_{cr}$ или $y < y_{cr}$, *коррелированные изменения* $\delta\dot{\omega}^*$ с рентгеновским потоком должны иметь разный знак. Действительно, для пульсара GX 1+4 в работах [29, 35] по данным мониторинга Fermi GBM (Gamma-ray Burst Monitor) обнаружена положительная корреляция изменения периода вращения пульсара δP^* с темпом аккреции $\delta\dot{M}$. Это означает, что в источнике существует отрицательная корреляция между $\delta\omega^*$ и $\delta\dot{M}$, свидетельствующая, что в этом пульсаре $y < y_{cr}$.

Рассмотрим аккрецирующие пульсары на стадии замедления вращения (типа GX 1+4, SXP 1062 и др.). Если пульсар находится на стадии торможения, то измерение темпа замедления $\dot{\omega}^*_{sd}$ позволяет ограничить параметры модели. Из простого факта стабильного замедления на стадии квазисферической аккреции $\dot{\omega}^* < 0$ находим из уравнений (114), (115) и (116) нижний предел на магнитный момент нейтронной звезды:

$$\begin{aligned}\mu_{30} > \mu_{30,\min} \approx 0{,}1(1 - z/Z)^{-\frac{11}{12}} \tilde{\omega}^{\frac{11}{12}} K_0^{-1/3} K_t^{1/2} \left(\frac{\sqrt{\delta}}{v_8}\right)^{\frac{11}{3}} \times \\ \times \dot{M}_{16}^{1/3} \left(\frac{P^*/100\,[\text{с}]}{P_b/10\,[\text{сут}]}\right)^{\frac{11}{12}}\end{aligned} \qquad (137)$$

(т. е. уравнение (122) при этом превращается в неравенство). Теперь используем тот факт, что на стадии замедления существует максимально возможный тормозящий момент сил (см. уравнение (135)). Подставляя в (135) значения коэффициентов A и B из уравнений (115) и (116), находим

$$\dot{\omega}^*_{sd,\,\max} \approx -1{,}13\cdot 10^{-12}(1-z/Z)^{7/4}\left(\frac{K_1}{\zeta}\right)\times$$
$$\times\mu_{30}^2\left(\frac{v_8}{\sqrt{\delta}}\right)^3\left(\frac{P^*}{100\,[\text{с}]}\right)^{-7/4}\left(\frac{P_b}{10\,[\text{сут}]}\right)^{3/4}\ [\text{рад/с}^2]. \qquad (138)$$

Это значение достигается при темпе аккреции $\dot{M} = \dot{M}_{cr}$, который численно равен

$$\dot{M}_{16,cr} \approx 112(1-z/Z)^{11/4} K_0 K_t^{-2}\mu_{30}^3\left(\frac{v_8}{\sqrt{\delta}}\right)^{11}\left(\frac{P_b/10\,[\text{сут}]}{P^*/100\,[\text{с}]}\right)^{\frac{11}{4}} \qquad (139)$$

(отметим чрезвычайно сильную зависимость от скорости звездного ветра). Тогда из условия $|\dot{\omega}^*_{sd}| \le |\dot{\omega}^*_{sd,\max}|$ следует более интересный нижний предел на магнитное поле нейтронной звезды:

$$\mu_{30} > \mu'_{30,\min} \approx 0{,}94\left|\frac{\dot{\omega}^*_{sd}}{10^{-12}[\text{рад}/\text{с}^2]}\right|\times$$
$$\times\left(\frac{K_1}{\zeta}\right)^{-1/2}\left(\frac{v_8}{\sqrt{\delta}}\right)^{-3/2}\left(\frac{P^*}{100\,[\text{с}]}\right)^{7/8}\left(\frac{P_b}{10\,[\text{сут}]}\right)^{-3/8}. \qquad (140)$$

Отметим более слабую зависимость этой оценки от плохо известной скорости звездного ветра, чем в неравенстве (137).

Если можно пренебречь ускоряющим моментом сил по сравнению с замедляющим моментом (это соответствует пределу низких рентгеновских светимостей y << 1), для аккрецирующих пульсаров на стадии торможения непосредственно из уравнения (104) находим

$$\dot{\omega}^*_{sd} \approx -0{,}55\cdot 10^{-12}\left(\frac{K_1}{\zeta}\right)K_0^{-3/11}K_t^{9/22}\mu_{30}^{13/11}\dot{M}_{16}^{3/11}\left(\frac{P^*}{100\,[\text{с}]}\right)^{-1}[\text{рад}/\text{с}^2]. \qquad (141)$$

Отсюда получаем нижний предел на магнитный момент нейтронной звезды, который не зависит ни от параметров звездного ветра, ни от орбитального периода двойной системы:

$$\mu_{30} > \mu''_{30,\min} \approx 1{,}66\left|\frac{\dot{\omega}^*_{sd}}{10^{-12}[\text{рад}/\text{с}^2]}\right|^{11/13}\left(\frac{K_1}{\zeta}\right)^{-11/13}\times$$
$$\times K_0^{3/13}K_t^{-9/26}\dot{M}_{16}^{-3/13}\left(\frac{P^*}{100\,[\text{с}]}\right)^{11/13}. \qquad (142)$$

Исключая K_1/ζ из формул (104) и (105), получаем

$$\left|\frac{B_t}{B_p}\right| = \tilde{K}\left|\frac{I\dot{\omega}^*_{sd}R_A^3}{K_2\mu^2}\right| \approx 0,49\left|\frac{\dot{\omega}^*_{sd}}{10^{-12}[\text{рад}/\text{с}^2]}\right|\times \\ \times\mu_{30}^{-4/11}K_0^{6/11}K_t^{-9/11}\dot{M}_{16}^{-6/11}. \tag{143}$$

Как видно из формулы (143), с уменьшением $\dot{M}$ отношение B_t / B_p растет по вполне понятным причинам — при малых $\dot{M}$ характерное время охлаждения плазмы увеличивается, и тороидальная компонента успевает дорасти до полоидальной. Однако B_t не может стать больше B_p из-за неустойчивости типа туго закрученной пружины. Приравнивая $B_t = B_p$, из формулы (143) находим светимость, ниже которой пульсар переходит на режим сильной связи в состоянии торможения (ср. раздел 3.1 выше):

$$\dot{M}^*_{16} \approx 0,27\left|\frac{\dot{\omega}^*_{sd}}{10^{-12}[\text{рад}/\text{с}^2]}\right|^{11/6} \mu_{30}^{-2/3}K_0K_t^{-3/2}. \tag{144}$$

Ниже этой светимости в режиме сильной связи закон торможения выглядит как $K_{sd} \sim \mu^2 R_A^{-3} \sim \dot{M}^{6/11}$:

$$\dot{\omega}^*_{sd} \approx -2\cdot 10^{-12}\mu_{30}^{4/11}K_0^{-6/11}K_t^{9/11}\dot{M}_{16}^{6/11}\ [\text{рад}/\text{с}^2]. \tag{145}$$

(Заметим, что когда ускоряющим моментом сил можно пренебречь, в формулы не входит весьма неопределенная скорость звездного ветра.)

При дальнейшем уменьшении темпа аккреции в неравновесных пульсарах альвеновский радиус возрастает до радиуса коротации и может произойти переход на транзиентную стадию (пропеллер). Из условия $\omega^* = \sqrt{GM / R_A^3}$ находим темп аккреции $\dot{M}^{**}$ для этого перехода:

$$\dot{M}^{**}_{16} \approx 0,0082K_0K_t^{-3/2}\mu_{30}^3\left(\frac{P^*}{100\ [\text{с}]}\right)^{-11/3}. \tag{146}$$

Приведенные выше формулы показывают, что ограничения на модель становятся более значимыми, если магнитное поле нейтронной звезды измеряется независимым способом (например, по циклотронной линии в спектре). Также подчеркнем, что измерение корреляций флуктуаций производной частоты вращения пульсара со светимостью на стадии торможения (наподобие анализа, проведенного ниже для источника GX 1+4) позволяет выявить положение источника на диаграмме $\dot{\omega}^* - y$ (см. рис. 2) справа ($y > y_{cr}$, положительная корреляция) или слева ($y < y_{cr}$, отрицательная корреляция) от минимума и тем самым дополнительно ограничить параметры модели.

5. Конкретные рентгеновские пульсары

В качестве иллюстрации приложения рассмотренной модели к реальным источникам в этом разделе рассмотрим медленно вращающиеся рентгеновские пульсары с умеренной рентгеновской светимостью: GX 301-2, Vela X-1, GX 1+4, SXP 1062 и 4U 2206+54. Первые два пульсара имеют периоды вращения, близкие к равновесным — в них наблюдаются чередующиеся эпизоды ускорения и замедления вращения нейтронной звезды вблизи равновесной частоты (не считая встречающихся иногда скачков частоты, которые, как мы полагаем, могут быть вызваны спорадическим включением режима сильной связи, при которой тороидальная компонента магнитного поля нарастает до значения полоидального поля — см. выше раздел 3.1). Третий источник GX 1+4 является типичным пульсаром, в котором наблюдаются долговременные квазистационарные эпизоды ускорения и замедления вращения нейтронной звезды. В течение последних 30 лет в этом источнике наблюдается стабильное замедление вращения, на фоне которого видны флуктуации производной частоты, антикоррелированные с флуктуациями рентгеновского потока (см. подробнее в [35]). Очевидно, этот пульсар не находится в равновесном состоянии. Пульсар SXP 1062 в Большом Магеллановом Облаке и пульсар 4U 2206+54 на всем протяжении наблюдений находятся на стадии устойчивого торможения.

5.1. GX 301-2

Источник GX 301-2 (также известный как 4U 1223-62) является массивной рентгеновской двойной системой, состоящей из нейтронной звезды и оптического компонента раннего спектрального класса B с массой приблизительно равной $40M_\odot$ и радиусом приблизительно равным $60R_\odot$. Орбитальный период двойной системы 41,5 сут [38]. Нейтронная звезда наблюдается как рентгеновский пульсар с периодом порядка 680 с [39], аккрецирующий из мощного звездного ветра оптического компонента ($\dot{M}_{loss} \sim 10^{-5} M_\odot$/год [40]). Параболическая скорость ветра на границе фотосферы $v_{esc} \approx 500$ км/с. Полуось орбиты двойной системы составляет $a \approx 170R_\odot$, а эксцентриситет орбиты $e \approx 0{,}46$. Скорость звездного ветра на бесконечности, определенная в работе [40], составляет около 300 км/с, т. е. меньше параболической скорости на радиусе фотосферы звезды.

В GX 301-2 наблюдаются короткопериодические вариации периода пульсаций, которые, как и в других рентгеновских пульсарах, могут описываться моделью случайных блужданий по времени [41]. В наблюдениях между 1975-м и 1984 годом период пульсаций был порядка 700 с, а в 1984 году период вращения в источнике начал уменьшаться [42]. Почти десятилетний тренд ускорения вращения закончился в 1993 году [43], после чего источник постоянно замедлялся [44—46]. Эпизоды быстрого ускорения иногда наблюдаются в данных Fermi GBM на фоне медленного уменьшения частоты [26]. Не исключено, что эти эпизоды, как и подобные эпизоды в данных BATSE (Burst and Transient Source Experiment), отражают временное включение режима сильной связи, обсуждавшегося в разд. 3.1. Измерение циклотронной линии [44] соответствует магнитному полю вблизи поверхности нейтронной звезды $B_0 \approx (5{,}1 \div 5{,}8) \cdot 10^{12}$ Гс (дипольный магнитный момент $\mu = 1/2B_0R_0^3 = (2{,}6 \div 2{,}9) \cdot 10^{30}$ Гс·см^3 для стандартного радиуса нейтронной звезды $R_0 = 10$ км).

На рис. 3 отложена наблюдаемая производная частоты $\dot{\omega}^*$ в зависимости от наблюдаемого пульсирующего рентгеновского потока (20—40 кэВ) по данным BATSE (см. подробнее в [46]). Положим, что магнитное поле нейтронной звезды в этом пульсаре известно из наблюдений. Оценка $\dot{M}$ может быть получена из наблюдаемого рентгеновского потока при известном расстоянии до источника, которое обычно известно с большими неопределенностями. Положим, что в этом пульсаре существует квазисферическая оболочка, темп аккреции порядка $3 \cdot 10^{16}$ г/с и не превосходит критическое значение $\dot{M}_* \simeq 4 \cdot 10^{16}$ г/с [см. (33)]. Производная частоты $\partial\dot{\omega}^* / \partial y$ может быть найдена из зависимости $\dot{\omega}^*$ от рентгеновского потока, поскольку в первом приближении темп аккреции пропорционален наблюдаемому рентгеновскому потоку. Вблизи равновесия (точка $y = 1$ с $\dot{\omega}^* = 0$), в линейном приближении (см. рис. 3) $\partial\dot{\omega}^* / \partial y \approx 1{,}5 \cdot 10^{-12}$ рад/с^2.

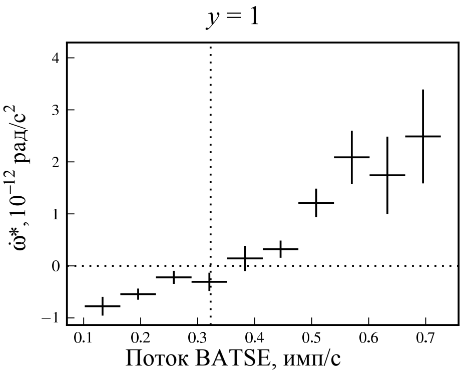


Рис. 3. Корреляции моментов сил, приложенных к нейтронной звезде, с рентгеновским потоком в GX 301-2: $\dot{\omega}^*$ как функция потока 20—40 кэВ (данные BATSE) вблизи равновесной частоты, см. [46]. Предполагаемый рентгеновский поток вблизи равновесия (в единицах безразмерного параметра y) показан вертикальным пунктиром

Полученные для этого пульсара параметры (Z, K_1/ζ и т. д.) приведены в таблице. Видно, что тороидальная компонента поля много меньше полоидальной (пульсар далек от режима сильной связи). Скорость звездного ветра, определенная по формуле (128), оказывается близка к параболической скорости на границе фотосферы оптической звезды. Отметим, что значение параметра зацепления плазмы с магнитосферой K_1/ζ порядка 14, хотя по физическому смыслу коэффициент K_1 должен быть порядка 1. Это означает, что значение параметра ζ, который характеризует относительный размер области передачи момента импульса от оболочки к магнитосфере (или наоборот), должно быть порядка 1/10 (т. е. размер области обмена моментом импульса около 1/10 от альвеновского радиуса).

Параметры пульсаров

Параметры	Пульсары				
	равновесные		неравновесные		
	GX 301-2	Vela X-1	GX 1+4	SXP 1062	4U 2206+54
измеренные					
P*, с	680	283	140	1062	5560
$P_в$, сут	41,5	8,96	1161	~300*	19
v_w, км/с	300	700	200	~300**	350
μ_{30}	2,7	1,2	?	?	1,7
$\dot{M}_{16}$	3	3	1	0,6	0,2
$\left(\partial\dot{\omega}/\partial y\right)_{y=1}$, рад/с^2	$1{,}5\cdot10^{-12}$	$1{,}2\cdot10^{-12}$	*n / a*	*n / a*	
$\dot{\omega}^*_{sd}$	0	0	$-2{,}34\cdot10^{-11}$	$-1{,}63\cdot10^{-11}$	$-9{,}4\cdot10^{-14}$
полученные					
$f(u)$	0,53	0,57			
K_1 / ζ	14	10			$\gtrsim 8$
Z	3,7	2,6			
B_1/B_p	0,17	0,22			
R_A, см	$2\cdot10^9$	$1{,}4\cdot10^9$			
$\omega/\omega_K(R_A)$	0,07	0,08			
$v_{w,\,\min}$, км/с	500	740			
$\mu_{30,\,\min}$			$\mu'_{\min}\approx 4$	$\mu''_{\min}\approx 20$	$\mu'_{\min}\approx 3{,}6$

*   Оценка по положению пульсара на диаграмме Корбета ($P^* - P_в$).
** Оценка типичной скорости ветра в рентгеновских двойных системах с Be-звездами.

Примечания: 1) Ссылки на наблюдаемые параметры пульсаров и их орбит, а также скоростей звездного ветра от оптических компонентов даны в основном тексте. Безразмерные параметры Z, K_1/ ζ и $f(u)$ определены в разд. 1.3 и 3.

2) Численные оценки сделаны для изомоментного распределения вращения в оболочке (n = 2), умеренной связи плазмы с магнитосферой и значений безразмерных параметров $\delta = 1$, $\zeta = 1$, $\tilde{\omega} = 1$, K_0 = 1, γ = 5/3 при отсутствии турбулентности в оболочке (m_t = 0, K_t = 1).

5.2. Vela X-1

Vela X-1 (он же 4U 0900-40) является ярчайшим стабильным аккрецирующим пульсаром в диапазоне энергий 20—50 кэВ со средней рентгеновской светимостью $L_X \approx 4 \cdot 10^{36}$ эрг/с [42]. Система состоит из массивной нейтронной звезды ($1{,}88M_\odot$ [47]) и сверхгиганта HD 77581 спектрального класса B0.5Ib, который затмевает нейтронную звезду с орбитальным периодом приблизительно 8,964 сут [48]. Нейтронная звезда была обнаружена как рентгеновский пульсар с периодом около 283 с [49], который практически не изменился со времени открытия источника. Масса оптической звезды примерно 23 $M_\odot$, радиус около 30 R_{sun} [48]. Параболическая скорость на радиусе фотосферы $v_{esc} \approx 540$ км/с. Большая полуось орбиты $a \approx 50R_\odot$, эксцентриситет орбиты $e \approx 0{,}1$. Оптическая звезда почти заполняет свою полость Роша, о чем также свидетельствует эффект эллипсоидальности в оптической кривой блеска системы [50]. Темп потери массы оптической звездой равен $10^{-6}M_\odot$/год [51] в виде быстрого звездного ветра со скоростью на бесконечности порядка 1100 км/с [52], которая типична для звезд этого спектрального класса. Несмотря на то что терминальная скорость ветра достаточно высока, из-за относительной компактности системы ветер не успевает ускориться до этого значения, его скорость относительно нейтронной звезды достаточно низка — около 700 км/с.

По величине циклотронной линии в спектре [53] магнитное поле нейтронной звезды оценивается равным $B_0 \approx 3 \cdot 10^{12}$ Гс (магнитный момент $\mu = 1{,}5 \cdot 10^{30}$ Гс·см^3 для радиуса 10 км). Будем предполагать, что в этом пульсаре $\dot{M} \simeq 3 \cdot 10^{16}$ г/с (опять же ниже критического значения для существования оболочки). На рис. 4 отложена производная частоты вращения

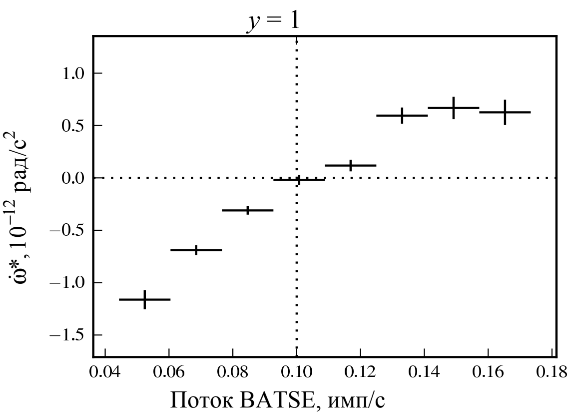


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, для пульсара Vela X-1 [54]

$\dot{\omega}^*$ как функция наблюдаемого пульсирующего рентгеновского потока (20—40 кэВ) по данным BATSE [54]. Как и в случае GX 301-2, в линейном приближении вблизи точки равновесия находим $\partial\dot{\omega}^* / \partial y \approx 1{,}2 \cdot 10^{-12}$ рад/с^2.

Полученные значения параметров для Vela X-1 приведены в таблице. Полученная по формуле (128) скорость звездного ветра очень близка к наблюдаемому значению 700 км/с. Как и в случае GX 301-2, значение параметра зацепления K_1/ζ оказывается порядка 10, т. е. размер области обмена моментом импульса между плазмой и магнитосферой составляет около 0,1 от альвеновского радиуса.

5.3. GX 1+4

GX 1+4 был первым источником, отождествленным с симбиотической двойной системой с нейтронной звездой [55]. Период пульсара приблизительно 140 с, а оптическим компонентом является красный гигант спектрального класса MIII [55]. Орбитальный период двойной системы 1161 сут [56], что более чем на порядок величины выше типичных значений орбитальных периодов в маломассивных рентгеновских двойных системах. Оптический компонент находится глубоко внутри своей полости Роша, и аккреция на нейтронную звезду происходит из звездного ветра звезды-гиганта.

Система замечательна поведением периода вращения нейтронной звезды. В 1970-х годах нейтронная звезда в GX 1+4 ускоряла вращение с рекордной тогда скоростью для рентгеновских пульсаров ($\dot{\omega}_{su} \sim 3{,}8 \cdot 10^{-11}$ рад/с^2) (см., например, [42]). В начале 1980-х годов поток ослаб ниже порога наблюдения, и в течение нескольких лет рентгеновского источника не было видно. Затем источник появился вновь, но период вращений нейтронной звезды стал увеличиваться, причем скорость торможения вращения оказалась примерно равной скорости предшествующего ускорения. В настоящее время нейтронная звезда в этом источнике находится на стадии долговременного замедления вращения со средним значением производной частоты $\dot{\omega}_{sd} \approx -2{,}34 \cdot 10^{-11}$ рад/с^2. Обращение моментов сил, приложенных к нейтронной звезде, было интерпретировано как проявление ретроградного аккреционного диска, сформировавшегося при аккреции из звездного ветра [29, 57, 58]. Подробная история изменения периода вращения нейтронной звезды в GX 1+4 изложена в недавней работе [35]. Эти наблюдения, однако, могут быть более естественно разъяснены в рамках модели квазисферической аккреции.

Так как пульсар GX 1+4 не находится в равновесии, воспользуемся одной из трех формул раздела 4.2 для определения нижнего предела магнитного поля нейтронной звезды по наблюдаемому значению $\dot{\omega}_{sd}$. Из формулы (140) получаем $\mu'_{30,\min} \approx 12(K_1 / \zeta)^{-1/2}$. Предполагая, что параметр зацепления в неравновесных пульсарах такой же, как и в равновесных (т. е. размер области обмена моментом импульса между плазмой и магнитосферой порядка 0,1 от альвеновского радиуса, $\zeta \sim 0{,}1$), имеем $\mu'_{30,\min} \sim 4$.

В этом пульсаре также наблюдаются антикорреляции вариаций производной частоты с флуктуациями рентгеновской светимости [29]. По последним данным Fermi GBM в работе [35] было получено, что $-\dot{\omega}^* \sim L_X^{0,3}$. В нашей модели умеренной связи $K_{sd} \sim \dot{M}^{3/11}$, что очень близко к наблюдаемому закону. В более ранних данных наблюдений BATSE была получена зависимость $-\dot{\omega}^* \sim L_X^{0,48}$. Не исключено, что в то время средняя светимость источника была несколько ниже, поэтому компонента B_t могла быть ближе к B_p, и тогда ожидаемая корреляция имела бы вид $K_{sd} \sim \dot{M}^{6/11} \sim L_X^{0,54}$. Отметим, что в модели со слабой связью (перенос момента импульса из-за сдвиговой турбулентности вблизи магнитосферы [28]) эффективность торможения в $(R_A / R_c)^{3/2}$ раз меньше и вообще не зависит от светимости. В пульсарах с низкой светимостью процессы охлаждения плазмы вблизи альвеновского радиуса менее эффективны, что и приводит к развитию конвективных движений в оболочке и установлению режима умеренной связи.

Далее заметим, что кратковременные эпизоды ускорения вращения нейтронной звезды, иногда наблюдаемые на фоне устойчивого замедления вращения (например, около MJD 49700 — см. рис. 2 в работе [29]), коррелируют с увеличением рентгеновского потока, в отличие от отрицательных корреляций производной частоты с потоком, обсуждаемых выше. Во время этих коротких эпизодов ускорения производная частоты $\dot{\omega}^*$ равняется примерно половине значения $\dot{\omega}^*_{su}$, наблюдавшегося во время устойчивого ускорения вращения нейтронной звезды в GX 1+4 до 1980 года. Рентгеновская светимость во время этих эпизодов ускорения примерно в пять раз больше, чем средняя рентгеновская светимость на стадии устойчивого замедления. Напомним читателю, что как только $\dot{M} > \dot{M}^\dagger$, над магнитосферой возникает область свободного падения потока и нейтронная звезда может только ускорять свое вращение. При понижении рентгеновской светимости режим дозвукового оседания восстанавливается и нейтронная звезда продолжает замедляться.

5.4. SXP 1062

Этот недавно открытый молодой пульсар, находящийся в остатке сверхновой в Малом Магеллановом Облаке (ММО), входит в состав двойной системы с Ве-звездой, имеет период вращения $P^* \approx 1062$ с и низкую рентгеновскую светимость $L_X \approx 6 \cdot 10^{35}$ эрг/с [59]. Объект замечателен большим темпом замедления вращения нейтронной звезды $\dot{\omega}^* \approx -1{,}6 \cdot 10^{-11}$ рад/с^2. В литературе широко обсуждается его природа (см., например, [37, 60]) и делается вывод о возможно аномально большом магнитном поле у этой нейтронной звезды [61]. В рамках нашей модели воспользуемся наиболее консервативным пределом, пренебрегая ускоряющим моментом сил (формула (142)), и получим $\mu_{30} > \mu''_{30,\min} \approx 20$. Видно, что наблюдаемое торможение может объясняться полем порядка 10^{13} Гс, т. е. уверенно говорить о магнитарной природе этого пульсара преждевременно.

5.5. 4U 2206+54

Этот медленный пульсар имеет период вращения $P^* = 5560$ с и тормозится с темпом $\dot{\omega}_{sd} \approx -9{,}4 \cdot 10^{-14}$ рад/с^2 [62]. Орбитальный период двойной системы $P_b \simeq 19$ сут [62], а измеренная скорость звездного ветра $v_W \approx 350$ км/с аномально низка для оптического компонента раннего спектрального класса O9.5V [63]. Рентгеновская светимость источника в среднем около $L_x \simeq 2 \cdot 10^{35}$ эрг/с. В спектре иногда обнаруживается особенность вблизи 30 кэВ, что может быть интерпретировано как циклотронная линия [64—67]. Тогда оценка магнитного поля нейтронной звезды оказывается порядка $B \sim (30 / 11{,}6) \cdot 1{,}3 \approx 3{,}4 \cdot 10^{12}$ Гс (учтено гравитационное красное смещение вблизи поверхности $1 + z \sim 1{,}3$), т. е. $\mu_{30} \approx 1{,}7$. Принимая эту оценку магнитного поля и пренебрегая ускоряющим моментом сил, по формуле (141) находим нижний предел на параметр $K_1 / \zeta \gtrsim 8$, что очень близко к параметру зацепления у равновесных пульсаров Vela X-1 и GX 301-2. Считая, что магнитное поле нейтронной звезды неизвестно (см. дискуссию в [62]) и применяя, как в случае GX 1+4, формулу (140), в предположении умеренной связи с $K_1 / \zeta \sim 10$ получаем предел $\mu_{30} > \mu'_{30,\min} \approx 3{,}6$, что согласуется со стандартным полем нейтронной звезды. Отметим, что применение равновесных формул для этого пульсара дало бы магнитарное значение поля [62].

Заключение

В работах [14, 15] построена теоретическая модель квазисферической дозвуковой аккреции на медленно вращающиеся замагниченные нейтронные звезды. В этой модели аккрецирующее вещество гравитационно захватывается из звездного ветра оптического компонента и оседает с дозвуковой скоростью на вращающуюся магнитосферу, формируя протяженную квазистатическую оболочку. В оболочке происходят крупномасштабные конвективные движения, посредством которых от вращающейся магнитосферы может отводиться момент импульса, и в зависимости от скорости вращения вещества вблизи границы магнитосферы вращение нейтронной звезды может ускоряться или замедляться.

Подробный анализ и сравнение с данными наблюдений двух рентгеновских пульсаров GX 301-2 и Vela X-1, у которых наблюдается корреляция тормозящих/ускоряющих моментов сил со светимостью вблизи равновесного периода вращения нейтронной звезды, указывает на то, что вероятнее всего в надмагнитосферных оболочках этих пульсаров устанавливается сильно анизотропная конвекция, приводящая к почти изомоментному распределению вращения в оболочке $\omega(R) \sim R^{-2}$. Из статистического анализа долгопериодических пульсаров в двойных рентгеновских системах с Be-звездами в ММО [36] также следует, что изомоментный закон вращения в оболочке $\omega \sim R^{-2}$ является предпочтительным. Темп аккреции в оболочках определяется способностью плазмы входить внутрь магнитосферы. Режим аккреционного оседания, при котором возможен отвод момента импульса от магнитосферы нейтронной звезды, может реализоваться при умеренных темпах аккреции $\dot{M} < \dot{M}^{\dagger} \simeq 4 \cdot 10^{16}$ г/с (рентгеновских светимостях $L < L^{\dagger} \simeq 4 \cdot 10^{36}$ эрг/с). При более высоких темпах аккреции (и соответственно более высоких рентгеновских светимостях) из-за быстрого комптоновского охлаждения плазмы в течении над границей магнитосферы возникает зона свободного падения и аккреция становится сильно нестационарной.

Из наблюдений темпов ускорения/замедления вращения (т. е. из производной угловой частоты вращения по времени $\dot{\omega}^*$, или $\partial\dot{\omega}^* / \partial\dot{M}$ вблизи точки смена знака моментов сил) долгопериодических рентгеновских пульсаров можно определить основные безразмерные параметры модели, а также оценить магнитное поле нейтронной звезды. Значения магнитного поля нейтронной звезды, полученные с помощью такого анализа для равновесных рентгеновских пульсаров GX 301-2 и Vela X-1, согласуются с измерениями поля по циклотронным линиям в спектре этих источников.

Из измерения периода равновесного пульсара P^* периода двойной системы P_b и оценки магнитного поля нейтронной звезды μ появляется возможность оценивать скорость звездного ветра оптического компонента, не прибегая к сложным спектроскопическим измерениям. Для неравновесных пульсаров существует максимально возможное значение скорости торможения при аккреции, зависящее от P^*, периода двойной системы P_b, магнитного поля нейтронной звезды μ и скорости звездного ветра v. Для таких пульсаров (GX 1+4, SXP 1062, 4U 2206+54) можно из наблюдаемого значения скорости торможения вращения пульсара и рентгеновской светимости получить нижнюю оценку магнитного поля нейтронной звезды, которое во всех случаях оказывается близким к стандартному и согласуется с наблюдениями циклотронных особенностей в спектрах.

В модели квазисферической дозвуковой аккреции долговременные устойчивые эпизоды ускорения или замедления вращения нейтронных звезд, наблюдаемые у ряда рентгеновских пульсаров, могут быть количественно объяснены изменением среднего темпа аккреции на нейтронную звезду (и соответствующим изменением средней рентгеновской светимости). По-видимому, такие изменения связаны со свойствами звездного ветра оптической звезды в этих двойных системах. Модель предсказывает специфическое поведение вариаций $\delta\dot{\omega}^*$, наблюдаемых на фоне устойчивого ускорения или замедления вращения, в зависимости от флуктуаций темпа аккреции $\delta\dot{M}$. Имеется критическое значение темпа аккреции $\dot{M}_{cr}$, ниже которого должна наблюдаться антикорреляция флуктуаций $\delta\dot{\omega}^*$ с $\delta\dot{M}$ (это случай источника GX 1+4 на стадии устойчивого замедления вращения нейтронной звезды, наблюдаемого в настоящее время), а выше которого флуктуации $\delta\dot{\omega}^*$ относительно среднего значения должны коррелировать с флуктуациями $\delta\dot{M}$ (это случай пульсаров Vela X-1, GX 301-2 вблизи равновесного периода и GX 1+4 на стадии устойчивого ускорения вращения). Модель дает количественное объяснение относительной амплитуде и знаку наблюдаемых флуктуаций частоты в источнике GX 1+4.

Авторы благодарят В. А. Дорошенко (IAAT) за предоставление наблюдательных данных по корреляции моментов сил и светимости в рентгеновских пульсарах GX 301-2 и Vela X-1, В. С. Бескина и В. Ф. Сулейманова за обсуждения. Н. Ш. благодарит Институт М. Планка по астрофизике (Гархинг) за гостеприимство.

Работа Н. Ш., К. П. и А. К. поддержана грантами РФФИ 09-02-00032, 12-02-00186 и 10-02-00599. Работа Л. Я. поддержана грантом фонда Wenner-Gren (Швеция).

Литература

1. *Bildsten L. et al.* // Astrophys. J. Suppl. 1997. V. 113. P. 367.
2. *Shakura N. I., Sunyaev R. A.* // Astron. Astrophys. 1973. V. 24. P. 337.
3. *Pringle J. E., Rees M. J.* // Astron. Astrophys. 1972. V. 21. P. 1.
4. *Ghosh P., Lamb F. K.* // Astrophys. J. 1979. V. 234. P. 296.
5. *Lovelace R. V. E., Romanova M. M., Bisnovatyi-Kogan G. S.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1995. V. 275. P. 244.
6. *Kluz'niak W., Rappaport S.* // Astrophys. J. 2007. V. 671. P. 1990.
7. *Fryxell B. A., Taam R. E.* // Astrophys. J. 1988. V. 335. P. 862.
8. *Ruffert M.* // Astron. Astrophys. 1997. V. 317. P. 793.
9. *Ruffert M.* // Astron. Astrophys. 1999. V. 346. P. 861.
10. *Burnard D. J., Arons J., Lea S. M.* // Astrophys. J. 1983. V. 266. P. 175.
11. *Davies R. E., Pringle J. E.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1981. V. 196. P. 209.
12. *Illarionov A. F., Kompaneets D. A.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1990. V. 247. P. 219.
13. *Bisnovatyi-Kogan G. S.* // Astron. Astrophys. 1991. V. 245. P. 528.
14. *Shakura N. I., Postnov K. A., Kochetkova A. Yu., Hjalmarsdotter L.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2012. V. 420. P. 216.
15. *Шакура Н. И., Постнов К. А., Кочеткова А. Ю., Ялмарсдоттер Л.* // УФН. 2013. Т. 183, вып. 4. С. 337—364.
16. *Illarionov A. F., Sunyaev R. A.* // Astron. Astrophys. 1975. V. 39. P. 185.
17. *Elsner R. F., Lamb F. K.* // Astrophys. J. 1977. V. 215. P. 897.

18. *Arons J., Lea S. M.* // Astrophys. J. 1976. V. 207. P. 914.
19. *Bondi H.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1952. V. 112. P. 195.
20. *Компанеец А. С.* // ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 876.
21. *Weymann R.* // Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 2112.
22. *Shakura N. I., Postnov K. A., Hjalmarsdotter L.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2013. V. 428. P. 670.
23. *Doroshenko V., Santangelo A., Suleimanov V.* // Astron. Astrophys. 2011. V. 529. P. 52.
24. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М. : Наука, 1986.
25. *Wasiutyn'ski J.* Studies in Hydrodynamics and Structure of Stars and Planets. Oslo, 1946.
26. *Finger M. et al.* URL: http://gammaray.nsstc.nasa.gov/gbm/science/pulsars/lightcurves/ gx1p4.html.
27. *Исханов Н. Р., Бескровная Н. Г.* // Астроном. журн. 2012. Т. 89. С. 652.
28. *Липунов В. М.* Астрофизика нейтронных звезд. М. : Наука, 1987.
29. *Chakrabarty D. et al.* // Astrophys. J. Lett. 1997. V. 481. L101.
30. *Sunyaev R. A.* // Physics and astrophysics of neutron stars and black holes. Amsterdam : North Holland Publ., 1978. P. 697.
31. *Ho C. et al.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1989. V. 238. P. 1447.
32. *Nelson R. W. et al.* // Astrophys. J. 1997. V. 488. L117.
33. *Arons J., Lea S. M.* // Astrophys. J. 1976. V. 210. P. 792.
34. *Hunt R.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1971. V. 154. P. 141.
35. *González-Galán A. et al.* // Astron. Astrophys. 2012. V. 537. A66.
36. *Chashkina A. A., Popov S. B.* // New Astron. 2012. V. 17. P. 594.
37. *Popov S. B., Turolla R.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2012. V. 421. L127.
38. *Koh D. T. et al.* // Astrophys. J. 1997. V. 479. P. 933.
39. *White N. E. et al.* // Astrophys. J. 1976. V. 209. L119.
40. *Kaper L., van der Meer A., Najarro F.* // Astron. Astrophys. 2006. V. 457. P. 595.
41. *de Kool M., Anzer U.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1993. V. 262. P. 726.
42. *Nagase F.* // Publ. Astron. Soc. Jap. 1989. V. 41. P. 1.
43. *Pravdo S. H., Ghosh P.* // Astrophys. J. 2001. V. 554. P. 383.
44. *La Barbera A. et al.* // Astron. Astrophys. 2005. V. 438. P. 617.
45. *Kreykenbohm I. et al.* // Astron. Astrophys. 2004. V. 427. P. 975.
46. *Doroshenko V. et al.* // Astron. Astrophys. 2010. V. 515. A10.
47. *Quaintrell H. et al.* // Astron. Astrophys. 2003. V. 401. P. 313.
48. *van Kerkwijk M. H. et al.* // Astron. Astrophys. 1995. V. 303. P. 483.
49. *Rappaport S.* // IAU Circ. 1975. V. 2869. P. 2.
50. *Бочкарев Н. Г., Карицкая Е. А., Шакура Н. И.* // Письма в Астрон. журн. 1975. Т. 1. С. 13.
51. *Nagase F. et al.* // Publ. Astron. Soc. Jap. 1986. V. 38. P. 547.
52. *Watanabe S. et al.* // Astrophys. J. 2006. V. 651. P. 421.
53. *Staubert R., Chin J.* // Astron. Astrophys. Suppl. 2003. V. 3. P. 270.
54. *Doroshenko V.* PhD Thesis University of Tuebingen (IAAT). 2011.
55. *Davidsen A., Malina R., Bowyer S.* // Astrophys. J. 1977. V. 211. P. 866.
56. *Hinkle K. H., Fekel F. C., Joyce R. R., Wood P. R., Smith V. V., Lebzelter T.* // Astrophys. J. 2006. V. 641. P. 479.
57. *Makishima K. et al.* // Nature 1988. V. 333. P. 746.
58. *Dotani T. et al.* // Publ. Astron. Soc. Jap. 1989. V. 41. P. 472.
59. *Hénault-Brunet V. et al.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2012. V. 420. L13.
60. *Haberl F. et al.* // Astron. Astrophys. 2012. V. 537. L1.
61. *Fu Lei, Li Xiang-Dong* // Astrophys. J. 2012. V. 757. P. 171.
62. *Reig P., Torrejón J. M., Blay P.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2012. V. 425. P. 595.
63. *Ribó M. et al.* // Astron. Astrophys. 2006. V. 449. P. 687.
64. *Torrejón et al*. // Astron. Astrophys. 2004. V. 423. P. 301.
65. *Masetti N. et al.* // Astron. Astrophys. 2004. V. 423. P. 311.
66. *Blay P. et al.* // Astron. Astrophys. 2005. V. 438. P. 963.
67. *Wang W.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2009. V. 398. P. 1428.

Физика экстремальных световых полей

НЕСТАБИЛЬНОСТЬ ФИЗИЧЕСКОГО ВАКУУМА В СИЛЬНОМ ЛАЗЕРНОМ ПОЛЕ

И. Ю. Костюков, Е. Н. Неруш

Введение

В последние несколько десятилетий в развитии лазерной техники можно наблюдать серьезный прогресс. Мощность оптических импульсов за этот период выросла на много порядков. Современные лазерные системы позволяют генерировать электромагнитное излучение с интенсивностью более 10^{22} Вт/см^2 [1]. В настоящее время проектируются лазерные системы, предполагающие генерацию оптического излучения на два порядка большей интенсивности, чем доступно на установке, описанной в работе [1]. Так, в стадии разработки находится проект сверхмощного инфракрасного лазера ELI (Extreme Light Infrastructure — см. в Интернете www.extreme-light-infrastructure.eu), который должен обеспечить генерацию фемтосекундных лазерных импульсов интенсивностью свыше 10^{23} Вт/см^2. Среди ближайших планов можно отметить ввод в строй в 2015 году нескольких прототипов: 20-петаваттного лазера, создаваемого в рамках проекта ILE (Institut de la Lumiere Extreme, Франция), а также аналогичных установок в Румынии, Чехии и Венгрии. Еще более высокие интенсивности ожидаются в случае реализации российского проекта XCELS [http: //www.xcels.iapras.ru/index.html].

При такой интенсивности взаимодействие лазерного излучения происходит в радиационно-доминантном режиме, когда образовавшиеся в результате ионизации вещества электроны в течение одного периода поля теряют значительную часть своей энергии, приобретенной в лазерном поле. Как показывают расчеты [2, 3], около 30 % лазерной энергии переходит в энергию гамма-излучения. Интенсивное лазерное излучение может быть также использовано для исследования в лабораторных условиях структуры физического вакуума, для проверки основ квантовой электродинамики (КЭД) и т. д. Одним из вопросов, который привлекает к себе большое внимания еще с момента возникновения КЭД, является нестабильность вакуума, сопровождающаяся массовым рождением электрон-позитронных пар. В недавней работе [4] было предсказано, что в электромагнитных полях интенсивностью порядка 10^{24} Вт/см^2 и выше следует ожидать возникновения КЭД-каскадов, инициированных первоначально медленными «затравочными» частицами. В этом случае лазерное поле играет двоякую роль: ускоряет заряженные частицы и инициирует КЭД-процессы с фотонами, излученными в сильном поле, и заряженными частицами, набравшими энергию в результате ускорения. При этом возникновение каскадов в принципе возможно практически при произвольной конфигурации лазерного поля, отличной от плоской волны. При достаточно высокой интенсивности развитие каскадов будет продолжаться вплоть до истощения лазерного поля вследствие его поглощения быстро образующейся электрон-позитронной плазмой [2]. Развитие каскадов может привести к принципиальному ограничению на достижимую интенсивность лазерного поля [5] на уровне порядка 10^{27} Вт/см^2, в том числе и для лазерных импульсов, фокусируемых в вакууме.

1. Квантовые процессы в сильных электромагнитных полях

Взаимодействие между заряженными частицами и сильными электромагнитными полями исследует квантовая электродинамика. Такое взаимодействие описывается лагранжианом, который включает в себя четыре параметра — фундаментальные константы: e — заряд электрона, m — масса электрона, c — скорость света, $\hbar$ — постоянная Планка. Параметры фактически задают масштабы взаимодействия: $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137 << 1$ — постоянная тонкой структуры (интенсивность взаимодействия), $mc^2 \approx$ ≈ 511 кэВ — масса покоя электрона (энергетический масштаб), $\lambda_{\text{комп}} =$ $= \hbar/mc \approx 4\cdot 10^{-11}$ см — комптоновская длина (пространственный масштаб), $E_{\text{кр}} = mc^2/(e\lambda_{\text{комп}}) = m^2c^3/(e\hbar) \approx 1{,}3\cdot 10^{16}$ В/см — критическое поле (полевой масштаб). Принцип неопределенности приводит к возможности рождения виртуальных пар частица — античастица с характерным временем жизни $\tau \sim \hbar/mc^2 \approx 1{,}3\cdot 10^{-21}$ с. Частицы проходят расстояние до своей аннигиляции порядка $\lambda_{\text{комп}}$. Таким образом, с точки зрения квантовой электродинамики физический вакуум, говоря упрощенно, представляет собой бесконечный «резервуар» виртуальных пар частица — античастица («море Дирака»).

Лагранжиан, описывающий взаимодействие электромагнитного поля с вакуумом в рамках КЭД, был выведен В. Гейзенбергом и Х. Эйлером в 1936 году [6]:

$$L = \frac{\tilde{E}^2 - \tilde{H}^2}{8\pi} + \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-im^2 s}\left[\frac{e^2\tilde{H}\tilde{E}}{\operatorname{tg}\left(e\tilde{H}s\right)\operatorname{th}\left(e\tilde{E}s\right)} - \frac{1}{s^2} + \frac{e^2\left(\tilde{H}^2 - \tilde{E}^2\right)}{3}\right], \quad (1)$$

$$\tilde{E} = \sqrt{\left(F^2 + G^2\right)^{1/2} + F}\,,\ \tilde{H} = \sqrt{\left(F^2 + G^2\right)^{1/2} - F}\,,\ F = \left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2\right)/2\,,\ G = \mathbf{E}\cdot\mathbf{H}\,,$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного поля, F и G — КЭД-инварианты. Лагранжиан, представленный в виде интеграла, фактически описывает бесконечный ряд поправок теории возмущений по малому параметру α. Мнимая часть лагранжиана описывает неустойчивость вакуума в сильном электромагнитном поле, причем эта часть является неаналитической функцией α. Анализ лагранжиана показывает, что данная неустойчивость обусловлена лавинообразным рождением электрон-позитронных пар в электромагнитном поле, когда его напряженность становится близка к критической $E_{\text{кр}}$. Критическую напряженность можно определить как напряженность, необходимую для того, чтобы электрон на комптоновской длине совершил работу, равную энергии покоя электрона.

Вероятность рождения электрон-позитронных пар в единицу времени и в единицу объема в постоянном электрическом поле, которую можно вычислить, используя лагранжиан (1), равна [7]

$$W = \frac{c}{4\pi^3\lambda_{\text{комп}}^4}\left(\frac{E}{E_{\text{кр}}}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-\frac{\pi n E_{\text{кр}}}{E}\right) \sim \exp\left(-\frac{\pi m^2 c^3}{eE\hbar}\right). \qquad (2)$$

Как следует из полученного выражения, она экспоненциально убывает с уменьшением отношения напряженности электрического поля к критической напряженности. На первый взгляд, вероятность кажется малой уже для полей в несколько раз меньше критического. Однако поскольку она нормирована на очень маленький объем, определяемый $\lambda_{\text{комп}}$, то уже даже для относительно небольшого объема в кубический микрон, характерного для области фокусировки мощных лазерных импульсов, предэкспоненциальный множитель в выражении (2) становится гигантским — примерно 10^{28}. Таким образом, даже для электромагнитных полей на порядок слабее критического вероятность рождения электрон-позитронных пар в области фокусировки сверхмощных лазерных импульсов остается высокой.

Электрон-позитронная пара также может рождаться в результате распада фотона высокой энергии в сильном электромагнитном поле (процесс Брейта — Уилера [8]). С точки зрения квантовой электродинамики это процесс, обратный процессу обычного излучения электроном (или позитроном) фотона в электромагнитном поле. Данные процессы характеризуются безразмерными параметрами — КЭД-инвариантами:

$$\chi_{\text{э}} = e\hbar/(m^3c^4)\,|F_{\mu\nu}p_{\nu}| \approx \gamma(F_{\perp}/eE_{\text{кр}}), \quad \chi_{\text{ф}} \approx (\hbar\omega/mc^2)(F_{\perp}/eE_{\text{кр}}), \quad (3)$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, p_{ν} — 4-импульс частицы, $\hbar\omega$ — энергия фотона, γ — гамма-фактор частицы, $F_{\perp}$ — компонента силы Лоренца, перпендикулярная к мгновенному направлению скорости частицы. Параметр $\chi_{\text{э}}$ определяет излучение фотонов релятивистским электроном (позитроном), в то время как $\chi_{\text{ф}}$ определяет взаимодействие высокоэнергетического фотона с электромагнитным полем. Квантовые эффекты становятся существенны, когда $\chi_{\text{э}} >> 1$ или $\chi_{\text{ф}} >> 1$. Если $\chi_{\text{э}} >> 1$, то $\hbar\omega \approx \gamma mc^2$ и эффект отдачи при излучении фотона электроном становится сильным. Вероятность излучения фотона электроном в единицу времени в полосу энергий $d(\hbar\omega)$ может быть записана в виде [9]

$$dW_{\text{изл}}(\xi) = \frac{\alpha mc^2}{\sqrt{3}\pi\hbar\gamma}\left[\left(1-\xi+\frac{1}{1-\xi}\right)K_{2/3}(\delta)-\int_{\delta}^{\infty}K_{1/3}(s)ds\right]d\xi, \qquad (4)$$

где $\delta = 2\xi/[3(1-\xi)\chi_{э}]$ и $\xi = \hbar\omega/(\gamma mc^2)$. $\hbar\omega dW_{\text{изл}}$ можно рассматривать как распределение по энергии излучения. Для излучения электрона в постоянном магнитном поле, перпендикулярном к направлению скорости электрона, распределение переходит в спектр синхротронного излучения в пределе $\chi_{э} \ll 1$. Вероятность рождения электрон-позитронной пары фотоном с энергией [9]

$$dW_{\text{пар}}(\eta_-) = \frac{\alpha m^2c^4}{\sqrt{3}\pi\hbar^2\omega}\left[\left(\frac{\eta_+}{\eta_-}+\frac{\eta_-}{\eta_+}\right)K_{2/3}(\delta)+\int_{\delta}^{\infty}K_{1/3}(s)ds\right]d\eta, \qquad (5)$$

где $\delta = 2/(3\chi_{ф}\eta_-\eta_+)$, $\eta_- = \gamma mc^2/(\hbar\omega)$ и $\eta_+ = 1-\eta_-$ — нормированные энергии электрона и позитрона соответственно. Из выражения (5) следует, что вероятность рождения пар экспоненциально подавлена в классическом пределе.

Цепочка из двух этих обратных друг другу процессов (излучение фотона в сильном лазерном поле и процесс Брейта — Уилера) приводит к такому важному КЭД-эффекту, как электромагнитный каскад: «затравочная» заряженная частица сначала ускоряется в лазерном поле и излучает высокоэнергетический фотон, который распадается в лазерном поле на электрон-позитронную пару. Образовавшаяся пара также ускоряется в лазерном поле и образует следующее поколение электрон-позитронных пар и фотонов. В результате развития каскада происходит лавинообразное образование пар и гамма-квантов. Важно отметить, что в отличие от прямого пробоя вакуума в сильном лазерном поле пробой вакуума через развитие каскада возможен при значительно более низкой интенсивности лазерного излучения. Такой процесс может ограничить интенсивность, достигаемую лазером в лабораторных условиях. Эта проблема исследована подробно теоретически и численно в работах [10, 11]. Обсудим ее более подробно в следующих разделах.

2. Электромагнитные каскады: моделирование

Поскольку коллективная динамика электрон-позитронной плазмы в сильном лазерном поле — очень сложное явление, то весьма важным для исследования образования такой плазмы становится численное моделирование. Для изучения динамики электрон-позитронной плазмы, образовавшейся в результате развития каскада, мы разработали двумерную численную модель, основанную на методе частиц в ячейке и методе Монте-Карло [10]. Наша численная модель использует следующий подход: излучение фотона рассматривается в рамках квантовой теории, динамика лазерного и плазменного полей описывается в рамках уравнения Максвелла. Важно отметить, что характерные энергии фотонов в электрон-позитронной плазме отличаются на много порядков. Энергия фотонов лазерного и плазменного поля достаточно низкая ($\hbar\omega << mc^2$), в то время как энергия фотонов, излучаемых ускоренными электронами и позитронами, наоборот, очень высокая ($\hbar\omega >> mc^2$). Данное обстоятельство позволяет рассматривать высокоэнергетические фотоны как частицы, рассчитывать их распространение решением уравнения движения, а эволюцию лазерных и плазменных полей рассчитывать путем численного решения уравнений Максвелла. Таким образом, динамика электронов, позитронов и жестких фотонов, а также эволюция плазмы и лазерных полей рассчитывается с помощью метода частиц в ячейках, в то время как излучение жестких фотонов и рождение электрон-позитронных пар рассчитываются с помощью метода Монте-Карло.

Излучение фотона моделируется следующим образом. На каждом шаге по времени для каждого электрона и позитрона проверяется возможность испускания фотонов с распределением вероятности, которая определяется приближенным выражением, аппроксимирующим формулу (5) с точностью 5 %. Излученный фотон появляется в области моделирования как новая частица. Координаты такого фотона совпадают с координатами электрона (позитрона), который излучает данный фотон. Импульс фотона направлен в сторону импульса электронов (позитронов) в момент излучения. При этом значение импульса электрона (позитрона) уменьшается на величину импульса фотона. Аналогичный алгоритм используется для моделирования рождения фотонами электрон-позитронных пар. Новые электрон и позитрон добавляются в область моделирования, в то время как фотон, распадающийся на эту пару, удаляется. При этом сумма энергий электрона и позитрона равна энергии фотона, а скорость электрон-позитронной пары направлена вдоль скорости фотона в момент распада. Движение частиц и эволюция низкочастотного электромагнитного поля рассчитываются с помощью стандартной численной схемы, использующей метод частиц в ячейках [10]. Для того чтобы предотвратить переполнение памяти во время моделирования из-за экспоненциального роста числа частиц в каскаде, используется метод слияния частиц.

Разработанная численная модель применялась для исследования образования и динамики электрон-позитронной плазмы в поле двух распространяющихся навстречу друг другу линейно-поляризованных лазерных импульсов. Лазерные импульсы имеют гауссову огибающую и движутся вдоль оси x. Компоненты лазерного поля в момент времени t = 0 имеют следующий вид:

$$E_y, B_z = a\exp\left(-\frac{y^2}{\sigma_r^2}\right)\left\{\exp\left[-(x+x_0)^{2/\sigma_x^2}\right] \pm \exp[-(x-x_0)]^{2/\sigma_x^2}\right\}. \quad (6)$$

Здесь напряженности поля нормированы на $mc\omega_л / |e|$, где $\omega_л$ — циклическая частота лазерного импульса; координаты нормированы на $c/\omega_л$, время нормировано на $1/\omega_л$; $a = |e| E_0 / (mc\omega_л)$, где E_0 — амплитуда электрического поля одного лазерного импульса; $2x_0$ — начальное расстояние между лазерными импульсами. Параметры моделирования следующие: $a(t=0) = 800$, $\sigma_x = 125$, $\sigma_r(t=0) = 60$, $x_0 = \sigma_x/2$, что при длине волны $\lambda_л = 2\pi c / \omega_л = 0{,}8$ мкм соответствует интенсивности $3 \cdot 10^{24}$ Вт/см^2, длительности импульса 100 фс, размеру фокусного пятна 10 мкм. Каскад инициируется одним электроном, расположенным в момент t = 0 в точке $x = y = 0$ с нулевым начальным импульсом, когда лазерные импульсы приближаются друг к другу (σ_x — расстояние между центрами импульсов при t = 0).

Развитие каскада на более поздней стадии ($t = 25{,}5\lambda / c$) показано на рис. 1, где представлены: распределение плотности электронов (распределение плотности позитронов почти совпадает с распределением для электронов), плотность распределения фотонов и распределение интенсивности

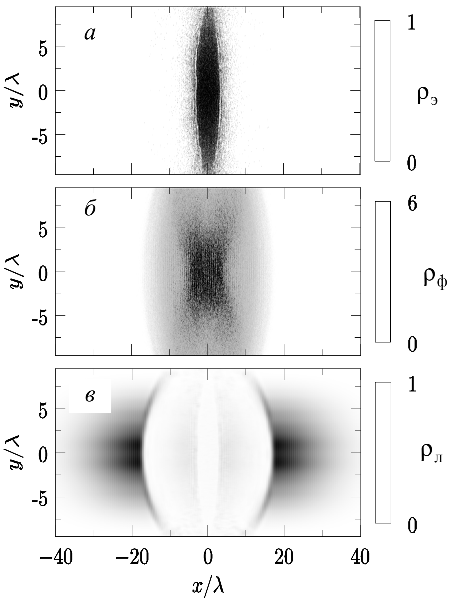


Рис. 1. Нормированная плотность электронов $\rho_э = n_э / (a_0 n_{кр})$ (*а*), нормированная плотность фотонов $\rho_ф = n_ф / (a_0 n_{кр})$ (*б*) и интенсивность лазерного излучения, нормированная на максимум начальной интенсивности $\rho_л$ (*в*) при столкновении двух линейно-поляризованных лазерных импульсов в момент $t = 25{,}5\lambda / c$

лазерного излучения. К этому моменту времени лазерные импульсы прошли друг через друга и расстояние между центрами импульса составило $1{,}6\sigma_x$. Как видно из рис. 1, возникает сгусток сверхплотной электрон-позитронной плазмы микронного размера. При этом задняя часть лазерного импульса поглощается в результате образования и нагрева электрон-позитронной плазмы. Плотность плазмы примерно в 2 раза превышает релятивистскую критическую плотность $a_0 n_{\text{кр}}$, где $n_{\text{кр}} = m\omega^2/(8\pi e^2)$ — нерелятивистская критическая плотность электрон-позитронной плазмы.

Временная эволюция энергии частиц и лазерного импульса показана на рис. 2, откуда следует, что около половины энергии лазера поглощается в результате образования и нагрева плазмы. При этом большая часть поглощенной лазерной энергии конвертируется в энергию энергичных гамма-квантов. Полная энергия частиц, образованных в результате развития каскада, и энергия электромагнитного поля сохраняется с точностью около 1 % в течение моделирования.

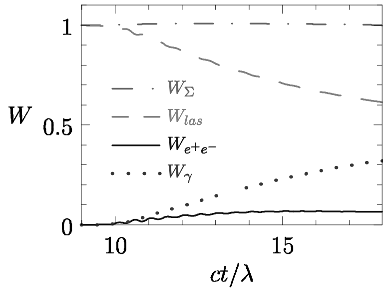


Рис. 2. Энергия электронов и позитронов (—), энергия фотонов (·····), лазерная энергия (– – –) и полная энергия системы (– · –) как функции времени. Все энергии нормированы на начальную энергию системы

На начальной стадии развития каскада число возникающих частиц растет экспоненциально со временем: $N \approx e^{\Gamma t}$, где Γ — инкремент каскада. Как следует из закона сохранения энергии, максимальное число частиц, возникающих в процессе развития каскада частиц, определяется энергией лазерного импульса. В некоторый момент времени экспоненциальный рост прекращается, и зависимость числа частиц в каскаде от времени становится более медленной. Приравнивая начальную энергию лазерного импульса к энергии частиц в каскаде, получим $N \approx a^2 \sigma_x \sigma_r^2 N_0/\overline{\gamma}$, где предполагается, что $N_{\text{э}} \approx N_{\text{п}} \approx N_{\text{ф}} \approx N$, $N_{\text{э}}$, $N_{\text{п}}$ и $N_{\text{ф}}$ — число электронов, позитронов и фотонов, образованных в каскаде, соответственно, $mc^2\overline{\gamma}$ — средняя энергия частицы и $N_0 = n_{\text{кр}}(c/\omega)^3 = \lambda/(16\pi r_{\text{э}})$, $r_{\text{э}} = e^2/(mc^2)$. Инкремент каскада уменьшается, когда напряженность лазерного поля спадает, что происходит, если плотность плазмы достигает значения $a_0 n_{\text{кр}}$. Как следует из рис. 3, приведенные оценки находятся в хорошем согласии с результатами численного моделирования. На этом рисунке показано, что инкремент каскада значительно уменьшается в момент времени $t_н \approx 10\ \lambda/c$ когда плотность плазмы достигает значения $a_0 n_{кр}$. Значение момента времени $t_н$ может быть найдено из оценки $t_н \approx \approx \Gamma^{-1} \ln N$.

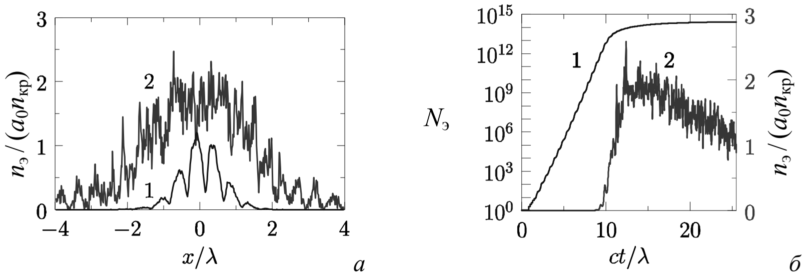


Рис. 3. Число электронов, образованных в результате развития каскада, как функция времени (кривая *1*) и плотность электрон-позитронной плазмы, нормированная на релятивистскую критическую плотность, как функция времени (кривая *2*) — *а* и *б* — профиль электронной плотности вдоль оси x при $y = 0$ для начальной стадии развития каскада $ct = 6{,}4\ \lambda$ (кривая *1*) и для поздней стадии $y = 0$ (кривая *2*). Электронная плотность нормирована на $an_{кр}$ при $ct = 16{,}6\lambda$ и на $3{,}3 \cdot 10^{-6} an_{кр}$ при $ct = 6{,}4\ \lambda$

Из рис. 3 также следует, что $\Gamma \approx 0{,}6\omega_л$ при $t < t_н$. Характерное время $t_{изл}$, в течение которого электрон или позитрон излучает жесткий фотон, может быть оценено как $1/\Gamma > 1/\omega_л$. Для параметров численного моделирования значение $\overline{\gamma}$ может быть получено из оценки $\overline{\gamma} \approx a$. Таким образом, $N \approx a\sigma_x \sigma_r^2 N_0 \approx 4 \cdot 10^{14}$ и $ct_н / \lambda \approx 9$, что находится в хорошем согласии с результатами численного моделирования.

3. Электромагнитные каскады: кинетическая теория

В этом разделе исследуем простую модель электромагнитного каскада — каскад во вращающемся электрическом поле. Более подробно данное исследование изложено в работе [11]. Вращающееся электрическое поле появляется в магнитном узле циркулярно поляризованной плоской электромагнитной волны, где $B = 0$. Именно эта область, где электрическое поле максимально, наиболее благоприятна для развития каскада. Циркулярно-поляризованная стоячая волна может быть создана двумя распространяющимися навстречу друг другу лазерными импульсами.

Рассмотрим сначала движение электронов без учета излучения фотонов, следовательно,

$$E_x = E_0 \cos(t + \phi_0), \;\; E_y = E_0 \sin(t + \phi_0), \tag{7}$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -\cos(t + \phi_0), \;\; \frac{dp_y}{dt} = -\sin(t + \phi_0), \tag{8}$$

где x, y — декартовы координаты в плоскости $B = 0$, $\mathbf{p}$ — импульс электрона, нормированный на mca, $aeE_0 / mc\omega_л$ — нормированное электрическое поле в лазерном импульсе, $\omega_л$ — циклическая частота вращения поля, ϕ_0 — начальная фаза волны. В дальнейшем рассматриваем только импульсы частиц и не принимаем в расчет пространственную динамику частиц, поскольку она не влияет на квантовые эффекты до тех пор, пока частица остается в плоскости $B = 0$. Вводя ψ как угол между векторами $-\mathbf{E}$ и $\mathbf{p}$ (небольшие положительные значения ψ соответствуют тому, что частица отстает в своем вращении от вектора $-\mathbf{E}$), получим $p_x = -p\cos(t + \phi_0 - \psi)$, $p_y = -p\sin(t + \phi_0 - \psi)$, что позволяет переписать уравнения (7) и (8) следующим образом:

$$\frac{d\psi}{dt} = 1 - \frac{\sin\psi}{p}, \quad \frac{dp}{dt} = \cos\psi. \tag{9}$$

Это приводит к уравнению для траектории электрона в плоскости $p - \psi$:

$$\frac{d(\sin\psi)}{dp} = 1 - \frac{\sin\psi}{p}, \tag{10}$$

решение которого может быть записано в виде

$$\sin\psi = \frac{p}{2} + \frac{p_0}{p}\left(\sin\psi_0 - \frac{p_0}{2}\right), \tag{11}$$

где p_0 и ψ_0 — начальные значения импульса и угла соответственно.

Траектории электронов показаны на рис. 4, *а*. Траектории позитронов (рис. 4, *б*) могут быть получены из уравнения (11) заменой $\psi \to \psi - \pi$, поскольку сила, действующая на позитроны со стороны поля, противоположна силе, действующей на электроны. Импульс фотонов не меняется при движении в поле, и угол ψ для фотонов растет линейно со временем. Соответствующие траектории показаны на рис. 4, *в*.

Из квазиклассической теории известно, что если $a_0 >> 1$, то характерный угол отклонения электрона между последовательными излучениями фотонов много больше чем $1/\gamma$. Кроме того, электрон и позитрон, получающиеся при распаде фотона, изначально двигаются примерно в том же направлении, что и фотон, из которого они получились. Поэтому, во-первых, мы пользуемся синхротронными формулами для излучения

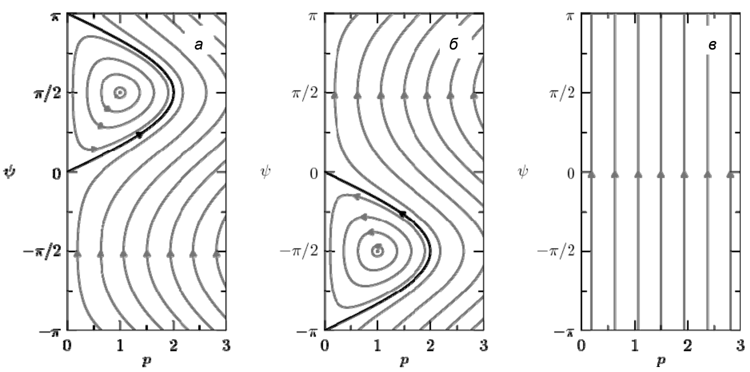


Рис. 4. Траектории частиц в пространстве $p-\psi$ для электронов (*а*), позитронов (*б*) и фотонов (*в*), движущихся во вращающемся электрическом поле. Излучение фотонов и рождение пар не учитывается. Жирные линии соответствуют траекториям, отделяющим траектории захваченных частиц от пролетных

фотонов и рождения пар и, во-вторых, пренебрегаем углами порядка $1/\gamma$ в кинетических уравнениях, что в общем случае дает следующие уравнения:

$$\partial_t f_{\text{э,п}}(\mathbf{r},\mathbf{p}) + \frac{\mathbf{p}}{p}\nabla f_{\text{э,п}}(\mathbf{r},\mathbf{p}) + \nabla_{\mathbf{p}}\{f_{\text{э,п}}(\mathbf{r},\mathbf{p})\cdot\mathbf{F}_{\text{э,п}}(\mathbf{r},\mathbf{p})\} =$$
$$= \int_{\mathbf{p}'>\mathbf{p}} f_{\text{ф}}(\mathbf{r},\mathbf{p}')\tilde{w}(\mathbf{p}'\to\mathbf{p})dp' + \int_{\mathbf{p}'>\mathbf{p}} f_{\text{э,п}}(\mathbf{r},\mathbf{p}')w(\mathbf{p}'\to\mathbf{p})dp' - \tag{12}$$
$$- \int_{\mathbf{p}'>\mathbf{p}} f_{\text{э,п}}(\mathbf{r},\mathbf{p})w(\mathbf{p}\to\mathbf{p}')dp',$$

$$\partial_t f_{\text{ф}}(\mathbf{r},\mathbf{p}) + \frac{\mathbf{p}}{p}\nabla f_{\text{ф}}(\mathbf{r},\mathbf{p}) = -\int_{\mathbf{p}'>\mathbf{p}} f_{\text{ф}}(\mathbf{r},\mathbf{p})\tilde{w}(\mathbf{p}\to\mathbf{p}')dp' +$$
$$+ \int_{\mathbf{p}'>\mathbf{p}} f_{\text{э}}(\mathbf{r},\mathbf{p}')w(\mathbf{p}'\to\mathbf{p}'-\mathbf{p})dp' + \int_{\mathbf{p}'>\mathbf{p}} f_{\text{п}}(\mathbf{r},\mathbf{p}')w(\mathbf{p}'\to\mathbf{p}'-\mathbf{p})dp'. \tag{13}$$

Здесь $\mathbf{r}$ — координата частицы, нормированная на $c/\omega_{\text{л}}$; $\mathbf{F}$ — сила Лоренца, нормированная на $amc\omega_{\text{л}}$; $f_{\text{э}}$, $f_{\text{п}}$ и $f_{\text{ф}}$ — функции распределения электронов, позитронов и фотонов соответственно, нормированные таким образом, что $\int f_{\text{э,п,ф}}(\mathbf{r},\mathbf{p})d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p} = N_{\text{э,п,ф}}$, где $N_{\text{э}}$, $N_{\text{п}}$, $N_{\text{ф}}$ — число электронов, позитронов и фотонов соответственно; $w(\mathbf{p}'\to\mathbf{p})dp$ — вероятность в единицу времени для электрона с моментом $\mathbf{p}'$ излучить фотон и перейти в состояние с импульсом $(p, p+dp)$, направленным параллельно $\mathbf{p}'$; $\tilde{w}(\mathbf{p}'\to\mathbf{p})dp$ — вероятность в единицу времени для фотона с импульсом $\mathbf{p}'$ распасться с созданием электрон-позитронной пары, в которой импульс электрона лежит в интервале $(p, p+dp)$ и направлен параллельно $\mathbf{p}'$, а импульс позитрона равен разности между импульсом фотона и электрона. Зависимости $f_{\text{э,п,ф}}$, $\mathbf{F}$ от t и зависимости w, $\tilde{w}$ от $\mathbf{F}$ опущены для упрощения выражений. Правые части уравнений (12) и (13) описывают излучение фотонов и рождение пар. В частности, первое слагаемое в правой части уравнения (12) описывает создание электронов с импульсом $\mathbf{p}$ за счет распада фотонов с импульсами $p' > p$, второе и третье слагаемые описывают возрастание и убывание функции распределения из-за излучения фотонов. Первое слагаемое в правой части уравнения (13) описывает распад фотонов, а последние два слагаемых описывают увеличение числа фотонов вследствие их излучения позитронами и электронами.

Для каскада, развивающегося во вращающемся электрическом поле, чтобы исключить явную зависимость силы от времени в уравнениях (12)—(13), сделаем замену переменных $p_x, p_y \to p, \psi$:

$$\begin{aligned} g_{\text{э,п,ф}}(t,p,\psi) &= p f_{\text{э,п,ф}}(t,p_x,p_y) = \\ &= p f_{\text{э,п,ф}}(t,-p\cos(t+\phi_0-\psi),-p\sin(t+\phi_0-\psi)). \end{aligned} \tag{14}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\text{э,п}}}{\partial t} &= -\frac{\partial g_{\text{э,}n}}{\partial \psi} \pm \frac{\sin\psi}{p}\frac{\partial g_{\text{э,п}}}{\partial \psi} \mp p\cos\psi \frac{\partial}{\partial p}\frac{g_{\text{э,п}}(p,\psi)}{p} + \\ &+ \int_p^\infty \frac{p}{p'} g_{\text{ф}}(p',\psi)\tilde{w}(p'\to p,\psi)dp' + \int_p^\infty \frac{p}{p'} g_{\text{э,п}}(p',\psi) w(p'\to p,\psi)dp' - W g_{\text{э,п}}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\frac{\partial g_{\text{ф}}}{\partial t} = -\frac{\partial g_{\text{ф}}}{\partial \psi} - \tilde{W} g_{\text{ф}} + \int_p^\infty [g_{\text{э}}(p',\psi) + g_{\text{п}}(p',\psi)] \frac{p}{p'} w(p'\to p'-p,\psi)dp', \tag{16}$$

где $g_{\text{э,п,ф}}$, W, $\tilde{W}$ взяты в точке (p,ψ). Вероятности w и $\tilde{w}$ определяются уравнениями (4) и (5). Уравнения (15), (16) полностью описывают эволюцию функций распределения в импульсном пространстве при развитии электромагнитного каскада во вращающемся электрическом поле.

В общем случае уравнения (15), (16) зависят от двух параметров: периода вращения и напряженности лазерного поля. Однако можно показать, что в некоторых случаях уравнения могут быть упрощены. Предположим, характерное время роста числа частиц в каскаде много меньше периода лазерного поля $\Gamma >> 1$. В этом случае можно показать [11], что функция распределения электронов, позитронов и фотонов существенно отлична от нуля только в областях, где $|\sin\psi|=1$. Это предположение позволяет привести уравнения для функций распределения к такому виду, при котором частота вращения поля в них не входит. Для определенности рассмотрим область, соответствующую $|\psi|=1$. В данной области можно воспользоваться приближенными соотношениями $\cos\psi\to 1$, $\sin\psi\to\psi$. В получающихся при этом уравнениях для функций распределения произведем замену $t=\beta\hat{t}$, $p=\beta\hat{p}$, $\psi=\beta\hat{\psi}$, где β — произвольная константа. Эта замена не меняет ничего, кроме параметра $\chi\approx\hbar a^2 p\psi=\hbar a^2\beta^2\hat{p}\hat{\psi}$. Выбирая $\beta=\hbar^{-1/2}a^{-1}$, получаем $\chi=\hat{p}\hat{\psi}$, уравнения для функции распределения при этом зависят только от параметра $\mu=\dfrac{\hbar a}{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{E_0}{E_{\text{кр}}}$ и не зависят от частоты $\omega_{\text{л}}$ и, следовательно, $\lambda_{\text{л}}$. Таким образом, зависимость различных характеристик каскада от длины волны $\lambda_{\text{л}}$ определяется только законами масштабирования. Например, из них следует, что для фиксированной напряженности поля скорости роста при разных частотах вращения относятся следующим образом:

$$\frac{\Gamma(I,\lambda_{\text{л},1})}{\Gamma(I,\lambda_{\text{л},2})}=\sqrt{\frac{\lambda_{\text{л},1}}{\lambda_{\text{л},2}}}. \tag{17}$$

Эта зависимость находится в хорошем согласии с результатами численного моделирования (рис. 5). Рассматривая высокоэнергетическую часть функций распределения с $\chi>>1$, можно рассчитать инкремент роста числа частиц в каскаде и их функцию распределения [11].

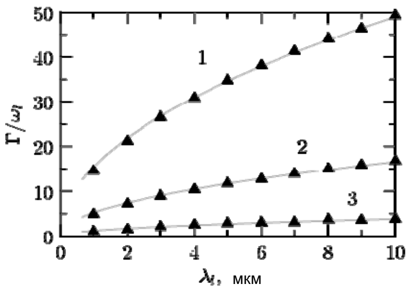


Рис. 5. Зависимость скорости роста от длины волны. Сплошные линии соответствуют среднеквадратичным аппроксимациям $\Gamma\propto\lambda_{\text{л}}^{1/2}$ для результатов численного моделирования (треугольники). Линия *1* — интенсивности $I=10^{29}$ Вт / см^2, линия *2* — $I=10^{27}$ Вт / см^2, линия *3* — $I=10^{25}$ Вт / см^2, где $I=cE_0^2/4\pi$

* * *

Разработанные численная и аналитическая модели показывают, что пробой физического вакуума в результате развития электромагнитных каскадов возможен уже при лазерных интенсивностях, которые могут быть достигнуты в лазерных системах ближайшего будущего. В результате развития каскада образуется плотная и горячая электрон-позитронная плазма, при этом большая часть лазерной энергии переходит в энергию гамма-квантов, что может быть использовано для создания мощных источников гамма-излучения.

Результаты получены при проведении поисковой научно-исследовательской работы в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 годы (соглашение № 8835), при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 2012-220-03-388) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-02-00886).

Литература

1. *Yanovsky, V.* Ultra-high intensity — 300-TW laser at 0.1 Hz repetition rate / V. Yanovsky, V. Chvykov, G. Kalinchenko, P. Rousseau, T. Planchon, T. Matsuoka, A. Maksimchuk, J. Nees, G. Cheriaux, G. Mourou, and K. Krushelnick // Optic Express. — 2008. — V. 16, is. 3. — P. 2109—2114.

2. *Nerush, E. N.* Laser Field Absorption in Self-Generated Electron-Positron Pair Plasma / E. N. Nerush, I. Yu. Kostyukov, A. M. Fedotov, N. B. Narozhny, N. V. Elkina, H. Ruhl // Phys. Rev. Lett. — 2011. — V. 106. — P. 035001-1—4.

3. *Ridgers, C. P.* Dense Electron-Positron Plasmas and Ultraintense γ rays from Laser-Irradiated Solids / C. P. Ridgers, C. S. Brady, R. Duclous, J. G. Kirk, K. Bennett, T. D. Arber, A. P. L. Robinson, and A. R. Bell // Phys. Rev. Lett. — 2012. — V. 108. — P. 165006-1—5.

4. *Bell, A. R.* Possibility of Prolific Pair Production with High-Power Lasers / A. R. Bell and J. G. Kirk // Phys. Rev. Lett. — 2008. — V. 101, № 20. — Article 200403. — P. 1—4.

5. *Fedotov, A. M.* Limitations on the Attainable Intensity of High Power Lasers / A. M. Fedotov, N. B. Narozhny, G. Mourou, G. Korn // Phys. Rev. Lett. — 2010. — V. 105, № 8. — Article 080402. — P. 1—4.

6. *Heisenberg, W.* Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons / W. Heisenberg and H. Euler // Z. Phys. — 1936. — V. 98. — S. 714—732.

7. *Schwinger, J.* On gauge invariance and vacuum polarization / J. Schwinger // Phys. Rev. — 1951. — V. 82. — P. 664.

8. *Wheeler, J. A.* Collision of two light quanta / J. A. Wheeler, G. Breit // Phys. Rev. — 1934. — V. 46. — P. 1087.

9. *Baier, V. N.* Electromagnetic Processes at High Energies in Oriented Single Crystals / V. N. Baier, V. M. Katkov, and V. M. Strakhovenko. — Singapore : World Scientific, 1998. — P. 377.

10. *Nerush, E. N.* Laser Field Absorption in Self-Generated Electron-Positron Pair Plasma / E. N. Nerush, I. Yu. Kostyukov, A. M. Fedotov, N. B. Narozhny, N. V. Elkina, H. Ruhl // Phys. Rev. Lett. — 2011. — V. 106. — P. 035001-1—4.

11. *Nerush, E. N.* Analytical model for electromagnetic cascades in rotating electric field / E. N. Nerush, V. F. Bashmakov, I. Yu. Kostyukov // Phys. Plasmas. — 2011. — V. 18. — P. 083107-1—14.

ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ СПЕКТРА ВОЗБУЖДАЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ОБРАЩЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ РАССЕЯНИИ СВЕТА — НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН

И. Г. Зубарев

Сейчас известно много физических механизмов, приводящих к вынужденному рассеянию лазерных световых пучков. Но открыто вынужденное рассеяние света было на примере комбинационного рассеяния в 1962 году [1]. Как писали С. А. Ахманов и Р. В. Хохлов [2], для построения теории вынужденного комбинационного рассеяния света (ВКР) не понадобилось привлекать никаких новых физических представлений по сравнению с теми, что использовались в теории спонтанного рассеяния. Поэтому в линейном режиме без насыщения накачки усиление стоксовой волны описывается обычным экспоненциальным законом

$$I_{\text{с}}(z) = I_{\text{с}0}\exp(gI_{\text{н}}z).$$

Здесь $I_{\text{с}0}$ — либо внешний входной стоксов сигнал, либо интенсивность спонтанных шумов, приведённых ко входу области взаимодействия; g — удельный инкремент усиления; $I_{\text{н}}$ — интенсивность возбуждающего излучения. При этом, однако, авторы работы [2] неявно предполагали, что в обоих случаях речь идёт о монохроматическом возбуждающем излучении. Поэтому само собой разумеющимся считалось, что если ширина линии накачки $\Delta\nu_{\text{н}}$ много больше ширины линии спонтанного комбинационного рассеяния $\Delta\nu_{\text{скр}}$, то удельный инкремент усиления g будет меньше в соответствующее число раз:

$$g = g_0 \frac{\Delta\nu_{\text{скр}}}{\Delta\nu_{\text{н}}},$$

где g_0 — удельный инкремент усиления при монохроматической накачке, как и в случае спонтанного рассеяния. Сначала даже появились сообщения об экспериментальном наблюдении указанного соотношения. Но в дальнейшем эти результаты не подтвердились.

1. ВКР: экспериментальные результаты

В 1969 году мы осуществили специальное экспериментальное исследование данного вопроса [3]. Для этого были измерены пороговые характеристики ВКР излучения неодимовых лазеров с различными ширинами спектральных линий в жидком азоте. Ширина линии спонтанного комбинационного рассеяния в жидком азоте $\Delta\nu_{\text{скр}} = 0{,}11$ см$^{-1}$. В качестве накачки использовались неодимовые лазеры с различными активными матрицами и с различными модуляторами добротности резонаторов — от насыщающегося красителя до ячейки Керра. В результате мы получили лазерные источники, ширины линий которых дискретно изменялись в диапазоне 10^{-3} см$^{-1}$ << $\Delta\nu_{\text{скр}}$ << 50 см$^{-1}$. Как показали измерения (рис. 1), пороговые интенсивности возбуждающих излучений практически не зависели от их ширин линий.

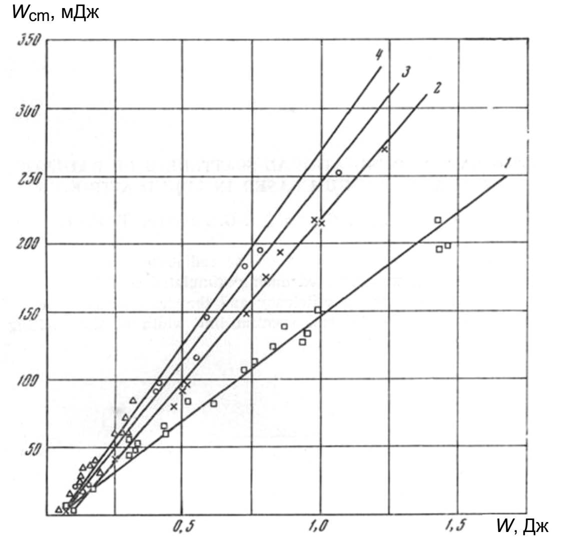


Рис. 1. Зависимость энергии стоксовой компоненты ВКР в жидком азоте от энергии импульсов накачки неодимовых лазеров с различными спектральными ширинами линий: *1* — вращающаяся призма, *2* — ячейка Керра, *3* — ячейка Керра с насыщающимся фильтром, *4* — $CaWO_4{:}Nd^{3+}$; вращающаяся призма

В результате предпринятых многочисленных экспериментальных и теоретических исследований по выяснению особенностей взаимодействия широкополосного лазерного излучения с комбинационно-активными средами было установлено, что наибольшей информативностью обладают эксперименты по усилению внешнего стоксова сигнала в поле широкополосной накачки. В этом случае можно независимо изменять не только спектральные ширины взаимодействующих волн, но также и их центральные частоты. При этом теоретические исследования практически всегда осуществляются в данном (усилительном) режиме взаимодействия волн.

На рис. 2 представлена схема соответствующей экспериментальной установки [4]. Она состоит из двух лазеров на неодимовом стекле ОКГ-I и

ОКГ-II с модуляцией добротности резонаторов электрооптическими ячейками Керра. Это обеспечивало синхронизацию их лазерных импульсов. Ширины спектральных линий генерируемых импульсов составляли величину порядка $\Delta\nu_н \approx 20$ см$^{-1}$. Излучение лазеров (одновременно или каждого по отдельности) могло захватываться узкополосным сигналом от квазинепрерывного неодимового лазера *1*. В этом случае ширина спектральной линии генерируемого излучения лазеров с модулируемой добротностью резонаторов составляла величину $\Delta\nu_н \approx 0{,}01$ см$^{-1}$.

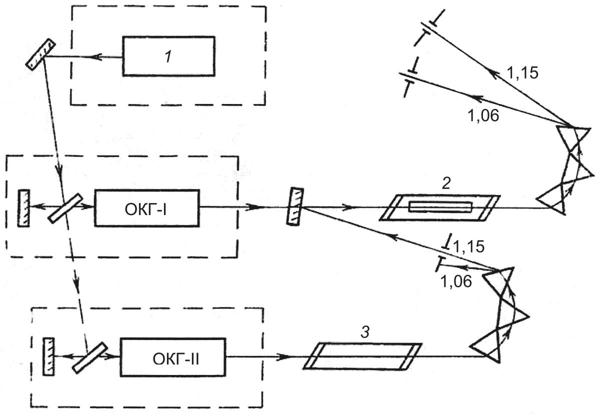


Рис. 2. Схема экспериментальной установки для измерения усиления стоксова сигнала в поле широкополосного возбуждающего излучения

В качестве комбинационно активной среды в данном эксперименте использовалась жидкая SF_6 с шириной спонтанной линии $\Delta\nu_{скр} = 1$ см$^{-1}$. Излучение ОКГ-II использовалось для получения стоксова сигнала в кювете *3*. С помощью дисперсионных призм и диафрагмы стоксов сигнал выделялся из непреобразованной накачки и подавался в качестве входного сигнала в усилительную кювету *2*. Возбуждающее излучение формировалось импульсом лазера ОКГ-I и заводилось в усилительную кювету *2* через селективное зеркало. Для обеспечения эффективного пространственного перекрытия взаимодействующих волн в усилительную кювету *2* был вставлен светопровод. Усиленное излучение выделялось из накачки также с помощью спектральных призм и диафрагмы.

На рис. 3 представлены соответствующие экспериментальные результаты. Во-первых, зависимость логарифма коэффициента усиления узкополосного стоксова сигнала ($\Delta\nu_с << \Delta\nu_{скр}$), т. е. инкремент усиления, от интенсивности как узкополосной (●), так и широкополосной (○, Δ, □) накачки (рис. 3, *а*). Причём график *1* (○) получен в том случае, когда частота внешнего усиливаемого стоксова сигнала равна резонансной стоксовой частоте центра спектральной линии возбуждающего излучения; график *2* (Δ) соответствует отстройке частоты усиливаемого стоксова сигнала от резонансной стоксовой частоты центра спектральной линии возбуждающего излучения на 13 см$^{-1}$, а график *3* (□) — при соответствующей отстройке на 24 см$^{-1}$. На рис. 3, *б* представлены спектры усиленных стоксовых сигналов для перечисленных выше случаев в режимах, близких к насыщению.

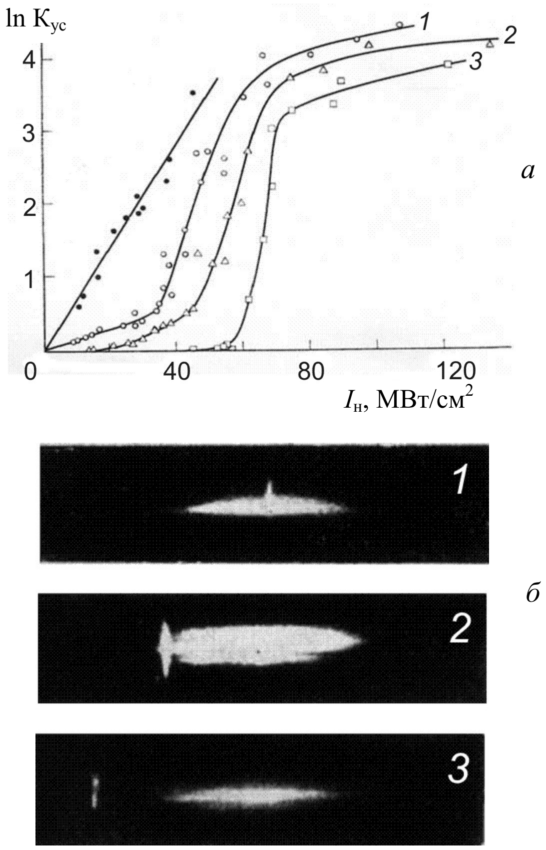


Рис. 3. Зависимость инкремента усиления узкополосного стоксова сигнала от интенсивности узкополосной (●) и широкополосной (○, Δ, □) накачки при различных частотных отстройках (*а*) и соответствующие спектрограммы (*б*)

Эти результаты показывают основные особенности по взаимодействию узкополосного стоксова сигнала с широкополосной накачкой. Во-первых, наличие так называемой критической интенсивности $I_{кр}$ в случае немонохроматического возбуждающего излучения. Когда интенсивность широкополосной накачки меньше критической, усиление узкополосного стоксова сигнала определяется резонансной с ним (в пределах ширины спонтанной линии комбинационного рассеяния) долей накачки. Эта ситуация полностью аналогична спонтанному комбинационному рассеянию, когда, как отмечал Л. О. Мандельштам, каждая спектральная компонента возбуждающего излучения порождает свою линию спонтанного рассеяния. Если интенсивность широкополосной накачки больше критической, то инкремент усиления узкополосного стоксова сигнала определяется всей интегральной интенсивностью широкополосной накачки и приближается к значению для монохроматической накачки равной интенсивности.

Что касается спектра усиленного стоксова сигнала, то он напоминает спектр возбуждающего излучения. Однако, с какой точностью при этом воспроизводится спектр накачки, из этих данных определить сложно. Чтобы ответить на этот вопрос, было сформировано возбуждающее излучение специального спектрального состава. Возбуждающее излучение состояло из набора эквидистантно расположенных спектральных компонент. Ширина каждой спектральной компоненты при этом была меньше 0,1 см$^{-1}$, а расстояние между ними равнялось 7 см$^{-1}$. Напомним, что в качестве ВКР активной среды использовалась сжиженная SF_6 с шириной линии спонтанного рассеяния $\Delta\nu_{\text{скр}} = 1$ см$^{-1}$.

На рис. 4 показаны спектры входных стоксовых сигналов (верхние спектрограммы) и усиленных выходных стоксовых сигналов при интенсивности широкополосной накачки $I_{\text{н}} >> I_{\text{кр}}$ (нижние спектрограммы). Видно, что вне зависимости от формы спектрального контура входного стоксова сигнала спектр усиленного выходного сигнала при $I_{\text{н}} >> I_{\text{кр}}$ полностью воспроизводит спектр накачки.

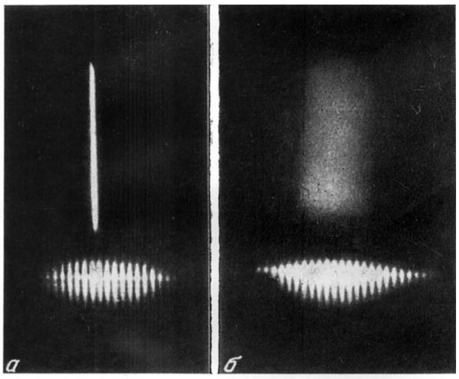


Рис. 4. Спектрограммы входных стоксовых сигналов различной спектральной ширины (*вверху*) и соответствующих им усиленных выходных сигналов (*внизу*) при интенсивности возбуждающего излучения много больше критической величины

Таким образом, эти результаты наглядно показывают, что при взаимодействии широкополосного возбуждающего излучения с комбинационно активными средами имеется некая дополнительная нелинейность, которая определяет изменение удельного инкремента усиления при возрастании $I_{\text{н}}$ через критическое значение $I_{\text{кр}}$, а также формирует спектр усиленного сигнала при $I_{\text{н}} >> I_{\text{кр}}$.

2. ВКР: теоретическое описание

При ВКР длины волн накачки и стоксовой компоненты обычно отличаются значительно. И поэтому при широкополосной накачке из-за дисперсии групповых скоростей волн в задаче возникает такой геометрический параметр, как длина когерентного взаимодействия волн (корреляционная длина) $l_{\text{к}}$:

$$l_{\text{к}} = \frac{1}{\nu \cdot \Delta\omega_{\text{н}}}; \quad \nu = \left| \frac{1}{v_{\text{с}}} - \frac{1}{v_{\text{н}}} \right|,$$

где $\Delta\omega_{\text{н}}$ — ширина линии возбуждающего излучения; $v_{\text{с}}$ и $v_{\text{н}}$ — групповые скорости стоксовой волны и волны накачки соответственно. Если длина активной области $L << l_{\text{к}}$, то волны взаимодействуют когерентно и процесс происходит так же, как и при монохроматической накачке. Многие теоретические работы были выполнены именно в этом приближении. Однако большинство экспериментальных работ, в том числе и описанные выше, выполнены в другом предельном случае — $L < l_{\text{к}}$. И именно в этом случае в полной мере проявляются все особенности взаимодействия волн при ВКР широкополосной накачки.

Наиболее адекватные результаты, позволившие не только описать весь процесс взаимодействия волн в данном случае, но и выяснить физический механизм подобного поведения, удалось получить, используя следующую модель [5]. Реальные спектры возбуждающего излучения и стоксовой волны представляются в виде набора эквидистантно расположенных компонент с расстоянием между ними $\gamma << \Delta\omega_{\text{скр}}$ — ширины линии спонтанного комбинационного рассеяния. При этом $\gamma \cdot T_2 << 1$, где T_2 — время поперечной релаксации молекулярных колебаний. Поэтому в материальном уравнении можно пренебречь нерезонансными членами и волну молекулярных колебаний считать одночастотной, что значительно упрощает анализ. В итоге амплитуды волн представляются в виде

$$E_{\text{н}} = \sum_n \mathcal{E}_n(z) \mathrm{e}^{-i(k_{\text{н}} + n\gamma/v_{\text{н}})z} \cdot \mathrm{e}^{-i(\omega_{\text{н}} + n\gamma)t} + \text{к. с.}$$

$$E_{\text{с}} = \sum_m e_m(z) \mathrm{e}^{-i(k_{\text{с}} + m\gamma/v_{\text{с}})z} \cdot \mathrm{e}^{-i(\omega_{\text{с}} + m\gamma)t} + \text{к. с.} \qquad (1)$$

$$Q = q\mathrm{e}^{i\Omega t} + \text{к. с.}$$

Здесь $k_н$, $k_с$ — волновые векторы, а $\omega_н$ и $\omega_с$ — центральные частоты накачки и стоксовой компоненты соответственно; $\Omega = (\omega_н - \omega_с)$ — частота молекулярных колебаний; n, m = 0, ±1, ±2, … ±M; $\mathcal{E}_n(z), e_m(\text{z})$ — медленно меняющиеся комплексные амплитуды спектральных компонент соответствующих волн; $v_н$, $v_с$ — групповые скорости волн.

Эта модель [4, 6] позволяет описывать режим усиления внешнего стоксова сигнала. Используя представление волн (1), из уравнений Максвелла можно получить следующую систему уравнений для медленных амплитуд $\mathcal{E}_n, e_m$ [4]:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_n}{dz} &= -\frac{\omega_н}{\omega_с}\frac{g}{2}\, e_n \sum\nolimits_m \mathcal{E}_m e_m^* \mathrm{e}^{i(n-m)\gamma v z}, \\ \frac{de_n}{dz} &= \frac{g}{2}\, \mathcal{E}_n \sum\nolimits_m e_m \mathcal{E}_m^* \mathrm{e}^{-i(n-m)\gamma v z}, \end{aligned} \tag{2}$$

где g — удельный инкремент усиления по интенсивности (в сантиметрах на мегаватт) стоксовой волны при монохроматической накачке; при этом интенсивности волн равны $I_н = \sum_n |\mathcal{E}_n|^2$; $I_с = \sum_m |e_m|^2$.

В уравнениях (2) выделим действительные и мнимые части, для чего представим амплитуды волн в виде

$$\mathcal{E}_n = A_n \mathrm{e}^{-i\Phi_n}; \quad e_m = a_m \mathrm{e}^{-i\tilde{\varphi}_m} = a_m \mathrm{e}^{-i(m\gamma v z + \varphi_m)}. \tag{3}$$

Подставим эти выражения в систему (2) и после разделения действительных и мнимых частей получим:

$$\begin{aligned} \frac{dA_n}{dz} &= -\frac{\omega_н}{\omega_с}\frac{g}{2} a_n \sum A_m a_m \cos(\Delta\varphi_n - \Delta\varphi_m), \\ \frac{da_n}{dz} &= \frac{g}{2} A_n \sum a_m A_m \cos(\Delta\varphi_n - \Delta\varphi_m), \\ \frac{d\Delta\varphi_n}{dz} &= n\gamma v - \frac{g}{2}\left(\frac{A_n}{a_n} - \frac{\omega_н}{\omega_с}\frac{a_n}{A_n}\right) \sum A_m a_m \sin(\Delta\varphi_n - \Delta\varphi_m), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\Delta\varphi_n = \Phi_n - \tilde{\varphi}_n$.

В рассматриваемых нами экспериментах по усилению внешнего стоксова сигнала амплитуда этого сигнала на входе в область взаимодействия всегда много меньше накачки, $a_{n0} << A_{n0}$. Поэтому в зависимости от интенсивности входного возбуждающего излучения $I_{н0}$ в предельных случаях возможны два режима взаимодействия. Первый, так называемый некогерентный режим рассеяния, имеет место, когда

$$n\gamma v > \frac{g}{2}\frac{A_{n0}}{a_{n0}} \sum A_{m0} a_{m0}. \tag{5}$$

В этом случае последнее уравнение системы (4) имеет решение

$$\Delta\varphi_n = n\gamma v z + \Delta\varphi_{n0}.$$

В результате в правой части первых двух уравнений этой системы при $m \neq n$ появляются осциллирующие множители. В рассматриваемом нами случае $L > l_к$ эти члены дадут нулевой вклад в усиление и взаимодействовать между собой будут только резонансные члены с $m = n$. При этом система (4) распадается на $2M + 1$ пар независимых уравнений:

$$\frac{dA_n}{dz} = -\frac{\omega_н}{\omega_с}\frac{g}{2}a_n^2 A_n; \quad \frac{da_n}{dz} = \frac{g}{2}A_n^2 a_n, \tag{6}$$

из которых следует, что каждая спектральная компонента стоксова сигнала усиливается с инкрементом, определяемым интенсивностью только резонансной с ней компонентой накачки.

Уравнения (4) зависят только от разности фаз $\Delta\varphi_n$; поэтому можно считать, что $\Phi_n = \Phi_{n0}$, и тогда из полученного решения для фаз $\Delta\varphi_n = n\gamma v z + \Delta\varphi_{n0}$ и выражения для амплитуд (3) следует, что фазы взаимодействующих волн постоянны и равны начальным значениям: $\Phi_n = \Phi_{n0}$, $\tilde{\varphi}_n = \varphi_{n0}$. С учётом этого обстоятельства из выражений для спектральных компонент волн (1) видно, что накачка и стоксов сигнал движутся со своими групповыми скоростями $\nu_н$ и $\nu_с$ соответственно.

Рассмотрим теперь другой предельный режим взаимодействия, который, по изложенным ниже причинам, называется когерентным. В этом случае в результате взаимодействия волн устанавливаются такие разности фаз $\Delta\varphi_n$, при которых правая часть последнего уравнения системы (4) обращается практически в ноль, т. е. уравнение имеет решение $\Delta\varphi_n \approx \mathrm{const} = C_n$. Выясним условия, необходимые для установления данного режима взаимодействия:

$$n\gamma v \approx \frac{g}{2}\left(\frac{A_n}{a_n} - \frac{\omega_н}{\omega_с}\frac{a_n}{A_n}\right)\sum A_m a_m \sin(\Delta\varphi_n - \varphi_m).$$

Умножим это равенство с обеих сторон на $A_n a_n$ и просуммируем по n (обозначим $\Delta\varphi_n - \Delta\varphi_m = \Theta_{nm}$):

$$\sum_n n\gamma v A_n a_n \approx \frac{g}{2}\left[\sum_n \left(A_n^2 - \frac{\omega_н}{\omega_с}a_n^2\right)\right]\sum_m A_m a_m \sin\Theta_{nm}.$$

Для оценки входящих сюда сумм заменим их максимальными значениями, в результате чего получим

$$(n\gamma v)^{\max} \approx \frac{g}{2}\left(I_н - \frac{\omega_н}{\omega_с}I_с\right)(\sin\Theta_{nm})^{\max}.$$

Максимальное значение $(n\gamma\nu)^{\max} = M\gamma\nu = \dfrac{\Delta\omega_{\text{н}}\nu}{2}$, поэтому

$$\left(I_{\text{н}} - \frac{\omega_{\text{н}}}{\omega_{\text{с}}} I_{\text{с}}\right)(\sin\Theta_{nm})^{\max} \approx \frac{\Delta\omega_{\text{н}}\nu}{g} = \frac{2\pi\nu}{g}\Delta\nu_{\text{н}} = I_{\text{кр}}. \tag{7}$$

Отсюда следует, что если на входе активной области выполняются неравенства $I_{\text{н}0} > I_{\text{кр}}$; $G_{\text{к}} = gI_{\text{н}0}l_{\text{к}} > 1$, то после установления решения входящие в уравнение (4) тригонометрические функции приблизительно будут равны $\cos(\Delta\varphi_n - \Delta\varphi_m) \approx 1$; $\sin(\Delta\varphi_n - \Delta\varphi_m) << 1$. В итоге система (4) принимает такой же вид, как и в случае отсутствия дисперсии:

$$\frac{dA_n}{dz} = -\frac{\omega_{\text{н}}}{\omega_{\text{с}}}\frac{g}{2}a_n \sum A_m a_m, \quad \frac{da_n}{dz} = \frac{g}{2}A_n \sum A_m a_m. \tag{8}$$

В работе [4] получено решение аналогичной системы уравнений, т. е. решение системы уравнений (2) в пренебрежении дисперсией ν = 0, что фактически соответствует случаю $L < l_{\text{к}}$. Решение очень громоздко. Для наших целей достаточно решить только второе уравнение системы (8) в приближении заданного поля накачки, т. е. $A_n = A_{n0} = \text{const}$. Это решение имеет вид

$$a_n(z) = a_{n0} + A_{n0}\frac{\sum A_{m0}a_{m0}}{I_{\text{н}0}}\left(e^{\frac{gI_{\text{н}0}}{2}z} - 1\right), \tag{9}$$

и оно описывает все особенности когерентного режима взаимодействия. Усиление каждой спектральной компоненты стоксовой волны определяется всей интегральной интенсивностью накачки. Если во входном стоксовом сигнале какие-то спектральные компоненты отсутствуют, но имеются резонансные им спектральные компоненты в накачке, то в выходном стоксовом сигнале эти компоненты будут присутствовать. То есть спектр выходного стоксова сигнала будет воспроизводить спектр возбуждающего излучения.

Анализ решения (9) приводит ещё к одному важному выводу, который имеет место, когда входной широкополосный стоксов сигнал и широкополосная накачка получены от независимых лазерных источников. В этом случае корреляция временных флуктуаций взаимодействующих волн на входе в среду будет изменяться от выстрела к выстрелу. Это приведёт к повышенному разбросу измеренных коэффициентов усиления, что в решении (9) описывается коррелятором $\sum A_{m0}a_{m0}$. Данный эффект наблюдался экспериментально и получил соответствующее объяснение [6]. И ещё одно замечание к этому же вопросу. В некоторых работах делался общий вывод о возможности так называемого интерференционного подавления усиления широкополосного стоксова сигнала при ВКР широкополосной накачки. Авторы считали, что если на входе в активную область временные флуктуации стоксова сигнала и возбуждающего излучения ортогональны (в формуле (9) это означает равенство нулю $\Sigma A_{m0}a_{m0} = 0$), то это состояние сохранится и при их распространении по активной среде. Однако, как видно из последнего уравнения системы (4), из-за наличия дисперсии это состояние ортогональности разрушится при распространении сигналов на расстояние $z > l_к$.

В чём же физический механизм когерентного взаимодействия широкополосных сигналов? Для ответа на этот вопрос рассмотрим фазы взаимодействующих волн. При $I_{н0} > I_{кр}$ последнее уравнение системы (4) имеет решение $\Delta\varphi_l \approx C_l$, откуда получаем, что $\Phi = \Phi_l$, $\varphi_l \approx \Phi_l - C_l$. Подставляя эти значения в выражения для медленных амплитуд (3), а последние, в свою очередь, в разложения полей на спектральные компоненты (1), получаем, что фазы спектральных компонент взаимодействующих волн практически постоянны и связаны между собой определёнными соотношениями $\Phi_l - \varphi_l \approx C_l$, причём групповые скорости распространения сигналов при этом также равны друг другу и равны $v_н$. Таким образом, условие $I_{н0} > I_{кр}$ соответствует когерентному режиму рассеяния, когда осуществляется параметрический захват фаз немонохроматических сигналов и их взаимодействие определяется всей интегральной интенсивностью накачки.

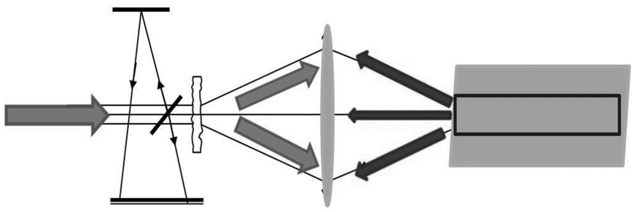
Такой режим сохраняется до тех пор, пока не произойдёт существенной переработки накачки в стоксов сигнал, а не определяется, как обычно считалось, длиной группового синхронизма волн $l_к$. Именно поэтому мы можем наблюдать существенное преобразование немонохроматической накачки и воспроизведение её спектра в усиленном выходном стоксовом сигнале.

И, наконец, воспроизведение спектра возбуждающего излучения в выходном стоксовом сигнале при когерентном режиме взаимодействия означает воспроизведение в стоксовом сигнале временных флуктуаций широкополосной накачки.

3. Обращение волнового фронта (ОВФ) при вынужденном рассеянии Мандельштама — Бриллюэна (ВРМБ): эксперимент

В предыдущих разделах мы видели, что сам по себе нелинейный процесс ВКР в случае возбуждающего излучения с хаотической временной структурой (широкополосная накачка с $\Delta v_н >> v_{скр}$) из-за параметрического взаимодействия различных спектральных компонент обладает дополнительной нелинейностью. Эта нелинейность обусловливает наличие критической интенсивности, которая определяет переход от некогерентного к когерентному режиму рассеяния, а также воспроизведение в выходном стоксовом излучении хаотической временной структуры накачки (спектра накачки). Ясно, что если мы будем иметь дело с излучением с большой расходимостью (широким угловым спектром), обусловленной хаотическим пространственно неоднородным распределением интенсивности в поперечном сечении пучка, то при вынужденном рассеянии такого излучения из-за параметрического взаимодействия различных угловых спектральных компонент также должны возникнуть некоторые особенности. Наиболее ярким проявлением этих особенностей стало обращение волнового фронта пространственно неоднородного излучения при ВРМБ. Конечно, исторически исследования ВКР широкополосной накачки и ОВФ пространственно неоднородного излучения при ВРМБ проходили совершенно независимо, и понятие общности физической природы этих явлений пришло много позже.

Многие исследователи ВРМБ в первых работах отмечали, что отражённое назад стоксово излучение распространяется практически в том же конусе, что и падающее возбуждающее излучение. Однако вопрос о точности этого совпадения долгое время оставался открытым. Его решил В. В. Рагульский, поставив очень убедительный специальный эксперимент [7].

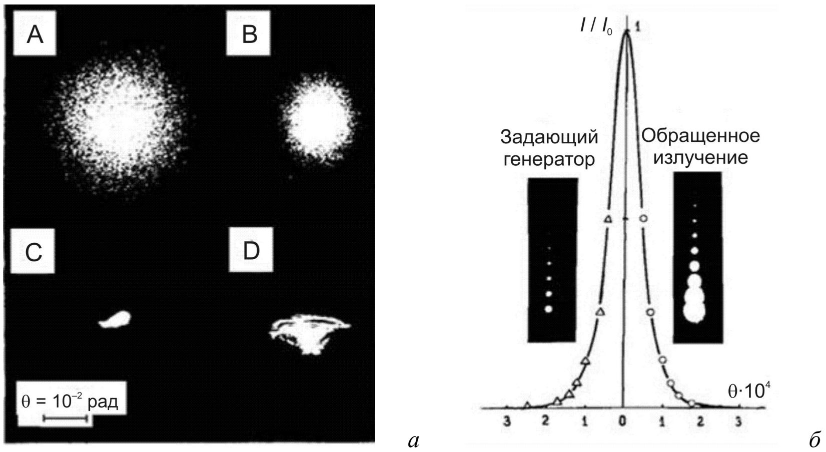


$\Theta_д \approx 10^{-4}$ рад $\qquad$ $\Theta_н \approx 10^{-2}$ рад

Рис. 5. Блок-схема экспериментальной установки для наблюдения явления обращения волнового фронта излучения при вынужденном рассеянии Мандельштама — Бриллюэна

Схема эксперимента представлена на рис. 5. Излучение одночастотного и одномодового рубинового лазера с дифракционной расходимостью $\Theta_д \approx 10^{-4}$ рад и с модулированной добротностью пропускалось через пространственно неоднородную фазовую пластинку. В результате расходимость излучения возрастала до величины $\Theta_н \approx 10^{-2}$ рад. Засвеченная область фазовой пластинки линзой переносилась на вход светопровода квадратного сечения. Светопровод располагался в кювете со сжатым метаном (p = 150 атм). С помощью делительной пластинки и зеркала на экран выводилось как входное одномодовое излучение, так и отражённое из кюветы стоксово излучение. Причём, как видно из схемы эксперимента, отражённое назад стоксово излучение проходило через фазовую пластинку и только потом отводилось на экран. Затем сравнивались пространственные и угловые характеристики полученных на экране распределений.

На рис. 6, *б* показаны полученные нами результаты при воспроизведении эксперимента с неодимовым лазером. Левая половина углового распределения относится к входному излучению одномодового лазера, а правая — к отражённому назад и прошедшему через фазовую пластинку стоксову излучению. Видна их полная идентичность. Однако такой результат получается только с излучением, обладающим практически прямоугольным угловым спектром. Пример такого спектра показан на рис. 6, *а* в правом верхнем углу. В левом верхнем углу показан угловой спектр излучения, прошедшего через другую область нашей фазовой пластинки. Нижний ряд представляет угловые спектры излучения, вызванные тепловой турбулентностью воздуха (спиртовка под областью прохождения луча) или свилями неоднородного рубинового кристалла.



а *б*

Рис. 6. Фотографии некоторых характерных угловых спектров возбуждающего излучения (*а*) и угловое распределение интенсивности излучения задающего генератора (левый график) и интенсивности отражённой при ВРМБ стоксовой волны (правый график) (*б*)

Результаты данного эксперимента свидетельствуют о том, что в отражённом стоксовом излучении при прохождении фазовой пластинки были скомпенсированы все фазовые неоднородности. Это означает, что выходящее из светопровода отражённое стоксово излучение имеет волновой фронт комплексно-сопряжённый волновому фронту падающего пространственно неоднородного возбуждающего излучения. Данное явление и называется обращением волнового фронта.

4. ОВФ при ВРМБ: теория

Теория данного явления была построена И. М. Бельдюгиным и В. Г. Сидоровичем независимо и одновременно [8, 9]. Так же как и во временной задаче, пространственно неоднородное поле возбуждающего излучения будем считать стационарным случайным процессом. Распределение интенсивности накачки в плоскости, проходящей через ось светопровода, можно представить в виде рис. 7. В каждом перпендикулярном сечении распределение интенсивности также является пространственно неоднородным и статистически независимым.

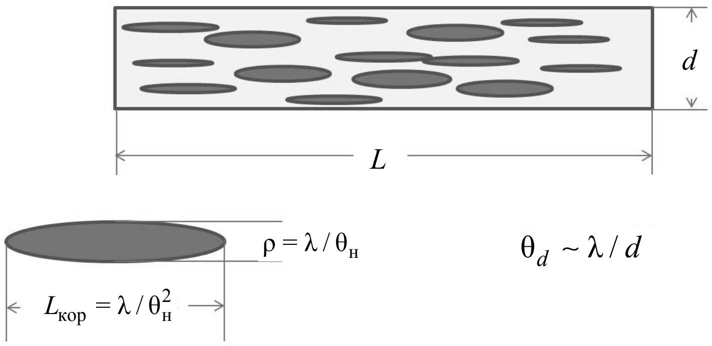


Рис. 7. Качественное представление распределения интенсивности пространственно неоднородного возбуждающего излучения в светопроводе

Из постановки эксперимента следует, что пространственно неоднородное возбуждающее излучение статистически равномерно заполняет полость с размерами $d \times d \times L$. Оси координат x, y направим вдоль рёбер светопровода, а ось z — вдоль его оси. Поля возбуждающего и рассеянного излучений в светопроводе можно разложить по его собственным модам, т. е. по плоским волнам. На боковых рёбрах светопровода выполняются периодические граничные условия по поперечным координатам. При этом предположим, что значения телесных углов, в пределах которых распространяются возбуждающее и рассеянное излучения, совпадают. В экспериментах такая ситуация может реализоваться как из-за зависимости от угла коэффициента усиления стоксовой волны, так и из-за зависимости от угла коэффициента отражения боковых стенок светопровода.

В результате световые поля накачки и стоксовой волны в светопроводе можно представить в виде следующих разложений:

$$E_н(\vec{r}) = \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(z) \exp(+i\vec{K}_{\alpha,\beta}\vec{r}),$$
$$E_с(\vec{r}) = \Sigma_{\gamma,\delta} a_{\gamma,\delta}(z) \exp(-i\vec{K}_{\gamma,\delta}). \tag{10}$$

Здесь $A_{\alpha,\beta}(z)$ и $a_{\gamma,\delta}(z)$ — медленные комплексные амплитуды плоских составляющих возбуждающего и рассеянного излучений. Разные знаки волновых векторов выбраны потому, что рассеянное и возбуждающее излучения распространяются в противоположных направлениях (сравни с (1) для ВКР при попутном распространении волн). В случае ВРМБ мы также будем считать, что модули волновых векторов равны, т. е. $\left|\vec{K}_{\text{н}}\right| = \left|\vec{K}_{\text{с}}\right| = K$. Это предположение соответствует экспериментальной ситуации, когда при величине волновых векторов $K \sim 10^5$ см$^{-1}$ их разность $\left|\vec{K}_{\text{н}}\right| - \left|\vec{K}_{\text{с}}\right| \le 1$ см$^{-1}$ для длины волны $\lambda \approx 1$ мк.

В соответствии со сделанным выше предположением о равенстве телесных углов для падающего и рассеянного излучений области изменения индексов (α, β) и (γ, δ) в системе (10) совпадают. Поэтому волновые векторы имеют следующие компоненты:

$$\vec{K}_{i,j} = \left\{K_{(i,j)x}; K_{(i,j)y}; K_{(i,j)z}\right\};\; K_{(i,j)x} = \frac{2\pi}{d} i;\; K_{(i,j)y} = \frac{2\pi}{d} j;$$

$$K_{(i,j)z} = \sqrt{K_{i,j}^2 - \left(K_{(i,j)x}^2 + K_{(i,j)y}^2\right)} = \sqrt{K_{i,j}^2 - q_{i,j}^2} \approx K_{i,j} - q_{i,j}^2 \big/ 2K_{i,j}.$$

Причём из-за ограниченности расходимости лазерного излучения число поперечных составляющих волновых векторов при разложении полей по плоским волнам в светопроводе также ограничено:

$$\sqrt{i^2 + j^2} \le \Theta_{\text{н}} / \Theta_{\text{д}} \approx d\Theta_{\text{н}} / \lambda,$$

где $\Theta_{\text{д}}$ — дифракционный угол на входной апертуре светопровода d, который разделяет по углу два ближайших волновых вектора. Для типичных экспериментальных значений параметров $d \approx 0{,}5$ см, $\Theta_{\text{н}} \approx 10^{-2}$ рад, $\lambda \approx 1$ мк получаем $\sqrt{i^2 + j^2} \le 50$.

Поскольку число поперечных составляющих волновых векторов конечно, их можно перенумеровать и обозначить одним индексом. Кроме этого, для наших целей достаточно рассмотреть данную задачу в приближении заданного поля накачки. Поэтому, используя разложения полей (10), из уравнений Максвелла стандартным образом получим уравнение

$$-2iK\Sigma_n \frac{da_n}{dz} \mathrm{e}^{-i\vec{K}_n\vec{r}} = -igK\Sigma_{p,q,r} A_p^* a_q A_r \mathrm{e}^{-i(\vec{K}_p - \vec{K}_r + \vec{K}_q)\vec{r}}.$$

При выводе этого уравнения из-за малости в экспериментах углов все $\cos\Theta_{n,p,q,r}$ полагались равными 1; и мы, как обычно, в приближении медленных амплитуд пренебрегли второй производной d^2a_n/dz^2. Умножим обе части этого уравнения на $(1/d^2)\exp(+i\vec{K}_m\vec{r})$ и проинтегрируем по поперечным координатам в пределах активной области. Воспользовавшись ортогональностью собственных мод светопровода, получим

$$\frac{da_m}{dz} = \frac{g}{2}\Sigma_{p,q,r} A_p^* a_q A_r \delta_{p-r+q-m} \exp\left[\frac{i}{2K}\left(q_p^2 - q_r^2 + q_q^2 - q_m^2\right)z\right].$$

Здесь $\delta_{p-r+q-m}$ — символ Кронекера. Правая часть этого уравнения отлична от нуля при следующих соотношениях индексов:

$$p = r,\ q = m,\ p = m,\ q = r,\ p - r + q = m;$$

$$p \neq r,\ q \neq m,\ p \neq m,\ q \neq r.$$

Выпишем каждый из соответствующих членов уравнения в явном виде:

$$\frac{da_m}{dz} = \frac{g}{2} a_m \Sigma\left|A_p\right|^2 + \frac{g}{2} A_m^* \Sigma_{q\neq m} a_q A_q + \frac{g}{2}\Sigma_{p,q\neq r,m} A_p^* a_q A_{p+q-m} \times$$
$$\times \exp\left[\frac{i}{2K}\left(q_p^2 - q_{p+q-m}^2 + q_q^2 - q_m^2\right)z\right]. \qquad (11)$$

Последний член в правой части этого уравнения соответствует сумме тех слагаемых, которые имеют не скомпенсированные по z проекции волновых векторов. Этот член осциллирует по z и при достаточно большой длине активной области в среднем должен давать нулевой (или достаточно малый) вклад в рост медленных амплитуд a_m стоксова сигнала. Оценим эту длину. При расходимости возбуждающего лазерного излучения $\Theta_н$ среднее значение поперечной составляющей волнового вектора $|\vec{q}| \approx K \sin\Theta_н \approx K\Theta_н$. Примем, что такую же величину имеет и среднее значение не скомпенсированных по z проекций волновых векторов $\overline{\left(q_p^2 - q_{p+q-m}^2 + q_q^2 - q_m^2\right)} \approx \left(K\Theta_н\right)^2$. Тогда, интегрируя последний член уравнения (11) по z, найдём, что при $K\Theta_н^2 z \gg 1$ его вклад в решение будет мал и им можно пренебречь. Член этот обусловливает параметрическую генерацию шумового стоксова излучения, амплитуда и фаза которого не имеют однозначной связи с накачкой.

Для наблюдения ВРМБ необходимо иметь полный инкремент усиления стоксовой волны $G = gI_нL \geq 25$, где $I_н$ — усреднённая по поперечному сечению светопровода интенсивность накачки, L — длина активной среды. Поэтому для подавления развития рассмотренных выше шумов необходимо выполнение следующих условий:

$$L \gg 1/K\Theta_н^2 = l_к;$$

$$gI_н / K\Theta_н^2 = gI_н l_к = G_к < 1,$$

где $l_к$ — корреляционная (френелевская) длина пространственно неоднородного излучения с расходимостью $\Theta_н$, $G_к$ — инкремент усиления на корреляционной длине. Таким образом, при выполнении этих условий уравнение (11) можно упростить и привести к виду

$$\frac{da_m}{dz} = \frac{g}{2} a_m \Sigma_p \left|A_p\right|^2 + \frac{g}{2} A_m^* \Sigma_{q\neq m} a_q A_q. \tag{12}$$

Это основное уравнение для описания эффекта ОВФ.

Выше мы видели, что возбуждающее излучение должно иметь хорошо развитую пространственно неоднородную структуру. Поэтому в его разложении по плоским волнам в светопроводе должно содержаться много членов. Кроме того, угловой спектр возбуждающего излучения желательно иметь близким к прямоугольному. То есть в разложении накачки по плоским волнам не должно быть выделенных по интенсивности компонент $\left|A_i\right|^2 \ll \Sigma_{j\neq i}\left|A_j\right|^2$. Тогда отсутствие в последнем члене суммы в правой части уравнения (12) одного слагаемого не должно сказаться на окончательном результате. После этого решение уравнения (12) легко находится и имеет вид

$$a_m(z) = a_{m0} \mathrm{e}^{gI_{\text{н}}z/2} + A_{m0}^* \frac{\Sigma a_{l0} A_{l0}}{I_{\text{н}}} \mathrm{e}^{gI_{\text{н}}z/2}\left(\mathrm{e}^{gI_{\text{н}}z/2} - 1\right), \tag{13}$$

где $I_{\text{н}} = \Sigma\left|A_i\right|^2$ — среднее значение интенсивности накачки.

Первый член данного решения описывает усиление любой произвольной пространственной конфигурации стоксова сигнала в среднем поле накачки с нормальным инкрементом усиления. Второй член описывает генерацию плоских компонент стоксовой волны с амплитудой, пропорциональной комплексно-сопряжённой величине соответствующей составляющей волны накачки. Причём коэффициент пропорциональности одинаков для всех компонент сигнала. Поэтому генерируемый благодаря этому члену решения стоксов сигнал имеет комплексно-сопряжённую пространственную конфигурацию относительно структуры возбуждающего излучения. Кроме этого, при большом общем усилении, когда $\exp(gI_{\text{н}}z/2) >> 1$, данная конфигурация имеет двойной инкремент нарастания по сравнению с усилением в среднем поле (первый член решения). При ВРМБ пороговый инкремент обычно равен $G_{\text{п}} = gI_{\text{н}}L \geq 25$. Поэтому при большой общей длине активной области в выходном стоксовом излучении будет наблюдаться только пространственная конфигурация, комплексно-сопряжённая пространственной структуре волны накачки, что находится в полном соответствии с экспериментом. В этом и проявляется эффект обращения волнового фронта излучения при вынужденном рассеянии Мандельштама — Бриллюэна.

Заключение

Физическим механизмом, приводящим к удвоенному инкременту усиления для обращённой конфигурации стоксова сигнала, является параметрическое взаимодействие волн, которое описывается вторым членом в правой части уравнения (12). Кстати, если в правой части второго уравнения системы (2) выделить член с $n = m$, то уравнение примет вид, аналогичный (12):

$$\frac{de_n}{dz} = \frac{g}{2}\left|\mathcal{E}_n\right|^2 e_n + \frac{g}{2}\mathcal{E}_n \Sigma_{m \neq n} e_m \mathcal{E}_m^* \mathrm{e}^{-i(n-m)\gamma v z}. \tag{14}$$

Но видно также и различие, которое отражает особенности этих двух видов вынужденного рассеяния света. При ВКР широкополосной накачки нет усиления в среднем поле из-за резонансности взаимодействия спектральных компонент стоксовой волны и возбуждающего излучения. При ВРМБ такого резонанса нет, и каждая плоская составляющая углового спектра стоксова сигнала взаимодействует со всеми плоскими компонентами углового спектра накачки. И, кроме этого, из-за большого частотного сдвига стоксовой волны при ВКР существенную роль играет дисперсия групповых скоростей волн. При ВРМБ этот фактор практически не играет роли, и поэтому можно пренебречь различием модулей волновых векторов взаимодействующих волн. Тем не менее структура уравнений (12) и (14) имеет сходный характер. И это естественно, поскольку именно параметрическое взаимодействие спектральных компонент и частотного спектра широкополосной накачки, и углового спектра пространственно неоднородного возбуждающего излучения обусловливает особенности взаимодействия волн в столь не похожих внешних проявлениях. А именно: воспроизведение временных флуктуаций при ВКР широкополосной накачки в выходном усиленном стоксовом излучении, что проявляется в воспроизведении соответствующего частотного спектра. Или воспроизведение с комплексным сопряжением при ВРМБ пространственно неоднородной структуры возбуждающего излучения в пространственной структуре выходного стоксова излучения, что проявляется в воспроизведении соответствующего углового спектра. При попутном распространении взаимодействующих волн реализуется прямое воспроизведение флуктуаций, при встречном распространении — в комплексно-сопряжённой форме. Это прямо следует из вида уравнений (12) и (14).

Литература

1. *Woodbury, E. J.* Ruby Laser Operation in the Near IR / E. J.Woodbury, W. K. Ng // Proc. IRE. — 1962. — V. 50. — P. 2367.

2. *Ахманов, С. А.* Проблемы нелинейной оптики (электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах), 1962—1963 / С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов. — М., 1964. — (Итоги науки / АН СССР, Ин-т науч. информации).

3. *Бочаров, В. В.* Вынужденное комбинационное рассеяние излучения неодимового лазера в жидком азоте / В. В. Бочаров, А. З. Грасюк, И. Г. Зубарев, В. Ф. Муликов // ЖЭТФ. — 1969. — Т. 56, № 2. — С. 430—434.

4. *Джотян, Г. П.* Усиление при ВКР немонохроматической накачки / Г. П. Джотян, Ю. Е. Дьяков, И. Г. Зубарев, А. Б. Миронов, С. И. Михайлов // ЖЭТФ. — 1977. — Т. 73, № 3(9). — С. 822—829.

5. *Зубарев, И. Г.* Влияние параметрических эффектов на процесс вынужденного рассеяния немонохроматической накачки / И. Г. Зубарев, С. И. Михайлов // КЭ. — 1978. — Т. 5, № 11. — С. 2383—2395.

6. *Джотян, Г. П.* Влияние ширины спектра и статистики стоксова сигнала на эффективность ВКР немонохроматической накачки / Г. П. Джотян, Ю. Е. Дьяков, И. Г. Зубарев, А. Б. Миронов, С. И. Михайлов // КЭ. — 1977. — Т. 4, № 6. — С. 1377—1380.

7. *Зельдович, Б. Я.* О связи между волновыми фронтами отражённого и возбуждающего света при вынужденном рассеянии Мандельштама — Бриллюэна / Б. Я. Зельдович, В. И. Поповичев, В. В. Рагульский, Ф. С. Файзуллов // Письма в ЖЭТФ. — 1972. — Т. 15, № 3. — С. 160—164.

8. *Бельдюгин, И. М.* О комплексном сопряжении полей при ВРМБ / И. М. Бельдюгин, М. Г. Галушкин, Е. М. Земсков // КЭ. — 1976. — Т. 3, № 11. — С. 2467—2470.

9. *Сидорович, В. Г.* К теории «бриллюэновского» зеркала / В. Г. Сидорович // ЖТФ. — 1976. — Т. 46, № 11. — С. 2168—2172.

СУПЕРКОНТИНУУМ. НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ

Е. А. Анашкина, А. В. Андрианов, А. В. Ким, А. М. Сергеев

Введение

Эффект генерации суперконтинуумного излучения, или просто суперконтинуума, при распространении в среде достаточно интенсивного лазерного импульса можно по праву отнести к одному из ярких эффектов нелинейной оптики. Он был открыт в конце 1960-х годов независимо двумя группами — под руководством Р. Р. Альфано в США [1] и В. И. Таланова в СССР [2]. Явление генерации суперконтинуума и лежащие в его основе физические процессы остаются одними из ключевых направлений исследований в нелинейной физике на протяжении последних десятилетий. Область применения суперконтинуума вышла далеко за рамки нелинейной оптики и в настоящее время все более расширяется, включая исследования в биологии, биомедицине, спектроскопии [3]. Источники когерентного суперконтинуума с эквидистантным расстоянием между спектральными компонентами (частотные гребенки) находят применение в космических исследованиях [4] и развитии навигационных спутниковых систем, позволяя установить привязку между частотами оптического и радиодиапазона [5]. В 2005 году Нобелевская премия по физике была вручена Т. Хэншу и Дж. Холлу за работы в области прецизионной лазерной спектроскопии, включая технику измерения, основанную на использовании частотных гребенок. Как отметил Т. Хэнш в своей нобелевской лекции, расширяя возможности временной и частотной метрологии, оптические гребенки позволяют выполнить новые проверки основных физических законов, установить пределы изменений фундаментальных физических постоянных [6]. Генерация оптических гармоник высокого порядка расширяет область применения суперконтинуума до ультрафиолетового и рентгеновского диапазонов, а также является ключевым моментом для генерации аттосекундных импульсов [7].

Американский физик Р. Р. Альфано

В. И. Таланов

Термином «суперконтинуум» обозначают свет с широкополосным спектром, получающийся в результате нелинейно-оптического преобразования исходного излучения с относительно узким спектром. Процесс генерации суперконтинуума — это процесс сверхуширения оптического спектра. Нет строгого определения, какой ширины спектр считать суперконтинуумом, в литературе есть упоминания о суперконтинууме шириной 60 нм и шириной более трех октав. На наш взгляд, о генерации суперконтинуума имеет смысл говорить при уширении спектра, сравнимом с несущей частотой исходного сигнала. Обязательным атрибутом суперконтинуума является генерация новых частотных компонент посредством нелинейных механизмов, в отличие от квантового механизма генерации спонтанного или вынужденного излучения, которое, вообще говоря, также может иметь ширину спектра, сравнимую с частотой излучения накачки.

Сверхуширение спектра может быть обусловлено сверхсильным нелинейным откликом частиц среды, при котором происходит формирование суперконтинуумного спектра уже при единичном акте взаимодействия с оптическим полем (например, при генерации высоких гармоник [7]), и может являться результатом «накопления» относительно слабого нелинейного преобразования спектра исходного сигнала на больших трассах распространения.

Появление новых спектральных компонент в процессе генерации континуума в режиме «накопления» можно пояснить из достаточно простых, но, тем не менее, общих соображений. При распространении импульса с достаточно высокой интенсивностью в среде возникают нелинейные изменения показателя преломления, распределение которых непостоянно в пространстве и времени и зависит от интенсивности импульса. Различные участки импульса из-за наличия градиента эффективного показателя преломления приобретают разный набег фаз, т. е. дополнительную фазовую модуляцию. В поперечном по отношению к распространению импульса направлении дополнительная фазовая модуляция (появление новых компонент в пространстве поперечных волновых чисел) приводит к изменению формы волнового фронта и при дальнейшем распространении — к изменению поперечной формы импульса (например, эффектам самофокусировки и дефокусировки). Фазовая модуляция вдоль импульса отвечает появлению новых компонент в частотном спектре, и при дальнейшем распространении из-за дисперсионных эффектов также может приводить к изменению временной структуры импульса. Совместная пространственно-временная динамика может быть весьма сложной и приводить к существенному обогащению как пространственного, так и временного спектра. Механизм, с помощью которого изменяется эффективный показатель преломления, различается в зависимости от материальной среды и параметров падающего излучения (интенсивности, длительности импульса, длины волны). Так, в прозрачных сплошных средах при интенсивностях меньше порога ионизации добавка к показателю преломления может возникать за счет электронного нелинейного отклика, отклика, связанного с колебаниями и реориентацией молекул, электрострикции [3, 8]. Существенный вклад в нелинейность может быть обусловлен взаимодействием электронного возбуждения атомов с молекулярными колебаниями, что приводит к эффекту вынужденного комбинационного (рамановского) рассеяния. При превышении порога ионизации существенным становится зависимость показателя преломления от образующейся плазмы, так называемая ионизационная нелинейность, а при еще больших интенсивностях важную роль начинает играть нелинейность отклика электронов в плазме вследствие релятивистских поправок.

Благодаря своим когерентным свойствам генерация суперконтинуума открывает возможности для синтеза оптических импульсов, содержащих малое число колебаний поля. Данная концепция может быть перенесена из оптического в ультрафиолетовый и рентгеновский диапазоны.

В настоящей статье будет дана историческая справка о развитии исследований суперконтинуума и подробно рассмотрены возможности уширения спектра и создания предельно коротких импульсов в волоконных световодах и плазменных каналах, а также возможности расширения суперконтинуума до рентгеновского и гамма-диапазона за счет сильно нелинейного отклика электронов в сверхсильных полях.

1. Начальный этап исследования суперконтинуума

Впервые сверхуширение спектра, сопоставимое с несущей частотой (0,45—1,06 мкм), наблюдалось в экспериментах группы В. И. Таланова при самофокусировке в стеклах излучения неодимового лазера с одновременной модуляцией добротности и синхронизацией мод [2] и независимо Альфано и Шапиро (с полосой 0,4—0,7 мкм) при распространении второй гармоники неодимового лазера в объеме боросиликатного стекла [1]. На рис. 1 приведены полученные группой В. И. Таланова спектральные развертки уширенного сигнала.

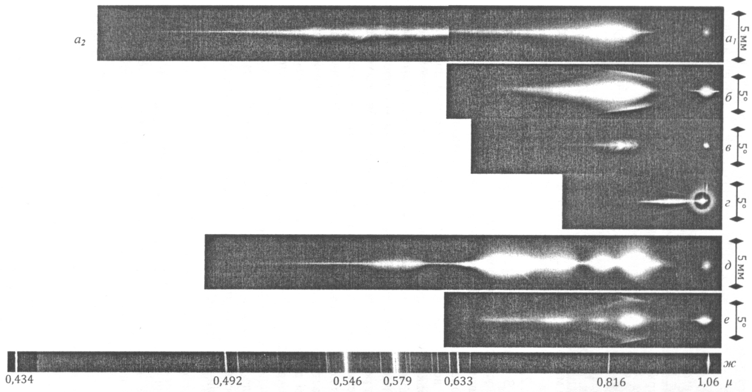


Рис. 1. Спектральная развертка излучения на выходе стеклянного стержня (первые эксперименты группы В. И. Таланова): *а* — *г* — стекло ЛК; *д* — *е* — стекло ЛГС-228; *ж* — спектр ртутной лампы с дополнительными линиями $\lambda = 0{,}63$ мкм и $\lambda = 1{,}06$ мкм; *а*, *д* — спектрограммы изображения торца стержня; *б* — *г*, *е* — спектрограммы дальнего поля после самофокусировки

В последовавших за этим многочисленных экспериментах наблюдалось сверхуширение спектра в различных средах, включая твердотельные материалы [9], газы [10, 11], а также органические и неорганические жидкости [12—15]. Исчерпывающий обзор экспериментальных данных и теоретические основы генерации суперконтинуума приведены в книге [3].

Первые эксперименты 1970-х годов в основном строились на базе лазеров с модуляцией добротности, генерировавших пачки импульсов длительностью в десятки пикосекунд. Излучение фокусировалось в исследуемую среду, при этом во многих экспериментах высокая интенсивность излучения и большая трасса распространения достигались также благодаря эффектам самофокусировки и филаментации пучка. Сложная пространственно-временная динамика и нерегулярность импульсов исходного лазерного излучения существенно затрудняли теоретическое описание результатов экспериментов. В качестве основных объяснений эффекта сверхуширения спектра принимались фазовая самомодуляция, четырехволновое взаимодействие, вынужденное рамановское рассеяние и взаимная фазовая кросс-модуляция рамановских компонент [3]. Выполненное в 1978 году Лином и Столенем наблюдение генерации суперконтинуума в оптическом световоде [16] положило начало исследованиям сверхуширения спектра в нелинейных волноводах. Генерация суперконтинуума в световодах стала впоследствии одним из наиболее развитых и широко применяющихся методов получения сверхширокополосных оптических спектров и сжатия ультракоротких импульсов.

Существенное продвижение в исследовании генерации суперконтинуума связано с распространением лазеров с синхронизацией мод непрерывного действия (лазеры на красителях, а впоследствии лазеры на вибронных кристаллах, волоконные лазеры), а также продвижением в область фемтосекундной длительности импульса (исторический обзор лазеров с синхронизацией мод см. в работе [17]). В современных фемтосекундных лазерных системах суперконтинуум, генерируемый при фокусировке пучка в объемных нелинейных материалах, используется для получения когерентного излучения от ультрафиолетового до инфракрасного диапазона (континуум «белого света») [18] и имеет важное значение для оптической синхронизации импульсов на сильно различающихся длинах волн, например в параметрических системах [19]. Отметим, что для задач, где требуется источник когерентного сверхширокополосного излучения, наибольшее применение находят системы на основе оптических волокон, ставшие в последнее время коммерчески доступными.

3. Суперконтинуум в волоконных световодах

Использование для генерации суперконтинуума нелинейных световодов позволяет обеспечить высокую интенсивность излучения на трассах, недостижимых в объемной оптике, а также дает возможность управлять дисперсией с помощью волноводного вклада. Кроме того, в режиме одномодового распространения исключается поперечная пространственная динамика, что существенно упрощает как экспериментальный, так и теоретический анализ процессов, приводящих к уширению спектра. В первоначальных экспериментах по генерации континуума [16] использовались стандартные кварцевые световоды, накачка которых осуществлялась наносекундным лазером на красителях в видимой области. В экспериментах на длинах волн 450—600 нм в области нормальной дисперсии световода [16], 1310 нм вблизи нулевой дисперсии [20—22] и 1550 нм в аномальной области [23, 24] было установлено, что дисперсионные свойства играют существенную роль в процессе генерации континуума. Исследования нелинейной динамики импульсов в волоконных световодах, в частности распространения солитонов [25] и рамановского самосмещения их частоты [26], не были напрямую связаны с суперконтинуумом, но оказали впоследствии определяющее влияние на развитие представлений о механизмах его генерации. Возрастание интереса к волоконному суперконтинууму в телекоммуникационной области длин волн 1,5 мкм в 1990-е годы было вызвано потенциалом сверхширокополосных источников для телекоммуникационных систем с уплотнением каналов по длине волны. Исследования стимулировались также и появлением достаточно простых полностью волоконных лазеров с синхронизацией мод, генерирующих пикосекундные и субпикосекундные импульсы [27]. Разработка микроструктурированных световодов, включая фотонно-кристаллические [28], волноводные свойства которых позволяли получить аномальную дисперсию в диапазоне 700—900 нм, значительно расширила область исследования волоконного суперконтинуума благодаря использованию хорошо отработанных к тому времени фемтосекундных титан-сапфировых систем. Генерация суперконтинуума в видимом и ближнем ИК-диапазоне в фотонно-кристаллических волокнах была продемонстрирована многими авторами (см. работы [29, 30] и цитированную в них литературу).

Уширение спектра в волоконных световодах основано на кубичной нелинейности материала сердцевины световода (это может быть плавленый кварц, допированный оксидами германия, фосфора, а также халькогенидные и теллуритные стекла). Нелинейная динамика, приводящая к уширению спектра, зависит от интенсивности и длительности исходного импульса, а также от дисперсионных свойств волновода. Генерация суперконтинуума в световодах возможна даже при накачке непрерывным излучением [31—35], в основном благодаря модуляционной неустойчивости (в области аномальной дисперсии), четырехволнового взаимодействия и каскадного рамановского рассеяния. Сходные механизмы имеют место и при накачке наносекундными импульсами. В случае пикосекундной и фемтосекундной накачки в области нормальной дисперсии основную роль играют эффекты фазовой самомодуляции и четырехволнового взаимодействия, а в области аномальной и вблизи длины волны нулевой дисперсии (λ_{ZD}) первостепенное значение имеют эффекты, связанные с компрессионной динамикой солитонов высокого порядка, распадом солитонов на фундаментальные и излучением дисперсионных волн, рамановским самосмещением частоты солитонов и взаимодействием солитонов с рассеянным излучением.

Остановимся на генерации суперконтинуума в нормальной области дисперсии. За счет фазовой самомодуляции происходит уширение спектра, сопровождаемое дисперсионным расплыванием импульса [36]. В 1969 году до начала использования волокон в качестве нелинейной среды высказывалась идея об использовании фазовой самомодуляции для компрессии оптических импульсов [37]. Однако активные эксперименты начались в 1980-х годах, когда одномодовые кварцевые световоды получили широкое распространение в нелинейной оптике. В качестве внешнего компрессора применялись дифракционные решетки, призмы и их комбинации (что позволило скомпенсировать не только квадратичную дисперсию световода, но еще и кубичную), а впоследствии и волоконные световоды, когда технология их изготовления позволила создавать заданные дисперсионные профили. Первые эксперименты демонстрировали сжатие пикосекундных импульсов [38], однако вскоре были получены и импульсы субпикосекундной [39] и фемтосекундной длительности. В работе [40] демонстрировалось получение импульса длительностью 6 фс, что составляет 3 периода колебаний на длине волны 620 нм. Позднее на данном механизме были получены предельно короткие импульсы в фотонно-кристаллических световодах (см. [29] и цитированную там литературу).

Рассмотрим получение предельно коротких импульсов через генерацию суперконтинуума в световодах с нормальной дисперсией в полностью волоконной эрбиевой лазерной системе с диодной накачкой, базирующейся на использовании стандартных телекоммуникационных компонент. Схема экспериментальной установки показана на рис. 2.

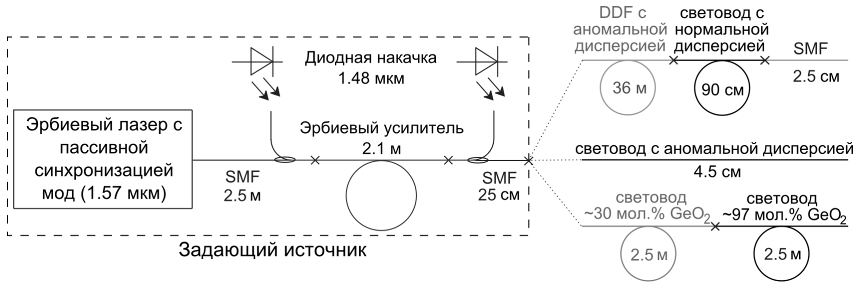


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

Система состоит из источника фемтосекундных оптических импульсов на фиксированной длине волны и нелинейного преобразователя сигнала источника (одного или нескольких последовательно соединенных отрезков кварцевого волокна). Источник включает задающий генератор и оптический усилитель. Задающим генератором является фемтосекундный эрбиевый полностью волоконный лазер, пассивная синхронизация мод в котором осуществляется при использовании нелинейного вращения эллипса поляризации излучения на основе оптического эффекта Керра. Максимальная энергия в импульсе составляет 3 нДж. Длительность импульсов оценивается в 50—80 фс в зависимости от мощности диодных накачек.

Импульсы с эрбиевого волоконного лазерного источника на длине волны 1,6 мкм распространялись вначале в кварцевом волокне с аномальной дисперсией, изменяющейся вдоль световода (DDF), где формировались фундаментальные солитоны и осуществлялся рамановский сдвиг их длины волны до 1,85 мкм [41, 42]. Далее солитоны инжектировались в нелинейное волокно с малой нормальной дисперсией, где они приобретали фазовую самомодуляцию со значительным уширением спектра (рис. 3, *а*). Длительность импульсов при этом увеличивалась. Генерируемый суперконтинуум являлся основой для получения предельно коротких импульсов. Далее оптические импульсы распространялись через стандартный световод SMF-28 с аномальной дисперсией длиной 2,5 см, который компенсировал дисперсию нелинейного световода, не внося при этом дополнительных спектральных искажений. На рис. 3, *б* показана автокорреляционная функция импульса, а на рис. 3, *в* — восстановленный профиль интенсивности и фаза. Длительность сжатого импульса на длине волны 1,85 мкм оценивается в 24 фс. Отметим, что нами также была продемонстрирована перестройка длины волны солитона до 2,1 мкм в кварцевых волокнах с изменяющейся по длине дисперсией [42, 43], что позволяет генерировать предельно короткие перестраиваемые по частоте импульсы [44].

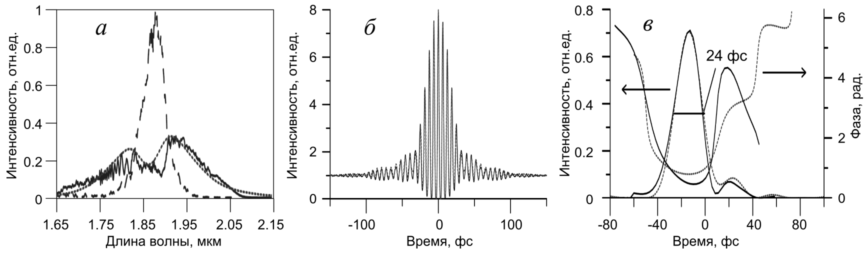


Рис. 3. Спектр сигнала на выходе системы (сплошная кривая — экспериментально измеренный, пунктирная кривая — численно рассчитанный) и экспериментальный спектр импульса на входе нелинейного волокна с нормальной дисперсией (штриховая кривая) — *а*; б — автокорреляционная функция сжатого импульса (сплошная кривая — экспериментально измеренная, пунктирная кривая — сгенерированная для восстановленного поля); *в* — профиль интенсивности импульса и фаза (сплошные кривые — восстановленные, пунктирные — численно рассчитанные)

Отметим, что экспериментальные результаты хорошо согласуются с математическим моделированием, также представленным на рис. 3.

Динамика оптических линейно поляризованных полей $E(z, t)$ с временными масштабами, сопоставимыми с периодом колебаний, при распространении в одномодовых световодах вдоль оси z анализировалась в рамках однонаправленного волнового уравнения [45, 46]

$$\frac{\partial G(z,\omega)}{\partial z} - i\beta(\omega)G(z,\omega) = -\hat{F}\left\{\frac{\gamma}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial t}\left[E(z,t)\int_{-\infty}^{\infty} b(t')E^2(z,t-t')dt'\right]\right\}, \quad (1)$$

где t — время в задержанной системе отсчета; ω — круговая частота, смещенная на величину ω_0, центральную частоту сигнала; $\hat{F}$ — оператор преобразования Фурье, $G(z,\omega) = \hat{F}\{E(z,t)\}$; $\beta(\omega)$ — постоянная распространения фундаментальной моды; γ — коэффициент нелинейности; $b(t) = (4/3)(1 - f_R)\delta(t) + 2f_R h_R(t)$, $\delta(t)$ — дельта-функция, f_R — парциальный вклад рамановского отклика, h_R — функция рамановского отклика [36].

Отметим, что если в уравнении (1) пренебречь процессами четырехволнового взаимодействия вида $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega_4$, где все частоты положительные (в частности, генерацией третьей гармоники), то (1) сведется к так называемому обобщенному нелинейному уравнению Шрёдингера (GNLSE) [36] на комплексную огибающую $A(z, t)$, связанную с электрическим полем соотношением $E(z, t) = \mathrm{Re}\{A(t)\exp(i\beta(z, \omega_0)z - i\omega_0 t)\}$.

Теперь рассмотрим динамику импульса, заданного в области аномальной дисперсии световода в виде $A(0,t) = \sqrt{P_0}\,/\,\mathrm{ch}(t/t_0)$, где P_0 — пиковая мощность, t_0 — характерная длительность. Тогда порядок солитона N можно определить исходя из выражения $N^2 = \gamma P_0 t_0^2/|\beta_2(\omega_0)|$, где $\beta_2(\omega) = \partial^2\beta/\partial\omega^2$. Нас будет интересовать случай $N > 1$. Известно, что вследствие действия фазовой самомодуляции и квадратичной дисперсии исходный импульс в процессе сверхуширения спектра испытывает сжатие на начальном этапе распространения [36]. Такой процесс получил название многосолитонного (или просто солитонного) сжатия. Генерация суперконтинуума и самокомпрессия являются связанными процессами. Впервые солитонная компрессия была продемонстрирована в работе [25]. В дальнейшем на данном механизме были получены предельно короткие импульсы в различных типах нелинейных световодов [46—52].

На рис. 4, *а*, *б* показаны рассчитанные в рамках уравнения (1) распределения интенсивности во временном и спектральном представлении при различных z, а на рис. 4, *в* — используемая дисперсионная кривая. На начальной стадии происходит сверхуширение спектра, сопровождаемое формированием интенсивного пика на фоне широкого пьедестала.

Поскольку частотная модуляция, вызванная фазовой самомодуляцией, на начальной стадии сжатия линейна только в центральной части импульса, то лишь центральная область его сжимается за счет аномальной дисперсии. Энергия в «крыльях» импульса остается несжатой. При достижении высокочастотным крылом частот, соответствующих условию фазового синхронизма, начинается генерация линейных дисперсионных волн [52—57]. Процесс излучения дисперсионных волн может происходить неоднократно [58, 59]. В конечном счете импульс распадается на солитоны в аномальной области дисперсии и волновые пакеты дисперсионных волн в области нормальной дисперсии [58, 60]. Далее, как было отмечено выше, при распространении в световоде частота фундаментальных солитонов плавно понижается вследствие рамановского рассеяния. Кроме того, могут происходить процессы четырехволнового взаимодействия между различными компонентами суперконтинуума, а также различные процессы взаимодействия солитонов с дисперсионными волнами из-за фазовой кроссмодуляции [29, 57, 58]. Благодаря этому формируются новые спектральные компоненты, расширяются границы суперконтинуума [29].

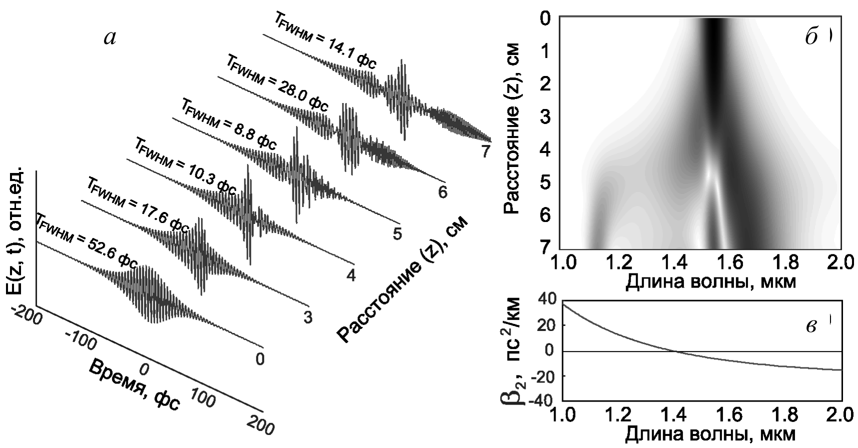


Рис. 4. Временная (*а*) и спектральная (*б*) эволюции импульса при распространении через нелинейный световод; *в* — дисперсия групповых скоростей нелинейного световода

Рассмотрим получение предельно коротких импульсов на базе системы, представленной на рис. 2. После задающего лазерного источника импульсы распространялись в отрезке кварцевого волокна длиной 4,5 см с дисперсией, показанной на рис. 4, *в*. На рис. 5 показан импульс, экспериментально измеренный на выходе методом FROG (frequency-resolved optical gating) [61], а также достаточно хорошо согласующийся с ним результат математического моделирования, выполненного для актуальных параметров световода и входного импульса. Длительность скомпрессированного на многосолитонном механизме импульса оценивается в 13 фс, что составляет 2 периода колебаний оптического поля на длине волны 1,7 мкм. Центральный пик содержит около 70 % энергии, оставшиеся 30 % содержатся в пьедестале. Пиковая мощность оценивается в 100 кВт. Длительность спектрально-ограниченного импульса составляет 10 фс.

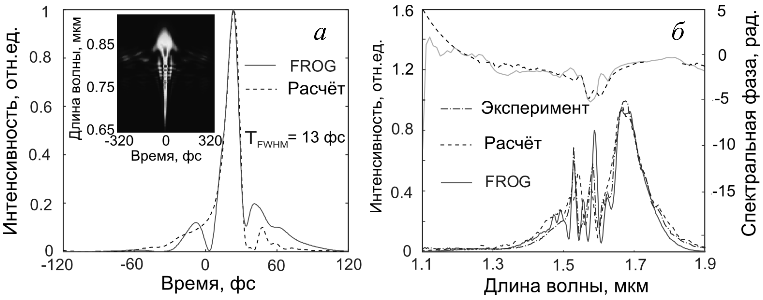


Рис. 5. Временной профиль интенсивности предельно короткого импульса, полученный методом FROG (сплошная кривая) и рассчитанный численно (пунктир) (*а*), на вставке — экспериментально измеренная FROG-спектрограмма. *б* — оптический спектр, измеренный спектрометром (штрихпунктирная кривая), полученный методом FROG (сплошная кривая) и рассчитанный численно (пунктир)

На установке, приведенной на рис. 2, более длинноволновый суперконтинуум (свыше 2 мкм) удается получить при использовании германосиликатных световодов. После задающего источника импульсы распространяются в двух последовательно соединенных световодах с содержанием диоксида германия в сердцевине 30 мол. % и 97 мол. % длиной 2,5 м каждый. В первом световоде с 30 мол. % допированием $\lambda_{ZD} \approx 1{,}5$ мкм, $\gamma \approx$ ≈ 8 (Вт·км)$^{-1}$ на длине волны 1,6 мкм. Порядок солитона на входе оценивается как $N \approx 6$. Происходит обсуждавшийся выше процесс спектрального уширения с распадом на солитоны и дисперсионные волны. Наиболее длинноволновый солитон смещается до 2,3 мкм [62]. Для достижения больших длин волн последовательно использовался второй световод с 97 мол. % допированием с более высоким коэффициентом нелинейности и меньшей по модулю аномальной дисперсией, чем в первом волокне, с $\lambda_{ZD} \approx 1{,}8$ мкм. Благодаря этому был получен суперконтинуум в диапазоне 1—2,6 мкм, показанный на рис. 6, *а*. На рис. 6, *б* приведены результаты численного моделирования, выполненного при учете модовой дисперсии (зависимости эффективного размера моды от частоты) в рамках модели, предложенной в работе [63]. В данном случае нельзя считать γ постоянным, в отличие от случая генерации предельно коротких импульсов в кварцевых волокнах, корректно описываемых уравнением (1). На рис. 6, *б* показана спектральная эволюция импульса. В первом световоде формируется три солитона, обозначенных римскими цифрами, и такое же количество волновых пакетов дисперсионных волн, обозначенных арабскими цифрами.

Во втором световоде повторяется распадная нелинейная динамика для импульсов в аномальной дисперсии, кроме того происходят процессы четырехволнового и кроссмодуляционного взаимодействия.

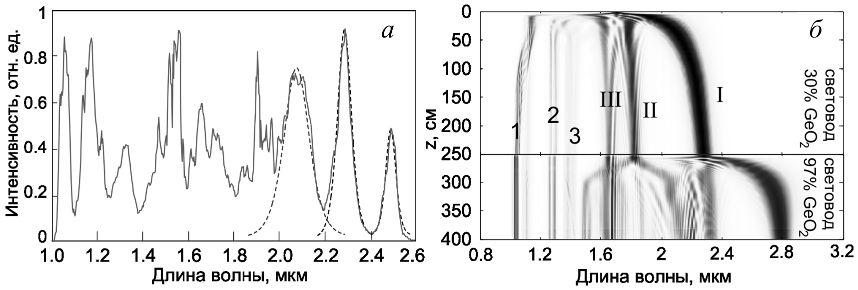


Рис. 6. Экспериментально измеренный спектр сигнала на выходе германо-силикатного световода (сплошная кривая) и аппроксимация длинноволновых пиков солитонами (пунктирная кривая) (*а*) и расчет спектральной эволюции 70 фс импульса с энергией 1 нДж при распространении через германо-силикатные световоды (*б*). Римские цифры — солитоны, арабские — дисперсионные волны

Весьма важным для многих приложений, но все еще мало освоенным продолжает оставаться средний ИК-диапазон, являющийся непрозрачным для волокон на основе силикатных стекол. Для его освоения разрабатываются световоды на основе стекол и кристаллов со специальным химическим составом [64]. Прогресс в разработке таких световодов, достигнутый в настоящее время, позволил создавать также волокна с большими коэффициентами нелинейности, которые позволяют расширить суперконтинуумный диапазон до нескольких октав. Так, во фторидных волокнах была получена генерация суперконтинуума с шириной три октавы (от 350 нм до 3,85 мкм — рис. 7) [65]. Также демонстрировалась генерация суперконтинуума в халькогенидных волокнах [66], в теллуритных микроструктурированных волокнах (длинноволновая граница — 4,8 мкм, рис. 8) [67], в ZBLAN-волокнах с химическим составом ZrF_4—BaF_2—LaF_3—AlF_3—NaF (длинноволновая граница — 4,5 мкм) [68, 69], в германатных волокнах [62, 70].

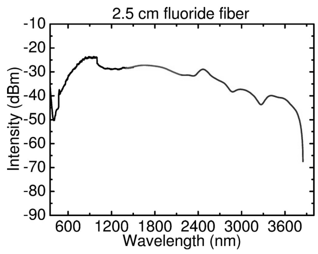
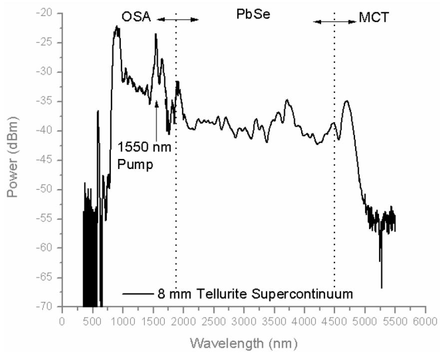


Рис. 7. Экспериментально измеренный спектр суперконтинуумного излучения с выхода 2,5 см отрезка фторидного волокна, накачиваемого сигналом на длине волны 1450 нм (из работы [65])

Рис. 8. Экспериментально измеренный спектр суперконтинуумного излучения с выхода 8 мм отрезка теллуритного фотонно-кристаллического волокна (из [67])



3. Когерентный суперконтинуум и сверхмощные импульсы предельно коротких длительностей

Для многих приложений принципиально важно использование именно предельно коротких импульсов с высокой интенсивностью поля. Такие импульсы представляют собой, по сути, когерентный суперконтинуум с хорошо сфазированными спектральными компонентами. Для их получения могут быть использованы различные эффекты спектрального сверхуширения высокоинтенсивных импульсов с выхода мощных твердотельных лазерных систем с последующей компрессией или самокомпрессией импульсов. Если суперконтинуумное излучение, рассмотренное выше, в основном было обусловлено нелинейностью связанных электронов в атомах или молекулах среды, то с увеличением интенсивности падающего излучения, когда действие внешнего поля становится соизмеримым с внутриатомным или много больше его, характер нелинейности сильно меняется.

Так, в работе [71] было показано, что для лазерных импульсов с амплитудой, превышающей порог прямой ионизации, ионизационный механизм ап-конверсии частоты способен обеспечить сверхширокополосную частотную перестройку более чем на октаву. А совместное действие ионизационной нелинейности и плазменной дисперсии групповых скоростей может приводить к самосжатию лазерного импульса [72]. В работе [73] экспериментально наблюдалась ионизационная самокомпрессия импульса миллиджоульного уровня длительностью от 26 фс до 13 фс при его распространении в наполненном газом капилляре. Однако наиболее интересным и важным здесь представляется возможность перехода к мощным импульсам джоульного уровня и тем самым к созданию мощных предельно коротких импульсов мультитераваттного класса. Важный шаг был сделан в работе [74], в которой предложен механизм самокомпрессии, основанный на возбуждении нелинейного плазменного канала [75] в газонаполненном диэлектрическом капилляре, и показана масштабируемость ионизационного компрессора до высоких мощностей в сотни тераватт.

При использовании газа гелия теоретически было продемонстрировано получение предельно коротких лазерных импульсов джоульного уровня энергии с эффективностью порядка 20 %. Формирование плазменного канала осуществлялось на стадии однократной ионизации гелия, в то время как рождение и фазировка новых спектральных компонент происходили на стадии образования двукратно заряженных ионов. На рис. 9 показаны распределения интенсивности импульса в зависимости от времени и радиальной координаты на различных трассах распространения. При использовании титан-сапфировой лазерной системы с длительностью 30 фс на выходе ионизационного компрессора могут быть получены импульсы длительностью менее 5 фс.

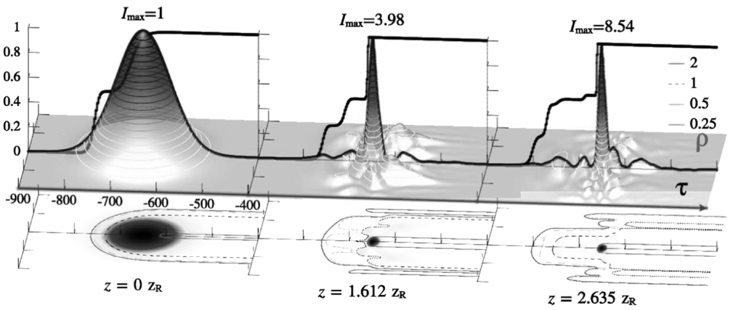


Рис. 9. Распределение интенсивности импульса (длительностью 60 фс и энергией 2 Дж) в зависимости от времени τ и радиальной координаты ρ вдоль трассы распространения в капилляре (диаметром 1200 мкм, длиной 3 м), заполненном гелием при давлении 0,125 Торр. Выходная длительность импульса 6 фс (из работы [74])

Для продвижения в сторону создания предельно коротких импульсов петаваттного класса при использовании исходных импульсов с высокой интенсивностью, когда материальная среда легко превращается в плазму, в качестве нелинейности для фазовой самомодуляции и сверхуширения спектра может быть использована так называемая релятивистская нелинейность, обусловленная релятивистской зависимостью массы электрона от его скорости. Данная нелинейность, по сути, как и электронная керровская нелинейность, является локальной, однако ее использование по прямой аналогии достаточно сильно затруднено из-за различного рода плазменных неустойчивостей. Так, в работе [76] предлагается использование чередующихся слоев достаточно плотной плазмы как нелинейной среды и свободного пространства, чтобы избежать самофокусировочной неустойчивости и неустойчивостей распада электромагнитной волны. Здесь же следует обратить внимание на иной механизм самокомпрессии, который может быть реализован для импульсов, длительность которых соизмерима с периодом плазменной волны. В этом случае при распространении импульса в плазме возбуждается кильватерная волна [77]. Оптический импульс благодаря действию пондеромоторных сил смещает положение электронов, оставляя тем самым за собой волну зарядовой плотности. Возникающее неоднородное изменение показателя преломления вдоль импульса соответствует такому распределению, при котором показатель преломления на заднем фронте больше, чем на переднем, в отличие от рассмотренного выше случая ионизационного компрессора. Уширение спектра осуществляется преимущественно в более длинноволновый диапазон.

В первых экспериментальных работах [78, 79] было продемонстрировано в релятивистском режиме двукратное сжатие импульса при взаимодействии с кильватерной волной. Следующий шаг на пути компрессии субпетаваттных импульсов до предельно коротких длительностей был сделан в недавней работе [80], где была показана возможность сжатия до суб-10 фс длительностей на длине волны титан-сапфирового лазера. Измерения структуры оптического поля осуществлялись методом SPIDER (spectral phase interferometry for direct electric-field reconstruction) [81]. Импульсы с энергией 1,8 Дж длительностью 30 фс на центральной длине волны 800 нм фокусировались в струю гелия толщиной 2 мм в пятно с характерным диаметром 10 мкм, достигая максимальной интенсивности порядка $3{,}4\cdot10^{19}$ Вт/см^2. На рис. 10, *а* приведены измеренные длительности импульсов на выходе газовой струи в зависимости от плотности плазмы, а также длительности, полученные в результате численного моделирования для различных значений входных амплитуд оптического поля [80]. Для экспериментальных и теоретических кривых характерно наличие точки оптимальной компрессии. На рис. 10, *б* показана экспериментально измеренная SPIDER-интерферограмма вместе со спектральной фазой, а на рис. 10, *в* — распределение интенсивности предельно короткого импульса длительностью 11 фс. Трехкратное сжатие было достигнуто при концентрации электронов $1{,}1\cdot10^{19}$ см$^{-3}$.

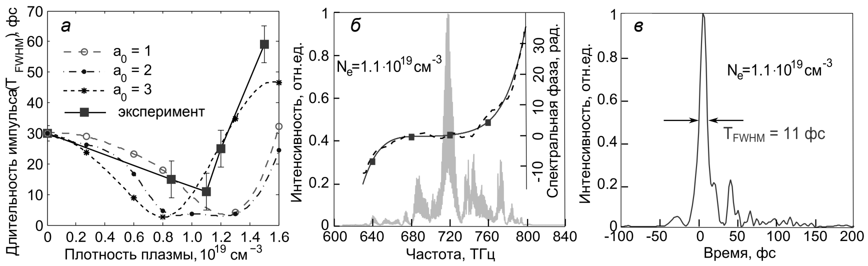


Рис. 10. Зависимости экспериментально измеренных длительностей импульса от концентрации плазмы, а также аналогичные теоретические зависимости при разных значениях амплитуды падающего поля (*а*). Экспериментально измеренная SPIDER-интерферограмма (*б*), восстановленная фаза (пунктир) и ее аппроксимация полиномом 5-й степени. Восстановленный профиль интенсивности (*в*)

4. Суперконтинуум — до рентгена и гамма-квантов

Хорошо известный процесс генерации сверхширокополосных спектров высоких гармоник, возникающих при ионизации газовой мишени лазерными импульсами интенсивностью на уровне 10^{14} Вт/см^2, естественно, также может быть отнесен к явлению суперконтинуума. Действительно, при лазерных полях, соизмеримых с внутриатомным полем, характер нелинейности атомного отклика может сильно измениться. В частности, туннельным образом ионизованный электрон при своем обратном движении к родительскому иону может излучить весьма широкий спектр электромагнитных волн (тормозное излучения), который в силу повторяемости на каждом периоде оптического поля отражается в виде слабо спадающего плато в области высоких гармоник лазерной волны. Такой спектр, несомненно, можно отнести к самому сверхширокополосному суперконтинууму, простирающемуся на многие сотни гармоник лазерного поля. Огромный интерес к генерации суперконтинуума высоких гармоник вызван возможностью создания достаточно простого когерентного источника в ультрафиолетовом и рентгеновском диапазонах, а также продвижением в область аттосекундной длительности импульсов [7]. В последние годы активно обсуждается возможность расширить такой суперконтинуум до нескольких тысяч гармоник и продвинуться в рентгеновскую область до диапазона прозрачности воды («водяное окно») в области порядка 2—4 нм. Такая надежда в первую очередь связывается с возможностью генерации и усиления сверхширокополосного сигнала (когерентного суперконтинуума) в среднем ИК-диапазоне и получения достаточно мощных одно- и двухпериодных импульсов, которые далее используются для генерации высоких гармоник.

Наибольшая частота генерируемых гармоник может быть оценена из полуклассической теории движения волнового пакета электрона, что приводит к универсальному соотношению $\hbar N_{\max}\omega_0 \approx I_p + 3{,}17U_p$, где $N_{\max}$ — номер максимальной гармоники на частоте ω_0; I_p — потенциал ионизации атома; U_p — средняя осцилляторная энергия электрона в электрическом поле, пропорциональная интенсивности и квадрату длины волны лазерного поля; $\hbar$ — постоянная Планка. Важным следствием этого соотношения является возможность достичь генерации более широкополосного континуума гармоник при использовании меньшей частоты лазерной накачки. Этот вывод блестящим образом подтвердился в экспериментах, проведенных вначале с лазерным источником на длине волны 2 мкм (вместо традиционной до этого длины волны титан-сапфировых систем 0,8 мкм), а затем и 3,9 мкм [82]. Были достигнуты рекордные значения как по ширине суперконтинуума с высокой пространственной когерентностью (более 5000 гармоник в диапазоне от 0,3 до 1,6 кэВ), так и по эффективности преобразования. Ширина спектра соответствовала рекордно малой спектрально-ограниченной длительности 2,5 ас (рис. 11).

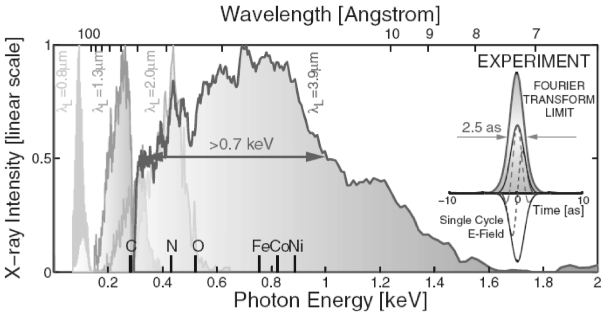
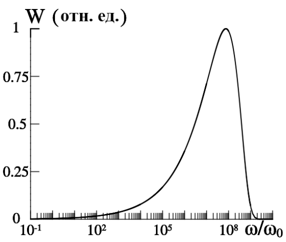


Рис. 11. Экспериментально измеренные спектры высоких гармоник для различных лазерных длин волн накачек (0,8 мкм, 1,3 мкм, 2 мкм, 3,9 мкм). На вставке — спектрально-ограниченный импульс (из работы [82])

Одним из возможных и ярких применений сверхсильных ультракоротких импульсов, активно обсуждаемых в последнее время, может быть создание источников гамма-излучения в режиме «сверх»ультрарелятивистского взаимодействия экстремальных световых полей с веществом, когда основная часть кинетической энергии электрона трансформируется в излучение гамма-квантов. В Институте прикладной физики РАН (г. Нижний Новгород) предложен мегапроект XCELS по созданию 200 ПВт лазерной системы [83], которая при оптимальной фокусировке позволит создавать максимальную интенсивность излучения на уровне 10^{25} Вт/см^2. Оптимальная фокусировка может быть достигнута в полях дипольной конфигурации, которая позволяет фокусировать излучение в минимальный фокальный объем $0{,}032\lambda^3$ по сравнению с другими геометриями фокусировки и создавать тем самым поле с максимально высокой напряженностью при заданной мощности лазерной системы. Релятивистская динамика электрона в поле сходящейся дипольной волны обладает рядом интересных особенностей [84], и в поле лазерной волны такой мощности имеет место сверхширокополосное синхротронное излучение, спектр которого простирается до диапазона гамма-квантов.

Рис. 12. Спектр излучения электрона в поле дипольной волны мощностью 200 ПВт. Центральная частота ω_0 лазерного импульса (длительностью 30 фс) соответствует длине волны титан-сапфирового лазера 800 нм



На рис. 12 показан спектр излучения электрона, захваченного падающим импульсом на длине волны 800 нм (мощность 200 ПВт и длительность 30 фс) и ускоренного к центру фокусировки. Как видно, при энергии кванта лазерного излучения $\hbar\omega_0$ = 1,5 эВ весьма эффективно генерируются гамма-кванты вплоть до энергий в гигаэлектрон-вольт.

* * *

В настоящей статье рассмотрены основные механизмы генерации спектрального суперконтинуума в различных нелинейных средах от среднего ИК до рентгеновского и гамма-диапазонов. Показана возможность формирования суперконтинуумного спектра и получения оптических импульсов предельно коротких длительностей в полностью волоконной лазерной системе на основе кварцевых волокон, а также возможность продвижения в средний ИК-диапазон с использованием специальных германатных, фторидных, теллуритных и халькогенидных волокон. Продемонстрирована самокомпрессия импульсов субпетаваттного уровня мощности до предельно коротких длительностей, базирующаяся на нелинейном сверхуширении спектров при распространении релятивистски сильной волны в плазме, а также отмечен режим «сверх»ультрарелятивистского взаимодействия, когда основная часть энергии электрона трансформируется в излучение гамма-квантов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 12-02-31344_мол_а, 12-02-33074_мол_а_вед), Министерства образования и науки РФ (государственные соглашения 14.132.21.1433, 8626). Е. А. Анашкина также выражает благодарность Фонду некоммерческих программ «Династия» за финансовую поддержку в рамках гранта для аспирантов и молодых ученых без степени.

Литература

1. *Alfano, R. R.* Emission in the region 4000 to 7000 Å via four-photon coupling in glass / R. R. Alfano, S. L. Shapiro // Physical Review Letters. — 1970. — V. 24, № 11. — P. 584—587.

2. *Бондаренко, Н. Г.* Уширение спектра при самофокусировке света в стеклах / Н. Г. Бондаренко, И. В. Еремина, В. И. Таланов // Письма в ЖЭТФ. — 1970. — Т. 12, вып. 3. — С. 125—128.

3. *Alfano, R. R.* The supercontinuum laser source / R. R. Alfano. — New York : Springer, 2006. — 536 p.

4. *Walker, G*. Extrasolar planets : With a coarse-tooth comb / G. Walker // Nature. — 2008. — V. 452. — P. 538—539.

5. *Cundiff, S. T.* Colloquium: Femtosecond optical frequency combs / S. T. Cundiff, J. Ye // Reviews of Modern Physics. — 2003. — V. 75. — P. 325.

6. *Хэнш, Т.* Страсть к точности / Т. Хэнш // Успехи физических наук. — 2006. — Т. 176. — С. 1368—1380.

7. *Corkum, P. B*. Attosecond science / P. B. Corkum, F. Krausz // Nature Physics. — 2007. — V. 3. — P. 381—387.

8. *Шен, Р. И.* Принципы нелинейной оптики / Р. И. Шен. — М. : Наука, 1984. — 560 с.

9. *Yu, W.* Spectral broadening of picosecond 1.06 μm pulse in KBr / W. Yu, R. R. Alfano, C. L. Sam, R. J. Seymour // Opt. Commun. — 1975. — V. 14. — P. 344—347.

10. *Corkum, P. B*. Supercontinuum generation in gases / P. B. Corkum, C. Rolland, T. Srinivasan-Rao // Physical Review Letters. — 1986. — V. 57, № 18. — P. 2268—2271.

11. *Glownia, J. H.* Ultrafast ultraviolet pump-probe apparatus / J. H. Glownia, J. Misewich, P. P. Sorokin // JOSA B. — 1986. — V. 3, № 11. — P. 1573—1579.

12. *Werncke, W.* An anomalous frequency broadening in water / W. Werncke, A. Lau, M. Pfeiffer, K. Lenz, H. J. Weigmann, C. D. Thuy // Opt. Commun. — 1972. — V. 4. — P. 413—415.

13. *Penzkofer, A.* Stimulated Short-Wave Radiation due to Single-Frequency Resonances of $\chi(3)$ / A. Penzkofer, A. Laubereau, W. Kaiser // Physical Review Letters. — 1973. — V. 31, № 14. — P. 863—866.

14. *Smith, W. L.* Superbroadening in H_2O and D_2O by self-focused picosecond pulses from a YAlG:Nd laser / W. Lee Smith, P. Liu, N. Bloembergen // Physical Review A. — 1986. — V. 15, № 6. — P. 2396—2403.

15. *Fork, R. L.* Femtosecond white-light continuum pulses / R. L. Fork, C. V. Shank, C. Hirlimann, R. Yen, W. J. Tomlinson // Optics Letters. — 1983. — V. 8, № 1. — P. 1—3.

16. *Lin, C.* New nanosecond continuum for excited-state spectroscopy / C. Lin, R. H. Stolen // Appl. Phys. Lett. — 1976. — V. 28. — P. 216—218.

17. *Крюков, П. Г.* Лазеры ультракоротких импульсов // Квантовая электроника. — 2001. — Т. 31, № 2. — С. 95—119.

18. *Johnson, P. J.* Stable UV to IR supercontinuum generation in calcium fluoride with conserved circular polarization states / P. J. Johnson, V. I. Prokhorenko, R. J. Miller // Optics express. — 2009. — V. 17, № 24. — P. 21488—21496.

19. *Mucke, O.* Scalable Yb-MOPA-driven carrier-envelope phase-stable few-cycle parametric amplifier at 1.5 µm / O. Mucke, D. Sidorov, P. Dombi, A. Pugzlys, A. Baltuska, S. Alisauskas, V. Smilgevicius, J. Pocius, L. Giniunas, R. Danielius, N. Forget // Optics Letters. — 2009. — V. 34. — P. 118—120.

20. *Beaud, P.* Ultrashort pulse propagation, pulse breakup, and fundamental soliton formation in a single-mode optical fiber / P. Beaud, W. Hodel, B. Zysset, H. P. Weber // IEEE J. Quantum Electron. — 1987. — V. 23. — P. 1938—1946.

21. *Gouveia-Neto, A. S.* Solitons in the region of the minimum group-velocity dispersion of single-mode optical fibers / A. S. Gouveia-Neto, M. E. Faldon, J. R. Taylor // Optics Letters. — 1988. — V. 13. — P. 770—772.

22. *Schütz, J.* Nonlinear pulse distortion at the zero dispersion wavelength of an optical fibre / J. Schütz, W. Hodel, H. P. Weber // Opt. Commun. — 1993. — V. 95. — P. 357—365.

23. *Kodama, Y.* Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide / Y. Kodama, . Hasegawa // IEEE J. Quantum Electron. — 1987. — V. 23. — P. 510—524.

24. *Islam, N. M.* Broad bandwidths from frequency-shifting solitons in fibers / N. M. Islam, G. Sucha, I. Bar-Joseph, M. Wegener, J. P. Gordon, D. S. Chemla // Opt. Lett. — 1989. — V. 14. — P. 370—372.

25. *Mollenauer, L. F.* Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers / L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, J. P. Gordon // Physical Review Letters. — 1980. — V. 45, № 13. — P. 1095—1098.

26. *Blow, K.* Theoretical description of transient stimulated Raman scattering in optical fibers / K. Blow, D. Wood // IEEE J. Quantum Electron. — 1989. — V. 25, № 12. — P. 2665—2673.

27. *Fermann, M. E.* Fiber-lasers for ultrafast optics / M. E. Fermann, A. Galvanauskas, G. Sucha, D. Harter // Appl. Phys. B. — 1997. — V. 65. — P. 259.

28. *Corkum, P. B.* Femtosecond continua produced in gases / P. B. Corkum, C. Rolland // IEEE J. Quantum Electron. — 1989. — V. 25, № 12. — P. 2634—2639.

29. *Dudley, J. M.* Supercontinuum generation in photonic crystal fiber / J. M. Dudley, G. Genty, S. Coen // Reviews of modern physics. — 2006. — V. 78, № 4. — P. 1135.

30. *Желтиков, А. М.* Да будет белый свет : генерация суперконтинуума сверхкороткими лазерными импульсами // Успехи физических наук. — 2006. — Т. 176, №. 6. С. 623—649.

31. *Avdokhin, A. V.* Continuouswave, high-power, Raman continuum generation in holey fibers / A. V. Avdokhin, S. V. Popov, J. R. Taylor // Opt. Lett. — 2003. — V. 28. — P. 1353—1355.

32. *Prabhu, M.* Supercontinuum generation using Raman fiber laser / M. Prabhu, A. Taniguchi, S. Hirose, J. Lu, M. Musha, A. Shirakawa, K. Ueda // Appl. Phys. B. — 2003. — V. 77. P. 205—210.

33. *González-Herráez, M.* Supercontinuum generation using a continuous-wave Raman fiber laser / M. González-Herráez, S. Martín-López, P. Corredera, M. L. Hernanz, P. R. Horche // Opt. Commun. — 2003. — V. 226. — P. 323—328.

34. *Abeeluck, A. K.* High-power supercontinuum generation in highly nonlinear, dispersion-shifted fibers by use of a continuouswave Raman fiber laser / A. K. Abeeluck, C. Headley, C. G. Jørgensen // Opt. Lett. — 2004. — V. 29. — P. 2163—2165.

35. *Abeeluck, A. K.* Continuous-wave pumping in the anomalous- and normal-dispersion regimes of nonlinear fibers for supercontinuum generation / A. K. Abeeluck, C. Headley // Opt. Lett. — 2005. — V. 30. — P. 61—63.

36. *Agrawal, G.* Nonlinear Fiber Optics / G. Agrawal. — Academic Press, 2012. — 631 p.

37. *Fisher, R. A.* Subpicosecond pulse generation using the optical Kerr effect / R. A. Fisher, P. L. Kelley, T. K. Gustafson // Appl. Phys. Lett. — 1969. — V. 14. — P. 140—143.

38. *Nakatsuka, H.* Nonlinear picosecond-pulse propagation through optical fibers with positive group velocity dispersion / H. Nakatsuka, D. Grischkowsky, A. C. Balant // Physical Review Letters. — 1981. — V. 47, № 13. — P. 910—913.

39. *Mollenauer, L. F.* Extreme picosecond pulse narrowing by means of soliton effect in single-mode optical fibers / L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, J. P. Gordon, W. J. Tomlinson // Optics Letters. — 1983. — V. 8, № 5. — P. 289—291.

40. *Fork, R. L.* Compression of optical pulses to six femtoseconds by using cubic phase compensation / R. L. Fork, C. H. Brito Cruz, P. C. Becker, C. V. Shank // Optics Letters. — 1987. — V. 12, № 7. — P. 483—485.

41. *Андрианов, А. В.* Генерация плавно перестраиваемых в широком частотном диапазоне оптических солитонных импульсов в кварцевых световодах с переменной дисперсией / А. В. Андрианов, А. В. Ким, С. В. Муравьев, А. А. Сысолятин // Письма в ЖЭТФ. — 2007. — Т. 85, № 8. — С. 446—451.

42. *Andrianov, A. V.* DDF based all-fiber optical source of femtosecond pulses smoothly tuned in the telecommunication range / A. V. Andrianov, A. V. Kim, S. V. Muraviov, A. A. Sysoliatin // Laser Physics. — 2007. — V. 11, № 17. — P. 1296—1302.

43. *Andrianov, A. V.* Widely wavelength-tunable few-cycle optical pulse generation from an all-fiber erbium-doped laser system / A. V. Andrianov, A. V. Kim, S. V. Muraviov, A. A. Sysoliatin // Laser Physics. — 2009. — V. 19, № 10. — P. 1—5.

44. *Andrianov, A. V.* Wavelength-tunable few-cycle optical pulses directly from an all fiber Er-doped laser setup / A. V. Andrianov, A. V. Kim, S. V. Muraviov, A. A. Sysoliatin // Optics Letters. — 2009. — V. 34, № 20. — P. 3193—3195.

45. *Brabec, T.* Nonlinear Optical Pulse Propagation in the Single-Cycle Regime / T. Brabec, F. Krausz // Phys. Rev. Lett. — 1997. — V. 78. — P. 3282—3285.

46. *Anashkina, E. A.* All-fiber design of erbium-doped laser system for tunable two-cycle pulse generation / E. A. Anashkina, A. V. Andrianov, S. V. Muravyev, A. V. Kim // Optics Express. — 2011. — V. 19. — P. 20141—20150.

47. *Igarashi, K.* Higher-order soliton compression of optical pulses from 5 ps to 20 fs by a 15.1-m-long single-stage step-like dispersion profiled fiber / K. Igarashi, M. Kishi, M. Tsuchiya // Jpn. J. Appl. Phys. — 2001. — V. 40, № 11. — P. 6426—6429.

48. *Hori, T.* Generation of 14-fs ultrashort pulse in all fiber scheme by use of highly nonlinear hybrid fiber / T. Hori, N. Nishizawa, T. Goto // Ultrafast Phenomena XIV / ed. by T. Kobayashi, T. Okada, T. Kobayashi et al. — Berlin ; Heidelberg : Springer, 2005. — P. 31—33. — (Springer Series in Chemical Physics ; v. 79).

49. *Sell, A.* 8-fs pulses from a compact Er: fiber system: quantitative modeling and experimental implementation / A. Sell, G. Krauss, R. Scheu et al. // Optics express. — 2009. — V. 17, № 2. — P. 1070—1077.

50. *Amorim, A. A.* Sub-two-cycle pulses by soliton self-compression in highly nonlinear photonic crystal fibers / A. A. Amorim, M. V. Tognetti, P. Oliveira // Optics Letters. — 2009. — V. 34, № 24. — P. 3851—3853.

51. *Foster, M.* Soliton-effect compression of super-continuum to few-cycle durations in photonic nanowires / M. Foster, A. Gaeta, Q. Cao, R. Trebino // Optics Express. — 2005. — V. 13, № 18. — P. 6848—6855.

52. *Андрианов, А. В.* Разработка гибридной Er/Yb волоконной лазерной системы для генерации импульсов предельно короткой длительности в диапазоне длин волн 1.6—2.0 мкм, оптически синхронизированных с мощными импульсами вблизи 1 мкм / А. В. Андрианов, Е. А. Анашкина, С. В. Муравьев, А. В. Ким // Квантовая электроника. — 2013. — Т. 43. — С. 256—262.

53. *Wai, P. K. A.* Nonlinear pulse propagation in the neighborhood of the zero-dispersion wavelength of monomode optical fibers / P. K. A. Wai, C. R. Menyuk, Y. C. Lee, H. H. Chen // Optics Letters. — 1986. — V. 11, is. 7. — P. 464—466.

54. *Karpman, V.* Radiation by solitons due to higher-order dispersion / V. Karpman // Physical Review E. — 1993. — V. 47. — P. 2073—2082.

55. *Akhmediev, N.* Cherenkov radiation emitted by solitons in optical fibers / N. Akhmediev, M. Karlsson // Phys. Rev. A. — 1995. — V. 51. — P. 2602—2607.

56. *Andrianov, A.* All-fiber design of hybrid Er-doped laser/Yb-doped amplifier system for high-power ultrashort pulse generation / A. Andrianov, E. Anashkina, S. Muravyev, A. Kim // Optics Letters. — 2010. — V. 35, № 22. — P. 3805—3807.

57. *Анашкина, Е. А.* Возможности нелинейно-оптического преобразования фемтосекундного излучения эрбиевой волоконной системы в диапазон 0.8—1 мкм в кварцевых световодах / Е. А. Анашкина, А. В. Андрианов, А. В. Ким // Квантовая электроника. — 2013. — Т. 43. — С. 263—270.

58. *Skryabin, D.* Colloquium: Looking at a soliton through the prism of optical supercontinuum / D. Skryabin, A. Gorbach // Reviews of Modern Physics. — 2010. — V. 82, № 2. — P. 1287.

59. *Liu, C.* Periodic interactions between solitons and dispersive waves during the generation of non-coherent supercontinuum radiation / C. Liu, E. J. Rees, T. Laurila, S. Jian, C. F. Kaminski // Optics Express. — 2012. — V. 20. — P. 6316—6324.

60. *Husakou, A. V.* Supercontinuum generation of higher-order solitons by fission in photonic crystal fibers / A. V. Husakou, J. Herrmann // Phys. Rev. Lett. — 2001. — V. 87. — P. 203901.

61. *DeLong, K. W.* Pulse retrieval in frequency-resolved optical gating based on the method of generalized projections / K. W. DeLong, D. N. Fittinghoff, R. Trebino et al. // Optics Letters. — 1994. — V. 19. — P. 2152—2154.

62. *Anashkina, E. A.* Generating tunable optical pulses over the ultrabroad range of 1.6—2.5 μm in GeO2-doped silica fibers with an Er:fiber laser source / E. A. Anashkina, A. V. Andrianov, M. Y. Koptev et al. // Optics Express. — 2012. — V. 20, № 24. — P. 27102—27107.

63. *Laegsgaard, J.* Mode profile dispersion in the generalized nonlinear Schrödinger equation / J. Laegsgaard // Optics Express. — 2007. — V. 15, № 24. — P. 16110—16123.

64. *Mendez, A.* Specialty optical fibers handbook / A. Mendez, T. F. Morse. — Academic Press, 2006. — 798 p.

65. *Qin, G. S.* Supercontinuum generation spanning over three octaves from UV to 3.85 μm in a fluoride fiber / G. S. Qin, X. Yan, C. Kito, M. S. Liao, C. Chaudhari, T. Suzuki, Y. Ohishi // Opt. Lett. — 2009. — V. 34. — P. 2015—2017.

66. *Granzow, N.* Supercontinuum generation in chalcogenide-silica step-index fibers / N. Granzow, S. P. Stark, M. A. Schmidt, A. S. Tverjanovich, L. Wondraczek, P. S. Rus-sell // Opt. Express. — 2011. — V. 19. — P. 21003—21010.

67. *Qin, G. S.* Wideband supercontinuum generation in tapered tellurite microstructured fibers / G. S. Qin, X. Yan, M. Liao, A. Mori, T. Suzuki // Laser Phys. — 2011. — V. 21. — P. 1115—1121.

68. *Xia, C. A.* Midinfrared supercontinuum generation to 4.5 μm in ZBLAN fluoride fibers by nanosecond diode pumping / C. A. Xia, M. Kumar, O. P. Kulkarni, M. N. Islam, F. L. Terry, M. J. Freeman, M. Poulain, G. Maze // Opt. Express. — 2006. — V. 31. — P. 2553—2555.

69. *Kulkarni, O. P.* Supercontinuum generation from ~1.9 to 4.5 μm in ZBLAN fiber with high average power generation beyond 3.8 μm using a thulium-doped fiber amplifier / O. P. Kulkarni, V. V. Alexander, M. Kumar, M. J. Freeman, M. N. Islam, F. L. Terry, M. Neelakandan, A. Chan // JOSA B. — 2011. — V. 28, № 10. — P. 2486—2498.

70. *Kamynin, V. A.* Supercontinuum generation up to 2.7 μm in the germinate glass-core and silica-glass-cladding fiber / V. A. Kamynin, A. S. Kurkov, V. M. Mashinsky // Laser Phys. Lett. — 2012. — V. 9. — P. 219—222.

71. *Гильденбург, В. Б.* О возможности сильного повышения частоты ионизующего лазерного импульса в газе / В. Б. Гильденбург, А. В. Ким, А. М. Сергеев // Письма в ЖЭТФ. — 1990. — Т. 51. — С. 91—93.

72. *Kim, A. V.* Nonlinear compression and frequency up-conversion of an ultrashort ionizing pulse in a plasma / A. V. Kim, S. F. Lirin, A. M. Sergeev, E. V. Vanin, L. Stenflo // Phys. Rev. A. — 1990. — V. 42. — P. 2493—2495.

73. *Wagner, N. L.* Self-compression of ultrashort pulses through ionization-induced spatiotemporal reshaping / N. L. Wagner, E. A. Gibson, T. Popmintchev, I. P. Christov, M. M. Murnane? and H. C. Kapteyn // Phys. Rev. Lett. — 2004. — V. 93, is. 17. — P. 173902 (1—4).

74. *Skobelev, S. A.* Generation of high-energy few-cycle laser pulses by using the ionization-induced self-compression effect / S. A. Skobelev, A. V. Kim, O. Willi // Phys. Rev. Lett. — 2012. — V. 108. — P. 123904 (1—5).

75. *Sergeev, A. M.* Ionization-induced leaking-mode channeling of intense short laser pulses in gases / A. M. Sergeev, M. Lontano, A. V. Kim, V. B. Gildenburg, M. D. Chernobrovtseva, V. I. Pozdnyakova, I. A. Shereshevskii // Laser and Particle Beams. — 1999. — V. 17. — P. 129—138.

76. *Sorokhov, O.* Self-Compression of Laser Pulses in Plasma / O. Shorokhov, A. Pukhov, I. Kostyukov // Phys. Rev. Lett. — 2003. — V. 91. — P. 265002 (1—4).

77. *Tajima, T.* Laser Electron Accelerator / T. Tajima, J. M. Dawson // Phys. Rev. Lett. — 1979. — V. 43. — P. 267—270.

78. *Faure, J.* Observation of laser-pulse shortening in nonlinear plasma waves / J. Faure, Y. Glinec, J. J. Santos, F. Ewald, J.-P. Rousseau, S. Kiselev, A. Pukhov, T. Hosokai, V. Malka // Phys. Rev. Lett. — 2005. — V. 95. — P. 205003 (1—4).

79. *Schreiber, J.* Complete temporal characterisation of asymmetric pulse compression in a laser wakefield / J. Schreiber, C. Bellei, S. P. D. Mangles, C. Kamperidis, S. Kneip, S. R. Nagel, C. A. J. Palmer, P. P. Rajeev, M. J. V. Streeter, Z. Najmudin // Phys. Rev. Lett. — 2010. — V. 105, is. 23. — P. 235003 (1—4).

80. *Pipahl, A.* High-intensity few-cycle laser-pulse generation by the plasma-wakefield self-compression effect / A. Pipahl1, E. A. Anashkina, M. Toncian, T. Toncian, S. A. Skobelev, A. V. Bashinov, A. A. Gonoskov, O. Willi, A. V. Kim // Phys. Rev. E. — 2013. — V. 87. — P. 033104 (1—5).

81. *Iaconis, C.* Self-referencing spectral interferometry for measuring ultrashort optical pulses / C. Iaconis, I. A. Walmsley // IEEE J. Quantum Electron. — 1999. — V. 35. — P. 501—509.

82. *Popmintchev, T.* Bright coherent ultrahigh harmonics in the keV x-ray regime from mid-infrared femtosecond lasers / T. Popmintchev, M.-C. Chen, D. Popmintchev, P. Arpin, S. Brown, et al. // Science. — 2012. — V. 336, № 6086. — P. 1287—1291.

83. Exawatt Center for Extreme Light Studies (XCELS). — URL: http://www.xcels. iapras.ru/img/site-XCELS.pdf

84. *Башинов, А. В.* Особенности ускорения и излучения электронов в поле плоской и сходящейся дипольной волны с релятивистскими амплитудами с учетом силы радиационного трения / А. В. Башинов, А. А. Гоносков, А. В. Ким, М. Марклунд, Ж. Муру, А. М. Сергеев // Квантовая электроника. — 2013. — Т. 43, № 4. — С. 291—299.

Динамика и структуры в квантовых системах и конденсированных средах

НОВАЯ ЖИЗНЬ ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ[1]

Л. Д. Фаддеев

Настоящий обзор основан на докладах автора на симпозиуме для иностранных членов Шведской академии наук в ноябре 2011 года, зимней школе “Нелинейные волны” в Нижнем Новгороде в марте 2012 года и конференции, посвященной памяти В. А. Гинзбурга в ФИАНе в мае 2012 года. Моей целью было познакомить широкую аудиторию физиков-теоретиков с быстро развивающейся областью математической физики вокруг понятия полной интегрируемости. Естественно, что изложение основано главным образом на собственном опыте и не покрывает все аспекты этого развития.

Понятие полной интегрируемости в гамильтоновой механике было создано и развито в XIX веке знаменитыми математиками и механиками Якоби, Пуассоном, Лиувиллем, Гамильтоном и другими. В современном изложении (см., например, монографию В. И. Арнольда [1]) это понятие формулируется следующим образом: на фазовом пространстве Γ с координатами $(\xi) = (\xi^1, \ldots, \xi^N)$ задана антисимметричная матрица $\Omega^{mn}(\xi)$, определяющая скобку Пуассона координат $\{\xi^m, \xi^n\} = \Omega^{mn}(\xi)$ и функций на фазовом пространстве $\{f, g\} = \Omega^{mn}\partial_m f \partial_n g$. Скобка удовлетворяет тождеству Якоби $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0$, что обеспечивается соотношением $\partial_k \Omega^{mn}\Omega^{kl} + \partial_k \Omega^{lm}\Omega^{kn} + \partial_k \Omega^{nl}\Omega^{km} = 0$. Эволюция задана уравнением Гамильтона

$$\frac{d}{dt}\xi^n = [H, \xi^n],$$

где $H(\xi)$ — выделенная функция на фазовом пространстве, называемая энергией.

Совокупность $\{\Gamma, \Omega, H\}$ называется гамильтоновой структурой. В учебниках механики фазовое пространство четномерно $N = 2L$ и в качестве ξ^n используются канонические координаты q_i и импульсы p^i, $i = 1, \ldots, L$ со скобкой $\{p^i, q_k\} = \delta^i_k$. Замечательная теорема Дарбу говорит, что если матрица Ω^{mn} не вырождена, то заменой координат матрица Ω^{mn} может быть приведена (по крайней мере, локально) к виду

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

[1]Основана на статье Л. Д. Фаддеева “Новая жизнь полной интегрируемости”, опубликованной в журнале “Успехи физических наук”, том 183, № 5 за 2013 год.

так что соответствующие координаты ξ будут каноническими. В общем случае координаты ξ могут быть выбраны в виде $\{\xi\} = \{\eta, \lambda\}$, где λ имеет нулевую скобку со всеми координатами, а матрица Ω для координат η не вырождена. Функции от λ задают тривиальные интегралы движения, и вся динамика происходит в переменных η.

Невырожденная гамильтонова структура $\{\Gamma_{2L}, \Omega, H\}$ называется вполне интегрируемой[2], если существуют $L-1$ функционально независимых от H и между собой функций $Q_i(\xi)$, $i = 1, \ldots, L-1$, таких, что $\{H, Q_i\} = 0$, $\{Q_i, Q_k\} = 0$. Функции Q_i называются коммутирующими интегралами движения. Для интегрируемых систем существует замена переменных $(\xi^m) \to (I^i, \alpha_k)$, такая, что координаты I, α — канонические: $\{I^i, I^k\} = 0$, $\{\alpha_i, \alpha_k\} = 0$, $\{I^i, \alpha_k\} = \delta^i_k$, и энергия зависит только от переменных I: $H = H(I)$. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} I = 0, \quad \frac{d}{dt}\alpha_k = \frac{\partial H}{\partial I^k},$$

так что $I^i(t) = I^i$, $\alpha_k(t) = \alpha_k(0) + \omega_k t$, $\omega_k = \frac{\partial H}{\partial I^k}$. В типичных примерах переменные α_k имеют значения на торе и поэтому называются углами. В целом набор переменных (I, α) называют переменными типа действие — угол.

В конце XIX и начале XX века поиски переменных типа действие — угол для конкретных динамических систем, обычно экзотических маятников, было увлекательным занятием для многих специалистов по классической механике. Достаточно упомянуть волчок Ковалевской или маятник Чаплыгина. Однако интерес к этой проблематике постепенно затих.

Новое развитие пришло с неожиданной стороны. В 1967 году группа американских специалистов — К. С. Гарднер, Дж. М. Грин, М. Д. Крускал, Р. М. Миура (ГГКМ) — изобрела замечательную конструкцию решения уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ) [2] $v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0$. В оригинальной работе [3] это уравнение возникло в гидродинамической задаче о течении на мелкой воде, но ГГКМ нашли его приложение в теории плазмы. Уравнение КдФ имеет замечательное решение

$$v(x,t) = \frac{A}{\mathrm{ch}^2(a(x - vt))},$$

описывающее уединенную волну, которую можно наблюдать на пологом пляже (см. иллюстрацию).

[2]В дальнейшем термин "вполне" будет опущен.

Солитоны на поверхности Финского залива в Комарове

М. Д. Крускал и Н. Дж. Забуский окрестили это решение “солитоном”, следуя моде в теории элементарных частиц. Их интуитивное представление вскоре оправдалось, когда теория солитонов заняла свое место в квантовой теории поля.

Метод ГГКМ состоял в замене переменных, в которой играют роль спектральные характеристики уравнения Шредингера

$$L\psi = k^2\psi, \quad L = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x), \tag{1}$$

где в качестве потенциала $v(x)$ взяты начальные условия уравнения КдФ. В наиболее простом случае, когда пространственная переменная x меняется на всей оси $-\infty < x < \infty$ и потенциал $v(x)$ считается исчезающим на бесконечности $v(x) \to 0,\ |x| \to \infty$, уравнение (1) имеет при положительном k решение $\psi(x,k)$ с асимптотиками $\psi(x,k) \to e^{ikx} + r(k)e^{-ikx},\ x \to -\infty,\ \psi(x,k) \to t(k)e^{ikx},\ x \to \infty$, где коэффициенты прохождения $t(k)$ и отражения $r(k)$ удовлетворяют условию унитарности $|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1$. Если $v(x)$ принимает в некотором интервале отрицательные значения, то существует дискретный спектр $k^2 = -\kappa_l^2$, $l = 1, \ldots, n$ с экспоненциально убывающими волновыми функциями $\psi_l(x) \to e^{\kappa_l x},\ x \to -\infty;\ \psi_l(x) \to c_l e^{-\kappa_l x},\ x \to \infty$.Коэффициент $t(k)$ однозначно определяется по $r(k)$ и κ_l на основании условия аналитичности. Независимые данные рассеяния $\{r(k), \kappa_l, c_l\}$ однозначно определяют потенциал $v(x)$. Тематика восстановления потенциала по спектральным данным активно развивалась в 1950-х годах в работах Гельфанда, Левитана, Крейна, Марченко, Йоста, Кона, Мозеса и др. (см. литературу в обзоре [4]). Ее вариант для оператора Шредингера на всей вещественной оси, нужный для метода ГГКМ, был рассмотрен в моей кандидатской диссертации в 1959 году [5].

ГГКМ показали, что преобразования от потенциала $v(x)$ к данным рассеяния линеаризуют уравнение КдФ:

$$
\begin{array}{ccc}
v(x) & \longrightarrow & v(x,t) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
(r(k), \kappa_l, c_l) & \longrightarrow & (r(k,t), \kappa_l, c_l(t)),
\end{array}
$$

где

$$r(k,t) = e^{-ik^3 t} r(k,0), \quad c_l(t) = e^{\kappa_l^3 t} c_l.$$

П. Лакс [6] дал важную интерпретацию роли линейной задачи (1) для описания динамики, управляемой уравнением КдФ: оператор $L(t)$ с потенциалом $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} L(t) = [L(t), A(t)],$$

где линейный дифференциальный оператор $A(t)$ третьего порядка также строится через $v(x,t)$. Тем самым динамика КдФ является изоспектральной деформацией оператора L.

Некоторое время трюк ГГКМ рассматривался как замечательная, но одиночная удача, не допускающая обобщения. Однако в 1969 году В. Е. Захаров и А. Б. Шабат [7] показали, что нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) $i\psi_t = -\psi_{xx} + g|\psi|^2\psi$ также решается аналогичным приемом. Роль спектральной задачи в этом случае играет уравнение Дирака

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \frac{d}{dx} + \left(\begin{smallmatrix} 0 & g\psi \\ g\bar{\psi} & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) \phi(x,\lambda) = \lambda \phi(x,\lambda).$$

Стало ясно, что метод обратной задачи рассеяния имеет более широкую область применимости.

В начале 1971 года я встретился с В. Е. Захаровым на конференции по обратным задачам в Новосибирске и только тогда узнал о методе ГГКМ. Обсуждая явные формулы, мы заметили, что в системе спектральных переменных одна половина линейно развивается со временем: $\arg r(k) \to \arg r(k) + k^3 t$, $\ln c_l \to \ln c_l + \kappa_l^3 t$, а вторая половина

$|r(k)|$ и κ_l от времени не зависит. Аналогия с переменными действие — угол была очевидной. Отправляясь от этой идеи и известных результатов о спектральных характеристиках оператора Шредингера, мы показали, что переход к спектральным данным действительно является каноническим преобразованием к переменным типа действие — угол. Наша статья с названием "Уравнение Кортевега — де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система" [8] положила начало теории интегрируемых моделей.

Кратко, наши результаты состоят в следующем: уравнение КдФ является гамильтоновой системой на бесконечномерном фазовом пространстве, координатами которого являются функции $v(x)$. Можно сказать, что x играет роль "номера координаты" $v(x)$. Скобка Пуассона координат имеет вид $\{v(x), v(y)\} = \delta'(x-y)$, где правая часть антисимметрична и не зависит от коодинат, так что тождество Якоби выполняется тривиально. Функционал $N = \int v(x)dx$ коммутирует со всеми $v(x)$ и, таким образом, является центральным элементом. В подпространстве $N =$ const скобка обратима и в качестве канонических координат можно взять четную и нечетную компоненты преобразования Фурье

$$v_{\mathrm{e}}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \cos 2\pi xk dx, \quad v_{\mathrm{o}} = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \frac{\sin 2\pi xk}{2\pi k} dx,$$

для $k > 0$

$$\{v_{\mathrm{e}}(k), v_{\mathrm{e}}(k')\} = 0, \ \{v_{\mathrm{o}}(k), v_{\mathrm{o}}(k')\} = 0, \ \{v_{\mathrm{e}}(k), v_{\mathrm{o}}(k')\} = \delta(k-k').$$

Функция Гамильтона имеет вид

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\frac{1}{2} v_x^2 + v^3(x)\big) dx,$$

очевидно, что она дает уравнение КдФ. Величина

$$P = \int \frac{1}{2} v^2(x) dx$$

порождает уравнение $v_t + v_x = 0$ и играет роль импульса.

Мы вычислили скобки Пуассона данных рассеяния и показали, что роль переменных типа действие играет функция $\rho(k) = \frac{k}{2} \ln(1-|r(k)|^2)$ и собственные значения κ_l. Аргумент $r(k)$ и константы c_l являются переменными типа угла. Гамильтониан H и импульс P явно выражаются через действия

$$P = \sum \kappa_l + \int_0^\infty k\rho(k)dk, \tag{2}$$

$$H = -\sum \kappa_l^3 + \int_0^\infty k^3\rho(k)dk. \tag{3}$$

Старшие нечетные моменты плотности $\rho(k)$ также являются локальными функционалами

$$Q_n = \int_0^\infty k^{2n+1}\rho(k)dk = \int_{-\infty}^\infty \Phi_n(v, v_x, \ldots)dx$$

с плотностями Φ_n, зависящими от v и первых n производных.

Формулы (2), (3) напоминают формулы квантовой теории многих частиц в смешанном представлении полей и частиц. Первые слагаемые дают вклад частиц (солитонов) с дисперсией $\epsilon(p) = -p^3$, а второе — для вторично квантованного поля с дисперсией $\omega(k) = k^3$. Тем самым интуиция Крускала и Забуского получает удовлетворительное подтверждение.

Для меня, как специалиста по квантовой теории поля, этот результат был особенно привлекательным. Он открывал новую возможность для механизма интерпретации частиц, выходящего за рамки парадигмы теории возмущений “одно поле — одна частица”. Однако нерелятивистский характер теории КдФ и странный закон дисперсии $\omega(k) = k^3$ не были привлекательными для квантования.

Замечательный релятивистский пример дало другое уравнение, решаемое методом обратной задачи теории рассеяния, а именно уравнение с жаргонным названием синус-Гордон[3] (СГ)

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \frac{m^2}{\gamma}\sin\gamma\phi = 0.$$

Переменные действие — угол для этой, очевидно, гамильтоновой системы были получены Л. Тахтаджяном и мной [9]. Помимо солитонов двух типов, отличающихся знаком топологического заряда, это уравнение имеет еще периодические решения — бризеры. Фазовое пространство солитона двумерно, как и в случае КдФ, а пространство

[3]То, что мы называем уравнением Кляйна — Гордона, следует называть уравнением Кляйна — Фока.

бризера имеет размерность 4, одна степень свободы для поступательного движения, а другая степень свободы для внутренних колебаний. Соответствующая второй степени свободы часть фазового пространства компактна и при квазиклассическом квантовании дает конечное число состояний, которые можно интерпретировать как связанные состояния солитонов с антисолитонами. В результате квазиклассический спектр состоит из солитонов и антисолитонов с массой $\frac{8m}{\gamma}$ и их связанных состояний с массами $M_n = \frac{16m}{\gamma} \sin \frac{n\gamma}{16}$, помимо вклада скалярной частицы массы m. Независимо от нас этот спектр был получен в работе Р. Ф. Дашена, Б. Хасслакера и А. Невю [10], а наша работа была послана в журнал «Physics Letters», но пропала на почте и была опубликована позже [11].

Модель СГ обнаружила ряд замечательных черт.

1. Солитоны имеют топологический заряд

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} J_0 dx, \quad J_0 = \partial \phi,$$

принимающий целые значения.

2. Масса солитонов и их фазы рассеяния обратно пропорциональны константе связи γ. Таким образом, в исходной теории со слабовзаимодействующими частицами появляются новые частицы, которые взаимодействуют сильно. Эту точку зрения я с успехом пропагандировал в моих лекциях в Гарварде и Принстоне в 1975 году. Она же отражена в моей неправильной работе [12] с амбициозным названием «Адроны из лептонов», от которой, впрочем, осталась модель трехмерного солитона, где роль топологического заряда играет инвариант Хопфа.

В первой половине 1970-х годов список интегрируемых моделей быстро пополнялся, в него попали такие системы, как магнетик Гейзенберга и нелинейное киральное поле, в котором динамические переменные принимают значения в нелинейном многообразии $\mathbb{S}^2$ и компактной группе G соответственно. В этот список вошли также задачи с дискретным пространством, например цепочка Тоды. Число исследователей теории росло, появились целые группы — в США, Японии и Франции. В Ленинграде (Петербурге) к нам с Тахтаджяном присоединились Кулиш, Корепин, Склянин, Семенов-Тян-Шанский, Рейман, Матвеев, Итс. В институте Ландау вместе с Захаровым и Шабатом образовалась группа С. П. Новикова с молодыми сотрудниками С. В. Манаковым, И. М. Кричевером и другими. В нашей монографии с Л. А. Тахтаджяном "Гамильтонов подход в теории солитонов" [11] да-но подробное изложение этого развития и приведен исчерпывающий список литературы.

Однако основной целью нашей группы было построение квантовой теории солитонов. К концу 1970-х годов стало ясно, что квантование возможно, если начинать со вспомогательной линейной задачи с некоммутирующими динамическими переменными и для нее развивать аналог спектральной теории. В результате был создан квантовый метод обратной задачи, в котором естественно появилась техника анзаца Бете, разработанная Бете на примере спиновой цепочки спинов 1/2 [13]. В этом развитии, которое привело к созданию алгебраического анзаца Бете (ААБ) приняла участие вся ленинградская группа, которую я упомянул выше, пополненная Изергиным, Тарасовым, Смирновым, Боголюбовым. Литература, посвященная этому развитию, обширна (см. статьи [14], [15] и монографию [16]).

Я опишу основные понятия ААБ на простейшем примере спиновой цепочки Гейзенберга спина 1/2. Динамическими переменными являются спиновые операторы s_n^a, $n = 1, \ldots, N$, $a = 1, 2, 3$, где N — длина цепочки, с условием периодичности $N + 1 = 1$. Операторы S_n^a удовлетворяют коммутационным соотношениям $[s_m^a, s_n^b] = i\delta_{mn}\epsilon^{abc}s_n^c$, где ϵ^{abc} — единичный антисимметричный тензор. Полное гильбертово пространство системы $\mathcal{H}$ задается как тензорное произведение пространств $\mathbb{C}^2$ для каждого спина:

$$\mathcal{H} = \prod_{n=1}^{N} \otimes \mathbb{C}^2,$$

а спиновые операторы с индексом n действуют нетривиально лишь в пространстве, занимающем n-е место в этом произведении, и задаются матрицами Паули

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

как

$$s^i = \frac{1}{2}\sigma^i$$

Гамильтониан имеет вид

$$H = J\sum_{n=1}^{N} s_n^a s_{n+1}^a,$$

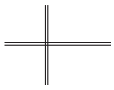
причем $s^a_{N+1} = s^a_1$. ААБ основан на использовании вспомогательной линейной задачи

$$\Phi_{n+1} = L_n(\lambda)\Phi_n, \tag{4}$$

где матрица $L_n(\lambda)$ имеет вид

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + s^3_n & is^-_n \\ is^+_n & \lambda - s^3_n \end{pmatrix}, \quad s^\pm_n = s^1_n \pm s^2_n.$$

Можно сказать, что $L_n(\lambda)$ является блок-матрицей в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, где в первом $\mathbb{C}^2$ реализуются спиновые операторы s_n, а второе явно задается матрицей $L_n(\lambda)$. Первое пространство естественно называть квантовым, а второе — вспомогательным. Удобно сопоставить матрице $L_n(\lambda)$ граф

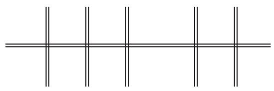
$L_n(\lambda) \sim$  ,

где вертикальная линия задает действие в квантовом пространстве, а горизонтальная — во вспомогательном.

Матрица монодромии системы (4) имеет вид

$$M(\lambda) = \overrightarrow{\prod} L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}$$

и играет роль «данных рассеяния». Ее граф имеет вид

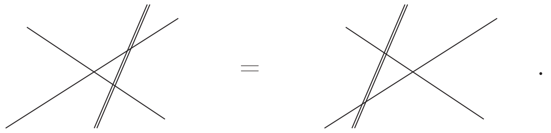
$M(\lambda) \sim$ 

и представляет собой оператор в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}$. Перестановочные соотношения для матричных элементов выводятся из локальных соотношений для спинов s^a_n следующим образом. Для матриц $L^1_n(\lambda)$ и $L^2_n(\mu)$, ассоциированных с одним и тем же квантовым пространством n и двумя вспомогательными 1 и 2, проверяется соотношение

$$R^{12}(\lambda - \mu) L^1_n(\lambda) L^2_n(\mu) = L^2_n(\mu) L^1_n(\lambda) R^{12}(\lambda - \mu),$$

где $R^{12}(\lambda)$ — матрица в тензорном произведении вспомогательных пространств. Ее граф аналогичен графу для L_n:

$R(\lambda) \sim$  , где обе линии соответствуют вспомогательным пространствам. Коммутационные соотношения для L_n изображаются картинкой



Из локального соотношения немедленно следует аналогичное соотношение для монодромии:

$$R^{12}(\lambda-\mu)M^1(\lambda)M^2(\mu)=M^2(\mu)M^1(\lambda)R^{12}(\lambda-\mu). \qquad (5)$$

Трудоемкие вычисления скобок Пуассона в работах 1970-х годов замечательным образом заменяются элементарной алгеброй.

Из (5) следует, что семейство операторов $T(\lambda) = \operatorname{tr} M(\lambda) = A(\lambda)+D(\lambda)$ коммутативно, $[T(\lambda),T(\mu)]=0$. Можно показать, что гамильтониан содержится в этом семействе:

$$H=\frac{dT(\lambda)}{d\lambda}T^{-1}(\lambda)|_{\lambda=i/2}.$$

Очевидно, что $T(\lambda)$ является полиномом по λ степени N с $N-1$ нетривиальными коэффициентами — функциями от динамических переменных s_n^a:

$$T(\lambda)=2\lambda^N+\sum_{n=1}^{N-1}Q_n(s)\lambda^n.$$

Операторы Q_n, $n=1,\ldots,N-1$ вместе с третьей компонентой полного спина

$$S^3=\sum_n \sigma_n^3$$

образуют семейство N коммутирующих интегралов движения. Естественно считать, что спиновая цепочка задает систему с N степенями свободы (в квазиклассическом случае фазовое пространство одного спина является двумерной сферой $\mathbb{S}^2$, при квантовании ей соответствует конечномерное гильбертово пространство $\mathbb{C}^2$). Таким образом, рассматриваемая система вполне интегрируема, и роль переменных действия играют операторы семейства $T(\lambda)$. Роль переменных типа углов играют недиагональные элементы матрицы монодромии.

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{H}$ вектор Ω старшего спина $S_n^+\Omega=0$. Оператор $C(\lambda)$ его аннулирует $C(\lambda)\Omega=0$. Состояние

$$\Omega(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)=\prod_{i=1}^{l}B(\lambda_i)\Omega$$

является собственным вектором H:

$$H\Omega(\{\lambda\}) = J\sum_{i=1}^{l}\epsilon(\lambda_i)\Omega(\{\lambda\}),$$

если λ_i удовлетворяет системе алгебраических уравнений, впервые возникших в работе Бете. Я не буду ее приводить, отсылая читателя к обзору [30], но отмечу, что дисперсия $\epsilon(\lambda)$ отрицательна при всех λ.

Обнаружение связи естественного квантования метода обратной задачи и формул анзаца Бете, полученных совершенно из других соображений, является замечательным примером развития современной математической физики. Оно стало отправной точкой для обобщений, идущих далеко от первоначального трюка Бете.

Уравнения Бете позволяют провести предел $N \to \infty$. Ясно, что при этом надо строго следить за отбором допустимых состояний, так как наивный предел приводит к бесконечному тензорному произведению, имеющему несчетный базис. Такой отбор зависит от знака константы J. При $J < 0$ возбуждения над состоянием Ω имеют положительную энергию, и следует рассматривать состояния, для которых оператор $Q = S^3 - \frac{1}{2}N$ имеет конечные положительные значения. Операторы $S^{\pm}$ теряют смысл в пределе $N \to \infty$. Таким образом, симметрия $SU(2)$ нарушается, и состояниями являются магноны с зарядом $Q = 1$ и их связанные состояния с $Q = 2, 3$ ... . Мы имеем дело с ферромагнетиком.

При $J > 0$ картина намного интереснее. Для построения вакуума следует заполнить море Дирака состояниями с отрицательной энергией. Это возможно, поскольку спектр, получаемый из анзаца Бете, имеет фермиевский характер, корни λ_i не могут совпадать. Построение вакуума было осуществлено Л. Хюльтеном в 1937 году [17], но корректное построение возбуждений долгое время было ошибочным. В работе [18] Л. А. Тахтаджян и я показали, что одночастичные возбуждения имеют спин $1/2$ (а не 1, как долгое время считалось). Таким образом, при $J > 0$ симметрия $SU(2)$ не нарушается, все три компоненты полного спина имеют смысл и возбуждением является одна частица со спином $1/2$. Мы имеем дело с антиферромагнетиком.

Можно сказать, что теория спиновой цепочки является замечательным примером для теории многочастичных систем: в ней реализуются нарушение симметрии, возникновение новых зарядов, построение нетривиального вакуума и т. д. Думаю, что мои сотрудники, упомянутые выше, согласятся, что получили на этой тематике стимулирующую тренировку.

В течение 1980-х годов тематика ААБ быстро развивалась и привела к значительным обобщениям. Среди них следующие.

1. Модели со старшими спинами. Было показано, что наивные обобщения гамильтониана Гейзенберга на спин 1 и выше не интегрируемы. Однако П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин и Е. К. Склянин показали, что существует локальная плотность энергии, для которой интегрируемость выполняется [19]. Для спина 1 эта плотность была найдена ранее В. А. Фатеевым и имеет вид $\sigma_n^a \sigma_{n+1}^a - (\sigma_n^a \sigma_{n+1}^b)^2$ [20].

2. Анизотропия. Магнетик спина $1/2$ с локальной плотностью $J_1\sigma_n^1\sigma_{n+1}^1 + J_2\sigma_n^2\sigma_{n+1}^2 + J_3\sigma_n^3\sigma_{n+1}^3$ называется XYZ-моделью. Частично нарушенная симметрия XXZ-модели с $J_1 = J_2$ подпадает под формализм ААБ. Однако, как показали Кулиш и Решетихин [21], в случае старшего спина вспомогательная линейная задача имеет смысл, только если динамические переменные удовлетворяют соотношению

$$[s_n^+, s_n^-] = \frac{\sin \gamma s_n^3}{\sin \gamma},$$

где γ — параметр анизотропии. Эта формула привела к значительному прогрессу в математике — построению теории квантовых групп (Е. К. Склянин [22], В. Г. Дринфельд [23], М. Джимбо [24], Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян и Л. Д. Фаддеев [25]), которая позже вернулась в физику как симметрия конформной теории поля (Л. Д. Фаддеев, Л. А. Тахтаджян [26], Ж.-Л. Жерве, А. Невю [27]). Историю этого развития можно найти в моем обзоре [28].

3. Другие группы. Формализм анзаца Бете обобщается на группы старшего ранга, уравнения анзаца Бете формулируются в терминах диаграмм Дынкина (Решетихин [29]).

4. Непрерывные пределы — переход к пределу $\Delta \to 0$. Например, модель НУШ может быть получена из спиновой цепочки.

5. Неоднородные задачи. Важные примеры можно получить, выбирая разные значения параметра λ для разных точек решетки. В частности, альтернирование $\lambda_{2n} = \lambda + \kappa$, $\lambda_{2n+1} = \lambda - \kappa$ позволяет построить естественный дискретный аналог квантовой модели СГ.

В результате стало ясно, что спиновые цепочки являются универсальным классом квантовых интегрируемых систем. Мой обзор [30] содержит более подробное изожение этой ситуации.

Следует сказать, что многие положения ААБ имеют интерпретацию в теории классических моделей статистической физики на двумерной решетке. Эта тематика, идущая от работ Л. Онзагера [31], была развита Э. Либом [32], Р. Бакстером [33] и имеет свою историю. В нашей стране по этому направлению работала группа в Протвино, организованная Ю. Г. Строгановым и В. В. Бажановым [34, 35]. Роль локального оператора $L_n(\lambda)$ играет статистический вес. Однако в этом случае квантовое и вспомогательное пространства идентичны, так что, например, спиновая цепочка старшего спина не имеет интерпретации в статистической физике.

Наконец, еще один источник соотношений типа (5) дает теория рассеяния, в которой основную роль сыграли работы Ч. Янга [36] и Э. Брезена, Ж. Зин-Жюстена [37]. Работы Р. Бакстера [38] и Янгов [39] сыграли важную эвристическую роль в нашей конструкции ААБ. Поэтому Леон Тахтаджян и я в работе [15] назвали соотношения типа (5) уравнениями Янга — Бакстера.

В рамках теории факторизованного рассеяния А. Б. Замолодчиков и Ал. Б. Замолодчиков получили точное решение нелинейной σ-модели [40].

Как читатель уже заметил, я рассказываю здесь о методах и результатах, полученных главным образом в Ленинграде. Однако тематика квантовых интегрируемых моделей в 1980—1990-е годы стала очень популярной. В частности, были установлены замечательные связи с конформной теорией поля, основы которой заложены в [41]. В работах А. Б. Замолодчикова и его коллег интегрируемые модели рассматривались как деформации конформных моделей специальными локальными операторами. Интересно, что квантование уравнения КдФ [42] оказалось важным для квантования конформной теории поля.

Еще одно направление, идущее от работ Янга и Янга [39] и развитое Ал. Б. Замолодчиковым [43], Дестри и де Вега [44], связано с построением термодинамического анзаца Бете.

При всей привлекательности изложенных методов нельзя забывать, что до недавнего времени их приложения в физике ограничивались задачами в одномерном пространстве. Ситуация изменилась в конце 1990-х, когда Л. Н. Липатов обнаружил, что высокоэнергетическое рассеяние в рамках реджеизации описывается формализмом спиновых цепочек [45]. Роль узла решетки играет номер оператора, входящего в корреляционную функцию. Г. П. Корчемский и я интерпретировали наблюдение Л. Н. Липатова в терминах ААБ для цепочки группы $SL(2)$ со спином -1 [46].

Надо сказать, что интерес к спиновым цепочкам в связи с физикой высоких энергий проявил Р. Фейнман в конце своей научной деятельности[4].

[4] Я как-то получил от издательства «World Scientific» аннотацию его доклада, где была такая фраза: «Если кто-нибудь даст мне бете-анзац для числа поляризаций больше 2, я смогу описать высокоэнергетическое рассеяние». Две поляризации, очевидно, соответствуют спину 1/2, так что ему нужны были интегрируемые цепочки старшего спина — т. е. то, что было сделано в нашей группе. К сожалению, я узнал об этих словах Р. Фейнмана уже после его смерти, так что не мог сообщить ему о наших результатах. Но при посещении Пасадены я успел войти в кабинет Фейнмана, когда тот еще не был занят Джоном Шварцем. На большой доске написаны мелом отрывки вычислений, и среди них помещена «памятка»: «Выучить: 1) турбулентность, 2) квантовый эффект Холла, 3) бете-анзац». Очень заинтересованный, я спросил, есть ли какие-нибудь материалы по этому

Вскоре после прорыва Липатова аспекты интегрируемости появились в теории суперсимметричных моделей калибровочных полей. В работе Горского, Кричевера, Маршакова, Миронова и Морозова (ГКМ^3) [47] было показано, что алгебро-геометрическая техника, развитая Дубровиным, Кричевером и Новиковым, дает адекватную интерпретацию формулы Зайберга — Виттена [48] для суперпотенциала в $N = 2$ калибровочной теории. После этой работы очень быстро начали появляться многочисленные публикации, в названиях которых стоял термин «интегрируемость». В противоположность первоначальной истории с уравнением КдФ здесь классическая динамическая проблема участвует в решении квантовой задачи. Однако квантование техники интегрируемости, проведенное Н. Некрасовым и С. Шаташвили, оказалось также применимым к суперсимметричной калибровочной теории и использовалось в работах [49] для классификации вакуумных состояний. Квантовая деформация алгебраической кривой ГКМ^3 оказалась связанной с анзацем Бете для спиновых цепочек XXX, XXZ и XYZ в размерности пространства-времени $D = 2, 3, 4$ соответственно.

Спиновые цепочки появились также в подходе к аномальным размерностям в теории суперсимметричного поля Янга — Миллса. В работе Дж. Минахана и К. Зарембо [50] рассматривались корреляционные функции цепочки из двух локальных операторов $W(x)$ и $Z(x)$, которым была сопоставлена спиновая цепочка с состоянием со спином вверх для $W(x)$ и спином вниз для $Z(x)$. Энергия этой цепочки интерпретировалась как аномальная размерность произведения операторов. Было показано, что цепочка совпадала с XXX-моделью спина $1/2$. Работа [50] породила обширную деятельность, главным образом в Европе: Швеции, Франции и Германии. Здесь особенно актуальной стала техника термодинамического бете-анзаца. В рамках данной статьи я не могу описать весь этот прогресс, ограничусь ссылками на уже существующие обзоры [51, 52].

Новые приложения к релятивистской квантовой теории поля показали силу и универсальность понятия интегрируемости и формализма ААБ. Можно сказать, что техника интегрируемости прорвалась на самые передовые позиции в современной теоретической физике высоких энергий и мы можем ожидать появления новых замечательных результатов.

поводу, и любезная секретарша принесла мне большую пачку листов с записями Фейнмана. Почерк был очень аккуратный, и каждый лист имел номер и дату. Уже на первых страницах я нашел конспект некоторых наших работ, фамилии Решетихина и Склянина. Однако за недостатком времени я не успел подробно изучить эти листы, и мне пришлось уехать. А попытки найти этот материал в архивах Калифорнийского технологического института оказались безуспешными.

Работа над этой статьей частично поддержана грантами РФФИ 11-01-00570-а, 11-01-12037-офи-м, программой РАН “Математические проблемы нелинейной динамики”.

Список литературы

[1] *Арнольд, В. И.* Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. — 3-е изд. — М. : Наука, 1989.

[2] *Gardner, C. S.* Method for solving the Korteveg-de-Vries equation / C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura // Phys. Rev. Lett. — 1967. — V. 19. — P. 1095.

[3] *Korteweg, D. J.* On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves / D. J. Korteweg and G. de Vries // Philosophical Magazine. — 1895. — V. 39, is. 240. — P. 422—443.

[4] *Фаддеев, Л. Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния / Л. Д. Фаддеев // Успехи мат. наук. — 1959. — Т. 14, № 4. — С. 57—119.

[5] *Фаддеев, Л. Д.* О связи S-матрицы и потенциала для одномерного оператора Шредингера / Л. Д. Фаддеев // Доклады АН СССР. — 1958. — Т. 120, № 1. — С. 63—66.

[6] *Lax, P. D.* Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves / P. D. Lax // Commun. Pure Appl. Math. — 1968. — V. 21. — P. 467.

[7] *Захаров, В. Е.* Точная теория самофокусировки и одномерной самомодуляции волны в нелинейной среде / В. Е. Захаров и А. Б. Шабат // ЖЭТФ. — 1971. — Т. 61. — С. 118.

[8] *Захаров, В. Е.* Уравнения Кортевега — Де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система / В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев // Функц. анализ и его прил. — 1971. — Т. 5, вып. 4. — С. 18—27.

[9] *Фаддеев, Л. Д.* Существенно нелинейная одномерная модель классической теории поля / Л. А. Тахтаджян и Л. Д. Фаддеев // Теорет. и мат. физика. — 1975. — Т. 21. — С. 160—174.

[10] *Dashen, R. F.* The Particle Spectrum in Model Field Theories from Semiclassical Functional Integral Techniques / R. F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu // Phys. Rev. D. — 1975. — V. 11. — P. 3424.

[11] *Тахтаджян, Л. А.* Гамильтонов подход в теории солитонов / Л. А. Тахтаджян и Л. Д. Фаддеев. — М. : Наука, 1986. — 528 с.

[12] *Фаддеев, Л. Д.* Адроны из лептонов / Л. Д. Фаддеев // Письма в ЖЭТФ. — 1975. — Т. 21, № 2. — С. 141—144.

[13] *Bethe, H. A.* On the theory of metals. 1. Eigenvalues and eigenfunctions for the linear atomic chain / H. A. Bethe // Z. Phys. — 1931. — V. 71. — P. 205.

[14] *Склянин, Е. К.* Квантовый метод обратной задачи / Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян и Л. Д. Фаддеев // Теорет. и мат. физика. — 1979. — Т. 40, № 2. — С. 194—220.

[15] *Тахтаджян, Л. А.* Квантовый метод обратной задачи и XYZ-модель Гейзенберга / Л. А. Тахтаджян и Л. Д. Фаддеев // Успехи мат. наук. — 1979. — Т. 34, № 5. — С. 13—63.

[16] *Боголюбов, Н. М.* Корелляционные функции интегрируемых задач и квантовый метод обратной задачи / Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин и В. Е. Корепин. — М. : Наука, 1992. — 240 с.

[17] *Hulthen, L.* Uber das Austauschproblem eines Kristalles / L. Hulthen // Arkiv. Mat. Astron. Fys. — 1938. Bd 26A. — S. 1—106.

[18] *Faddeev, L. D.* What is the spin of a spin wave? / L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan // Phys. Lett. A. — 1981. — V. 85. — P. 375.

[19] *Kulish, P. P.* Yang-Baxter Equation and Representation Theory: I / P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin and E. K. Sklyanin // Lett. Math. Phys. — 1981. — Is. 5. — P. 393.

[20] *Замолодчиков, А. Б.* Факторизованная S-матрица и интегрируемая цепочка Гейзенберга спина 1 / А. Б. Замолодчиков и В. А. Фатеев // Ядерная физика. — 1980. — Т. 32. — С. 581.

[21] *Кулиш, П. П.* Квантовая линейная задача для уравнения синус-Гордон и высшие представления / П. П. Кулиш и Н. Ю. Решетихин // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1981. — Т. 101. — С. 101—110.

[22] *Склянин, Е. К.* Об одной алгебре, порождаемой квадратичными соотношениями / Е. К. Склянин // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, вып. 2. — С. 214.

[23] *Дринфельд, В. Г.* Квантовые группы / В. Г. Дринфельд // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1986. — Т. 155. — С. 18—49.

[24] *Jimbo, M.* A q difference analog of U(g) and the Yang-Baxter equation / M. Jimbo // Lett. Math. Phys. — 1985. — V. 10. — P. 63.

[25] *Решетихин, Н. Ю.* Квантование групп Ли и алгебр Ли / Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян и Л. Д. Фаддеев // Алгебра и анализ. — 1989. — Т. 1, вып. 1. — С. 178—206.

[26] *Faddeev, L. D.* Liouville model on the lattice / L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan // Lect. Notes Phys. — 1986. — V. 246. — P. 166.

[27] *Gervais, J.-L.* Nonstandard Two-Dimensional Critical Statistical Models From Liouville Theory / J.-L. Gervais and A. Neveu // Nucl. Phys. B. — 1985. — V. 257. — P. 59.

[28] *Faddeev, L. D.* History and Perspectives of Quantum Groups / L. D. Faddeev // Milan J. of Math. — 2006. — V. 74. — P. 279—294.

[29] *Reshetikhin, N.* S-matrices in integrable models of isotropical magnetic chains. 1 / N. Reshetikhin // J. Phys. A. — 1991. — V. 24. — P. 3299.

[30] *Faddeev, L. D.* How algebraic Bethe ansatz works for integrable model. — 1996. — URL: http://arxiv.org/pdf/hep-th/9605187.pdf.

[31] *Onsager, L.* Crystal statistics: 1. A Two-dimensional model with an order disorder transition / L. Onsager // Phys. Rev. — 1944. — V. 65. — P. 117.

[32] *Lieb, E. H.* Residual Entropy of Square Ice / E. H. Lieb // Phys. Rev. — 1967. — V. 162. — P. 162.

[33] *Baxter, R. J.* Exactly solved models in statistical mechanics / R. J. Baxter. — L. : Academic Press, 1982.

[34] *Stroganov, Y. G.* A new calculation method for partition functions in some lattice models / Y. G. Stroganov // Phys. Lett. A. — 1979. — V. 74. — P. 116.

[35] *Bazhanov, V. V.* Chiral Potts model as a descendant of the six vertex model / V. V. Bazhanov and Yu. G. Stroganov // J. Statist. Phys. — 1990. — V. 59. — P. 799.

[36] *Yang, C.-N.* Some exact results for the many body problems in one dimension with repulsive delta function interaction / C.-N. Yang // Phys. Rev. Lett. — 1967. — V. 19. — P. 1312.

[37] *Brezin, E.* Un problème à N corps soluble / E. Brezin, J. Zinn-Justin // Compt. Rend. Acad. Sci. — 1968. — V. B263, № 11. — P. 670—673.

[38] *Baxter, R. J.* One-dimensional anisotropic Heisenberg chain / R. J. Baxter // Annals Phys. — 1972. — V. 70. — P. 323.

[39] *Yang, C.-N.* Thermodynamics of one-dimensional system of bosons with repulsive delta function interaction / C.-N. Yang and C. P. Yang // J. Math. Phys. — 1969. — V. 10. — P. 1115.

[40] *Zamolodchikov, A. B.* Factorized s Matrices in Two-Dimensions as the Exact Solutions of Certain Relativistic Quantum Field Models / A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov // Annals Phys. — 1979. — V. 120. — P. 253.

[41] *Belavin, A. A.* Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory / A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov // Nucl. Phys. B. — 1984. — V. 241. — P. 333.

[42] *Bazhanov, V. V.* Integrable structure of conformal field theory, quantum KdV theory and thermodynamic Bethe ansatz / V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov and A. B. Zamolodchikov // Commun. Math. Phys. — 1996. — V. 177. — P. 381 ; http://arxiv.org/abs/hep-th/9412229.

[43] *Zamolodchikov, Al. B.* Thermodynamic Bethe Ansatz In Relativistic Models. Scaling Three State Potts And Lee-yang Models / Al. B. Zamolodchikov // Nucl. Phys. B. — 1990. — V. 342. — P. 695.

[44] *Destri, C.* New approach to thermal Bethe ansatz / C. Destri and H. J. de Vega. — URL: http://arxiv.org/abs/hep-th/9203064.

[45] *Lipatov, L. N.* High-energy asymptotics of multicolor QCD and two-dimensional conformal field theories / L. N. Lipatov // Phys. Lett. B. — 1993. — V. 309. — P. 394.

[46] *Faddeev, L. D.* High-energy QCD as a completely integrable model / L. D. Faddeev and G. P. Korchemsky // Phys. Lett. B. — 1995. — V. 342. — P. 311 ; http://arxiv.org/abs/hep-th/9404173.

[47] *Gorsky, A.* Integrability and Seiberg-Witten exact solution / A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov // Phys. Lett. B. — 1995. — V. 355. — P. 466 ; http://arxiv.org/abs/hep-th/9505035.

[48] *Seiberg, N.* Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory / N. Seiberg and E. Witten // Nucl. Phys. B. — 1994. — V. 426. — P. 19 ; Erratum // Ibid. — 1994. — V. 430. — P. 485 ; http://arxiv.org/abs/hep-th/9407087.

[49] *Nekrasov, N. A.* Supersymmetric vacua and Bethe ansatz / N. A. Nekrasov and S. L. Shatashvili // Nucl. Phys. Proc. Suppl. — 2009. — V. 192/193. — P. 91 ; http://arxiv.org/abs/0901.4744 ; *Nekrasov, N. A.* Quantum integrability and supersymmetric vacua / N. A. Nekrasov and S. L. Shatashvili // Prog. Theor. Phys. Suppl. — 2009. — V. 177. — P. 105 ; http://arxiv.org/abs/0901.4748.

[50] *Minahan, J. A.* The Bethe-ansatz for $N = 4$ superYang-Mills / J. A. Minahan and K. Zarembo // JHEP03. — 2003. — P. 013 ; http://arxiv.org/abs/hep-th/0212208.

[51] *Beisert, N.* Review of AdS/CFT Integrability: An Overview / N. Beisert, C. Ahn, L. F. Alday, Z. Bajnok, J. M. Drummond, L. Freyhult, N. Gromov and R. A. Janik et al. // Lett. Math. Phys. — 2012. — V. 99. — P. 3 ; http://arxiv.org/abs/1012.3982.

[52] *Dorey, P.* Quantum integrable models and gauge-string duality / P. Dorey, J. Minahan, A. Tseytlin // J. Phys. A. — 2011. — V. 44, № 12. — P. 120301.

ИСТОЧНИКИ ОДНОФОТОННЫХ И ПЕРЕПУТАННЫХ ДВУХФОТОННЫХ ПОЛЕЙ И ЗАДАЧИ КВАНТОВОЙ ИНФОРМАТИКИ

А. А. Калачёв

Современное развитие информационных технологий неразрывно связано с переходом от электронных к полностью оптическим методам обработки информации, которые обеспечивают не только высокую скорость передачи данных, но и реализацию квантовых алгоритмов, гарантирующих максимальные на сегодняшний день степень защиты информации (квантовая криптография) и скорость обработки информации (квантовые вычисления). Одной из проблем развития квантово-оптических технологий является создание эффективных и качественных источников однофотонных и перепутанных двухфотонных состояний электромагнитного поля, которые стали основой реализации большинства протоколов. В статье дан краткий обзор основных задач квантовой информатики, решаемых с помощью таких состояний поля, и актуальных направлений разработок соответствующих источников. Основное внимание уделяется однофотонным источникам, основанным на явлении спонтанного параметрического рассеяния света в нелинейных средах.

1. Основные определения

В рамках настоящего обзора под однофотонным состоянием будем понимать элементарное возбуждение пространственно-временной моды электромагнитного поля. Элементарный характер возбуждения означает, что состояние поля является неделимым в процессе фотодетектирования, а пространственно-временная мода есть не что иное, как суперпозиция мод бегущих волн, т. е. волновой пакет. Именно однофотонные волновые пакеты, наиболее близко отвечающие интуитивному понятию фотона, используются в качестве элементарных носителей квантовой информации — кубитов, которые можно передавать на большие расстояния (flying qubits). Формальное определение однофотонного волнового пакета выглядит следующим образом [1]:

$$|\psi\rangle = \sum_s \int d\mathbf{k}\, F_s(\mathbf{k})\, a^\dagger_{\mathbf{k}s} |0\rangle, \quad \sum_s \int d\mathbf{k} \left|F_s(\mathbf{k})\right|^2 = 1. \tag{1}$$

Здесь $a^\dagger_{\mathbf{k}s}$ — оператор рождения фотона в моде плоской волны, соответствующей волновому вектору $\mathbf{k}$ и поляризации, задаваемой индексом s. Функция F называется амплитудой однофотонного состояния. Квадрат модуля амплитуды задает плотность вероятности обнаружить фотон с заданным волновым вектором и поляризацией. Определение (1) подразумевает, что спектральная ширина однофотонного волнового пакета существенно меньше несущей частоты.

Аналогичным образом вводится понятие двухфотонного волнового пакета [1]:

$$\left|\psi\right\rangle = \sum_{s,s'} \iint d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, F_{ss'}\left(\mathbf{k},\mathbf{k}'\right) a^{\dagger}_{\mathbf{k}s} a^{\dagger}_{\mathbf{k}'s'} \left|0\right\rangle, \quad \sum_{s,s'} \iint d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}' \left|F_{ss'}\left(\mathbf{k},\mathbf{k}'\right)\right|^{2} = 1. \qquad (2)$$

Если состояние (2) нельзя представить в виде произведения однофотонных состояний, соответствующих двум пространственно-временным модам, то оно называется перепутанным (entangled state). Перепутанные состояния кубитов играют особую роль в квантовой информатике, отвечая за различные неклассические эффекты [2], такие как нарушение неравенств Белла и квантовая телепортация.

2. Области применения однофотонных и двухфотонных состояний

Основными областями применения однофотонных и двухфотонных перепутанных состояний электромагнитного поля являются квантовая криптография, оптические квантовые вычисления и квантовая метрология.

Квантовая криптография. Задачей квантовой криптографии на сегодняшний день является реализация квантового распределения ключа (КРК) [3]. Следует сразу отметить, что современные коммерческие криптографические системы реализуют КРК с помощью ослабленных лазерных импульсов, т. е. прекрасно обходятся без однофотонных и перепутанных состояний. Однако такая реализация обладает двумя существенными недостатками. Первый недостаток состоит в том, что абсолютная секретность используемых протоколов гарантируется не только законами квантовой механики, но и точным техническим воплощением. Другими словами, доказательство безопасности того или иного протокола основано не только на законах квантовой механики, но и на том предположении, что используемые устройства (источники, детекторы, генераторы случайных чисел) работают согласно их спецификации. Только в этом случае теоретическая модель, используемая при доказательстве секретности, соответствует действительности. Наличие отклонений дает возможность взлома, что продемонстрировано экспериментально [4—7]. Поэтому такая криптография называется аппаратно зависимой, а полная безопасность гарантируется фактически только тогда, когда потребители сами производят криптографические устройства. Второй недостаток состоит в том, что радиус действия современных криптографических систем теоретически ограничивается областью 300—350 километров, что связано с потерями фотонов, распространяющихся через оптическое волокно. В квантовой связи, в отличие от классической, нельзя использовать оптические усилители для регенерации сигналов, что связано с невозможностью клонирования неизвестных квантовых состояний. Для устранения обоих ограничений в настоящее время предлагается применять протоколы, основанные на перепутанных двухфотонных состояниях электромагнитного поля. Концепция аппаратно независимой криптографии [8—10] подразумевает использование протоколов типа E91 [11], где уровень безопасности определяется проверкой неравенств Белла. Что касается реализации дальнодействующей квантовой связи, то надежды возлагаются на квантовые повторители [12, 13], в основе которых лежит протокол обмена перепутыванием. При этом оказывается, что в обоих случаях однофотонные источники могут существенно повысить скорость КРК [14—16].

Квантовые вычисления. Однофотонные и двухфотонные перепутанные состояния являются основным ресурсом линейных оптических квантовых вычислений [17]. Поскольку исследования в этой области носят пока еще фундаментальный характер, в настоящее время трудно сказать, какие источники окажутся наиболее востребованными. Можно лишь отметить, что одним из актуальных направлений исследований является разработка интегральных оптических квантовых схем [18—21] (см. также обзор [22]), которые в перспективе будут включать в себя как источники, так и детекторы квантовых состояний поля.

Квантовая метрология. В области метрологии, а точнее радиометрии, коррелированные пары фотонов можно использовать для абсолютной калибровки фотодетекторов (см. обзоры [23, 24]), что является важнейшей практической задачей. Кроме того, однофотонные источники и/или детекторы, разрешающие число фотонов, считаются основой переопределения единицы измерения силы света — канделы в терминах числа фотонов [25, 26], чему в настоящее время посвящен крупный международный проект «Квантовая кандела» [http://www.quantumcandela.org/].

3. Основные направления исследований и экспериментальные достижения в области создания однофотонных источников

В настоящее время проблема создания эффективного однофотонного источника разрабатывается по двум направлениям: создание источника на основе спонтанного излучения одиночной квантовой системы (квантовые точки, центры окраски, атомы или ионы в оптической ловушке) и создание источника на основе нелинейных оптических явлений (спонтанное параметрическое рассеяние, четырехволновое смешение) в протяженных средах (кристаллы, волноводы, волокна). Особенности каждого подхода подробно рассмотрены в обзорах [27—33]. Поэтому ниже сформулированы только принципиальные моменты и отмечены самые последние экспериментальные результаты.

3.1. Требования к однофотонным источникам

Идеальный однофотонный источник должен удовлетворять следующим требованиям:

- световой импульс испускается в заданную пространственно-временную моду электромагнитного поля. Практически это означает, что квантовое состояние поля светового импульса должно быть чистым (что означает неразличимость испускаемых фотонов и спектральную ограниченность однофотонных импульсов), а время и направление испускания не должны меняться случайным образом;
- вероятность обнаружения одного фотона в световом импульсе на выходе источника (эффективность источника) равна 100 %. Это означает, что световой импульс, с одной стороны, не должен содержать вакуумного состояния и, с другой стороны, не должен содержать более одного фотона.

Важнейшим параметром, описывающим качество однофотонного источника, является степень соответствия состояния на выходе источника тому состоянию, которое нужно получить. Если состояние на выходе описывается оператором плотности ρ, а целевое состояние задается вектором $|\psi\rangle$, то качество F (Fidelity) источника определяется как $F = \langle\psi|\rho|\psi\rangle$. Эта величина равна 1 в случае полного соответствия, и равна 0 в случае максимального несоответствия (когда состояния ортогональны). В экспериментах, как правило, измеряется значение автокорреляционной функции генерируемого поля при нулевой задержке $g^{(2)}(0) = \left\langle a^{\dagger 2}a^2 \right\rangle \Big/ \left\langle a^{\dagger}a \right\rangle^2$, где $a\left(a^{\dagger}\right)$ — операторы уничтожения (рождения) фотонов в заданной пространственно-временной моде на выходе источника. В случае однофотонного состояния эта величина должна быть равна нулю. При условии генерации в одну пространственно-временную моду поля (стабильный волновой пакет) существует однозначная связь между качеством F и значением автокорреляционной функции, которую можно записать в виде $F = 1 - g^{(2)}(0)/2$, когда $g^{(2)}(0) << 1$. Отличие качества F от единицы, или величины $g^{(2)}(0)$ от нуля, описывает вклад многофотонных состояний в данную моду поля. Если же генерация многомодовая, то подходящей мерой является видность антикорреляционного провала Хонга — Оу — Манделя [34], которая достигает 100 % только при условии, что два состояния на входе в интерферометр являются однофотонными и чистыми, т. е. неразличимыми.

Приведем некоторые теоретические оценки, иллюстрирующие требования, предъявляемые к однофотонным источникам. Согласно работе [15] квантовый повторитель на основе двух однофотонных источников будет эффективнее остальных вариантов (прежде всего, известной схемы DLCZ [35]) при условии, что эффективность генерации однофотонного импульса превышает 67 %, а вклад двухфотонных состояний не превышает 10^{-4}. В области линейных оптических квантовых вычислений для демонстрации простейших квантовых вентилей необходим источник с эффективностью не менее 90 % и значением функции автокорреляции не более 0,07 [36]. Однако требования существенно ужесточаются, если речь идет о простейших квантовых алгоритмах. Кроме того, в отличие от квантовой криптографии, для квантовых вычислений нужны исключительно детерминированные источники неразличимых однофотонных состояний. Наконец, существенные требования выдвигаются со стороны устройств оптической квантовой памяти, использование которых необходимо для реализации квантовых вычислений и квантовых повторителей [37—40]. В ближайшей перспективе устройства квантовой памяти смогут записывать и воспроизводить оптические импульсы, спектральная ширина которых порядка нескольких гигагерц (в настоящее время речь идет о десятках мегагерц).

3.2. Источники на основе спонтанного излучения одиночных квантовых объектов

Функционирование таких источников основано на явлении спонтанного излучения одиночных квантовых систем после воздействия импульса накачки. Основные преимущества данного подхода — возможность генерации фотонов по требованию и отсутствие вкладов двух- или многофотонных состояний (если не считать посторонних фотонов, возникающих из-за рассеяния поля накачки и т. д.). В качестве перспективных источников, которые можно использовать в интегральных оптических схемах, предлагаются квантовые точки, одиночные молекулы и центры окраски. Из них пока только молекулы и центры окраски можно использовать при комнатной температуре. Последние, в частности NV-центры в алмазе, отличаются большей стабильностью во времени, а потому рассматриваются сейчас как наиболее перспективные оптические центры. Анализируя подход в целом, в качестве основных недостатков обычно указывают низкую эффективность сбора излучения (collection efficiency) точечного источника в определенную пространственную моду, некогерентный характер однофотонных импульсов (отсутствие спектральной ограниченности) при комнатной температуре и уникальность каждого отдельного центра, что приводит к различимости фотонов, испускаемых разными источниками. Следует отметить, что эти проблемы носят скорее технологический характер и, по-видимому, будут решены в ближайшем будущем. Так, в недавней работе [41] экспериментально продемонстрирована 96%-я эффективность сбора излучения одиночной молекулы, помещенной в диэлектрическую антенну, которая сужает диаграмму направленности излучения. Более того, уже предложена схема, позволяющая достичь эффективности 99 % при любой ориентации дипольного момента источника [42]. Что касается генерации спектрально ограниченных фотонов при комнатной температуре, то возможным решением является увеличение вклада бесфононной линии с помощью помещения оптического центра в микрорезонатор [43—45]. Наконец, различимость оптических центров, по крайней мере, с точки зрения частоты перехода можно устранить, прикладывая постоянное внешнее электрическое поле [46, 47]. Объединение всех этих решений в одном устройстве, конечно, является очень сложной задачей, но в принципе осуществимой. Однако следует заметить, что у источников, основанных на спонтанном излучении, есть еще один недостаток: временнáя форма испускаемых однофотонных импульсов имеет вид затухающей экспоненты с резким передним фронтом. Хорошо известно [48, 49], что такая форма импульса является очень неудобной с точки зрения реализации квантовых алгоритмов и с точки зрения записи и воспроизведения однофотонных импульсов в устройствах квантовой памяти. Управлять временнóй формой однофотонного состояния в процессе спонтанного излучения можно с помощью частотной перестройки источника, находящегося в высокодобротном резонаторе [50]. Однако при наличии широкого фононного крыла этот метод не будет работать при комнатной температуре. Поэтому на текущий момент можно заключить, что в рамках данного подхода генерация однофотонных состояний с оптимальной для использования временнóй формой (гауссов волновой пакет) требует использования низких температур. Кроме того, следует отметить, что за исключением NE8-центров в алмазе, испускающих фотоны на длине волны 800 нм, рабочие частоты таких источников не соответствуют окнам прозрачности оптических волокон или атмосферы.

3.3. Источники на основе нелинейных оптических явлений

В основе работы таких источников лежит генерация пар фотонов в процессе спонтанного параметрического рассеяния (СПР) или четырехволнового смешения, сопровождаемая детектированием одного из фотонов в паре (холостого), по факту которого открывается затвор на выходе источника (рис. 1). Факт детектирования однозначно говорит о наличии

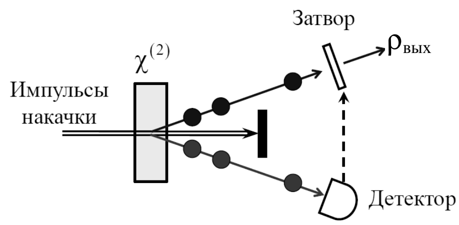


Рис. 1. Схема однофотонного источника на основе СПР

второго фотона (сигнального), поэтому такие источники являются источниками с оповещением (heralded source). Поскольку пары фотонов рождаются в случайные моменты времени, источник получается недетерминированным. Кроме того, всегда имеется вероятность рождения большего числа фотонов. Вклад этих многофотонных состояний можно уменьшить за счет понижения скорости генерации и/или с помощью использования детектора, разрешающего число фотонов.

В случае четырехволнового смешения возникает проблема с рамановским рассеянием, для подавления которого необходимо охлаждать нелинейную среду. Поэтому в настоящее время наиболее перспективными считаются источники на основе СПР. В качестве нелинейных сред предлагается использовать диэлектрические волноводы с периодической модуляцией нелинейности. Такой подход согласуется с интегральной оптикой, позволяет достичь высокой спектральной яркости (порядка 10^6—10^7 фотон/(с·нм·мВт), что на два порядка превышает яркость СПР в нелинейных кристаллах) и генерировать фотоны в одну пространственную моду. Типичные значения спектральной ширины СПР в волноводе — несколько нанометров. Использование резонатора позволяет сузить спектр до сотен мегагерц и меньше, одновременно повышая спектральную яркость (так, в работе [51] она составляла 17 фотон/(с·МГц·мВт)), и позволяет управлять формой однофотонного импульса посредством импульса накачки [52]. В работах [53, 54] был предложен еще один перспективный метод сужения спектра (до единиц гигагерц), основанный на генерации фотонов в противоположных направлениях. Такая генерация возможна при соответствующей пространственной модуляции нелинейности. При этом существенно снижается частотная корреляция сигнального и холостого полей, что является важным условием генерации чистых однофотонных состояний в режиме СПР [55]. Объединение двух методов сужения спектра позволяет теоретически достичь генерации в одну моду резонатора без использования дополнительных фильтров [56].

Основными достоинствами источников на основе СПР являются возможность генерации фотонов в широком диапазоне частот и функционирование при комнатных температурах. Недостатки: случайный характер генерации и ненулевой вклад многофотонных состояний. Повысить детерминированность источника и одновременно понизить вклад многофотонных состояний можно с помощью пространственного [57—59] или временнóго [60, 61] мультиплексирования нескольких процессов СПР (источников) и использования детекторов, разрешающих число фотонов. Пространственное мультиплексирование означает параллельную генерацию пар фотонов в нескольких нелинейных средах с возможностью детектирования холостого фотона от каждой пары и извлечения соответствующего ему сигнального фотона (рис. 2). Степень мультиплексирования N в этом случае равна числу используемых нелинейных сред. С точки зрения потерь наиболее оптимальной схемой маршрутизатора является система переключателей типа 2×1, число которых логарифмически зависит от степени мультиплексирования [58].

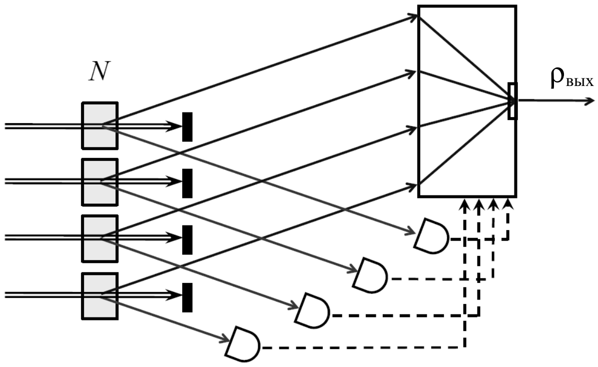


Рис. 2. Схема пространственного мультиплексирования

Временнóе мультиплексирование сводится к тому, что для генерации одного фотона используется серия импульсов накачки, а сигнальные фотоны проходят через управляемую оптическую линию задержки (ОЛЗ) (рис. 3). Степень мультиплексирования определяется как число возбуждающих импульсов, действующих последовательно на одну и ту же нелинейную среду, которые используются для получения одного фотона на выходе. В качестве управляемой ОЛЗ можно использовать систему оптоволоконных колец разной длины и переключатели типа 2 × 2. Среднее число прохождений фотона через переключающие элементы в такой системе (основные источники потерь) логарифмически зависит от степени мультиплексирования [61]. В качестве ОЛЗ можно использовать и оптическую квантовую память [62, 63].

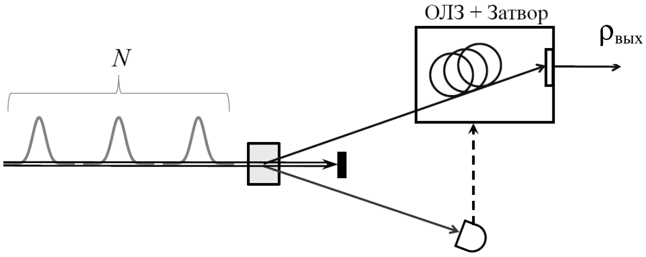


Рис. 3. Схема временнóго мультиплексирования

В настоящее время экспериментально реализовано временнóе мультиплексирование [64, 65] и пространственное мультиплексирование [66] с использованием детекторов, не разрешающих число фотонов. В работе [67] представлена управляемая линия задержки, имеющая оптимальную схему переключения, которая позволяет менять время задержки от 12,5 нс до 12,5 мкс со средним пропусканием 65 %.

3.4. О возможностях временнóго и пространственного мультиплексирования

Рассмотрим однофотонный источник на основе СПР, в котором одновременно используются методы временнóго и пространственного мультиплексирования. Оценим максимальную эффективность источника, которую можно получить при типичных условиях эксперимента.

Оператор плотности поля на выходе можно записать в виде

$$\rho_{\text{вых}} = \left(1 - \sum_n P(n)\right)|0\rangle\langle 0| + \sum_n P(n)|n\rangle\langle n|, \tag{3}$$

где $P(n)$ — вероятность обнаружить n-фотонное состояние на выходе источника после одного цикла мультиплексирования ($n > 0$). В случае генерации в одну пространственно-временную моду сигнального и холостого полей вектор состояния поля СПР имеет вид

$$|\psi_{\text{СПР}}\rangle = c_0|0_s 0_i\rangle + c_1|1_s 1_i\rangle + \ldots, \quad c_n = \left[\operatorname{th}(r)\right]^n / \operatorname{ch}(r), \tag{4}$$

где индексы s, i соответствуют модам сигнального и холостого полей, а r — параметр накачки. Пусть p_n — вероятность фотоотсчета при взаимодействии детектора с n-фотонным состоянием. В случае детектора, не разрешающего число фотонов, $p_n = 1 - (1 - \eta)^n$, где η — эффективность детектора. Нетрудно показать, что вероятность триггерного импульса (оповещения) после воздействия одного импульса накачки

$$P^M_{\text{триг}} = 1 - \left(1 - P_{\text{триг}}\right)^M, \quad P_{\text{триг}} = p_1|c_1|^2 + p_2|c_2|^2 + \ldots. \tag{5}$$

Здесь M — степень пространственного мультиплексирования. Пусть цикл временного мультиплексирования состоит из N импульсов накачки, разделенных интервалом времени T. Если пара фотонов генерируется во время i-го импульса, то осуществляется задержка сигнального фотона на время $(N - i)T$. Таким образом, любой сигнальный фотон, который генерируется в пределах цикла, испускается так, как будто он был сгенерирован последним импульсом накачки. Допустим, что выходным фотоном является тот, который соответствует последнему за цикл триггерному импульсу, что, очевидно, соответствует наименьшим потерям. Тогда можно показать, что

$$P(n) = p_n|c_n|^2\left(P^M_{\text{триг}} / P_{\text{триг}}\right)\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{N}\left(1 - P^M_{\text{триг}}\right)^{N-i}\left(\eta_{\text{ОЛЗ}}\right)^{N-i}\left(\eta_{\text{ПЭ}}\right)^{N_{\text{ПЭ}}(i,N)+\log_2 M}. \tag{6}$$

Здесь $\eta_{\text{ОЛЗ}}$ — эффективность (пропускание) ОЛЗ за время T, а $\eta_{\text{ПЭ}}$ — эффективность (пропускание) переключающих элементов, используемых в ОЛЗ и в маршрутизаторе. Число прохождений сигнального фотона через переключатели в ОЛЗ при заданной задержке $(N - i)T$ обозначается как $N_{ПЭ}(i, N)$. Если, например, ОЛЗ состоит из трех колец, задерживающих на время a^0T, a^1T и a^2T, так что $N - i = A_0a^0 + A_1a^1 + A_2a^2$, то $N_{ПЭ}(i, N) = A_0 + A_1 + A_2 + 3$. Число прохождений сигнального фотона через переключатели в маршрутизаторе принимается равным $\log_2 M$.

Формула (6) записана без учета перераспределения чисел фотонов в ОЛЗ [59], влияние которого мало. В частных случаях одного лишь временнóго или пространственного мультиплексирования формула (6) сводится к результатам, полученным ранее в работах [60, 61].

Теперь можно вычислить все основные характеристики однофотонного источника. В частности, эффективность, т. е. вероятность генерации однофотонного состояния за один цикл мультиплексирования, $E = P(1)$, а автокорреляционная функция поля вычисляется как $g^{(2)}(0) = \left(\sum P'(n)n\right)^{-2} \sum P'(n)n(n-1)$, где $P'(n) = P(n) / \sum P(n)$. На рис. 4 показана зависимость этих величин от среднего числа фотонов в поле СПР $\langle n \rangle \approx r^2 \approx P(1)$ за один цикл мультиплексирования при ожидаемых в эксперименте значениях параметров оптической схемы.

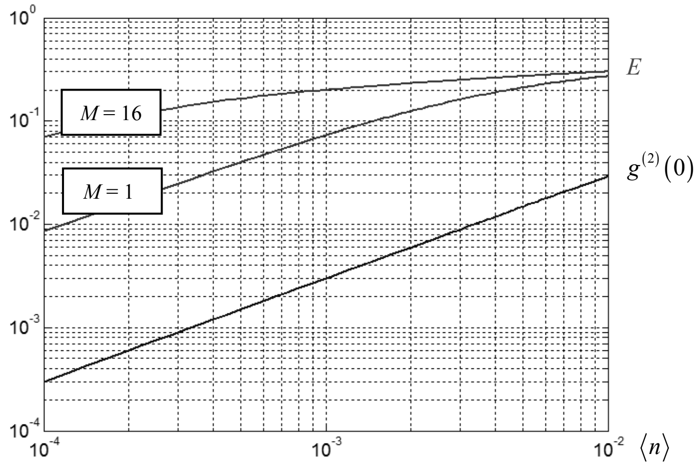


Рис. 4. Зависимость эффективности источника и автокорреляционной функции поля от среднего числа фотонов в поле СПР $\langle n \rangle$ за один цикл мультиплексирования. Результат расчета с помощью формулы (6) при следующих значениях параметров: $N = 1000$, $\eta = 0,5$, $\eta_{ОЛЗ} = 0,999$, $\eta_{ПЭ} = 0,9$, $a = 6$

Из рисунка видно, что добавление пространственного мультиплексирования к временнóму оказывается особенно выгодным в случае малых значений автокорреляционной функции (порядка 10^{-3}). Эффективность источника при этом получается на четыре порядка выше, чем без мультиплексирования, и полностью определяется потерями в сигнальном канале, минимизация которых является основной технической задачей при разработке источников данного типа. Важно отметить, что наибольшая эффективность достигается при оптимальном значении параметра a, зависящем от степени временного мультиплексирования и не обязательно равном двум. В данном случае $N = 1000$ оптимальным оказывается $a = 6$.

* * *

На сегодняшний день спонтанное параметрическое рассеяние остается наиболее простым и широко используемым способом генерации однофотонных и перепутанных двухфотонных состояний электромагнитного поля, позволяя получать узкополосные спектрально ограниченные импульсы при комнатной температуре и изменять их несущие частоты в широком диапазоне. Серьезной проблемой является случайный характер генерации. Чтобы сделать такие источники более детерминированными, необходимо использовать мультиплексирование. Стандартные технологические решения, основанные на электрооптических переключающих устройствах, хотя и позволяют увеличить эффективность источника на четыре порядка, но обладают пока слишком высокими потерями. С другой стороны, реализация дальнодействующей квантовой связи или полноценных квантовых вычислений требует использования не только высокоэффективных источников, но и высокоэффективной оптической квантовой памяти, являющейся, в сущности, управляемой оптической линией задержки. Поэтому перспективным решением проблемы может оказаться интеграция спонтанного параметрического рассеяния с системами записи и воспроизведения квантовых состояний света.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12–02–00651.

Литература

1. *Belinsky, A. V.* Two-photon wave packets / A. V. Belinsky, D. N. Klyshko // Laser Physics. — 1994. — V. 4, № 4. — P. 663—689.

2. *Бауместр, Д.* Физика квантовой информации / Д. Бауместр, А. Экерт, А. Цайлингер. — М. : Постмаркет, 2002. — 376 с.

3. *Gisin, N.* Quantum cryptography / N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, H. Zbinden // Rev. Mod. Phys. — 2002. — V. 74, № 1. — P. 145—195.

4. *Zhao, Y.* Quantum hacking: Experimental demonstration of time-shift attack against practical quantum-key-distribution systems / Y. Zhao, C.-H. F. Fung, B. Qi, C. Chen, H. K. Lo // Phys. Rev. A. — 2008. — V. 78, № 4. — P. 042333—5.

5. *Lydersen, L.* Hacking commercial quantum cryptography systems by tailored bright illumination / L. Lydersen, C. Wiechers, C. Wittmann, D. Elser, J. Skaar, V. Makarov // Nature Photonics. — 2010. — V. 4, № 10. — P. 686—689.

6. *Xu, F.* Experimental demonstration of phase-remapping attack in a practical quantum key distribution system / F. Xu, B. Qi, H.-K. Lo // New J. Phys. — 2010. — V. 12, № 11. — P. 113026—14.

7. *Gerhardt, I.* Full-field implementation of a perfect eavesdropper on a quantum cryptography system / I. Gerhardt, Q. Liu, A. Lamas-Linares, J. Skaar, C. Kurtsiefer, V. Makarov // Nature Communications. — 2011. — V. 2, № 6. — P. 349.

8. *Barrett, J.* No Signaling and Quantum Key Distribution / J. Barrett, L. Hardy, A. Kent // Phys. Rev. Lett. — 2005. — V. 95, № 1. — P. 010503—4.

9. *Acin, A.* Device-independent security of quantum cryptography against collective attacks / A. Acin, N. Brunner, N. Gisin et al. // Phys. Rev. Lett. — 2007. — V. 98, № 23. — P. 230501—4.

10. *Pironio, S.* Device-independent quantum key distribution secure against collective attacks / S. Pironio, A. Acín, N. Brunner, N. Gisin, S. Massar, V. Scarani // New J. Phys. — 2009. — V. 11, № 4. — P. 045021—25.

11. *Ekert, A*. Quantum cryptography based on Bell's theorem / A. K. Ekert // Phys. Rev. Lett. — 1991. — V. 67, № 6. — P. 661—663.

12. *Briegel, H.-J.* Quantum repeaters: the role of imperfect local operations in quantum communication / H.-J. Briegel, W. Dur, J. I. Cirac, P. Zoller // Phys. Rev. Lett. — 1998. — V. 81, № 26. — P. 5932—5935.

13. *Sangouard, N.* Quantum repeaters based on atomic ensembles and linear optics / N. Sangouard, C. Simon, H. de Riedmatten, N. Gisin // Rev. Mod. Phys. — 2011. — V. 83, № 1. — P. 33—80.

14. *Gisin, N.* Proposal for implementing device-independent quantum key distribution based on a heralded qubit amplifier / N. Gisin, S. Pironio, N. Sangouard // Phys. Rev. Lett. — V. 105, № 7. — P. 070501—4.

15. *Sangouard, N.* Long-distance entanglement distribution with single-photon sources / N. Sangouard, C. Simon, J. Minář, H. Zbinden, H. de Riedmatten, N. Gisin // Phys. Rev. A. — 2007. — V. 76, № 5. — P. 050301(R)—4.

16. *Minář, J.* Quantum repeaters based on heralded qubit amplifiers / J. Minář, H. de Riedmatten, N. Sangouard // Phys. Rev. A. — 2012. — V. 85, № 3. — P. 032313—7.

17. *Kok, P.* Linear optical quantum computing with photonic qubits / P. Kok, W. J. Munro, K. Nemoto et al. // Rev. Mod. Phys. — 2007. — V. 79, № 1. — P. 135—174.

18. *O'Brien, J. L.* Photonic quantum technologies / J. L. O'Brien, A. Furusawa, J. Vučković // Nature Photonics. — 2009. — V. 3, № 12. — P. 687—695.

19. *Politi, A.* Shor's quantum factoring algorithm on a photonic chip / A. Politi, J. C. F. Matthews, J. L. O'Brien // Science. — 2009. — V. 325, № 5945. — P. 1221.

20. *Peruzzo, A.* Quantum walks of correlated photons / A. Peruzzo, M. Lobino, J. C. F. Matthews et al. // Science. — 2010. — V. 329, № 5998. — P. 1500—1503.

21. *Hausmann, B. J. M.* Integrated diamond networks for quantum nanophotonics / B. J. M. Hausmann, B. Shields, Q. Quan et al. // Nano Letters. — 2012. — V. 12, № 3. — P. 1578—1582.

22. *Tanzilli, S.* On the genesis and evolution of Integrated Quantum Optics / S. Tanzilli, A. Martin, F. Kaiser, M. P. De Micheli, O. Alibart, D. B. Ostrowsky // Laser & Photonics Rev. — 2012. — V. 6, № 1. — P. 115—143.

23. *Brida, G.* Twin-photon techniques for photo-detector calibration / G. Brida, M. Genovese, M. Gramegna // Laser Phys. Lett. — 2006. — V. 3, № 3. — P. 115—123.

24. *Polyakov, S. V.* Quantum radiometry / S. V. Polyakov, A. L. Migdall // J. Modern opt. — 2009. — V. 56, № 9. — P. 1045—1052.

25. *Cheung, J. Y.* The quantum candela: a re-definition of the standard units for optical radiation / J. Cheung, C. J. Chunnilal, E. R. Woolliams et al. // J. Modern Opt. — 2007. — V. 54, № 2/3. — P. 373—396.

26. *Zwinkels, J. C.* Photometry, radiometry and 'the candela': evolution in the classical and quantum world / J. C. Zwinkels, E. Ikonen, N. P. Fox, G. Ulm, M. L. Rastello // Metrologia. — 2010. — V. 47, № 5. — R15—R32.

27. *Lounis, B.* Single-photon sources / B. Lounis, M. Orrit // Rep. Prog. Phys. — 2005. — V. 68, № 5. — P. 1129—1179.

28. *Oxborrow, M.* Single-photon sources / M. Oxborrow, A. G. Sinclair // Contemporary Physics. — 2005. — V. 46, № 3. — P. 173—206.

29. *Castelletto, S. A.* Heralded single photon sources: a route towards quantum communication technology and photon standards / S. A. Castelletto, R. E. Scholten // Eur. Phys. J. Appl. Phys. — 2008. — V. 41, № 3. — P. 181—194.
30. *Buller, G. S.* Single-photon generation and detection / G. S. Buller, R. J. Collins // Meas. Sci. Technol. — 2010. — V. 21, № 1. — P. 012002—28.
31. *Yao, P.* On-chip single photon sources using planar photonic crystals and single quantum dots / P. Yao, V. S. C. Manga Rao, S. Hughes // Laser & Photonics Rev. — 2010. — V. 4, № 4. — P. 499—516.
32. *Kuhn, A.* Cavity-based single-photon sources / A. Kuhn, D. Ljunggren // Contemporary Physics. — 2010. — V. 51, № 4. — P. 289—313.
33. *Eisaman, M. D.* Single-photon sources and detectors / M. D. Eisaman, J. Fan, A. Migdall, S. V. Polyakov // Rev. Sci. Instrum. — 2011. — V. 82, № 7. — P. 071101—25.
34. *Hong, C. K.* Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference / C. K. Hong, Z. Y. Ou, L. Mandel // Phys. Rev. Lett. — 1987. — V. 59, № 18. — P. 2044—2046.
35. *Duan, L.-M.* Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics / L.-M. Duan, M. D. Lukin, J. I. Cirac, P. Zoller // Nature. — 2001. — V. 414, № 6862. — P. 413—418.
36. *Jennewein, T.* Single-photon device requirements for operating linear optics quantum computing outside the post-selection basis / T. Jennewein, M. Barbieri, A. G. White // J. Modern Opt. — 2011. — V. 58, № 3/4. — P. 276—287.
37. *Lvovsky, A. I.* Optical quantum memory / A. I. Lvovsky, B. C. Sanders, W. Tittel // Nature Photonics. — 2009. — V. 3, № 12. — P. 706—714.
38. *Hammerer, K.* Quantum interface between light and atomic ensembles / K. Hammerer, A. S. Sørensen, E. S. Polzik // Rev. Mod. Phys. — 2010. — V. 82, № 2. — P. 1041—1093.
39. *Tittel, W.* Photon-echo quantum memory in solid state systems / W. Tittel, M. Afzelius, R. L. Cone et al. // Laser & Photonics Rev. — 2010. — V. 4, № 2. — P. 244—267.
40. *Simon, C.* Quantum memories: A review based on the European integrated project “Qubit Applications (QAP)” / C. Simon, M. Afzelius, J. Appel et al. // Eur. Phys. J. D. — 2010. — V. 58, № 1. — P. 1—22.
41. *Lee, K. G.* A planar dielectric antenna for directional single-photon emission and near-unity collection efficiency / K. G. Lee, X. W. Chen, H. Eghlidi et al. // Nature Photonics. — 2011. — V. 5, № 3. — P. 166—169.
42. *Chen, X.-W.* 99 % efficiency in collecting photons from a single emitter / X.-W. Chen, S. Götzinger, V. Sandoghdar // Optics Letters. — 2011. — V. 36, № 18. — P. 3545—3547.
43. *Su, C.-H.* Towards a picosecond transform-limited nitrogen-vacancy based single photon source / C.-H. Su, A. D. Greentree, L. C. L. Hollenberg // Optics Express. —2008. — V. 16, № 9. — P. 6240—6250.
44. *Barclay, P. E.* Chip-based microcavities coupled to nitrogen-vacancy centers in single crystal diamond / P. E. Barclay, K.-M. C. Fu, C. Santori, R. G. Beausoleil // Appl. Phys. Lett. — 2009. — V. 95, № 19. — P. 191115.
45. *Faraon, A.* Resonant enhancement of the zero-phonon emission from a colour centre in a diamond cavity / A. Faraon, P. E. Barclay, C. Santori, K.-M. C. Fu, R. G. Beausoleil // Nature Photonics. — 2011. — V. 5, № 5. — P. 301—305.
46. *Lettow, R.* Quantum interference of tunably indistinguishable photons from remote organic molecules / R. Lettow, Y. L. A. Rezus, A. Renn et al. // Phys. Rev. Lett. — 2010. — V. 104, № 12. — P. 123605—4.
47. *Sipahigil, A.* Quantum interference of single photons from remote nitrogen-vacancy centers in diamond / A. Sipahigil, M. L. Goldman, E. Togan et al. // Phys. Rev. Lett. — 2012. — V. 108, № 14. — P. 143601—5.
48. *Kiraz, A.* Quantum-dot single-photon sources: prospects for applications in linear optics quantum-information processing / A. Kiraz, M. Atatüre, A. Imamoglu // Phys. Rev. A. — 2004. — V. 69, № 3. — P. 032305—10.

49. *Rohde, P. P.* Optimal photons for quantum-information processing / P. P. Rohde, T. C. Ralph, M. A. Nielsen // Phys. Rev. A. — 2005. — V. 72, № 5. — P. 052332—6.

50. *Fernée, M. J.* Improving single-photon sources with Stark tuning / M. J. Fernée, H. Rubinsztein-Dunlop, G. J. Milburn // Phys. Rev. A. — 2007. — V. 75, № 4. — P. 043815—9.

51. *Pomarico, E.* Waveguide-based OPO source of entangled photon pairs // E. Pomarico, B. Sanguinetti, N. Gisin et al. // New J. Phys. — 2009. — V. 11, № 11. — P. 113042—13.

52. *Kalachev, A.* Pulse shaping during cavity-enhanced spontaneous parametric down-conversion / A. Kalachev // Phys. Rev. — 2010. — V. 81, № 4. — P. 043809—4.

53. *Christ, A.* Pure single photon generation by type-I PDC with backward-wave amplification / A. Christ, A. Eckstein, P. J. Mosley, C. Silberhorn // Optics Express. —2009. — V. 17, № 5. — P. 3441—3446.

54. *Gong, Y.-X.* Compact source of narrow-band counterpropagating polarization-entangled photon pairs using a single dual-periodically-poled crystal / Y.-X. Gong, Z.-D. Xie, P. Xu et al. // Phys. Rev. A. — 2011. — V. 84, № 5. — P. 053825—6.

55. *U'Ren, A. B.* Generation of pure-state single-photon wavepackets by conditional preparation based on spontaneous parametric downconversion / A. B. U'Ren, C. Silberhorn, K. Banaszek et al. // Laser Physics. — 1995. — V. 15, № 1. — P. 146—161.

56. *Chuu, C.-S.* Ultrabright backward-wave biphoton source / C.-S. Chuu, S. E. Harris // Phys. Rev. A. — 2011. — V. 83, № 6. — P. 061803(R)—4.

57. *Migdall, A. L.* Tailoring single-photon and multiphoton probabilities of a single-photon on-demand source / A. L. Migdall, D. Branning, S. Castelletto // Phys. Rev. A. — 2002. — V. 66, № 5. — P. 053805—4.

58. *Shapiro, J. H.* On-demand single-photon generation using a modular array of parametric downconverters with electro-optic polarization controls / J. H. Shapiro, F. N. Wong // Optics Letters. — 2007. — V. 32, № 18. — P. 2698—2700.

59. *Christ, A.* Limits on the deterministic creation of pure single-photon states using parametric down-conversion / A. Christ, C. Silberhorn // Phys. Rev. A. — 2012. — V. 85, № 2. — P. 023829—6.

60. *Jeffrey, E.* Towards a periodic deterministic source of arbitrary single-photon states // E. Jeffrey, N. A. Peters, P. G. Kwiat // New J. Phys. — 2004. — V. 6, № 1. — P. 100—14.

61. *Mower, J.* Efficient generation of single and entangled photons on a silicon photonic integrated chip / J. Mower, D. Englund // Phys. Rev. A. — 2011. — V. 84, № 5. — P. 052326—7.

62. *Kalachev, A.* Quantum memory for light using extended atomic ensembles in a tunable cavity / A. Kalachev // Phys. Rev. — 2008. — V. 78, № 4. — P. 043812—6.

63. *Калачев, А. А.* Запись и считывание квантовых состояний света с помощью перестраиваемого резонатора. Приложение к однофотонным источникам / А. А. Калачев // Оптика и спектроскопия. — 2010. — Т. 109, № 1. — С. 34—42.

64. *Peters, N. A.* Towards a quasi-deterministic single-photon source / N. A. Peters, K. J. Arnold, A. P. VanDevender et al. // Proc. SPIE. — 2006. — V. 6305. — P. 630507—9.

65. *Broome, M. A.* Reducing multi-photon rates in pulsed down-conversion by temporal multiplexing / M. A. Broome, M. P. Almeida, A. Fedrizzi, A. G. White // Optics Express. — 2011. — V. 19, № 23. — P. 22698—22708.

66. *Ma, X.-s.* Experimental generation of single photons via active multiplexing / X.-s. Ma, S. Zotter, J. Kofler, T. Jennewein, A. Zeilinger // Phys. Rev. A. — 2011. — V. 83, № 4. — P. 043814—8.

67. *Christensen, B. G.* Free-space photon storage with variable time delays / B. G. Christensen, K. McCusker, M. Goggin, K. Crimmins, P. Kwiat // CLEO: 2011. Laser Applications to Photonic Applications : Quantum Electronics and Laser Science Conference. — OSA Technical Digest (CD). — 2011. — Pap. QThJ2. — (Optical Society of America, 2011).

ТРЕХМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ В ИЗОТРОПНОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

А. Б. Борисов, Ф. Н. Рыбаков

Одна из главных особенностей развития современной теоретической физики — успешное проникновение в область существенно нелинейных явлений и процессов. Магнитные системы были и остаются наиболее удобными объектами для исследования нелинейных эффектов и образования пространственных структур. Во-первых, существует большое разнообразие магнетиков с различными макроскопическими параметрами и характером нелинейности среды сравнительно легко можно управлять внешними полями. Во-вторых, многие магнитные системы достаточно детально описываются нелинейными феноменологическими универсальными уравнениями. В связи с широким техническим применением магнитных материалов уже в 30-х годах XX века было начато систематическое теоретическое изучение динамики и структуры нелинейных состояний в них. Такие состояния позднее были названы солитонами. В эти годы были теоретически предсказаны и экспериментально обнаружены одномерные магнитные солитоны — стенки Блоха и Нееля. Несколько позднее были исследованы двумерные структуры — доменные стенки сложной внутренней структуры [1].

В этой статье исследованы трехмерные структуры в ферромагнетике. Она спланирована следующим образом. В первом разделе мы обсуждаем топологическую классификацию трехмерных магнитных структур. Далее во втором разделе получен широкий класс решений трехмерных статических уравнений Ландау — Лифшица изотропного ферромагнетика. Специальными подстановками исходные уравнения модели сведены к уравнениям с простой геометрической интерпретацией. На этой основе предсказаны новые типы трехмерных структур в ферромагнетике: спиральные и кноидальные ежи. Такие текстуры характеризуются двумя целыми числами Q, S. Отметим, что обменная энергия ферромагнетика пропорциональна объемной энергии нематика в одноконстантном приближении. Поэтому предсказанные структуры могут качественно описывать трехмерные структуры поля директора в нематиках (определенного с точностью до знака), если величины Q, S будут одновременно принимать полуцелые значения. В конце изложены результаты расчета трехмерных топологических солитонов с ненулевым инвариантом Хопфа, внутренняя структура которых представляет собой зацепления вихревых колец.

1. Топология трехмерных структур ферромагнетика

Будем рассматривать бесконечную во всех трех измерениях ферромагнитную среду. Направление вектора намагниченности **M**, вообще говоря, меняется от точки к точке, но абсолютная величина неизменна и равна намагниченности насыщения: $|\mathbf{M}| = M_0 = \text{const}$. Таким образом, намагниченность выражена единичным векторным полем:

$$\mathbf{M} = M_0\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \tag{1}$$

Допустимое множество значений вектора **n** образует единичную сферу, которую мы будем обозначать $\mathbb{S}^2_{spin}$. Направление вектора задается парой углов — полярным $\Theta = \Theta(x, y, z)$ и азимутальным $\Phi = \Phi(x, y, z)$:

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\sin\Theta\cos\Phi, \sin\Theta\sin\Phi, \cos\Theta). \tag{2}$$

1.1. Точечные особенности

Если векторное поле $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ всюду непрерывно, за исключением некоторых точек, в которых вектор **n** не определен, то принято говорить, что ферромагнетик содержит точечные особенности. Будем рассматривать поля, точечные особенности которых локализованы в пространстве, т. е. все особые точки можно окружить сферой конечного радиуса. Оказывается, что такие состояния могут существенным образом отличаться одно от другого, если относятся к различным гомотопическим классам. Каждый такой класс формируют гомотопные отображения f сферы на сферу

$$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2_{spin}. \tag{3}$$

Совокупность всех этих классов образует гомотопическую группу $\pi_2(\mathbb{S}^2)$, которая изоморфна группе целых чисел:

$$\pi_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Такая классификация является не просто формализацией, но несет выраженный физический смысл. Полю **n** можно сопоставить целое число Q — топологический индекс — из множества 0, ±1, ±2, ±3 и т. д. Окружим все сингулярные точки сферой. Пусть поле вне этой сферы заморожено (т. е. не может изменяться), а внутри сферы поле можно перестраивать любым образом (даже с разрывами). Оказывается, что если $Q = 0$, то поле внутри можно перестроить так, что в результате поле **n** станет непрерывным во всем пространстве. А если $Q \neq 0$, то подобное невозможно, однако можно добиться того, чтобы осталась только одна сингулярная точка. Иными словами, можно сказать, что сингулярная точка неустранима в любом конечном объеме.

Теперь необходимо пояснить, чем отличаются конфигурации с различными индексами Q, даже если оба индекса ненулевые. Итак, рассмотрим две полевые конфигурации, такие, что $Q_a \neq Q_b$. Для каждой конфигурации окружим все сингулярные точки сферой с радиусом $R_a = R_b = R$.

Тогда путем непрерывной деформации полей с внешней стороны сфер невозможно добиться того, чтобы в этой внешней области оба поля стали неразличимы между собой.

Из (4) следует групповое свойство: топологический индекс может быть установлен для каждой отдельной точечной особенности, а топологический индекс совокупности этих особенностей будет равен суммарному.

Топологический индекс удобно вычислять следующим образом. Окружим особенность сферой. Перейдем в сферическую систему координат (r, ϑ, φ), центр которой совмещен с центром сферы. Топологический индекс равен степени отображения [2] этой сферы на сферу $\mathbb{S}^2_{spin}$:

$$Q = \frac{1}{4\pi}\iint \mathbf{n}\cdot[\mathbf{n}_{,\vartheta}\times\mathbf{n}_{,\varphi}]\,d\vartheta d\varphi. \tag{5}$$

1.2. Континуальные солитоны

Теперь рассмотрим случай, когда поле **n** определено и непрерывно во всем пространстве. Что соответствует топологическому сектору $Q = 0$, где вдобавок все особенности аннигилировали. Положим, что такая ситуация не случайна, а есть физические причины, препятствующие появлению особенностей. Простейшим состоянием такой системы является однородное:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}_0 = \text{const}. \tag{6}$$

На фоне однородного состояния могут существовать трехмерные солитоны. Для таких локализованных состояний конфигурация поля на бесконечном удалении будет оставаться неизменной:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \to \mathbf{n}_0 \quad (r\to\infty). \tag{7}$$

Континуальные векторные поля, отвечающие условиям (1), (7), могут опять же относиться к различным гомотопическим классам. Ввиду того, что все бесконечно удаленные точки трехмерного пространства здесь эквивалентны (7), имеет место стереографическая проекция из 3-сферы и

$$\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \leftrightarrow \mathbb{S}^3. \tag{8}$$

То есть возникает взаимно однозначное соответствие между всеми точками трехмерного пространства с бесконечностью и трехмерной сферой в четырехмерном евклидовом пространстве. Поле **n** всюду определено, и каждой точке 3-сферы отвечает свое значение — точка на сфере $\mathbb{S}^2_{spin}$. Имеет место отображение

$$g: \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2_{spin}. \tag{9}$$

Соответствующая группа тоже изоморфна группе целых чисел:

$$\pi_3(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Конструкции (9) существенно сложнее, нежели (3). Пример такого расслоения был впервые найден Х. Хопфом в 1931 году.

Если соответствующий топологический индекс H равен нулю, то поле $\mathbf{n}$ посредством непрерывной деформации можно превратить в однородное состояние (6). Если $H \neq 0$, то такое проделать невозможно и солитон является хопфионом и представляет собой топологический узел, развязать который невозможно в конечном объеме. Узлы с разными индексами невозможно непрерывно деформировать так, чтобы узлы стали неразличимы. Если несколько узлов слились в один, то результирующий индекс равен сумме исходных.

Топологический индекс может быть вычислен по формуле Уайтхеда [3]:

$$H = -\frac{1}{(8\pi)^2}\int \mathbf{F}\cdot\mathbf{A}\,d\mathbf{r}, \tag{11}$$

где поле $\mathbf{A}$ таково, что $\operatorname{rot}\mathbf{A} = 2\mathbf{F}$,

$$F_i = \epsilon_{ijk}\ \mathbf{n}\cdot[\partial_j\mathbf{n}\times\partial_k\mathbf{n}]. \tag{12}$$

Вычисление по формуле (11) осложнено тем, что необходимо восстановить поле $\mathbf{A}$ по его ротору.

Существует и более практичный способ определения H. Необходимо задаться двумя фиксированными различными значениями вектора $\mathbf{n}$, исключая значение $\mathbf{n}_0$. Затем необходимо выделить в пространстве все точки, в которых направление вектора совпадает с заданными. Если результатом будут две замкнутые кривые, то коэффициент их зацепления равен H [4].

2. Трехмерные структуры ферромагнетика

Энергия гейзенберговского ферромагнетика

$$E = \int \mathcal{E}d\mathbf{r} = \underbrace{\int\frac{\left(\partial_x\mathbf{n}_i\right)^2}{2}d\mathbf{r}}_{E_x} + \underbrace{\int\frac{\left(\partial_y\mathbf{n}_i\right)^2}{2}d\mathbf{r}}_{E_y} + \underbrace{\int\frac{\left(\partial_z\mathbf{n}_i\right)^2}{2}d\mathbf{r}}_{E_z}. \tag{13}$$

Динамика описывается уравнением Ландау — Лифшица

$$\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial t} = \left[\mathbf{n}\times\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\mathbf{n}}\right], \quad \mathbf{n}^2 = 1. \tag{14}$$

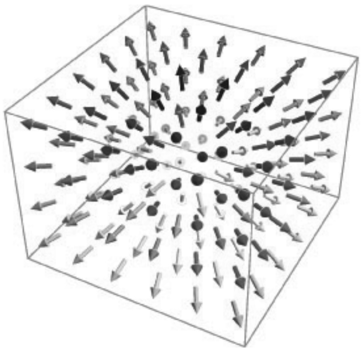
В стационарном случае получаем

$$[\mathbf{n}\times\Delta\mathbf{n}] = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \tag{15}$$

2.1. Ежи и линейные особенности

В этом подразделе мы опишем в аналитическом виде новые типы трехмерных текстур в обменном приближении.

Наиболее известными трехмерными магнитными структурами являются точки Блоха, или так называемые ежи (рис. 1). Такие трехмерные точечные дефекты экспериментально обнаружены в ферромагнетиках, где они разделяют два участка линии Блоха с различной магнитной полярностью или разным направлением поворота намагниченности [1]. Образование точек Блоха наиболее благоприятно в областях порядка магнитной длины, где обменная энергия (13) значительно превышает энергию анизотропии и магнитостатическую энергию.


а

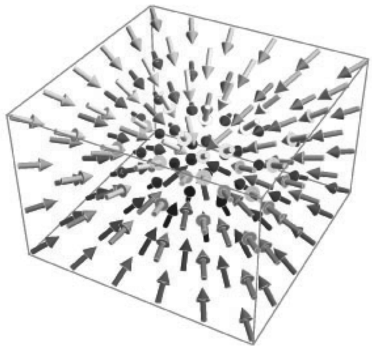

б

Рис. 1. Распределение намагниченности в трехмерной структуре типа ежа: *а* — топологический заряд $Q = 1$; *б* — $Q = -1$

Конфигурациям типа ежа отвечает (с точностью до поворотов и отражений) частное решение уравнений (15):

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \;\; r = |\,\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{16}$$

Топологический заряд Q ежа можно рассчитать по формуле (5), и для (16) получаем $Q = 1$ [5].

Поле $\mathbf{n}$, как любое векторное поле, может быть представлено в виде суммы безвихревого и соленоидального поля. Поле ежа безвихревое: $\mathbf{n} = \nabla r$, хотя в каждой плоскости, проходящей через начало координат, оно описывает двумерный вихрь.

Обсудим процедуру интегрирования уравнений (15), которая позволит найти широкий класс точных аналитических решений модели и предсказать новые типы трехмерных структур в ферромагнетике [6].

В угловых переменных уравнения (15) переписываются в виде

$$\Delta\Theta = \frac{\sin 2\Theta}{2}(\nabla\Phi)^2, \quad \nabla(\sin\Theta^2\nabla\Phi) = 0. \tag{17}$$

Положим поле $\Theta(\mathbf{r})$ локально зависящим от вспомогательного поля $a(\mathbf{r})$: $\Theta(a(\mathbf{r}))$. Тогда непосредственными вычислениями нетрудно убедиться, что из уравнения

$$\Theta''(a) = \frac{\sin 2\Theta(a)}{2}, \tag{18}$$

$$\Delta a = 0,\ \Delta\Phi = 0,\ (\nabla a)^2 = (\nabla\Phi)^2,\ \nabla a\nabla\Phi = 0, \tag{19}$$

для полей $\Theta(a)$, $a(\mathbf{r})$, $\Phi(\mathbf{r})$ следуют уравнения (17). Такой анзац приводит, как мы увидим ниже, к широкому классу решений неинтегрируемого уравнения (15), но не исчерпывает полное многообразие решений. Векторные поля (∇a) и $(\nabla\Phi)$ являются нормалями к поверхностям $a = \text{const}$ и $\Phi = \text{const}$ и с геометрической точки зрения решение системы (19) определяет новую задачу дифференциальной геометрии: найти в трехмерном пространстве две ортогональные гармонические ($\Delta a = 0$, $\Delta\Phi = 0$) координатные поверхности с равными длинами нормалей.

Для решения системы (19) введем комплексные переменные $X = x + iy$, $Y = x - iy$ и запишем искомую систему в виде двух уравнений

$$4\Omega_{,XY} + \Omega_{,zz} = 0, \quad 4\Omega_{,X}\Omega_{,Y} + \Omega_{,z}^2 = 0 \tag{20}$$

для комплексной функции $\Omega = a + i\Phi$. Исключение $\Omega_{,z}$ из последнего уравнения и подстановка этого выражения в первое приводит к уравнению второго порядка для двух независимых переменных

$$\Omega_{,XX}\Omega_{,Y}^2 + \Omega_{,YY}\Omega_{,X}^2 - 2\Omega_{,XY}\Omega_{,Y}\Omega_{,X} = 0. \tag{21}$$

Оно является пределом знаменитого уравнения минимальных поверхностей

$$-2\Omega_{,X}\Omega_{,XY}\Omega_{,Y} + \Omega_{,XX}\left(\Omega_{,Y}^2 + 1\right) + \left(\Omega_{,X}^2 + 1\right)\Omega_{,YY} = 0 \tag{22}$$

при больших значениях частных производных. Это общековариантное (к преобразованиям $\Omega \to f(\Omega)$ с произвольной функцией f) уравнение заменой $\Omega_{,Y} = \Gamma\Omega_{,X}$ сводится к гидродинамическому уравнению типа Хопфа в комплексных переменных. В результате такой замены уравнения (20) редуцируются в систему уравнений

$$\Omega_{,Y} = \Gamma\Omega_{,X}, \quad \Omega_{,z} = 2i\sqrt{\Gamma}\Omega_{,X}, \tag{23}$$

где поле Γ удовлетворяет замкнутой системе уравнений

$$\Gamma_{,Y} = \Gamma\Gamma_{,X}, \quad \Gamma_{,z} = 2i\sqrt{\Gamma}\Gamma_{,X}. \tag{24}$$

Последнее уравнение является условием совместности системы (23). С помощью масштабных преобразований можно показать, что при постоянном значении поля Γ решение системы (23) зависит только от двух пространственных переменных. При $\Gamma \neq \text{const}$ из (23) и (24) сразу следует, что поле Ω является аналитической функцией поля Γ:

$$\Omega = F(\Gamma), \tag{25}$$

а поле $\Gamma(X, Y, z)$ определяется решением неявного уравнения

$$G(\Gamma, X + Y\Gamma + 2i\sqrt{\Gamma}z) = 0 \tag{26}$$

с произвольной функцией G. Отметим, что прообразу точки ($\Theta = \text{const}$, $\Phi = \text{const}$) на сфере $\mathbb{S}^2_{spin}$ отвечает постоянное комплексное число Γ и, следовательно, согласно (26) — прямая линия в трехмерном пространстве. Поэтому для найденных решений, в отличие от хопфионов, коэффициент зацепления образов для прообразов двух точек на сфере $\mathbb{S}^2_{spin}$ равен нулю.

Как и в гидродинамике несжимаемой жидкости, решения (25) и (26) в общем случае неоднозначны. Далее проанализируем многообразие решений, когда поле $\Gamma(X, Y, z)$ определяется уравнением $X + Y\Gamma + 2i\sqrt{\Gamma}z = 0$. В этом случае Ω есть аналитическая функция

$$\Omega = F(\omega), \quad \omega = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\exp(i\varphi) \tag{27}$$

(или антианалитическая функция $\Omega = F(\omega^*)$) комплексной переменной ω — стереографической проекции сферы единичного радиуса в трехмерном пространстве. Выберем решение (18) в виде решетки солитонов

$$\cos\Theta = \operatorname{sn}\left(\frac{a}{k}, k\right) \quad (0 < k < 1). \tag{28}$$

В простейшем (солитонном) случае $\Theta = 2\operatorname{arctg}(\exp a)$ при $k = 1$. Тогда комплексное поле $\Psi = \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\exp(i\Phi)$ равно $\exp(\Omega)$ и Ψ удовлетворяет уравнению дуальности $\Phi_{\omega^*} = 0$. При $\Omega = \ln\omega^Q$ такие решения описывают ежи с топологическим зарядом Q:

$$\Theta = 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(\vartheta/2)^Q\right), \quad \Phi = Q\varphi, \tag{29}$$

которые были получены из уравнений дуальности в [7].

В случае $k \neq 1$ зададим Ω потенциалом вихреисточника: $\Omega = a + i\Phi = (\alpha + i\beta)\ln\omega$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). В отличие от структуры ежа (16) либо (29), представляющего точечный дефект с сингулярными значениями производных полей намагниченности в начале координат, текстура (28) представляет линейный дефект с сингулярной нитью $x = y = 0$. При обходе вокруг линии сингулярностей из требования однозначности намагниченности следует, что изменение поля Φ должно быть равно $2\pi Q$ ($Q \in \mathbb{Z}$), а изменение δa

поля a: $\delta a = 4k\mathrm{K}S$ ($S \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{K} = \mathrm{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода) — определено периодом 4K эллиптической функции $\mathrm{sn}(u, k)$. Тогда линейный дефект характеризуется целочисленными значениями S, Q, и выражение для его z-компоненты намагниченности и азимутального угла имеет следующий вид:

$$\cos\Theta = \mathrm{sn}\left(\frac{Q}{k}\ln \mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2} - \frac{2S\mathrm{K}}{\pi}\varphi,\, k\right), \tag{30}$$

$$\Phi = Q\varphi + \frac{2kS\mathrm{K}}{\pi}\ln \mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}. \tag{31}$$

Целочисленный индекс Q является топологическим зарядом лишь в случае (29), но с появлением сингулярной нити нет места гомотопиям (3).

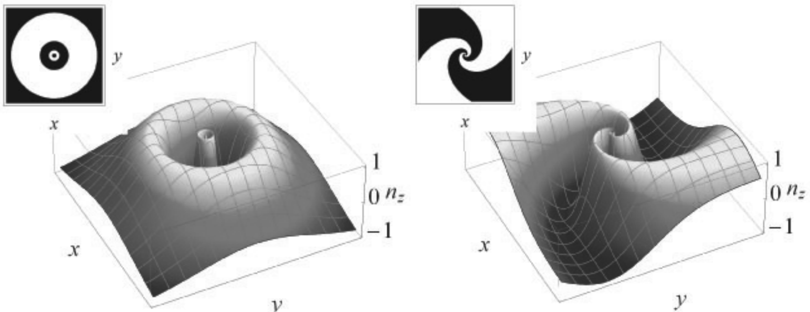


Рис. 2. Распределение n_z в структуре линейных дефектов, в плоскости $z = 3$ ($k = 0{,}3$, $Q = 1$): *а* — кноидальный еж, $S = 0$; *б* — спиральный еж, $S = 2$

Случаю $S = 0$ соответствует магнитная структура — кноидальный еж, который состоит из бесконечной совокупности доменов (рис. 2, *а*). Плотность энергии кноидального ежа расходится при $\sin\vartheta \to 0$, и интеграл (13) (как и в случае вихревого кольца в сверхтекучей жидкости) должен быть обрезан на значениях $\sin\vartheta \sim a/L$, отвечающих атомным расстояниям a. С логарифмической точностью имеем

$$E \simeq 2\pi\int_0^L dr \int_{a/L}^{\pi - a/L} \frac{Q^2}{2k^2\sin\vartheta}\left(k^2 - 1 + 2\,\mathrm{dn}\left(\frac{Q}{k}\ln \mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}, k\right)^2\right)d\vartheta \simeq$$
$$\simeq \frac{2\pi Q^2}{k^2}\left(k^2 - 1 + 2\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)L\ln\frac{2L}{a}, \tag{32}$$

где L — размер системы, $L >> a$.

При $S \neq 0$ z-компонента намагниченности принимает постоянное значение на винтовых поверхностях, образующих логарифмические спирали (S — число «рукавов») в плоскостях z = const (рис. 2, *б*), качественно совпадающие со спиральными вихрями в двумерном ферромагнетике [8]. Различные частные решения и общее однозначное решение для системы взаимодействующих спиральных ежей подробно изложены в [9].

Описанные выше спиральные трехмерные структуры могут зарождаться на линейных дефектах немагнитной природы.

2.2. Хопфионы

Все сингулярные структуры предыдущего подраздела не содержат размерного параметра и не изменяются при равномерном сжатии или растяжении: $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(\lambda\mathbf{r})$. Перейдем теперь к обсуждению континуальных солитонов, для которых поле $\mathbf{n}$ не содержит особенностей. Структура слоений Хопфа такова, что всегда можно определить параметр размера — некоторое расстояние d. Например, пусть d — наибольшее расстояние между точками трехмерного пространства, отвечающими значению вектора $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_0$. Для хопфиона множество таких точек всегда образует замкнутую линию, и в простейшем случае это окружность, а d — ее диаметр. То есть, в отличие от ежа, хопфион «чувствителен» к сжатию, и его энергия

$$E_\lambda = E\{\mathbf{n}(\lambda\mathbf{r})\} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{n}_i(\lambda\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_j}\right)^2 d\mathbf{r} = \frac{1}{\lambda}\int \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{n}_i(\lambda\mathbf{r})}{\partial (\lambda\mathbf{r})_j}\right)^2 d(\lambda\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda}E. \qquad (33)$$

Для текстуры, зависящей от $|\mathbf{r}|$ и удовлетворяющей уравнениям Эйлера — Лагранжа, должно выполняться условие

$$\left.\frac{dE_\lambda}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} = 0. \qquad (34)$$

Ввиду того что обменная энергия неотрицательна, это возможно лишь в единственном тривиальном случае однородной конфигурации (6). Поэтому минимизация функционала (13) приводит только к масштабно-инвариантным структурам, описанным в подразд. 2.1. В изотропном ферромагнетике невозможно существование статического хопфиона. Это обстоятельство вынуждает подходить к изучению узловых состояний с позиций динамики.

Уравнение (14) допускает решения для солитонов постоянного профиля [10], движущихся равномерно с одновременной однородной прецессией вектора намагниченности:

$$\Theta(x, y, z, t) = \Theta_s(x, y, z - Vt), \qquad (35)$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi_s(x, y, z - Vt) + \omega t. \qquad (36)$$

Здесь для определенности считаем, что солитон движется вдоль оси z и $\mathbf{n}_0 = (0, 0, 1)$. В нулевой момент времени поле $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)\big|_{t=0}$ доставляет экстремум функционалу

$$F = E - \omega N + VP, \tag{37}$$

где N — число магнонов:

$$N = \int (1 - n_z) d\mathbf{r}, \tag{38}$$

а P — импульс поля, в форме Папаниколау — Томараса [11]:

$$P = -\frac{1}{2}\int \Big(x\mathbf{n} \cdot \left[\partial_x \mathbf{n} \times \partial_z \mathbf{n} \right] + y\mathbf{n} \cdot \left[\partial_y \mathbf{n} \times \partial_z \mathbf{n} \right] \Big) d\mathbf{r}. \tag{39}$$

Уравнения движения даже в случае аксиальной симметрии

$$\Theta_s = \theta(r, \vartheta), \quad \Phi_s = \phi(r, \vartheta) + N\varphi, \quad N \in \mathbb{Z} \tag{40}$$

представляют собой существенно нелинейную систему в частных производных и в настоящее время неразрешимы аналитически.

Один из основных принципов численного решения задачи сводится к поиску минимума (13) при фиксированных интегралах движения

$$N = \text{const}_1, \tag{41}$$

$$P = \text{const}_2. \tag{42}$$

Частота прецессии и скорость определяются из дифференциальных соотношений

$$\omega = \left.\frac{\partial E}{\partial N}\right|_P, \quad V = -\left.\frac{\partial E}{\partial P}\right|_N. \tag{43}$$

Приведем формулы (43) к более практичному виду. Для этого вновь воспользуемся преобразованиями масштаба. Интеграл (39) инвариантен к преобразованиям $\mathbf{n}(x, y, z) \to \mathbf{n}(x, y, \lambda z)$, а (38) — к преобразованиям $\mathbf{n}(x, y, z) \to \mathbf{n}(\lambda x, \lambda y, \lambda^{-2} z)$. Тогда

$$\omega = \left.\frac{\dfrac{\partial}{\partial \lambda} E\{\mathbf{n}(x, y, \lambda z)\}}{\dfrac{\partial}{\partial \lambda} N\{\mathbf{n}(x, y, \lambda z)\}}\right|_{\lambda=1} = \frac{E_x + E_y - E_z}{N}, \tag{44}$$

$$V = -\left.\frac{\dfrac{\partial}{\partial \lambda} E\{\mathbf{n}(\lambda x, \lambda y, \lambda^{-2} z)\}}{\dfrac{\partial}{\partial \lambda} P\{\mathbf{n}(\lambda x, \lambda y, \lambda^{-2} z)\}}\right|_{\lambda=1} = \frac{E_x + E_y - 2E_z}{P}. \tag{45}$$

Первые численные решения с $H = 1$ были получены в работе [12] методом минимизации функционала энергии (13) при ограничениях (41) и (42), на дискретной сетке, с фиксированием векторов на границах прямоугольной области моделирования. При этом предполагалась аксиальная симметрия (40), и система тем самым редуцировалась к двумерной. Позднее прямые трехмерные расчеты показали [13], что такие хопфионы достаточно стабильны к возмущениям, нарушающим аксиальную симметрию (40).

В основе разработанного нами вычислительного алгоритма лежит метод сопряженных градиентов с аддитивными квадратичными штрафными функциями для учета связи $\mathbf{n}^2 = 1$ и ограничения (42). Эквивалентная форма в конечных разностях для ограничения (41) представляет собой единственное линейное уравнение, учесть которое особенно просто действием соответствующего линейного оператора на каждой итерации [14]. Такие же принципы лежали в основе наших расчетов тороидальных хопфионов в одноосном ферромагнетике [15, 16].

Переход к прямым трехмерным вычислениям для функционалов, образованных из нелинейной сигма-модели, представляет собой ресурсоемкую задачу, требующую применения суперкомпьютеров [13]. Другая возможность — использовать технологию массивных параллельных вычислений на графических процессорах видеокарт (GPU). Привлечение GPU для прямых вычислений позволяет многократно повысить быстродействие ряда параллельных алгоритмов. При этом основной проблемой является написание аппаратно-ориентированных сильно оптимизированных параллельных программ. Оригинальный алгоритм был нами реализован на архитектуре Nvidia CUDA [17].

На рис. 3 приведены результаты прямого трехмерного расчета хопфиона $H = 1$. Вычисления были проведены на сетке $256 \times 256 \times 64$ с неравномерной плотностью точек. В качестве начального состояния выбирались конфигурации, предложенные в [16], но добавлялась небольшая дефор-

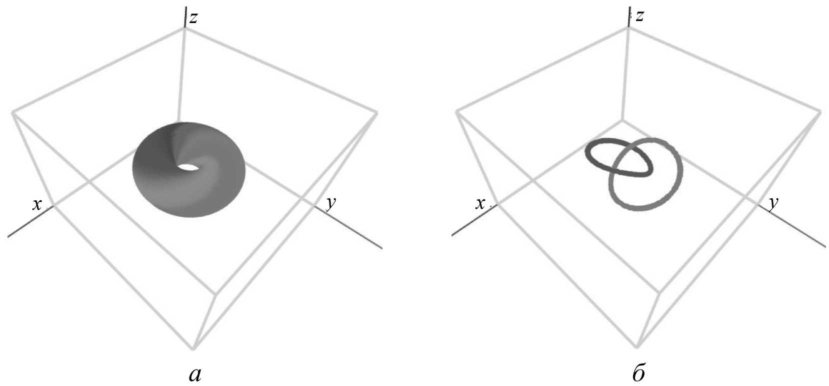


Рис. 3. Рассчитанный в ограниченной прямоугольной области хопфион с топологическим зарядом $H = 1$: *а* — поверхность, соответствующая значению $\Theta = 0{,}8\pi$; *б* — зацепляющиеся прообразы двух точек на сфере $\mathbb{S}^2_{spin}$, для которых $\Theta = 0{,}8\pi$ и $\Phi_1 \neq \Phi_2$

мация в области $x > 0$ для нарушения аксиальной симметрии. Как и в работе [13], в результате вычислений солитон с $H = 1$ стабилизировался и принимал тороидальную форму, нарушения аксиальной симметрии самоустранялись.

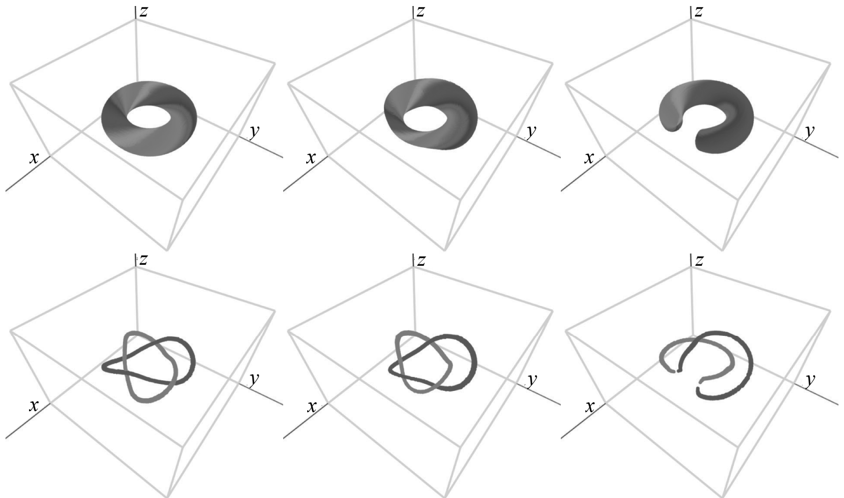


Рис. 4. Фрагменты последовательных во времени (слева направо) конфигураций для вычислений из начального состояния с $H = 2$: верхний ряд — поверхности, отвечающие значению $\Theta = 0{,}8\pi$; нижний ряд — прообразы двух точек на сфере $\mathbb{S}^2_{spin}$, для которых $\Theta = 0{,}8\pi$ и $\Phi_1 \neq \Phi_2$

К настоящему времени вопрос о существовании стабильных хопфионов в изотропном ферромагнетике с $|H| > 1$ остается открытым. На рис. 4 представлены фрагменты расчета, где в качестве начальной конфигурации выбиралось слоение Хопфа для $H = 2$ с соответствующими дважды зацепленными линиями прообразов точек сферы $\mathbb{S}^2_{spin}$. Налицо нестабильность, приводящая к коллапсу. Тем не менее подобные расчеты, вообще говоря, не являются доказательством нестабильности. Возможно, например, что структура хопфионов с высшими топологическими числами пространственно сильно неоднородна и плотности дискретной сетки (максимально достижимой для данного алгоритма ввиду аппаратных ограничений) просто недостаточно.

Литература

1. *Малоземов, А.* Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами / А. Малоземов, Дж. Слонзуски. — М. : Мир, 1982. — 384 с.

2. *Дубровин, Б. А.* Современная геометрия : методы и приложения. Т. 2 : Геометрия и топология многообразий / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. — М. : Эдиториал УРСС, 1998. — 296 с.

3. *Whitehead, J. H. C.* An expression of Hopf's invariant as an integral / J. H. C. Whi-tehead // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1947. — V. 33. — P. 117—123.

4. *Ботт, Р.* Дифференциальные формы в алгебраической топологии / Р. Ботт, Л. В. Ту. — М. : Наука, 1989. — 336 с.

5. *Воловик, Г. Е.* Исследование особенностей в сверхтекучем He^3 и жидких кристаллах методами гомотопической топологии / Г. Е. Воловик, В. П. Минеев // ЖЭТФ. — 1977. — Т. 72. — С. 2256—2274.

6. *Борисов, А. Б.* Спиральные трехмерные структуры в ферромагнетике // Письма в ЖЭТФ. — 2002. — Т. 76, вып. 2. — С. 95—98.

7. *Pismen, L. M.* Vortices in nonlinear fields / L. M. Pismen. — Oxford : Clarendon Press, 1999. — 312 p.

8. *Борисов, А. Б.* Спиральные вихри в ферромагнетиках // Письма в ЖЭТФ. — 2001. — Т. 75, вып. 5. — С. 242—245.

9. *Борисов, А. Б.* Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках. Т. 2 : Топологические солитоны, двумерные и трехмерные «узоры» / А. Б. Борисов, В. В. Киселев. — Екатеринбург : УрО РАН, 2011. — 417 с.

10. *Косевич, А. М.* Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны / А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев. — Киев : Наук. думка, 1983. — 192 с.

11. *Papanicolaou, N.* Dynamics of magnetic vortices / N. Papanicolaou, T. N. Tomaras // Nucl. Phys. B. — 1991. — V. 360. — P. 425—462.

12. *Cooper, N. R.* Propagating magnetic vortex rings in ferromagnets // Phys. Rev. Lett. — 1999. — V. 82. — P. 1554—1557.

13. *Sutcliffe, P.* Vortex rings in ferromagnets : Numerical simulations of the time-dependent three-dimensional Landau-Lifshitz equation // Phys. Rev. B. — 2007. — V. 76. — P. 184439.

14. *Пшеничный, Б. Н.* Численные методы в экстремальных задачах / Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин. — М. : Наука, 1975. — 320 с.

15. *Борисов, А. Б.* Стационарные прецессионные топологические солитоны с ненулевым инвариантом Хопфа в одноосном ферромагнетике / А. Б. Борисов, Ф. Н. Рыбаков // Письма в ЖЭТФ. — 2008. — Т. 88, вып. 4. — С. 303—307.

16. *Борисов, А. Б.* Динамические тороидальные хопфионы в ферромагнетике с анизотропией типа «легкая ось» / А. Б. Борисов, Ф. Н. Рыбаков // Письма в ЖЭТФ. — 2009. — Т. 90, вып. 7. — С. 593—596.

17. *Боресков, А. В.* Основы работы с технологией CUDA / А. В. Боресков, А. А. Харламов. — М. : ДМК Пресс, 2010. — 232 с.

ДИНАМИКА ЛАЗЕРОВ КЛАССА D НА БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ, СУБМОНОСЛОЙНЫХ КВАНТОВЫХ ТОЧКАХ И ДРУГИХ ЭКЗОТИЧЕСКИХ АКТИВНЫХ СРЕДАХ

Вл. В. Кочаровский, П. А. Калинин, Е. Р. Кочаровская, В. В. Кочаровский

Введение. Почему лазеры класса D?

Первые лазеры были созданы более полувека назад. С тех лет и до настоящего времени бессменным элементом конструкции лазера является достаточно высокодобротный резонатор (см., например, [1—3]). Именно он обеспечивает сфазированное излучение значительной части активных центров в образце с инверсной населенностью уровней рабочего перехода, подавляя низкокогерентное усиленное спонтанное излучение (суперлюминесценцию), связанное с волнами непрерывного спектра, и подчеркивая высококогерентное индуцированное излучение, обусловленное дискретными модами поля резонатора. Малое время жизни (T_2) высокочастотных колебаний поляризации отдельных активных центров в имеющихся усиливающих средах не позволяет, как правило, преодолеть порог лазерной генерации при использовании низкодобротных резонаторов, в которых время жизни фотона (высокочастотных колебаний электромагнитного поля, T_E) значительно меньше времени жизни поляризации:

$$T_E \ll T_2. \tag{1}$$

(Не путать поляризацию активного центра, т. е. амплитуду колебаний его высокочастотного дипольного момента, с ориентацией векторов этого момента и действующего на него электрического поля, которые для простоты полагаем линейно поляризованными.)

Тем не менее успехи современной технологии, особенно в области полупроводниковых гетероструктур, не оставляют сомнений в том, что в ближайшее время будут созданы плотные ансамбли активных центров, допускающие лазерную генерацию при выполнении условия (1). В таких системах, с одной стороны, отсутствует излишнее, порой нежелательное накапливание поля в резонаторе, а с другой стороны, могут формироваться экзотические многочастичные состояния активных центров благодаря их коллективному взаимодействию с самосогласованным полем. Подобные ансамбли интересны не только с фундаментальной, но и с практической точки зрения, например, для сверхбыстрой параллельной обработки информации в оптической системе сильно взаимодействующих центров. Ниже будет показано, в частности, что изменение параметров последних наряду с изменением параметров накачки и резонатора позволяет в широких пределах управлять формой импульсов и спектрально-корреляционными свойствами генерируемого излучения.

Благодаря добротным колебаниям поляризации активных центров, в общем случае имеющих различные частоты в среде с неоднородным уширением спектральной линии, число степеней свободы в лазерной системе при выполнении условия (1) многократно возрастает [3, 4]. Оно может значительно превышать число мод резонатора, которые задействованы в генерации лазера и фактически определяют число его степеней свободы как динамической системы при нарушении условия (1). Поэтому в случае (1) динамика лазера, особенно с неоднородно уширенной активной средой, качественно обогащается и, как будет видно, может приводить к сложным, но вполне регулярным динамическим спектрам генерации. В результате выходящее излучение может быть многопериодическим или квазихаотическим, содержащим хорошо коррелированные или, напротив, слабо связанные спектральные компоненты, — в общем, весьма разнообразным по спектрально-корреляционным свойствам. Возникающие динамические особенности излучения, прежде всего, связаны с так называемым коллективным спонтанным излучением, или сверхизлучением, активных центров [5, 6]. Соответствующие, пока во многом гипотетические лазеры часто называют сверхизлучающими, или, в общем смысле, лазерами класса D [3, 4].

В статье указанные особенности продемонстрированы на примере двухуровневой модели лазера [2, 3] с активной средой, находящейся под действием однородной непрерывной накачки и однородно заполняющей резонатор Фабри — Перо, вдоль которого имеется также распределенная обратная связь (РОС) встречных волн. Последняя может быть обусловлена брэгговским отражением волн на периодической модуляции диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$ матрицы активной среды или на гофрировке боковых стенок резонатора. (За неимением места оставляем в стороне другие возможные сверхизлучающие лазеры, например основанные на нелинейном, скажем, рамановском (мандельштам-бриллюэновском), рассеянии накачивающих и генерируемых волн [7, 8] или на обратной связи волн вследствие рассеяния на случайных неоднородностях активной среды или ее матрицы [9, 10].) Предполагаемая для простоты пространственная одномерность задачи может быть обусловлена цилиндрической формой активного образца с числом Френеля порядка единицы или наличием одномодового волновода, в который заключена активная среда.

Для анализа динамики двухуровневой модели лазера полезно выделить следующие области релаксационных параметров, введенные для случаев A, B, C в работе [2] и дополненные случаем D в работах [3, 4].

Динамические классы	Соотношения между скоростями релаксации	Адиабатически исключаемые переменные
A	$\gamma_E \ll \gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp}$	Поляризация, инверсия
B	$\gamma_{\parallel} \ll \gamma_E \ll \gamma_{\perp}$	Поляризация
C	$\gamma_{\parallel} \ll \gamma_E \sim \gamma_{\perp}$	
D	$\gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp} \ll \gamma_E$	Эл.-маг. поле, если оно слабое

В большинстве лазеров наименьшей является скорость релаксации инверсии населенностей n уровней активной среды ($\gamma_{\parallel} = 1/T_1$). Скорость релаксации поляризации активных центров ($\gamma_{\perp} = 1/T_2$) чаще всего является наибольшей, в том числе в большинстве полупроводниковых лазеров, и такие лазеры относятся к классу B. Для генерации им необходимы высокодобротные резонаторы, в которых скорость релаксации поля ($\gamma_E = 1/T_E$) невелика, и поэтому оно (наряду с инверсией активной среды) определяет динамику, адиабатически отслеживаемую поляризацией P, т. е. плотностью высокочастотных дипольных моментов активных центров. Собственная динамика поляризации начинает сказываться уже в промежуточном случае $\gamma_E \sim \gamma_{\perp}$, т. е. для лазеров класса C (см. о них [3]). Однако полноценную роль она играет лишь в лазерах класса D, где, впрочем, и динамическая роль электромагнитного поля не является пассивной. Эта роль не сводится к адиабатическому отслеживанию поляризации, поскольку благодаря сверхизлучению на значительных интервалах времени амплитуда поля E настолько велика, что скорость его релаксации в резонаторе γ_E оказывается меньше частоты Раби $\omega_R = dE/\hbar$, а следовательно, и скорости индуцированных переходов между энергетическими уровнями активных центров (d — дипольный момент двухуровневого перехода, $\hbar$ — постоянная Планка) [3]. Тогда адиабатическое исключение поля, как правило, невозможно, и типичной является нестационарная генерация, причем значительная часть поля, возникающего в лазере класса D, успевает выходить из резонатора (в силу низкой добротности) за время одного прохода его длины B (со скоростью света в среде $c/\sqrt{\varepsilon_0}$).

1. Основные уравнения и два класса сред с экстремальной пространственно-спектральной плотностью активных центров

Как известно [4, 6, 11], при инверсии среды однонаправленное сверхизлучение или суперфлюоресценция возникают при выполнении условия

$$\nu_c^2 T_2 > 1/T_2 + 1/T_2^*, \tag{2}$$

а модовое сверхизлучение в лазерах класса D [6, 12] — при выполнении еще более сильного условия, нивелирующего волны непрерывного спектра:

$$\nu_c^2 T_E > 1/T_2 + 1/T_2^* \tag{3}$$

(см. (1) и (9)). Здесь использована так называемая кооперативная частота двухуровневой среды $\nu_c = (2\pi d^2\omega_0 N_0/\hbar\varepsilon_0)^{1/2}$, активные центры которой имеют дипольный момент перехода d на частотах вблизи ω_0, ε_0 — средняя (по резонатору и по частотам генерации) величина диэлектрической проницаемости матрицы активной среды, N_0 — концентрация активных центров, в которых создается инверсия населенностей рабочих уровней.

Более детальные условия возникновения модового сверхизлучения, как и характерные спектры и инкременты мод (представленные на рис. 1 для случаев однородного и неоднородного уширения на примере чисто брэгговского резонатора), получаются из линеаризованных уравнений лазерной динамики при заданной инверсии активной среды n. В случае однородной среды спектр мод лазера определяется хорошо известными дисперсионным уравнением среды и характеристическим уравнением резонатора. Дисперсионное уравнение является локальным и связывает комплексные отстройки частоты $\Omega = (\omega - \omega_0)/\nu_c$ и волнового числа $\kappa = (k - k_0)B_c$ моды в присутствии брэгговского перерассеяния волн. Характеристическое уравнение резонатора диктуется граничными условиями и выделяет дискретные волновые числа встречных волн κ, чья суперпозиция должна удовлетворять этим граничным условиям:

$$\begin{gathered}\kappa^2 + \beta^2 = \left(\Omega + \frac{n}{\Omega + i(\Delta_0 + \Gamma_2)}\right)^2, \\ \Omega + \frac{n}{\Omega + i(\Delta_0 + \Gamma_2)} = \frac{2R\beta}{1+R^2} + \frac{\kappa(1-R^2)}{1+R^2}\left(1 + e^{2i\kappa L}\right)\Big/\left(1 - e^{2i\kappa L}\right).\end{gathered} \tag{4}$$

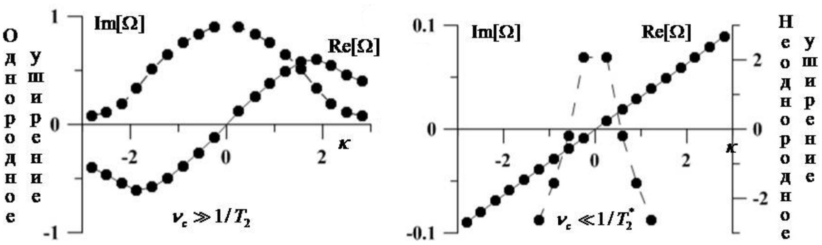


Рис. 1. Типичные зависимости инкрементов Im [Ω] (штриховая линия) и сдвигов частоты Re [Ω] (сплошная линия) в одномерном лазере с распределенной обратной связью от сдвига волнового числа κ для неустойчивых поляритонных мод в активной среде с однородным уширением линии (*слева*) и неустойчивых электромагнитных мод в активной среде с сильным неоднородным уширением (*справа*)

Здесь использованы безразмерные обозначения, указанные ниже (после уравнений (5)). В левой части второго уравнения фактически стоит величина $\pm\sqrt{\kappa^2+\beta^2}$, знаки в которой выбираются согласно решению уравнений (4) так, чтобы исключить лишние, нефизические корни.

Если скорость релаксации поляризации $1/T_2$ оказывается меньше инкремента моды Im [ω], то задействованные в ней активные центры в процессе развития неустойчивости неизбежно фазируются. Следовательно, они излучают коллективно, или, как говорят, сверхизлучают, так что на определенном этапе интенсивность их совместного излучения многократно превышает сумму интенсивностей излучения каждого из них.

В общем случае рассматриваемые лазеры с произвольным соотношением однородного и неоднородного уширения описываются следующей нелинейной системой одномерных уравнений Максвелла — Блоха [4, 6, 13] для комплексных амплитуд встречных волн поля и поляризации (укороченных с использованием частоты брэгговского резонанса ω_0 и соответствующего волнового числа $k_0=\omega_0 c^{-1}\sqrt{\varepsilon_0}$)

$$\mathrm{E}=\mathrm{Re}\left[\left(A_+(z,t)\mathrm{e}^{ik_0z}+A_-(z,t)\mathrm{e}^{-ik_0z}\right)\mathrm{e}^{-i\omega_0t}\right],$$

$$\mathrm{P}=\mathrm{Re}\left[\left(P_+(z,t,\Delta)\mathrm{e}^{ik_0z}+P_-(z,t,\Delta)\mathrm{e}^{-ik_0z}\right)\mathrm{e}^{-i\omega_0t}\right]$$

и связанных с ними двух компонент плотности инверсии населенностей

$$N=[n(\Delta)+\mathrm{Im}\left[n_z(\Delta)\mathrm{e}^{2ik_0z}\right]](N_0f(\Delta))$$

(отнесенной, как и поляризация, к центрам из единичного спектрального интервала) — плавно неоднородной (n) и промодулированной в пространстве (n_z) с периодом, равным половине длины волны излучения:

$$\begin{gathered}
\left[\partial/\partial\tau+\Sigma\pm\partial/\partial\zeta\right]a_\pm=i\beta a_\mp+i\int_{-2\Delta_0}^{2\Delta_0}p_\pm(\Delta)f(\Delta)d\Delta,\\
\left[\partial/\partial\tau+\Gamma_2+i(\Delta-\Phi)\right]p_\pm(\Delta)=-\sqrt{I}\left(in(\Delta)a_\pm\pm n_z^{1,*}(\Delta)/2\,a_\mp\right),\\
\left[\partial/\partial\tau+\Gamma_1\right](n(\Delta)-n_p)=-\sqrt{I}\,\mathrm{Im}\left(a_+p_+^*(\Delta)+a_-p_-^*(\Delta)\right),\\
\left[\partial/\partial\tau+\Gamma_1\right]n_z(\Delta)=\sqrt{I}\left(a_-^*p_+(\Delta)-a_+p_-^*(\Delta)\right).
\end{gathered}\qquad(5)$$

Модуляция инверсии с периодом в полдлины волны λ/2 обязана биениям встречных волн и влияет на брэгговскую селекцию «горячих» мод, обусловленную модуляцией лазерного волновода или эквивалентной ей пространственной модуляцией диэлектрической проницаемости матрицы активного образца с эффективной амплитудой $\bar\beta$:

$$\varepsilon_M=\varepsilon_0\,\mathrm{Re}\,[1+4\bar\beta\exp(2i\kappa_0\zeta)].\qquad(6)$$

Здесь и ниже используются следующие безразмерные параметры: $I = \nu_c^2 / \omega_{21}^2 << 1$, $\beta = \overline{\beta} / \sqrt{I}$ — действительная амплитуда брэгговской модуляции диэлектрической проницаемости среды (отношение полуширины «запрещенной» фотонной зоны к кооперативной частоте), $\tau = t\nu_c$ и $\zeta = z\nu_c \sqrt{\varepsilon_0} / c$ — время (нормированное на кооперативную частоту) и продольная координата (нормированная на кооперативную длину $B_c = c / (\nu_c \sqrt{\varepsilon_0}) \equiv \lambda / (2\pi\sqrt{I})$), λ — длина волны излучения в среде, $\Gamma_{1,2} = 1/(\nu_c T_{1,2})$ — безразмерные скорости релаксации инверсии и поляризации, $p_\pm = P_\pm/(dN_0 f(\Delta))$ и $a_\pm = A_\pm \varepsilon_0/(2\pi d N_0)$ — безразмерные амплитуды поляризации и поля встречных волн, n_p — инверсия отдельного двухуровневого активного центра, создаваемая непрерывной накачкой, $\kappa_0 = k_0 B_c \equiv \omega_0 \nu_c^{-1} \approx 1 / \sqrt{I}$ — безразмерное брэгговское волновое число, $\Phi = (\omega_0 - \omega_{21})/\nu_c$ — нормированная на кооперативную частоту отстройка частоты брэгговского резонанса ω_0 от центральной частоты спектральной линии активной среды ω_{21}. Хотя использованное выше время жизни фотона T_E в «холодном» (т. е. при $n = 0$) резонаторе во многом определяет динамику лазера, он явно в уравнениях не фигурирует. (В системе (5) присутствует лишь величина $\Sigma = 2\pi\sigma / \nu_c$, описывающая омические потери поля σ и влияющая на время T_E).

Для определенности неоднородное уширение описываем функцией Лоренца $f(\Delta) = \Delta_0 / [\pi(\Delta^2 + \Delta_0^2)]$, где $\Delta = (\omega - \omega_{21}) / \nu_c$ — нормированная отстройка частоты от центральной частоты спектральной линии ω_{21}, $\Delta_0 = 1 / (T_2^* \nu_c)$. Как будет ясно из дальнейшего, типичный импульс сверхизлучения формируется группой близких по частоте активных центров, излучающих одновременно и сфазированно. Для каждой такой группы максимальная спектральная полуширина $\Delta\nu/2$ определяется условием ее равенства *действующей кооперативной частоте* $\overline{\nu_c}$, вычисленной с учетом лишь активных центров из этой группы, т. е. $\Delta\nu = 2\overline{\nu_c} \cong 2\nu_c / \Delta_0$. Эта величина $\overline{\nu_c}$ и задает минимальную длительность ожидаемых импульсов поля $\Delta t \sim 1 / \overline{\nu_c}$, т. е. $\Delta\tau \sim \Delta_0$, почти не зависящую от параметра β и от релаксационных времен $T_{1,2}$, пока $\Delta t \lesssim T_2$, т. е. пока $\Delta_0 \lesssim \Gamma_2^{-1}$ (см. разд. 3.1).

Ниже для простоты считаем точной настройку брэгговского резонанса на центр этой спектральной линии, т. е. полагаем $\Phi = 0$, а также пренебрегаем омическими потерями Σ. Для определенности уравнения (5) решаем при следующих начальных условиях: $n = 1$, $n_z = 0$, $p_\pm = 10^{-3}$, $a_\pm = 0$. На краях лазерной гетероструктуры $\zeta = \pm L/2$ для резонатора Фабри — Перо граничные условия соответствуют отношению амплитуд встречных волн, равному коэффициенту отражения торцов R, а в пределе чисто брэгговского резонатора (R = 0) граничные условия отвечают свободному (без отражений на границах) излучению поля: $a_+(-L/2) = 0$ и $a_-(L/2) = 0$. В численных примерах для сред с однородным и неоднородным уширением, если не сказано другое, безразмерную длину лазера $L \equiv B/B_c$ выбираем порядка оптимальной, $L \sim 2$ и $L \sim 2\Delta_0$, определяемой соответственно кооперативной длиной B_c или эффективной кооперативной длиной $\overline{B_c} = B_c\Delta_0$ (вычисленной по действующей кооперативной частоте $\overline{\nu}_c$).

Условия (2) и (3) означают, что для сверхизлучения требуется среда с очень большой как пространственной, так и спектральной плотностью активных центров. Ее созданию, т. е. фактически увеличению кооперативной частоты за счет наращивания пространственной концентрации активных центров, препятствует их взаимодействие, ведущее к уменьшению времени жизни поляризации отдельных центров T_2 и росту неоднородного уширения спектральной линии рабочего перехода $1/T_2^*$ вследствие неизбежного разброса собственных частот активных центров. Кроме того, накачка, создающая инверсию населенностей их рабочих уровней, может также приводить к уменьшению времени жизни поляризации T_2.

Преодоление указанных трудностей для современных полупроводниковых систем возможно, например, в многослойных гетероструктурах с субмонослойными квантовыми точками, скажем GaAs/InGaAs [14], в структурах с примесными центрами, скажем $Cd_{0.8}Zn_{0.2}Te$:In [15], или в экситонных системах при сильном возбуждении высокочистых полупроводников, скажем ZnTe [16, 17]. На первых уже работают диодные лазеры класса B [18, 19], а на примесях и экситонах недавно были получены импульсы суперфлюоресценции (она отличается от сверхизлучения отсутствием затравочного когерентного импульса поля). Кроме указанных систем с большим неоднородным уширением ($1/T_2^* \gg 1/T_2$), полупроводниковые лазеры класса D можно реализовать и на более экзотических системах, например на сильно замагниченных многослойных гетероструктурах с квантовыми ямами [20, 21] или на полупроводниковых ловушках для бозе-эйнштейновской конденсации экситонов [22—25]. В этих системах неоднородное уширение невелико ($1/T_2^* < 1/T_2$) в силу имеющихся квантовых запретов: квантования электронов и дырок по уровням Ландау в первом примере и бозе-эйнштейновской конденсации экситонов на нижнем энергетическом уровне ловушки во втором. Для обеих систем недавно появились экспериментальные свидетельства генерации когерентного излучения суперфлюоресценции.

Эффекты сверхизлучательного типа (при оптической нерезонансной импульсной накачке) наблюдались также для других, не полупроводниковых сред — твердотельных и газовых. Из них перспективными для создания лазеров класса D могут являться как среды с сильным неоднородным уширением, например матрицы с активными центрами (скажем, $KCl{:}O_2$ [11, 26]) и так называемыми молекулярными агрегатами [27] (H-агрегаты [28] и J-агрегаты [29] красителей), так и среды с практически однородным уширением, например атомарные газы редкоземельных щелочных металлов [30—34], охлажденные, скажем, в магнитооптической решетке.

Не будем детализировать те или иные особенности потенциальных сред для сверхизлучающих лазеров, а сосредоточимся на описании типичных черт ожидаемой динамики в двух качественно различных классах таких лазеров — с практически однородно ($T_2 << T_2^*$) и с сильно неоднородно ($T_2 >> T_2^*$) уширенной спектральной линией активной среды.

2. Однородное уширение. Сверхизлучающие лазеры на поляритонных модах с отрицательной энергией

В условиях однородного уширения самовозбуждение рассматриваемого лазера класса D в общем случае возникает при превышении порога генерации для одной из мод (примерно при $n_p \nu_c^2 T_2 T_E > 1$), а с дальнейшим увеличением накачки или длины лазера может возникнуть многомодовая генерация. Интересно то обстоятельство, что все лазерные моды являются поляритонными, а не электромагнитными и обладают отрицательной энергией [6]. Поэтому при включении лазера их амплитуда нарастает благодаря излучательной диссипативной неустойчивости, в процессе которой их энергия передается полю излучения, покидающему резонатор.

Дисперсия однородно уширенной активной среды обеспечивает существенное различие инкрементов (добротностей) мод, так что для реализации, скажем, одно- или двухмодового сверхизлучения нет необходимости вводить в резонатор Фабри — Перо распределенную обратную связь. Последняя, согласно (4), не играет особой роли при $\beta L << |R| \lesssim 1$, заметно (но не кардинально) модифицирует спектр резонатора Фабри — Перо при $|R| \lesssim \beta L \lesssim 1$, а при $\beta L >> 1$ многократно увеличивает время жизни фотона в модах с волновыми числами из интервала $|\kappa| \lesssim \beta$, что с учетом конечной полосы волновых чисел неустойчивых поляритонных мод [6] $|\kappa|_{\beta=0} \lesssim \sqrt{n\nu_c^2 T_2 T_E - 1}\Big/\left(\nu_c T_E \sqrt{n}\right) = (\ln|R|^{-1})\sqrt{nL/\left(\Gamma_2 \ln|R|^{-1}\right) - 1}\Big/\left(L\sqrt{n}\right)$, вычисленной при $\beta = 0$ и $T_E = B\sqrt{\varepsilon_0}/\left(c\ln|R|^{-1}\right)$, может исключить реализацию (см. (1)) лазера класса D при заданных остальных, кроме β, параметрах.

Поэтому в данном разделе за основу анализа возьмем резонатор Фабри — Перо ($\beta = 0$), имея в виду, что для лазера с комбинированным резонатором при $\beta L \lesssim 1$ динамика качественно не меняется. Соответствующий комплексный спектр поляритонных мод немного несимметричен относительно частоты $\omega_{21} = \omega_0$ при наличии отклонения $|\delta| < 1/2$ «волновой» длины лазера $k_0 B/\pi = m_0 - \delta$ от целого числа полуволн m_0, а занимаемый модами спектр у́же $2n\nu_c^2 T_E$ и может быть шире линии $2/T_2$ лишь в меру превышения величиной $n\nu_c^2 T_2 T_E$ порогового значения ~1:

$$\left(\omega_m - \omega_{21}\right) T_2 = n\nu_c^2 T_2 T_E x_m \Big/ \left(1 + x_m^2\right) + i\left[n\nu_c^2 T_2 T_E \Big/ \left(1 + x_m^2\right) - 1\right]. \qquad (7)$$

Здесь использовано отношение действительной и мнимой частей частоты парциальной (m-й) электромагнитной моды резонатора Фабри — Перо

$$x_m = \left(m - m_0 + \delta\right)\pi / \ln|R|^{-1}. \qquad (8)$$

Величина δ связана с фазой комплексного коэффициента отражения R, учитывающей в укороченных уравнениях (5) субволновое изменение длины резонатора, центр которого привязан к центральному максимуму брэгговской структуры (6) принятым нами условием $\beta = \mathrm{Re}[\beta]$. В лазере с распределенной обратной связью для значений $\beta L \lesssim 1$ спектр поляритонных мод аналогичен (7), см. рис. 1.

Как ясно из геометро-оптического приближения, при $\beta = 0$ уравнения (4) и спектр мод (7) остаются в силе и для плавно неоднородной инверсии $n(\zeta)$, приводящей к неоднородности волновой отстройки $\kappa(\zeta)$, если в них указанные функции заменить на средние по длине резонатора $\bar{n}$ и $\bar{\kappa}$. Не интересуясь небольшими поправками к действительным частотам мод (7), можно приближенно найти их инкременты с учетом брэгговских отражений (РОС) при $\beta << 1/L$, заменив там (в (8) и T_E) величину $\ln|R|^{-1}$ на $\ln\left|R + \beta L / \left[2\left(x_m + i\right)\ln|R|^{-1}\right]\right|^{-1}$. Отметим также, что для упрощения анализа мод полагаем одинаковыми комплексные коэффициенты отражения торцов лазера ($R_1 = R_2 = R$), тогда как реально они могут быть различными (в зависимости от зеркал). Это не только приводит к изменению спектра мод (легко учитываемому в (4) заменой $2R$ на $R_1 + R_2$ и R^2 на $R_1 R_2$), но и делает их профили несимметричными относительно центра резонатора $\zeta = 0$. Последнее усугубляется при квазистационарной генерации мод благодаря как нелинейной решетке инверсии $n_z(\zeta)$, приводящей к РОС с измененным параметром β, так и скачку поляризуемости активной среды на ее границе, дающему комплексные (и различные) поправки к коэффициентам отражения торцов лазера. Например, если бы эти отражения были обусловлены скачками диэлектрической проницаемости ε при $\zeta = \mp L/2$, то согласно формуле Френеля к коэффициенту отражения $R = \left(\sqrt{\varepsilon_0} - 1\right)\Big/\left(\sqrt{\varepsilon_0} + 1\right)$ возникли бы заметные поправки: $\sqrt{\varepsilon_0}\, n\left(\zeta = \mp B/2\right)\nu_c^2 T_2 T_E / \left(\sqrt{\varepsilon_0} + 1\right)\omega_{21} T_E \sim \left(\lambda / \pi B\right)\ln|R|^{-1}$

(что составляет несколько процентов при типичных значениях $\ln|R|^{-1} \sim 3$ для резонаторов с не слишком большой длиной В ~ (100 ÷ 1000)λ).

2.1. Первый и второй лазерные пороги. Одномодовая стационарная и двухмодовая квазистационарная генерация

В принятых условиях при одинаковых потерях соответствующих парциальных электромагнитных мод наинизшим порогом генерации $\mathrm{Im}[\omega_m] = 0$ обладает ближайшая к резонансу поляритонная мода $m = m_0$: $\bar{n}L / \left(\Gamma_2 \ln\left|R\right|^{-1}\right) = 1 + \left(\pi\delta / \ln\left|R\right|^{-1}\right)^2$. При переходе через этот, так называемый первый, лазерный порог, т. е. при $n_p > \bar{n} = n_{m_0}$, устанавливается одномодовая стационарная генерация. Ширина квазимонохроматического спектра такого излучения лазера класса D оказывается очень узкой благодаря ничтожному вкладу шумов резонатора по сравнению с вкладом квантовых шумов поляризации, которые могут быть чрезвычайно малыми для узкой спектральной линии. На этой основе, согласно [31—34], возможно создание стандартов частоты (и времени) с шириной линии на пару порядков меньше, чем на основе существующих лазеров класса А или В.

При дальнейшем превышении первого лазерного порога, например за счет роста создаваемой накачкой инверсии n_p, амплитуда стационарно генерируемой моды также растет. Однако средний по резонатору уровень инверсии не меняется (благодаря ее снятию под действием индуцированного излучения), $\bar{n} = n_{m_0} = \mathrm{const}$, поскольку он задан граничными условиями и отвечает фиксированному усилению поля на одном проходе резонатора $1/R$. Легко проверить, что для двухуровневой среды с диэлектрической проницаемостью [6] $\varepsilon(\zeta) = \varepsilon_0 \left\{1 + 4n(\zeta)\nu_c^2 / \left[\left(\omega + i/T_2\right)^2 - \omega_{21}^2\right]\right\}$ на пороге генерации m-й моды (7) полный коэффициент усиления составляющих ее волн, задаваемый интегралом от $\mathrm{Im}\,[k] = \mathrm{Im}\left[\omega\sqrt{\varepsilon}/c\right]$ вдоль резонатора, равен $\ln\left|R\right|^{-1}$ как раз при условии $\mathrm{Im}\,[\omega_m] = 0$, фиксирующем определенные значения $\bar{n} = n_m \gtrsim n_{m_0}$. Тем не менее профиль инверсии $n(\zeta)$ с ростом n_p подрастает в центре резонатора, где поле моды слабее, и уменьшается на краях, где поле сильнее и поставляемая накачкой инверсия «проедается» им глубже. Данный эффект гораздо слабее выражен в лазерах классов А и В, где добротность выше и поле однороднее. Менее выражена там и самосогласованная полуволновая модуляция инверсии (см. n_z в уравнениях (5)). Эта модуляция свойственна лазерам класса D с их большой поляризацией и обуславливает там нелинейную модификацию генерируемой моды вследствие эффективного перерассеяния составляющих ее встречных волн на фоне неоднородного профиля инверсии.

Как в результате взаимовлияния компонент инверсии $n(\zeta)$ и $n_z(\zeta)$, так и в результате деструктивной интерференции внутреннего перерассеяния волн и их отражения от торцов лазера первый лазерный порог генерации, отвечающий данной моде, может немного повыситься и превзойти порог генерации какой-либо другой моды, скорее всего соседней, $\overline{n_{m_0 \pm 1}}$. Таким образом, в лазере класса D при большом (многократном) превышении над порогом может возникнуть двухмодовый режим (при дальнейшем уходе от пороговых значений системы, например путем увеличения уровня накачки n_p или длины лазера L, не исключен многомодовый режим).

В определенных условиях, когда генерация каждой из надпороговых поляритонных мод вполне независима и достаточно устойчива несмотря на их конкуренцию из-за общего источника энергии, а их нелинейное перерассеяние невелико — в том числе благодаря неоднородности профиля инверсии (создаваемого общим полем мод), будет наблюдаться квазистационарное излучение двух (или нескольких) гармоник со слабым спектральным уширением и почти постоянными амплитудами. В общем случае в каждой квазистационарно генерируемой моде из-за самосогласованной решетки инверсии и краевых скачков поляризуемости активной среды происходит (при $R_1 = R_2$) спонтанное нарушение симметрии структуры поля, рассчитываемой в линейном приближении вместе со спектром (7). Нарушается симметрия и профиля инверсии, согласованного с общим полем мод и испытывающего автомодуляцию из-за их биений. При этом межмодовый спектральный интервал (или полоса генерации всех поляритонных мод) никогда не превышает величину $2\bar{n}\nu_c L / \ln|R|^{-1} \sim 2 / T_2$ и для не очень длинных лазеров (в масштабе кооперативной длины B_c) с $L \lesssim \sqrt{\pi\left(\ln|R|^{-1}\right) / 2\bar{n}}$ оказывается существенно меньше межмодового интервала соответствующих электромагнитных мод «холодного» резонатора $\pi\nu_c / L = \pi c / B\sqrt{\varepsilon_0}$. Выше учтено, что пороги генерации соседних мод $\mathrm{Im}\left[\omega_{m_0, m_0 \pm 1}\right] = 0$ (см. (7)) близки по крайней мере по порядку величины.

Для простейшего лазера класса D с резонатором Фабри — Перо квазистационарную генерацию нескольких мод можно реализовать лишь в близком к вырождению случае $\delta \approx \pm 1/2$, когда пороги генерации двух центральных соседних мод (7) почти совпадают. Тогда в широком интервале параметров возможна генерация двух квазистационарных поляритонных мод с почти одинаковыми интенсивностями, пропорциональными накачке, и с разницей частот $\pi/T_2 \ln|R|^{-1}$, практически не зависящей от длины лазера, кооперативной частоты и накачки (рис. 2). Эта генерация сопровождается автомодуляцией полной интенсивности излучения, инверсии среды и самих амплитуд мод с периодом их биений $T_2\ln|R|^{-1}$.

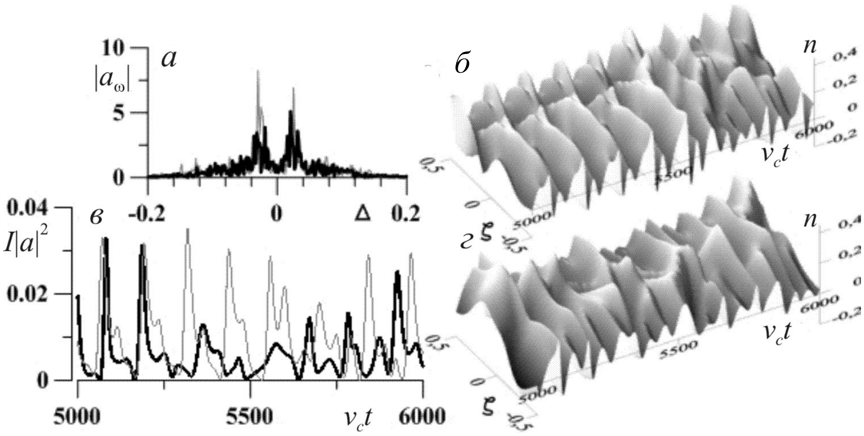


Рис. 2. Автомодуляция и когерентные пульсации в двухмодовой генерации в лазере класса D (активная среда с параметрами $\Gamma_1 = 0{,}01$, $\Gamma_2 = 0{,}02$, $L = 1$, $\Delta_0 = 0{,}002$ помещена в низкодобротный резонатор Фабри — Перо с коэффициентами отражения от зеркал, равными по модулю $|R| = 0{,}25$, но имеющими разные фазы): *а* — спектры модуля амплитуды (серая линия для режима автомодуляции, черная — для режима когерентных пульсаций); *б* — пространственно-временная динамика инверсии в режиме автомодуляции для уровня накачки $n_p = 1$ и отношения коэффициентов отражения $R_1/R_2 = e^{i0{,}8\pi}$; *в* — интенсивности поля на краю образца в единицах квадрата частоты Раби (серая линия для режима автомодуляции, черная — для режима когерентных пульсаций); *г* — пространственно-временная динамика инверсии в режиме когерентных пульсаций для $n_p = 0{,}75$ и $R_1/R_2 = e^{i\pi}$

Аналогичную квазистационарную двухмодовую генерацию в еще более широком диапазоне параметров рассматриваемой модели (5) лазера класса D можно получить, добиваясь близости порогов генерации двух мод введением РОС с $\beta \lesssim 1/L$ и с небольшой расстройкой $\Phi = (\omega_0 - \omega_{21})/\nu_c$ или за счет слабого неоднородного уширения среды $1/T_2^* \lesssim 1/T_2$ и неоднородности ее концентрации $N_0(\zeta)$ или накачки $n_p(\zeta)$, ослабляющих конкуренцию мод и способствующих их одновременной генерации. Благоприятными для этого могут быть и другие факторы, выходящие за рамки модели (5), например поляризационное вырождение мод или нерезонансное, скажем тепловое, нелинейное воздействие поля мод на активную среду. В любом случае граница области управляющих параметров лазера, при переходе которой его генерация теряет стационарный одномодовый характер, называется вторым лазерным порогом.

В работах [24, 25] можно найти аналитический расчет влияния неоднородного уширения на первый порог лазера с бозе-эйнштейновским распределением активных центров и на второй порог одномодового лазера класса D в модели расщепления однородно уширенной спектральной линии на две одинаковые линии, расположенные симметрично относительно частоты парциальной моды резонатора. Там же для лазера класса D с однородным и слабым неоднородным уширением дан численный анализ некоторых особенностей одно-, двух- и многомодовой нестационарной генерации, обсуждаемых в следующем разделе.

2.2. Модовое сверхизлучение в низкодобротном резонаторе

Более характерным механизмом перехода к нестационарной генерации, т. е. перехода через второй лазерный порог, в лазерах класса D является не вышеописанное возникновение квазистационарной генерации еще одной поляритонной моды, а глобальная неустойчивость исходно генерируемой моды, связанная с ее неадиабатическим разрушением благодаря сверхизлучательному снятию инверсии в значительной части лазера за время меньше или порядка времени релаксации поляризации T_2. В лазерах класса D этот механизм приводит и к разрушению двух- или многомодовой квазистационарной генерации при достаточно большой надпороговости. Конечно, он может сопровождаться или осложняться различными другими неустойчивостями мод (параметрической, модуляционной и пр.), которым способствуют раби-осцилляции и неоднородный профиль инверсии среды, неизбежные в сильном и сильно неоднородном поле мод лазера класса D. Подобные неустойчивости, существующие и в лазерах классов A и B (см. гл. 3 в монографии [3]), связаны с так называемым раби-расщеплением генерируемой моды, делающим возможным ее параметрический распад в соседние моды, и с решеткой инверсии, вызванной пространственными биениями встречных волн в составе каждой моды и способствующей межмодовому перерассеянию, автомодуляции излучения и развитию неоднородных возмущений поля мод и инверсии среды.

Однако только в лазерах класса D возможна уникальная неустойчивость мод, обусловленная сверхизлучением (инициированным коллективным спонтанным излучением) из центральной области лазерного образца, где благодаря низкой добротности резонатора, как уже говорилось, формируется ощутимое (возможно, многократное) превышение инверсии над уровнем (квази)стационарной генерации $\overline{n_m}$. В результате появляется возможность катастрофически быстрого снятия инверсии и временной потери усиливающих свойств в большой части активной среды лазера. Следовательно, становится неизбежной нестационарная импульсная генерация в условиях стационарной накачки (см. рис. 2, *в*). В общем случае этот процесс не описывается на языке одной или нескольких лазерных поляритонных мод, рассчитанных по квазистационарному распределению инверсии в активной среде, поскольку поведение поля, поляризации и инверсии становится быстропеременным и сильно неоднородным.

Как показывают детальные численные расчеты, сверхизлучательный механизм неустойчивости стационарной генерации одной моды (второй лазерный порог) или двух (возможно, нескольких) мод вступает в действие тогда, когда время релаксации поляризации T_2 существенно превышает, скажем в два и большее число раз, время развития однонаправленного сверхизлучения [6] $\sim \left(n_{\max} \nu_c^2 T_E\right)^{-1}$ в области с максимальной инверсией, $n \approx n_{\max} > \overline{n_m}$, сосредоточенной на длине $\sim B / \ln|R|^{-1}$. Для этого инверсия в указанной области лазера тоже должна существенно превысить уровень соответствующего лазерного порога $\overline{n_m}$, который, правда, сам может значительно понизиться по сравнению с линейной оценкой n_m, приведенной в разд. 2.1, из-за изменения как эффективных распределенных отражений встречных волн, благодаря нелинейной динамической решетке инверсии n_z, так и скачков поляризуемости активной среды на торцах лазера.

Следует заметить, что данная оценка и весь проводимый анализ излучения мод лазера класса D справедливы лишь для коротких лазеров с

$$L \lesssim \ln|R|^{-1} \Big/ \sqrt{n_p}, \text{ т. е. } T_E \lesssim 1 \Big/ \nu_c \sqrt{n_p}\,. \tag{9}$$

В противном случае, когда $L \gg \ln|R|^{-1} / \sqrt{n_p}$, т. е. $\nu_c \sqrt{n_p} \gg 1/T_E > 1/T_2$, уже вблизи первого лазерного порога ($n_p \sim n_{m_0}$) даже при значительных отражениях $\ln|R|^{-1} \sim 1$ будет идти когерентная однонаправленная суперфлюоресценция, т. е. коллективное спонтанное излучение волн непрерывного спектра, которое будет перепоглощаться на отдельных участках с длиной порядка $\ln|R|^{-1} \Big/ \sqrt{n_{m_0}}$. Оно подавит когерентное излучение мод и создаст шумоподобное низкокогерентное излучения с плавным спектром, который может быть даже шире спектральной линии среды ($2/T_2$).

В отличие от него одно-, двух- и многомодовый режимы сверхизлучения в условиях (9) характеризуются наличием выраженных когерентных импульсов и вполне регулярным динамическим спектром поля и инверсии. Он отчасти сохраняет модовую структуру (ср. рис. 2, *а*) и по ширине может значительно превосходить спектральную линию среды, достигая величины порядка $\nu_c \sqrt{n_{m_0}} \gg 1/T_2$, диктуемой минимальной длительностью импульсов сверхизлучения. В таких режимах с ростом уровня накачки n_p уровень инверсии, усредненный по времени и длине лазера, начинает медленно расти, превышая исходный лазерный порог, но оставаясь заметно ниже n_p. Это приводит к более частому появлению импульсов сверхизлучения, а при дальнейшем росте n_p — к их наложению, хаотизации и исчезновению модовой структуры (рис. 3). Последнее связано с изрезанием и изменчивостью профиля инверсии, а также с растущим вкладом суперлюминесценции волн непрерывного спектра и сужением общего спектра при постепенном нарушении условия типа (9).

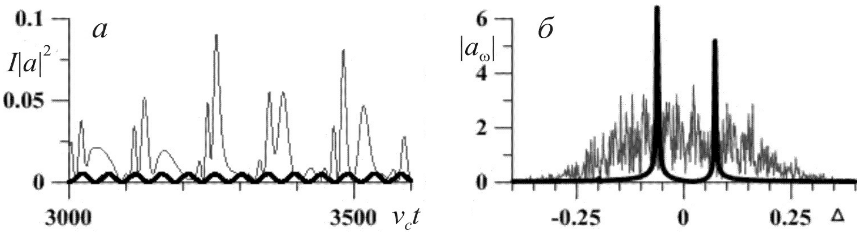


Рис. 3. Двухмодовая генерация в лазере класса D с РОС (R = 0): *а* — интенсивность поля в единицах квадрата частоты Раби; *б* — спектр модуля амплитуды поля на краю образца; черная линия — биения двух мод, уровень накачки n_p = 0,25; серая линия — импульсы сверхизлучения, уровень накачки n_p = 1. Активная среда с параметрами Δ_0 = 0,002, Γ_1 = 0,01, Γ_2 = 0,02, L = 2 находится в низкодобротной брэгговской структуре с $b = \beta L$ = 1

В любом режиме сверхизлучения мод происходит (при $R_1 = R_2$) динамическое спонтанное нарушение симметрии профилей поля мод и согласованного с ними профиля инверсии, усредненных по достаточно большому интервалу времени $\Delta T >> T_1$, содержащему несколько характерных наборов импульсов всех генерируемых мод. Возникающая асимметрия имеет ту же причину, что и при квазистационарной генерации мод, однако может быть метастабильной, и тогда на больших временах области максимальной инверсии среды и минимальной интенсивности поля мод смещаются то в одну, то в другую сторону от центра резонатора. В результате подобного спонтанного переключения метастабильных состояний лазера могут меняться во времени средние (по указанному ΔT) интенсивность излучения и корреляционные свойства импульсов, причем эти средние существенно различны для противоположных торцов лазера.

2.3. Разброс параметров сверхизлучательных импульсов

В используемой модели лазера (5) реализация одно-, двух- и многомодового режимов сверхизлучения прежде всего определяется комплексным отношением коэффициентов краевых и распределенных отражений $\pi R/\beta L$, расстройкой резонансных частот рабочего перехода и брэгговской структуры Φ, а также уровнем накачки n_p и длиной лазера L. Выше, ограничившись точной настройкой Φ = 0, мы привели расчеты в предельных случаях одномодового сверхизлучения в резонаторе Фабри — Перо (β = 0, см. рис. 2) и двухмодового сверхизлучения в чисто брэгговском резонаторе

(R = 0, см. рис. 3). В обоих случаях превышение над вторым лазерным порогом невелико, импульсы сверхизлучения не очень мощные, разной формы, со средней длительностью порядка T_2, но следуют довольно регулярно через промежутки времени порядка T_1. Во втором случае, где резонатор длиннее, заметны две-три осцилляции в каждом импульсе, которые связаны с перепоглощением поля в краевых областях активной среды и делают менее заметными компоненты спектра выходящего излучения, ответственные за квазипериодичность следования импульсов.

Для динамики режима сверхизлучения мод важен не только уровень накачки n_p, но и ее мощность, определяемая скоростью релаксации инверсии $1/T_1$. Дело в том, что после каждого очередного импульса сверхизлучения инверсия среды в значительной части лазера резко падает (вплоть до отрицательных значений), так что поле перестает усиливаться и ослабляется вследствие выхода из резонатора. Иными словами, лазер как бы выключается на время порядка T_1, пока накачка снова не восстановит достаточный уровень инверсии. (В квазистационарном режиме генерации нескольких мод в результате их биений инверсия тоже может сильно уменьшаться и даже становиться отрицательной (см. рис. 2), но почти обратимым, когерентным образом и на недолгое время $\lesssim T_2$, значительно меньшее времени некогерентного изменения инверсии T_1.) Сказанное особенно наглядно в случае одномодового сверхизлучения, где импульсы гораздо регулярнее и мощнее (они могут быть описаны аналитически, см. [12]), но хорошо прослеживается и в случае двухмодового (рис. 3, 4) или даже многомодового сверхизлучения, где импульсы разных мод нелинейным образом конкурируют, зачастую ослабляя и удлиняя друг друга, поскольку создаются общим ансамблем активных центров.

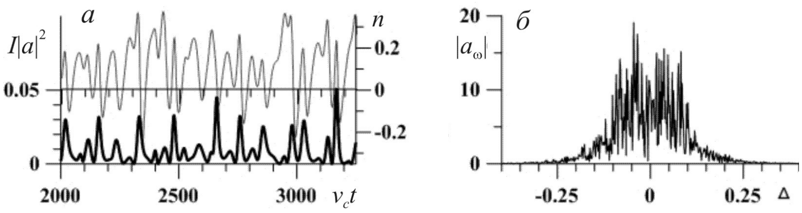


Рис. 4. Типичная сверхизлучательная генерация лазера класса D с РОС и n_p = 1 (активная среда с параметрами Γ_1 = 0,01, Γ_2 = 0,02, Δ_0 = 0,002, L = 1, $b = \beta L$ = 1): *а* — зависимости интенсивности поля (черная линия снизу) и инверсии (серая линия сверху) от времени; *б* — спектр модуля амплитуды поля на краю образца

Выдаваемые лазером импульсы сверхизлучения (см. рис. 4) существенно (многократно) различаются между собой по длительности, амплитуде и времени задержки (характеризуемом скважностью), поскольку инициирующая их сверхизлучательная неустойчивость сильно зависит от распределения инверсии и каждый раз стартует с новых конфигураций

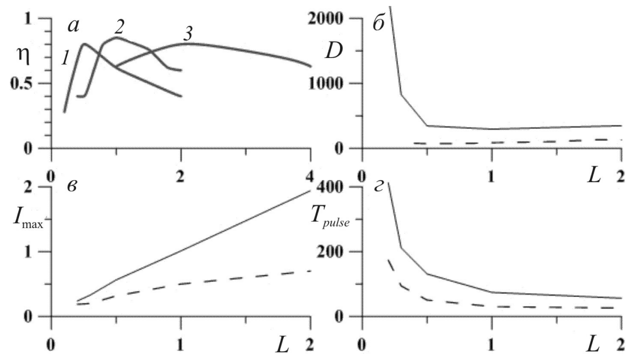


Рис. 5. Анализ усредненных (штриховая линия) и максимальных (сплошная линия) значений характеристик сверхизлучательных импульсов лазера класса D с РОС и $n_p = 1$: *а* — зависимость эффективности сверхизлучательной генерации η от длины активной среды L (*1* — $\beta = 1{,}8$, $T_1 = 2T_2 = 2t_d$), ширины запрещенной зоны брэгговской структуры β (*2* — $L = 1$, $T_1 = 2T_2 = 2t_d$), времени релаксации поляризации T_1/t_d (*3* — $\beta = 1{,}8$, $L = 0{,}5$, $T_1 = 2T_2 = 2t_d$); *б* — скважность D; *в* — максимальное значение интенсивности I_{max}; *г* — длительность T_{pulse} как функции длины L

слабых поля и поляризации, оставшихся в резонаторе от предыдущего импульса. Анализ этих величин и эффективности сверхизлучательной генерации (по определению равной доле энергии, высвеченной в виде импульсов коллективного спонтанного излучения) позволяет указать оптимальные параметры работы лазера класса D как сверхизлучающего генератора. На рис. 5, *б—г* дан пример подобного анализа по отношению к длине активной среды L в случае чисто брэгговского резонатора. Как и ожидалось, оптимум с этой точки зрения достигается при $L \sim 1/\beta$. На рис. 5, *а* эффективность сверхизлучательной генерации представлена как функция длины лазера $B = LB_c$, ширины запрещенной зоны брэгговской структуры β и времени релаксации (или накачки) инверсии T_1. Оптимальными оказались значения $B \sim B_c/2$, $\beta \sim 1/L$ и $T_1 \sim 2t_d$, где $t_d = 2/T_E n_p \nu_c^2$ — характерное время развития неустойчивости основной поляритонной моды при уровне инверсии n_p, задаваемом накачкой, $T_E \approx \sqrt{\varepsilon_0} B / c_0$ — оценка времени жизни фотона в резонаторе при $\beta L \lesssim 1$. Сравнение рис. 3 и 4 иллюстрирует примерно двукратное уширение спектра генерации при двукратном увеличении параметра РОС β для заданного значения величины $\beta L = 1$.

3. Неоднородное уширение. Селекция электромагнитных мод — путь к импульсной сверхизлучательной генерации

Перейдем к лазерам класса D с большим неоднородным уширением спектральной линии активной среды: $1/T_2^* >> \nu_c >> 1/T_2$. В них первый и второй лазерные пороги близки друг к другу (как это имеет место и в лазерах класса B [3] даже при $1/T_2^* \sim 1/T_2$). Поэтому мы не будем останавливаться на квазистационарной генерации одной или нескольких мод, реализующейся в узком диапазоне лазерных параметров, отвечающей низкой интенсивности излучения и приводящей к выжиганию узких спектральных провалов в инверсии на частотах генерируемых мод.

В случае неоднородного уширения, в отличие от однородного, моды лазера с инвертированной активной средой обладают положительной энергией и их спектр для интересующих нас не слишком коротких лазеров с $T_E \gtrsim T_2^*$, согласно (4) с $\Delta_0 >> \Gamma_2$, близок к спектру электромагнитных мод «холодного» резонатора, вычисляемому при нулевой инверсии [4, 6, 12]: $\omega_m \approx m\pi c / B\sqrt{\varepsilon_0}$, за исключением запрещенной области частот $|\Omega| \lesssim \beta$, обусловленной брэгговским резонансом при $L \gtrsim 1/\beta$ (для m вблизи $m_0 = k_0B/\pi + \delta$, см. (7) и (8)). При этом принципиальной проблемой оказывается сама возможность получения сколько-нибудь мощных импульсов сверхизлучения в условиях непрерывной накачки. Действительно, в стандартных низкодобротных резонаторах типа Фабри — Перо инкременты (и другие характеристики) соседних мод слабо отличаются, если выполнены условия сверхизлучения в лазере класса D (см. (2) и (3)):

$$1 / T_2 \ll \sqrt{n_p}\,\overline{\nu_c} = \sqrt{n_p}\,\nu_c / \Delta_0 \lesssim 1 / T_E. \qquad (10)$$

Последнее неравенство эквивалентно ограничению на длину лазера $L \lesssim \Delta_0 \ln\left|R\right|^{-1} / \sqrt{n_p}$, аналогичному (9) с заменой кооперативной частоты ν_c на действующую кооперативную частоту $\overline{\nu}_c$. В противном случае, когда $L \gg \Delta_0 \ln\left|R\right|^{-1} / \sqrt{n_p}$, уже вблизи первого лазерного порога даже при значительных отражениях $\ln|R|^{-1} \sim 1$ будет идти однонаправленная суперлюминесценция, т. е. некогерентное усиленное спонтанное излучение волн непрерывного спектра. Оно будет снимать поставляемую накачкой инверсию по всему лазеру, подавляя когерентное излучение мод и создавая шумоподобное некогерентное излучение во всей неоднородно уширенной спектральной линии ($2/T_2^*$). Поэтому существенно нестационарный (в частности, сверхизлучательный) режим генерации если и будет возникать, то практически одновременно для большого числа мод, поскольку межмодовый интервал $\pi c / B\sqrt{\varepsilon_0} \sim 1 / T_E$ мал по сравнению с полосой неоднородного уширения $1/T_2^*$ в интересующем нас случае $\Delta_0 L \gtrsim 1$. Но тогда при значительном превышении порога генерации излучение лазера будет квазихаотическим, шумоподобным, не содержащим сколько-нибудь выраженных отдельных импульсов модового сверхизлучения. Более того, отличия частот активных центров в полосе генерации каждой моды будут способствовать расфазировке их излучения и подавлению сверхизлучательного характера импульсов генерируемого поля даже при большом превышении второго лазерного порога. В подобном сильно нестационарном режиме генерации лазера класса D с резонатором Фабри — Перо (ср. рис. 6) излучение многократно перепоглощается в активной среде и его спектр имеет не только дискретную, но и значительную сплошную компоненту вследствие нелинейного уширения и перекрытия спектров мод, а также перекрытия выжигаемых ими спектральных провалов инверсии населенностей.

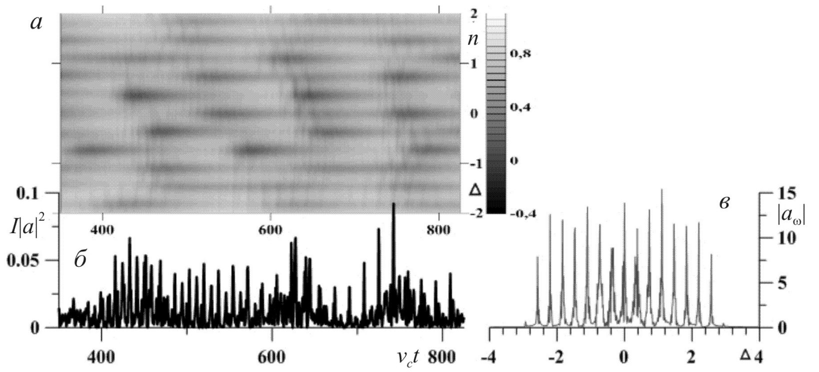


Рис. 6. Центральная часть динамического спектра инверсии населенностей уровней активных центров *n* (*а*) и нормированная интенсивность излучения $I|a|^2$ на торце лазера с низкодобротным резонатором Фабри — Перо ($R = 0{,}1$) без брэгговской селекции ($\beta = 0$) (*б*) при $\sqrt{I} = 0{,}005$; $\Delta_0 = 4$; $\Gamma_1 = 0{,}01$; $\Gamma_2 = 0{,}1$; $L = 8$. В генерации импульсов сверхизлучения задействовано около 20 мод, хорошо различимых на спектре модуля амплитуды (*в*). Порог генерации по коэффициенту отражения примерно равен 0,04, т. е. всего в 2,5 раза меньше рассматриваемого значения *R*

К тому же, уже для лазеров с длиной $L \sim \Delta_0 \ln|R|^{-1} / \sqrt{n_p}$ из-за низкой добротности резонатора и большого коэффициента усиления волн на одном проходе при постоянной накачке значительную часть излучения составляют волны непрерывного спектра, создающие квазистационарную шумоподобную суперлюминесценцию (для определенности во всех примерах, приводимых ниже на рисунках, полагаем $n_p = 1$, если не оговорено другое). В итоге, казалось бы, нет оснований рассчитывать на когерентный или импульсный характер излучения лазера.

3.1. Модовое сверхизлучение в резонаторе с РОС

Из сказанного следует, что для реализации сверхизлучения при неоднородном уширении необходима дополнительная селекция мод, обеспечивающая значительное увеличение инкремента одной или нескольких мод по сравнению с остальными модами. В рассматриваемой нами простейшей двухуровневой модели (5) подобная селекция обеспечивается распределенной обратной связью встречных волн. Наличие РОС в низкодобротном резонаторе Фабри — Перо усиливает также дисперсию и неэквидистантность небольшого числа продольных мод, расположенных вблизи «запрещенной» брэгговской полосы частот (с шириной $2\overline{\beta}$ и с центром на частоте ω_0). Именно эти моды в случае сильного неоднородного уширения позволяют реализовать сверхизлучательную импульсную генерацию, в определенных условиях сохраняя также квазимонохроматическую, почти стационарную генерацию ряда остальных мод резонатора Фабри — Перо (см. далее разд. 3.3). Заметим, что при решении уравнений лазера класса D (5) в случае эффективной брэгговской селекции мод форма линии неоднородного уширения не играет особой роли, ибо тогда в интересующих нас условиях при $\beta L \gtrsim 2\pi R$ и

$$\Delta_0 = \frac{1}{T_2^* \nu_c} \gg 1 \gtrsim \beta = \frac{\overline{\beta}\omega_0}{\nu_c} \gtrsim \frac{1}{\Delta_0} = \frac{\overline{\nu_c}}{\nu_c} \gtrsim \Gamma_2 = \frac{1}{T_2 \nu_c}, \tag{11}$$

в динамике лазера участвуют лишь активные центры из узкой центральной части спектральной линии, где $f(\Delta) \approx 1/\pi = \text{const}$ и где поле создает провалы их инверсной населенности (см. пример на рис. 7).

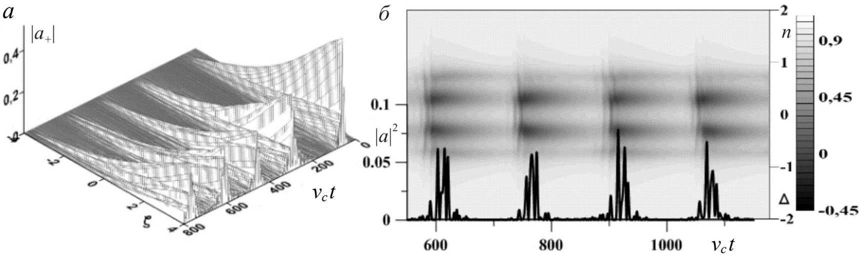


Рис. 7. Пространственно-временная динамика поля $|a_+|$ (*а*) и пичковая осциллограмма интенсивности излучения $|a|^2$ на фоне динамического спектра инверсии населенностей уровней активных центров n на торце лазера (*б*) в лазере класса D с РОС ($R = 0$) и параметрами $\sqrt{I} = 0{,}005$; $\Delta_0 = 4$; $\beta = 1/12$; $\Gamma_1 = 0{,}01$; $\Gamma_2 = 0{,}1$; $L = 8$

Согласно (5) максимальный инкремент m-й моды достигается при максимальной средней инверсии n_p и примерно равен $n/\Delta_0 - \ln(2\pi m/\beta L)/L$ (при $R = 0$). Отсюда легко оценивается число неустойчивых мод $M \lesssim \beta L/(\pi \exp(-nL/\Delta_0))$ (при $R = 0$). Пороговое значение длины резонатора оказывается примерно равным $L_{th} \simeq \frac{\Delta_0}{n_p} \ln\left(\frac{2\pi}{\beta L}\right) \sim 2\frac{\Delta_0}{n_p}$, причем первая оценка верна при $R = 0$, но окончательная оценка общая (при

$\ln R^{-1} \sim \ln(2\pi/\beta L) \sim 2$). Это может быть не только первый, но и второй порог, и даже сверхизлучательный порог, превышающий второй порог.

Остановимся сначала на чисто брэгговском резонаторе, где имеется достаточно свободный выход волн из гетероструктуры, необходимый для сверхизлучательной генерации. Такой резонатор отвечает не слишком большим значениям длины L и амплитуды брэгговской модуляции β, когда величина βL, а с ней и резонансный коэффициент отражения волн R_0 = th (βL) меньше или порядка единицы и в запрещенную полосу частот шириной 2β фактически не попадает ни одна продольная мода. Очевидно, что если величина βL много меньше единицы, то брэгговская селекция мод неэффективна и сверхизлучательная генерация в условиях (11) выражена слабо или отсутствует совсем. Конкретное значение величины βL, определяющее сверхизлучательную генерацию, зависит от релаксационных параметров. (Так, для параметров лазера на рис. 7 при Γ_2 = 0,01, Γ_1 = 0,1 сверхизлучательная генерация практически отсутствует, если βL < 0,3, т. е. R_0 < 0,3, но уже хорошо выражена, если βL = 2/3.)

Благодаря брэгговской селекции квазипериодическая последовательность цугов импульсов, показанных на рис. 7, *б*, по существу формируется двумя парами мод (ближайшими к запрещенной брэгговской зоне частот). Резкое сверхизлучательное нарастание поля с модовым профилем, представленным на рис. 7, *а*, всякий раз возникает спустя время порядка T_1, требуемое для того, чтобы накачка восполнила инверсию населенностей рабочего перехода соответствующих активных центров, ответственных за коллективное возбуждение той или иной моды поля.

Детальный анализ динамических спектров поля и инверсии показывает, что наиболее мощные импульсы внутри каждого цуга излучаются скоррелированными парами мод, расположенными спектрально-симметрично по отношению к запрещенной зоне частот. При этом в полосе частот, отвечающей отдельной моде, может сформироваться несколько групп близких по частоте активных центров, излучающих одновременно и сфазированно, тогда как излучение разных групп происходит с запаздыванием. Спектральная ширина этих групп определяется действующей кооперативной частотой $\Delta\nu = 2\overline{\nu_c} \cong 2\nu_c / \Delta_0$ (см. разд. 1). Пока $\Delta_0 < \Gamma_2^{-1}$, рост времени релаксации поляризации T_2 вплоть до максимально возможного значения $T_1/2$ практически не меняет импульсы поля и динамику инверсии, делая их лишь более четкими. Напротив, когда последнее неравенство меняется на обратное с уменьшением T_2 до величины меньше $1/(\nu_c^2 T_2^*)$, главное условие сверхизлучения (2) нарушается, импульсы фактически исчезают и сверхизлучательный лазер перестает работать.

В лазерах класса D можно выделить по крайней мере пять качественно разных режимов работы (рис. 8): квазистационарный (*а*, *б*), автомодуляционный (*в*, *г*), регулярный импульсный (*д*, *е*), нерегулярный импульсный с квазипериодическими цугами импульсов (*ж*, *з*), квазихаотический (*и*, *к*).

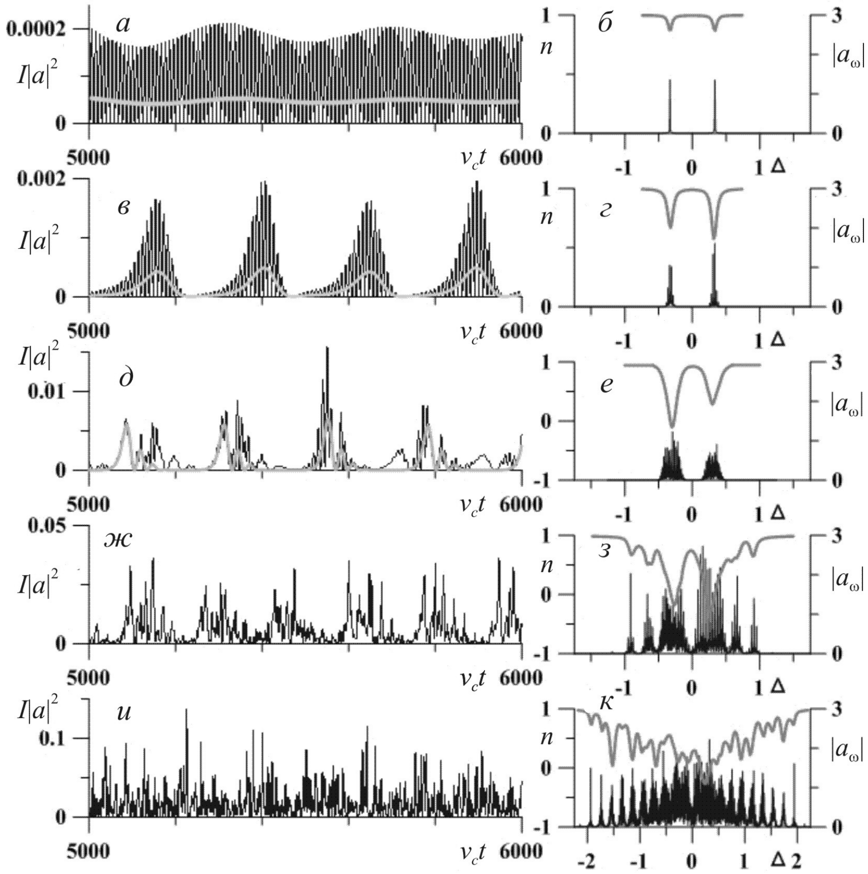


Рис. 8. Переход от традиционной двухмодовой квазистационарной генерации к многомодовой квазихаотической сверхизлучательной в лазере класса D путем увеличения длины активной среды: *а*, *б* — L = 6,7; *в*, *г* — L = 7; *д*, *е* — L = 8; *ж*, *з* — L = 10; *и*, *к* — L = 14. Левый столбец — осциллограммы интенсивности поля на торце лазера; серой линией на рисунках *а*, *в*, *д* показана интенсивность одной моды. Правый столбец — спектры выходного поля $|a_\omega|$ (черная линия) и инверсии n на краю образца (серая линия сверху, ось слева)

Чрезмерно сильная связь встречных волн при $\beta >> 1/L$ приводит к спонтанной генерации большого числа различающихся по частоте импульсов сверхизлучения на отдельных участках длиной порядка $1/\beta$. Немного удлиняясь и задерживаясь вследствие перепоглощения на соседних участках активной среды, эти импульсы на выходе образуют квазихаотическую последовательность (рис. 8, *и*). Аналогичное перепоглощение и хаотизация импульсов происходит и при чрезмерном увеличении скорости накачки T_1^{-1} и ее мощности даже в случае оптимальной обратной связи волн $\beta \sim 1/L$. При этом дополнительная энергия накачки вкладывается не в импульсы сверхизлучения мод, а в гораздо медленнее меняющуюся и менее когерентную компоненту излучения волн непрерывного спектра.

Когерентность последовательности цугов импульсов можно характеризовать корреляционной функцией

$$K(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T a_1(t) a_2^*(t+\tau) dt \Bigg/ \left(\frac{1}{T}\int_0^T |a_1(t)|^2\, dt \frac{1}{T}\int_\tau^{T+\tau} |a_2(t)|^2\, dt \right)^{1/2},$$

где $a_1(t)$ — цуг импульсов (или отдельный импульс) длительностью T, по которой усредняются сдвинутые на τ выборки (той же длительности T) из реализации $a_2(t)$. Высокая степень корреляции цугов импульсов сверхизлучения продемонстрирована на рис. 9 для лазеров с одинаковыми параметрами, но разными длинами, соотносящимися как 7:12.

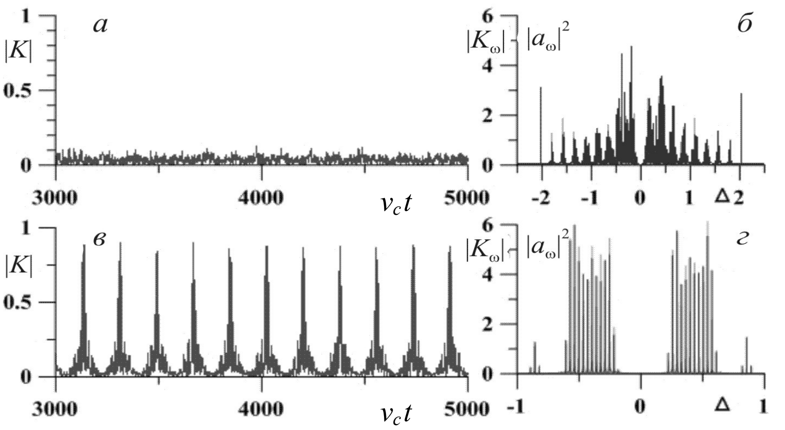


Рис. 9. Корреляционные функции и их спектры, построенные на фоне спектров мощности поля (серая линия) на краю образца для квазипериодического (*а*, *б*) и квазихаотического (*в*, *г*) режимов генерации лазера класса D с РОС ($R = 0$; $\Delta_0 = 4$; $\beta L = 0{,}7$; $\Gamma_1 = 0{,}01$; $\Gamma_2 = 0{,}02$; *а, б* — $L = 7$; *в, г* — $L = 12$)

Соответствующие последовательности цугов импульсов формируются одной и тремя парами мод, причем все они гаснут за время порядка T_1 после очередного совместного снятия инверсии в захватываемой их полем полосе частот активных центров. Поэтому следующий цикл сверхизлучательной неустойчивости мод начинается с малых, остаточных, значений поля и поляризации, что приводит к значительным различиям формы соседних цугов импульсов, а также к заметному нарушению периодичности следования импульсов различных мод, которое сопровождается их биениями, свидетельствующими о хорошей когерентности этих импульсов. Во всех представленных примерах типичная величина корреляции составляет от нескольких до десятков процентов и существенно не уменьшается даже для довольно далеко отстоящих друг от друга цугов импульсов.

3.2. Динамические спектры многомодовой генерации и управление цугами импульсов сверхизлучения

Перейдем теперь к сверхизлучению мод в комбинированном резонаторе Фабри — Перо с РОС. Наибольший интерес представляет случай не слишком длинных лазеров (10) с большим межмодовым частотным интервалом, превышающим инкремент мод даже при максимальном уровне накачки n_p. Тогда каждая из мод с инкрементом больше $2/T_2$ (их частоты лежат вблизи запрещенной брэгговской полосы) может порождать свой независимый импульс сверхизлучения, фактически формируемый центрами из узкого спектрального интервала неоднородно уширенной линии активной среды, определяемого либо указанным инкрементом (который может достигать величины порядка $\overline{n\,\nu_c}$) при малых амплитудах поля моды, либо частотой Раби $dE/\hbar$ этого поля при больших амплитудах, либо шириной спектрального провала инверсии $\Delta_s = \sqrt{\Gamma_2^2 + I\,|\,a\,|^2\,\Gamma_2/\Gamma_1}$ в случае квазимонохроматической моды с квазистационарной амплитудой a. Последняя формула следует из вида профиля указанного провала инверсии

$$n(\Delta) = \frac{n_p \Gamma_1 \Gamma_2 \left(1 + \left(\overline{\Omega} + \Delta\right)^2 \Big/ \Gamma_2^2\right)}{\Gamma_1 \Gamma_2 \left(1 + \left(\overline{\Omega} + \Delta\right)^2 \Big/ \Gamma_2^2\right) + I\,|\,a\,|^2},$$

который находится из исходных уравнений (5) в случае заданной одной гармоники поля на частоте $\overline{\Omega}$.

Наличие отражений R от торцов лазера увеличивает количество генерируемых мод (ср. рис. 8, *з* и рис. 10, *б*) и делает их спектр асимметричным (причем результат зависит от фазы коэффициента отражения — ср. рис. 10 и 11). При этом хорошая когерентность импульсов сверхизлучения различных мод сохраняется, однако соответствующие «мгновенные» фазы соседних цугов импульсов могут заметно расходиться между собой (см. рис. 10, *д* и рис. 12, *е*). Существенно, что небольшое, скажем в 2—3 раза, изменение параметров лазера может значительно менять количество и спектральное расположение генерируемых мод, а следовательно, динамический спектр, форму и корреляционные свойства генерируемых цугов импульсов (ср., например, рис. 10 и 12). Нетрудно подобрать параметры комбинированного резонатора так, чтобы лазер был одномодовым и генерировал квазипериодическую последовательность почти одинаковых импульсов сверхизлучения, как это показано на рис. 13.

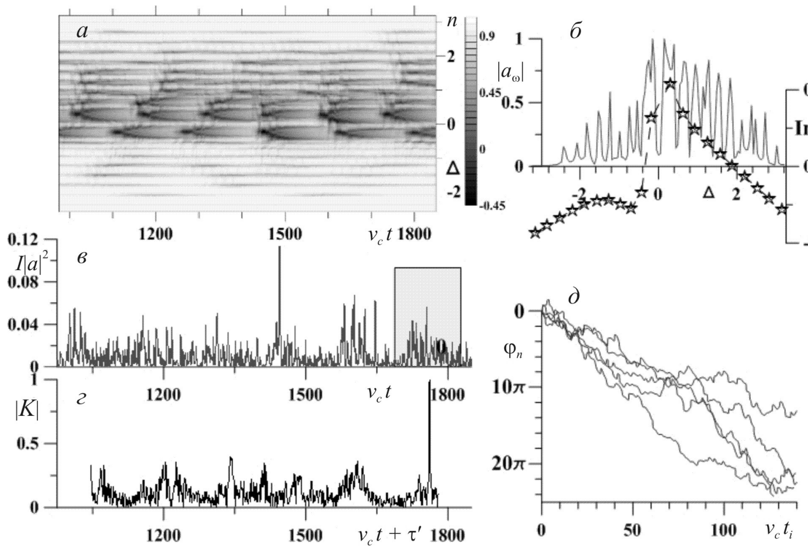


Рис. 10. Динамический спектр инверсии (*а*); спектр излучения (*б*), на котором звездочками отмечены положения и инкременты мод согласно линейной теории с $n = 1$; выборка цугов импульсов (*в*) с одним выделенным цугом, по которому построена корреляционная функция (*г*); эволюция «мгновенной» фазы φ_n (в радианах) пяти соседних цугов импульсов (*д*) при $R = 0{,}1$; $\Delta_0 = 4$; $L = 10$; $\beta L = 1$; $\Gamma_1 = 0{,}01$; $\Gamma_2 = 0{,}02$; $I = 25 \cdot 10^{-6}$

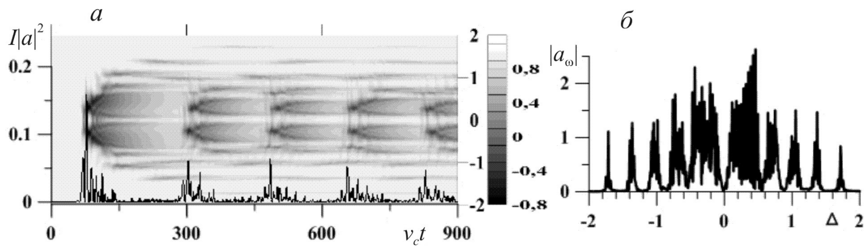


Рис. 11. Динамический спектр инверсии, совмещенный с осциллограммой интенсивности излучения (*а*), и спектр выходящего излучения (*б*) при $L = 8$; $\Delta_0 = 4$; $\beta L = 1$; $\Gamma_1 = 0{,}01$; $\Gamma_2 = 0{,}02$; $I = 25 \cdot 10^{-6}$ и комплексном $R = i \cdot 0{,}1$

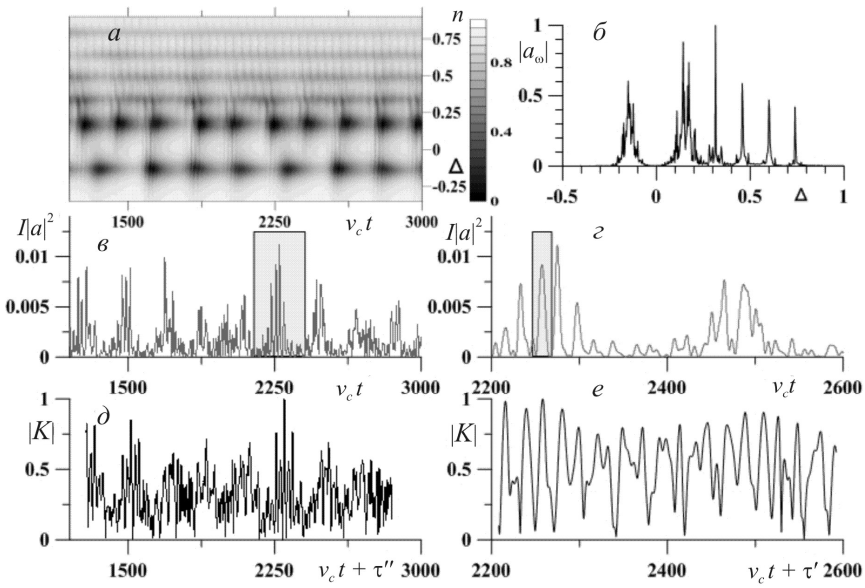


Рис. 12. Динамический спектр инверсии (*а*); спектр излучения (*б*); выборка цугов импульсов (*в*) с выделенным цугом, содержащим сверхизлучательные моды, и выборка из двух цугов с выделенным импульсом СИ (*г*), по которым построены соответствующие корреляционные функции (*д*, *е*) при L = 20; R = 0,1; Δ_0 = 13; $\beta L = \sqrt{3}$; Γ_1 = 0,01; Γ_2 = 0,02; $I = 2{,}3 \cdot 10^{-6}$

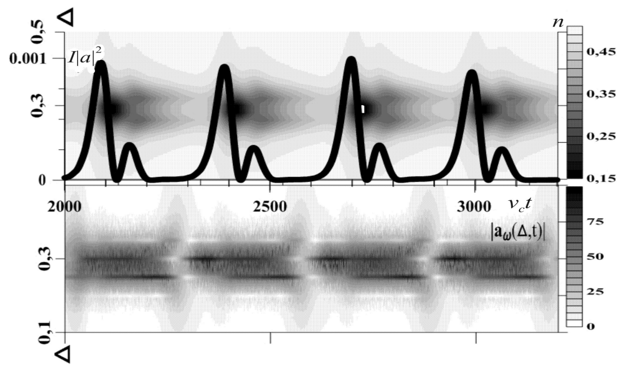


Рис. 13. Одномодовая сверхизлучательная генерация лазера класса D с комбинированным резонатором Фабри — Перо с распределенной обратной связью для случая активной среды с сильным неоднородным уширением. Провалы в инверсии n (черные области на верхнем графике динамического спектра инверсии) соответствуют максимумам поля $|a_\omega(\Delta, t)|$ на динамическом спектре модуля поля (темные области в нижней части рисунка) и пикам поля $I|a|^2$ на торцах образца (черная линия). Параметры лазера: L = 10; R = 0,1; b = 1; Δ_0 = 4; Γ_1 = 0,01; Γ_2 = 0,02; n_p = 0,5

3.3. Частичная самосинхронизация мод при наличии сверхизлучения в комбинированном резонаторе

Покажем теперь, что для широкой области параметров лазера в отсутствие как внешней модуляции его свойств, так и каких-либо поглотителей в нем осуществима генерация квазирегулярной последовательности импульсов излучения, имеющих длительность короче времен релаксации населенности энергетических уровней и поляризации активной среды. Дело в том, что импульсы сверхизлучения мод с наибольшими инкрементами, следующие квазипериодично с периодом, близким к времени накачки T_1, выжигают глубокие провалы населенностей активной среды, вплоть до ликвидации инверсии населенностей в ней, в определенных спектральных интервалах и на определенных промежутках времени. Благодаря данному обстоятельству участвующие в генерации моды с меньшими инкрементами, частоты которых отстоят дальше от запрещенной брэгговской полосы, оказываются способными к частичной самосинхронизации, поддерживаемой когерентным взаимодействием со сверхизлучательными модами. При этом если отражения от торцов R не слишком малы по сравнению с величиной βL, то благодаря самосинхронизации части мод в излучении возникает еще одна импульсная квазипериодическая составляющая с периодом, примерно равным времени прохода света через резонатор. Сверхизлучательные моды могут давать вклад в обходящий резонатор импульс синхронизованного излучения. Отметим, что динамическое спонтанное нарушение симметрии в распределении инверсии и в профилях мод лазера с симметричным комбинированным резонатором Фабри — Перо и с большим неоднородным уширением спектральной линии активной среды, как правило, выражено гораздо слабее (и лишь на небольших промежутках времени) по сравнению с подобным эффектом в случае однородного уширения линии. Одно из проявлений такого нарушения симметрии — это появление бегающего по резонатору импульса, образованного частично синхронизованными модами (рис. 14).

Интересно, что взаимная когерентность цугов импульсов сверхизлучения может быть ниже, чем взаимная когерентность отдельных импульсов синхронизованного излучения даже в далеко отстоящих цугах, что естественно для многомодовой генерации с частичной синхронизацией мод. Более того, в большинстве своем не сверхизлучательные квазистационарные моды вряд ли бы появились в отсутствие сверхизлучательных мод, поскольку согласно линейной теории не обладали бы инкрементом. Данное явление имеет место для широкой области параметров сверхизлучающего гетеролазера (ср. рис. 10 и 12, для которых значения неоднородного уширения активной среды отличаются более чем втрое). Отметим, что, как ясно из рис. 10, *в*, *г* и 12, *в*, *д*, степень когерентности соседних цугов импульсов заметно зависит от того, присутствуют или нет в них несинхронизованные сверхизлучательные моды (наличие которых отчетливо видно на динамических спектрах инверсии среды).

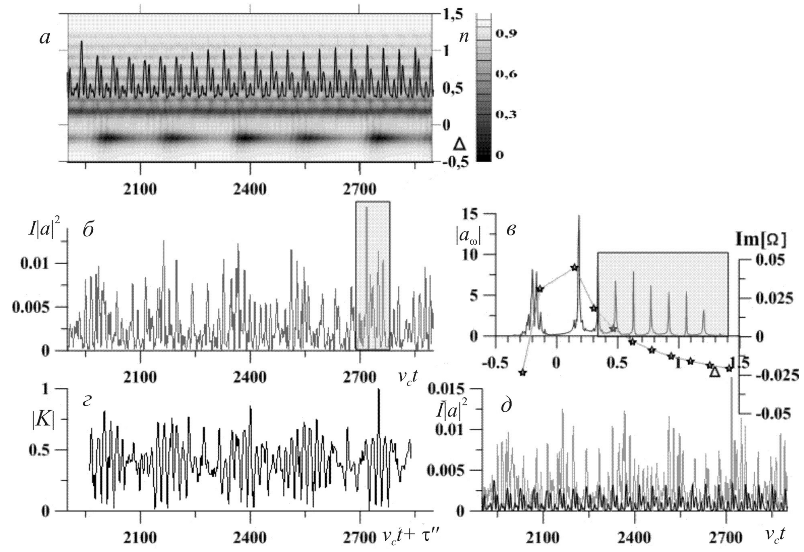


Рис. 14. Динамический спектр инверсии (*а*), совмещенный с осциллограммой интенсивности излучения семи синхронизованных мод, показанных на спектре амплитуды поля *в*; выборка цугов импульсов (*б*) с выделенным цугом, по которому построена корреляционная функция *г*; спектр излучения, на котором звездочками отмечены положения и инкременты мод согласно линейной теории $n = 1$ (*в*); периодический сигнал от синхронизованных мод на фоне выборки цугов импульсов (*д*). Параметры $L = 20$; $R = 0{,}1$; $\Delta_0 = 13$; $\beta L = 2{,}5$; $\Gamma_1 = 0{,}01$; $\Gamma_2 = 0{,}02$; $I = 2{,}3 \cdot 10^{-6}$

Количество сверхизлучательных и самосинхронизованных мод, как и степень их синхронизации, существенно зависит от параметров гетеролазера, поскольку в сверхизлучательном режиме работы активной среде присущи внутренняя неустойчивость и импульсный характер высвечивания запасаемой накачкой инверсии. Этот факт можно проиллюстрировать сравнением рис. 12 и 14, где брэгговские параметры βL отличаются в $2{,}5/\sqrt{3}$ раза, а также сравнением количества генерируемых мод и режимов работы лазера в зависимости от уровня накачки. Для резонаторов с большей «брэгговской» добротностью (см. рис. 14) цуги комбинированных импульсов сверхизлучательных и самосинхронизованных мод выражены менее явно благодаря большему влиянию перепоглощения импульсов отдельных мод и нелинейного уширения их спектра. На рис. 14, *д* продемонстрирована эффективная самосинхронизация части мод сверхизлучающего лазера. Данный режим работы независимо от количества мод всегда дает квазирегулярную последовательность импульсов. Он является наилучшим для генерации квазирегулярной последовательности мощных сверхкоротких импульсов когерентного излучения при непрерывной накачке в отсутствие дополнительных элементов или устройств, обеспечивающих синхронизацию мод. Подобный лазер может быть реализован на основе гетероструктуры с субмонослойными слоями квантовых точек InAs/GaAs и латеральной брэгговской структурой, обеспечивающей надлежащую селекцию лазерных продольных мод [13].

Заключение

Как ясно из изложенного, динамика лазеров класса D таит в себе много удивительного и предоставляет широкие возможности изменения нестационарных многомодовых режимов генерации за счет перестройки тех или иных параметров резонатора, активной среды и накачки. Наличие неоднородностей среды или накачки в резонаторе лазера и тем более присутствие там разных сред, резонансно взаимодействующих посредством самосогласованного электромагнитного поля, может привести к еще более неожиданным динамическим последствиям и практическим приложениям. Возникающие нелинейные явления в лазерах класса D в отличие от стандартных лазеров обусловлены коллективным радиационным поведением активных центров и только начинают изучаться для различных многочастичных систем в физике конденсированных сред.

Эти явления можно использовать как для создания уникальных генераторов когерентного импульсного излучения с управляемыми спектрально-корреляционными свойствами, так и для диагностики коллективных состояний ансамблей сильно взаимодействующих частиц, поскольку особенности их скоррелированного пространственного и спектрального распределения оставляют определенный отпечаток на свойствах генерируемого излучения. Иными словами, регулируя параметры ансамбля частиц и состав горячих мод, определяемых резонатором и накачкой, можно управлять генерируемым излучением, и наоборот, изучая изменение спектрально-корреляционных свойств генерируемого излучения, можно судить о перестройке коллективного состояния той или иной многочастичной системы, в частности диагностировать фазовые переходы в ней. В результате нелинейная динамика сверхизлучающих лазеров самым непосредственным образом включается в современные технологии «информационной оптики» и диагностики состояний многочастичных систем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-02-00855), программ фундаментальных исследований Президиума РАН № 24 и программ фундаментальных исследований Отделения физических наук РАН III.7 и IV.12.

Литература

1. *Карлов, Н. В.* Лекции по квантовой электронике / Н. В. Карлов. — М. : Наука, 1988. — 336 с.

2. *Arecchi, F. T.* Instabilities and Chaos in Quantum Optics / F. T. Arecchi, R. G. Harrison. — London : Springer Verlag, 2011. — 268 p.

3. *Ханин, Я. И.* Основы динамики лазеров / Я. И. Ханин. — М. : Наука : Физматлит, 1999. — 368 с.

4. *Belyanin, A. A.* Collective QED processes of electron-hole recombination and electron-positron annihilation in a strong magnetic field / A. A. Belyanin, V. V. Kocharovsky, Vl. V. Kocharovsky // Quantum Semiclass. Opt. (JEOS, Part B). — 1997. — V. 9, № 1. — P. 1—44.

5. *Dicke, R. H.* Coherence in Spontaneous Radiation Processes / R. H. Dicke // Phys. Rev. — 1954. — V. 93. — P. 99—110.

6. *Железняков, В. В.* Волны поляризации и сверхизлучение в активных средах / В. В. Железняков, В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский // УФН. — 1989. — Т. 185, вып. 2. — С. 193—260.

7. *Inouye, S.* Superradiant Rayleigh scattering from a Bose-Einstein condensate / S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn et al. // Science. —1999. — V. 285. — P. 571—574.

8. *Avetisyan, Yu. A.* Maxwell—Schrodinger Equations for a Dilute Gas Bose—Einstein Condensate Coupled to an Electromagnetic Field / Yu. A. Avetisyan and E. D. Trifonov // JETP. — 2008. — V. 106, № 3. — P. 426—434.

9. *Wiersma, D. S.* Nano and random lasers / D. S. Wiersma and M. A. Noginov // J. Opt. — 2010. — V. 12, № 2. — P. 020201.

10. *Noginov, M. A.* GaAs random laser / M. A. Noginov, G. Zhu, I. Fowlkes, and M. Bahoura // Laser Phys. Lett. — 2004. — V. 1, № 6. — P. 291—293.

11. *Malcuit, M. S.* Transition from Superfluorescence to Amplified Spontaneous Emission / M. S. Malcuit, J. J. Maki, D. J. Simkin, R. W. Boyd // PRL. — 1987. — V. 59, № 11. — P. 1189—1192.

12. *Kocharovsky, V. V.* Mode Instability and Nonlinear Superradiance Phenomena in Open Fabry-Perot Cavity / V. V. Kocharovsky, Vl. V. Kocharovsky, E. R. Golubyatnikova // Computers Math. Applic. — 1997. — V. 34, № 7/8. — P. 773—793.

13. *Кочаровский, Вл. В.* Самосинхронизация продольных мод и когерентность импульсов сверхизлучающих гетеролазеров с распределенной обратной связью волн / Вл. В. Кочаровский, П. А. Калинин, Е. Р. Кочаровская, В. А. Кукушкин // Труды III симпозиума по когерентному оптическому излучению полупроводниковых соединений и структур, 2011. — М. : ФИАН, 2012. — С. 71—81.

14. *Ting, D. Z.-Y.* Submonolayer quantum dot infrared photodetector / D. Z.-Y. Ting et al. // Appl. Phys. Lett. — 2009. — V. 94, № 11. — P. 111107.

15. *Ding, C. R.* Observation of In-related collective spontaneous emission (superfluorescence) in $Cd_{0.8}Zn_{0.2}Te$:In crystal / C. R. Ding et al. // Appl. Phys. Lett. — 2012. — V. 101, № 9. — P. 091115.

16. *Majumder, F. A.* Carrier dynamics and lasing in epitaxial ZnTe layers on GaAs / F. A. Majumder et al. // Phys. Stat. Sol. B. — 1995. — V. 188. — P. 191—198.

17. *Dai, D. C.* Observation of superfluorescence from a quantum ensemble of coherent excitons in a ZnTe crystal : Evidence for spontaneous Bose-Einstein condensation of excitons / D. C. Dai, A. P. Monkman // PRB. — 2011. — V. 84. — P. 115206.

18. *Blokhin, S. A.* Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers Based on Submonolayer InGaAs Quantum Dots / S. A. Blokhin, N. A. Maleev, A. G. Kuzmenkov et al. // IEEE Journal of Quantum Electronics. — 2006. — V. 42, № 9. — P. 851—858.

19. *Germann, T. D.* High-power semiconductor disk laser based on InAs/GaAs submonolayer quantum dots / T. D. Germann, J. Pohl et al. // Appl. Phys. Lett. — 2008. — V. 92. — P. 101123.

20. *Jho, Y. D.* Cooperative Recombination of a Quantized High-Density Electron-Hole Plasma in Semiconductor Quantum Wells / Y. D. Jho, Vl. V. Kocharovsky et al. // PRL. — 2006. — V. 96. — P. 237401.

21. *Jho, Y. D.* Cooperative recombination of electron-hole pairs in semiconductor quantum wells under quantizing magnetic fields / Y. D. Jho, Vl. V. Kocharovsky et al. // PRB. — 2010. — V. 81. — P. 155314.

22. *Timofeev, V. A.* Long-range coherence of interacting Bose gas of dipolar excitons / V. A. Timofeev, A.V. Gorbunov et al. // J. Phys.: Cond. Mat. — 2007. — V. 19, № 29. — P. 295209.

23. *Butov, L. V.* Condensation of Excitons in a Trap / L. V. Butov et al. // Nano Lett. —2012. — V. 12, № 5. — P. 2605—2609.

24. *Калинин, П. А.* Условия и особенности лазерной генерации в ловушках для бозе-конденсации диполярных экситонов / П. А. Калинин, В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский // Изв. вузов. Радиофизика. — 2011. — Т. 54, № 5. — С. 348—367.

25. *Kalinin, P. A.* On the problem of lasing in traps for the Bose condensation of dipolar excitons / P. A. Kalinin, V. V. Kocharovsky, Vl. V. Kocharovsky // Semiconductors. — 2012. — V. 46, № 11. — P. 1351—1357.

26. *Florian, R.* Time-resolving experiments on Dicke superfluorescence of O_2^- centers in KCl. Two-color superfluorescence / R. Florian et al. // PRA. — 1984. — V. 29. — P. 2709—2715.

27. *Lanzani, G.* The Photophysics behind Photovoltaics and Photonics / G. Lanzani. — N. Y. : John Wiley & Sons, 2012. — 220 p.

28. *Meinardi, F.* Superradiance in molecular H aggregates / F. Meinardi et al. // PRL. — 2003. — V. 91. — P. 247401.

29. *Arias, D. H.* Thermally-Limited Exciton Delocalization in Superradiant Molecular Aggregates / D. H. Arias et al. // J. Phys. Chem. B. — 2013. — V. 117, № 16. — P. 4553—4559.

30. *Slama, S.* Cavity-enhanced superradiant Rayleigh scattering with ultracold and Bose-Einstein condensed atoms / S. Slama et al. // PRA. — 2007. — V. 75. — P. 063620.

31. *Greenberg, J. A.* Steady-state, cavityless, multimode superradiance in a cold vapor / J. A. Greenberg, D. J. Gauthier // PRA. — 2012. — V. 86. — P. 013823.

32. *Bohnet, J. G.* A steady-state superradiant laser with less than one intracavity photon / J. G. Bohnet et al. // Nature. — 2012. — V. 484. — P. 78—81.

33. *Meiser, D.* Prospects for a Millihertz-Linewidth Laser / D. Meiser et al. // PRL. — 2009. — V. 102. — P. 163601.

34. *Meiser, D.* Intensity fluctuations in steady-state superradiance / D. Meiser et al. // PRA. — 2010. — V. 81. — P. 063827.

Вечерние лекции

О ЛЮДЯХ НАУКИ,
в том числе нелинейной оптики

В. В. Рагульский

В марте 1912 года не стало П. Н. Лебедева.
Прошло столетие. Но его дела не забылись…

Введение

Российская научная школа физики в конце XIX — начале XX века формировалась под выраженным влиянием общеевропейских исследований. Этому способствовала свобода перемещения по Европе и доступность обучения в лучших европейских университетах. Англо-русская линия, идущая от Ньютона, Максвелла и Резерфорда к Капице, а потом и к их последователям, обсуждается чаще. Немецкая же — традиционная для России еще с петровских времен и деятельности Ломоносова, порою оказывается в тени. А ведь она породила Лебедева — ярчайшего представителя науки. Он вошел в историю как непревзойденный мастер эксперимента. Им обнаружено на опыте давление света. Именно с него началась в России школа профессиональной физики.

От гениального П. Н. Лебедева через выдающихся его продолжателей — Л. И. Мандельштама, С. И. Вавилова, И. Е. Тамма и их учеников — развитие научных работ в России можно проследить до наших дней.

Петр Николаевич Лебедев был не только потрясающим ученым, но и удивительно нетривиальным и веселым человеком, напоминающим скорее ироничного и спортивного «шестидесятника» 20-го века, чем традиционно кабинетного профессора. Он плавал по рекам, поднимался в небо и был кумиром думающих студентов. Пока позволяло здоровье, он был и альпинистом.

Лебедев писал: «Если мне предложат выбор между богатством индийского раджи с условием оставить науку и заниматься или не заниматься чем угодно — и между скудным пропитанием, неудобной квартирой, но превосходным институтом, то у меня и мысли не может быть о колебании». К несчастью для себя, Лебедев был еще пронзительно порядочным человеком. В знак протеста против разгрома царским правительством в 1911 году Московского университета его покинули многие. Среди них были Н. А. Умов, В. И. Вернадский, Н. Д. Зелинский, С. А. Чаплыгин, П. Н. Лебедев. Они ушли из университета потому, что для них понятие чести не было пустым словом, а требовало конкретных действий. Некоторые из них шли «в никуда», но в сложившихся условиях они не могли поступить по-иному.

Лебедев потерял все: солидное положение, надежду на скорую профессорскую пенсию, лабораторию, возможность заниматься любимым делом. Это чрезвычайно больно ударило по нему и ускорило его кончину. Но талантливый и справедливый, он успел собрать нетривиальных учеников, также остро болеющих за судьбу российских научных работ и всей Отчизны, также трепетно заботящихся о своих коллегах.

Здесь невозможно рассказать подробно о целой плеяде выдающихся российских ученых. Но можно привести некоторые высказывания; напомнить, как выглядели упомянутые люди (иные тогда, когда они были молодыми, задорными и неакадемиками).

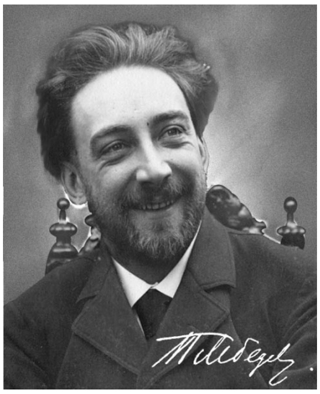
О науке, ее методах и роли государства размышляли, конечно, не только наши исследователи. Для иллюстрации в этой статье приведены афоризмы известных людей: Юлия Цезаря, Леонардо да Винчи, Галилео Галилея, Исаака Ньютона и Козьмы Пруткова. Видно, что умные головы в разных странах и в разные времена думали одинаково.

О создателе школы физиков в России

Именно Лебедев основал первую в России школу физиков.
Он впервые в мире измерил давление света на вещество

Иногда в средствах информации рассказывают о людях науки. Зачастую жизнеописания сводятся к перечислению: что ими получено, где и когда. Но во все времена многие научные работники не ограничивались только своими исследованиями. Они также думали о будущем науки и всего общества.

Далее приводятся некоторые мысли Петра Николаевича Лебедева, мнения известных людей разных стран и поколений о науке, образовании и вообще о жизни. Лебедев измерил давление солнечного света и разгадал загадку отгибания хвостов комет в направлении от Солнца. Дело в том, что именно воздействие солнечного света на комету искривляет ее хвост.



Через многие годы школа, заложенная П. Н. Лебедевым, способствовала созданию первых отечественных устройств на вынужденных переходах. Как раз такие переходы используются в лазерах. Лазерные лучи могут вывести из строя боевую ракету или исследовать комету, т. е. от наблюдения космического пространства позволяют перейти к его активному изучению и изменению.

Неофициальная фотография П. Н. Лебедева хорошо отражает его характер. Он отнюдь не принадлежал к «кабинетным» субъектам, которых В. Маяковский в стихотворении 1915 года «Гимн ученому» хлестко описал так: «С головой, откусанной начисто трактатом ”О бородавках в Бразилии”».

Лебедев без остатка тратил себя для развития науки в России. Он не только великий физик, но и прекрасный рассказчик. В одном из писем он написал: «Сейчас я собираюсь или сделать очень большую работу, или потерять очень много времени — и то, и другое я уже начал; неизвестно, чем кончу».

Был он и интересным преподавателем. Вот его мысль: «Чтение лекций я считаю идеальным способом преподавания, так как всей душой люблю это дело и верю в его огромное значение». Петр Николаевич также написал: «Ученая сила кроется в преемственности знаний».

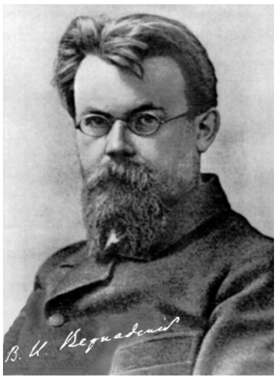
В 1910 году рассказ Лебедева о давлении света слушал С. И. Вавилов, в то время студент физико-математического факультета Московского императорского университета. Он вспоминал: «Никогда я не слышал таких аплодисментов. Это был триумф великого физика, эксперимент которого едва ли по силе кому-нибудь другому на свете».

Окончивший тот же факультет в 1885 году известный промышленник и меценат Савва Тимофеевич Морозов, по воспоминаниям Алексея Максимовича Горького, так оценивал уровень Лебедева: «Он будет такой же силой в нашей науке, каковы Менделеев и Павлов».

Любопытно, что до П. И. Лебедева из россиян в английское королевское общество был избран лишь Д. И. Менделеев.

Но в дореволюционной стране продуктивная научная деятельность была исключением, а не правилом.

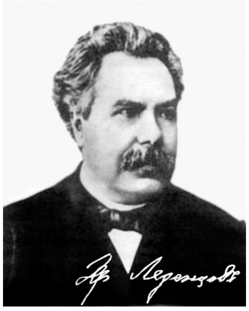
Владимир Иванович Вернадский, хорошо знавший как П. Н. Лебедева, так и положение науки в лебедевские времена, грустно тогда же отмечал: «Наука в России находится в пренебрежении».



В те времена руководители не видели смысла развивать научные исследования в своем государстве. Например, по уставу Академии наук России (действовавшему до 1917 года) всей огромной стране для физики вполне достаточен *«один лаборатор и один механик»*. Эту норму соизволил утвердить сам Император и Самодержец Всероссийский!

Недаром Лебедев писал: «Ученые, в большинстве случаев, дали крупные исследования не благодаря тем условиям, в которых они работали в России, а вопреки им».

Кто поддерживал Лебедева



Исследования П. Н. Лебедева поддерживали фонды Х. С. Леденцова (фотография справа) и А. Л. Шанявского (его фотография немного ниже). В первом было больше денег, чем у Нобеля. И на науку этим фондом тратилось больше, чем выделяло царское правительство России.

В отличие от Нобелевских премий фондом отмечались не те работы, которые уже сделаны, а именно те, которые только в будущем, может быть, дадут интересные результаты. Например, деньги давались К. Э. Циолковскому.

Христофор Семенович Леденцов знал 8 языков и хорошо изучил людей. Он пришел к выводу: «Средство улучшения жизни на Земле только в науке и в возможно полном усвоении всеми научных знаний».

Отставной генерал Альфонс Леонович Шанявский заработал немалый капитал. На него был, в частности, основан Московский городской университет. Туда мог поступать каждый, незави-симо от своего происхождения, национальности, образования, религиозных взглядов, пола и возраста. Шанявский написал министру образова-ния России: «Перед страной перспектива одичания. С одними руками и ногами ничего не поделаешь, нужны и головы».

У Лебедева не было блестящего здоровья. В одном из написанных им писем сказано: «Жаль, что со мною погибнет полезная людям очень хорошая машина для изучения природы».

Атомная энергия

В год смерти Лебедева, еще до начала Мировой войны 1914 года, писатель-фантаст Г. Уэллс понял, что над человечеством нависнет смертельная опасность, если на основе радиоактивности будет сделана «атомная бомба». Именно такой термин использовал Уэллс. Он вспоминал: «В 1914 году я напечатал роман «Освобожденный мир», где описывал крушение всего общества в результате применения атомных бомб».

Через 7 лет после романа Уэллса (в 1921 году) поэт А. Белый, окончивший тот же факультет Московского университета, что и С. И. Вавилов, в стихах «Первое свиданье» провидчески отметил: «Мир рвался в опытах Кюри / Атомной лопнувшей бомбой».

Мрачное предсказание Уэллса подтвердилось через 3 десятилетия, когда в США были созданы две первые атомные бомбы, и американские летчики сбросили их на японские города Хиросима и Нагасаки. В результате погибли или были искалечены сотни тысяч людей.

Ни надежды на медицину, ни вера в промысел Божий им не помогли.

К сожалению или к счастью для него, верующий человек полагает, что если усерднее молиться, то высшие силы отведут напасть. Тут уместно вспомнить А. П. Чехова и его слова: «Я давно растерял свою веру и только с недоумением поглядываю на всякого интеллигентного верующего».

Об исключительных перспективах радиоактивности говорил с 1910 года В. И. Вернадский. Он утверждал, что ей суждено оказать огромное влияние на жизнь человечества, начать новую эру его истории.

Но только в 1940 году ему удалось расшевелить тех, чьи решения могут затронуть всю страну. В то время он заявил президиуму Академии наук, что уже «…есть возможность использования внутриядерной энергии, хотя она и связана с рядом очень больших трудностей». В результате была создана комиссия по проблеме урана. В нее включены специалисты в различных областях, в том числе В. И. Вернадский, Л. И. Мандельштам и С. И. Вавилов.

Потрясения начала XX века

Но вернемся к рассказу о Лебедеве. Одним из его сотрудников был Петр Петрович Лазарев. Отзывался о нем Лебедев так: «Он, как ученый, крупнее меня». Редкий начальник официально признает превосходство над собою своего же подчиненного.

Лазарев успешно занимался физикой и медициной, биофизикой и геофизикой, лекторским и издательским делом. Им организовано исследование Курской магнитной аномалии. Он также хорошо рисовал; был научным консультантом при написании романа «Гиперболоид инженера Гарина» А. Н. Толстым. Там ученый впервые столкнулся с мощным пучком света, который приготовил человек. Опубликован этот роман в 1926 году.

Как уже говорилось, вскоре после смерти Лебедева началась Мировая война 1914 года. Потом у нас — война гражданская. В стране развал экономики и научных связей. Но люди, понимавшие незаменимую роль науки, были всегда.

Например, С. Ф. Ольденбург — непременный секретарь и реальный руководитель академии до 1917 года, а также долгое время и потом — в 1919 году в письме Лазареву отмечал: «Уничтожение Академии наук опозорит любую власть».

Начальник Лазарева, возглавлявший тогда Высший Совет Народного Хозяйства Ф. Э. Дзержинский на всесоюзной конференции 1925 года заявил: «Основная задача — поднять науку на высшую ступень. Иначе мы экономически победить не сможем».

Очень многое сделал для развития научных работ в СССР С. И. Вавилов (на фотографии — в бытность студентом).

Про С. И. Вавилова в различные периоды его жизни и после нее писали разные люди, но все они подчеркивали исключительную роль этого человека в российских научных исследованиях. Англичанин Дж. Бернал подвел итог его деятельности так: «С. И. Вавилов, наряду с Ломоносовым, великий созидатель науки».

Мнение Ольденбурга, высказанное им еще до того, как Вавилов стал президентом Академии наук, звучит так: «Вот кому бы я мог с полной уверенностью за судьбу Академии передать управление ею».

Не менее высока оценка А. М. Прохорова, одного из сотрудников С. И. Вавилова, опубликованная через 14 лет после кончины последнего: «Жизнь его прекрасна и трагична».

Теперь мысли Вернадского и Вавилова о научных школах.

Вернадский писал: «Высшая школа является независимым центром научной мысли».

А вот слова С. И. Вавилова: «Приборы, изготовленные руками учащихся, это и есть лучшая школа физики».

Посмотрим на отношение С. И. Вавилова к научной работе. Он говорил: «Экспериментаторы пытаются поставить хороший опыт; теоретики — сделать о возможных результатах опыта убедительное предположение. Если в опыте зарегистрировано именно то, что предполагают теоретики — это очень хорошо. Если же что-то другое, то еще лучше».

С. И. Вавилов обладал энциклопедическими знаниями. Он был хорошо информирован о радиоактивности и об уникальной чувствительности глаза. В частности, поэтому Вавилов смог поставить опыт, в котором было открыто световое излучение, вызванное объектами, двигающимися в веществе быстрее света. Это явление у нас называют *эффект Вавилова — Черенкова*. За него высшая премия СССР — Сталинская 1-й степени — дана Вавилову, Черенкову, Тамму и Франку.

Но за рубежом первая фамилия из названия открытия исчезла. Э. В. Шпольский, хорошо знавший С. И. Вавилова, сообщал: «Сергей Иванович отказался от приоритетной публикации об этом эффекте, совместной со своим аспирантом Черенковым, дабы не помешать тому защищать кандидатскую диссертацию».

Когда Вавилов уже умер, оставшимся троим *за то же са́мое* присуждена Нобелевская премия.

Не раз говорилось: «С. И. Вавилов — родоначальник нелинейной оптики. Его работа в этой области началась задолго до создания лазеров».

Л. И. Мандельштам

В отзыве о Вавилове в 1932 году Мандельштам констатировал, что принципиальное значение имеет вопрос: зависят ли оптические константы тел от интенсивности света?

С. И. Вавилов приложил немало усилий, чтобы в Московском университете появился именно Леонид Исаакович Мандельштам. С. И. Вавилов был подчиненным Мандельштама в МГУ, а потом в ФИАНе стал у него начальником, и поэтому он знал его всесторонне. Узнав о его смерти, Вавилов записал в своем дневнике: «Это самый замечательный человек среди ученых России».

Исключительно большое значение имеют многие работы Мандельштама. Он придумал и впервые осуществил принцип временно́й развертки изображения, который теперь повсеместно используется в осциллографах, телевизорах и мониторах. По словам А. Ф. Иоффе, опубликованным в издании Академии наук до присуждения Нобелевской премии за комбинационное рассеяние: «Мандельштам раньше Ра́мана обнаружил такое рассеяние». Но указанная премия за этот эффект дана только Ра́ману.

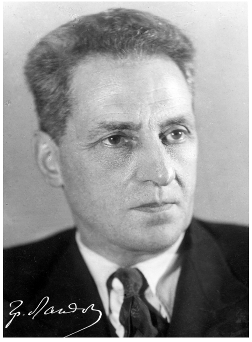
Личные качества Леонида Исааковича всегда вели к созданию вокруг атмосферы корректности и доброжелательности. И. Е. Тамм подчеркивал: «Какое сочетание могучего интеллекта с поразительной человечностью!» Мандельштама высоко оценивали не только близкие и друзья. П. С. Эренфест сказал: «У него исключительная ясность в постановке и в изучении проблем».

Мандельштам во время войны написал С. И. Вавилову: «Важны, особенно в будущем, связи колебательной лаборатории ФИАН». Через одно десятилетие именно в ней был придуман первый отечественный мазер. Ученик Мандельштама В. И. Фабрикант вспоминал: «Он говорил на многие десятилетия вперед».

В характеристике Мандельштама есть слова: «Он один из немногих, если не единственный физик, работы которого одинаково глубоко затрагивают области теоретической, экспериментальной и технической физики».

Г. С. Ландсберг и И. Е. Тамм

В 1924 году Мандельштам получил отчаянное письмо Г.С. Ландсберга, в котором прочел: «Вы являетесь последней надеждой на оздоровление Физического института Московского университета». Мандельштам внял такому призыву.



Вместе с Ландсбергом, работая уже в МГУ, он обнаружил, что рассеяние света может идти с изменением длины волны этого света.

Ландсберг развил технику спектрального анализа, за что получил Сталинскую премию. Из созданной им Комиссии по спектроскопии вырос Институт спектроскопии.

Лекции Ландсберга стали основой популярных книг «Элементарный учебник физики» и «Оптика». Они широко используются как абитуриентами, так и студентами, а также специалистами.

Другой сотрудник Л. И. Мандельштама — И. Е. Тамм. Мандельштам и Тамм — две ярчайшие фигуры советской физики. Они вместе перестроили преподавание теоретической физики в Московском университете. Тамму бы в Университете не работать, если б хорошее понимание математики когда-то не спасло ему жизнь. Дело было во время Гражданской войны. Его арестовал один из бесчисленных отрядов. Командир, когда-то учившийся высшей математике, сказал: «Будет свобода, если за ночь будет решена вот такая трудная задача. Тогда я поверю, что попался профессиональный теоретик, специа-лист по математике. Иначе расстрел». К сча-стью, в отпущенный срок с задачей Тамму удалось справиться.

Впоследствии Тамм получил Нобелевскую премию за теорию света, который вызван объектом, бегущим в среде быстрее, чем свет. Он ввел понятие «фонон», то есть квант звука. Велик его вклад в понимание и использование плазменных процессов.

Он также основатель и первый руководитель теоретического отдела Физического института Академии наук (ФИАНа). Постоянно вносил в работу дух поиска, а в отдых — веселья. Даже своего английского друга П. Дирака привлек к туризму. Многие из учеников Тамма в трудных ситуациях задумывались: «А как бы учитель поступил в подобном случае?» Интересна и многократно издана его книга «Основы теории электричества».

Аспиранты Л. И. Мандельштама

Когда-то Ландсберг написал: «Среди нашей молодежи самый талантливый и образованный — М. А. Леонтович».

Учтя эту оценку и поговорив с самим Леонтовичем, Мандельштам пригласил его к себе в аспирантуру. Они вместе построили и опубликовали первую в мире теорию туннельного эффекта. На эту статью ссылаются до сих пор.

Михаил Александрович Леонтович с успехом работал в геофизике, квантовой механике, оптике, радиофизике и в теории плазмы. С. И. Вавилов сообщает в его характеристике: «Лекции Леонтовича по статистической физике и по физической оптике пользуются огромной популярностью среди студенчества».

А. П. Александров отметил: «Поистине нарицательными стали бескомпромиссная научная принципиальность Леонтовича, сердечное отношение к людям, исключительная скромность. Он наша совесть».

Однажды на выборах в Академию наук Леонтович громоподобным голосом напомнил, как мешали научным исследованиям рассматриваемые кандидаты — начальник отдела науки ЦК КПСС и ближайший сотрудник всесильного тогда Лысенко. Если они в академию попадут, то вред от них наверняка только увеличится. После такой уничтожающей оценки этих претендентов в Академию не избрали.

Леонтович был азартным человеком и заядлым туристом. Порою с ним в походах бывала и его сестра. Она выросла в хорошего математика, а ее мужем стал друг Леонтовича — Александр Александрович Андронов.

Мандельштам отзывался об Андронове так: «Это мой любимый ученик» (фотография Андронова — времен обучения у Мандельштама). После учебы бывший аспирант перебрался в город Горький и продуктивно там работал.

Андронов — признанный авторитет в нелинейных явлениях и в динамике машин. Он отлично владел математикой, ввел термин «автоколебания». Многое сделал в механике, радиофизике, образовании и в истории науки.

Математик Л. С. Понтрягин рассказывал: «Андронов как никто другой чувствовал ответственность за все происходящее в стране и служил для меня высшим образцом человека».

Андронов стал прообразом главного героя — академика Дронова — в фильме «Все остается людям». Автор сценария этого фильма сообщает в своей книге, что люди, которые видели и эту картину, и Андронова, говорят о совершенно точном соответствии исполнителя прообразу. В одном из эпизодов фильма Дронов пресекает незаконное выселение из квартиры. В депутатской практике Андронова был похожий случай. Его решительное вмешательство восстановило справедливость. А вот сам он в результате попал в больницу.

Под руководством М. А. Леонтовича началась научная деятельность Н. Г. Басова и А. М. Прохорова. Позже они вместе с Ч. Таунсом из США получили Нобелевскую премию. Она присуждена «за фундаментальную работу в области квантовой электроники, которая привела к генераторам и усилителям, базирующимся на мазерно-лазерном принципе».

Слева — Николай Геннадьевич Басов, *справа* — Александр Михайлович Прохоров

После появления мазеров и лазеров Л. А. Арцимович отметил: «Игольчатые пучки атомных радиостанций представляют собой своеобразную реализацию идей “Гиперболоида инженера Гарина”». Любопытно, что это литературное произведение опубликовано намного раньше научных работ по лазерной тематике.

Один из выдающихся людей

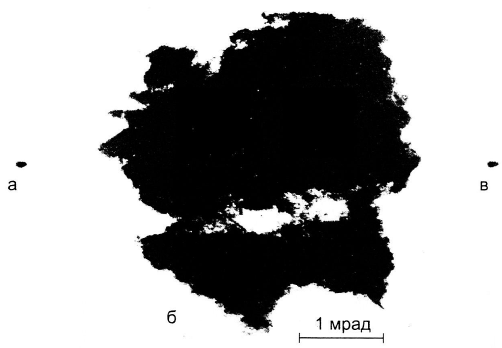
Р. В. Хохлов — яркий представитель упомянутой физической школы. Он внес большой вклад в изучение волновых процессов, в том числе в нелинейную оптику. Посмотрим на поведение Рема Викторовича Хохлова в разных ситуациях. Сначала об его отношении к предшественникам. В статье Хохлова 1965 года, появившейся через два десятилетия после смерти Мандельштама, есть такие слова: «У нас в стране основную роль в изучении нелинейных волновых процессов сыграли ученые, являющиеся во втором и третьем поколениях учениками Л. И. Мандельштама». Добавим, что эти ученые трудятся в разных местах, в том числе в Горьком — Нижнем Новгороде под руководством А. В. Гапонова-Грехова. К таким ученикам Р. В. Хохлов причисляет и себя.

А теперь об его отношении к современникам. Он задумал экспериментально выяснить, испытывает ли свет самофокусировку? Но подходящего помещения и некоторых измерителей у него не было. Тогда он поговорил с Н. Г. Басовым, и тот выделил в ФИАНе комнату и недостающие приборы. Исследователей — аспиранта и студента — прислал Хохлов из МГУ. Те провели эксперимент и зарегистрировали самофокусировку лазерного света. Была подготовлена статья об этом. Но Хохлов отказался быть ее соавтором, сказав исследователям: «Вы же сами все сделали».

Обращение волнового фронта

В лаборатории же Басова полным ходом шли работы по квантовой электронике. На семинаре 1 ноября 1971 года Н. Г. Басов подытожил обсуждение одного из докладов так: «Это новое слово в оптике». В том докладе сообщалось об обнаружении эффекта обращения волнового фронта (ОВФ).

Раньше о подобном говорилось только в фантастике. А именно, в одном из романов Казанцева вдогонку за нашим разведчиком посылают сигнал. Устройство разведчика превращает сигнал в новую волну, которая тут же отправляется обратно, то есть как раз туда, откуда исходная была послана. В упомянутом романе вернувшуюся волну именуют «обратной».



О реальном применении обращения рассказано ниже. Лазерный луч с предельно малой, то есть с дифракционной расходимостью (фото **а**) идет в усилитель. При распространении сквозь него энергия луча может возрасти, но одновременно за счет фазовых неоднородностей сильно вырастет и занимаемый этим лучом угол (**б**). Затем прошедший свет обращается и проходит обратно сквозь тот же усилитель, то есть сквозь те же фазовые неоднородности. В результате этих операций искажения компенсируются (**в**), а энергия пучка возрастает, и получается мощная волна с предельно малой расходимостью. Это наглядно показывает сравнение фото **а** и **в**. На рисунке даны фотографии исходной и конечной волн, а также итог однократного прохождения исходной волной этого усилителя. Заметим, что масштаб всех фотографий одинаков.

Конечной волне можно придать иную поляризацию, чем есть у исходной. А тогда обе волны легко разделить, что и было сделано.

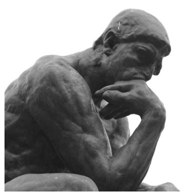
Через несколько лет после того, как обнаружили явление обращения и испробовали его применение в лазерных устройствах, потребовалась квалифицированная оценка сделанного. Спросили ее у Р. В. Хохлова, ведь он признанный специалист по нелинейным процессам (а явление обращения волнового фронта происходит как раз за счет нелинейного взаимодействия света со средой). В ответном письме Хохлова написано, что этот эффект «можно рассматривать как *волшебное зеркало, изменяющее знак времени*». По его словам, эффект «может найти важные применения для создания световых полей с максимальной направленностью и интенсивностью».

Очевидно, что наука дает порою нежданные и интересные результаты. Как отмечал упомянутый ранее П. Дирак: «Всегда надо быть готовым к тому, что *убеждения*, которых придерживался в течение долгого времени, *могут оказаться ошибочными*». А француз Э. Малюс, открывший поляризацию света, написал: «Новые явления приближают нас к истине, доказывая недостаточность всех теорий, придуманных физиками для объяснения отражения света». Эти слова полностью применимы к открытию явления обращения волнового фронта, описанного выше.

Еще литературные комментарии по поводу обращения волнового фронта (и не только его). Обращать советовал еще Козьма Прутков: «Непрестанно *обращай* взор свой на зады, чем сбережешь себя от знатных ошибок». В нашем случае «*на зады*» означает «*на предшественников*».

Опасны ли новые результаты? В книге французского ученого Ж.-М. Леге сказано: «Опасность не в возможностях, возникающих из познания законов физики и биологии. Опасность в отставании общественных явлений и в неумении управлять ими».

Мысли предшественников



В. И. Вернадский отмечал: «Достигнув нового, мы всегда с удивлением находим в прошлом *предшественников*».

Что же раньше думали, говорили и писали умные люди разных стран и поколений? Начнем с Мыслителя, которого изваял Роден. О чем он думает — непонятно, но думает красиво.

Мысль Юлия Цезаря: «Опыт всему учитель», — прошла сквозь века, послужив одной из идейных основ Возрождения. Срок, прошедший от Цезаря до нас, ничтожно мал по сравнению со временем существования человечества. За такой малый период коренных изменений и в психике людей и в технологии познания не произошло.

Гений эпохи Возрождения Леонардо да Винчи говорил: «Единственным критерием истины является опыт».

Френсис Бекон также полагал: «Самое лучшее из всех доказательств есть опыт».

В книге Галилео Галилея читаем: «Экспериментальные результаты надо предпочесть всякому рассуждению, если даже оно и кажется очень хорошо обоснованным».

Исаак Ньютон: «Надежнейший способ познания природы состоит в том, чтобы путем экспериментов тщательно отыскивать свойства вещей, а затем осторожно утверждать объясняющие их гипотезы».

Любопытны и слова М. В. Ломоносова: «Натура тем паче всего удивительна, что в простоте своей многохитростна, и от малого числа причин произносит неисчислимые образы свойств, перемен и явлений».

Справа — копия прижизненного портрета М. В. Ломоносова, нарисованная П. П. Лазаревым.

За изучением натуры, то есть природы, постоянно следил Лебедев. Вот его мысль: «Результаты опытов Рентгена рельефно показывают, что всякий прогресс в прикладной науке обусловлен исключительно успехами в области основных наук, в области чистого знания».

В другой статье Лебедев указывал: «Прирожденный талант будет побуждать людей посвящать свое время разработке научных вопросов. Талант, который открывает ученому необозримое поле разнообразной и в высшей мере увлекательной деятельности».

Интересны мнения П. Л. Капицы и С. И. Вавилова о науке.

Капица полагал: «Наука должна быть увлекательной и простой».

Вавилов надеялся: «Впереди науку ждут новые открытия; мы ближе подойдем к истине, а техника обогатится новыми средствами».

Сохранение и развитие науки немыслимо без обучения новых людей. Суждения многих, с большой тревогой думающих сейчас о будущем России, опубликованы еще в 2010 году одной из комиссий РАН: Там говорится: «То, что сегодня происходит в сфере образования — позор государства».

Поучительны высказывания компетентных людей о государственной роли науки:

Ф. Жолио-Кюри, который руководил когда-то ядерной программой Франции, отметил: «Страна, которая не развивает науку, неизбежно превращается в колонию».

А. М. Прохоров в конце своей жизни заявил: «Без фундаментальной науки наша страна обречена на провал».

В связи со смертью П. Н. Лебедева выдающийся физиолог И. П. Павлов написал: *«Разделяю скорбь утраты* ***незаменимого*** *Петра Николаевича Лебедева. Когда же Россия* ***научится беречь своих выдающихся сынов — истинную опору Отечества?!»***

Закончим рассказ всегда справедливыми словами Лебедева**:**

«ЗАБОТЯСЬ ОБ УСПЕХАХ НАУКИ,
ОБЩЕСТВО БУДЕТ ЗАБОТИТЬСЯ О СЕБЕ САМОМ».

Литература

1. *Лебедев П. Н.* Памяти первого русского ученого (1711—1911). [*Текст 1911 г.*] // УФН. — 2011. — Т. 181, № 11. — С. 1183—1186.
2. *Горький М.* Заметки из дневника. Савва Морозов. / М. Горький. Собрание сочинений. — М. : Гослитиздат, 1949. — Т. 17. — 440 с.
3. *Леге Ж.-М.* Кого страшит развитие науки? — М. : Знание, 1988. — 192 с.
4. *Рагульский В. В.* О людях науки с одинаковым отношением к жизни // УФН. — 2011. — Т. 181, № 3. — С. 307—318.
5. *Рагульский В. В.* Самый замечательный человек среди ученых // УФН. —2009. — Т. 179, № 11. — С. 1245—1251.
6. В защиту науки (Отв. ред. Э. П. Кругляков). — М. : Наука, 2010. — № 7. —С. 147.
7. Начало лазерной эры в СССР / ФИАН. — М., 2010. — 160 с.
8. *Рагульский В. В.* Как это было... / Лазерная ассоциация. — М., 2011. — Ч. 3. — 224 с.
9. *Рагульский В. В.* Об отечественных ученых : препринт № 1012 / ИПМех РАН. — М., 2012. — 28 с.

ФЕНОМЕНОЛОГИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ДОХОДНОСТИ АКЦИЙ НА ФОНДОВОМ РЫНКЕ[1]

М. Ю. Романовский

Введение. Экспериментальные факты, наблюдаемые при флуктуациях доходности ценных бумаг

Логарифмические доходности акций и фондовых индексов $S(\Delta t)$, измеренные на интервале времени Δt:

$$S(\Delta t) = \ln \frac{Y(t+\Delta t)}{Y(t)}, \qquad (1)$$

систематически исследуются еще со времен Л. Башелье [1] ($Y(t)$ — цена акции или значение индекса в момент времени t). Экспериментальные исследования доходностей на международных финансовых рынках позволили установить несколько фактов.

Во-первых, кумулятивная функция распределения $\Phi(x)$ вероятности возникновения флуктуации большей, чем x, так же как и меньшей, чем $-x$, для акций крупнейших компаний США на временном интервале с 1994 по 1995 год хорошо описывается степенной функцией вида [2]

$$\Phi(x) \simeq \left\{ \begin{matrix} x^{-3}, & S(\Delta t) > x \\ -x^{-3}, & S(\Delta t) < -x \end{matrix} \right\}. \qquad (2)$$

Аналогичные результаты получены и для акций немецких компаний [3], норвежских компаний [4], французских, японских, швейцарских и английских компаний [5], а также фондовых индексов [6].

Российские акции («голубые фишки») демонстрируют аналогичное поведение (2). На рис. 1 изображено кумулятивное распределение доходностей для положительных (закрашенные маркеры) и отрицательных (не закрашенные маркеры) флуктуаций акций Сбербанка. Прямой линией на рис. 1 обозначен закон x^{-3}. По оси Y отложена кумулятивная функция распределения, по оси X — доходность, нормированная на соответствующую экспериментально вычисленную среднеквадратичную доходность. Аналогичные зависимости мы получили и для акций других российских компаний. На рис. 2 представлена функция распределения флуктуаций российского индекса РТС. Хорошо видно, что все графики кумулятивных распределений похожи друг на друга. В то же время кривые для доходностей с большими Δt располагаются несколько выше графиков для доходностей с меньшими Δt (см. также [5]).

[1] Основано на статье П. В. Видова и М. Ю. Романовского «Неклассические случайные блуждания и феноменология флуктуаций доходности ценных бумаг на фондовом рынке» (УФН. 2011. Т. 181, вып. 7. С. 774—778).

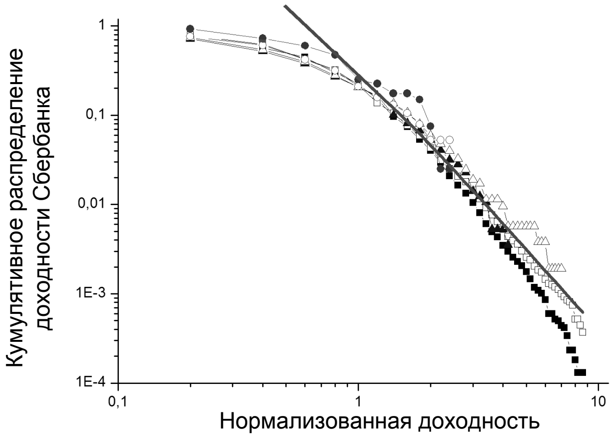


Рис. 1. Кумулятивные распределения нормированных доходностей обыкновенных акций Сбербанка для различных Δt: □ — одноминутные положительные флуктуации; ■ — одноминутные отрицательные флуктуации; - — часовые положительные флуктуации; ▲ — часовые отрицательные флуктуации; ○ — дневные положительные флуктуации; ● —дневные отрицательные флуктуации. Прямая линия — x^{-3}. Одноминутные, часовые, дневные данные получены по результатам торгов соответственно 10.01—10.02.2009 г., 01.09.2008—30.09.2009 гг., 23.01.2006—30.09.2009 гг. на бирже ММВБ

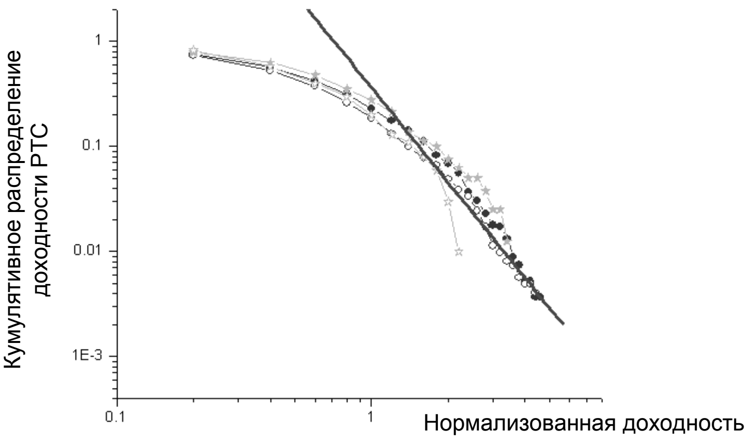


Рис. 2. Кумулятивные распределения нормированных доходностей индекса РТС для различных Δt: ○ — дневные положительные флуктуации; ● —дневные отрицательные флуктуации; ? — месячные положительные флуктуации; A — месячные отрицательные флуктуации. Прямая линия — x^{-3}. Дневные данные получены по результатам торгов 09.01.1995—27.06.2007 гг. на бирже РТС, месячные данные — по результатам торгов 09.01.1995—20.10.2010 гг.

Во-вторых, распределение количества акций, торгуемых в одной биржевой сделке (одном тике), $Q(x)$ определенно попадает в диапазон Леви, т. е. асимптотическая («хвостовая») часть распределения хорошо описывается законом вида $x^{-\varsigma}$, где $2 > \varsigma > 0$, если рассматривать кумулятивную функцию распределения (см. [7] и обсуждение [8, 9]). Параметры $1{,}63 > \varsigma > 1{,}45$ были получены при помощи различных статистических методов для одной и той же выборки акций крупнейших американских компаний (см. также [10]), $\varsigma \sim 1{,}58$ — для акций 85 крупнейших компаний, торгуемых на Лондонской фондовой бирже (LSE) в 2001—2002 годах, и $\varsigma \sim 1{,}53$ — для акций 13 компаний, входящих в индекс Парижской биржи CAC-40. Для российских «голубых фишек» мы получили показатели в диапазоне $1{,}7 > \varsigma > 1{,}6$ в зависимости от рассматриваемой ценной бумаги (рис. 3).

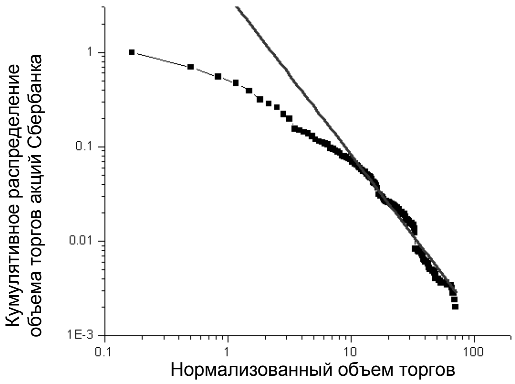


Рис. 3. Кумулятивное распределение объема торгов в одном тике для акций Сбербанка 21.11.2007 г. Прямой линией обозначена «хвостовая» зависимость $x^{-\varsigma}$, где $\varsigma = 1{,}7$

Естественно, данные зависимости справедливы только для акций. Ситуация с доходностями индексов несколько сложнее. Очевидно, что доходности индекса могут зависеть от объема торгов акциями, входящими в индекс. Однако это предположение довольно сложно проверить экспериментально (см. ниже).

Наконец, известно, что процесс $S(t)$ является дельта-коррелированным во времени:

$$B(\Delta t) = \left\langle S(t)S(t+\Delta t)\right\rangle \sim \delta(\Delta t) \qquad (3)$$

для всех акций [11]. Это утверждение проверялось для российских «голубых фишек» при различных Δt, включая самый маленький из доступных нам интервалов — 1 мин. Во всех случаях был получен следующий результат: значение корреляционной функции (3) стремится к нулю на первой ненулевой измеренной точке Δt. Аналогичная корреляционная функция для индексов имеет вид $\sim\exp(-t/\tau_{corr})$ [6], где время корреляции для индекса S&P500 составляет порядка 4 мин [6], а для российского индекса РТС — 0,85 мин [12]. Таким образом, доходность акций и индексов напоминает случайный процесс с независимыми приращениями.

1. Броуновское движение и гауссовы случайные блуждания

Случайные блуждания являются привлекательной наглядной моделью случайного процесса с независимыми приращениями. Формально задача о случайных блужданиях ставится следующим образом. Следует найти плотность вероятности того, что частица, испытав N прыжков в пространстве некоторой размерности G, окажется от места старта (в качестве которого без ограничения общности можно взять начало координат) в интервале от R до $R + \Delta R$. Каждый i-й прыжок может быть произведен в интервал длин (в модельном G-мерном пространстве) от r_i до $r_i + \Delta r_i$ с вероятностью $\tau(r_i)$. Все прыжки являются независимыми случайными величинами.

Схема решения этой задачи известна (схема Чандрасекара [13]). Пусть

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i. \tag{4}$$

При наличии всех моментов у функции плотности вероятности $\tau(r_i)$ имеем

$$W_1(R) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi N\left\langle r^2\right\rangle}} \exp\left(-\frac{R^2}{2N\left\langle r^2\right\rangle}\right). \tag{5}$$

Положив теперь $N\langle r^2\rangle = Dt$ (D — коэффициент диффузии), получим обычное решение для классической одномерной диффузии броуновской частицы, при котором средний квадрат смещения (дисперсия) ее из точки старта пропорционален $t^{1/2}$.

Важнейшим требованием в схеме Чандрасекара [13] является наличие всех моментов закона прыжков, хотя в ответ (5) входит только второй. По-видимому, наиболее «слабо» спадающим на бесконечности законом прыжка, имеющим все конечные моменты, является распределение Субботина [14]: $p(x) \sim \exp(-x^{\alpha})$, $\alpha > 0$ (на самом деле лишь немного больше).

2. Блуждания Леви

Изучим одномерные случайные блуждания с законом элементарного прыжка $\tau(r_i)$, не дающего всех конечных моментов, но обладающего нормировкой. Наипростейшей аппроксимацией является степенной закон, где для малых прыжков (в нуле) предполагается ограниченность и гладкость:

$$\tau(r_i) = \frac{C_1}{\left(z^2 + r_i^2\right)^{\beta}}. \tag{6}$$

Здесь C_1 — константа, определяемая требованием нормировки $C_1 = 2\Gamma(\beta)z^{(2\beta-1)}/\pi^{1/2}\Gamma(\beta - 1/2)$, $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция Эйлера, $\beta > 1/2$, z —

константа, имеющая смысл некоторой характерной длины прыжка. Таким образом, закон (6) является безмасштабным только для больших прыжков, когда $r >> z$, тогда он сводится к закону типа Парето [15] $\tau(r_i) \sim C_1/r_i^{2\beta}$. Функция распределения с законом прыжка (6) сводится к функции Леви:

$$W_1(R) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(KR)\exp\left[-N(Kz)^{2\beta-1}\frac{\Gamma(3/2-\beta)}{2^{2\beta-1}\Gamma(\beta+1/2)}\right]dK. \tag{7}$$

Требование одинаковости закона (6) для всех прыжков в принципе не нужно — величины z могут быть все разные (z_i), в этом случае величина $Nz^{2\beta-1}$ в (7) должна быть заменена на выражение $\Sigma_i z_i^{2\beta-1}$.

Закон распределения блужданий Леви характеризуется медленно спадающей асимптотикой, т. е. значительным количеством больших флуктуаций. Действительно, асимптотикой (7) является

$$W_1(R\to\infty) \approx \frac{\Gamma(2\beta)\sin\left[\frac{\pi}{2}(2\beta-1)\right]}{\pi\rho^{2\beta}},$$
$$\rho = \frac{R}{R_0}, \qquad R_0 = \frac{z}{2}\left[N\frac{\Gamma(3/2-\beta)}{\Gamma(\beta+1/2)}\right]^{\frac{1}{2\beta-1}}, \tag{8}$$

т. е. асимптотика распределения Леви укладывается в диапазон от $1/\rho$ до $1/\rho^3$. Распределение Леви обладает одним интересным свойством. Если поделить асимптотику (8) на асимптотику закона прыжка (6), получим

$$\frac{W_1(R\to\infty)}{\tau(r\to\infty)} = \frac{Nr^{2\beta}}{R^{2\beta}}. \tag{9}$$

Это выражение означает, что большие флуктуации могут возникать посредством одного прыжка ($R = r$ при $N = 1$).

3. Усеченные блуждания Леви

Главным отличием усеченных блужданий Леви [16, 17] от гауссовых случайных блужданий является наличие «толстых хвостов», т. е. большого количества сильных флуктуаций R. Закон прыжка для усеченного распределения Леви тот же (6), но теперь $\beta > 3/2$ (по-прежнему рассматриваем одномерные блуждания). При данных условиях этот закон имеет, как минимум, второй момент. При небольших флуктуациях до ($R \sim 10z$) эти распределения хорошо аппроксимируются соответствующей гауссовой функцией:

$$W_1^G(R) = \sqrt{\frac{\beta - 3/2}{\pi N z^2}} \exp\left(-\frac{\beta - 3/2}{N z^2} R^2\right). \tag{10}$$

Этот факт является выражением центральной предельной теоремы (ЦПТ) для таких случайных процессов [18]: гауссова функция справедлива вплоть до флуктуаций в $(N \ln N)^{1/2}$ раз больше характерной средней величины z [19]. Иногда этот результат называют теоремой Чебышева, он справедлив для любых $\beta \geq 2$ [20].

Для определения поведения усеченных распределений Леви в области больших флуктуаций ($R \geq (N \ln N)^{1/2} z$) следует определить ранее точно неизвестную асимптотику функции распределения. Можно показать точно, что асимптотическое поведение плотности распределения усеченных блужданий Леви может быть описано для любого β законом (рис. 4)

$$W_1(R) \xrightarrow[R \to \infty]{} \frac{2^\beta z^{2\beta - 1} N}{\pi (2\beta - 3) R^{2\beta}}. \tag{11}$$

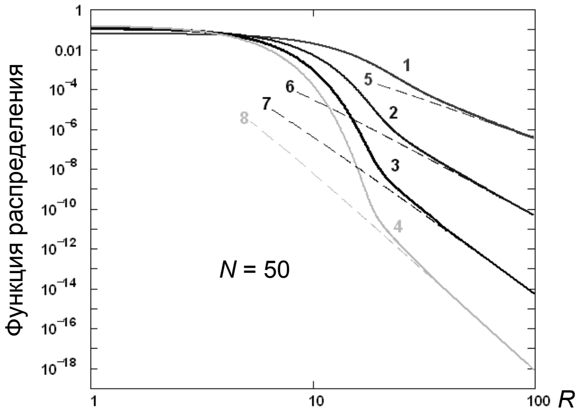


Рис. 4. Точные нормированные функции распределения при $\beta = 2$ (сплошная линия *1*), $\beta = 3$ (сплошная линия *2*), $\beta = 4$ (сплошная линия *3*), $\beta = 5$ (сплошная линия *4*) в зависимости от длины прыжков R, нормированных на z. Пунктирные линии *5*—*8* — соответствующие асимптоты при больших R

Кроме того, формула (11) описывает не только бесконечно делимый [21], но и устойчивый процесс. Для усеченных распределений большие флуктуации R посредством одного прыжка (9) возможны только при $\beta = 2$, в отличие от случая функции Леви (для любого $1/2 < \beta < 3/2$).

Проследим теперь зависимость среднеквадратичного отклонения от времени. Получим

$$\left\langle R^2 \right\rangle = \frac{N z^2}{2\beta - 3}. \tag{12}$$

Закон усеченных блужданий Леви (асимптотики (10), (11)) может быть нормирован на средний квадрат R (12). В этом случае все гауссовы асимптоты (для малых R) при любом β становятся одинаковыми. В то же время асимптоты (11) становятся приблизительно равны $N^{-1/2}$. На рис. 5 показана кумулятивная функция распределения усеченных блужданий Леви при $\beta = 2$. Хорошо видна разница между кривыми для разных значений N. Кумулятивные распределения при любых β ведут себя аналогичным образом.

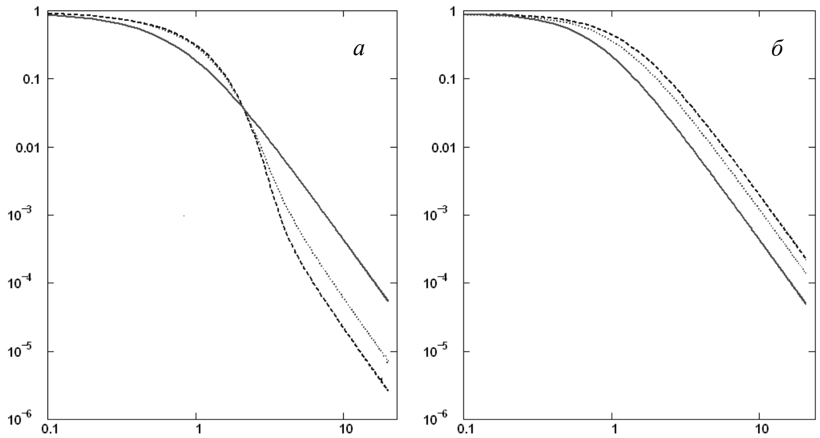


Рис. 5. Кумулятивная функция распределения усеченных блужданий Леви при $\beta = 2$ (ось Y): *а* — нормированная на $R = N^{1/2}z$ (ось X); *б* — нормированная на R с $\delta = 2{,}7$. Сплошные линии — $N = 1$, пунктирные линии — $N = 60$, точки — $N = 450$. Количество прыжков соответствует отношению между десятиминутными, часовыми и дневными доходностями

4. Сравнение с экспериментальными данными

Таким образом, форма распределения усеченного блуждания Леви, получающегося в результате реализации схемы с законом единичного прыжка (6), при $\beta = 2$ соответствует выражению (1), однако в этом случае имеются различия для разных значений N, что, однако, не наблюдается в действительности (см. введение). Для устранения этого несоответствия схему следует скорректировать. Сначала рассмотрим вопрос о том, что в эксперименте соответствует единичной сделке — так называемому тику. Нам необходимо ответить на вопрос, является ли тик единичным прыжком в схеме случайных блужданий.

Дисперсия при $\beta = 2$ просто равна $N^{1/2}z$. Так как экспериментально $N \sim t$, где t — частота фиксации значений доходности, должно существовать минимальное время t, которое соответствует минимально возможному интервалу фиксации доходности, т. е. время между двумя последовательными тиками. С одной стороны, этот интервал является случайной величиной. Экспериментально можно легко определить ее среднее значение. С другой стороны, это среднее значение должно соответствовать средней тиковой доходности, т. е. значению z с точки зрения модели (см. выше). Можно построить зависимость средних доходностей для различных временных интервалов t. Теоретически эта зависимость должна иметь вид $\sim t^{1/2}$ в силу (12). График этой зависимости определенно должен начинаться с уровня тиковой доходности. Экспериментально можно сравнить теоретический минимальный временной интервал, определяемый точкой пересечения графика среднеквадратичных доходностей и уровня среднеквадратичной тиковой доходности (рис. 6) со средним временным интервалом между двумя последовательными тиками. Разница между теоретически определенным минимальным временным интервалом и экспериментально измеренным средним временем между двумя тиками для акций Газпрома велика по сравнению с разницей для акций других компаний на российском рынке — 33 %. Минимальное различие данных величин наблюдается для акций Сбербанка и составляется всего 3 %.

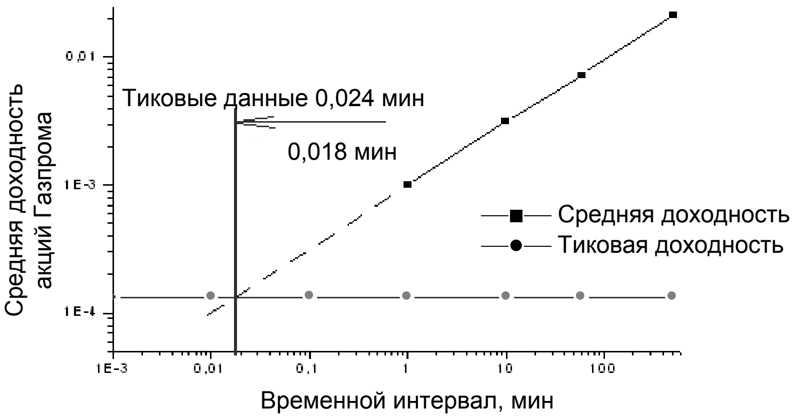


Рис. 6. Средняя доходность акций Газпрома для нескольких t (черные квадраты, соединенные сплошной линией). По оси абсцисс отложены временные интервалы фиксации значений доходности. Пунктирная линия — экстраполяция зависимости до малых значений. Горизонтальная сплошная линия определяет значение среднеквадратичной тиковой доходности. Пересечение графиков дает значение t = 0,018 мин, среднее время между двумя последовательными тиками равно 0,024 мин, разница составляет 33 %. Тиковые данные получены по результатам торгов 15.01.2008 г. на бирже ММВБ; одноминутные, десятиминутные, часовые и дневные данные получены по результатам торгов 10.01—10.02.2009 г., 07.01—30.09.2009 г., 01.09.2008—30.09.2009 гг., 23.01.2006—30.09.2009 гг. соответственно

По всей видимости, тик является единичным прыжком в схеме случайных блужданий. Первая возможность модификации модели — это попытка применения схемы случайных блужданий с непрерывным временем (CTRW) [22]. В самом деле, временные интервалы между двумя последовательными тиками могут варьироваться в широком диапазоне. Распределение этих временных интервалов для американского рынка известно [23], его функция спадает с уменьшением Δt как $(\Delta t)^{4,4}$. По всей видимости, учет времени между транзакциями не позволяет получить новые результаты в силу наличия математического ожидания величины временного интервала между тиками. Другой возможностью для модификации схемы усеченных случайных блужданий Леви является использование связи стандартного отклонения z и среднего объема сделки при помощи степенного закона. Наша модификация ограничивается предположением о том, что каждое стандартное отклонение z в схеме (см. закон прыжка (6)) — случайная величина z_i, пропорциональная объему сделки в i-й транзакции (i-м тике). Мы возвращаемся ко второму экспериментально выявленному свойству, описанному во введении. Практически мы используем широко распространенное биржевое правило о том, что «объем торгов двигает цену» [24].

Данная модификация означает, что мы вводим зависимость функции распределения вероятности единичных флуктуаций $\tau_i(r_i)$ от другой случайной величины z_i. В данном случае схема снова напоминает модель CTRW. Проблема прямого применения CTRW состоит в том, что конечная функция распределения для R будет зависеть от набора случайных величин $\{z_i\}$. Например, функция распределения усеченных случайных блужданий Леви для $\beta = 2$ получается в виде

$$W_{\beta=2,z_i}(R) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dK \exp(iKR) \prod_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{-Kz_i}(1 + Kz_i). \tag{13}$$

Так как все величины $\{z_i\}$ имеют функцию распределения $\sim x^{-\delta}$ при больших z_i, где $\delta \sim 2{,}5$—$2{,}7$ ($\delta = \varsigma - 1$), возможно усреднение (13) по каждой z_i. Тем не менее этот результат будет неверным, так как конечный вид усредненной таким образом функции (13) не будет соответствовать экспериментально наблюдаемым данным, а именно не будет пропорционален R^{-4} при больших R.

Похоже, что применение простой схемы CTRW возможно, по крайней мере, для асимптотических значений (13), так как при больших R имеем

$$W_{\beta=2,z_i}(R) = \frac{4\sum z_i^3}{\pi R^4} \tag{14}$$

и набор случайных величин $\{z_i\}$ дает только одну случайную величину Σz_i^3. К сожалению, функция плотности вероятности распределения данной величины на «хвостах» имеет вид $\sim x^{-2/3\,-\,\delta/3}$. Эта функция не имеет математического ожидания, которое необходимо для применения схемы CTRW [22]. На самом деле величины $\{z_i\}$ появляются в явном виде в выражении (13) в различных комбинациях: Σz_i^2, Σz_i^3 и т. д. Каждая из таких комбинаций сама представляет собой случайную величину. Так как асимптотическая функция распределения зависит от суммы кубов z_i, можно сделать вывод, что сумма сходится к распределению Леви (см. [13]). Только это условие обеспечивает устойчивость величины Σz_i^3 при добавлении новых членов в сумму.

Поэтому метод CTRW необходимо обобщить на случай отсутствия условного среднего (случайной величины Σz_i^3 в (14)); для случая наличия условного среднего см. [25]. Как и в случае распределения Леви (7), выражение (13) может быть исследовано на предмет зависимости от N, т. е. перенормировки. Если перенормировать величину R в (13) или соответствующее асимптотическое кумулятивное распределение

$$\Phi_{\beta=2,z_i}(R) \simeq \frac{4\sum z_i^3}{3\pi R^3} \tag{15}$$

на стандартное отклонение $(\Sigma z_i^2)^{1/2}$, что мы делаем во всех экспериментах, возникает скейлинговая зависимость выражения (15) в виде $N^{-1/2}$ в случае $\Sigma z_i^3 \sim N$ (см. (11) и рис. 5, *а*). В то же время зависимость Σz_i^3 от N имеет другой вид, так как функция распределения случайной величины Σz_i^3 сходится к распределению Леви (см. выше). Конечный результат для функции распределения Леви $\Sigma z_i^3 \sim N^{3/(\delta-1)}$, и конечная наблюдаемая зависимость (15) от N после перенормировки реальной доходности R на экспериментально полученное стандартное отклонение

$$\Phi^{renorm}_{\beta=2,z_i}\left(\frac{R}{\sqrt{\sum z_i^2}}\right) \sim N^{\frac{3}{\delta-1}-\frac{3}{2}}. \tag{16}$$

При $\delta \sim 2{,}5$—$2{,}7$ получаем зависимости (16) в диапазоне $N^{0,5}$—$N^{0,27}$ (см. рис. 5, *б*). Видно, что стандартная экспериментальная перенормировка обеспечивает слабую зависимость всех функций распределения доходности от количества прыжков (тиков) N. Отметим, что такие зависимости (16) от N аналогичны экспериментальным результатам [6] и нашим результатам, полученным для российского рынка, где имеются слабые зависимости от N: доходности растут при увеличении N в отличие от того, что наблюдается на рис. 5, *а* для простой схемы усеченных случайных блужданий Леви.

Отметим, что установленная зависимость от N имеет место только в случае доходностей акций. Возможная зависимость доходностей индекса от объема торгов акциями, входящими в индекс, может иметь другой вид (по сравнению с законом $x^{-\varsigma}$). Если этот закон не попадает в диапазон Леви $2 > \varsigma > 0$ и ς (немного) больше 2, кумулятивное распределение доходностей индекса на больших временных интервалах (16 дней как в [6], положительные месячные доходности индекса РТС на рис. 2 — последние две точки) может сходиться к гауссовому случаю (см. (16) при $\delta \sim 3$—4). Эти распределения будут выглядеть аналогично показанным на рис. 5, *а* при больших N, а не так, как эти же кривые на рис. 5, *б* [26].

Заключение

Введение закона прыжка типа (6) позволяет единым аналитическим образом рассмотреть как обычные блуждания Леви, так и усеченные блуждания Леви. Усеченные блуждания Леви асимптотически проявили те же свойства устойчивости и масштабируемости, что и обычные. Для усеченных блужданий получены аналитические асимптоты и выяснены законы масштабирования. Асимптотические усеченные блуждания Леви имеют типично безмасштабное распределение $\sim R^{-2\beta}$, что характерно и для асимптот «чистых» блужданий Леви, но спадают с ростом R быстрее. Таким образом, усеченные блуждания Леви вместе с «чистыми» перекрывают весь класс распределений Парето [15].

Можно предположить, что закон $\sim 1/x^3$ для кумулятивной функции распределения флуктуаций акций и индексов является универсальным. Такое распределение может быть получено при помощи схемы случайных блужданий (прыжков) с законом единичного прыжка (6) только при $\beta = 2$. Это означает, что закон прыжка при таком значении β

$$\tau_i(r) = \frac{4z_i^3}{\pi(z_i^2 + r^2)^2} \qquad (17)$$

также является универсальным. Здесь значение z_i представляет собой некоторую характерную доходность, использующуюся для нормировки. Этот результат можно считать доказательством существования микроскопического закона флуктуаций доходностей на фондовом рынке. Таким образом, цены всех акций (индексы представляют собой, по сути, корзины акций, и их поведение аналогично) совершают «прыжки» на различные «дистанции» с постоянными вероятностями. Микроскопический закон (17) объясняет феноменологию закона $\sim 1/x^3$ [2].

По всей видимости, существование строгих законов единичного прыжка (16) возможно по двум причинам. Во-первых, распределения вероятности флуктуаций доходности должны обладать вторым моментом, т. е. дисперсией. Это требование обусловлено в конечном счете ограниченностью денег. Во-вторых, функция распределения должна иметь ту же асимптотику, что и закон прыжка, т. е. должна существовать вероятность возникновения больших флуктуаций посредством одного прыжка. Все функции Леви удовлетворяют второму требованию, но не первому. Только функция распределения (12) при $\beta = 2$ удовлетворяет обоим условиям.

Простое определение величины z_i как некоторой характерной величины прыжка не позволяет дать точного объяснения зависимости нормированных функций распределения и кумулятивных распределений от N. Модификация схемы случайных блужданий обеспечивается введением зависимости $\{z_i\}$ от количества акций, торгуемых в одной сделке (тике), так как факт соответствия одного тика одному прыжку проверен экспериментально (см. также [12]). В этом случае функция распределения величины Σz_i^3 сходится к функции Леви с индексом Леви $(\beta - 1)/3$. Конечная зависимость кумулятивных функций распределения от количества тиков (прыжков) попадает в диапазон от $N^{0,5}$ до $N^{0,27}$. Российские акции демонстрируют более слабые зависимости по сравнению с акциями из США и акциями, торгуемыми на LSE и на Парижской бирже. Таким образом, конечная схема случайных блужданий выглядит как схема CTRW при отсутствии условного среднего (для величины Σz_i^3).

Литература

1. *Bachelier L.* Theorie de la speculation : Ph. D. thesis in mathematics. Paris : École Normale Superieure, 1900.
2. *Gopikrishnan P. et al.* // Eur. Phys. J. B. 1998. V. 3. P. 139.
3. *Lux T.* // Appl. Financ. Econ. 1996. V. 6. P. 463.
4. *Skjeltorp J. A.* // Physica A. 2000. V. 283. P. 486.
5. *Loretan M., Phillips P. C. B.* // J. of Empirical Finance. 1994. V. 1. P. 211.
6. *Gopikrishnan P. et al.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 5305.
7. *Plerou V., Stanley H. E.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. P. 046109.
8. *Racz E. et al.* // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. P. 068101.
9. *Plerou V., Stanley H. E.* // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. P. 068102.
10. *Gopikrishnan P. et al.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. R4439.
11. *Mantegna R. N., Stanley H. E.* An Introduction to Econophysics. Correlation and Complexity in Finance. N. Y. : Cambrige University Press, 2000.
12. *Романовский М. Ю., Видов П. В., Пыркин В. А.* // Компьютерные исследования и моделирование. 2010. Т. 2. С. 219.
13. *Chandrasekhar S.* // Rev. Mod. Phys. 1943. V. 15. P. 1.
14. *Субботин М. Т.* // Математич. сб. 1923. Т. 31. С. 296.
15. *Pareto V.* Cours d'Economie Politique. Lausanne ; Paris, 1897.
16. *Koponen I.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 52. P. 1197.
17. *Mantegna R., Stanley H. E.* // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. P. 2946.
18. *Feller W.* An Introduction to Probability Theory and its Applications. N. Y. : Wiley, 1971 ; *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М. : Мир, 1984.
19. *Bouchaud J.-P., Potters M.* Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: from Statistical Physics to Risk Management. 2nd Ed. Cambridge, UK : Cambridge Univ. Press, 2003.
20. *Romanovsky M. Yu., Vidov P. V.* // Physics of wave phenomena. 2009. V. 17. P. 218.
21. *Khinchine A.* // Математич. сб. 1937. Т. 2(44). С. 79.
22. *Scher H., Montroll E. W.* // Phys. Rev. B. 1975. V. 12. P. 2455.
23. *Gopikrishnan P. et al.* // Physica A. 2000. V. 287. P. 362.
24. *Karpoff J. M.* // Journal of Finance. 1986. V. 41(5). P. 1069 ; *Brailsford T. J.* // Accounting and Finance. 1996. V. 36. P. 89.
25. *Sokolov I. M.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 63. P. 011104.
26. *Romanovsky M. Yu., Vidov P. V.* // Physica A. 2011. V. 390. P. 3794.

Семенов В. А. **Нелинейный отклик атмосферной циркуляции на таяние арктических льдов — возможная причина холодных зим XXI века** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 9—22.

Глобальное потепление, наиболее сильно проявляющееся в Арктике, в последнее десятилетие сопровождалось аномально холодными зимами над континентами Северного полушария. Период с участившимися случаями формирования морозных зим совпал с резким (рекордным в данных инструментальных наблюдений) уменьшением площади ледового покрова в Баренцевом и Карском морях. В статье показано, что аномалии концентрации ледового покрова в Баренцевом и Карском морях являются важным фактором, способным приводить к похолоданиям, аналогичным, например, зиме 2005/2006 г. Рассмотрены результаты численных экспериментов. Предложена концептуальная модель, объясняющая нелинейный отклик атмосферной циркуляции в регионе Баренцева и Карского морей на изменения нагрева на нижней границе атмосферы, вызванного аномалиями концентрации ледового покрова.

Зилитинкевич С. С., Клиорин Н. И., Рогачевский И., Эльперин Т., Эзау И. Н. **Энергетика турбулентности и теория турбулентного замыкания для устойчиво стратифицированных геофизических течений** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 23—66.

Предлагается теория турбулентного замыкания, основанная на уравнениях баланса для главных вторых моментов: кинетической энергии турбулентности, потенциальной энергии турбулентности, вертикального турбулентного потока количества движения и вертикального турбулентного потока плавучести — и включающая новое уравнение для турбулентного масштаба времени. Для практического использования предлагается иерархия моделей замыкания различной сложности — от алгебраической модели, пригодной для описания равновесного режима турбулентности, до нелокальных замыканий, учитывающих неградиентные турбулентные переносы.

Иудин Д. И. **Фрактальные аспекты броуновского движения** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 67—80.

Статья посвящена некоторым особенностям броуновского движения. Рассматриваются следующие вопросы: фрактальная геометрия броуновского движения, влияние флуктуаций на процессы конкуренции, метод показателя Хёрста. Применение метода показателя Хёрста обсуждается на примере броуновских пейзажей. С целью выявления особых свойств броуновских пейзажей в трехмерии рассматривается квазиэлектростатика заряженного аэрозоля.

Руденко О. В. **О сильно нелинейных волнах и волнах с сильно выраженной слабой нелинейностью** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 83—97.

В статье приводятся примеры нелинейных колебательных и волновых систем и явлений, обосновывающих полезность различения терминов «сильно нелинейные волны» и «волны с сильно выраженной слабой нелинейностью», которые могут представлять как методический, так и независимый интерес для физики нелинейных процессов.

Кузнецов Е. А. **Коллапс и колмогоровские спектры** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 98—118.

Рассмотрена связь между коллапсами и колмогоровскими спектрами. Коллапсы приводят к формированию особенностей, что дает для спектров турбулентности асимптотики степенного типа. По этой причине коллапсы играют важную роль в проблеме колмогоровских спектров. Приведен пример спектра Крейчнана для двумерной гидродинамической турбулентности, основной вклад в который вносят резкие градиенты завихренности в виде квазиударных скачков. Показано, что завихренность при опрокидывании вихревых линий в трехмерной гидродинамике имеет колмогоровское поведение. Проведено сравнение теоретических предсказаний с недавними результатами по численному моделированию коллапса для невязких жидкостей.

Дудченко О. А., Гурия Г. Т. **Автоволновые явления в транспортных системах перистальтического типа** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 119—135.

В статье предложена математическая модель, позволяющая описывать процессы эстафетного массопереноса в транспортных системах перистальтического типа. Показано, что режимам перистальтического прокачивания отвечают уединенные самоподдерживающиеся волновые решения — автоволны. Использование кусочно-линейной аппроксимации присутствующих в уравнениях модели нелинейных функций позволило аналитически исследовать задачу о существовании перистальтических автоволн. Обсуждается биологическая значимость полученных результатов, а также связь между перистальтическими автоволнами, пульсовыми волнами и солитонами Рассела.

Масленников О. В., Некоркин В. И. **Дискретные модели в нейродинамике: от нейрона к сети** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 136—155.

В статье обсуждаются проблемы моделирования нейронных сетей с помощью дискретных моделей в форме точечных отображений. Представлена модель активности нейрона в форме разрывного двумерного точечного отображения и дан обзор основных режимов, которые эта модель воспроизводит. Представлены результаты моделирования динамики сложной нейронной структуры — оливо-мозжечковой системы позвоночных, в основе которого лежит использование описанной модели.

Кузнецов С. П. **Физические системы с гиперболическими хаотическими аттракторами** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 156—171.

Рассказывается о проблеме поиска и конструирования систем, допускающих физическую реализацию, в которых хаотическая динамика связана с присутствием однородно гиперболических аттракторов, таких как соленоид Смейла — Вильямса и аттрактор типа Плыкина. Дан краткий обзор основ соответствующей математической теории. Обсуждаются модели с импульсным воздействием и с периодически повторяющимися стадиями эволюции, на каждой из которых динамика описывается своей формой уравнений. Рассмотрены и проиллюстрированы методики проверки гиперболической природы аттрактора, основанные на визуализации устойчивых и неустойчивых многообразий, на анализе статистического распределения углов между многообразиями и на графическом представлении инвариантных распределений фазовой жидкости на аттракторе.

Арансон И. С. **Активные коллоиды** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 172—206.

Коллоидные суспензии, неоднородные жидкости, содержащие твердые микроскопические частицы, играют важную роль в повседневной жизни — от пищевой и фармацевтической промышленности до медицины и нанотехнологии. В статье дан обзор последних достижений в физике активных коллоидов, как в синтетических, так и в живых системах, для иллюстрации фундаментальных физических механизмов самоорганизации и коллективного поведения.

Сажин М. В., Сажина О. С. **Космические струны и их поиски во Вселенной** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 209—213.

В работе дан обзор современного статуса космических струн (КС) в теоретической и наблюдательной космологии. Рассмотрены независимые методы поиска КС во Вселенной: поиск цепочек гравитационно-линзовых изображений специального вида в оптических обзорах с помощью инструментов высокого углового разрешения; исследование структуры анизотропии реликтового излучения по данным космического аппарата WMAP. Впервые получены наблюдательные ограничения на энергии одиночных КС.

Беспалов П. А. **Эффективное насыщение поглощения при волновых процессах в плазменных магнитосферных и космических мазерах** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 214—228.

Для космической плазмы естественны неравновесные распределения надтепловых частиц, ответственные за неустойчивости электромагнитных волн. При низком отношении газокинетического давления к плотности энергии магнитного поля геометрическая структура системы остается стабильной и выполняет роль резонатора электромагнитных волн. Закономерности возбуждения электромагнитных волн и плазменные процессы в таких системах имеют много общего и могут быть рассмотрены на основе теории плазменного космического мазера. В рамках такого подхода получены важные данные о процессах в радиационных поясах Земли, Юпитера, Сатурна и звездных корон.

Гильфанов М. Р. **Проблема предшественников сверхновых Ia** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 229—246.

Рассмотрены различные следствия аккреционного сценария происхождения сверхновых типа Ia. Белый карлик, на поверхности которого происходит стационарное ядерное горение аккрецируемого вещества, является мощным источником мягкого рентгеновского и/или ультрафиолетового излучения в течение примерно нескольких миллионов лет до взрыва сверхновой. В режиме нестационарного ядерного горения белый карлик становится источником вспышек классических новых, частота которых непосредственно связана с частотой взрывов сверхновых. Сравнение этих предсказаний с наблюдениями близких галактик в рентгеновском, оптическом и ультрафиолетовом диапазонах спектра позволяет практически полностью исключить белые карлики из списка кандидатов в предшественники сверхновых Ia в эллиптических галактиках.

Постнов К. А., Шакура Н. И., Кочеткова А. Ю., Ялмарсдоттер Л. **Квазисферическая до-звуковая аккреция на рентгеновские пульсары** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 247—296.

Рассматривается модель квазисферической дозвуковой аккреции на медленно вращающиеся замагниченные нейтронные звезды. Модель объясняет как ускорение и замедление вращения неравновесных пульсаров на больших временах, так и вариации частоты пульсара на малых временных интервалах, которые в разных системах могут коррелировать или антикоррелировать с наблюдаемыми флуктуациями рентгеновского потока.

Костюков И. Ю., Неруш Е. Н. **Нестабильность физического вакуума в сильном лазерном поле** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 299—311.

В настоящее время в мире проектируются лазерные системы, позволяющие генерировать излучение с интенсивностью более 10^{24} Вт/см^2. При такой интенсивности напряженность электрического поля в области, куда фокусируется лазерное излучение, становится почти на 5 порядков выше, чем напряженность атомного поля. Такое интенсивное лазерное излучение может быть использовано для исследования в лабораторных условиях структуры физического вакуума, для проверки основ квантовой электродинамики, разработки источников гамма-излучения и т. д. В статье представлены последние результаты исследований нестабильности вакуума в сильных электромагнитных полях. Обсуждаются основные теоретические модели, численные методы моделирования и экспериментальные результаты.

Зубарев И. Г. **Воспроизведение спектра возбуждающего излучения и обращение волнового фронта лазерных пучков при вынужденном рассеянии света — нелинейные эффекты параметрического взаимодействия волн** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 312—329.

В статье приведен обзор работ по нелинейному поведению волн при формировании временной и пространственной структуры излучения при вынужденном комбинационном и мандельштам-бриллюэновском рассеянии лазерных пучков с широкими частотным и угловым спектрами. Приведены соответствующие экспериментальные результаты и дана их теоретическая интерпретация.

Анашкина Е. А., Андрианов А. В., Ким А. В., Сергеев А. М. **Суперконтинуум. Новые возможности** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 330—350.

Дан сравнительный анализ механизмов генерации спектрального суперконтинуума в различных нелинейных средах. Особое внимание уделено формированию суперконтинуума в полностью волоконной эрбиевой лазерной системе в различных режимах, а также компрессии сверхмощных импульсов со сверхширокополосным спектром в плазме до предельно коротких длительностей.

Фаддеев Л. Д. **Новая жизнь полной интегрируемости** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 353—370.

В статье дан краткий обзор нового развития понятия полной интегрируемости динамической системы и его квантовой версии в последние 40 лет. Описана новая техника работы с интегрируемыми моделями и ее главные приложения.

Калачёв А. А. **Источники однофотонных и перепутанных двухфотонных полей и задачи квантовой информатики** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 371—384.

Обсуждается проблема создания эффективных источников однофотонных и перепутанных двухфотонных состояний электромагнитного поля, широко используемых в современной квантовой оптике и информатике. Основное внимание уделяется источникам, основанным на явлении спонтанного параметрического рассеяния света в нелинейных средах. Рассматриваются принципы получения чистых однофотонных состояний, наиболее перспективные схемы создания детерминированных однофотонных источников и последние экспериментальные достижения в этой области.

Борисов А. Б., Рыбаков Ф. Н. **Трехмерные структуры в изотропном ферромагнетике** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 385—397.

Рассмотрены трехмерные солитоны в ферромагнетике (модель Гейзенберга). Обсуждается топологическая классификация трехмерных магнитных структур. Приведен широкий класс точных решений, на основе которых предсказаны новые типы трехмерных структур в ферромагнетике: спиральные и кноидальные ежи. Изложены результаты вычислений трехмерных топологических солитонов с ненулевым инвариантом Хопфа, внутренняя структура которых представляет собой зацепления вихревых колец.

Кочаровский Вл. В., Калинин П. А., Кочаровская Е. Р., Кочаровский В. В. **Динамика лазеров класса D на бозе-эйнштейновском конденсате, субмонослойных квантовых точках и других экзотических активных средах** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 398—428.

Изложены современные представления о режимах генерации лазеров класса D, в которых время жизни фотона в резонаторе много меньше времени жизни поляризации активных центров усиливающей среды. Обсуждаются возможности управления корреляционными и спектрально-динамическими свойствами их излучения, а также перспективы создания подобных лазеров, прежде всего, на полупроводниковых структурах. Рассмотренные вопросы важны для физики коллективного поведения активных центров в ансамблях большой плотности и для приложений в информационных оптоэлектронных технологиях.

Рагульский В. В. **О людях науки, в том числе нелинейной оптики** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 431—444.

Люди всегда думали о проблемах своей деятельности, а порою и о путях развития человеческого общества. Первую физическую школу в нашей стране создал П. Н. Лебедев, он же впервые в мире измерил цветовое давление. В статье приводятся высказывания П. Н. Лебедева и представителей различных поколений о науке, образовании и окружающей действительности. Приведены их портреты.

Романовский М. Ю. **Феноменология флуктуаций доходности акций на фондовом рынке** // Нелинейные волны' 2012. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2013. С. 445—456.

В работе исследовались экспериментальные данные доходностей акций и фондовых индексов, полученные на международных фондовых рынках, а также на российском фондовом рынке. Для описания полученных результатов предложена схема случайных блужданий с единым законом единичного приращения (прыжка) в некотором пространстве случайных блужданий. Выполнено естественное обобщение случайных блужданий Леви. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными, представляющими собой временные ряды флуктуаций доходностей различных акций и фондовых индексов.

NONLINEAR WAVES' 2012

Edited by Academician *A. G. Litvak*, Professor *V. I. Nekorkin*

V. A. Semenov. **The nonlinear response of the atmospheric circulation on the Arctic ice melting — a possible cause of cold winters of the 21st century**

Global warming most pronounced in the Arctic has been accompanied by a number of anomalously cold winters over the continents in the Northern hemisphere. The period with more frequent cold winters was accompanied by unprecedented step-wise sea ice area decline in the Barents and Kara Seas. It is shown that sea ice concentration anomalies in the Barents and Kara Seas are an important factor that can cause cold winter events similar to, e. g., the winter of 2005/2006. Results of numerical simulations are considered. A conceptual model describing the nonlinear circulation response to the change of the heating rate at the lower atmospheric boundary due to sea ice concentration anomalies in the Barents and Kara Seas is proposed.

S. S. Zilitinkevich, N. I. Kleeorin, I. Rogachevskii, T. Elperin, and I. Esau. **A hierarchy of energy- and flux-budget turbulence closure models for stably stratified geophysical flows**

We advance a physical background of the energy- and flux-budget turbulence closure based on the budget equations for the turbulent kinetic and potential energies and turbulent fluxes of momentum and buoyancy, and a new relaxation equation for the turbulent dissipation time scale. For the use in different applications, the closure is formulated at different levels of complexity, from the local algebraic model relevant to the steady-state regime of turbulence to a hierarchy of non-local closures including simpler down-gradient models, presented in terms of the eddy-viscosity and eddy-conductivity, and general non-gradient model based on prognostic equations for all basic parameters of turbulence including turbulent fluxes.

D. I. Iudin. **The Brownian motion fractal aspects**

The paper is devoted to some peculiarities of the Brownian motion. The following issues are considered: the Brownian motion fractal geometry, the influence of fluctuations on the competition processes, and the Hurst exponent method. The Hurst exponent method application is discussed by the example of Brownian landscapes. We consider charged aerosol quasi-electrostatics to reveal some peculiar features of Brownian landscapes in three-dimensionality.

O. V. Rudenko. **On strongly nonlinear waves and waves with pronounced weak nonlinearity**

The paper gives examples of nonlinear oscillatory and wave systems and phenomena, which substantiate the usefulness of distinguishing the terms “strongly nonlinear waves” and “waves with pronounced weak nonlinearity” being of both methodical and independent interest in physics of nonlinear processes.

E. A. Kuznetsov. **Collapse and the Kolmogorov spectra**

We examine the relationship between collapses and the Kolmogov-type spectra. Collapses lead to the formation of singularities, which yields power-type asymptotics for turbulent spectra. For this reason, collapses play an essential role in the problem of the Kolmogorov spectra. We consider, as an example, the Kraichnan spectrum for two-dimensional hydrodynamic turbulence, the main contribution to which is made by sharp vorticity gradients in the form of quasi-shock jumps. It is shown that while vortex lines break in three-dimensional hydrodynamics, the vorticity has the Kolmogorov behavior. Theoretical predictions and recent results of the numerical modeling for inviscid fluids are compared.

O. A. Dudchenko and G. Th. Guria. **Autowave processes in peristaltic transport**

The paper introduces a simple “relay-race” model to describe self-sustained phenomena in biological peristalsis. To simplify the analysis, an analytically tractable version of the model is developed by means of piecewise-linear approximation of the model equations. Within the piecewise-linear framework, explicit formulas for the velocity of peristaltic waves are derived for several important limiting cases. The formulas allow one to interpret the speed of the wave in terms of the parameters which characterize the transport system: the viscosity of the transported fluid, the rigidity of the vessel wall, the degree to which the contractile machinery is activated, etc. Alongside with the discussion of the clinical significance of the results, the relationship between peristaltic waves, pulse waves, and Russell's solitons is considered.

O. V. Maslennikov and V. I. Nekorkin. **Discrete models in neurodynamics: from neuron to the network**

In this paper, we discuss some problems of modeling of neural networks using discrete models in the form of mappings. A model for neural activity in the form of a discontinuous two-dimensional map is presented and the main regimes reproduced by this model are reviewed. The results of modeling the dynamics of a complex neural structure, i.e., a vertebrate olivocerebellar system, are based on the described model.

S. P. Kuznetsov. **Physical systems with hyperbolic chaotic attractors**

The paper considers the problem of identifying and designing the systems that allow physical implementation of chaotic dynamics due to uniformly hyperbolic attractors, such as the Smale – Williams solenoid and the Plykin-type attractor. A brief review of the grounds of the corresponding mathematical theory is given. We discuss models with pulsed kicks and periodically alternating stages of evolution, each described by a specific form of dynamics equations. Techniques for inspection of the hyperbolic nature of the attractors are discussed and illustrated, e.g., those based on visualization of stable and unstable manifolds, statistical analysis of the distribution of angles between the manifolds, and graphical representation of invariant phase fluid distributions on the attractor.

I. S. Aranson. **Active colloids**

A colloidal suspension is a heterogeneous fluid containing solid microscopic particles. Colloids play an important role in our everyday life, from food and pharmaceutical industries to medicine and nanotechnology. The paper surveys the most recent developments in the physics of active colloids, both in synthetic and living systems, to elucidate the fundamental physical mechanisms governing self-assembly and collective behavior.

M. V. Sazhin and O. S. Sazhina. **Cosmic strings and their search in the Universe**

The paper presents a review of the current status of cosmic strings (CS) in theoretical and observational cosmology. Two independent methods of CS search in the Universe are considered: search for chains of gravity-lens images of a special type in optical surveys using tools of high angular resolution; study of the CMBR anisotropy structure from the WMAP spacecraft data. The observational constraints on the energy of single CS were obtained for the first time.

P. A. Bespalov. **Effective saturation of absorption for wave processes in space plasma magnetospheric masers**

Nonequilibrium distributions of epithermal particles responsible for the instabilities of electromagnetic waves are typical of the space plasma. In the plasma with a low ratio of the gas kinetic pressure to the energy density of a magnetic field, the geometric structure of the system is stable and functions as a resonator of electromagnetic waves. The dynamics of electromagnetic wave excitation and the plasma processes in such systems have common behavior and can be studied on the basis of the space plasma maser theory. Within the framework of this approach, several important results on the processes in the Earth, Jupiter, and Saturn radiation belts and star coronas are obtained.

M. R. Gilfanov. **The problem of type Ia supernova progenitors**

We consider various consequences of the accretion scenario of type Ia supernova. A white dwarf with steady nuclear burning of the accreted material on its surface becomes a powerful source of soft X-ray and/or UV radiation for up to about several million years before the supernova explosion. In the low mass accretion rate regime, when hydrogen fusion is unstable, the accreting white dwarf becomes a source of classical novae explosions, whose frequency is directly related to the type Ia supernova rate. Comparison of these predictions with X-ray, optical, and UV observations of nearby galaxies permits to mostly exclude accreting white dwarfs from the list of feasible type Ia supernova progenitors.

K. A. Postnov, N. I. Shakura, A. Yu. Kochetkova, and L. Yalmarsdotter. **Quasi-spherical subsonic accretion onto X-ray pulsars**

A theoretical model for quasi-spherical subsonic accretion onto slowly rotating magnetized neutron stars is considered. The model explains both the spin-up/spin-down of the pulsar frequency at large time scales and the irregular short-term frequency fluctuations, which can correlate or anticorrelate with the X-ray luminosity fluctuations in different systems.

I. Yu. Kostyukov and E. N. Nerush. **Instability of physical vacuum in a strong laser field**

Laser systems providing the laser intensity higher than 10^{24} W/cm^2 are now designed in world. At this intensity, the electric field in the region, where the laser light is focused, is almost 5 orders of magnitude higher than the intensity of an atomic field. Such intense laser radiation can be used to probe vacuum, verify QED, construct new sources of gamma-radiation, etc. The paper presents the latest research results of vacuum instability in strong electromagnetic fields. We discuss theoretical models, numerical simulations, and experimental results.

I. G. Zubarev. **Spectral reproduction of pumping radiation and phase conjugation of laser beams by light stimulated scattering. Nonlinear effects of the parametric wave interaction**

The paper overviews the work on nonlinear behavior of waves in the formation of the spatial and temporal structure of radiation by stimulated Raman (SRS) and Brillouin (SBS) scattering of laser beams with broadband frequency and angular spectra. The corresponding experimental results and their theoretical interpretation are given.

E. A. Anashkina, A. V. Andrianov, A. V. Kim, and A. M. Sergeev. **Supercontinuum. New opportunities**

A comparative analysis of mechanisms of spectral supercontinuum generation in various nonlinear media is presented. Special attention is given to the formation of supercontinuum in an all-fiber erbium laser system in various regimes and compression of superpower pulses with an ultra-broadband spectrum in plasma up to extremely short durations.

L. D. Faddeev. **New life of complete integrability**

A short survey of the new development connected with the notion of complete integrability for dynamical systems and their quantum counterparts for the last 40 years is given. A new technique of working with integrable models and their applications is described.

A. A. Kalachev. **Sources of single-photon and entangled two-photon states for quantum information processing**

The elaboration of effective sources of single-photon and entangled two-photon states of the electromagnetic field, which are widely used in modern quantum optics and quantum information, is discussed. The emphasis is on the sources based on spontaneous parametric down-conversion in nonlinear media. The concepts of generating pure single-photon states, the most promising schemes of deterministic single-photon sources, and the latest experimental achievements in this field are considered.

A. B. Borisov and F. N. Rybakov. **Three-dimensional structures in an isotropic ferro-magnet**

We considered three-dimensional solitons in a ferromagnet (the Heisenberg model). The topological classification of three-dimensional magnetic structures is discussed. A wide class of exact solutions is given, which serve a basis for predicting new types of three-dimensional structures in the ferromagnet, i.e., spiral and cnoidal hedgehogs. We present the results of calculations of three-dimensional topological solitons with nonzero Hopf invariant, the internal structure of which is the linking.

Vl. V. Kocharovsky, P. A. Kalinin, E. R. Kocharovskaya, V. V. Kocharovsky. **Dynamics of class D lasers based on bose-einstein condansate, submonolayer quantum dots, and other exotic active media**

We describe recent achievements in the theory of the class D lasers where the photon lifetime in a cavity is much less than the polarization lifetime of active centers in an amplifying medium.

We point out efficient ways for changing the correlation and spectral-dynamical properties of their emission, and discuss the prospects for fabrication of such lasers, in particular, based on semiconductor structures. These problems are interesting for the physics of collective behavior of active centers in high-density ensembles and for applications in the information optoelectronics technologies.

V. V. Ragulsky. **On people of science, including experts in nonlinear optics**

People always thought about problems of their activities and, sometimes, about the development of human society. The first school of physics in our country was created by P.N. Lebedev and he also was the first in the world who measured color pressure. The paper quotes statements of P. N. Lebedev and representatives of different generations on science, education, and reality. Their portraits are given.

M. Yu. Romanovsky. **Phenomenology of fluctuations of stock returns in the stock market**

Experimental data on stock and stock-index returns obtained in both international and Russian stock markets are presented and discussed. A random walk process with a specific law of an elementary independent increment (jump) in a random walk space is proposed for a proper basic description. Levy flights are naturally generalized. The obtained random walk process is compared with the known empirical data on the above-mentioned return fluctuations of international assets and stock indexes.

Научное издание

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ' 2012

Утверждено к печати Институтом прикладной физики РАН,
603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46

Редакторы *И. А. Кокорина, Н. Н. Кралина*
Верстка *М. В. Башевой, А. А. Ереминой*
Технический редактор *Д. П. Семенова*

Подписано к печати 5.11.2013 г.
Формат 60×90 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Усл. печ. л. 29,0. Уч.-изд. л. 27,0. Темплан 2013 г. Поз. 1. Тираж 300 экз.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГУП ППП «Типография “Наука”», АИЦ РАН
121099 Москва, Шубинский пер., 6

Заказ №