МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ВТОРАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

(Самара, 29 августа – 4 сентября 2010 г.)

STEKLOV MATHEMATICAL INSTITUTE
OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF RUSSIAN FEDERATION
SAMARA STATE UNIVERSITY

САМАРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Математический институт
им. В.А. Стеклова
Российской Академии наук

MATHEMATICAL PHYSICS AND ITS APPLICATIONS

The Second International Conference
(Samara, August 29 – September 4, 2010)

Book of Abstracts

Editors: I.V. Volovich, Yu.N. Radayev

"Kniga" Publishers
Samara
2010

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

САМАРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Математический институт
им. В.А. Стеклова
Российской Академии наук

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Вторая международная конференция
(Самара, 29 августа – 4 сентября 2010 г.)

Материалы конференции

Под редакцией чл.-корр. РАН И.В. Воловича
и д.ф.-м.н., проф. Ю.Н. Радаева

Самара
Издательство "Книга"
2010

УДК 517+519+530/539
ББК 22.1+22.2

Вторая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: Материалы Межд. конф. / Под ред. чл.-корр. РАН И.В. Воловича и д.ф.-м.н., проф. Ю.Н. Радаева. – Самара: Изд-во «Книга», 2010. – 367 с.

ISBN 978-5-91899-018-6

Настоящее издание содержит материалы научных докладов, представленных на Вторую международную конференцию «Математическая физика и ее приложения» (г. Самара, 29 августа – 4 сентября 2010 г.), организованную Математическим институтом им. В.А. Стеклова Российской академии наук и Самарским государственным университетом.

Научная программа конференции включает актуальные вопросы математической физики по следующим направлениям: уравнения математической физики и математические модели наносистем; p-адическая математическая физика; механика и теория сплошных сред, гравитация; квантовая теория поля и суперструны; физика высоких энергий; приложения математической физики в химии, биологии, экономике, информатике.

Представлены как фундаментальные, так и прикладные области математической физики, механики и физики, а также p-адический и ультраметрический анализ, некоторые разделы бесконечномерного анализа, современные геометрические и алгебраические методы, квантовая вероятность.

Материалы сборника предназначены для специалистов в области математической физики, математики и механики, а также студентов, аспирантов и научных сотрудников, интересующихся приложениями математической физики в различных областях научных знаний.

Редакционная коллегия:
чл.-корр. РАН И.В. Волович (отв. редактор),
д.ф.-м.н., проф. В.А. Ковалев (отв. секретарь),
д.ф.-м.н., проф. Ю.Н. Радаев (отв. редактор).

Технический редактор:
к.ф.-м.н. С.А. Пантелеев.

Вторая международная конференция «Математическая физика и ее приложения» (г. Самара, 29 августа – 4 сентября 2010 г.)организована и проводится в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (ГК 02.741.12.2173), ведомственной программы Министерства образования и науки РФ (грант АВЦП 3341) и при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 10-01-06039-г (организация и проведение Второй международной конференции по математической физике и ее приложениям) и программы Отделения математики РАН "Современные проблемы теоретической математики".

ISBN 978-5-91899-018-6

© Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2010
© Самарский государственный университет, 2010

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ:

Л. Аккарди (Римский университет, Италия)
Н. Ватанабе (Токийский университет, Япония)
К.С. Вишванатан (Университет Саймон Фрезера, Канада)
В.С. Владимиров (МИАН)
И.В. Волович (МИАН)
Ге Мо Лин (Нанкайский университет, Китай)
Б. Драгович (Институт физики, Белград, Сербия)
Е.А. Дынин (Калифорнийский университет, США)
В.А. Загребнов (Университет Марселя, Франция)
Р. Кернер (Парижский университет, Франция)
В.В. Козлов (МИАН)
Е.Л. Коган (Университет Оклахома, США)
А.Н. Кочубей (Математический институт, Киев, Украина)
М. Ойя (Токийский университет, Япония)
А.Н. Печень (Принстонский университет, США)
В.П. Фролов (Университет Альберта, Канада)
А.Ю. Хренников (Университет Вексио, Швеция)

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ:

И.В. Волович (председатель оргкомитета, МИАН)
Ю.Н. Радаев (зам. председателя, СамГУ)
М.В. Долгополов (ученый секретарь, СамГУ)
С.В. Козырев (ученый секретарь, МИАН)

В.А. Аветисов (ИХФ РАН)
А.А. Андреев (СамГУ)
И.Я. Арефьева (МИАН)
В.А. Березин (ИЯИ РАН)
А.Х. Бикулов (ИХФ РАН)
А.А. Бирюков (СамГУ)
В.П. Гарькин (СамГУ)
А.К. Гущин (МИАН)
Ю.Н. Дрожжинов (МИАН)
И.П. Завершинский (СГАУ)
Е.И. Зеленов (МИАН)
А.П. Зубарев (СГАСУ)
М.Г. Иванов (МФТИ)
В.В. Ивахник (СамГУ)
Н.Л. Казанский (СГАУ)
М.О. Катанаев (МИАН)
В.А. Ковалев (МГУУ)
Л.Ю. Коссович (СГУ)
А.Ф. Крутов (СамГУ)
Ю.Н. Лазарев (СНЦ РАН)
А.В. Манжиров (ИПМех РАН)
А.П. Мартыненко (СамГУ)
И.А. Носков (СамГУ)
А.Л. Петров (СФ ФИАН)
Е.В. Радкевич (МГУ)
В.П. Радченко (СГТУ)
Л.А. Сараев (СамГУ)
А.Г. Сергеев (МИАН)
О.Г. Смолянов (МГУ)
С.А. Смолянский (СГУ)
В.А. Сойфер (СГАУ)
В.О. Соколов (СНЦ РАН)
С.В. Червон (УлГПУ)
Г.П. Яровой (СамГУ)

Содержание

Аветисов В.А., Бикулов А.Х., Зубарев А.П. p-Адическая модель динамического прототипа биологической нано-машины 14
Андреев А.А., Лексина С.В., Шибельбаин Г.А. Решение задачи управления для матричного волнового уравнения в прямоугольной области 17
Андреев А.А., Максимова Е.А. Построение матрицы Римана для одного класса систем гиперболических уравнений 18
Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Об устойчивости решений уравнений взаимодействия упругих стенок каналов с протекающей жидкостью . 20
Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Семенова Е.П. О решениях интегро-дифференциальных уравнений в задаче о динамике одной аэроупругой системы типа "тандем" 23
Анофрикова Н.С., Шевцова Ю.В. Асимптотические приближения трехмерных уравнений вязкоупругости для случая двухслойных пластин . 26
Арефьева И.Я. Математические вопросы описания рождения черных дыр и кротовых нор на больших коллайдерах и теория суперструн и бран 28
Башкиров Е.К., Липатова С.П. Сжатие света в двухфотонных процессах излучения атомов в резонаторе 30
Башкиров Е.К., Сочкова Е.Ю. Перепутывание в двухфотонной двухатомной модели 31
Башкиров Е.К., Ступацкая М.П. Перепутывание в вырожденной двухфотонной модели Тависа—Каммингса 32
Башкиров Е.К., Тарельник Е.С. Атом–полевое перепутывание в модели Тависа–Каммингса с учетом штарковского сдвига энергетических уровней 34
Батищева Я.Г., Веденяпин В.В., Мелихов И.В. Движение крупных частиц, реагирующих с газом 37
Бельгарт Л.В., Романовский Р.К. Дихотомия решений задачи Коши для почти периодической гиперболической системы на плоскости . . . 39
Белевич М.Ю. Причинно-обусловленное описание диффузии 41
Белоглазов Г.С., Элисадики Дж. Квантово-химическое моделирование адсорбционного механизма действия ингибиторов коррозии, обладающих гербицидным и биоцидным действием 44
Беляев Ю.Н. Матричный метод расчета перерассеяния волн в периодической структуре 47
Беляева Н.А. Структурные модели деформирования полимерных и композитных материалов 49
Беляева Н.А., Кузнецов К.П. Бифуркационный анализ куэттовского течения структурированной жидкости в области сверханомалии 51
Бениаминов Е.М. Волны в фазовом пространстве, диффузионное уравнение Крамерса для волны и уравнение Шредингера 53
Бирюков А.А. Уравнения квантовой теории и вероятности совместных событий 55
Бирюков А.А., Шлеенков М.А. Описание эволюции квантовой системы методом функционала влияния 56
Бобрик А.Л., Горбацевич А.К. Движение двойной звезды во внешнем гравитационном поле 57

Богданова С.Б., Гладков С.О. Обобщенное кинетическое уравнение для описания физических свойств металлических квазитрехмерных структур . . . 59
Борматова Е.П. Температурные зависимости в задаче водородопроницаемости . . . 61
Бородинова И.А., Ильина А.И., Сизова Н.А., Трусова А.Ю. Многомерные статистические методы в маркетинговых исследованиях . . . 63
Брызгалов А.А., Карманов Ф.И. Разработка и использование вариационного базиса в задачах с ограниченным движением частиц . . . 66
Бузова М.А. Исследование свойств ядра интегрального уравнения Фредгольма второго рода, имеющего смысл граничного условия для тангенциальной компоненты магнитного поля, в задачах о рассеянии на идеально проводящих рассеивателях конечной толщины . . . 67
Буралхиева Н.С. Решение динамического уравнения Дюгамеля–Неймана для нахождения компонентов вектора смещений возникающие вследствие температурного поля при очаге подземного толчка . . . 70
Бутко Я.А. Формулы Фейнмана, Фейнмана–Каца и гамильтоновы интегралы Фейнмана для эволюционных уравнений . . . 71
Быков Д.А., Досколович Л.Л., Сойфер В.А. Магнитооптические свойства симметричных периодических дифракционных структур . . . 74
Бытев В.О., Слезко И.В. Асимметричная упругость . . . 76
Васильев В.Б. Асимптотическое поведение решения эллиптического псевдодифференциального уравнения вблизи особой точки границы . . . 79
Веденяпин В.В., Негматов М.А. Уравнения Власова–Максвелла, теорема Лагранжа и магнитная гидродинамика . . . 80
Владимиров В.С. Математические вопросы теории нелинейных уравнений p-адических струн . . . 81
Волкова Т.В., Долгополов М.В., Дубинин М.Н., Петрова Е.Ю., Рыкова Э.Н. Исследование фазовых переходов для моделей с расширенным сектором Хиггса и наблюдаемые следствия для физики на большом адронном коллайдере и космологии . . . 82
Волович И.В. Проблема необратимости, функциональная механика и уравнения типа Боголюбова . . . 86
Волынская М.Г. Нелокальная задача для вырождающегося гиперболического уравнения . . . 88
Воробьев С.А. Деформирование прямоугольной в плане цилиндрической сэндвич панели при ударном воздействии . . . 90
Гамзова Е.С., Крутов А.Ф., Троицкий В.Е. Асимптотическое поведение формфактора составных систем при больших переданных импульсах . . . 92
Гарипов И.Б., Мавлявиев Р.М., Нураниева С.М., Хусаинова Э.Д. Единственность решения B-эллиптического уравнения высшего порядка с младшими членами . . . 94
Гладков С.О., Богданова С.Б. О магнитной восприимчивости фрактальных ферромагнитных структур . . . 97
Горохов А.В., Семин В.В. Квантовая немарковская динамика атомных систем . . . 100
Грошев О.В. Задача Коши для волнового уравнения на неглобально гиперболических многообразиях . . . 102

Гурьянов А.М., Лебедев В.М. Исследование процесса гидратации цемента методом малоуглового рассеяния нейтронов 103
Гусев Н.А. Об аппроксимации несжимаемой жидкости слабо сжимаемой . 105
Гущин А.К. О разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с граничной функцией из L_p 107
Джураев Х.Ш. О регуляризирующем алгоритме решений многомерных задач Коши для эллиптических дифференциальных уравнений 109
Дмитриев А.Ю., Досколович Л.Л., Казанский Н.Л. Расчет преломляющих поверхностей для формирования заданных диаграмм направленности 111
Дрожжинов Ю.Н. Некоторые применения асимптотически однородных обобщенных функций 114
Дурдив Д.К., Жумаев Ж.Ж. Задача определения нестационарного коэффициента поглощения 115
Завершинский И.П., Молевич Н.Е., Порфирьев Д.П. Структура высокоскоростного закрученного потока в присутствии газового разряда 117
Завьялов Б.И. Обобщенные функции, асимптотически однородные относительно однопараметрических групп преобразований 119
Зайцев В.В. Метод эквивалентной линеаризации и нелинейная динамика систем в дискретном времени 120
Зайцев В.В., Агибалов С.А. О синхронизации вольтерровых циклов . . 122
Зарубин А.Н. Метод решения задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в неограниченной области 123
Зеленов Е.И. p-адическое квантование Конна 125
Зубарев А.П., Пивоварова А.С., Стеряков А.А. Иерархическая модель финансовых крахов Джохансена—Сорнетта и ее ультраметрическое обобщение 126
Жаринов В.В. Дифференциально-разностный бикомплекс 129
Журавлев В.М. О топологической интерпретации электрического заряда и ее квантовомеханических следствиях 130
Журавлев В.М., Зиновьев Д.А., Самойлов В.В., Хасанов И.Ш. Метод обобщенных подстановок Коула–Хопфа и многомерные нелинейные уравнения 131
Журавлев В.М., Корнилов Д.А. Построение точных решений уравнений Лиувилля в многомерных пространствах методом погружения в расширенное комплексное пространство 133
Ипатов Е.Б. Моделирование структуры радиосигналов в неоднородной ионосфере земли 135
Ипатова В.М. Разрешимость совместной модели атмосферы и океана . . . 138
Исламов Г.Г. Свойства проекции квантово-механического объекта 141
Исмагилова Р.Р. Система интегральных уравнений Абеля 143
Казакова Ю.А. О некоторых классах решений уравнений аэрогидромеханики 144
Кайракбаев А.К. Об одной математической модели полимеризационного процесса 146
Калинин М.И. О термодинамическом предельном переходе в равновесном классическом каноническом ансамбле 148
Кальмова М.А., Павлов Г.В. Устойчивость движения диска на реологическом основании 149

Канин Д.Л. Вторичное квантование на супермногообразиях 151
Каракулина Е.О. Моделирование роста трещины в зернистом материале 152
Катанаев М.О. Адиабатическая теорема и геометрическая интерпретация фазы Берри 153
Кетова К.В., Трушкова Е.В. Разработка алгоритма решение задачи маршрутизации 154
Ковалев В.А., Мельников А.Д., Радаев Ю.Н. О гиперболических уравнениях связанного микрополярного термоупругого поля 156
Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика 165
Ковалев В.А., Ревинский Р.А. Динамика трехслойных термовязкоупругих оболочек 168
Ковалева Е.Д., Сидоренко В.Н., Солодовникова Е.А. Применение моделей хаотической динамики в моделировании экономики регионов России 170
Коваленко Л.В., Попов Н.Н. Построение аналитического решения плоской стохастической нелинейной краевой задачи установившейся ползучести с учетом граничных эффектов 172
Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. Убывание решения квазилинейного параболического уравнения 173
Козлов В.В. Кинетическое уравнение Власова, динамика сплошных сред и турбулентность 176
Козлова Е.А. Специальные решения системы уравнений Геллерстедта . . 177
Козырев С.В. Квантовый вывод формулы Аррениуса 178
Коптев А.В. Общий интеграл уравнений Навье–Стокса 179
Косых Э.Г. Изгиб тонкостенного стержня переменного по длине контура, в рамках гипотез Власова 181
Краснобаев И.О. Условие на мнимые части точек последовательности как критерий полноты системы экспонент в пространствах C_0 И L^p 183
Кривоносов Л.Н., Лукьянов В.А. Уравнения Янга–Миллса, гравитация и электромагнетизм 184
Крупенников А.В. Нелинейная задача о движении газа между вращающимися плоскостями 187
Крутов А.А., Мартыненко А.П. Сверхтонкая структура атома мюонного гелия 189
Кубасов А.С. Новый метод построения инфляционных решений в киральной космологической модели 192
Курушина С.Е. Исследование эволюции стохастических систем типа "реакция–диффузия" в окрестности точки бифуркации Тьюринга 194
Курушина С.Е., Максимов В.В. Устойчивость стохастической системы Шеффера вблизи точки бифуркации Тьюринга 195
Курьянович Э.А. Релятивистское броуновское движение 197
Лаврова Т.Б. Построение принципиально реализуемого участка "падающей" диаграммы деформирования для материала типа Треска 198
Лежнев В.Г., Марковский А.Н. Проекционный алгоритм краевой задачи неоднородного уравнения ламе 200
Леоненко Д.В. Колебание трехслойного стержня с учетом диссипации энергии 203
Лыков К.В. О проблеме моментов в симметричных пространствах 204

Мамадалиев Н., Тухтасинов М. К задаче преследования при наличии запаздывания . . . 206
Манжиров А.В. Смешанные интегральные уравнения и их приложения . 209
Мартемьянова Н.В. Обратная задача для вырождающегося уравнения смешанного типа . . . 215
Мартыненко А.П., Салеев А.В. Дважды тяжелые барионы в квазипотенциальной кварковой модели . . . 217
Мартыненко А.П., Трунин А.М., Элекина Е.Н. Парное рождение чармония в электрон-позитронной аннигиляции . . . 220
Мартыненко А.П., Элекина Е.Н. Вклад поляризуемости протона в сверхтонкую структуру мюонного водорода . . . 223
Марчук Н.Г. К вопросу о массах фермионов в теории поля . . . 226
Мелишева Е.П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа . . . 227
Минаждинова Л.А. Бесконечномерные пуассоновские процессы и уравнения типа Дирака . . . 230
Мирсабуров М., Рузиев М.Х. О разрешимости одной задачи для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области . . . 231
Митрохин С.И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора шестого порядка с суммируемым потенциалом с разрывной весовой функцией . . . 233
Михайлов А.И. Функциональная механика: эволюция моментов функции распределения и теорема о возвращении . . . 236
Михайлова Е.В., Авряскина М.С. Рекуррентные методы построения кумулятивных функций риска . . . 239
Михайлова Е.В., Никишов В.Н. Применение доверительной теории Бюльмана–Штрауба для анализа рентабельности . . . 242
Молчатский Л.С., Панков В.Д. Нейтрон-антинейтронные осцилляции в солнечных космических лучах . . . 245
Обрубов К.С., Журавлев В.М. Дифференциально-алгебраические подстановки Коула—Хопфа и интегрируемые дискретные динамические системы . . . 247
Огородников Е.Н. О двух специальных функциях, обобщающих функцию типа Миттаг-Леффлера, их свойствах и применении . . . 248
Огородников Е.Н., Яшагин Н.С. Постановка и решение начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с волновым оператором и младшими дробными производными Римана–Лиувилля . . . 250
Огородников Е.Н., Радченко В.П., Яшагин Н.С. Реологические модели вязко-упругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов . . . 253
Островская Н.В., Полякова В.В., Попков А.Ф. Математическая модель трехслойной переключательной наноструктуры . . . 256
Панина О.Г., Червон С.В. Точные космологические решения для фантомных и тахионных полей . . . 258
Пеньков В.Б., Стебенев И.Н. Метод граничных состояний в решении задач вынужденных колебаний упругого изотропного тела . . . 260
Пешин С.В. Взаимодействие живых систем и задача распознавания в деформируемых пространствах . . . 262

Писковский Е.В. Исследование некоторых модельных систем классической механики в рамках функционального подхода 263
Попов Н.Н., Радченко В.П. Класс аналитических решений для стохастических нелинейных осесимметричных краевых задач установившейся ползучести 264
Потапов А.А. Фрактальные модели и методы на основе дробных операторов и скейлинга в фундаментальных и прикладных проблемах физики 266
Потапов А.А., Чернышев С.Л. Применение фигурных чисел для моделирования решетчатых упаковок 269
Пыркова О.А. Влияние перемежаемости на продольный корреляционный коэффициент 2-го порядка со временем 272
Радионов А.А., Тлячев Т.В., Чеботарев А.М. Сжатые состояния и их применение в задачах квантовой эволюции 274
Радкевич Е.В. Смешанная задача для систем законов сохранения. Проблемы корректности. 277
Расулов Т.Х., Рахмонов А.А. Существенный спектр одного трехчастичного модельного оператора 278
Расулов Т.Х., Турдиев Х.Х. Пороговые явление для обобщенной модели Фридрихса 281
Репин О.А., Кумыкова С.К. Нелокальная задача для системы уравнений первого порядка Лыкова 284
Родионова И.Н. Краевые задачи для одного пространственного аналога гиперболического уравнения, вырождающегося на координатных плоскостях 286
Ротерс П.В. Анализ продуктивности двоякопериодических систем добывающих скважин 288
Рудой Ю.Г., Вернигора И.А. Приближенное расширение лоренцевой симметрии до конформной для массивных частиц в пределе сверхвысоких энергий 290
Рыжак Е.И. О нарушении неравенства Адамара при упрочнении материала 292
Сакбаев В.Ж. О динамике квантовых состояний квантовой системы с вырожденным гамильтонианом 293
Салеев В.А., Шипилова А.В. Ассоциативное рождение кварков в квазимульти-реджевской кинематике на коллайдерах высоких энергий . . . 296
Самарин А.Ю. Динамика процесса перехода между состояниями дискретного спектра 297
Сайганова С.А. Решение в явном виде нелокальной задачи для дифференциального уравнения с частной дробной производной Римана—Лиувилля 298
Свистунова Ю.А., Червон С.В. Метод изометрических погружений в сферически-симметричной нелинейной сигма модели 300
Сергеев А.Г. Гипотеза о гармонических сферах 302
Сергеев Я.Д. Численные вычисления с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами: описание подхода, приложения и демонстрация работы компьютера 303
Сибатов Р.Т., Учайкин В.В. Стохастическая модель лазерного охлаждения атомов 306

Сивакова К.П. Моделирование процесса эндотаксии для получения полупроводниковых гетероструктур карбида кремния на кремнии с требуемыми параметрами . . . 308
Симонов П.М., Вагин А.А. Оптимальное развитие в моделях экономики с использованием управляемой производственной функции . . . 309
Сироченко В.П. О математических моделях динамики вязкой жидкости с использованием завихренности . . . 311
Скороход А.В. Краевые задачи для уравнения смешанного типа с нелокальными условиями сопряжения . . . 313
Смолянов О.Г. Бесконечномерные уравнения Лиувилля в статистической механике . . . 315
Спиридонова Е.В., Белобородова С.В. Математическая модель развития расклинивающей трещины в нарушенном материале . . . 317
Старовойтов Э.И., Протуро И.И. Неупругое деформирование трехслойной ортотропной пластины . . . 318
Степанова Л.В. Анализ напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины в материале со степенным определяющим законом . . . 321
Талалов С.В. Струны на плоскости: косы особенностей и спектральные задачи . . . 324
Топко Л.В. Решение задачи оптимального в среднем граничного управления нефтепроводом . . . 326
Трушечкин А.С. Уравнение типа Больцмана и H-теорема в функциональной формулировке классической механики . . . 328
Учайкин В.В. Дробно-дифференциальные уравнения ускорения космических лучей в межзвездной среде . . . 329
Филиппов Ю.П. Плотности потоков газовой и пылевой фракций внутренней комы кометы 67P/Churyumov–Gerasimenko вблизи перигелия . . . 332
Фомин И.В. Космологическая инфляция в моделях гравитации с высшими производными . . . 334
Холкина Н.А. Влияние анизотропного распределения повреждений для осесимметричной задачи математической теории пластичности . . . 336
Чугунов А.И., Horowitz C.J. Разрывное напряжение коры нейтронной звезды . . . 338
Шамаров Н.Н. Формулы Фейнмана и Фейнмана–Каца для уравнений в функциональных p-адических пространствах . . . 339
Шелкович В.М. Дельта-ударные волны в системе уравнений гидродинамики гранулированного газа . . . 341
Широков Д.С. Структура евклидова и унитарного пространства на системах гиперкомплексных чисел . . . 344
Шляпин В.А., Миронов В.В., Журавлев В.М., Корнилов Д.А. Метод максимальной энтропии в теории случайно-возмущенных нелинейных динамических систем . . . 345
Щиголев В.К. Классические и квантовые космологические модели с дробными производными . . . 346
Яшагин Н.С. Решение задач типа Коши для дифференциального уравнения второго порядка с произвольным числом младших дробных производных путем факторизации интегрального оператора . . . 348

Beloglazov G.S. Modelling of Adsorption of Molecules of Organic Substances Acting as Inhibitors of Corrosion and Hydrogen Absorption by Metals Using Quantum Chemistry 350
Dudnickova T.V. The Derivation of Hydrodynamic Equations for Harmonic Crystals 352
Gasimov Y.S. On an Optimization Problem with Respect to Domain for the Eigenvalues of the Laplace Operator 354
Ibrogimov O.O., Rasulov T.H. Finiteness of the Number of Eigenvalues of a Block Operator Matrix 356
Iriyama S., Ohya M. Computational Complexity of Quantum Algorithm and Applications 359
Kerner R. Ternary Z_3-graded Algebras as Representation of Quarks 362
Missarov M.D. Renormalization Group in Projective Space Representation . 363
Ryabtsov I.S. An Equivalence to Parseval Frames 365
Sinayskiy I.E., Pumulo N., Petruccione F. Dynamics of Nonequilibrium Thermal Entanglement for Three-Qubit System 366

УДК 519.2+577.3

p-АДИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОТОТИПА БИОЛОГИЧЕСКОЙ НАНО-МАШИНЫ

Аветисов В.А., Бикулов А.Х.[1], *Зубарев А.П.*[2]

В докладе представлены основные идеи нового подхода к математическому моделированию молекулярных машин — макромолекулярных функциональных структур типа "нано-реакторов", осуществляющих высокоселективные химические превращения, и "нано-моторов", преобразующих химическую энергию в механическую. Подход основан на моделировании многомасштабной флуктуационно–динамической подвижности нано–машины ультраметрической диффузией и, соответственно, описании работы машины p-адическими уравнениями вида "реакция–диффузия".

Прототипами молекулярных машин являются биологические функциональные структуры белковой природы. Биологические молекулярные машины, при всем их структурном и функциональном разнообразии, являются, по существу, динамическими системами, осуществляющими управление функциональным процессом на широкой шкале пространственных и временных масштабов — от 10^{-2} нм и 10^{-10} сек и до 10 нм и 10^{0} сек. С физической точки зрения, функциональная динамика машины определяется ее релаксационными характеристиками, т.е. энергетическим ландшафтом молекулярной структуры и ее флуктуационной подвижностью. Энергетические ландшафты биологических нано-машин представляют собой "сильно пересеченные" многомерные гиперповерхности с огромным числом локальных минимумов (условно, 10^{100} или 10^{1000}). По этой причине считается, что аналитическое описание является тут безнадежной задачей, и надежды возлагаются, в основном, на компьютерное моделирование.

Понятно, что для аналитических моделей, если продолжать на них настаивать, требуется упрощение изначально избыточного описания. Наиболее широко представленный подход основан на использовании уравнения Фоккера—Планка, т.е. на предположении, что флуктуационно–динамическая подвижность молекулярной машины имеет некоторый характерный временной масштаб, существенно меньший, чем характерное время рабочего цикла. Это предположение, однако, находится в прямом противоречии с экспериментальными данными, полученными, в частности, для белковых молекул в широком интервале температур (от 1 до 300 K) и времен (от 10^{-10} до 10^{6} сек). Для белковых структур, как оказалось, характерны многомасштабные релаксационные процессы с степенным (а не экспоненциальным) поведением.

Вместе с этим, в серии работ последних лет (см., например, [1–5] было показано, что флуктуационная подвижность белков удивительно хорошо описывается p–адическим уравнением ультраметрической диффузии вида

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = -D_x^{\alpha}\left(B_r\right) f(x,t), \tag{1}$$

где $f(x,t)$ — локально постоянная веществennозначная функция, определенная на подмножестве $B_r = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \le p^r\}$ множества p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, $D_x^{\alpha}(B_r)$ —

[1]Аветисов Владик Аванесович (avetisov@chph.ras.ru), Бикулов Альберт Хакимович (bikulov1903@rambler.ru), Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН, 119991, Россия, г. Москва, ул. Косыгина, 4.

[2]Зубарев Александр Петрович (apzybarev@mail.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

псевдодифференциальный оператор Владимирова на подмножестве B_r:

$$D_x^\alpha(B_r)f(x) = \frac{1-p^\alpha}{1-p^{-\alpha-1}}\,\Omega\left(B_r\right)\int_{B_r} d_p y \frac{f(y)-f(x)}{|y-x|_p^{\alpha+1}},$$

$\Omega\left(B_r\right)$ — характеристическая функция множества B_r. Заметим, что уравнение (1), в отличие от обычного уравнения диффузии, описывает многомасштабный (по времени) однородный марковский процесс (см. [6]). В этой связи представляет интерес исследовать модель, в которой функционально-динамическое поведение машины описывается p-адическими уравнениями типа "реакция–диффузия".

Простейшая схема рабочего цикла молекулярной машины, функция которой заключается в образовании и разрыве химической связи, имеет следующий вид:

$$E_1 + S \to [E_1 S] \to ... \to [E_2 S] \to E_2 \to E_1.$$

Попадая в состояние E_1, машина образует связь с некоторым реагентом (например, некоторой молекулой), релаксирует к состоянию E_2, в котором эта связь разрывается, и затем релаксирует обратно к активному состоянию E_1. Такой функциональный цикл мы описываем системой двух p–адических уравнений вида "реакция–диффузия", заданных на ультраметрическом шаре B_r :

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(x,t) = -D_x^\alpha\left(B_r\right)f_1(x,t) + \lambda_1\Omega\left(\mathbb{Z}_p\right)f_2(x,t) - \lambda_2\Omega\left(B_0(a)\right)f_1(x,t), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f_2(x,t) = -D_x^\alpha\left(B_r\right)f_2(x,t) - \lambda_1\Omega\left(\mathbb{Z}_p\right)f_2(x,t) + \lambda_2\Omega\left(B_0(a)\right)f_1(x,t) \qquad (3)$$

Здесь D_x^α оператор Владимирова (степени α), функции $f_1(x,t)$ и $f_2(x,t)$ определены в B_r, $\mathbb{Z}_p \subset B_r$, $B_0(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \le 1\}$, $a \in \mathbb{Q}_p$, причем $1 < |a|_p < p^r$, и λ_1, λ_2 кинетические параметры реакции образования и разрыва связи, соответственно.

Функции $f_i(x,t)$, $i = 1,2$ есть плотности вероятности найти машину в состоянии $x \in \mathbb{Q}_p$ в момент времени t ($i = 1$, когда рассматриваемая химическая связь существует, и $i = 2$, когда она отсутствует). В состояниях $x \in \mathbb{Z}_p$ связь образуется, а в состояниях $x \in B_0(a)$ она разрывается.

Свойства модели устанавливаются из решения задачи Коши для уравнений (2)–(3) с начальным условием

$$f_1(x,0) = \Omega\left(\mathbb{Z}_p\right), \quad f_2(x,0) = 0.$$

Однако ряд характеристик рабочего цикла, в частности, так называемую "функциональную активность" (соотношение вероятностей находиться в связанном и несвязанном состояниях), можно оценить из стационарного решения. При этом, особый интерес представляет вопрос об управляемости машины, т.е. чувствительности стационарных распределений $f_1(x)$, $f_2(x)$ к вариациям параметров $K = \{\lambda_1, \lambda_2, \alpha, a\}$ модели. Для исследования этого вопроса, мы изучали поведение производных $f_i(x,K)$ по K в выбранных точках x. Наиболее интересное поведение обнаружилось для производных $f_1(x)$, $f_2(x)$ по α. Оказалось, что функциональная активность машины резко меняется только в некотором достаточно узком интервале значений α. Заметим, что параметр α задает иерархию характерных времен для переходов между состояниями молекулярной машины, т.е характеризует флуктуационную подвижность машины. Таким образом, используя модель (2)–(3), удается показать, что управляя подвижностью молекулярной машины можно осуществлять селективное управление ее функцией. Подобные эффекты наблюдались для белков.

Представленная работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 09–01–12161–офи-м), ведомственной программы Министерства образования и науки РФ (грант АВЦП 3341) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (контракт 2173).

Литература

[1] Avetisov V.A., Bikulov A.Kh., Kozyrev S.V. Application of p-adic analysis to models of spontaneous breaking of replica symmetry // Journal of Physics A. – 1999. – V. 32. – P. 8785–8791.

[2] Avetisov V.A., Bikulov A.Kh., Kozyrev S.V., Osipov V.A. p-Adic Models of Ultrametric Diffusion Constrained by Hierarchical Energy Landscapes // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – V. 35. – P. 177–189.

[3] Avetisov V.A., Bikulov A.Kh. Osipov V.A. p-Adic description of characteristic relaxation in complex systems // J. Phys. A: Math. Gen. – 2003. – V. 36. – P. 4239–4246.

[4] Avetisov V.A., Bikulov A.Kh. Protein ultrametricity and spectral diffusion in deeply frozen proteins // Biophys. Rev. and Lett. – 2008. – V. 3. – P. 387–396.

[5] Avetisov V.A., Bikulov A.Kh., Zubarev A.P. First passage time distribution and the number of returns for ultrametric random walks // J. Phys. A: Math Theor. – 2009. – V. 42. – P. 085003–08521.

[6] Vladimirov V.S., Volovich I.V. Zelenov E.I. p-Adic Analysis and Mathematical Physics. – Singapure: World Scientific Publishing (1994).

УДК 517.99

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЧНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Андреев А.А., Лексина С.В., Шибельбаин Г.А.[1]

Рассмотрено матричное волновое уравнение в прямоугольной области $Q_{l,T}$ с начальными условиями $(t = 0)$ и финальными условиями $(t = T)$. Управление процессом происходит с помощью вектор-функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$, заданных на концах $x = 0$ и $x = l$ соответственно. Задача управления состоит в том, чтобы для произвольных наперед заданных функций, определяющих начальные и финальные условия, установить условия существования граничных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$, обеспечивающих переход колебательного процесса из начального состояния в финальное состояние, и получить эти управления в явном виде.

Решение этой проблемы существенно зависит от того, в каком соотношении находятся длина l, промежуток времени T и собственные числа матричного коэффициента. В работах [1, 2] рассмотрена задача граничного управления для гиперболической системы второго порядка с двумя независимыми переменными в прямоугольной области $Q_{l,T}$, где $T < \dfrac{l}{\lambda}$, λ — собственное значение матрицы системы. В данной работе рассматривается случай безусловной управляемости, т.е. случай когда $T > \dfrac{l}{\lambda}$, где $\lambda = \max\{\lambda_i\}$, λ_i — различные действительные, положительные собственные значения матрицы волнового уравнения. Решение задачи граничного управления строится как решение соответствующей краевой задачи с заданными начальными условиями и с такими граничными условиями, которые обеспечивают выполнение финальных условий.

В ходе исследования матричного волнового уравнения получены условия существования и явный аналитический вид решения задачи о полном успокоении системы в условиях первой краевой задачи. При решении задачи граничного управления для матричного волнового уравнения были существенно использованы результаты В.А. Ильина [3].

Литература

[1] Андреев А.А., Лексина С.В. Система волновых уравнений с граничными управлениями первого рода // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Физико-математические науки". – Вып. 2. – 2008. – С. 10–21.

[2] Андреев А.А., Лексина С.В. Система волновых уравнений с граничными управлениями на двух концах // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2008. – №8/1(67). – С. 21–34.

[3] Ильин В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35. – №11. – С. 1517–1534.

[1] Андреев Александр Анатольевич (andre@ssu.samara.ru), Лексина Светлана Валентиновна (lesveta@rambler.ru), Шибельбаин Галина Алексеевна (Shibelbain-GA@mail.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

УДК 517.9

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ РИМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Андреев А.А.,[1] *Максимова Е.А.*[2]

Известно, что одним из основных вкладов в начало современной теории гиперболических уравнений в частных производных было положено Б. Риманом, получившим изящное интегральное представление решения задачи Коши в форме, аналогичной представлениям решщений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка с помощью функции Грина. Этот метод предполагал существавание вспомогательной функции, так называемой функции Римана, обладающей определенными свойствами.

В докладе приводится обзор:

1) известных методов построения функции Римана для гиперболических уравнений и делается попытка систематизации всех известных ранее результатов от Б. Римана [5] до последнего времени.
2) различных обобщений метода Римана на гиперболические уравнения второго порядка с числом неизвестных переменных больше двух, начиная с работ Адамара [1] и Вольтерра [6]; на гиперболические уравнения порядка выше второго с числом переменных равным двум [4]; на системы уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными [3]; на один класс систем уравнений гиперболического типа [2]; на один класс уравнений высшего порядка, когда порядок уравнения совпадает с числом независимых переменных.

В заключение доклада рассмотрен один класс систем гиперболических уравнений со слабосингулярными характеристиками с двумя матричными коэффициетами, имеющими различные собственные значения. Полученная матрица Римана рассмотренной системы уравнений выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию двух переменных четвертого порядка.

Литература

[1] Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978.

[2] Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. – М.: Гостехиздат, 1948.

[3] Holmgren E. Sur les systemes lineaires aux derivees partielles du premier ordre â daux variables independents â characteristiques reeles et dictiones // Arkiv för Math., Astr. och Fysik. – 1906. – Bd. 5. – №1.

[4] Rellich F. Verallgemeinerung der Riemannschen Integrations-methode auf Differentialgleichungen n-ter Ordung in zwei Veränderlichen // Math Ann. – 103. – 1930. – P. 249–278.

[1] Андреев Александр Анатольевич (andre@ssu.samara.ru),Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

[2] Максимова Екатерина Алексеевна (katyuha_mak@mail.ru), Самарский государственный технический университет, ул. Молодогвардейская, 244, 443100, г. Самара

[5] Riemann B., Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. – 8(1860). – S. 43–65.

[6] Volterra V. Sur les vibrations der cops elastiques isotropes // Acta Math. – 18. – 1894. – P. 161–232.

УДК 533.6.013.42

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ СТЕНОК КАНАЛОВ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

Анкилов А.В., Вельмисов П.А.[1]

Работа посвящена исследованию динамической устойчивости упругих элементов стенок каналов и трубопроводов, через которые протекает идеальная жидкость. Скорости движения среды предполагаются дозвуковыми. Учитывается запаздывание по времени реакции оснований элементов. Количество и места расположения упругих элементов произвольные.

Принятые в работе определения устойчивости упругого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Механическое поведение материала пластин и оснований описывается как линейными, так и нелинейными моделями упругого тела. Аэрогидродинамическая нагрузка определяется из асимптотических уравнений аэрогидромеханики.

В работе для решения связанных задач аэрогидроупругости используется два подхода.

Первый подход основан на построении решения аэрогидродинамической части двумерной краевой задачи для уравнения Лапласа методами комплексного анализа, при этом аэрогидродинамическая нагрузка (давление жидкости или газа) определяется через функции, описывающие неизвестные прогибы пластин. При подстановке выражения для давления в уравнение колебаний пластин решение задач сводится к исследованию системы связанных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными для функций прогибов.

Второй подход основан на построении решения аэрогидродинамической части задачи разработанными для этого методами, использующими метод Фурье и представление искомых функций (потенциала скорости и прогибов пластин) в виде рядов. При этом аэрогидродинамическая нагрузка также определяется через функции, описывающие неизвестные прогибы пластин, для которых вновь возникает связанная система интегро-дифференциальных уравнений.

Исследование устойчивости проводится на основе построения положительно определенных функционалов, соответствующих этим системам уравнений. Полученные условия устойчивости движения упругих элементов налагают ограничения на скорость потока, значения сжимающих (растягивающих) усилий, коэффициенты жесткости пластин и оснований, коэффициенты демпфирования, а также другие параметры механических систем.

В отличие от задач, рассмотренных в [1], — задач внешнего обтекания пластин и крыловых профилей различной конфигурации, в данной работе рассматриваются задачи внутреннего обтекания каналов и трубопроводов.

В качестве примера в линейной постановке проведем исследование устойчивости стенок канала, когда на входе и выходе из него заданы законы изменения давления, в предположении дозвукового режима обтекания.

[1]Анкилов Андрей Владимирович (ankil@ulstu.ru), Вельмисов Петр Александрович (velmisov@ulstu.ru), кафедра высшей математики Ульяновского государственного технического университета, 432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.

В линейной постановке, соответствующей малым возмущениям однородного потока, направленного вдоль оси x, и малым отклонениям пластин, задача формулируется следующим образом:

$$\Delta Z \equiv Z_{xx} + Z_{yy} = 0, \quad x \in (0,l)\,, y \in (0,y_0)\,, \tag{1}$$

$$Z_y\,(x,0,t) = 0, \quad x \in (0,l)\,, \tag{2}$$

$$Z_y\,(x,y_0,t) = w_{tt}\,(x,t) + 2Vw_{xt}\,(x,t) + V^2 w_{xx}\,(x,t)\,, \quad x \in (0,l)\,, \tag{3}$$

$$Z\,(0,y,t) = Z\,(l,y,t) = 0, \quad y \in (0,y_0)\,, \tag{4}$$

$$L\,(w) = -\rho Z\,(x,y_0,t)\,, \quad x \in (0,l)\,, \tag{5}$$

$$L\,(w) \equiv Dw''''\,(x,t) + \beta_2 \dot{w}''''\,(x,t) + M\ddot{w}\,(x,t) + N\,(t)\,w''\,(x,t) + \beta_1 \dot{w}\,(x,t) + \beta_0 w\,(x,t)\,.$$

Неизвестными функциями являются $w\,(x,t)$ — прогиб вязкоупругой стенки канала и $-\rho Z(x,y,t) = -\rho(\varphi_t(x,y,t) + V\varphi_x(x,y,t))$ — давление жидкости, где $\varphi\,(x,y,t)$ — потенциал скорости жидкости. Индексы x, y, t снизу обозначают производные по x, y, t; штрих и точка — производные по x и t соответственно; ρ — плотность жидкости; V — скорость невозмущенного потока газа, M — погонная масса пластины; N — сжимающая (растягивающая) пластину сила; β_1, β_2 — коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования; β_0 — коэффициент жесткости основания.

В предположении, что концы пластин закреплены шарнирно $(w = w'' = 0)$, функция $Z\,(x,y,t)$ представляется в виде ряда

$$Z\,(x,y,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l\rho \operatorname{ch}(\lambda_k y_0)} \int_0^l L\,(w) \sin(\lambda_k \tau)\, d\tau \right) \left[e^{\lambda_k y} + e^{-\lambda_k y} \right] \sin(\lambda_k x)\,,\ \lambda_k = \frac{k\pi}{l}.$$

Уравнения и условия (1), (2), (4), (5) выполняются. Подставляя $Z\,(x,y,t)$ в условие (3), решение задачи можно свести к исследованию уравнения

$$\ddot{w} + 2V\dot{w}' + V^2 w'' = -\frac{2}{l\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin(\lambda_k x) \operatorname{th}(\lambda_k y_0) \int_0^l L\,(w) \sin(\lambda_k \tau)\, d\tau. \tag{6}$$

Исследование устойчивости проводится на основе функционала:

$$\Phi\,(t) = \frac{2}{\rho l} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \operatorname{cth}(\lambda_k y_0) \left[\left(D\lambda_k^4 - N\lambda_k^2 + \beta_0 \right) \left(\int_0^l w \sin(\lambda_k x)\, dx \right)^2 + \right.$$
$$\left. + M \left(\int_0^l \dot{w} \sin(\lambda_k x)\, dx \right)^2 + \int_0^l \left(\dot{w}^2 - V^2 w'^2 \right) dx. \right.$$

Пусть выполнены неравенства $D > 0$, $\beta_0 > 0$, $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$, $\dot{N} \geq 0$. Тогда для функции $w\,(x,t)$, являющейся решением уравнения (6), получим $\dot{\Phi}\,(t) \leq 0$, $\Phi\,(t) \leq \Phi\,(0)$.

Согласно неравенству Буняковского имеем

$$w^2\,(x,t) \leq l \int_0^l w'^2\,(x,t)\, dx.$$

Пользуясь этим неравенством и предполагая, что выполняется условие

$$N \leq \frac{D\pi^2}{l^2} + \frac{\beta_0 l^2}{\pi^2} - \frac{l^2 \rho \operatorname{th}(\pi y_0/l)}{2\pi} V^2,$$

получим следующую оценку:

$$\inf_k \left[\frac{2\lambda_k \operatorname{th}(\pi y_0/l)}{l^2 \rho} \left(D\lambda_k^2 - N + \frac{\beta_0}{\lambda_k^2} - V^2 \right) \right] w^2 \leq \Phi(0).$$

Из этого неравенства следует, что решение $w(x,t)$ уравнения (6) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений $\dot{w}(x,0)$, $w''(x,0)$.

Полученные условия налагают ограничения на скорость однородного потока, сжимающее (растягивающее) усилие и другие параметры механической системы. Область устойчивости на плоскости (V,N) ограничена прямой $V=0$ и ветвью параболы $N = c - bV^2$, $b>0$, $c>0$.

Работа является продолжением исследований, проведенных в монографиях [2, 3], и выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (2009–2013 гг.), ГК №1122, а также поддержана грантом РФФИ №09-01-97005.

Литература

[1] Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Устойчивость решений некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Вестник Самарского государственного университета. – Самара, 2008. – №8/1(67). – С. 331–344.

[2] Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Устойчивость вязкоупругих элементов стенок проточных каналов. – Ульяновск: Ульяновский государственный технический университет (УлГТУ), 2000. – 115 с.

[3] Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д., Покладова Ю.В. Математическое моделирование механической системы "трубопровод – датчик давления". – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 188 с.

УДК 533.6.013.42

О РЕШЕНИЯХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ДИНАМИКЕ ОДНОЙ АЭРОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ ТИПА "ТАНДЕМ"

Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Семенова Е.П.[1]

Рассматривается плоская задача аэрогидроупругости о малых колебаниях системы двух упругих пластин типа "тандем" (расположенных последовательно друг за другом вдоль одной линии) при дозвуковом обтекании их потоком идеальной несжимаемой среды (жидкости или газа). В состоянии покоя пластинам в физической плоскости xOy соответствуют на оси Ox отрезки $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$, $a_2 > b_1$. В бесконечно удаленной точке скорость газа равна V и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox. Предполагается, что прогибы пластин и возмущение однородного потока малы, то есть $\bar{w}_k(x,t) = \varepsilon w_k(x,t)$, $\bar{\varphi}(x,y,t) = Vx + \varepsilon\varphi(x,y,t)$, $\varepsilon \ll 1$, $k = 1,2$. Здесь $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$ и $\bar{\varphi}$ — соответственно прогибы и потенциал скорости возмущенного потока газа; x, y — декартовы координаты, t — время.

Потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x,y) \in G = R^2 \setminus ([a_1,b_1] \cup [a_2,b_2]), \tag{1}$$

условию отсутствия возмущений в бесконечно удаленной точке

$$\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2\right)_\infty = 0 \tag{2}$$

и линеаризованным граничным условиям

$$\varphi_y^{\pm} = \dot{w}_1 + Vw_1', \quad x \in (a_1,b_1), \quad \varphi_y^{\pm} = \dot{w}_2 + Vw_2', \quad x \in (a_2,b_2), \tag{3}$$

где $\varphi_y^{\pm} = \lim\limits_{y \to 0 \pm 0} \varphi_y(x,y,t)$. В формулах (3) и далее точка обозначает производную по t, а штрих — производную по x.

Уравнения малых колебаний пластин можно записать в виде

$$L_1(w_1) = \rho\left(\varphi_t^+ - \varphi_t^-\right) + \rho V\left(\varphi_x^+ - \varphi_x^-\right), \quad x \in (a_1,b_1), \ y = 0; \tag{4}$$

$$L_2(w_2) = \rho\left(\varphi_t^+ - \varphi_t^-\right) + \rho V\left(\varphi_x^+ - \varphi_x^-\right), \quad x \in (a_2,b_2), \ y = 0; \tag{5}$$

$$L_k(w_k) \equiv M_k\ddot{w}_k + D_k w_k'''' + N_k w_k'' + \delta_k \dot{w}_k'''' + \beta_k \dot{w}_k + \gamma_k w_k,$$

где M_k, D_k, N_k, δ_k, β_k, γ_k — некоторые постоянные ($k = 1,2$).

Выразим потенциал $\varphi(x,y,t)$ через функции прогиба $w_k(x,t)$. С этой целью в области G введем комплексный потенциал $W = f(z,t) = \varphi + i\psi$, где $\psi = \psi(x,y,t)$ — функция тока, $z = x + iy$. Для функции скоростей $f_z(z,t) = \varphi_x - i\varphi_y$ согласно условиям (3) имеем следующее интегральное представление

$$f_z(z,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{h(z)}}\left(\int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau,t)}{\tau - z}\sqrt{h(\tau)}d\tau - \int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau,t)}{\tau - z}\sqrt{h(\tau)}d\tau + \Gamma(t)\right), \tag{6}$$

[1]Анкилов Андрей Владимирович (ankil@ulstu.ru), Вельмисов Петр Александрович (velmisov@ulstu.ru), Семенова Елизавета Петровна (farbless@inbox.ru), Ульяновский государственный технический университет, 432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.

где $h(z) = (z-a_1)(z-b_1)(z-a_2)(b_2-z)$; $v_k(\tau,t) = \dot{w}_k(\tau,t) + Vw'_k(\tau,t)$, $k=1,2$; $\Gamma(t)$ — функция, определяющая циркуляцию скорости газа вокруг каждой пластины. Ветвь корня в формуле (6) фиксирована условием

$$\sqrt{h(z)} = i\sqrt{(x-a_1)(x-b_1)(x-a_2)(x-b_2)}, \quad z = x > b_2. \tag{7}$$

Разложение функции $f_z(z,t)$ в окрестности $z=\infty$ начинается с члена порядка $1/z^2$, поэтому общая циркуляция равна нулю. Циркуляция вокруг каждой пластины может отличаться от нуля. Заметим также, что $\left(\varphi_x^2+\varphi_y^2\right)_\infty = 0$.

Перейдем в (6) к пределу при $z \to x \pm i0$, $x \in (a_k, b_k)$. Применяя формулы Сохоцкого и учитывая (7), получим

$$\varphi_x^+ - \varphi_x^- = (-1)^k \frac{2}{\pi\sqrt{h(x)}} \left(\int\limits_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau,t)}{\tau-x}\sqrt{h(\tau)}d\tau - \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau,t)}{\tau-x}\sqrt{h(\tau)}d\tau + \Gamma(t) \right),$$

$$x \in (a_k, b_k).$$

Для комплексного потенциала имеем следующее выражение

$$W = f(z,t) = \int\limits_{a_1}^{z} f_z(z,t)\,dz + C(t), \tag{8}$$

где $C(t)$ — произвольная функция времени, $z \in G$. Так как G — двусвязная область, то интеграл, вообще говоря, зависит от линии интегрирования. Следовательно, потенциал φ, а значит и правые части уравнений (4), (5) однозначно не определяются. Функцию $\Gamma(t)$ подберем так, чтобы циркуляция вокруг каждой пластины равнялась нулю:

$$\Gamma(t) = \frac{1}{M}\left(\int\limits_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int\limits_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau,t)}{x-\tau}\sqrt{h(\tau)}d\tau - \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau,t)}{x-\tau}\sqrt{h(\tau)}d\tau \right),$$

где $M = \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}$. В этом случае интеграл от функции $f_z(z,t)$ по любому замкнутому контуру, принадлежащему области G, равен нулю. Отсюда следует, что значение потенциала W, определяемое формулой (8), не зависит от линии интегрирования, соединяющей точки a_1 и z. Поскольку

$$W = \varphi + i\psi = a_0(t) + \frac{a_1(t)}{z} + ...$$

в окрестности $z=\infty$, то функцию $C(t)$ в (8) можно подобрать так, чтобы выполнялось условие $(\varphi_t)_\infty = 0$, т. е. условие (2) будет выполнено.

Находя предельные значения $\varphi(x,y,t)$ на границе области G, получим связанную систему уравнений относительно функций прогиба $w_1(x,t)$ и $w_2(x,t)$, описывающую динамику двух упругих пластин в дозвуковом потоке газа:

$$(-1)^k L_k(w_k) = \frac{2\rho\sqrt{h(x)}}{\pi} \left(\int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{\tilde{v}_1(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau-x} - \int\limits_{a_2}^{b_2} \frac{\tilde{v}_2(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau-x} \right) - \frac{2\rho\Gamma'(t)}{\pi} \int\limits_{a_k}^{x} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} +$$

$$+\frac{2\rho}{\pi}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\tilde{v}_1(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}d\tau\int\limits_{a_k}^{x}\frac{(\tau-x)(\tau+x-a_0)}{\sqrt{h(x)}}dx-\frac{2\rho}{\pi}\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{\tilde{v}_2(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}d\tau\int\limits_{a_k}^{x}\frac{(\tau-x)(\tau+x-a_0)}{\sqrt{h(x)}}dx+$$

$$+\frac{2\rho V}{\pi\sqrt{h(x)}}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{v_1(\tau,t)}{\tau-x}\sqrt{h(\tau)}d\tau-\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{v_2(\tau,t)}{\tau-x}\sqrt{h(\tau)}d\tau-\Gamma(t)\right),\ x\in(a_k,b_k)\ \ k=1,2.$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde{v}_k(\tau,t)=\int\limits_{a_k}^{\tau}\left(\ddot{w}_k(x,t)+V\dot{w}_k'(x,t)\right)dx,\qquad a_0=-\frac{1}{2}\left(a_1+b_1+a_2+b_2\right).$$

Исследование динамики упругих пластин основано на применении метода Галеркина к полученной системе уравнений.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (2009–2013 гг.), ГК №1122.

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Анофрикова Н.С., Шевцова Ю.В.[1]

В докладе представлены результаты применения асимптотических методов, разработанных для случая упругих тонкостенных конструкций [1–3], к исследованию напряженно-деформированного состояния (НДС) двухслойных вязкоупругих пластин. В основу положена методика непосредственного вывода асимптотических приближений из точных трехмерных уравнений [3].

Рассматривается полубесконечная двухслойная пластина, каждый слой которой выполнен из вязкоупругого материала. Свойства материала каждого слоя описываются моделью стандартного вязкоупругого тела [4]. Предполагается, что к торцу пластины, находящейся в состоянии покоя, в начальный момент времени прикладывается ударное продольное воздействие. Считается, что наружные поверхности пластины свободны от нагрузки. Граничные условия на стыке — условия непрерывного контакта.

В трехмерных уравнениях теории вязкоупругости, записанных для каждого слоя пластины, и граничных условиях производится растяжение масштабов независимых переменных, позволяющее методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений вывести асимптотически приближенные уравнения для составляющих НДС при различных значениях показателей изменяемости и динамичности. Данный метод основан на малости геометрического параметра, равного отношению полутолщины слоя к характерному размеру длины. В работе подробно рассматривается случай так называемых длинноволновых низкочастотных тангенциальных приближений, для которых показатели изменяемости и динамичности меньше единицы и равны между собой. В рассматриваемом случае тангенциальные компоненты вектора перемещений велики по сравнению с его нормальной компонентой.

После введения соответствующих асимптотик в уравнениях и граничных условиях, записанных в безразмерной форме, установлена зависимость компонент НДС от нормальной координаты, получена связь между компонентами НДС первого и второго слоев. В результате асимптотического интегрирования получены системы уравнений для асимптотически главных и асимптотически второстепенных компонент НДС. Осуществлен переход к двумерным уравнениям в усилиях и перемещениях для асимптотичеки главных компонент НДС.

Литература

[1] Kaplunov Ju.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. – London: Academic Press, 1998. – 226 pp.

[2] Коссович Л.Ю., Каплунов Ю.Д. Асимптотический анализ нестационарных упругих волн // Известия Сарат. ун-та. – 2001. – Т. 1. – Вып. 2. – С. 111–131.

[1] Анофрикова Наталия Сергеевна (nanofrikova@yandex.ru), Шевцова Юлия Владиславовна (yv-shevtsova@mail.ru), Саратовский государственный университет, 410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, 83.

[3] Коссович Л.Ю., Шевцова Ю.В. Асимптотические приближения трехмерных динамических уравнений теории упругости в случае двухслойных пластин // Межвуз. сб. "Проблемы прочности и пластичности". – Вып. 67. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 2005. – С. 102–111.

[4] Новацкий В. Динамика сооружений. – М.: Госстройиздат, 1963. – 376 с.

УДК 536.758

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ОПИСАНИЯ РОЖДЕНИЯ ЧЕРНЫХ ДЫР И КРОТОВЫХ НОР НА БОЛЬШИХ КОЛЛАЙДЕРАХ И ТЕОРИЯ СУПЕРСТРУН И БРАН

Арефьева И. Я.[1]

Обсуждаются различные механизмы катализа процессов образования черных дыр/кротовых нор (ЧД/КН), а также микроскопических машин времени при высокоэнергетических столкновениях частиц. Современная парадигма предполагает, что образование ЧД/КН при столкновениях частиц может происходить в том случае, когда энергии сталкивающихся частиц в системе их центра масс выше планковского масштаба (т.н. трансплanковская область). В рамках концепции ТэВ-ной гравитации, согласно которой трансплanковская область – область порядка нескольких ТэВ, эта область должна играть существенную роль в столкновениях элементарных частиц на большом адронном коллайдере (БАК) и коллайдерах следующих поколений (см. [1, 2] и ссылки там приведенные).

Для оценки вероятности рождения черных дыр обычно используется классическая геометрическая формула для сечения данного процесса. Мы приводим аргументы в пользу этой формулы, рассматривая процесс трансплanковского столкновительного рождения черной дыры в системе покоя одной из сталкивающихся частиц. Этот прием позволяет использовать для оценки процесса стандартную гипотезу Торна, согласно которой гравитационный коллапс происходит, если в некоторой пространственной области сосредоточено достаточное количество материи, и подтвердить утверждение о неизбежности гравитационного коллапса в том случае, когда в малой пространственной области сконцентрировано большое количество кинетической энергии. С помощью этого же приема проводится вычисление сечений рождения черных дыр при столкновениях ультрарелятивистских частиц, обладающих различными физическими параметрами и в разных фоновых метриках, в том числе в пространстве (анти)-де Ситтера. Показано, что результаты находятся в согласии с результатами [3, 4, 5], которые следуют из оценки на площадь формируемой при столкновениях замкнутой ловушечной поверхности, хотя для асимптотически не плоских пространств общая теорема, которая гарантировала бы, что существование замкнутой ловушечной поверхности является достаточным условием формирования ЧД, пока не доказана.

Продемонстрировано, что своего рода катализатором процесса рождения ЧД служат отрицательная космологическая постоянная и дилатонная скалярная материя. Наоборот, к ослаблению процесса приводит наличие положительной космологической постоянной. Более того, при некотором критическом значении последней этот процесс приостанавливается.

Литература

[1] Aref'eva I.Y., Volovich I.V. Time Machine at the LHC // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. – 2008. – No. 5. – P. 641; arXiv:0710.2696.

[1] Арефьева Ирина Ярославна (arefeva@mi.ras.ru), Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

[2] Aref'eva I.Y. Catalysis of Black Holes/Wormholes Formation in High Energy Collisions, Talk given at International Bogolyubov Conference on Problems of Theoretical and Mathematical Physics: To the 100th anniversary of N.N. Bogolyubov's birth, Moscow-Dubna, Russia, 21-27 Aug 2009, arXiv:0912.5481

[3] Aref'eva I.Y., Bagrov A.A. and Guseva E.A. Critical Formation of Trapped Surfaces in the Collision of Non-expanding Gravitational Shock Waves in de Sitter Space-Time // JEPH. – 2009. – 1130:709; arXiv:0905.1087.

[4] Aref'eva I.Y., Bagrov A.A. Formation of Trapped Surfaces in the Collision of Non-expanding Gravitational Shock Waves in AdS_4 // Theor. Math. Phys. – 2009. – No. 161. – P. 382–399.

[5] Aref'eva I.Y., Bagrov A.A., Joukovskaya L.V., Critical Trapped Surfaces Formation in the Collision of ultra relativistic Charges in (A)dS // JHEP. – 2010. – 1003:002; arXiv:0909.1294.

УДК 535.14

СЖАТИЕ СВЕТА В ДВУХФОТОННЫХ ПРОЦЕССАХ ИЗЛУЧЕНИЯ АТОМОВ В РЕЗОНАТОРЕ

Башкиров Е.К., Липатова С.П.[1]

Одним из наиболее перспективных направлений в современной квантовой оптике является исследование сжатых состояний электромагнитного поля. Явление сжатия света изучено в настоящее как теоретически, так и экспериментально в огромном количестве работ [1]. Такие состояния привлекают особое внимание не только потому, что они позволяют глубже понять природу электромагнитного поля, но и благодаря их широким возможным применениям для высокоточных оптических измерений, оптической связи, квантовых вычислений и др. Экспериментально сжатие света было впервые реализовано в 1985 году в нелинейном процессе четырехволнового смешения света в оптическом резонаторе. Позднее для генерации сжатых состояний электромагнитного поля использовались различные нелинейные оптические процессы: оптические параметрические процессы, эффект Керра и др. [1]. В настоящее время выполнено более 40 различных экспериментов по наблюдению сжатых состояний света в различных нелинейных оптических средах, в том числе для пучков атомов в резонаторах [2, 3]. Основная проблема, препятствующая широкому использованию сжатого света в практических целях является невысокая степень сжатия, достигнутая экспериментально, в частности в экспериментах с атомами в резонаторах уменьшение уровня шума для резонаторного поля составило примерно 20 %. Поэтому исследование новых схем генерации сжатых состояний, позволяющих получать более высокую степень сжатия, является приоритетной задачей квантовой оптики. Одним из наиболее перспективных направлений в исследовании сжатых состояний является рассмотрение многофотонных процессов ввиду высокой степени корреляции испускаемых атомами фотонов, что должно приводить к более высокой степени сжатия излучения.

В настоящей работе нами детально исследованы особенности сжатия света в вырожденной двухфотонной двухатомной модели Джейнса—Каммингса для различных начальных интенсивностей резонаторного поля и различных начальных состояний атомной подсистемы. При этом было показано, что такая нелинейная среда является значительно более выгодной для генерации сжатого света в сравнении с системой атомов, в которой разрешены однофотонные переходы. Степень сжатия поля в двухфотонных процессах излучения в три раза превосходит соответствующий показатель в однофотонных процессах.

Литература

[1] Bachor H.-A., Ralph T. A Guide to experiments in quantum optics. – Weinheim: Wiley–VCH, 2004. – 420 pp.

[2] Orozco L.A. *et al.* Squeezed-state generation in optical bistability // J. Opt. Soc. Am. – 1987. – V. B4. – P. 1490–1500.

[3] Hope D.M. *et al.* The atom-cavity system as a generator of quadrature squeezed states // Appl. Phys. – 1992. – V. B55. – P. 210–215.

[1] Башкиров Евгений Константинович (bash@ssu.samara.ru), Липатова Светлана Петровна, Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

УДК 535.14

ПЕРЕПУТЫВАНИЕ В ДВУХФОТОННОЙ ДВУХАТОМНОЙ МОДЕЛИ

Башкиров Е.К., Сочкова Е.Ю.[1]

Как хорошо известно, перепутанные состояния являются фундаментом современной квантовой информатики. В настоящее время активно изучаются как теоретически, так и экспериментально фотон–фотонные, атом–атомные и атом–фотонные перепутанные состояния [1]. Атом–полевые перепутанные состояния возникают в результате взаимодействия атомов с квантовым полем. В работе [2] при анализе поведения линейной атомной энтропии была обнаружена интересная особенность атом–полевого перепутывания в модели Джейнса—Каммингса. Если приготовить двухуровневый атом в чистой суперпозиции возбужденного и основного состояний, а поле — в чистом когерентном состоянии, то на половине времени восстановления осцилляций Раби населенностей атомных уровней происходит полное распутывание состояний поля и атома. В этом момент атом и поле вновь возвращаются в чистые состояния. Позднее исследования временного поведения линейной атомной энтропии и перепутывания состояний атомов и поля были проведены и для двухатомной модели Джейнса—Каммингса: для случая идентичных атомов в работе Х.Т. Зунга с соавторами [3] и для случая неидентичных атомов в работе И.К. Кудрявцева с соавторами [4]. В указанных работах было показано, что атом–полевое распутывание отсутствует для начального возбужденного или основного состояний атомов и имеет место только для некоторых определенных суперпозиций атомных состояний.

В настоящей работе нами исследованы особенности атом-полевого перепутывания в двухатомной модели с вырожденными двухфотонными переходами. Анализ асимптотического поведения (случае большого начального среднего числа фотонов в когерентной моде резонаторного поля) точной волновой функции модели позволил нам определить начальные состояния атомов, при которых в системе наблюдается распутывание состояний атомов и поля. Численное моделирование для редуцированной атомной энтропии полностью подтверждает полученные аналитические результаты для времен распутывания атомной и полевой подсистем.

Литература

[1] Haroche S., Raimond. J-M. Exploring the Quantum. Atoms, Cavities and Photons. – New York: Oxford University Press, 2006. – 606 pp.

[2] Gea-Banacloche J. Collapse and revival of the state vector in the Jaynes-Cummings model: an example of state preparation by a quantum apparatus // Phys. Rev. Lett. – 1990. – V. 65. – P. 3385–3388.

[3] Ho Trung Dung, Nguen Dihn Huyen, Two-atom-single mode radiation field interaction. State evolution, level occupation probabilities and emission spectra // J. Mod. Opt. – 1994. – V. 41. – P. 453–469.

[4] Kudryavtsev I.K., Lambrecht A., Moya-Cess H., Knight P.L. Cooperativity and entanglement of atom-field states // J. Mod. Opt. – 1994. – V. 40. – P. 1605–1630.

[1] Башкиров Евгений Константинович (bash@ssu.samara.ru), Сочкова Елена Юрьевна (SochkovaElena@mail.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

УДК 535.14

ПЕРЕПУТЫВАНИЕ В ВЫРОЖДЕННОЙ ДВУХФОТОННОЙ МОДЕЛИ ТАВИСА—КАММИНГСА

Башкиров Е.К., Ступацкая М.П.[1]

В последнее время появилось большое количество работ, посвященных исследованию влияния диполь-дипольного взаимодействия на степень перепутывания атомных состояний (см. ссылки в работе [1]). При этом показано, что прямое дипольное взаимодействие приводит к ослаблению эффекта "мгновенной смерти" перепутывания [2]. В настоящей работе нами рассмотрено влияние диполь-дипольного взаимодействия на динамику атом-атомного перепутывания в рамках вырожденной двухфотонной модели Тависа—Каммингса. Мы рассмотрели модель Тависа—Каммингса, в которой два идентичных двухуровневых атома резонансно взаимодействуют с модой резонаторного поля посредством вырожденных двухфотонных переходов. В представлении взаимодействия и приближении вращающейся волны гамильтониан такой модели имеет вид

$$H_I = \hbar g \sum_{j=1}^{2} (a^{+^2} R^-{}_j + R^+{}_j a^2) + \hbar\Omega (R^+{}_1 R^-{}_2 + R^+{}_2 R^-{}_1). \qquad (1)$$

Здесь a^+ и a — операторы рождения и уничтожения фотонов моды поля, $R_j^{\pm}$ — операторы переходов в двухуровневом атоме $j \quad (i = 1, 2)$, g — константа вырожденного двухфотонного взаимодействия двухуровневого атома с двухмодовым полем, Ω — константа прямого диполь-дипольного взаимодействия между атомами. Через $|+\rangle$ и $|-\rangle$ обозначены возбужденное и основное состояние изолированного двухуровневого атома.

Мы предполагали, что в начальный момент времени атомы и поле приготовлены в перепутанном состоянии вида (так называемое W-перепутанное состояние)

$$|\Psi(0)\rangle = a|+,-,1\rangle + b|-,+,1\rangle + c|-,-,2\rangle, \qquad (2)$$

где $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$.

Используя точное решение для оператора эволюции модели (1) нами найдено выражение для параметра Переса—Хородецких, определяющего степень атомного перепутывания изучаемой двухкубитной системы. Численные расчеты показали, что учет диполь-дипольного взаимодействия между атомами приводит к полному исчезновению эффекта "мгновенной смерти" перепутывания при выбора коэффициентов в выражении (2)в виде: $a = b = c = 1/\sqrt{3}$ и $a = \sqrt{2/3}, b = c = 1/\sqrt{6}$.

[1]Башкиров Евгений Константинович (bash@ssu.samara.ru), Ступацкая Мария Петровна (Stupatskaya@NetCracker.com), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Литература

[1] Bashkirov E.K., Stupatskaya M.P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise // Laser Physics. – 2010. – V. 19. – P. 525–530.

[2] Chen L. *et al.* The influence of dipole-dipole interaction and detuning on the sudden death of entanglenent between two atoms in the Tavis–Cummings model // Chin. Phys. B. – 2009. – V. 18. – P. 888–893.

УДК 535.14

АТОМ–ПОЛЕВОЕ ПЕРЕПУТЫВАНИЕ В МОДЕЛИ ТАВИСА—КАММИНГСА С УЧЕТОМ ШТАРКОВСКОГО СДВИГА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ

Башкиров Е.К., Тарельник Е.С.[1]

Квантовые перепутанные состояния играют ключевую роль в квантовой теории информации, физике квантовых вычислений, квантовой связи и квантовой криптографии. В последнее время было опубликовано большое количество работ, в которых исследовались свойства перепутанных состояний, их возможные применения в квантовой информатике, а также различные схемы получения перепутанных состояний. Простейшая система, в которой возможна генерация атом–полевых перепутанных состояний, является модель Джейнса—Каммингса, описывающая взаимодействие двухуровневого атома с модой квантового электромагнитного поля в идеальном резонаторе. Модель Джейнса—Каммингса играет фундаментальную роль в квантовой оптике, поскольку позволяет описать все основные квантовые эффекты взаимодействия излучения с веществом. В последнее время атом-полевые перепутанные состояния были получены в экспериментах с одноатомными мазерами [1]. Исследования атом-полевых перепутанных состояний в модели Джейнса—Каммингса (МДК) и ее простейших обобщениях были инициированы Фениксом и Найтом [2], а также [3]. Исследуя динамику фон-неймановской редуцированной атомной энтропии, Феникс и Найт впервые показали, что двухуровневый атом, взаимодействующий с модой квантового электромагнитного поля и приготовленный в чистом состоянии, вновь оказывается в чистом состоянии на половине периода затухания осцилляций Раби населенностей атомных уровней, причем в этот момент времени состояния атома и поля распутываются. Аналогичные результаты независимо были получены Геа—Банаклоче при изучении временного поведения атомной линейной энтропии. Результаты Геа—Банаклоче были позднее обобщены на случай одноатомной модели с двухфотонными вырожденными переходами и двухатомной модели Тависа—Каммингса с однофотонными и двухфотонными вырожденными и невырожденными переходами (см. ссылки в [4]). При исследовании перепутывания в двухфотонной модели Тависа—Каммингса не принимался в расчет штарковский сдвиг энергетических уровней. Вместе с тем такой эффект может оказать существенное влияние на атом-полевое перепутывание, в особенности в случае идентичных атомов. Поэтому целью настоящей работы является исследование влияние динамического штарковского сдвига на особенности атом-полевого перепутывания в вырожденной модели Тависа—Каммингса.

Для того, чтобы получить эффективный гамильтониан вырожденной двухфотонной модели Тависа—Каммингса рассмотрим системы двух трехуровневых атомов с уровнями энергии $|+\rangle$, $|i\rangle$ и $|-\rangle$, где $|+\rangle$ — возбужденное, $|-\rangle$ — основное и $|i\rangle$ — промежуточное состояние обоих атомов. Предположим, что каскад атомных переходов $|+\rangle \to |i\rangle \to |-\rangle$ находится в резонансе с удвоенной частотой $\omega_{+,-} = 2\omega$, в то время как, частоты промежуточных переходов $\omega_{+,i} = \omega + \Delta$ и $\omega_{+,i} = \omega - \Delta$ сильно отстроены от ω, где ω — частота моды резонаторного поля. После адиабатического

[1]Башкиров Евгений Константинович (bash@ssu.samara.ru), Тарельник Елена Сергеевна (no4emy@yandex.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

исключения промежуточного состояния мы получаем эффективный гамильтониан в представлении взаимодействия вида

$$H_{int} = \hbar \sum_{i=1}^{2} g \left(a^{+^2} |-\rangle_{i\,i}\langle +| + a^2 |+\rangle_{i\,i}\langle -| \right) + \\ + \beta_1 a^+ a \sum_{i=1}^{2} |-\rangle_{i\,i}\langle -| \; + \; \beta_2 (a^+ a + 1) \sum_{i=1}^{2} |+\rangle_{i\,i}\langle +|, \tag{1}$$

где параметры штарковского сдвига двух энергетических уровней β_1 and β_2 и эффективная константа двухфотонного взаимодействия g определяются в терминах исходных констант диполь-фотонного взаимодействия g_1 и g_2, которые соответствуют переходам $|-\rangle \to |i\rangle$ и $|i\rangle \to |+\rangle$ в исходных трехуровневых атомах, и отстройки Δ:

$$\beta_1 = \frac{g_1^2}{\Delta}, \quad \beta_2 = \frac{g_2^2}{\Delta}, \quad g = \frac{g_1 g_2}{\Delta}.$$

Временная волновая функция атом-полевой системы удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\imath\hbar \mid \dot{\Psi}(t)\rangle = H \mid \Psi(t)\rangle. \tag{2}$$

Нами найдено точное решение уравнения (2) для рассматриваемой модели (1) для произвольной начальной суперпозициии атомных состояний и резонаторного поля в когерентном состоянии

$$|\Psi(0)\rangle = (\alpha|+,+\rangle + \beta|+,-\rangle + \gamma|-,+\rangle + \delta|-,-\rangle)\,|\upsilon\rangle,$$

где α, β, γ and δ — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1.$$

Здесь

$$|x, y\rangle = |x\rangle|y\rangle \qquad (x, y = -, +)$$

— двухатомные базисные векторы и $|-\rangle$ — основное и $|+\rangle$ — возбужденном состояние двухуровневого атома. Начальное состояние резонаторного поля выбиралось в виде когерентного состояния.

На основе точного решения для полной волновой функции атом-полевой системы в работе проведено численное моделирование линейной атомной энтропии

$$S = 1 - Tr\left(\rho_{AT}^2\right),$$

которая, как хорошо известно [2], может выступать в качестве меры атом-полевого перепутывания. Нами проведены численные расчеты линейной энтропии для различных значений параметра $r = g_1/g_2$, который характеризует различия в штарковских сдвигах основного и возбужденого атомных уровней. При этом для значения $r = 1$ штарковские сдвиги уровней одинаковы и их можно не учитывать в эффективном гамильтониане. Главный результат численных расчетов заключается в том, что незначительное уменьшении параметра r приводит к существенному уменьшению максимальной степени атом-полевого перепутывания.

Литература

[1] Haroche S., Raimond. J.M. Exploring the Quantum. Atoms, Cavities and Photons. – New York: Oxford University Press, 2006. – 606 pp.

[2] Phoenix S.J.D., Knight P.L. Establishment of an entangled atom-field state in the Jaynes–Cumming model // Phys. Rev. – 1991. – V. A44. – P. 6023–6029.

[3] Gea-Banacloche J. Collapse and revival of the state vector in the Jaynes–Cummings model: an example of state preparation by a quantum apparatus // Phys. Rev. Lett. – 1990. – V. 65. – P. 3385–3388.

[4] Bashkirov, E.K. Entanglement in degenerate two-photon Tavis-Cummings model // Physica Scripta. – 2010. – V. 82. – doi: 10.1088/0031-8949/82/01/015401.

УДК 517.93 533.9

ДВИЖЕНИЕ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ, РЕАГИРУЮЩИХ С ГАЗОМ

Батищева Я.Г., Веденяпин В.В.[1], *Мелихов И.В.*[2]

Рассматривается задача о движении твердого тела под действием реактивных сил, основы которого были даны в статях Максвелла [1]. Такой подход имеет приложения в движении спутников [2] и в задаче о движении больших частиц, взаимодействующих с газом [3–8]. Такое движение было названо хемореактивным и было исследовано группой И.В.Мелихова химического факультета МГУ и в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН [8]. Была создана модель физико-химической реакции на поверхности тела и исследована соответствующая математическая модель [2, 3, 8]. Получены новые точные решения движения твердого тела, которые асимптотически при времени, стремящемся к бесконечности, дают идеальную спираль.

Эта модель была применена к объяснению фотофореза [4]. Термин фотофорез был предложен Феликсом Эренхафом [5]. В его экспериментах пыль, серебряные и медные взвешенные частицы двигались по направлению к свету [6]. Такое движение не могло быть связано со световым давлением и не получало объяснения долгое время. Кроме того, частицы двигались по спиралям, которые Эренхаф сам связывал с силой Лоренца, вводя для объяснений дробные заряды и магнитные монополи. Однако это не нашло поддержки и встретило оппозицию у Милликена, измерившего заряд электрона, и Дирака, введшего понятие магнитного монополя из математических соображений для того, чтобы сделать уравнения Максвелла симметричными относительно магнитных и электрических полей.

Наше объяснение естественно и просто — на основе контрреактивных сил, возникающих при прилипании частиц. Таким образом, спирали Феликса Эренхафа получили объяснение в рамках хемореактивного движения [3–8], а сами они служат подтверждением всей построенной теории. Кроме того, построены точные решения уравнений движения твердого тела — в особенности, получены решения в форме идеальной спирали. Построена теория движения крупной частицы в реагирующем газе. Построена теория фотофореза, в особенности обратного фотофореза. Предлагается сходное объяснение для электрофорза и магнитофореза в газах, изучавшихся Эренхафом.

Литература

[1] Maxwell J.C. "Illustrations of the Dynamical Theory of Gases", I. On the Motions and Collisions of Perfectly Elastic Spheres // Philos. Mag. – January 1860. – X1X. – P. 19–32. II. On the Process of Diffusion of two or more kinds of moving particles among one another // Philos. Mag. – July 1860. – P. 20–33. III. On the collision of perfectly elastic bodies of any form // Philos. Mag. – July 1860. – P. 33–37. On Stresses in Rarified Gases arising from Inequalities of Temperature // Philosophical transactions. – 1879. – V. 170. – P. 231–256.

[2] Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение спутников. – Киев: Наукова думка, 1984.

[1] Батищева Янина Генриховна, Веденяпин Виктор Валентинович (vicveden@yahoo.com), Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Россия, г. Москва.

[2] Мелихов Игорь Витальевич, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Россия, г. Москва.

[3] Vedenyapin V.V., Batysheva Y.G., Melihov I.V. Gorbatchevski A.Ya. On a motion of solids in chemically active gaz // Doclady Physics. – V. 48. – No. 10. – P. 556–558 (2003). Translated from Doklady Akademii Nauk. – V. 392. – No. 6. – P. 738–780 (2003).

[4] Vedenyapin V.V. Photophoresis and reactive forces // Mathematical modeling. – V. 18. – 2006.

[5] Ehrehaft F. Ann. Phys. – (Leipzig)56. – 81(1918).

[6] Photophoresis phenomenon // Archive message from "Physics Forum". – Posted by Alan Marshall on November 11 (2001).

[7] Batisheva J.G. On the Derivation of Dynamic Equations for a Rigid Body in a Gas Reacting Nonuniformly with Its Surface // Doklady Physics. – V. 48. – No. 10. – 2003. – P. 587–589. Translated from Doklady Akademii Nauk. – V. 392. – No. 5. – 2003. – P. 631–633.

[8] Мелихов И.В., Симонов Е.Ф., Божевольнов В.Е., Веденяпин В.В. Хемореактивное движение твердых тел, реагирующих с газом. – М.: КДУ, 2006.

УДК 517.9

ДИХОТОМИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Бельгарт Л.В., Романовский Р.К.[1]

Работа является продолжением исследований, выполненных в [1–3]. Рассматривается в фазовом пространстве $H = L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{C}^N)$ задача Коши

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + A\frac{\partial}{\partial x} + B(x,t)\right] u = 0, \quad u|_{t=0} = h \in H. \tag{1}$$

Здесь $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^N$; A, B — матрицы порядка N;

$$\begin{cases} A = \operatorname{diag}(a_1 I_1, \ldots, a_n I_n), \quad a_n = \text{const}, \quad a_1 > \ldots > a_n; \\ I_k \text{ — единичная матрица порядка } N_k, \quad \sum N_k = N; \\ \text{матрица } B(x,t) \text{ почти периодична по } t \text{ равномерно по } x. \end{cases} \tag{2}$$

В случае, когда начальная функция h принадлежит линеалу H_0 финитных C^1-гладких функций $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^N$, задача Коши (1) однозначно разрешима в классе $C^1(\mathbb{R}^2)$, при этом ограничение $u(t)$ решения на каждую горизонталь $t = \text{const}$ принадлежит H_0 и оператор Коши $U(t)$, переводящий h в $u(t)$, ограничен. В случае любой $h \in H$ под решением задачи Коши (1) понимается функция $u(t) = U(t)h$, где $U(t)$ — продолжение по непрерывности оператора Коши из H_0 в H. Следуя [4], будем называть *взаимным наклоном* подпространств $H_+, H_- \subset H$ число

$$\operatorname{Sn}(H_+, H_-) = \inf \|h_+ + h_-\|, \quad h_\pm \in H_\pm, \quad \|h_\pm\| = 1.$$

Будем говорить, что имеет место *экспоненциальная дихотомия* решений задачи Коши (1), если фазовое пространство H распадается в прямую сумму подпространств H_+, H_- так, что

1) при некоторых $\mu, \nu > 0$ имеют место оценки

$$h \in H_+ \Rightarrow \|U(t)h\| \le \mu e^{-\nu(t-\tau)} \|U(\tau)h\| \quad (t \ge \tau),$$

$$h \in H_- \Rightarrow \|U(t)h\| \le \mu e^{-\nu(\tau-t)} \|U(\tau)h\| \quad (t \le \tau),$$

2) взаимный наклон движущихся подпространств $H_\pm(t) = U(t)H_\pm$ отделен от нуля:

$$\operatorname{Sn}[H_+(t), H_-(t)] \ge \text{const} > 0.$$

Обозначим J класс матриц

$$F(x,t) = \operatorname{diag}(F_1, \ldots, F_m, -F_{m+1}, \ldots, -F_n)$$

с диагональными блоками порядков $N_1, \ldots, N_n$, со свойствами

$$F_k \in C^1, \quad F_k^* = F_k, \quad m_1 I_k \le F_k \le m_2 I_k \qquad (m_i > 0),$$
$$F, F'_{kt}, F'_{kx} \text{ почти периодичны по } t \text{ равномерно по } x.$$

[1]Бельгарт Любовь Васильевна (Belgart@rambler.ru), Романовский Рэм Константинович, Омский государственный технический университет, 644050, Россия, г. Омск, пр. Мира, 11.

Лемма. *Производная индефинитной формы*

$$v(h,t) = (Fh,h) \qquad (F \in J)$$

вдоль траекторий системы (1), лежащих в H_0, *дается формулой*

$$\dot{v}(h,t) = (Gh,h), \quad G = F_t' + AF_x' - FB - B^*F.$$

Теорема. *Пусть, при условиях (2), существует матрица* $F \in J$ *такая, что выполняются неравенства*

$$G \le 0 \text{ в } \mathbb{R}^2, \qquad G \le -rI \text{ в полосе } t \in [0,\delta]$$

($r, \delta > 0$; I — *единичная матрица*). *Тогда имеет место экспоненциальная дихотомия решений задачи Коши (1).*

Заметим, что в общем случае гладких ограниченных коэффициентов для доказательства экспоненциальной дихотомии потребовалось выполнение неравенства $G \le -rI$ во всей плоскости $\mathbb{R}^2$ (см. [3]).

Литература

[1] Мендзив М.В., Романовский Р.К. Прямой метод Ляпунова для гиперболических систем на плоскости с периодическими по времени коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44. – №2. – С. 257–262.

[2] Романовский Р.К., Бельгарт Л.В. Об экспоненциальной дихотомии линейных систем с почти периодической матрицей // Сиб. мат. журн. – 2009. – Т. 50. – №1. – С. 190–198.

[3] Романовский Р.К., Бельгарт Л.В. Исследование экспоненциальной дихотомии решений задачи Коши для гиперболической системы на плоскости прямым методом Ляпунова // Омск, 2009. – 12 с. Деп. в ВИНИТИ. 16.04.2009. – №223-В2009.

[4] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.

УДК 532.72

ПРИЧИННО-ОБУСЛОВЛЕННОЕ ОПИСАНИЕ ДИФФУЗИИ

Белевич М.Ю.[1]

Эволюция среды, помимо деформации и перемещения конечных объемов, включает в себя так называемые явления переноса и, в частности, перенос массы. Классическое уравнение, моделирующее эти явления, широко используется. Однако существует ряд причин побуждающих искать альтернативное описание этих явлений. Во-первых, на практике встречаются ситуации, плохо описываемые решениями соответствующего параболического уравнения, а во-вторых, стандартное описание неприемлемо в силу противоречия фундаментальному принципу причинности и, потому, может рассматриваться как удобное вычислительное средство, но не адекватное описание явлений природы. Попытки заменить параболическое уравнение диффузии гиперболическим неоднократно имели место, однако общепризнанный вариант причинно-обусловленного описания этого процесса отсутствует, что делает его разработку актуальной задачей. В данной работе используется подход к построению причинных моделей, предложенный в [1].

Согласно современным представлениям механизм всех явлений переноса, по существу, одинаков и состоит в перемещении переносимой субстанции (массы, энергии и импульса) за счет хаотических движений молекул и других микроскопических частиц. Такой взгляд означает, однако, отказ от рассмотрения проблемы исключительно в рамках механики континуума, что после принятия гипотезы сплошности требует специального обоснования. Кроме того, недостатком классической точки зрения следует считать утрату фундаментального различия в переносе различных величин. Тот факт, что все явления переноса описываются одним и тем же (с точностью до обозначений) уравнением, не определяет их физического подобия. Дело в том, что если вязкость и теплопроводность суть две стороны переноса энергии, то диффузия есть явление иного типа. Во-первых, в рамках механики континуума оно не связано с хаотическим движением точек жидкости, поскольку все эти движения по определению описываются с помощью вязкости и теплопроводности. Во-вторых, диффузия есть перенос массы и, следовательно, является течением. Имеются, однако, причины, препятствующие описанию потока диффундирующего вещества с помощью уравнения движения. Так, например, диффузия компоненты смеси есть течение внутри течения смеси как единого целого. В этом случае деформация утрачивает биективность, что порождает определенные трудности с описанием. В докладе анализируются эти трудности. Выводимое здесь гиперболическое уравнение основывается на гиперболических уравнениях гидродинамики, полученных в [1].

Жидкое тело рассматривается как объединение n компонент. Вместо единственной, связанной с телом меры — массы тела, вводится n мер, каждая из которых интерпретируется как масса соответствующей компоненты. Исследуется лишь чисто механическое взаимодействие между компонентами. В этом случае движение каждой компоненты может рассматриваться отдельно от прочих, как движение сохраняющейся величины.

В общем случае, с каждой мерой связан ее собственный перенос, т.е. ее собственное течение. Это означает, что вместо единственного поля скорости определяется

[1]Белевич Михаил Юрьевич (mbelevich@yahoo.com), Санкт-Петербургский филиал Института океанологии РАН, 199053, Россия, г. Санкт-Петербург, 1-я линия, 30.

n векторных полей, по одному на каждую компоненту. Каждое векторное поле порождает конгруэнцию мировых линий, объединение которых совпадает с мировой трубкой тела. Существование нескольких конгруэнций в пределах одной мировой трубки приводит к тому, что каждая точка тела оказывается связанной с многочисленными мировыми линиями, и тем самым, важное свойство деформации, ее биективность, утрачивается. Противоречия здесь, однако, нет, поскольку речь идет о точках континуума и различных отображениях пространства событий на четырехмерное пространство-время, а не о молекулах или других материальных частицах. Тем не менее скорость перестает быть удобным средством описания движения, в силу чего далее используется иной метод и конвективный перенос заменяется диффузионным.

Для однокомпонентной жидкости метрика определяется в терминах скорости течения, т.е. вектора, касательного к мировой линии точки тела [1]. В случае смесей, чтобы не определять различные метрики для каждой компоненты, необходимо предпочесть одно векторное поле всем остальным и использовать его в определении метрики. Таковым выбирается поле скорости движения смеси, как целого.

В результате удается получить причинно-обусловленное уравнение диффузии, записываемое в виде:

$$\rho d_t C_E = \operatorname{div}(\xi_E \rho \boldsymbol{\nabla} C_E). \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность массы смеси, C_E — концентрация E-й компоненты смеси. Коэффициент ξ_E называется коэффициентом диффузии E-й компоненты, а само уравнение (1) — уравнением диффузии соответствующей компоненты в движущейся среде. Оно является гиперболическим, поскольку правая часть содержит вторую производную по времени, и потому сохраняет причинную связь явлений.

Описанный в [1] подход, позволяет получить гиперболические уравнения переноса тепла и импульса [2]. Анализ явления диффузии показывает, что и в этом случае применим тот же подход. Выведенное гиперболическое уравнение диффузии описывает выравнивание возмущений в n-компонентной смеси. Ниже приводится ряд заключительных замечаний.

1) Несмотря на формальное подобие уравнений, описывающих обе группы явлений (вязкость–теплопроводность и диффузия), их природа в рамках механики континуума принципиально различна. Первая группа описывает перенос энергии (импульса) высокочастотными пульсациями скорости, которые мы не описываем явно, а прибегаем к параметрическому описанию. Вторая группа связана с переносом вещества и потому должна была бы описываться явно. Этот перенос не связан с высокочастотными флуктуациями (поскольку все они уже включены во внутреннюю энергию) и его не следует смешивать с другими явлениями переноса. Имеющаяся здесь проблема, заключается в неединственности векторного поля скорости. Однако, все эти поля, генерируемые различными компонентами смеси, обычно близки друг к другу, и метод описания использует эту особенность. Поскольку диффузия есть поток вещества, в случае однокомпонентной жидкости оба варианта описания возможны. Действительно, наряду с обычной задачей описания течения жидкости иногда рассматривается и явление самодиффузии.

2) Указанные выше соображения относительно природы явлений переноса еще не гарантируют причинной обусловленности соответствующих описаний. Такой гарантией служит учет скорости сигнала, используемого для наблюдений течения. Примеры тому можно извлечь из анализа численных процедур решения

параболических уравнений. Уже неоднократно указывалось, что явный метод, примененный к параболическому уравнению, фактически заменяет его гиперболическим. В этом случае скорость, определяемая методом решения (обычно это отношение шагов дискретизации), оказывается верхним пределом скоростей, допускаемых численным алгоритмом. При этом, предел этот не абсолютен, т.е. более высокие скорости не запрещены. Они лишь неверно интерпретируются, и для их правильной интерпретации следует изменить соотношение шагов сетки. Эта особенность численных процедур хорошо известна как условная устойчивость.

3) Настоящее исследование проведено исключительно в рамках механики континуума, без обращения к молекулам или частицам вещества. Сделана попытка показать, что отсутствие причинной обусловленности классического описания явлений переноса связано с допущением бесконечной скорости распространения информации, а не с заменой множества молекул континуумом точек и отказом от детального описания взаимодействия микроскопических частиц.

Литература

[1] Belevich M. Causal description of non-relativistic dissipative fluid motion // Acta Mechanica. – 2003. – V. 161. – P. 65–80.

[2] Белевич М.Ю. Механика жидкости с точки зрения наблюдателя. – СПб: Изд. РГГМУ, 2009.

УДК 541.1

КВАНТОВО-ХИМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АДСОРБЦИОННОГО МЕХАНИЗМА ДЕЙСТВИЯ ИНГИБИТОРОВ КОРРОЗИИ, ОБЛАДАЮЩИХ ГЕРБИЦИДНЫМ И БИОЦИДНЫМ ДЕЙСТВИЕМ

Белоглазов Г.С., Элисадики Дж.[1]

Анализу разнообразных механизмов действия химических соединений и их смесей на молекулярном уровне заслуженно уделяется все возрастающее внимание как отечественными, так и зарубежными исследователями [1–2]. Среди существующих теорий ингибирования коррозии, наводороживания металлов и сплавов одно из центральных мест заслуженно занимает адсорбционная теория действия ингибиторов.

С целью установления механизма защитного действия Ин выполнена серия экспериментов по определению скорости коррозии и наводороживания стали. Результаты этих экспериментов сопоставлены с данными, полученными из квантово-химических расчетов.

С целью объяснения механизмов защитного действия Ин коррозии и наводороживания на границе фаз "сталь – коррозионная среда" в различных условиях проведен корреляционный анализ результатов квантово-химических расчетов, которые были выполнены ограниченным методом Хартри—Фока *ab initio,* и экспериментальных данных по эффективности ингибирующего действия (ЭИД) замещенных сульфаниламидов в роли Ин.

С целью определения оптимального размера включаемого в модельный кластер фрагмента поверхности (ФПМ) металла (в данной работе — алюминия) изучена серия органических ингибиторов коррозии, имеющих относительно несложное строение p-R-C6H4-SO2-NH2 (R=F, Cl, Br, CH3). Опробованы методы RHF, MNDO, AM1, PM3, MP3, MP5 и другие, но в силу различных причин окончательный выбор сделан в пользу ограниченного метода Хартри—Фока *ab initio* и полуэмпирического метода MNDO (МПДП). Все перечисленные методы реализованы в программе [4]. В табл. 1 приведены результаты расчета энергий граничных орбиталей (ВЗМО, НСМО) и зарядов на активных центрах свободных молекул Ин, полученные неэмпирическим ограниченным методом Хартри—Фока *ab initio* (RHF). Результаты сопоставления экспериментальных и расчетных данных позволят осуществлять более целенаправленный синтез ингибиторов коррозии и наводороживания металлов и некоторых сплавов (в частности, стали).

В табл. 1 и 2 сопоставлены результаты компьютерного моделирования и экспериментально полученные значения эффективности ингибирующего коррозию действия (ЭИКД) Ин (скорость коррозии определялась гравиметрически по потере массы плоских алюминиевых образцов, экспонируемых 72 час. в среде Постгейт В). Сравниваемые квантово-химические методы дают качественно синбатные результаты:

[1] Белоглазов Г.С., Элисадики Дж. (drgeorge59@mail.ru), Университет г. Додома, Танзания, п.я. 259.

Таблица 1. Коэффициенты корреляции между квантово-химическими характеристиками (КХХ) свободных молекул исходных ИН и их ЭИКД

	ВЗМО	НСМО	Дип. момент $\boldsymbol{p}$	Q(R)	Q(N)	**Q(S)**	Q(O)	SQ(C6)	**SQ (C6H4)**
r, % (RHF)	61	54	**85**	**74**	**-72**	**-77**	-64	-58	**-72**
r, % (MNDO)	**96**	**94**	**99**	**92**	-19	**-79**	**-93**	**-83**	**-90**

(КХХ получены двумя различными методами, RHF и MNDO)

Таблица 2. Коэффициенты корреляции между ЭИКД и результатами расчетов Ин

r, % в случае расчета по методу:	суммарным зарядом молекулы ИН при ее адсорбции на поверхности ФПМ, **SD**Q	изменением заряда на атоме R, **DQ(R)** при адсорбции ИН на ФПМ	изменением заряда на атоме N, **DQ(N)**	изменением дипольного момента м-лы ИН, **Dp**	средним изменением заряда на атоме O, **DQ(O)**	суммарным изменением заряда на атомах C кольца C6, **DSQ(C6)**	суммарным изменением заряда на C6H4, **DSQ (C6H4)**
RHF	-74	-66	**95**	33	**89**	-21	-22
MNDO	72	-52	**79**	-52	**83**	**96**	**91**

Таблица 3. Коэффициенты корреляции между квантово-химическими характеристиками свободных молекул исходных ИН и их ЭИКД

Значения коэффициентов корреляции для ЭИКД, взятых при концентрациях, мМоль/л	Дипольный момент свободной молекулы ИН, Д
1	35%
2	33%
5	**95%**
10	**91%**
15	**98%**

Основные результаты выполненного корреляционного анализа рассчитанных изменений зарядов и дипольного момента молекул Ин при адсорбции молекул на ФПМ в сопоставлении с ЭИКД проведенных исследований (в частности, см. табл. 2) свидетельствуют о том, что наиболее значимыми оказываются коэффициенты корреляции между ЭИКД и изменениями зарядов на азоте, DQ(N), и кислороде, DQ(O), при адсорбции Ин на ФПМ.

В качестве ингибиторов коррозии исследованы производные фенола в свободном виде. Данные, приведенные в табл. 3, свидетельствуют о наличии тенденции к увеличению дипольного момента в рассмотренном ряду соединений. При этом разность между энергиями граничных орбиталей в этом ряду также увеличивается.

Приведенные выше основные результаты свидетельствуют о наличии объяснимого монотонного концентрационного тренда коэффициентов корреляции между ЭИКД и дипольным моментом исходных молекул.

В результате проведенных исследований подтверждены ранее полученные данные о специфической роли гетероатомов (N, S и пр.) в адсорбции и защитном действии ингибиторов в рамках концепции молекулярных орбиталей и донорно-акцепторного взаимодействия адсорбент-адсорбат. Доказано, что ПК, которыми в настоящее время наряду с существующими программными средствами квантовой химии располагает исследователь механизма защитного действия ингибиторов коррозии, позволяют эффективно использовать в таких исследованиях компьютерный эксперимент (симуляцию), в частности, при моделировании адсорбции.

Литература

[1] Розенфельд И.Л. Ингибиторы коррозии. – М.: Химия, 1977. – 352 с.

[2] Герасименко А.А., Матюша Г.В. Бактериальная коррозия металлов. II. Коррозионные гравиметрические исследования цветных металлов // Защита металлов. – 2000. – Т. 36. – №3. – С. 315–320.

УДК 512.64+534.2

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕРАССЕЯНИЯ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ

Беляев Ю.Н.[1]

Одним из эффективных методов расчета перерассеяния волн в слоистых средах стал метод характеристической матрицы (МХМ), первоначально развитый Ф. Абеле [1] для расчета оптических свойств диэлектрических пленок и В. Томсоном [2] и Н. Хаскелом [3] для исследования упругих свойств сред с плоскопараллельными границами. Данный метод позволяет при построении интерференционных решений обойти сложную процедуру удовлетворения всех граничных условий на межслойных границах структуры.

Представлена формулировка МХМ, позволяющая с единых позиций рассматривать рассеяние акустических, электромагнитных и упругих волн в слоистых средах. Решение векторного уравнения Гельмгольца ищется через скалярный и векторный потенциалы. В зависимости от структуры, геометрии рассеяния и вида волны характеристическая матрица слоя имеет 2–6 порядок. Случай N лучевой дифракции волн рентгеновского диапазона частот в многослойных кристаллах может быть описан характеристической матрицей N-го порядка.

Рассмотрена задача нахождения характеристической матрицы слоисто-периодической среды. В докладе представлен метод рекуррентного расчета матрицы (МРРМ) таких сред. Показано, что целочисленная степень матрицы M n-го порядка выражается через первые n ее степеней $M^0 \equiv I, M, \ldots, M^{n-1}$ формулой [4]:

$$M^k = \sum_{i=0}^{n-1} M^i \sum_{j=0}^{i} p_{n-i+j} B_{k-1-j}\,, \tag{1}$$

где коэффициенты $p_i = (-1)^{i-1}\sigma_i$, $(i = 1, \ldots, n,)$ и σ_i равен сумме всех C_n^i главных миноров i-го порядка определителя матрицы M. В частности, σ_1 — след, а σ_n — определитель матрицы M. Многочлены B_k определяются рекуррентными формулами

$$\begin{array}{l} B_k = 0,\ k = 0, \ldots, n-2; \quad B_k = 1,\ k = n-1; \\ B_k = p_1 B_{k-1} + p_2 B_{k-2} + \ldots + p_n B_{k-n},\ k \geq n. \end{array} \tag{2}$$

Алгоритм нахождения M^k включает вычисление: 1) степеней матрицы M со второй по n-ю и нахождение следа для каждой из матриц M^i $(i = 1, \ldots, n)$; 2) коэффициентов p_i по формуле Ньютона; 3) значений многочленов B_k по формулам (2). Проведена оценка трудоемкости предлагаемого метода вычисления по сравнению с обычным перемножением матриц. Показано [5], что уже для $k = 25$, предлагаемый метод численного расчета M^k не менее чем в три раза эффективнее (с точки зрения уменьшения числа операций и, следовательно, возрастания точности счета), чем обычное перемножение. А для $k = 250$ выигрыш составляет более чем в 8, 9 и 10 раз соответственно для матриц 4, 5 и 6 порядков.

Выполнено сравнение МРРМ с алгоритмом вычисления степеней матрицы по формуле Лагранжа—Сильвестра [6]. Первый метод в отличие от второго не требует

[1] Беляев Юрий Николаевич (ybelyayev@mail.ru), Сыктывкарский государственный университет, 167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55.

вычисления собственных значений матрицы M для нахождения M^k. Это преимущество становится особенно важным для матриц, порядок которых выше 4.

На примере двумерного распространения упругой волны типа $P-SV$ [7], когда поле смещения не зависит от азимутальной координаты и не содержит составляющей вдоль этой координаты, исследованы свойства характеристической матрицы 4×4 периодической структуры, образованной чередованием двух однородных различных слоев.

Выявлены условия, при которых характеристическая матрица слоисто-периодической среды аналитически выражается через элементы матрицы одного слоя с помощью ортогональных полиномов.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы, ГК № 02.740.11.0618.

Литература

[1] Abelés F. Recherehes sur la propagation des ondes electromagnetiques sinusoidals dans les milieux stratifiés. Application aux conches minces // Ann. Phys. – 1950. – V. 5. – P. 596–640, 706–782.

[2] Thomson W.T. Transmission of elastic wave through a stratified solid material // J. Appl. Phys. – V. 21. – №1. – 1950. – P. 89–93.

[3] Haskell N.A. The dispersion of surface maves on multilayered media // Bul. Seismol. Soc. Amer. – 1953. – V. 43. – №1. – P. 17–34.

[4] Беляев Ю.Н. Алгебра тензоров. – Сыктывкар: Изд. Сыктывкарского университета, 2009. – 180 с.

[5] Беляев Ю.Н. Характеристическая матрица слоисто-периодической структуры // Вестник СыктГУ. – 2010. – Сер. 1. – Вып. 11. – С. 86–91.

[6] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

[7] Молотков Л.А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. – Л.: Наука, 1984. – 201 с.

УДК 519.6:539.3

СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ И КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Беляева Н.А.[1]

В докладе представлены структурные математические модели процессов отверждения осесимметричных изделий с ненулевой критической глубиной конверсии материала, математическая модель неизотермической плунжерной экструзии вязкого структурированного композитного материала.

При формировании полимерных осесимметричных изделий в процессе отверждения жидкой мономерной массы в ходе параллельного протекания реакций полимеризации и кристаллизации изменение температурного поля, структуры материала предлагается учитывать с помощью макрокинетической модели совмещенного процесса [1–3]. В указанных работах в рамках теории термовязкоупругости на основе интегрального уравнения Больцмана—Вольтерры рассматриваются объемные и фронтальные режимы отверждения осесимметричных изделий (цилиндр, сфера). В силу неустойчивости объемный режим реакции может перейти во фронтальный (и наоборот). В этом случае применение метода определения напряженного состояния с нулевой критической глубиной конверсии, как это делается в объемном режиме, становится некорректным.

В докладе рассматривается переход объемного режима отверждения цилиндрического изделия в режим распространения двухстороннего фронта — из центра изделия к граничным поверхностям. Задача о фронтальном формировании (отверждении) решается с точки зрения непрерывно наращиваемого твердого тела. Отличие от постановки задачи для фиксированного тела вытекает из того факта, что элемент растущего тела в окрестности какой-либо точки (r) деформируется совместно с другими элементами, лишь начиная с момента его отверждения, совпадающего с моментом присоединения этого элемента к образованной (затвердевшей) области. В этом случае критическая глубина конверсии, определяющая момент присоединения точки к отвердевшей части, отлична от нуля. На подвижных границах фронтов учитывается давление на образовавшуюся твердую часть изделия со стороны жидких слоев, прилежащих к граничным поверхностям.

Приведены результаты численного анализа объемного режима (с нулевой критической глубиной конверсии) — динамика температурного и конверсионного полей, изменение внутренних напряжений формируемого изделия в ходе отверждения. В случае объемного режима, переходящего во фронтальный, модифицируется метод, разработанный для фронтального режима [1–3]; проводится сравнительный анализ напряженного состояния, рассчитанного с нулевой и ненулевой критической глубиной конверсии материала.

Второе направление исследований, представленное в докладе, это математическое моделирование экструзии структурированного сжимаемого композитного материала. Представлена неизотермическая структурная модель, являющаяся развитием изотермических структурных моделей [4–7].

Порошковая композиция, нагретая до высокой температуры, в течение некоторого времени уплотняется в камере (СВС-компактирование), а затем выдавливается в

[1]Беляева Надежда Александровна (belyayevana@mail.ru), Сыктывкарский государственный университет, 167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр, 55.

калибр под действием усилия на плунжере. В условиях одномерного течения система уравнений, описывающая процесс, записывается в лагранжевых массовых координатах. При построении модели использовалась зависимость между тензором напряжений и тензором скоростей деформации в форме обобщенного закона Ньютона для изотропной жидкости. Структурирование материала — деформирование межмолекулярных связей (вплоть до разрушения), ориентационный поворот, возникновение новых связей — учитывается на основе диффузионно-кинетического уравнения относительно степени структуризации.

Динамика температурного поля в камере и формующем калибре описывается уравнениями теплового баланса, учитывающими теплоотвод через боковые поверхности экструдера и калибра, с соответствующими граничными условиями теплоотвода через плунжер и свободную поверхность выдавленного в калибр стержня. На выходе из камеры в калибр (отверстие) задано условие непрерывности температурного поля и условие равенства тепловых потоков в камере и калибре.

Полная система уравнений, описывающая рассматриваемый процесс, позволяет определять параметры течения среды в камере и калибре: плотность, скорость, радиальную и окружную компоненты тензора напряжений (осевая компонента задается на плужере), температуру в камере, калибре и связанные с указанными характеристиками сдвиговую и объемную вязкости.

В докладе обсуждаются результаты численного эксперимента, выполненного на основе разработанной математической модели — массово-временная динамика плотности, степени структуризации, скорости, компонент тензора напряжений, температурного поля и вязкостей экструдируемой композиции в камере и калибре.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг., ГК № 02.740.11.0618.

Литература

[1] Беляева Н.А. Математические модели деформируемых структурированных материалов. – Сыктывкар: Изд-во СыктГУ, 2008. – 116 с.

[2] Беляева Н.А. Математическое моделирование деформирования вязкоупругих структурированных полимерных (композитных) систем. Автореферат дисс. на соискание ученой степени д.ф.-м.н. – Черноголовка, ИПО СыктГУ. 2008. – 32 с.

[3] Беляева Н.А. Деформирование вязкоупругих материалов с изменяющейся структурой // Вестник Сыктывкарского университета. – Сер 1. – Вып. 11. – 2010. – С. 52–75.

[4] Беляева Н.А., Столин А.М., Стельмах Л.С. Динамика твердофазной плунжерной экструзии вязкоупругого структурированного материала // Теоретические основы химической технологии. – 2008. – №5. – С. 579–589.

[5] Беляева Н.А., Столин А.М., Стельмах Л.С. Неустойчивые режимы деформирования при твердофазной экструзии вязкоупругих структурированных систем // ДАН. – 2008. – Т. 420. – №6. – С. 1–4.

[6] Беляева Н.А., Столин А.М., Стельмах Л.С. Режимы твердофазной экструзии вязкоупругих структурированных систем // Инженерная физика. – 2009. – №1. – С. 10–16.

[7] Беляева Н.А. Влияние характерных времен на режимы твердофазной экструзии // Вестник Сыктывкарского университета. – Сер 1. – Вып. 9. – 2009. – С. 46–53.

УДК 532.5

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ КУЭТТОВСКОГО ТЕЧЕНИЯ СТРУКТУРИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ОБЛАСТИ СВЕРХАНОМАЛИИ

Беляева Н.А., Кузнецов К.П.[1]

Структурированные текучие системы, в которых течение, вследствие взаимного превращения структурных единиц, сопровождается изменением вязкостных свойств, представляют собой обширный класс неньютоновских жидкостей. Для различных видов течений структурированных жидкостей характерно явление падения напряжения при возрастании скорости деформации — явление сверханомалии вязкости. В области немонотонности реологической кривой в результате потери устойчивости однородного стационарного состояния формируются пространственно-неоднородные стационарные состояния (диссипативные структуры).

Нетривиальной задачей представляется нахождение значений параметров, определяющих область сверханомалии. Частично задача решена в работе [1], где было найдено критическое значение одного из параметров, определяющее возникновение области немонотонности реологической кривой.

В докладе рассматривается область сверханомалии куэттовского течения псевдопластической жидкости в плоском зазоре. Жидкость является смесью двух компонент, которые под действием приложенного механического поля, характеризуемого напряжением и скоростью деформации, могут взаимно превращаться друг в друга. С разрушением структуры основной компоненты вязкость жидкости уменьшается. Модель течения жидкости описывается с помощью диффузионно-кинетического уравнения относительно степени структурных превращений и уравнения движения.

В области немонотонности реологической кривой каждому значению напряжения соответствует три однородных стационарных состояния — три степени структурных превращений. В работе [1] показано, что крайние решения для степени структурных превращений устойчивы, тогда как среднее неустойчиво. В результате потери устойчивости стационарного однородного решения формируется устойчивое стационарное неоднородное решение. В численном виде данное решение было получено в работе [2] для различных значений определяющих параметров. Таким образом, исследуя поведение однородных стационарных решений для степени структурных превращений в зависимости от изменения параметров, можно четко определить область сверханомалии.

Проведено исследование однородного стационарного решения уравнений модели на точки ветвления. Были найдены значения отдельных параметров модели, определяющие точки поворота (остальные параметры фиксировались). При переходе параметра через данные значения возникает бифуркация: появляется или исчезает пара решений. Также для выбранной пары параметров была построена бифуркационная диаграмма, позволившая для любых значений выделенных параметров определить число стационарных однородных состояний. Тем самым, удалось определить конкретные значения параметров, определяющих границы области сверханомалии.

[1]Беляева Надежда Александровна (belyayeva@mail.ru), Кузнецов Константин Петрович (k.o.n.s.t@mail.ru), Сыктывкарский государственный университет, 167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., д. 55.

С применением метода Ляпунова—Шмидта найдено неоднородное стационарное решение в окрестности неустойчивого однородного стационарного решения. Проведено сопоставление полученного аналитического решения с результатами численного анализа [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг., ГК 02.740.11.0618.

Литература

[1] Худяев С.И. Пространственная неоднородность и автоколебания при течении структурированной жидкости // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14. – №7. – С. 53–73.

[2] Беляева Н.А. Математические модели деформируемых структурных материалов. – Сыктывкар: Изд-во СыктГУ, 2008. – 116 с.

УДК 517.958

ВОЛНЫ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ДИФФУЗИОННОЕ УРАВНЕНИЕ КРАМЕРСА ДЛЯ ВОЛНЫ И УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Бениаминов Е.М.[1]

Рассматривается процесс диффузионного (теплового) рассеяния волн в фазовом пространстве.

В квантовой оптике стали широко применяться методы исследования динамики квантовых процессов в фазовом пространстве [1], где, в частности, рассматриваются динамика волновых пакетов и интерференция в фазовом пространстве. На этом пути удается моделировать динамику ионов в ловушках, оптику атомов в квантовых световых полях и т.д. "Этот подход с акцентом на фундаментольную роль фазовых переменных позволяет очень наглядно излагать и интерпретировать разнообразные разделы квантовой оптики ..." (из аннотации к книге [1]).

В данной работе явно вводится волновая функция $\varphi(x,p,t)$ на фазовом пространстве $(x,p) \in R^{2n}$, зависящая от времени t. В отличие от квантовой механики, где волновая функция зависит только от координат или только от импульсов, в нашем случае волновая функция зависит и от координат x, и от импульсов p. По аналогии с квантовой механикой, предполагается, что для волновых функций выполняется принцип суперпозиции, и плотность вероятности $\rho(x,p)$ на фазовом пространстве, соответствующая волновой функции $\varphi(x,p)$, задается стандартной формулой

$$\rho(x,p) = \varphi^*(x,p)\varphi(x,p) = |\varphi(x,p)|^2. \tag{1}$$

В этой работе, также, как и в [2], рассматривается процесс диффузионного рассеяния волновой функции, заданной на фазовом пространстве. В отличие от [2], в которой предполагалась диффузия по координатам и импульсам, в данной работе исходят из стандартного уравнения Крамерса [4, 5], в котором тепловая диффузия задается только по импульсам:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{p_j}{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - \gamma\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(p_j f + kTm\frac{\partial f}{\partial p_j}\right), \tag{2}$$

где $f(x,p,t)$ — плотность распределения вероянтностей частицы в фазовом пространстве в момент времени t; m — масса частицы; $V(x)$ — потенциальная функция внешних сил, действуюших на частицу; γ — коэффициент торможения среды, в которой находится частица; k — постоянная Больцмана; T — температура среды.

Для волновой функции $\varphi(x,p,t)$ рассматривается модифицированное уравнение Крамерса вида:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial p_j} - \frac{p_j}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) - \frac{i}{\hbar}\left(V - \sum_{j=1}^{n}\frac{p_j^2}{2m}\right)\varphi - \gamma L\varphi, \tag{3}$$

где

$$L\varphi = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\left(p_j + i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\varphi + kTm\frac{\partial \varphi}{\partial p_j}\right).$$

[1]Бениаминов Евгений Михайлович (ebeniamin@yandex.ru), Российский государственный гуманитарный университет, 125993, Россия, г. Москва, Миусская площадь, 6.

Уравнение (3) получено из стандартного уравнения Крамерса (2) добавлением в правую часть слагаемого вида $-i/\hbar(V-p^2/(2m))\varphi$ и заменой в операторе диффузии умножения функции φ на p_j действием оператора $(p_j + i\hbar\partial/\partial x_j)$ на функцию φ.

Добавление слагаемого $-i/\hbar(V - p^2/(2m))\varphi$ связано с тем дополнительным физическим требованием, что волновая функция в точке (x, p) гармонически колеблется с частотой $1/\hbar(V - p^2/(2m))$ по времени. (На самом деле, правильнее было бы предположить, что частота колебаний равна $1/\hbar(mc^2 + V - p^2/(2m))$, но изменение потенциала на константу не влияет на результаты.)

Требование гармонического колебания волновой функции φ в точке (x, p) с большой частотой $1/\hbar(mc^2 + V - p^2/(2m))$ в случае, когда mc^2 существенно больше величины V, приводит к тому, что сдвиг волновой функции по координате x_j с сохранением собственного времени в точке (x, p) вызывает фазовый сдвиг в колебании функции φ. При этом оператор бесконечно малого сдвига $\partial/\partial x_j$ заменяется на оператор $\partial/\partial x_j - ip_j/\hbar$. (Более подробное обоснование см. в [3].) Соответственно, если этот оператор умножить на $i\hbar$, то получим оператор $p_j + i\hbar\partial/\partial x_j$, использованный в модифицированном операторе диффузии L.

Показывается, что и для этого процесса, если γ — большая величина, изменение волновой функции разделяется на две стадии. В течение первой быстрой стадии волновая функция экспоненцциально по времени с показателем $-\gamma t$ переходит в одно из "стационарных" состояний вида:

$$\varphi(x,p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int\limits_{R^n} \psi(y)\chi(x-y)e^{-i(y-x)p/\hbar}dy, \tag{4}$$

где

$$\chi(x-y) = \left(\frac{kTm}{\pi\hbar^2}\right)^{n/4} e^{-kTm(x-y)^2/(2\hbar^2)}, \tag{5}$$

Волновые функции этого вида образуют линейное подпространство. Элементы этого подпространства параметризуются волновыми функциями $\psi(y)$, зависящими только от координат $y \in R^n$.

Показывается также, что во второй, медленной стадии, волновая функция $\varphi(x, p, t)$, удовлетворяющая уравнению (3), меняется в подпространстве "стационарных" состояний в соответствии с уравнением Шредингера для функции $\psi(y, t)$.

Более полное изложение полученных результатов приведено в [6].

Литература

[1] Шляйх В.П. Квантовая оптика в фазовом пространстве. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 760 с.

[2] Бениаминов Е.М. Диффузионные процессы в фазовых пространствах и квантовая механика // Доклады академии наук. – 2007. – Т. 416. – №1. – С. 31–35.

[3] Бениаминов Е.М. Квантование как асимптотика некоторого диффузионного процесса в фазовом пространстве // http://beniaminov.rsuh.ru/ExpandedDAN.pdf.

[4] Kramers H.A. // Physica. – 1940. – Vol. 7. – P. 284–304.

[5] Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. – М.: Высшая школа, 1990. – 376 с.

[6] Бениаминов Е.М. Диффузионное уравнение Крамерса и уравнение Шредингера // http://beniaminov.rsuh.ru/BeniaminovKramers.pdf.

УДК 519.217, 530.145

УРАВНЕНИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ И ВЕРОЯТНОСТИ СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Бирюков А.А.[1]

Развитие инновационных нанотехнологий стимулирует дальнейшие исследования вероятностных моделей физических систем и процессов, в которых они участвуют. В настоящее время активно исследуется математическая структура квантовой теории с точки зрения теории вероятности.

В работе рассматривается процесс дифракции микрочастиц, падающих на дифракционную решетку. Эксперимент представлен как система случайных событий: рассеяние частиц на отверстиях решетки, их регистрация на экране. Описание процесса дифракции микрочастиц представлено в виде уравнений для данных событий. Ставится задача — объяснить полученные экспериментальные уравнения для вероятности событий в рамках принципов теории вероятности. Исходным положением для объяснения дифракционных эффектов является совместность изучаемых случайных событий. Это положение позволяет в рамках аксиоматики Колмагорова объяснить ряд эмпирических уравнений, описывающих дифракцию. Однако, ряд уравнений невозможно объяснить на этой основе. Показано, что для их объяснения требуется введение дополнительного постулата к аксиоматике Колмагорова. Теория вероятности совместно с предложенным постулатом успешно объясняет дифракционную картину рассеяния микрочастиц, которая традиционно описывается методом квантовой механики.

Примечательно, что предложенные принципы позволяют расширить уравнения, описывающие рассматриваемые эксперименты дифракции. То есть с точки зрения теории вероятности возможны дополнительные эффекты, которые представляется целесообразным обсудить. Показано, что отсутствие этих дополнительных эффектов нисколько не снижает ценности предложенной методики описания дифракционных явлений на условии совместности случайных событий рассеяния микрочастиц.

Сформулированные принципы описания случайных событий позволяет описать марковские процессы с предложенными условиями. Показано, что данные процессы находятся в согласии с уравнениями квантовой механики. Данный подход представляет возможность расширить уравнения квантовой теории, если это будет адекватно рассматриваемым моделям в физике микромира.

[1]Бирюков Александр Александрович (biryukov@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

УДК 530.1

ОПИСАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛА ВЛИЯНИЯ

Бирюков А.А., Шлеенков М.А.[1]

Современные задачи квантовой оптики требуют развития методов описания поведения атомов и молекул, взаимодействующих с внешними электромагнитными полями, вне рамок теории возмущения. Одним из непертурбативных методов описания квантовой системы, взаимодействующей с внешним полем, является метод функционального интегрирования. Однако этот метод сталкивается с проблемой вычисления сложных функциональных интегралов, описывающих составные системы. Для упрощения описания динамики квантовой системы оказывается целесообразным в данных интегралах избавится от переменных электромагнитного поля. Такой подход приводит к новому описанию квантовой системы методом функционального интегрирования, в котором влияние электромагнитного поля представляется функционалом влияния. Этот метод был предложен Р. Фейнманом [1] и получил развитие в работах ряда исследователей. Данный подход является предпочтительным, поскольку функционал влияния можно задать феноменологически, опираясь на общие свойства полей и их взаимодействия с исследуемой системой. В данной работе конкретизируется функционал влияния электромагнитного поля путем его непосредственного вычисления. Полученный функционал влияния является квадратичным по переменным системы, что находится в полном соответствии с выводами Фейнмана, сделанными на феноменологическом уровне. Примечательно, что данный подход описания поведения квантовой системы не противоречит ортодоксальному методу теории возмущений. Метод теории возмущений получается как частный случай вычисления полученных уравнений.

В работе рассмотрены квантовые переходы конкретной квантовой системы под влиянием одномодового электромагнитного поля. Полученные амплитуды перехода квантовой системы приводит описывают нетривиальные зависимости вероятности этих переходов от времени и параметров электромагнитного поля. Полученные результаты представляет интерес для дальнейших исследований систем как в квантовой оптики, так и в квантовой теории поля.

Литература

[1] Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 264 с.

[1] Бирюков Александр Александрович (biryukov@ssu.samara.ru), Шлеенков Марк Александрович (shlemark@ya.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

УДК 53.01

ДВИЖЕНИЕ ДВОЙНОЙ ЗВЕЗДЫ ВО ВНЕШНЕМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Бобрик А.Л., Горбацевич А.К.[1]

В докладе представлены результаты исследования движения двойных систем из компактных объектов (нейтронных звезд или черных дыр), находящихся во внешнем гравитационном поле. Актуальность данной задачи обусловлена тем фактом, что около 60% известных двойных систем находятся во внешнем гравитационном поле (в секторе одного кубического парсека) сверхмассивной черной дыры в центре нашей галактики [1], в то время как двойные системы являются одним из наиболее мощных источников гравитационного излучения. Таким образом, изучение влияния внешнего поля на движение двойных систем необходимо для возможности корректного построения волновых форм от этих источников и, в конечном счете, для возможности эффективной работы гравитационных антенн.

Целью исследования является получение уравнений движения для двойной системы во внешнем поле и численное моделирование движения. При расчетах мы требуем, чтобы внешнее поле слабо изменялось на протяжении двойной системы и чтобы относительное движение компактных объектов двойной системы было нерелятивистским. При этом движение двойной системы как целого может быть релятивистским, а внешнее поле не предполагается слабым. Введенные предположения с хорошей точностью выполняются для реальных двойных систем.

Решение задачи о движении двух изолированных тел в ОТО обычно проводится путем разложения уравнений Эйнштейна в постньютоновский ряд. В нашем случае проведение такого разложения в глобальных координатах, вообще говоря, невозможно, поскольку двойная система как целое может совершать релятивистское движение. Данную проблему можно обойти, перейдя в (обобщенные) координаты Ферми. В данных координатах в области движения двойной системы метрика, соответствующая внешнему полю, представляется как сумма плоской метрики и некоторой малой поправки. Из уравнений Эйнштейна было получено и решено уравнение для метрики гравитационного поля в Ньютоновском приближении. На основании знаний о метрике получен соответствующий лагранжиан для двойной системы. В качестве координат для двойной системы оказывается удобным ввести “радиус-вектор центра масс” и “вектор относительного положения”. Дальнейший анализ, в частности, показывает, что центр масс двойной системы движется по траектории, близкой к геодезической линии внешнего поля. Получены уравнения движения с точностью до свободы выбора координат Ферми, обсуждаются различные способы фиксации координат.

На основании полученных уравнений проведено численное моделирование задачи. Для демонстрации эффектов влияния внешнего поля на движение двойной системы рассматриваются наиболее характерные случаи движения на примере метрики Керра.

[1]Бобрик Алексей Леонидович (a.l.bobrick@gmail.com), Горбацевич Александр Константинович (A.gorbatsievich@gmail.com), Белорусский государственный университет, 220141, Беларусь, г. Минск, пр. Независимости, 4.

Литература

[1] Muno M.P., Bauer F.E., Baganoff F.K., Bandyopadhyay R.M., Bower G.C., Brandt W.N., Broos P.S., Cotera A., Eikenberry S.S., Garmire G.P., Hyman S.D., Kassim N.E., Lang C.C., Lazio, C. Law T.J.W., Mauerhan J.C., Morris M.R., Nagata T., Nishiyama S., Park S., Ramirez S.V., Stolovy S.R., Wijnands R., Wang Q.D., Wang Z., Yusef–Zadeh F. A Catalog of X-ray Point Sources from Two Megaseconds of Chandra Observations of the Galactic Center, 2008.

УДК 538.95

ОБОБЩЕННОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КВАЗИТРЕХМЕРНЫХ СТРУКТУР

Богданова С.Б., Гладков С.О.[1]

Обычное квазиклассическое уравнение [1, 2] дает возможность вычислить массу разнообразных дисспативных характеристик очень широкого спектра кристаллических структур (например, магнетиков, диэлектриков, металлов и т.д.). При этом, как правило, ограничиваются простыми геометрическими формами образцов типа сферы, куба или тонкой плоскости. Надо сказать, что подобными формами все природно многообразие материальных объектов не ограничивается и при более внимательном знакомстве с возможностями природной трансформации выяснятеся, что все-таки наиболее распространенными объектами служат фрактальные и самоподобные структуры типа кривой Коха, ковра и куба Серпинского и т.п. [3].

Цель настоящей работы заключается в разработке подхода, который позволил бы адекватно описывать различные дисспативные характеристики физических структур типа только что упомянутых, в том случае, если их структура помимо соответствующей геометрии является материальной, а не математически абстрактной (см., к примеру, работу [4]).

Для решения этой задачи нам понадобится введение операции дробного дифференцирования. Как было показано в работах [5, 6] операцию дифференцирования для фрактальной структуры очень удобно и наглядно можно ввести с помощью интеграла Фурье для некоторого класса абсолютно интегрируемых функцийю При этом линейный оператор обычного дифференцирования $\partial/\partial x$ заменяется на оператор (тоже линейный) A, действие которого на некторую функцию $\varphi(x)$ вводится как

$$\mathrm{A}\varphi(x) = i\int_{-\infty}^{+\infty} k^{1+\varepsilon}\varphi_k e^{-ikx}\frac{dk}{2\pi}, \tag{1}$$

где число $\mid \varepsilon \mid < 1$, а φ_k — Фурье образ оригинала функции $\varphi(x)$.

С помощью этого оператора A квазиклассическое кинетическое уравнение можно тогда записать в следующем виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_{i\varepsilon}\mathrm{A}_i f = \mathrm{L}\{f\}, \tag{2}$$

где $\mathrm{L}\{f\}$ — интеграл столкновений, индекс $i = 1, 2, ..., 6$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Значения $i = 1, 2, 3$ сответствуют декартовым координатам x, y, z, а $i = 4, 5, 6$ — импульсному пространству и координатам p_x, p_y, p_z. $u_{i\varepsilon}$представляет собой обобщенную скорость в фазовом пространстве с элементом объема $\Delta\Gamma = \dfrac{d^{\,3-\varepsilon}p d^{\,3-\varepsilon}x}{(2\pi\hbar)^{\,3-\varepsilon}}$, где обычная скорость есть $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, а $\mathbf{p} = (u_4, u_5, u_6)$. Индекс ε указывает на зависимость обощенной скорости от фрактальной размерности.

[1]Богданова Софья Борисовна (Sonjaf1@list.ru), Гладков Сергей Октябринович (Sglad@newmail.ru), Московский государственный областной университет, 115005, Россия, г. Москва, ул. Радио, 10а.

При интегрировании обеих частей уравнения (2) по фазовому объему, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f d\Gamma + \mu \int ik^{'}(\mathbf{u}\mathbf{k}^{'})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} f_{\mathbf{k}^{'}} d\Gamma \frac{d^3k^{'}}{(2\pi)^3} = \int \mathrm{L}\{f\} d\Gamma. \qquad (3)$$

В силу H-теоремы интеграл в правой части тождественно обращается в нуль (независимо бозоны это или фермионы). Поскольку скорость $\mathbf{u} = \mathbf{p}/m$ если речь идет об электронах, где m — масса электрона, то второе слагаемое также исчезает в силу того, что $\int (\mathbf{p}\mathbf{k}^{'}) d^3k^{'} d^3p = 0$ и у нас автоматически получается, как и должно быть [1, 2], уравнение вида $\partial N/\partial t = 0$, где, как и должно быть для консервативной системы, полное число частиц $N = \int f d\Gamma = \mathrm{const}$ сохраняется.

Кинетическое уравнение (2) позволяет исследовать разнообразные кинетические свойства фрактальных структур, к примеру таких, как коэффициенты теплопроводности, восприимчивости и проводимости, если образец металлический.

Литература

[1] Лифшиц И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И. Электронная теория металлов. – М.: Наука, 1971. – 450 с.

[2] Гладков С.О. Физика композитов: термодинамические и дисспативные свойства. – М.: Наука, 1999. – 330 с.

[3] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Ижевск: РХД, 2002. – 665 с.

[4] Гладков С.О. О некоторых специфических свойствах нового типа дискретных материалов // Доклады РАН. – 2006. – Т. 408. – В. 2. – С. 182–187.

[5] Гладков С.О. К теории одномерной и квазиодномерной теплопроводности // ЖТФ. – 1997. – Т. 67. – В. 7. – С. 8–12.

[6] Gladkov S.O., Bogdanova S.B.. The heat-transfer theory for quasi-n-dimensional systems // Physica B: Condensed Matter. – 2010. – V. 405. – P. 1973–1975.

УДК 519.6:539.2

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ В ЗАДАЧЕ ВОДОРОДОПРОНИЦАЕМОСТИ

Борматова Е.П.[1]

Изучение процессов переноса водорода в конструкционных материалах вызвано перспективами водородной энергетики и проблемами защиты металлов от водородной коррозии.

Моделируется экспериментальный метод проницаемости, состоящий в следующем [1]. Мембрана толщины l из исследуемого материала является перегородкой вакуумной камеры. При фиксированной температуре образца с входной стороны скачкообразно создается давление $\bar{p}_0$ молекулярного водорода. С выходной стороны производится вакуумирование и с помощью масс-спектрометра определяется плотность выходного десорбционного потока $J_l(t)$, t — время.

Поверхностные процессы адсорбции и растворения учитываются согласно [2]. Поскольку нас интересует, в основном, величина установившегося потока, то процесс накопления водорода на поверхности не учитывается, и рассматривается модель диффузии с объемной десорбцией:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(T)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2},\ \ (t,x) \in (0,t_*)\times(0,l),\ \ c(0,x)=0,\ \ x\in[0,\ell],\ \ P \equiv \mu s(T)\bar{p}_0,$$

$$P - b(T)c_0^2(t) = -D(T)\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=0},\ \ b(T)c_l^2(t) = -D(T)\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=l},\ \ t\in[0,t_*].$$

Здесь $c(t,x)$ — концентрация растворенного атомарного водорода, μ — кинетическая константа, $s(T)$ — коэффициент прилипания водорода из газовой фазы к поверхности, $b(T)$ — коэффициент объемной десорбции. Граничные условия отражают баланс потоков адсорбции, десорбции и диффузии. Коэффициенты диффузии и десорбции зависят от температуры по закону Аррениуса, например, $D(T) = D_0\exp\{-E_D/[RT]\}$. Температурная зависимость μ формально учитывается в $s(T)$ (при увеличении температуры падающий поток уменьшается). Отметим, что поскольку химические процессы активируются с ростом $s(T)$ значительно быстрее диффузии, данная модель может вырождаться в модель с линейными граничными условиями [3].

Экспериментально установлено [4], что для образцов из рекристаллизованного сплава на основе железа установившееся значение проникающего потока демонстрирует аррениусовскую зависимость от температуры, а для аморфного сплава соответствующая зависимость немонотонна: с увеличением температуры до 200°C поток растет, а затем уменьшается. В докладе исследуется возможность объяснения указанных эффектов на основе рассматриваемой модели.

Литература

[1] Кунин Л.Л., Головин А.И., Суровой Ю.И. Хохрин В.М. Проблемы дегазации металлов. – М.: Наука, 1972. – 324 с.

[2] Взаимодействие водорода с металлами. Ред. А.П. Захаров. – М.: Наука, 1987. – С. 143–206.

[1] Борматова Елена Павловна (bormat@psu.karelia.ru) Петрозаводский государственный университет, 185035, Россия, г. Петрозаводск, ул. Ленина, 33.

[3] Заика Ю.В., Борматова Е.П. Параметрическая идентификация модели водородопроницаемости по временам запаздывания // Журнал технической физики. – 2010. – Т. 80. – Вып. 3. – С. 31–39.

[4] Евард Е.А., Сидоров Н.И., Габис И.Е. Водородопроницаемость аморфного и рекристаллизованного сплавов на основе железа // Журнал технической физики. – 2000. – Т. 70. – Вып. 3. – С. 90–92.

УДК 517.9

МНОГОМЕРНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МАРКЕТИНГОВЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Бородинова И.А., Ильина А.И., Сизова Н.А., Трусова А.Ю.[1]

В настоящее время наблюдается все возрастающее внимание к деятельности маркетинговой службы любой организации. Теоретические аспекты деятельности маркетинговых служб хорошо изучены в настоящее время. Однако использование математического аппарата в маркетинговых исследованиях к настоящему времени изучены недостаточно. В этой связи актуальным представляется изучение и использование математического инструментария в маркетинговых исследованиях, в частности многомерных методов.

В данной работе представлен математический аппарат многомерного шкалирования, возможности $SPSS$ в маркетинговых исследованиях, изучены результаты использования факторного анализа и метрического шкалирования [1, 2]. В работе были использованы метод множественных сравнений Шеффе и LSD-критерий для определения ценового коридора различных групп лимонадной продукции.

В качестве математического инструмента использовался аппарат метрического многомерного шкалирования, разработанного Дейвисоном. В основу теории многомерного шкалирования положена идея о возможности развертывания наблюдаемых объектов в некотором теоретическом пространстве, адекватно отображающем реальность. Основополагающим в многомерном шкалировании является Алгоритм Торгерсона, который базируется на жестких теоретических предположениях: в некотором определенном шкальном пространстве X расстояния между наблюдаемыми объектами соответствуют величинам, характеризующим их различия. Расстояния между объектами в теоретическом пространстве описываются метрикой Евклида. В шкальном пространстве X средние значения координат стимулов по каждой оси равны нулю, нуль — исходная точка отсчета. Алгоритм Торгерсона минимизирует меру соответствия F:

$$F = \sum_{i,j} \left(\delta_{ij}^{*} - \sum_{k} x_{ik} x_{jk} \right)^2 \longrightarrow \min,$$

т.е. сумма квадратов разностей центрированных величин — характеристик различий объектов и расстояний между объектами в некотором теоретически определенном пространстве X, — должна быть минимальной (требование метода наименьших квадратов). Определение матрицы X из соотношения $\Delta^{*} = X \cdot X^{T}$ тождественно решению задачи поиска собственных векторов, при этом можно использовать: метод главных компонент, факторный анализ.

В данной работе изучалась продукция безалкогольных напитков. Особое место на рынке негазированных напитков занимают лимонады. Одним из производителей лимонадов в Самарском регионе является компания "Волжский Сад". В работе изучались данные, предоставленные фирмой "Волжский Сад" за одиннадцать месяцев

[1] Бородинова Ирина Александровна (ilina@mail.ru), Ильина Алла Ивановна (ilina@mail.ru), Сизова Наталья Александровна (sizova@mail.ru), Трусова Алла Юрьевна (trusova@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

2009 года. Средствами факторного анализа было установлено, что на первые два фактора приходится основная доля дисперсии 99,5%. Следовательно, оптимальное число факторов равно двум.

Таблица 1. Координаты стимулов в двумерном шкальном пространстве

Номер шкалы	1	2
Количество	0,834	0,539
Себестоимость	0,958	0,282
Продажа	0,913	0,405
Прибыль	0,350	0,936

Средствами многомерного шкалирования визуализированы данные маркетинговой службы [3–5]. Выделенные два главных фактора оптимально восстанавливают исходную матрицу корреляции, о чем свидетельствует таблица 1.

Таким образом, максимальную корреляцию имеют себестоимость и прибыль соответственно с первым и вторым фактором. Средствами многомерного шкалирования (Евклидова метрика, сходство) были выделены две шкалы, согласованные с результатами факторного анализа. В расчетах численное значение $S - stress$ лежало в пределах $[0,1675; 0,17009]$, что является удовлетворительным. Для воспроизведенных матриц расстояний численное значение $S - stress$ и RSQ лежало в пределах: $S - stress = [0,17194; 0,27635]$, $RSQ = [0,85626; 0,92772]$.

Сопоставляя результаты факторного анализа и многомерного шкалирования, присвоены названия выделенным шкалам. Шкала 1 имеет смысловую интерпретацию "Себестоимость", шкала 2 — "Прибыль". Расчет ценовых коридоров осуществлялся с использованием метода Шеффе и LSD-критерия:

$$LSD = t(\alpha; n-k) \cdot \sqrt{\frac{2S_{BH}^2}{n_i}} = \sqrt{\frac{2S_{BH}^2}{n_i} \cdot F(\alpha; 1; n-k)},$$

где $t(\alpha; n-k)$ — табличное значение критерия Стьюдента; $F(\alpha; 1; n-k)$ — табличное значение критерия Фишера—Снедекора; S_{BH}^2 — внутригрупповая дисперсия; n_i — объем выборки i-й группы.

Если разница средних значений соседней пары меньше значения LSD, то эти средние значения считаются одинаковыми, а соответствующие выборки объединяются в однородную группу. LSD-критерий позволяет нам выделить в отдельный ценовой коридор Калипсо Апельсин и Калипсо Кола. Таким образом, ценовой коридор по изученным видам лимонадной продукции может быть рекомендован в одном диапазоне для всех видов, кроме Калипсо Апельсин и Калипсо Кола.

Литература

[1] Дейвисон М. Многомерное шкалирование: Методы наглядного представления данных. – М.: Финансы и статистика, 1988. – 254 с.

[2] Наследов А.Д. SPSS 15: профессиональный статистический анализ данных. – СПб.: Питер, 2008. – 416 с.

[3] Трусова А.Ю. Многомерное шкалирование структуры общества // Вестник Самарского государственного университета. – 2008. – №7(66). – Р. 62–71.

[4] Трусова А.Ю. Математическое моделирование социальных процессов с использованием SPSS // Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математические модели и краевые задачи". Ч. 4 "Информационные технологии в математическом моделировании", Самара, Самарский государственный технический университет. – 2009. – С. 131–133.

[5] Трусова А.Ю. Анализ социально-экономических данных средствами многомерного шкалирования // Прикладная информатика. – 2009. – Т. 24. – №6. – С. 91–98.

УДК 51.73

РАЗРАБОТКА И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВАРИАЦИОННОГО БАЗИСА В ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ ЧАСТИЦ

Брызгалов А.А., Карманов Ф.И.[1]

Вариационный метод широко используется в квантовой механике. В частности, с помощью вариационного метода могут быть получены уровни энергии и волновые функции различных систем в ограниченной области [1]. Для соответствующих расчетов необходимо обладать решением аналогичной задачи, но для граничных условий в 0 и на бесконечности.

Для случая двумерного квантового кольца получено решение как стационарного [2], так и нестационарного [3] уравнения Шредингера. Причем в статье [3] применялся метод расщепления по физическим факторам с использованием разложения решения по собственным функциям стационарной задачи.

Таким образом, в докладе представлены результаты исследования для потенциала двумерного квантового кольца вида $V(r) = a_1/r^2 + a_2 r^2 - V_0$ в ограниченной области. В качестве базисных функций используются функции, полученные вариационным методом для соответствующей, ограниченной области. Кроме того, рассчитана зависимость смещения уровней энергии в ограниченной системе при изменении ее размеров. Произведено сравнение с численными методами.

Предложенная методика может быть распространена на потенциалы другого типа.

Литература

[1] Marin J.L., Cruz S.A. On the use of direct variational methods to study confined quantum systems // Am. J. Phys. – V. 59. – No. 10. – 1991. – P. 931–935.

[2] Tan W.-C., Inkson J.C. Electron states in two-dimentional ring — an exactly soluble model // Semicond. Sci. Technol. – 11. – 1996. – P. 1635–1641.

[3] Брызгалов А.А., Карманов Ф.И. Метод расщепления по физическим факторам в задаче о временной динамике волновых функций электронов двумерного квантового кольца // Матем. моделирование. – Т. 22. – №6. – 2010. – P. 15–26.

[1] Брызгалов Александр Анатольевич (sandro185@mail.ru), Карманов Федор Иванович (fikarm@yandex.ru), Обнинский институт атомной энергетики Национального исследовательского ядерного университета МИФИ, 249040, Россия, г. Обнинск, ул. Студгородок, 1.

УДК 517.9+621.396.6

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА, ИМЕЮЩЕГО СМЫСЛ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ ДЛЯ ТАНГЕНЦИАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, В ЗАДАЧАХ О РАССЕЯНИИ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ РАССЕИВАТЕЛЯХ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Бузова М.А.[1]

Исследованию интегральных уравнений (ИУ) второго рода фредгольмоского типа посвящено большое количество работ. В них освещены как вопросы теоретического характера, так и решены некоторые практические задачи. Однако, во многих работах речь идет об исследовании ИУ с ограниченными вещественными или эрмитовыми ядрами. Рассмотрению же уравнений типа Фредгольма, ядра которых являются не эрмитовыми и имеют особенности, посвящено, на взгляд автора, недостаточное количество работ. При этом уравнения с особенностями возникают в некоторых практически важных задачах, например, при решении задач рассеяния электромагнитного поля на замкнутых идеально проводящих объектах произвольной формы и размеров. Ранее автором уже проводились некоторые исследования в данном направлении [1, 2]. Настоящий доклад посвящен дальнейшему исследованию свойств ядер ИУ Фредгольма второго рода, используемых при решении указанных задач.

Из всего многообразия рассеивателей для рассмотрения выделим электрически тонкие металлические листы с конечной толщиной Δ ($\Delta \ll \lambda$) и электрически небольшими поперечными размерами. Для такого рассеивателя можно пренебречь током на обечайке и записать систему ИУ второго рода для токов на двух сторонах листа. Далее приводится первое уравнение системы, соответствующей, к примеру, поверхности листа S_1, так как второе будет полностью аналогичным:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^0(\vec{r}) = \mathbf{j}_{S_1}(\mathbf{r}) + \int\limits_{S_1} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{j}_{S_1}(\mathbf{r}')ds' + \\ + \int\limits_{S_2} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}' - \Delta \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}'))\mathbf{j}_{S_2}(\mathbf{r}')ds', \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in S_1, \tag{1}$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ — внешняя нормаль к поверхности S_1; $\mathbf{H}^0(\mathbf{r})$ — стороннее магнитное поле; $\mathbf{j}_{S_1}(\mathbf{r})$, $\mathbf{j}_{S_2}(\mathbf{r})$ — поверхностные токи на поверхностях S_1 и S_2, соответственно; $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — ядро ИУ; $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ — радиус-векторы точки наблюдения и точки источника, соответственно; Δ — толщина рассеивателя.

Ядро ИУ в данном случае имеет следующий вид [2]:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{ik}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) \cdot \exp(-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \cdot \left[\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right] \times\right], \tag{2}$$

где k — волновое число.

[1]Бузова Мария Александровна (bma@soniir.samara.ru), ФГУП Ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательский институт радио. Самарский филиал "Самарское отделение научно-исследовательского института радио", 443011, Россия, г. Самара, ул. Советской Армии, 217.

Как было показано в [2], для второго слагаемого в правой части (1) справедливо следующее соотношение:

$$\int\limits_{S_1} K(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{j}_{S_1}(\mathbf{r}')ds' \approx -\frac{1}{2}\mathbf{j}_{S_1}(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Несложно показать, что соотношение (3) будет тем точнее, чем более будет радиус кривизны рассеивателя. При бесконечном радиусе кривизны, т.е. для плоского листа, (3) перейдет в точное равенство [2].

Как следует из (3), выражение полностью совпадает с определением дельта-функции Дирака. Следовательно, для ядра ИУ Фредгольма второго рода в данном случае можно записать следующее выражение:

$$K(\mathbf{r},\mathbf{r}') \approx -\frac{1}{2}\delta_S(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{4}$$

где δ_S — двумерная дельта-функция Дирака.

Далее были рассмотрены свойства ядра во втором интеграле в (1). Как следует из явного вида интеграла, при $\Delta \to 0$, т.е. для бесконечно тонкого листа, данный интеграл полностью совпадает с интегралом в первом слагаемом и, следовательно, его ядро также представимо в виде дельта-функции. При конечной же толщине рассеивателя аналитически вычислить данный интеграл не представляется возможным. Поэтому были проведены численные исследования данного интеграла.

В частности, проводились сравнения функции $\left|-\frac{1}{2}\mathbf{j}_{S_2}(\mathbf{r})\right|$ с модулем образа функции $\mathbf{j}_{S_2}(\mathbf{r})$ после воздействия на нее соответствующего интегрального оператора при различных значения толщины рассеивателя Δ. Проведенные исследования показали, что для малых Δ указанная функция и соответствующий образ близки между собой. Отсюда можно сделать вывод, что ядро $K(\mathbf{r},\mathbf{r}'-\Delta\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r}'))$ с высокой степенью точности также представимо в виде дельта-функции.

Таким образом, используя полученные свойства ядер ИУ Фредгольма второго рода, несложно показать, что ИУ (1) для рассеивателей с электрически малой толщиной вырождается в алгебраическое равенство:

$$2\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r})\times\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_{S_1}(\mathbf{r}) - \mathbf{j}_{S_2}(\mathbf{r}). \tag{5}$$

Аналогичным образом можно показать, что ИУ для второй поверхности листа S_2 вырождается в такое же алгебраическое равенство. Поэтому система ИУ в целом для рассеивателя становится вырожденной. Следовательно, токи $\mathbf{j}_{S_1}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}_{S_2}(\mathbf{r})$ из этой системы определить невозможно; можно найти только их взаимную зависимость.

В рамках данной работы был проведен ряд численных исследований по проверке соотношения (5), оценке его погрешности из-за отличия рассеивателя от плоского и пр. Некоторые примеры результатов численных исследований приводятся в докладе.

Литература

[1] Бузова М.А. Основные принципы комбинирования методов физической оптики и интегральных уравнений при электродинамическом анализе электрически протяженных поверхностных рассеивателей // Вестник СОНИИР. – 2007. – №3(17). – С. 44–50.

[2] Бузова М.А. Интегральное уравнение второго рода и приближение Гюйгенса—Кирхгоффа в задачах о рассеянии электромагнитного поля на протяженных и деально проводящих рассеивателях // Докл. АН. – 2010. – Т. 431. – №4. – С. 471–474.

УДК 539.67

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЮГАМЕЛЯ—НЕЙМАНА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ КОМПОНЕНТОВ ВЕКТОРА СМЕЩЕНИЙ ВОЗНИКАЮЩИЕ ВСЛЕДСТВИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ ОЧАГЕ ПОДЗЕМНОГО ТОЛЧКА

Буралхиева Н.С.[1]

Известно, что перед землетрясением в очаге землетрясения происходит сужение или расширение. Это означает присутствие высокого температурного поля (нагревания или охлаждения) в очаге землетрясения. В связи с этим необходимо нахождение компонентов вектора смещений, которые связаны с распространением продольных и поперечных сейсмических волн. Решением динамического уравнения температурного напряжения Дюгамеля—Неймана при большой температурной функции получены компоненты вектора смещений, которые распространяются по направлениям разрушительных продольных и поперечных сейсмических волн. При анализе полученных результатов выяснилось, что если очаг подземного толчка находится на большой глубине, то влияние теплового поля и массовой силы на смещение существенно. И, еще, так как среда, где распространяются сейсмические волны, неоднородна, то геофизико-механико-математические модели распространения сейсмических волн Лява и Рэлея и их скорости найдены с учетом неоднородности среды по глубине. Результаты дают полную картину для прогнозирования землетрясений (и цунами обоих типов) вместе с геофизико-механико-математическими моделями сейсмических волн Лява и Рэлея. Геофизико-механико-математические модели сейсмических волн Лява и Рэлея, т.е. законы их распространения нами уже получены, также получены предпатенты в Республике Казахстан на эти работы [3].

Литература

[1] Аки Х., Ричардс П. Количественная сейсмология. – М.: Мир, 1983.
[2] Крылов. А.Н. Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР, 1958.
[3] С.П. Тимошенко. Теория упругости. – М., Л.: ОНТТИ–ГТТИ, 1934.

[1] Буралхиева Назифа Сламхановна (nazifa174@mail.ru), Евразийский Национальный Университет им. Л.Н. Гумилева, 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Мунайтпасова, 5.

УДК 517.1

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА, ФЕЙНМАНА—КАЦА И ГАМИЛЬТОНОВЫ ИНТЕГРАЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Бутко Я.А.[1]

В докладе представлены гамильтоновы и лагранжевы формулы Фейнмана для эволюционных уравнений, соответствующих феллеровским случайным процессам. Обсуждается связь полученных формул Фейнмана с формулами Фейнмана—Каца для тех же уравнений, а также с гамильтоновыми интегралами Фейнмана по траекториям некоторых квантовых систем.

Формулой Фейнмана называется представление решения начальной или начально-краевой задачи для эволюционного уравнения в виде предела конечнократных интегралов по декартовой степени некоторого пространства при стремлении кратности к бесконечности (ср. [11]). Пределы такого рода были введены в работах Фейнмана (см. [6, 7]) для представления решения уравнения Шредингера с потенциалом. Фейнман интерпретировал эти пределы как интегралы по некоторым бесконечномерным пространствам (траекторий системы, описываемой рассматриваемым уравнением). В наши дни конструкция, предложенная Фейнманом, получила широкое распространение, и представления решений эволюционных уравнений с помощью функциональных интегралов (интегралов по бесконечномерным пространствам функций) называются обычно *формулами Фейнмана—Каца*. Подобные представления помогают, в частности, связать исследования эволюционных уравнений математической физики со стохастическим анализом.

Существует множество различных методов получения формул Фейнмана–Каца средствами как стохастического, так и функционального анализа. Заметим, что, так как решение начальной (или начально-краевой) задачи для эволюционного уравнения может быть представлено не только формулой Фейнмана—Каца, но и формулой Фейнмана, то предел в формуле Фейнмана, полученной для рассматриваемой задачи, совпадает с функциональным интегралом в формуле Фейнмана—Каца для той же задачи. Таким образом, с одной стороны, получение формул Фейнмана — это еще один способ получения формул Фейнмана—Каца (а так же, например, доказательства формул, аналогичных формулам Камерона—Мартина—Гирсанова—Маруямы—Реймера). С другой стороны, непосредственное вычисление функциональных интегралов в формулах Фейнмана—Каца зачастую затруднительно, так как приводит к пределам конечнократных интегралов, содержащих неизвестные в явном виде переходные вероятности некоторых случайных процессов. В то же время, оказывается возможным получить для тех же задач формулы Фейнмана, содержащие интегралы только от элементарных функций. Тем самым, допредельные выражения в формулах Фейнмана представляют собой пригодные для непосредственных вычислений аппроксимации функциональных интегралов в формулах Фейнмана—Каца (а, значит, и аппроксимации решений соответствующих эволюционных уравнений, или, что то же, аппроксимации полугрупп, разрешающих эти уравнения). Таким образом, формулы Фейнмана — это еще одно средство вычисления функциональных

[1] Бутко Яна Анатольевна (yanabutko@yandex.ru), Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., 5.

интегралов, полезное в том числе и для компьтерной симуляции случайных процесов. Кроме того, в некоторых случаях формулы Фейнмана могут быть использованы для определения соответствующих функциональных интегралов (см., напр. [11]).

Функциональный интеграл в формуле Фейнмана—Каца для эволюционного уравнения — это интеграл по некоторой мере или псевдомере на множестве функций, принимающих значения в конфигурационном или в фазовом пространстве системы, описываемой рассматриваемым уравнением. В соответствии с этим, если формулы Фейнмана аппроксимируют функциональные интегралы по множеству траекторий в конфигурационном пространстве некоторой системы, то они называются *лагранжевыми формулами Фейнмана*. Если формулы Фейнмана соответствуют функциональным интегралам по траекториям в фазовом пространстве некоторой системы, то они называются *гамильтоновыми формулами Фейнмана*.

В докладе обсуждаются лагранжевы формулы Фейнмана для эволюционных уравнений, соответствующих диффузии с переменным коэффициентом в области евклидова пространства (см. [3]) и феллеровскому процессу типа Коши во всем пространстве (см. [4]). Также в докладе представлены гамильтоновы формулы Фейнмана для некоторого класса эволюционных уравнений, соответствующих феллеровским процессам (см. [4]). Гамильтоновы формулы Фейнмана в некоторых случаях могут быть интерпретированы как интегралы по (гамильтоновой) псевдомере Фейнмана, сосредоточенной на траекториях в фазовом пространстве некоторой квантовой системы. Это позволяет установить связь между интегралами по мерам гауссовского типа и интегралами по гамильтоновой псевдомере Фейнмана.

Доказательство формул Фейнмана основано на методе, разработанном в статьях [8, 9, 11] для исследования диффузии и квантовой эволюции частиц в евклидовых пространствах и на римановых многообразиях. В доказательстве применяется теорема Чернова (см. [5], ср. [11]), что позволяет исследовать широкий класс начальных и начально-краевых задач для различных эволюционных уравнений (см., напр., [1–4], [8–11].

Литература

[1] Бутко Я.А. Формулы Фейнмана и функциональные интегралы для диффузии со сносом в области многообразия // Мат. заметки. – 2008. – Т. 83. – В. 3. – С. 333–349.

[2] Бутко Я.А. Функциональные интегралы, соответствующие решению задачи Коши-Дирихле для уравнения теплопроводности в области компактного риманова многообразия // Фунд. и прикл. математика. – 2006. – Т. 12. – С. 3–15.

[3] Бутко Я.А., Гротхаус М., Смолянов О.Г. Формула Фейнмана для параболического уравнения второго порядка в области // Доклады Ак. Наук. – 2008. – Т. 421. – №6. – С. 727–732.

[4] Бутко Я.А., Смолянов О.Г., Шиллинг Р. Формулы Фейнмана для феллеровских полугрупп // Доклады Ак. Наук. – 2010. – Т. 434. – №1.

[5] Chernoff P. Product formulas, nonlinear semigroups and addition of unbounded operators // Mem. Am. Math. Soc. – No. 140. – 1974.

[6] Feynman R.P. Space-time Approach to Nonrelativistic Quantum Mechanics // Rev. Mod. Phys. – No. 20. – 1948. – P. 367–387.

[7] Feynman R.P. An Operation Calculus Having Application in Quantum Electrodynamics // Phys. Rev. – No. 84. – 1951. – P. 108–128.

[8] Смолянов О.Г., фон Вайцзеккер Х., Виттих О. Диффузия на компактных римановых многообразиях и поверхностные меры // Доклады Ак. Наук. – 2000. – Т. 371. – №. 4. – С. 442–447.

[9] Smolyanov O.G., Weizsäcker H. v., Wittich O., Brownian Motion on a Manifold as Limit of Stepwise Conditioned Standard Brownian Motions // Stochastic Proceses, Physics and Geometry: New Interplays. II: A Volume in Honor of Sergio Albeverio. Ser. Conference Proceedings. – Canadian Math. Society. – Providence: AMS. – 2000. – V. 29. – P. 589–602.

[10] Smolyanov O.G., Weizsaecker H. v., Wittich O., Chernoff's Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds // Potent. Anal. – 2007. – V. 26. – No. 1. – P. 1–29.

[11] Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A., Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J. Math. Phys. – 2002. – V. 43. – No. 10. – P. 5161–5171.

УДК 537.632

МАГНИТООПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СИММЕТРИЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФРАКЦИОННЫХ СТРУКТУР

Быков Д.А., Досколович Л.Л., Сойфер В.А.[1]

Исследованы магнитооптические свойства диэлектрической структуры состоящей из намагниченной бинарной дифракционной решетки и намагниченного однородного слоя [1, 2]. Структура намагничена в плоскости, вектор намагниченности направлен перпендикулярно щелям решетки (рис. 1, врезка). На основе результатов численного моделирования по методу Фурье—Мод [3, 4] показано, что структура обладает магнитооптическими эффектами, заключающимися в резонансном изменении коэффициентов пропускания и отражения, происходящем при изменении величины намагниченности [1, 2].

На рис. 1 (a, b) представлены магнитооптические резонансы в спектре пропускания структуры для TE- и TM-поляризаций падающей волны. Магнитооптические эффекты объяснены возбуждением собственных мод структуры. Дисперсия собственных мод, рассчитанная с использованием метода матрицы рассеяния [5] представлена на рис. 1(c). Показано что частоты магнитооптических резонансов в точности описываются дисперсионными кривыми мод структуры. Исследовано изменение дисперсионных кривых вызванное намагничиванием структуры.

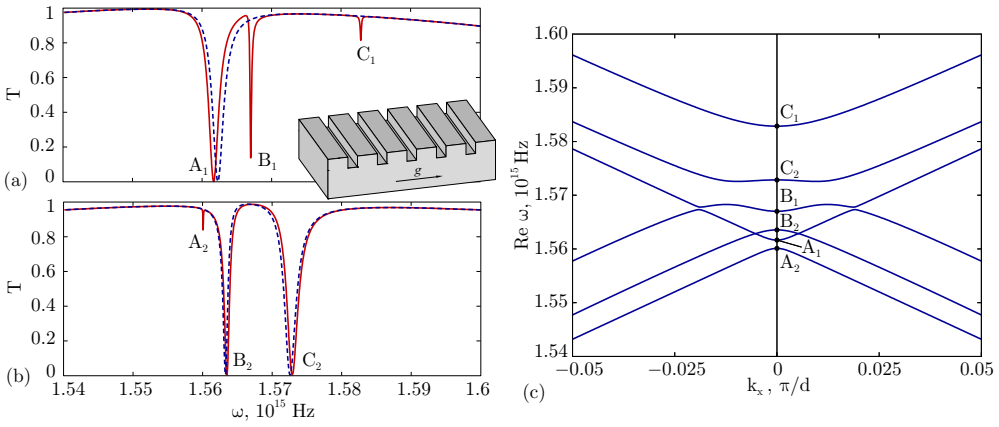


Рис 1. Рассматриваемая структура (врезка). Спектр пропускания при падении волны TE-поляризации (a); TM-поляризации (b). (Намагниченная структура — непрерывная линия; ненамагниченная — пунктирная линия). Дисперсия собственных мод структуры в центре первой зоны Бриллюэна (c)

В случае ненамагниченной симметричной структуры могут быть возбуждены только четные (симметричные) моды [6]. Для анализа мод намагниченной структу-

[1]Быков Дмитрий Александрович (bykovd@gmail.com), Досколович Леонид Леонидович (leonid@smr.ru), Сойфер Виктор Александрович (soifer@ssau.ru), Учреждение Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН, 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 151. Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34.

ры были рассчитаны распределения поля мод структуры, на их основе предложена классификация магнитооптических резонансов.

Магнитооптические резонансы 1-го типа (резонансы A_1, B_2, C_2 на рис. 1) возникают из-за изменения условий возбуждения мод структуры. Изменение условий возбуждения мод описывается смещением дисперсионных кривых, происходящим при намагничивании структуры. При нормальном падении волны с TE- (TM-) поляризацией на симметричную структуру резонансы 1-го типа соответствуют возбуждению мод, у которых TE- (TM-) компоненты поля близки к четным модам ненамагниченной структуры с такой же поляризацией. Магнитооптические резонансы 2-го типа (резонанс A_2, B_1, C_1 на рис. 1) происходят при возбуждении мод структуры, имеющих тип поляризации «противоположный» поляризации падающей волны. При нормальном падении волны с TE- (TM-) поляризацией на симметричную структуру резонансы 2-го типа соответствуют возбуждению мод, у которых TM- (TE-) компоненты поля близки к нечетным модам ненамагниченной структуры с TM- (TE-) поляризацией.

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы "Фундаментальные исследования и высшее образование" (грант BRHE PG08-014-1), гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-7414.2010.9) и грантов РФФИ 09-07-12147, 10-02-01391, 09-07-92421, 10-07-00553.

Литература

[1] Быков Д.А., Досколович Л.Л., Сойфер В.А. Исследование магнитооптических резонансов в диэлектрических дифракционных решетках на основе анализа дисперсии и структуры собственных мод // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33. – № 4. – С. 384–392.

[2] Belotelov V.I., Bykov D.A., Doskolovich L.L., Kalish A.N., Kotov V.A., Zvezdin A.K. Giant magneto-optical orientational effect in plasmonic heterostructures // Optics Letters. – 2009. – V. 34. – P. 388–400.

[3] Moharam M.G., Grann E.B., Pommet D.A., Gaylord T.K. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings // J. Opt. Soc. Am. A. – 1995. – V. 12. – P. 1068–1076.

[4] Moharam M.G., Pommet D.A., Grann E.B., Gaylord T.K. Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix approach // J. Opt. Soc. Am. A. – 1995. – V. 12. – P. 1077–1086.

[5] Tikhodeev S.G., Yablonskii A.L., Muljarov E.A., Gippius N.A., Ishihara T. Quasiguided modes and optical properties of photonic crystal slabs // Phys. Rev. B. – 2002. – V. 66. – P. 045102.

[6] Gippius N.A., Tikhodeev S.G., Ishihara T. Optical properties of photonic crystal slabs with an asymmetrical unit cell // Phys. Rev. B.. – 2005. – V. 75. – P. 045138.

УДК 539.382.2

АСИММЕТРИЧНАЯ УПРУГОСТЬ

Бытев В.О., Слезко И.В.[1]

В докладе представлены результаты исследования деформированного состояния асимметрично-упругих пластин на примере задачи о чистом сдвиге в пластине, ослабленной отверстием. Для описания деформаций упругого тела используется модель асимметричной упругости. Проводится сравнительный анализ решений, полученных посредством двух моделей линейной теории упругости — классической и асимметричной.

Как известно [1], уравнения статики имеют вид

$$\mathrm{div}\mathbf{T} + \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{T}$ — тензор напряжений, $\mathbf{F}$ — вектор объемных сил.

Общий вид тензора напряжений установлен в результате решения задачи групповой классификации законов сохранения в работах [2, 3]. В случае плоской задачи он имеет вид:

$$\mathbf{T} = \mathbf{I}\,\lambda_0 \,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{D}_0, \tag{1}$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор, $\mathbf{u} = \{u, v\}$ — вектор смещений, $\mathbf{D}_0$ — девиатор деформаций,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu & \mu_0 \\ -\mu_0 & \mu \end{pmatrix}, \tag{2}$$

λ_0, μ, μ_0 — кинетические коэффициенты, причем $\lambda_0 > 0$, $\mu > 0$, а $\mu_0 \in \mathbb{R}$.

Данная модель служит обобщением классической линейной модели деформации упругого тела. Так, если положить в (1) $\mu_0 = 0$, $\lambda_0 = \lambda + \mu$, считая λ и μ параметрами Ламе, то получим известную зависимость между тензорами напряжений и деформаций [1].

Поясним суть появления дополнительного третьего параметра в модели.

Обозначим $\boldsymbol{\tau}^0 = \left(\mathbf{M}\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{n}\right)$ — вектор девиатора тензора $\mathbf{T}$, а $\mathbf{d}^0 = \left(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{n}\right)$ — вектор тензора $\mathbf{D}_0$. Определим угол между векторами $\boldsymbol{\tau}^0$ и $\mathbf{d}^0$. Согласно [3]

$$\cos\gamma = \frac{(\boldsymbol{\tau}^0 \cdot \mathbf{d}^0)}{|\boldsymbol{\tau}^0| \cdot |\mathbf{d}^0|} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \mu_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\mu_0/\mu)^2}}.$$

Последнее соотношение определяет меру несоосности тензоров $\mathbf{M}\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}_0$.

Можно показать, что в линейной модели асимметричной упругости симметричные тензоры напряжений и деформаций связаны несимметричным преобразующим тензором.

Как и в классическом случае [1], можно выразить вектор смещений и компоненты тензора напряжений через комплексные потенциалы $\varphi(z)$, $\psi(z)$, вводя функцию Эри $U(x, y)$ по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

[1]Слезко Ирина Викторовна (slezkoirina@rambler.ru), Бытев Владислав Олегович (vbytev@utmn.ru), Тюменский государственный университет, 625003, Россия, г. Тюмень, ул. Семакова, 10.

Комплексное представление вектора смещений имеет вид:

$$2\kappa_0^2(u+iv) = \big(2\lambda_0^{-1}\kappa_0^2 + \overline{\kappa}\big)\varphi(z) - \kappa\, z\,\overline{\varphi'(z)} - \kappa\,\overline{\psi(z)},$$

где $\kappa = \mu + i\,\mu_0$.

Рассмотрим теперь две комплексные плоскости Z, Ω и зададим конформное отображение $z = \omega(\zeta)$, которое переводит область $\mathrm{S} \subset \mathrm{Z}$ в область $\Sigma \subset \Omega$. Введем на плоскости Ω полярные координаты (ρ, ϑ) так, что $\omega = \rho e^{i\vartheta}$. Приведем выражения компонент вектора смещений с помощью комплексных потенциалов $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ в полярных координатах:

$$2\kappa_0^2(u_\rho + iu_\vartheta) = e^{-i\vartheta}\left[\Big(2\lambda_0^{-1}\kappa_0^2 + \overline{\kappa}\Big)\varphi(\zeta) - \kappa\,\zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} - \kappa\,\overline{\psi(\zeta)}\right]. \tag{3}$$

Как уже было отмечено, асимметричная модель является обобщением классических формул Лява. При $\mu_0 = 0$ и $\lambda_0 = \lambda + \mu$ имеем:

$$2\mu(u_\rho + iu_\vartheta) = e^{-i\vartheta}\big[\kappa\varphi(\zeta) - z\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}\big],$$

где $\kappa = \dfrac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\sigma$, λ, μ — модули упругости ($\lambda > 0$, $\mu > 0$), σ — коэффициент Пуассона.

Поле напряжений обеих моделей одинаково. Уравнения для компонент тензора напряжений в комплексной формулировке имеют вид (формулы Колосова):

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4\mathrm{Re}[\varphi'(z)], \quad \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2\big[\overline{z}\,\varphi''(\zeta) + \psi'(\zeta)\big].$$

Как известно, классическая теория не дает возможности вести расчет изделий, изготовленных из полимерных материалов. В таких случаях инженер вынужден использовать более сложный аппарат нелинейной упругости. Использование же асимметричной модели дает нам возможность вести расчет изделий в том числе и из полимеров, получая при этом адекватные результаты.

В качестве примера плоской деформации упругих пластин в рамках классической и асимметричной моделей рассмотрим задачу о чистом сдвиге в пластине, ослабленной отверстием в форме криволинейного правильного четырехугольника.

Будем пользоваться конформным отображением внешности отверстия на внутренность круга единичного радиуса. Возьмем отображающую функцию, удерживая в ней два члена [4]:

$$z = \omega(\zeta) = R\Big(1/\zeta - \zeta^3/6\Big).$$

Здесь $R = 3a/5$, где a — сторона четырехугольника.

Согласно [4], выражения для комплексных потенциалов даются уравнениями:

$$\varphi(\zeta) = i\frac{6}{5}R\,\tau,\ \psi(\zeta) = -iR\,\tau\left[\frac{1}{\zeta} + \frac{13\zeta^3}{5(2+\zeta^4)}\right],$$

где τ — сдвиговое усилие. Для данной задачи получено поле напряжений и выражения для компонент вектора смещений модели (3).

Полученное решение иллюстрируется на примере задачи о чистом сдвиге в пластине из резины.

Вычислительный эксперимент показывает, что на значение параметра μ_0 существенно влияют физические свойства материала, причем величина параметра сравнима со значением модуля Юнга. Очевидно, реальные значения дополнительного модуля упругости могут быть получены экспериментально.

Геометрическая интерпретация полученных результатов позволяет говорить о том, что использование асимметричной модели для описания деформированного состояния тела дает возможность получать физически реальные результаты в рамках линейной теории упругости в том числе и в случае, если твердое тело изготовлено из полимера. Таким образом, мы получаем в распоряжение новый кинетический параметр μ_0, с помощью которого можно "регуляризировать" решение.

Литература

[1] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Ленинград: Изд. Академии наук, 1933. – 381 с.

[2] Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашев С.И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. – Новосибирск: Наука, 1985. – 144 с.

[3] Андреев В.К., Бублик В.В., Бытев В.О. Симметрии неклассических моделей гидродинамики. – Новосибирск: Наука, 2003. – 350 с.

[4] Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наукова думка, 1968. – 888 с.

УДК 517.95

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВБЛИЗИ ОСОБОЙ ТОЧКИ ГРАНИЦЫ

Васильев В.Б.[1]

Исследуется поведение решения эллиптического псевдодифференциального уравнения вблизи особой точки границы типа "конус". Рассматривается случай, когда раствор конуса стремится к нулю. Конструкции связаны с предшествующими исследованиями автора [1]. Некоторые результаты в этом направлении изложены в [2].

Литература

[1] Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. 2-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2010. – 136 с.

[2] Васильев В.Б. Псевдодифференциальные уравнения в канонических негладких областях: асимптотический анализ особенностей // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Серия "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления". – 2007. – №780. – В. 8. – С. 49–60.

[1] Васильев Владимир Борисович (vbv57@inbox.ru), Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, 241036, Россия, г. Брянск, ул. Бежицкая, 14.

УДК 517.93 533.9

УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА–МАКСВЕЛЛА, ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА И МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

Веденяпин В.В., Негматов М.А.[1]

Уравнение Власова—Максвелла является основным при описании плазмы. Написанное в 1938 г. А.А. Власовым [1] — оно все больше используется вместо уравнений МГД в расчетах сложных плазменных задач в связи с ростом мощностей компьютеров. В докладе описывается вывод уравнений Власова—Максвелла из лагранжиана классической электродинамики. Вывод фактически следует [2] и приведен в [3]. Обсуждается тождество Лагранжа которое, как известно, связывает между собой вторую производную от момента инерции системы материальных точек через кинетическую энергию и однородную потенциальную энергию: $\ddot{I} = 2(U - 2T)$ и обобщено для уравнений Власова—Пуассона В.В. Козловым в [4]. Мы выводим это тождество для полной системы уравнений Власова—Максвелла:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \left(v_\alpha, \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}\right) - e_\alpha \left(E + [v_\alpha, H], \frac{\partial f_\alpha}{\partial p}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -\frac{4\pi}{c}\Sigma_\alpha e_\alpha \int v_\alpha^\mu f_\alpha(t,x,p)dp,\ F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu},\ (\mu,\nu\ :\ 1,\ldots,4)\,.$$

Здесь α сорт частиц, отличаемый по массе m_α и заряду e_α, $f_\alpha(t,x,p)$ — функция распределения частиц сорта α по пространству x и импульсам p в момент времени t, $A_\mu(x)$ — потенциал, $F_{\mu\nu}$ — электромагнитные поля.

Выводятся уравнения МГД в простейших случаях: с температурой равной нулю, как точное следствие уравнений Власова—Максвелла, так и с температурой, не равной нулю, как нулевое приближение метода Максвелла—Чемпена—Энскога. В последнем случае получаются уравнения в дважды дивергентной форме (форме Годунова [5]). Обсуждаются приложения тождества Лагранжа.

Литература

[1] Власов А.А. О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ. – 1938. – Т. 8. – В. 3. – С. 291–318.

[2] Ландау Л.Д., Лифщиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. – М.: Наука, 1967.

[3] Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. – М.: Физматлит, 2001.

[4] Козлов В.В. Обобщенное кинетическое уравнение Власова // УМН. – Т. 63. – Вып. 4(382). – 2008.

[5] Годунов С.К. Раменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. – Новосибирск: Научная книга, 1998.

[1] Веденяпин Виктор Валентинович (vicveden@yahoo.com), Негматов Малик (maliknegmatov@gmail.com), Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4.

УДК 512.625.5+517.982.4

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ p-АДИЧЕСКИХ СТРУН

Владимиров В.С.[1]

Исследуется структура решений краевых задач для нелинейной системы севдодифференциальных уравнений, описывающей динамику (роллинг) p-адических открытой, замкнутой и открыто-замкнутой струн для скалярного поля тахионов. Для открыто-замкнутой струны доказано существование решений при нечетных p вида $p = 4n + 1$ при условии существования решения для замкнутой струны.

Литература

[1] Владимиров В.С. О нелинейных уравнениях p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн // ТМФ. – 2006. – Т. 149. – №3. – С. 354–367.

[1] Владимиров Василий Сергеевич (vladim@mi.ras.ru), Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

УДК 530.1:51-72

ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ С РАСШИРЕННЫМ СЕКТОРОМ ХИГГСА И НАБЛЮДАЕМЫЕ СЛЕДСТВИЯ ДЛЯ ФИЗИКИ НА БОЛЬШОМ АДРОННОМ КОЛЛАЙДЕРЕ И КОСМОЛОГИИ

Волкова Т.В., Долгополов М.В.[1], *Дубинин М.Н.*[2], *Петрова Е.Ю., Рыкова Э.Н.*[1]

Современная ситуация в физике элементарных частиц и космологии приводит к необходимости развития моделей, которые позволили бы дать объяснение ряду наблюдаемых фактов: отсутствию антиматерии во Вселенной (барионная асимметрия), в условии нуклеосинтеза малости отношения наблюдаемого числа барионов к числу фотонов, что не предполагается стандартной космологической моделью, и отсутствию (ненаблюдаемости) легкого CP-четного бозона Хиггса и суперчастиц при энергиях $LEP2$ и $Tevatron$. Как показал Сахаров [1], первые два факта могут иметь место, если в ранней Вселенной были B-несохраняющие взаимодействия, нарушение C- и CP-инвариантности и отклонение от теплового равновесия.

Одним из сценариев, предложенных для объяснения генерации асимметрии материи-антиматерии, является сценарий электрослабого бариогенезиса. Для наличия бариогенезиса в минимальной версии электрослабой теории (Стандартная модель (СМ)) необходимо, чтобы масса бозона Хиггса была меньше $m_H \leq 42$ ГэВ. Это противоречит современному экспериментальному ограничению, $m_H \geq 114,4$ ГэВ [2]. Для бариогенезиса необходимо расширение СМ, например, за счет добавления дополнительных бозонов Хиггса и скалярных полей. В моделях с несколькими бозонами Хиггса ограничение на массу становятся значительно слабее. Также нарушение CP-инвариантности в матрице Кабиббо—Кобаяши—Маскава слишком мало для генерации достаточного барионного числа. Следовательно, необходимы дополнительные источники CP-нарушения и легкие бозоны, усиливающие электрослабый фазовый переход первого рода.

Среди многочисленных обобщений модели Глешоу—Вайнберга—Салама наиболее мотивированной является минимальная суперсимметричная стандартная модель (МССМ). Это связано, прежде всего, с возможностью в рамках этой модели получить эффективное описание бариогенезиса, нарушения CP-инвариантности и усиления интенсивности фазового перехода первого рода, что соответствует выполнению условий Сахарова.

Исследование фазовых переходов в суперсимметричных моделях с явным нарушением CP-инвариантности эффективного хиггсовского потенциала и сравнение результатов с МССМ позволили бы сделать фундаментальные выводы о природе механизмов генерации избытка барионов во Вселенной, возможностях генерации барионной асимметрии в рамках существующих расширений СМ, или же существовании совершенно других взаимодействий, нарушающих сохранение барионного числа.

Основной целью работы является вычисление эффективных потенциалов для ансамбля частиц при конечной температуре в моделях с расширенным сектором

[1]Волкова Татьяна Васильевна (milandiya@yandex.ru), Долгополов Михаил Вячеславович (mikhaildolgopolov@rambler.ru), Петрова Елена Юрьевна (kuleobul@rambler.ru), Рыкова Эльза Нуровна (elzarykova@rambler.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

[2]Дубинин Михаил Николаевич (dubinin@theory.sinp.msu.ru), Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, 119992, г. Москва, Ленинские горы.

Хиггса, обладающим явным (и спонтанным) нарушением CP-инвариантности, для объяснения свойств фазовых переходов и определения взаимосвязи с экспериментом ограничений на теоретические модели. Вычисление эффективных потенциалов позволит найти критическую температуру, скрытую теплоту, параметр порядка и другие характеристики фазовых переходов, а также описать образование пространственных доменов с новым основным состоянием.

Канонические методы вычисления эффективного потенциала при конечной температуре, применяемые в исследовании, хорошо развиты, имеют обширную историю и являются фактически хрестоматийными. Эффективный потенциал в модели с самодействующим скалярным полем был получен в однопетлевом приближении (с ресуммированием) Коулменом и Э.Вайнбергом (1973). Многопетлевые формы были вычислены Джакивом (1974) и Илиопулосом, Ициксоном, Мартином (1975). Наиболее известные формы получены как в схеме размерной регуляризации $\overline{MS}$ (Бардин, Бюрас, Дьюк и Мута, 1978) так и в схеме $\overline{DR}$ (Сигель, 1979). Систематическое изложение методов получения температурных потенциалов было начато Доланом, Джакивом (1974) и С.Вайнбергом (1974). Вычисление температурных пропагаторов в формализме с мнимым временем (Мацубара, 1955) и действительным временем (Келдыш, 1964) основывается на соотношении периодичности Кубо (1957) и Мартина, Швингера (1959). Восстановление симметрии при высокой температуре и фазовый переход от состояния с нулевым вакуумным средним скалярного поля к состоянию с ненулевым вакуумным средним (v) обсуждалось Киржницем (1972) и далее Киржницем, Линде (1974,1976), Доланом, Джакивом (1974), Линде (1979,1981,1990). Фазовый переход первого рода в СМ, впервые отмеченный Киржницем, Линде (1976), исследовался также Андерсеном, Холлом (1992) и Дайном и др. (1992). Распад ложного вакуума рассматривался Коулменом (1977) и Калланом, Коулменом (1977). Образование пространственных доменов новой фазы рассматривалось Линде (1981), Маклерраном, Шапошниковым, Турок, Волошиным (1991) и Дайном и др. (1992). Существенно более сложный случай CP-инвариантной двухдублетной модели рассматривался Морено, Куиросом и Секo (1998).

Бариогенезис при электрослабых фазовых переходах описан Кузьминым, Рубаковым, Шапошниковым (1985,1987). Несохранение барионного числа (тХоофт, 1976) при фазовом переходе рассматривлось Кохеном, Капланом, Нельсон (1993). Генерация барионной асимметрии в симметричной фазе (при температуре, большей критической) описана Шапошниковым (1988) и Арнольдом, Маклерраном (1987). Генерация при температурах меньше критической анализировалась Шапошниковым (1987), Бочкаревым, Кузьминым, Шапошниковым (1991). Важную роль для всех современных исследований электрослабого фазового перехода играет критерий Шапошникова (1986) $v_C/T_C > 1$ сильного фазового перехода первого рода, который необходим для генерации барионной асимметрии в СМ.

Проблемы применимости теории возмущений для температурных эффективных потенциалов рассматривались Гроссом, Писарским, Яффе (1981), Парвани (1992), Арнольдом, Эспинозой (1993), в результате чего были получены улучшенные эффективные температурные потенциалы. Применение метода эффективного (нетемпературного, $T = 0$) потенциала для случая двухдублетного хиггсовского сектора МССМ было проведено Окада, Ямагучи, Янагида (1991), Эллисом, Ридольфи, Цвирнером (1991) на основе подходов Флореса, Шера (1983). Был реализован естественный подход, в рамках которого сначала нужно вычислить эффективный потенциал, а потом уже извлекать из него физические состояния бозонов Хиггса, которые не имеют нефизических расходимостей. Взаимодействия массивного топ-кварка вносят

большие радиационные поправки в параметры эффективного потенциала. В частности, был получен важнейший результат о допустимости массы наиболее легкого нейтрального бозона Хиггса порядка 130–140 ГэВ (в отличие от "древесного" ограничения МССМ 91 ГэВ) при массе топ-кварка 175 ГэВ. В этих работах (а также большом количестве последующих) учитывались лишь лидирующие логарифмические поправки. Степенные (или пороговые) поправки были получены Хабером и Хемпфлингом (1993) и Кареной, Эспинозой, Куиросом, Вагнером (1995). Эти результаты уточнялись Ахметзяновой, Долгополовым, Дубининым (2005), обнаружившими существенные вклады от нелидирующих D-членов и перенормировки волновой функции скаляров. Эффективный температурный потенциал двухдублетного хиггсовского сектора МССМ рассматривался Гуидисом (1992), Эспинозой, Куиросом, Цвирнером (1993), Бриньолем и др. (1994). Фактически анализировался лишь упрощенный случай частного вида CP-инвариантного потенциала МССМ, когда радиационные поправки учитываются не полностью. Фазовые переходы рассматривались Кареной, Куиросом, Вагнером (1996), которые учли смешивание суперпартнеров кварков (т.е. включили ненулевые трилинейные параметры A при членах стоп-стоп-хиггс и ненулевой параметр мю хиггсовского суперполя). Наболее важные двухпетлевые поправки в эффективный потенциал были получены Эспинозой (1996). Были выделены четыре основных случая для фазовых переходов МССМ, в зависимости от поведения температурной зависимости скалярного поля и поля правого суперпартнера топ-кварка.

Впервые потенциал общей двухдублетной модели с явным нарушением CP-инвариантности рассматривался Джорджи (1978). Этот анализ имеет непосредственное отношение к МССМ, поскольку эффективный двухдублетный потенциал МССМ на масштабе масс топ-кварка содержит все члены общего двухдублетного потенциала (с параметрами λ_1–λ_7). Упрощенные случаи явного CP-нарушения в МССМ ($\lambda_{5,6,7}$ равны нулю) обсуждались Пилафтсисом (1998) и далее Пилафтсисом и Вагнером (1999), а также Демиром (1999), Хайнемайером (2001), Чоем, Дрисом, Ли (2000) для более общих потенциальных форм. Методы минимизации и диагонализации потенциала общей двухдублетной модели с явным нарушением CP-инвариантности рассматривалась Дубининым, Семеновым (2003), а также Ахметзяновой, Долгополовым, Дубининым (2005) для случая одновременно явного (в потенциале) и спонтанного (в вакуумных средних) нарушения CP-инвариантности. Новым методом расчетов, развитым в последнее время авторами, является автоматическая генерация правил Фейнмана МССМ в формате пакета $CompHEP$, который затем может использоваться для расчетов ширин распадов и сечений рождения бозонов Хиггса, а также генерации событий для последующего реалистического моделирования эксперимента.

В числе основных подходов, используемых для объяснения избытка барионов над антибарионами, важное место занимает электрослабый бариогенезис, основным элементом которого является аномалия Адлера (1969) и Белла, Джакива (1969). На уровне классического рассмотрения барионное число сохраняется. Среди других подходов можно отметить, например, бариогенезис как следствие лептогенезиса (Фукуджита, Янагида, 1986) и бариогенезис Аффлека, Дайна (1985). Эти механизмы эффективны только в расширениях СМ, поскольку СМ не обеспечивает раннюю генерацию барионной асимметрии (Сахаров, 1967).

В результате проведенных исследований предложен новый подход к вычислению температурных потенциалов, в рамках которого радиационные/температурные поправки МССМ включаются в параметры двухдублетного потенциала наиболее об-

щего вида λ_1, ... λ_7, после чего рассчитываются массовые состояния бозонов Хиггса и углы смешивания для нефизических $SU(2)$-состояний. Новый метод рассмотрен для нетемпературного ($T = 0$) потенциала, а также для расширения на случай температурных эффективных потенциалов МССМ. Расширение подхода на случай температурных эффективных потенциалов и возможности исследования электрослабого фазового перехода в МССМ рассматривалось авторами в работах самого последнего времени, основными среди которых являются [3].

Ценность научной работы состоит в развитии эффективного подхода к получению ограничений на массы физических состояний бозонов Хиггса, константы взаимодействия с фермионами, калибровочными бозонами, эффективные константы самодействия бозонов Хиггса, ширины редких распадов и пространство параметров суперсимметричных моделей.

Результаты являются оригинальными. Эффекты явного CP-нарушения в хиггсовском секторе МССМ и НМССМ могут быть существенны также для экспериментов на коллайдере LHC и линейных коллайдерах нового поколения, которые предоставляют дополнительные актуальные возможности приложения ожидаемых результатов, "интерфейс физики на LHC и космологии". Моделирование экспериментов на коллайдере LHC по определению CP-свойств бозонов Хиггса и возможностей их детектирования коллаборациями $ATLAS$ и CMS следует отнести к одной из основных задач физической программы LHC.

Представленная работа поддержана госконтрактом ФЦП 02.740.11.5163 и грантом РФФИ 10-02-00525 и выполнена при частичной финансовой поддержке грантом АВЦП 3341 ведомственной программы Министерства образования и науки РФ.

Литература

[1] Сахаров А.Д. Нарушение CP-инвариантности, C-инвариантности и барионной асимметрии Вселенной // Письма в ЖЭТФ. – 1967. – Вып. 5. – С. 32–35.

[2] LEP collaboration. A combination of preliminary electroweak measurements and constraints on the standard model. hep-ex/0312023.

Yao W.M. *et al.* (Particle Date Group) J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 2006. – No. 33(1).

[3] Dolgopolov M., Dubinin M., Rykova E. Threshold corrections to the MSSM finite-temperature Higgs potential // arXiv:0901.0524v1. – 2009. – 26 pp. (submitted to Phys. Rev. D).

Борисов А.О., Долгополов М.В., Дубинин М.Н., Рыкова Э.Н. Аналитические выражения для пороговых поправок к температурному потенциалу Хиггса МССМ // Ядерная физика. – 2009. – Т. 72. – №1. – С. 175.

Ахметзянова Э.Н., Долгополов М.В., Дубинин М.Н. Нарушение CP-инвариантности в двухдублетном хиггсовском секторе МССМ // ЭЧАЯ. – 2006. – Т. 37. – Вып. 5. – С. 1285–1382.

Долгополов М.В., Дубинин М.Н., Рыкова Э.Н. Критические параметры температурной эволюции двухдублетного потенциала МССМ // Ядерная физика. – 2010. – Т. 73. – №. 6.

Борисов А.О., Долгополов М.В. Однопетлевые поправки перенормировки поля в скалярном секторе МССМ // Ядерная физика. – 2010. – Т. 73. – № 6.

УДК 536.758

ПРОБЛЕМА НЕОБРАТИМОСТИ, ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МЕХАНИКА И УРАВНЕНИЯ ТИПА БОГОЛЮБОВА

Волович И.В.[1]

Проблема необратимости заключается в том, как совместить обратимость по времени микроскопической динамики с необратимостью макроскопических уравнений. Эта проблема рассматривалась в известных работах Больцмана, Пуанкаре, Боголюбова, Колмогорова, Козлова и многих других авторов, и она заслуживает дальнейшего изучения [1]. Недавно была предложена попытка следующего решения проблемы необратимости: дана формулировка микроскопической динамики, которая необратима по времени [2, 3]. Таким образом снимается противоречие между обратимостью микроскопической и необратимостью макроскопической динамики, поскольку и микроскопическая и макроскопическая динамики в предлагаемом подходе обе необратимы.

Широко используемое понятие микроскопического состояния системы в некоторый момент времени как точки в фазовом пространстве, а также понятия траектории и микроскопических уравнений движения не имеют непосредственного физического смысла, поскольку произвольные вещественные числа не наблюдаемы, см. [4]. В предлагаемом неньютоновском подходе физический смысл придается не отдельной траектории, а только "пучку" траекторий, т.е. функции распределения на фазовом пространстве, описывающей стохастический процесс. Фундаментальным уравнением микроскопической динамики в предлагаемом "функциональном" подходе является не уравнение Ньютона, а уравнение Лиувилля. Показано, что уравнение Ньютона в таком подходе возникает как приближенное уравнение, описывающее динамику средних значений координат и импульсов для не слишком больших промежутков времени. Вычислены поправки к уравнению Ньютона.

В рамках функциональной механики для двух частиц в конечном объеме дается вывод уравнений типа Боголюбова—Больцмана [5]. Рассматривается возможность описания изолированных частиц при помощи диффузионных процессов и уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова.

Представленная работа частично поддержана грантами РФФИ 08-01-00727-а и 09-01-12161-офи-м, грантом президента Российской Федерации на поддержку научных школ НШ-7675.2010.1 и программой Отделения математики РАН "Современные проблемы теоретической математики", а также аналитической ведомственной целевой программой МОН "Развитие научного потенциала высшей школы 2009-2010 годы" проект 3341.

Литература

[1] Козлов В.В. Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика. – М. – Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2008.

[2] Волович И.В. Проблема необратимости и функциональная формулировка классической механики // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2008. – №8/1(67). – С. 35—55.

[1] Волович Игорь Васильевич (volovich@mi.ras.ru), Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

[3] Volovich I.V. Randomness in Classical Mechanics and Quantum Mechanics // Foundations of Physics. – 2010. – 10.1007/s10701-010-9450-2.

[4] Trushechkin A.S., Volovich I.V. Functional classical mechanics and rational numbers // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. – 2009. – V. 1. – No. 4. – P. 361–367; arXiv:0910.1502.

[5] Волович И.В. Уравнения Боголюбова и функциональная механика // Теоретическая и математическая физика. – 2010 (принято в печать).

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Волынская М.Г.[1]

Рассмотрим в области $Q=\{(x,y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < a\}$ вырождающееся гиперболическое уравнение

$$y^m u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{1}$$

Поставим для него задачу: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0,y) = 0,\ u(x,0) = \psi(x),\ u(x,a) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$\int_0^1 u(x,y)dx = 0. \tag{3}$$

Под решением задачи (1)–(3) будем понимать функцию $u(x,y)\in C^1(\bar{Q}) \cap C^2(Q)$, удовлетворяющую в Q уравнению (1) и условиям (2) и (3). Условие (3) является нелокальным интегральным условием первого рода, то есть не содержит значений искомого решения в точках границы. Однако, если выполняются условия согласования $\int_0^1 \psi(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx = 0$, то условие (3) эквивалентно условию

$$u_x(1,y) = u_x(0,y). \tag{4}$$

Покажем, что существует не более одного решения поставленной задачи. Для доказательства этого утверждения применим спектральный метод [1, 2].

Разделяя переменные в (1), приходим к задаче Штурма—Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(0) = X'(1), \end{cases}$$

собственными функциями которой являются $\{\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}$.

Пополняя эту систему собственных фунций присоединенными, получаем

$$\{\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty},\ 1,\ \{x\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}. \tag{5}$$

Отметим, что системы функций (5) и

$$\{4(1-x)\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty},\ 2(1-x),\ 4\{\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty} \tag{6}$$

являются биортонормированными [2]. Система (6) получена пополнением системы собственных функций сопряженной задачи

$$\begin{cases} Y'' + \lambda^2 Y = 0, \\ Y(0) = Y(1), \\ Y'(1) = 0 \end{cases}$$

[1]Волынская Мария Геннадьевна (volyn79@mail.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

присоединенными функциями. Кроме того, системы функций (5) и (6) замкнуты в пространстве $L_2(0,1)$, минимальны в этом пространст ве и образуют базис Рисса [3]. Поэтому решение задачи (1)–(3), если оно существует, можно представить в виде биортогонального ряда. Показано, что коэффициенты этого ряда обращаются в ноль, если $\psi(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$ на отрезке $[0,1]$.

Это обстоятельство позволило сделать вывод о единственности решения поставленной задачи, которое имеет вид биортонормированного ряда:

$$u(x,y) = 4\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)(1-x)\cos 2\pi nx + 4\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)\sin 2\pi nx + 2u_0(y)(1-x),$$

где

$$\begin{aligned}
u_n(y) &= \Gamma\left(\frac{2q+1}{2q}\right)\cdot\left(\frac{2\pi n}{q}\right)^{-\frac{1}{2q}}\int_0^1 \varphi(x)x\sin 2\pi nxdx\sqrt{y}J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi ny^q}{q}\right)+\\
&+\Gamma\left(\frac{2q-1}{2q}\right)\cdot\left(\frac{2\pi n}{q}\right)^{\frac{1}{2q}}\int_0^1 \psi(x)x\sin 2\pi nxdx\sqrt{y}J_{\frac{-1}{2q}}\left(\frac{2\pi ny^q}{q}\right)-\\
&-\frac{1}{q}\cdot\Gamma\left(\frac{2q+1}{2q}\right)\cdot\left(\frac{2\pi n}{q}\right)^{-\frac{1}{2q}}\int_0^1 \varphi(x)\cos 2\pi nxdx\cdot y^{q+\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2q}-1}\left(\frac{2\pi ny^q}{q}\right)+\\
&+\frac{1}{q}\cdot\Gamma\left(\frac{2q-1}{2q}\right)\cdot\left(\frac{2\pi n}{q}\right)^{\frac{1}{2q}}\int_0^1 \psi(x)\cos 2\pi nxdx\cdot y^{q+\frac{1}{2}}J_{1-\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi ny^q}{q}\right);\\
v_n(y) &= \Gamma\left(\frac{2q+1}{2q}\right)\cdot\left(\frac{2\pi n}{q}\right)^{-\frac{1}{2q}}\int_0^1 \varphi(x)\cos 2\pi nxdx\sqrt{y}J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi ny^q}{q}\right)+\\
&+\Gamma\left(\frac{2q-1}{2q}\right)\cdot\left(\frac{2\pi n}{q}\right)^{\frac{1}{2q}}\int_0^1 \psi(x)\cos 2\pi nxdx\sqrt{y}J_{-\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi ny^q}{q}\right).
\end{aligned}$$

Литература

[1] Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35. –№ 8. – С. 1094–1100.

[2] Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. – М.: Изд-во Московского университета, 1988. – 152 с.

[3] Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М.В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 227. – №4. – С. 796–798.

УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ В ПЛАНЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СЭНДВИЧ ПАНЕЛИ ПРИ УДАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Воробьев С.А.[1]

В задачах статики и динамики теории упругости, когда решение строится в перемещениях, определяя компоненты искомого вектора, представляется возможным оценить жесткость элемента конструкции на различные виды деформации и сопоставить полученные результаты с нормативными данными. Зная деформированное состояние любого элемента конструкции, используя соотношения связи перемещений и деформаций, физические соотношения, в конечном итоге можно выполнить расчет на прочность всей конструкции в целом.

В работе рассматривается воздействие при нулевых начальных условиях мгновенного точечного импульса $q_z(\xi, \varphi, \tau) = \delta(\tau)\delta(\xi - \xi_p)\delta(\varphi - \varphi_p)$ на внешний несущий слой прямоугольной в плане круговой цилиндрической сэндвич панели. Здесь δ — дельта-функция, ξ_p, φ_p — координаты точки импульсного нагружения. Импульс направлен по нормали к несущему слою. Панель выполнена в виде трехслойного пакета несимметричного по высоте относительно срединной поверхности жесткого, несжимаемого в поперечном направлении заполнителя. Грани контура панели перпендикулярны срединной поверхности и совпадают с линиями главных кривизн. Для обеспечения совместной работы слоев панели предполагается, что на гранях контура установлены идеальные диафрагмы. В этом случае считается, что жесткость каждой из таких диафрагм очень велика в ее плоскости, но весьма мала в направлении, перпендикулярном к этой плоскости. Предполагается, что кромки панели свободно опираются на жесткие неподвижные опоры. Материалы слоев изотропные, линейно упругие.

На основании вариационного принципа Гамильтона—Остроградского, используя гипотезы С.П. Тимошенко для каждого слоя и условия непрерывности перемещений на границах контакта слоев, получены уравнения движения. Деформации малы. Прогиб и углы поперечного сдвига считаются независящими от поперечной координаты z. Уравнения движения — система девяти линейных дифференциальных уравнений в частных производных для искомых неизвестных функций: тангенциальных перемещений вдоль направляющей и образующей, прогиба и полных углов поворота прямолинейных элементов относительно координатных осей в каждом слое панели.

Аналитическое решение сформулированной начально-краевой задачи строится с использованием метода Фурье, представляя перемещения в виде двойных тригонометрических рядов по координатным функциям, обеспечивающим автоматическое выполнение граничных условий. Подставляя функции перемещений в уравнения движения и используя свойство ортогональности координатных функций, приходим к бесконечному числу систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно функций времени. Аналитические решения систем ОДУ получаем на основе интегрального преобразования Лапласа. Изображения компонентов вектора перемещений — дробно-рациональные функции. Разложение последних на элементарные дроби и применение к ним теоремы свертывания при учете фильтрующего

[1]Воробьев Сергей Александрович (sergeyvorob@gmail.com), Белорусский государственный университет транспорта, 246653, Республика Беларусь, г. Гомель, ул. Кирова, 34.

свойства дельта-функции, позволяет перейти в пространство оригиналов и получить окончательные выражения компонентов вектора перемещений.

На основе аналитического решения получены численные результаты нестационарных параметров деформированного состояния сэндвич панели. В качестве материала несущих слоев принимался алюминиевый сплав, а для заполнителя — политетрафторэтилен.

УДК 539.12

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФОРМФАКТОРА СОСТАВНЫХ СИСТЕМ ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕДАННЫХ ИМПУЛЬСАХ

Гамзова Е.С., Крутов А.Ф.[1], *Троицкий В.Е.*[2]

Изучение электромагнитной структуры составных систем в области больших переданных импульсов является наиболее актуальной задачей в физике частиц. Современные экспериментальные данные по упругому рассеянию электронов хорошо описываются непертурбативными моделями, а при больших переданных импульсах можно использовать пертурбативные методы. Но где находится граница перехода от непертурбативного подхода к пертурбативному, — вопрос все еще открытый.

Одними из наиболее простых объектов для исследования области перехода являются пион и нуклон. Это простейшие кварковые системы, и существует большое количество непертурбативных моделей, которые хорошо описывают экспериментальные данные в области малых и средних переданных импульсов. Для области больших переданных импульсов формфактор этих частиц точно вычислен в пертурбативной КХД (пКХД).

Пертурбативная КХД дает предсказания на поведение составных систем при $Q^2 \to \infty$, вызывает интерес исследование области асимптотически больших переданных импульсов и в других подходах к описанию составных систем, в частности, в рамках составной кварковой модели (СКМ). Это позволит рассмотреть интерпритации ожидаемых результатов, альтернативные к пКХД. Таким образом, в докладе представлено описание электромагнитных формфакторов пиона и нуклона в рамках развитого авторами варианта мгновенной формы релятивистской квантовой механики (РКМ) [1]. Ядром этого подхода является процедура построения оператора электромагнитного тока, удовлетворяющего условиям лоренц-ковариантности и сохранения даже в релятивистском импульсном приближении (так называемое, модифицированное импульсное приближение).

Наш релятивистский подход дает хорошее описание электрослабых свойств пиона в области малых и средних переданных импульсов. Для исследования области больших переданных импульсов в рамках нашего подхода необходимо оценить интегральное представление для электромагнитного формфактора пиона при $Q^2 \to \infty$. Соответствующее интегральное представление можно получить, используя теорему об асимптотической оценке n-мерного интеграла [2, 3].

Авторами было показано, что полученное асимптотическое разложение формфактора пиона при $Q^2 \to \infty$ с учетом электромагнитной структуры кварков дает хорошее согласие с экспериментальными данными. И при введении зависимости массы конституентного кварка от переданного импульса $M(Q^2)$ ожидаемое поведение пионного формфактора $F_\pi(Q^2)Q^2 = \text{const}$ может быть получено в релятивистской составной кварковой модели.

[1]Гамзова Елена Сергеевна (gamzova@ssu.samara.ru), Крутов Александр Федорович (krutov@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

[2]Троицкий Вадим Евгеньевич (troitsky@theory.sinp.msu.ru), Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцина Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, 119992, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1, строение 2.

Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (грант 1338).

Литература

[1] Krutov A.F., Troitsky V.E. Phys. Rev. C. – **75**. – 014001 (2007) [nucl-th/0607026].

[2] Krutov A.F., Troitsky V.E., Tsirova N.A. J. Phys. A **41**. – 255401 (2008). – [nucl-th/0709.2312].

[3] Гамзова Е.С., Крутов А.Ф., Троицкий В.Е., Цирова Н.А. Релятивистска составная кварковая модель и эксперименты JLab // Ядерная физика. – 2010. – №73. – С. 1063–1068.

УДК 517.946

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ B-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

Гарипов И.Б., Мавлявиев Р.М., Нураниева С.М., Хусаинова Э.Д.[1]

Пусть в евклидовой плоскости E_2, задана симметричная относительно координатной оси Ox ограниченная область. Обозначим через D верхнюю часть этой области, через Γ — верхнюю часть ее достаточно гладкой границы. Снизу область D ограничена отрезком $\Gamma_0 \subset Ox$. Требуется найти решение уравнения

$$L\left(\Delta_B^{2m} u\right) = 0, \tag{1}$$

где

$$L \equiv \Delta_B + 2a\frac{\partial}{\partial x} - c^2 \quad (c > a),$$

$$\Delta_B \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{y^k}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^k \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad (k > 0),$$

из класса

$$u \in C^{4m+1}\left(\overline{D}\right) \bigcap C^{4m+2}\left(D \bigcup \Gamma_0\right), \tag{2}$$

и удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\Gamma_0} = 0, \quad \left.\Delta_B^i u\right|_{\Gamma} = f_{2i}, \quad \left.\frac{\partial \Delta_B^i u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f_{2i+1}, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad \left.\Delta_B^m u\right|_{\Gamma} = f_{2m}. \tag{3}$$

По определению принимаем $\Delta_B^0 u \equiv u$.

Предположим, что у сформулированной внутренней краевой задачи (1)–(3) имеется два различных решения u_1 и u_2. Тогда их разность ω, тоже является решением исходного уравнения из того же класса и удовлетворяет однородным граничным условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\Gamma_0} = 0, \quad \left.\Delta_B^i u\right|_{\Gamma} = 0, \quad \left.\frac{\partial \Delta_B^i u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad \left.\Delta_B^m u\right|_{\Gamma} = 0. \tag{4}$$

Очевидно, имеет место равенство

$$\iint\limits_D \omega L\left(\Delta_B^{2m} u\right) y^k \, dxdy = 0.$$

Отсюда, после преобразований получаем

[1]Гарипов Ильнур Бурханович (ilnur_garipov@mail.ru), Мавлявиев Ринат Мизхатович (mavly72@mail.ru), Нураниева Сириня Мубаракшиновна (sirinya_nuranieva@mail.ru), Хусаинова Эндже Джавдатовна (ence_khusainova@mail.ru), Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, 420138, Россия, г. Казань, ул. Межлаука, 1.

$$0=\sum_{i=0}^{m-1}\left[\iint\limits_D\left(\Delta_B^i\omega\Delta_B\Delta_B^{2m-i}\omega-\Delta_B^{2m-i}\omega\Delta_B\Delta_B^i\omega\right)y^k\,dxdy+\right.$$

$$+2a\iint\limits_D\left(\Delta_B^i\omega\Delta_B\frac{\partial\Delta_B^{2m-i-1}\omega}{\partial x}-\frac{\partial\Delta_B^{2m-i-1}\omega}{\partial x}\Delta_B\Delta_B^i\omega\right)y^k\,dxdy-$$

$$\left.-c^2\iint\limits_D\left(\Delta_B^i\omega\Delta_B\Delta_B^{2m-i-1}\omega-\Delta_B^{2m-i-1}\omega\Delta_B\Delta_B^i\omega\right)y^k\,dxdy\right]+$$

$$+\iint\limits_D\Delta_B^m\omega\Delta_B\Delta_B^m\omega\,y^k\,dxdy+\iint\limits_D\left(2a\Delta_B^m\omega\frac{\partial\Delta_B^{m-1}\omega}{\partial x}-\left(\Delta_B^m\omega\right)^2\right)y^k\,dxdy=0.$$

Применяя ко всем интегралам под знаком суммы — вторую, а к предпоследнему — первую формулу Грина, получаем

$$0=\sum_{i=0}^{m-1}\left[\int\limits_\Gamma\left(\Delta_B^i\frac{\partial\Delta_B^{2m-i}\omega}{\partial n}-\Delta_B^{2m-i}\frac{\partial\Delta_B^i\omega}{\partial n}\right)y^k\,d\Gamma+\right.$$

$$+2a\int\limits_{\Gamma^+}\left(\Delta_B^i\omega\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\Delta_B^{2m-i-1}\omega}{\partial x}\right)-\frac{\partial\Delta_B^{2m-i-1}\omega}{\partial x}\frac{\partial\Delta_B^i\omega}{\partial n}\right)y^k\,d\Gamma-$$

$$\left.-c^2\int\limits_\Gamma\left(\Delta_B^i\omega\frac{\partial\Delta_B^{2m-i-1}\omega}{\partial n}-\Delta_B^{2m-i-1}\omega\frac{\partial\Delta_B^i\omega}{\partial n}\right)y^k\,d\Gamma\right]+$$

$$+\left[\int\limits_\Gamma\Delta_B^m\omega\frac{\partial\Delta_B^m\omega}{\partial n}\,y^k\,d\Gamma\iint\limits_D\left(\left(\frac{\partial\Delta_B^m\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Delta_B^m\omega}{\partial y}\right)^2\right)y^k\,dxdy\right]+$$

$$+\iint\limits_D\left(2a\Delta_B^m\omega\frac{\partial\Delta_B^m\omega}{\partial x}-c^2\left(\Delta_B^m\omega\right)^2\right)y^k\,dxdy=0.$$

В силу краевых условий (4), интегралы по контуру Γ равны нулю. Интеграл по области D перепишем в виде

$$\iint\limits_D\left[\left(a\Delta_B^m\omega-\frac{\partial\Delta_B^m\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Delta_B^m\omega}{\partial y}\right)^2+\left(c^2-a^2\right)\left(\Delta_B^m\omega\right)^2\right]y^k\,dx\,dy=0.$$

Из этого интеграла, в частности, следует, что $\Delta_B^m\omega=0$ в области D. Учитывая краевые условия $\Delta_B^iu\Big|_\Gamma=0$, $i=\overline{0,m-1}$, получаем $\omega\equiv0$ в области D. Следовательно, $u_1=u_2$. Таким образом, верна следующая

Теорема. *Внутренняя краевая задача (1)–(3) не может иметь более одного решения.*

Ранее [1] аналогичная теорема была доказано для уравнения

$$L\left(\Delta_B^{2m-1}u\right)=0. \tag{5}$$

Литература

[1] Гарипов И.Б., Хусаинова Э.Д., Мавлявиев Р.М. Единственность решения B-эллиптического уравнения высшего порядка с младшими членами // Труды международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы". (24–28 июня 2008 г., г. Стерлитамак). – Уфа: "Гилем", 2008. – Т. 1. – С. 51–53.

УДК 537.6

О МАГНИТНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ФРАКТАЛЬНЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ СТРУКТУР

Гладков С.О., Богданова С.Б.[1]

В настоящей работе вычислен тензор магнитной восприимчивости $\chi_{ik} = \partial M_i/\partial h_k$ [1] для фрактального ферромагнетика. Речь идет об объекте, топологическая размерность которого d трого меньше хаусдорфовой d_F [2]. Например, топологически одномерные кривая Коха и треугольная салфетка Серпинского имеют хаусдорфовы размерности $d_F = \dfrac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26$ и $d_F = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,58$ соответственно.

Переменное магнитное поле $\mathbf{h}(t)$ с амплитудой h_0 и частотой ω направим вдоль оси z и будем считать $\mathbf{h}(t) = (0, 0, h_z(t))$. Функцию распреления магнонов представим в виде $f_k = f_0 + \delta f$, где $f_0 = \dfrac{1}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon(k)}{T}\right) - 1}$ — равновесная функция распределения, а $\delta f = \dfrac{\partial f_0}{\partial T_0}\delta T$, T_0 — температура термостата, постоянная Больцмана k_B положена равной единице, $\varepsilon(k)$ дисперсия магнонов. Изменение теипературы фрактального объекта δT связанное с действием переменного магнитного поля, вычисляется с помощью квазиклассического кинетического уравенения Больцмана $\dfrac{\partial f}{\partial t} = -\dfrac{\delta f}{\tau_k}$. В результате его решения найдем, что $\delta T = \dfrac{i\omega\mu_e h_z \tau_k(\varepsilon)}{1 - i\omega\tau_k(\varepsilon)}$, где μ_e — электронный магнитный момент, $\tau_k(\varepsilon)$ — время релаксации магнона с волновым вектором $\mathbf{k}$, которое зависит от фрактальной размерности ε, вводимой как $\varepsilon = d - d_F$.

Пользуясь определением магнитной восприимчивости [3, 4]

$$\chi_{ik} = \frac{\partial M_i}{\partial h_k} = -\frac{\mu_e}{a^3} V \frac{\partial}{\partial h_z} \int f_k \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

и учитывая выражения для f_k и δT, получим в итоге

$$\begin{aligned} \chi_{zz} = -\frac{\mu_e}{a^3} V \frac{\partial}{\partial h_z} \int \delta f \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = -\frac{\mu_e}{a^3} V \frac{\partial \delta T}{\partial h_z} \int \frac{\partial f_0}{\partial T} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \\ = -\frac{\mu_e^2 V}{(2\pi a)^3} \frac{i\omega\bar{\tau}_\varepsilon}{1 - i\omega\bar{\tau}_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial T} \int \frac{1}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon(k)}{T}\right) - 1} d^3k, \end{aligned} \tag{1}$$

где a — межатомное расстояние. При этом из под знака интеграла мы вынесли $\tau_k(\varepsilon)$, применив теорему о среднем и заменив его на среднее время релаксации магнонов $\bar{\tau}_\varepsilon$. Заметим к слову, что имеет место соотношение $|\,\varepsilon\,| \leq 1/2$.

Спектр магнонов ε_k во фрактальном ферромагнетике в [5] был вычислен благодаря следующему выражению для гамильтониана [3, 6]:

$$H_0 = \int_V \left(\frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_k} \right)^2 - \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} - \frac{\beta}{2} \mathbf{M}^2 \right) dV, \tag{2}$$

[1]Гладков Сергей Октябринович (Sglad@newmail.ru), Богданова Софья Борисовна (Sonjaf@list.ru), Московский государственный областной университет, 115005, Россия, г. Москва, ул. Радио, 10а.

где α — обменный интеграл, β — константа магнитной анизотропии. Невозможность использования на фрактальных объектах операции обычного дифференцирования по пространственным координатам компенсируется введением операции дробного дифференцирования

$$A_x f(\mathbf{r}) = \int_V ik_x^{1-\varepsilon} f_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \tag{3}$$

Далее, учитывая, что $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z) = \left(\dfrac{M^+ + M^-}{2}, \dfrac{M^+ - M^-}{2i}, M_z\right)$, получим:

$$\left(\frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right)^2 = (AM_i)^2 = \frac{AM^+ \cdot AM^-}{2} + \frac{AM^- \cdot AM^-}{2} + (AM_z)^2. \tag{4}$$

Применение метода вторичного квантования, преобразований Гольштейна—Примакова [9] $M^+ \approx M_0\sqrt{\dfrac{2}{s}}a^+$, $M^- \approx M_0\sqrt{\dfrac{2}{s}}a$, $M_z = M_0\left(1 - \dfrac{a^+a}{s}\right)$, в которых операторы рождения $a^+ = a^+(\mathbf{r})$ и уничтожения $a = a(\mathbf{r})$ магнонов представлены в виде Фурье-разложения $a^+(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{\sqrt{N}}\sum\limits_k a_k^+(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ и $a(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{\sqrt{N}}\sum\limits_k a(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, где N число узлов кристаллической решетки с учетом (3) приводит к выражению

$$AM^+ = M_0\sqrt{\frac{2}{sN}}(-ik_x^{1-\varepsilon}\mathbf{i} - ik_y^{1-\varepsilon}\mathbf{j} - ik_z^{1-\varepsilon}\mathbf{k})\sum_k a_k^+ e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{5}$$

Последовательное применение правила (5) для (4), а затем и (2) позволяет найти выражение для дисперсии магнонов, которое в нашем случае имеет сильно анизотропный вид:

$$\varepsilon_k = \alpha M_0^2(k_x^{2-2\varepsilon} + k_y^{2-2\varepsilon} + k_z^{2-2\varepsilon}) + \mu_e(H_0 + \beta M_0). \tag{6}$$

В итоге после подстановки (6) в (1) и последующего перехода к сферичкским координатам, получается окончательное выражение для магнитной восприимчивости фрактального ферромагнетика, которое демонстрирует сложную зависимость χ_{zz} от частоты внешнего поля ω, температуры T и параметра ε:

$$\begin{aligned}\chi_{zz} = \frac{3\mu_e^2 V}{2(2\pi a)^3}\frac{i\omega\bar{\tau}_\varepsilon}{1 - i\omega\bar{\tau}_\varepsilon}\frac{\Gamma\left(\dfrac{3\varepsilon}{2\varepsilon - 2}\right)}{(1-\varepsilon)^2}\exp\left(-\frac{\mu_e(H_0 + \beta M_0)}{T_0}\right)\times \\ \times\left(\frac{T_0}{\alpha M_0^2}\right)^{\frac{3}{2-2\varepsilon}}\zeta\left(\frac{3}{2-2\varepsilon}\right)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi} g^{\frac{3}{2-2\varepsilon}}(\varphi,\theta)d\theta,\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$g(\varphi,\theta) = \sin^{2-2\varepsilon}\theta\cos^{2-2\varepsilon}\varphi + \sin^{2-2\varepsilon}\theta\sin^{2-2\varepsilon}\varphi + \cos^{2-2\varepsilon}\theta.$$

Литература

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред – Т. 8. – М.: Наука, 1986. – 632 с.

[2] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Ижевск: РХД, 2002. – 665 с.

[3] Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. – М.: Наука, 1967. – 367 с.

[4] Gladkov S.O. The kinetic of nuclear magnetically ordered systems // Phys. Rep. – 1989. – V. 182. – No. 4,5. – P. 211–364.

[5] Богданова С.Б., Гладков С.О. К вопросу о спектре магнонов в структурах нецелой размерности // Труды 10-й конференции "Актуальные проблемы современной науки". – Самара, 2009. – Ч. 4–6. – С. 56–60.

[6] Гладков С.О. Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. – Москва, 1999. – 330 с.

[7] Гладков С.О. К теории одномерной и квазиодномерной теплопроводности // ЖТФ. 1997. – Т. 67. – С. 8–12.

[8] Gladkov S.O., Bogdanova S.B. The heat-transfer theory for quasi-n-dimensional systems // Physica B: Condensed Matter. – 2010. – V. 405. – P. 1973–1975.

[9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. – Т. 3. – М.: Наука, 1986. – 751 с.

УДК 535.14; 536.75

КВАНТОВАЯ НЕМАРКОВСКАЯ ДИНАМИКА АТОМНЫХ СИСТЕМ

Горохов А.В.[1], *Семин В.В.*[2]

Исследование неунитарной динамики атомных систем, взаимодействующих с большой диссипативной системой в последнее время вновь вызывает большой интерес [1, 2]. Традиционно используется подход квантовой теории открытых систем [3], при этом для вывода квантовых кинетических уравнений делается предположение о марковости процесса взаимодействия атомов со своим окружением, т.е. пренебрегается эффектами памяти. Однако ясно, что приближение марковости является достаточно сильным упрощением физической природы явлений.

Известные из литературы немарковские кинетические уравнения не лишены недостатков. Так, наиболее общее уравнение Накашимы—Цванцига [4] представляет скорее формальный интерес, поскольку его невозможно разрешить. Уравнения же других типов являются либо справедливыми лишь для очень узкого класса процессов [3], либо являются феноменологическими, эффекты памяти в которых описываются введением дополнительных множителей в хорошо известное уравнение Линдблада [5].

В докладе предлагается метод построения операторно-кинетических уравнений, позволяющих учесть наличие в системе короткой памяти. Полученное уравнение достаточно просто в отличие от традиционных немарковских уравнений, известных из литературы. Показано, что выведенное уравнение сохраняет след редуцированной матрицы плотности, т.е. сохраняет полную вероятность. Построенное кинетическое уравнение применено к описанию немарковской динамики в системах двухуровневых атомов. Исследовано сведение выведенного операторного уравнения к уравнению типа Фоккера—Планка для символа редуцированной матрицы плотности атомной подсистемы и изучены его свойства для немарковской релаксации изолированного двухуровневого атома и кооперативной релаксации двух таких атомов.

В качестве физического приложения предложенная методика использована для описания немарковской динамики в системе двух идентичных двухуровневых атомов, диполь-дипольное взаимодействие которых наводится внешним (лазерным) полем с частотой, сильно отстроенной от резонанса. В явном виде рассчитан контур линии излучения. Показано, что учет эффектов памяти приводит к его заметной деформации в сравнении с расчетом в марковском приближении (см. [6, 7]), что в принципе может быть обнаружено экспериментально в спектрах флуоресценции.

Литература

[1] Accardi L., Lu Y.G., Volovich I.V. Quantum Theory and its Stochastic Limit. – New York: Springer Verlag, 2002. – 473 pp.

[2] Fain B. Irreversibilities in Quantum Mechanics. – New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 224 pp.

[1] Горохов Александр Викторович (gorokhov@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

[2] Семин Виталий Владимирович (veyvlet@mail.ru), Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34.

[3] Бройер Х.-П., Петруччионе Ф. Теория открытых квантовых систем / Пер. с англ. под ред. Ю.Н. Богданова. – М.–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2010. – 824 с.

[4] Zwanzig R. Ensemble Method in the Theory of Irreversibility // J. Chem. Phys. – 1960. – V. 33. – No. 5. – P. 1338–1341.

[5] Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semigroups // Commun. Math. Phys. – 1976. – V. 48. – No. 2. – P. 119–130.

[6] Горохов А.В., Семин В.В. Излучение системы двух идентичных взаимодействующих двухуровневых атомов // Изв. РАН. Серия физическая. – 2009. – Т. 73. – №4. – С. 548–550.

[7] Горохов А.В., Семин В.В. Расчет спектра флуоресценции двух взаимодействующих атомов во внешнем поле // Оптика и спектроскопия. – 2009. – Т. 107. – №4. – С. 618–623.

УДК 514.8

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА НЕГЛОБАЛЬНО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

Грошев О.В.[1]

В докладе задача Коши для волнового уравнения рассматривается на двух типах неглобально гиперболических многообразий содержащих замкнутые времениподобные кривые. В работе, выполненной вместе с соавторами [2], было доказано, что на плоскости Минковского с присоединенной ручкой классическое решение существует и единственно при выполнении конечного набора точечных условий самосогласованности. В данной работе задача Коши изучена на пространстве Мизнера. Доказано, что существование и единственность классического решения эквивалентны гораздо более строгим условиям самосогласованности.

Литература

[1] Арефьева И.Я., Волович И.В., Ишиватари Т. Задача Коши на не глобально гиперболических многообразиях // ТМФ. – 2008. – Т. 157. – №3. – С. 334–344; arXiv:0903.0567.

[2] Волович И.В., Грошев О.В., Гусев Н.А., Курьянович Э.А. О решениях волнового уравнения на неглобально гиперболическом многообразии // Тр. МИАН. – 2009. – №265. – С. 273-–287; arXiv:0903.0741v1.

[3] Aref'eva I.Ya., Volovich I.V. Time Machine at the LHC // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. – 2008. – No. 5. – P. 641–651; arXiv:0710.2696.

[4] Грошев О.В. О существовании и единственности классических решений задачи Коши на неглобально гиперболических многообразиях // ТМФ. – В печати.

[5] Friedman J.L. The Cauchy problem on spacetimes that are not globally hyperbolic // in "The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields", ed. P. T. Chrusciel and H. Friedrich. – New York: Birkhauser, 2004. – arXiv:gr-qc/0401004.

[1] Грошев Олег Викторинович (groshev@mi.ras.ru), Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, д. 8.

УДК 539.171

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ГИДРАТАЦИИ ЦЕМЕНТА МЕТОДОМ МАЛОУГЛОВОГО РАССЕЯНИЯ НЕЙТРОНОВ

Гурьянов А.М.[1], *Лебедев В.М.*[2]

В ходе гидратации цемента безводные клинкерные минералы превращаются в соответствующие кристаллогидраты (силикат-гидраты кальция или C-S-H). Свойства формируемого цементного камня зависят от степени и скорости гидратации.

На дифрактометре "Мембрана-2" [1], установленном на реакторе ВВР-М Петербургского института ядерной физики им. Б.П. Константинова, методом малоуглового рассеяния нейтронов исследовалась динамика изменений в зависимости от времени (до 28 суток) структуры образцов цемента, гидратированного обычной и тяжелой водой. Длина волны нейтронов составляла 0,3 nm при ширине линии равной 0,3. Диапазон передаваемых импульсов менялся от 0,03 nm^{-1} до 0,8 nm^{-1}. Рассеянные на образцах нейтроны регистрировались 41-канальным гелиевым счетчиком в интервале углов от минус двух до плюс двух градусов.

Сечения рассеяния, как функции переданного нейтронного импульса, получались из экспериментальных спектров с учетом фона и трансмиссии при нормировке данных на интенсивности рассеяния для стандартного образца известного сечения. С помощью Фурье-преобразования из полученных экспериментальных данных для сечений рассеяния нейтронов восстанавливались распределения рассеивающих объектов в приближении однородных сфер [2]. При фитировании экспериментальных данных максимальные радиусы рассеивающих объектов варьировались в пределах от 50 до 100 нм. Данные рассеяния описывались достаточно точно, если максимальный размер рассеивающих областей выбирался равным 80 нм.

Было получено распределение частиц силикат-гидрата кальция по корреляционным радиусам, которое определяется корреляционной функцией G(R), зависящей от характерных радиусов R объемных рассеивающих структур. График корреляционной функции показывает, имеются ли частицы данного радиуса в исследуемом материале [3].

Рассматривались динамические изменения зависимости распределения частиц силикат-гидрата кальция по корреляционным радиусам. Проведено сопоставление полученных зависимостей с гравиметрическими измерениями и изменением трансмиссии нейтронного пучка для исследуемых образцов. Получены количественные характеристики роста наночастиц силикат-гидрата кальция в цементе в процессе гидратации. Проведено сравнение с другими методами определения степени и скорости гидратации цемента.

Литература

[1] Agamlyan M.M., Drabkin G.M., Svergun D.I., Feigin L.A. The small-angle neutron diffractometer "Membrana-2" // Preprint INPI-1599. – 1990. – 35 pp.

[1] Гурьянов Александр Михайлович (gurjanov@sgasu.smr.ru), Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

[2] Лебедев Виктор Михайлович (lebedev@pnpi.ru), Петербургский институт ядерной физики имени Б.П. Константинова, 188300, Россия, Ленинградская обл., г. Гатчина, Орлова Роща, ПИЯФ УРАН.

[2] Svergun D. Determination of the regularization parameter in indirect-transform methods using perceptual criteria // J. Appl. Cryst. – 1992. – V. 25. – P. 495–503.

[3] Свергун Д.И., Фейгин Л.А. Рентгеновское и нейтронное малоугловое рассеяние. – М: Наука, 1986. – 279 с.

УДК 517.956.22

ОБ АППРОКСИМАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СЛАБО СЖИМАЕМОЙ

Гусев Н.А.[1]

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^{l+1+\alpha}$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $T > 0$. Обозначим $Q = \Omega \times (0,T)$, $S = \partial\Omega \times (0,T)$ и пусть $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ и $C^{l+\alpha,m+\beta}(\overline{Q})$ — пространства Гельдера с нормами $\|\cdot\|_{l+\alpha}$ и $\|\cdot\|_{l+\alpha,m+\beta}$ [1].

В приближении Стокса уравнения неразрывности и импульса для сжимаемой сплошной среды имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{V} = 0, \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}p = \mu\Delta\mathbf{V} + \rho\mathbf{f}, \tag{2}$$

где $\rho, \mathbf{V}, p, \mu > 0, \mathbf{f}$ — плотность, скорость, давление, вязкость и внешняя массовая сила. (Полная система уравнений движений сжимаемой среды включает в себя также уравнение состояния, которое мы рассмотрим ниже.) Сжимаемостью слабо сжимаемых сред (например, воды) часто пренебрегают, считая, что $\rho \equiv \rho_0 > 0$. Уравнения (1) и (2) при этом переходят в уравнения неразрывности и импульса для несжимаемой жидкости:

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = 0, \tag{3}$$

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}p = \mu\Delta\mathbf{V} + \rho_0\mathbf{f}. \tag{4}$$

Поскольку абсолютно несжимаемых сплошных сред не существует, корректность перехода от системы (1), (2) к системе (3), (4) требует обоснования. Этот переход является корректным, если решения уравнений (3), (4) мало отличаются от решений уравнений (1), (2) (в частности, являются пределом решений уравнений (1), (2)). В данной работе получена оценка разности решений систем (1), (2) и (3), (4):

Теорема 1. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{2l+3+2\alpha}$, $\mathbf{V} \in C^{2l+2+2\alpha,l+1+\alpha}(\overline{Q})$, $\boldsymbol{\nabla}p \in C^{2l+2\alpha,l+\alpha}(\overline{Q})$, $\mathbf{V}_0 \in C^{2l+2+2\alpha,l+1+\alpha}(\overline{Q})$, $\boldsymbol{\nabla}p_0 \in C^{2l+2\alpha,l+\alpha}(\overline{Q})$, $\mathbf{f} \in C^{2l+2\alpha,l+\alpha}(\overline{Q})$, $0 \leqslant l \in \mathbb{Z}$, $0 < 2\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. *Пусть также* $\rho \in C^{2l+2+2\alpha,2l+2+2\alpha}(\overline{Q})$. *Если тройка* $(\rho, \mathbf{V}, p)$ *удовлетворяет уравнениям (1), (2) и пара* $(\mathbf{V}_0, p_0)$ *удовлетворяет уравнениям (3), (4), то для любого* $\alpha' \in (0,\alpha)$ *верна оценка*

$$\begin{aligned}\| \mathbf{V} - \mathbf{V}_0 \|_{2l+2+2\alpha',l+1+\alpha'} + \| \boldsymbol{\nabla}p - \boldsymbol{\nabla}p_0 \|_{2l+2\alpha',l+\alpha'} \leqslant \\ \leqslant C\Big(\|\rho-\rho_0\|_{2l+2+2\alpha,2l+2+2\alpha}\Big(1+ \\ + \|\mathbf{f}\|_{2l+2\alpha,l+\alpha} + \|\mathbf{V}\|_{2l+2+2\alpha,l+1+\alpha}\Big) + \\ + \|(\mathbf{V}-\mathbf{V}_0)|_S\|_{2l+2+2\alpha,l+1+\alpha,S} + \|(\mathbf{V}-\mathbf{V}_0)|_{t=0}\|_{2l+2+2\alpha,\Omega}\Big),\end{aligned}$$

где константа C *не зависит от* $(\rho, \mathbf{V}, p)$ *и* $(\mathbf{V}_0, p_0)$.

Для семейства слабо сжимаемых сред, термическое уравнение состояния которых $\rho = \rho_0 + \varepsilon R(p)$, в [2] были получены необходимые условия непрерывной зависимости классических решений начально-краевой задачи для уравнений (1), (2) от

[1]Гусев Николай Анатольевич (n.a.gusev@gmail.com), Московский физико–технический институт, 141700, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9.

фактора сжимаемости ε при $\varepsilon \to 0$. В данной работе получено следующее достаточное условие непрерывной зависимости:

Теорема 2. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{2l+3+2\alpha}$ $0 \leqslant l \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in (0, 1/2)$ — *заданные числа и поля* $\rho_\varepsilon \in C^{2l+2+2\alpha, 2l+2+2\alpha}(\overline{Q})$, $\mathbf{V}_\varepsilon \in C^{2l+2+2\alpha, l+1+\alpha}(\overline{Q})$ *и* $p_\varepsilon \in C^{2l+2+2\alpha, 2l+2+2\alpha}(\overline{Q})$ *удовлетворяют уравнениям (1), (2) сжимаемой жидкости и уравнению состояния* $\rho_\varepsilon = \rho_0 + \varepsilon R(p_\varepsilon)$, $R \in C^{2l+3}(\bar{E})$, *при каждом* $\varepsilon \in (0, 1)$. *Пусть краевые и начальные значения скорости* $\mathbf{V}_\varepsilon|_S$ *и* $\mathbf{V}_\varepsilon|_{t=0}$ *не зависят от* ε. *Пусть, кроме того, при* $\varepsilon \to 0$ *нормы* $\| \mathbf{V}_\varepsilon \|_{2l+2+2\alpha, l+1+\alpha}$ *и* $\|p_\varepsilon\|_{2l+2+2\alpha, 2l+2+2\alpha}$ *равномерно ограничены, причем множество значений давления содержится в* $\bar{E}$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Тогда* $\|\rho_\varepsilon - \rho_0\|_{2l+2+2\alpha, 2l+2+2\alpha} \leqslant C\varepsilon \|R\|_{2l+3} \|p_\varepsilon\|_{2l+2+2\alpha, 2l+2+2\alpha} \to 0$ *(при* $\varepsilon \to 0$*) и существуют поля* $\mathbf{V}_0, p_0 \in C(\overline{Q})$, *такие, что для любого* $\alpha' \in (0, \alpha)$ *при* $\varepsilon \to 0$ $\mathbf{V}_\varepsilon \to \mathbf{V}_0$ *по норме* $C^{2l+2+2\alpha', l+1+\alpha'}(\overline{Q})$ *и* $\boldsymbol{\nabla} p_\varepsilon \to \boldsymbol{\nabla} p_0$ *по норме* $C^{2l+2\alpha', l+\alpha'}(\overline{Q})$, *причем поля* $\mathbf{V}_0$, $\boldsymbol{\nabla} p_0$ *удовлетворяют уравнениям несжимаемой жидкости (3), (4).*

Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы, контракт П532 от 05 августа 2009 г.

Литература

[1] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970. – 288 с.

[2] Шифрин Э.Г. Условие непрерывной зависимости от сжимаемости нестационарных течений вязких мало сжимаемых жидкостей // ДАН. – 1999. – Т. 365. – №2. – С. 197–200.

УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ИЗ L_p

Гущин А.К.[1]

В ограниченной области Q n-мерного пространства $\mathbf{R}_n$ с гладкой границей ($\partial Q \in C^1$) рассматривается задача Дирихле с граничной функцией u_0 из L_p, $p > 1$, для однородного равномерно эллиптического уравнения второго порядка в самосопряженной форме без младших членов

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0, \qquad x \in Q, \tag{1}$$

$$u\,|_{\partial Q} = u_0. \tag{2}$$

В гильбертовом случае $p = 2$ такая задача достаточно подробно изучена, см. [1, 2]. В работе [2] при условии непрерывности по Дини нормали к границе и коэффициентов $a_{i,j}$ на границе (внутри области они измеримы и ограничены) доказана однозначная разрешимость этой задачи и установлено свойство $(n-1)$-мерной непрерывности решения. При $p \neq 2$ обычно рассматриваются решения из пространства $W^1_{p,loc}(Q)$, см. [3–5]. Но это предположение приводит к необходимости налагать условие непрерывности коэффициентов в $\overline{Q}$. Основным результатом настоящего доклада является теорема о разрешимости задачи Дирихле с граничной функцией из L_p без условий на гладкость коэффициентов внутри рассматриваемой области, при тех же условиях, что и случае $p = 2$, см. [2].

Под решением уравнения (1) мы будем понимать функцию $u \in W^1_{2,loc}(Q)$, удовлетворяющую уравнению в смысле равенства обобщенных функций. Хорошо известно, что решение уравнения (1) непрерывно по Гельдеру, см. [6, 7], внутри области Q. Поэтому на любой лежащей в Q гладкой поверхности оно принадлежит пространству L_p. Определим выполнение граничного условия (2) следующим образом. Для любой точки $x^0 \in \partial Q$ найдется такая окрестность $V_{x^0} \subset \partial Q$, что при достаточно малых положительных значениях δ, сдвиг $\{x = x' + \delta\nu(x^0), x' \in V_{x^0}\}$ куска границы $V_{x^0}(r_0)$ на расстояние δ вдоль внутренней (единичной) нормали $\nu(x^0)$ к ∂Q в точке x^0 лежит внутри области Q и

$$\int_{V_{x^0}} |u(x + \delta\nu(x^0)) - u_0(x)|^p dS \;\to\; 0 \qquad \text{при } \delta \to +0.$$

Теорема. *Для любой граничной функции u_0 из $L_p(\partial Q)$ существует решение задачи Дирихле (1), (2). Это решение единственно и для него справедлива оценка*

$$\int_Q r(x)|u(x)|^{p-2}|\nabla u(x)|^2 dx \le \text{const} \int_{\partial Q} |u(x)|^p dS,$$

в которой $r(x)$ — расстояние от точки $x \in Q$ до границы области.

[1] Гущин Анатолий Константинович, Математический институт им. В.А. Стеклова, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-01-00178-а) и гранта президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ-7675.2010.1).

Литература

[1] Михайлов В.П. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т.12. N 10. С. 1877 – 1891.

[2] Гущин А.К. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. – 1988. – Т. 137. – №1. – С. 19–64.

[3] Гущин А.К., Михайлов В.П. О граничных значениях в $L_p, p > 1$, решений эллиптических уравнений // Матем. сб. – 1979. – Т. 108. – №1. – С. 3–21.

[4] Петрушко И.М. О граничных значениях в $L_p, p > 1$, решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей // Матем. сб. – 1983. – Т. 120. – №4. – С. 569–588.

[5] Михайлов Ю.А. О граничных значениях в $L_p, P > 1$, решений эллиптического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – №2. – С. 318–337.

[6] DeGiorgi E. Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari // Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. – 1957. – V. 3. – P. 25–43.

[7] Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // Amer. J. Math. – 1958. – V. 80. – P. 931–954.

УДК 519.632

О РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩЕМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Джураев Х.Ш.[1]

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u(x,y) + a\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + cu(x,y) = f(x,y) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \lim_{y\to 0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \psi(x). \tag{2}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа, а $f(x,y)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — некоторые заданные функции.

Будем предполагать, что в (1.1)–(1.2) $f(x,y)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ есть n-мерные бесконечно дифференцируемые финитные функции по каждому из аргументов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и обращаются в нуль при $|x_k| > \sigma_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$.

Эти предположения дают возможность построения таких алгоритмов приближенных решений задачи (1)–(2), которые дают решения, обладающие свойством устойчивости к малым изменениям исходных данных, то есть к начальным условиям при любом фиксированном $y > 0$.

Обозначим

$$\lambda^2 = \frac{4c - a_1^2 - ... - a_n^2 - b^2}{4}.$$

В зависимости от коэффициентов $a_1, a_2, ..., a_n, b, c$ уравнение (1) определяется как уравнение Пуассона в многомерном случае или как уравнение Гельмгольца в многомерном случае. Действительно, если $4c = a_1^2 + ... + a_n^2 + b^2$, то уравнение (1) является уравнением Пуассона в многомерном случае. В этом случае задача (1)–(2) является задачей Коши для уравнения Пуассона в многомерном случае. Задача Коши для уравнения Пуассона в многомерном случае является некорректно поставленной. В работае [1] рассматривается задача Коши для уравнения Пуассона в многомерном случае на полуплоскости $y > 0$. Построен класс таких регуляризирующих операторов $R(p, q, x, y, \alpha)$, что при $\alpha \to 0$ равномерно по x для любого фиксированного y сходятся к решению $z(x,y)$. Если $4c \neq a_1^2 + ... + a_n^2 + b^2$, то уравнение (1) является уравнением Гельмгольца в многомерном случае. Точнее, задача (1)–(2) есть задача Коши для уравнения Гельмгольца в многомерном случае, и является некорректной [2]. Приближенное решение задачи (1)–(2) на основе метода регуляризации имеет вид

$$R(\tilde{p}, \tilde{q}, x, y, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} F(x - t, y, \alpha)dt + \int_0^y \Omega(x, y, \tau, \alpha)d\tau,$$

[1]Джураев Хайрулло Шарофович (hayrullo_58@mail.ru), Таджикский национальный университет, 734025, Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17.

где $F(x,y,\alpha)=p(x)f_1^\alpha(x,y)+q(x)f_2^\alpha(x,y)$,

$$\Omega(x,y,\tau)=\exp\left(-\frac{1}{2}(a_1x_1+...+a_nx_n+by)\right)\int_{-\infty}^{\infty}\dots$$
$$\dots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{at}{2}\right)\cdot f(t,\tau)f_3^\alpha(x-t,y,\tau)dt.$$

Здесь

$$f_1^\alpha(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}r(s,\alpha)\mathrm{ch}(y\sqrt{s_1^2+...+s_n^2-\lambda^2})\cdot\exp(i(x,s))ds,$$

$$f_2^\alpha(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}r(s,\alpha)\frac{\mathrm{sh}(y\sqrt{s_1^2+...+s_n^2-\lambda^2})}{\sqrt{s_1^2+...+s_n^2-\lambda^2}}\cdot\exp(i(x,s))ds,$$

$$f_3^\alpha(x,y,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}r(s,\alpha)\frac{\mathrm{sh}((y-\tau)\sqrt{s_1^2+...+s_n^2-\lambda^2})}{\sqrt{s_1^2+s_n^2-\lambda^2}}\cdot\exp(i(x,s))dt$$

есть функции многих переменных по x, а стабилизирующим фактором является такая параметризация $r(s,\alpha)$. В частности, показано, что функция $r(s,\alpha)$ по каждому из аргументов $s=(s_1,...s_n)$ должна удовлетворять следующим условиям: 1) $r(s,\alpha)$ определена для всех неотрицательных значений параметра α и любых $s\in R=(-\infty,\infty)$; 2)$0\le r(s,\alpha)\le 1$ для всех значений $\alpha\ge 0$ и $s\in R$; 3) $r(s,0)\equiv 1$; 4) для всякого $\alpha>0$ $r(s,\alpha)$ четная по s $r(s,\alpha)\in L_2(R)$; 5) для каждого $\alpha>0$ $r(s,\alpha)\to 0$ при $|s|\to\infty$; 6) при $\alpha\to 0$ $r(s,\alpha)\to 1$, не убывая, причем на всяком отрезке $|s|\le s_1$ эта сходимость равномерная; 7) для любого $s\ne 0$, $r(s,\alpha)$ — монотонноубывающая по α функция и $r(s,\alpha)\to 0$ при $\alpha\to\infty$ и эта сходимость равномерная на каждом отрезке $[s_1,s_2]$; 8) для всякого $\alpha>0$ $r(s,\alpha)\cdot\mathrm{ch}(y\sqrt{s_1^2+...+s_n^2-\lambda^2})$, $r(s,\alpha)\cdot\frac{\mathrm{sh}(y\sqrt{s_1^2+...+s_n^2-\lambda^2})}{\sqrt{s_1^2+...+s_n^2-\lambda^2}}$ и $r(s,\alpha)\cdot\frac{\mathrm{sh}((y-\tau)\sqrt{s_1^2+...+s_n^2-\lambda^2})}{\sqrt{s_1^2+...+s_n^2-\lambda^2}}$ принадлежат $L_2(R)$ при любом фиксированном $(y>0)$. Этим условиям отвечает, например, стабилизирующий фактор

$$r(s,\alpha)=\frac{\mathrm{ch}(y\sqrt{s_1^2+s_2^2+...+s_n^2-\lambda^2})}{\mathrm{ch}(y\sqrt{s_1^2+s_2^2+...+s_n^2-\lambda^2})+\alpha\theta(s)},$$

где $\theta(s)$ — по каждому аргументу $s=(s_1,...s_n)$ заданная неотрицательная четная функция, кусочно-непрерывная на любом конечном отрезке оси R, причем $\theta(0)\ge 0$, $\theta(s\ne 0)>0$ и при достаточном больших значениях $|s|$: $\theta(s)\ge C>0$ $(C=\mathrm{const})$.

Литература

[1] Джураев Х.Ш. О решении задачи Коши для уравнения Пуассона в многомерном случае // ДАН Тадж. ССР. – 1989. – Т. 32. – №7. – С. 432–434.

[2] Джураев Х.Ш. Об одном регуляризирующем алгоритме построения приближенных решений задачи Коши для уравнения Гельмгольца // ДАН Тадж. ССР. – 1991. – Т. 34. – №2. – С. 292–295.

УДК 535.314

РАСЧЕТ ПРЕЛОМЛЯЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ЗАДАННЫХ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ

Дмитриев А.Ю., Досколович Л.Л., Казанский Н.Л.[1]

В данной работе впервые рассматривается расчет преломляющей поверхности для формирования ДН в виде линии. Преломляющую поверхность предлагается определить в виде огибающей семейства эллипсоидов или гиперболоидов вращения (в зависимости от соотношения показателей преломления сред, разделенных преломляющей поверхностью).

Задача состоит в расчете формы преломляющей поверхности из условия, что направления преломленных лучей описываются заданной единичной векторной функцией одного аргумента.

$$\mathbf{p}(\sigma) = (p_x(\sigma), \qquad p_y(\sigma), p_z(\sigma), |\mathbf{p}(\sigma)| = 1, \tag{1}$$

где σ — некоторый параметр. Следуя работам [1–3], будем называть функцию (1) ДН в виде линии.

Будем рассчитывать преломляющую поверхность в виде огибающей семейства поверхностей $\mathbf{S}(u, v; \sigma)$, каждая из которых преобразует сферический пучок от источника в плоский с направлением $\mathbf{p}(\sigma)$; (u, v) — некоторые криволинейные координаты. Функция $\mathbf{S}(u, v; \sigma)$ является эллипсоидом или гиперболоидом вращения (в зависимости от показателей преломления сред n_1 и n_2, разделенных преломляющей поверхностью) с первым фокусом в начале координат и направлением большой оси $\mathbf{p}(\sigma)$, а огибающая в криволинейных координатах (u, v) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \mathbf{S}(u, v; \sigma) = \mathbf{e}(u, v) \cdot \dfrac{\psi(\sigma)}{1 - \varepsilon\,(\mathbf{e}(u, v), \mathbf{p}(\sigma))}, \\ \left(\mathbf{e}(u, v),\ \dfrac{\mathbf{v}(\sigma)}{|\mathbf{v}(\sigma)|}\right) = \cos\left(\alpha(\sigma)\right), \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\sigma) &= \left(\mathbf{p}(\sigma)\frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma} - \frac{d\mathbf{p}(\sigma)}{d\sigma}\psi(\sigma)\right), \\ \cos\left(\alpha(\sigma)\right) &= \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma} / \left|\mathbf{v}(\sigma)\right|, \end{aligned} \tag{3}$$

$\mathbf{e}(u, v)$ — единичный вектор направления луча, $\varepsilon = n_2/n_1$ — эксцентриситет эллипсоида(гиперболоида), $\psi(\sigma)$ — фокальный параметр. В случае, когда $\cos(\alpha(\sigma)) \le 1$, второе уравнение в (2) является уравнением кругового конуса с вершиной в начале координат. Тогда при фиксированном σ уравнения (2) определяют кривую $\mathbf{L}(u, \sigma)$, которая соответствует пересечению поверхности с конусом

$$(\mathbf{e}(u, v),\ \mathbf{a}(\sigma)) = \alpha(\sigma), \tag{4}$$

где $\mathbf{a}(\sigma) = v(\sigma)/|v(\sigma)|$ — единичный вектор оси, а $\alpha(\sigma)$ — косинус угла при вершине конуса. Неявное уравнение эллипсоида (гиперболоида) в декартовых координатах

[1]Дмитриев Антон Юрьевич (tonydm@yandex.ru), Досколович Леонид Леонидович (leonid@smr.ru), Казанский Николай Львович (kazansky@smr.ru), Институт систем обработки изображения РАН, 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 151.

имеет вид [4]

$$\begin{cases} |\mathbf{M}| - \varepsilon\left(\mathbf{p}(\sigma), \mathbf{M}\right) = \psi(\sigma), \\ \left(\dfrac{d\mathbf{p}(\sigma)}{d\sigma}, \mathbf{M}\right) = -\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{d\psi(\sigma)}{d\sigma}. \end{cases} \tag{5}$$

Уравнения (5) показывают, что преломляющая поверхность состоит из кривых, которые соответствуют пересечениям поверхностей с плоскостями. Функция $\psi(\sigma)$ в (2), (5) определяет распределение энергии вдоль ДН и может быть рассчитана из условия формирования заданной интенсивности на ДН из закона сохранения светового потока:

$$I(\sigma)\left|\frac{d\mathbf{p}(\sigma)}{d\sigma}\right| d\sigma = \int I_0(u,\sigma) d\Omega(u,\sigma), \tag{6}$$

где $d\Omega(u,\sigma)$ — телесный угол между конусами, $I(\sigma)$ — распределение интенсивности вдоль диаграммы направленности, $I_0(u,\sigma)$ — интенсивность источника.

Рассмотрим задачу расчета преломляющей поверхности для формирования ДН в виде отрезка с заданным распределением интенсивности. Преломленные лучи в данном случае будут иметь направления

$$\mathbf{p}\left(\sigma\right) = \left(\sin\left(\beta(\sigma)\right),\ 0,\ \cos\left(\beta(\sigma)\right)\right), \qquad \sigma \in \left[-\sigma_{\max}, \sigma_{\max}\right], \tag{7}$$

где $\beta(\sigma)$ - угол, который образует преломленный луч с осью Oz. Предлагается расчет трехмерной преломляющей поверхности для формирования ДН (7) проводить через расчет цилиндрического профиля $r(\sigma)$, являющегося сечением поверхности плоскостью $y = 0$. Функция $r(\sigma)$ определяется из дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной [5, 6]:

$$\frac{dr\left(\sigma\right)}{d\sigma} = -r(\sigma)\frac{\sin(\sigma - \beta(\sigma))}{n_1/n_2 - \cos(\sigma - \beta(\sigma))}. \tag{8}$$

Функция $\psi(\sigma)$ вычисляется из условия, что каждый эллипсоид в семействе содержал точку $(r(\sigma)\sin(\sigma), 0, r(\sigma)\sin(\sigma))$ центрального профиля в виде:

$$\psi\left(\sigma\right) = r\left(\sigma\right) \cdot \left(1 - \varepsilon\cos\left(\sigma - \beta\left(\sigma\right)\right)\right). \tag{9}$$

Функция $\beta(\sigma)$ определяет распределение энергии вдоль отрезка фокусировки и может быть вычислена из закона сохранения светового потока:

$$I\left(\beta\right)\frac{d\beta}{d\sigma} = \int I_0\left(\sigma, u\right)\left|\frac{\partial \mathbf{e}\left(u,\sigma\right)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{e}\left(u,\sigma\right)}{\partial \sigma}\right| du. \tag{10}$$

Из закона сохранения светового потока было получено уравнение для функции $\beta(\sigma)$ в виде:

$$\frac{d\beta(\sigma)}{d\sigma} = \frac{K\left(\sigma, \beta(\sigma)\right)\left[F_1\left(u,\sigma\right) - F_2\left(u,\sigma\right)\right] + F_2\left(u,\sigma\right)}{-K\left(\sigma, \beta(\sigma)\right)\left[F_1\left(u,\sigma\right) - F_2\left(u,\sigma\right)\right] - I\left(\beta(\sigma)\right)/\sin\left(\alpha(\sigma)\right)}, \tag{11}$$

где

$$K\left(\sigma, \beta\left(\sigma\right)\right) = \frac{\left(1 - \varepsilon^2\cos\left(\sigma - \beta(\sigma)\right)\right)}{1 - 2\varepsilon\cos\left(\sigma - \beta(\sigma)\right) + \varepsilon^2},$$

$$F_1\left(u,\sigma\right) = \int\limits_0^{u_{\max}} I_0(u,\sigma) du, F_2\left(u,\sigma\right) = \int\limits_0^{u_{\max}} I_0(u,\sigma)\cos u du.$$

Формулы (2), (8), (10), (11) представляют замкнутое аналитическое решение задачи формирования ДН в виде отрезка. Таким образом, расчет преломляющей поверхности для формирования ДН в виде отрезка с заданным распределением энергии сведен к расчету дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

С помощью предложенного метода была рассчитана поверхность для формирования ДН в виде равномерного отрезка с угловым размером 150°.

Литература

[1] Досколович Л.Л., Казанский Н.Л. Расчет зеркала для формирования однопараметрической диаграммы направленности // Автометрия. – 2004. – Т. 40. – №5. – С. 104–111.

[2] Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L., Kharitonov S.I., Perlo P., Bernard S. Designing reflectors to generate a line-shaped directivity diagram // J. of Mod. Opt. – 2005. – V. 52. – №11. – P. 1529–1536.

[3] Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L., Bernard S. Designing a mirror to form a line-shaped directivity diagram // Journal of Modern Optics. – 2007. – V. 54. – №4. – P. 589–597.

[4] Математическая энциклопедия. Т. 3. – М.: "Советская энциклопедия", 1982.

[5] Elmer W.B. Optical design of reflectors. – NY: Wiley, 1985.

[6] Досколович Л.Л., Моисеев М.А. Расчет радиально-симметричных преломляющих поверхностей с учетом френелевских потерь // Компьютерная оптика. – 2008. – Т. 32. – №2. – С. 201–203.

УДК 512.625.5+517.982.4

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Дрожжинов Ю.Н.[1]

В докладе предполагается рассмотреть некоторые применения представлений асимптотически однородных обобщенных функций вдоль траекторий, определяемых непрерывными мультипликативными однопараметрическими группами. В частности, предполагается рассказать о применении таких представлений для построения асимптотически однородных решений дифференциальных уравнений, символами которых являются квазиоднородные многочлены, и о некоторых теоремах о разбиении обобщенных функций с сохранением квазиасимптотических свойств.

Литература

[1] Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. Асимптотически квазиоднородные обобщенные функции в нуле и уравнения в свертках с ядрами, символы которых квазиоднородные многочлены // Доклады РАН. – 2009. – Т. 426. – №3. – С. 300–303.

[2] Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. Асимптотически квазиоднородные обобщенные функции // Доклады РАН. – 2008. – Т. 421. – №2. – С. 157–161.

[1] Дрожжинов Юрий Николаевич (drozzin@mi.ras.ru), Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

УДК 517.958

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ

Дурдив Д.К., Жумаев Ж.Ж.[1]

Пусть $u(x,t,s)$ является решением обобщенной задачи Коши

$$u_{tt}-u_{xx}-a(x,t)u_t=\delta(x,t-s),\ (x,t)\in R^2,\ s>0,\qquad u\big|_{t<0}\equiv 0, \tag{1}$$

где $\delta(x,t)$ — двумерная дельта функция Дирака. Задача заключается в нахождении коэффициента поглощения $a(x,t)$, если известны значения решения задачи (1) при $x=0$, т.е. задана функция

$$u(0,t,s)=f(t,s),\ t>0,\ s>0. \tag{2}$$

Рассмотренная здесь обратная задача является двумерной. В случае, когда неизвестные коэффициенты зависят лишь от одной пространственной переменной x, вопросы разрешимости для различных постановок задач, близких к исследованной в этой работе, изучены в книгах [1, 2]. В работе [3] для обратной задачи определения нестационарного потенциала методом весовых априорных оценок доказана теорема единственности. Далее в [4] для этой обратной задачи доказываются глобальная единственность и устойчивость решения путем сведения обратной задачи к системе нелинейных интегральных уравнений. В этой работе исследована задача об определении нестационарного коэффициента поглощения. При этом предполагается, что неизвестный коэффициет обладает свойством четности по x.

Представляя решение задачи (1) в виде

$$u(x,t,s)=\frac{1}{2}\theta(t-s-|x|)+v(x,t,s),$$

где $v(x,t,s)$ — регулярная функция, находим, что $v(x,t,s)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(x,t,s)=\frac{1}{4}\int_{\frac{x-(t-s)}{2}}^{\frac{x+(t-s)}{2}}a(\xi,s+|\xi|)d\xi+\frac{1}{2}\int\int_{\Upsilon(x,t,s)}a(\xi,\tau)w(\xi,\tau,s)d\xi d\tau, \tag{3}$$

где

$$w(x,t,s)=v_t(x,t,s),\ \Upsilon(x,t,s)=\Big\{(\xi,\tau)\Big|\ |\xi|+s\le\tau\le t-|x-\xi|,$$

$$\frac{x-(t-s)}{2}\le\xi\le\frac{x+t-s}{2},\ 0\le s\le t,\ s=\mathrm{const}\Big\}.$$

Дифференцируя по t равенство (3), получаем уравнение для $w(x,t,s)$

$$w(x,t,s)=\frac{1}{8}\left[a\left(\frac{x+t-s}{2},\frac{x+t+s}{2}\right)+a\left(\frac{x-t+s}{2},\frac{-x+t+s}{2}\right)\right]+$$

[1]Дурдиев Дурдимурод Каландарович (durdiev65@mail.ru), Жумаев Жонибек Жамолович (Joni.J.J@mail.ru), Бухарский государственный университет, 200117, Узбекистан, г. Бухара, ул. Мухаммад Икбал, 11.

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{x-(t-s)}{2}}^{\frac{x+(t-s)}{2}} a\left(\xi, t-|x-\xi|\right) w\left(\xi, t-|x-\xi|, s\right) d\xi, \qquad (4)$$

$$(x,t,s) \in \Upsilon_T = \left\{ (x,t,s) \middle| |x|+s \le t \le T-|x|,\ 0 \le s \le t \le T \right\}.$$

Обозначим через $C_t^1\left(Q_T\right)$ класс непрерывных по s и непрерывно дифференцируемых по t функций, заданных в Q_T

Теорема. *Пусть* $f(t,s) \in C_t^1\left(Q_T\right)$, $T>0$ *и* $f(s+0,s)=1/2$. *Тогда существуют положительное число* $T_0 \le T$ *и единственная четная по* x *функция* $a(x,t) \in C\left(\Omega_{T_0}\right)$ *такие, что решение задачи (1) удовлетворяет соотношению (2).*

Положим в (4) $x=0$ и воспользуемся условием (2). Принимая во внимание четность по x функции $a(x,t)$, приходим следующему соотношению

$$f_t(t,s) = \frac{1}{4}a\left(\frac{t-s}{2}, \frac{t+s}{2}\right) + \int_{-\frac{t-s}{2}}^{\frac{t-s}{2}} a\left(\xi, t-|\xi|\right) w\left(\xi, t-|\xi|, s\right) d\xi,$$

$$(t,s) \in Q_T.$$

Перепишем это равенство, заменяя $(t-s)/2$ на $|x|$, $(t+s)/2$ — на t и разрешая относительно $a(x,t)$. Тогда, получим

$$\begin{aligned} a(x,t) = {} & 4f_t'\left(t+|x|, t-|x|\right) - \\ & -4\int_{-|x|}^{|x|} a\left(\xi, t+|x|-\xi\right) w\left(\xi, t+|x|-\xi, t-|x|\right) d\xi,\ (x,t) \in \Omega_T. \end{aligned} \qquad (5)$$

Уравнения (3)–(5) образует полную систему интегральных уравнений для функций $v(x,t,s)$, $w(x,t,s)$, $a(x,t)$. При этом будем считать, что в (4) функция a исключена с помощью равенства (5). В условиях теоремы в области Υ_T при малых T к ней применим принцип Банаха, обеспечивающий существование единственного решения системы уравнений (3)–(5).

Литература

[1] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. – 264 с.

[2] Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. – М.: Научный Мир, 2005. – 296 с.

[3] Дятлов Г.В. Единственность в одномерной задаче определения нестационарного потенциала // Сиб. матем. журн. – 2001. – №1(42). – С. 52–59.

[4] Дурдиев Д.К. Задача определения нестационарного потенциала в одном уравнении гиперболического типа // Теоретическая и Математическая физика. – 2008. – №2(156). – С. 220–225.

УДК 533.9

СТРУКТУРА ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА В ПРИСУТСТВИИ ГАЗОВОГО РАЗРЯДА

Завершинский И.П.[1], *Молевич Н.Е.*, *Порфирьев Д.П.*[2]

В последнее время в связи с развитием технологий создания проточных электроразрядных лазеров, формирования характеристик потока плазмы в плазмотронах и т.д. актуальной становится задача изучения особенностей разрядов, существующих стационарно в потоке газа. Актуальной проблемой для работы данных устройств является поиск конфигураций газового потока, обеспечивающих устойчивое существование разряда, а также способов управления характеристиками потока. В этой связи представляет интерес использование сильнозакрученных газовых потоков. Известно, что структура закрученных течений заметно отличается от структуры течений без закрутки. Согласно существующим моделям, условия образования рециркуляционной зоны определяются, прежде всего, углом закрутки потока, а не расходом газа. Аналитических решений, описывающих структуру закрученного потока с объемным подводом энергии, к настоящему времени не существует. Численный анализ эволюции и структуры незакрученного потока в присутствии однородного источника нагрева в плоской геометрии проводился в [1]. Стационарная структура закрученного течения в дозвуковом радиально неограниченном потоке с приосевым объемным подводом энергии численно исследовалась в работах [2]. При этом использовались приближения, не допускающие образования возвратных течений.

В стационарном случае структура осесимметричного закрученного потока описывается уравнениями Навье—Стокса с учетом нагрева газа в разряде с граничными условиями прилипания на стенке и условиями на входе в трубу, задающими распределение скоростей, температуру и плотность. Моделирование структуры закрученного течения в дозвуковом потоке с объемным подводом энергии в трубе проводилось с использованием программного комплекса FLUENT 6.3 в режиме аксиальносимметричного закрученного потока. Расчетная сетка содержала 83331 элемент и сгущалась вблизи стенок трубы и в окрестности источника. Радиус трубы 3 см, длина трубы 0.5 м. Радиальные распределения тангенциальной и осевой скоростей выбирались близкими к экспериментально измеренным и соответствовали степени закрутки потока, близкой к единице [3]. Полная мощность разряда считалась равной 1.2 кВт. Невозмущенное потоком давление полагалось равным атмосферному. В начальном сечении задавалась температура 300 K. На открытом конце граничное условие соответствовало условию сохранения массового расхода.

Согласно полученным результатам численного моделирования при используемом в [4] угле закрутки потока возникает противоточная зона засасываемого в центральную область атмосферного газа с вогнутым профилем тангенциальной скорости, что объясняется тем, что засасываемый в трубу атмосферный воздух первоначально не имеет вращательной составляющей скорости и только позднее, растекаясь от центра, периферийными слоями увлекается во вращение. Этот эффект наиболее сильно

[1]Завершинский Игорь Петрович (name1@domen1.ru), Самарский государственный аэрокосмический университет, имени академика С.П.Королева, 443086, Россия, г.Самара, Московское шоссе, 34.

[2]Молевич Нонна Евгеньевна (name2@domen2.ru), Порфирьев Денис Петрович (name2@domen2.ru), Самарский филиал Учреждения Российской академии наук Физического института им. П.Н.Лебедева РАН, 443011, г.Самара, ул. Ново-Садовая, 221.

выражен для частично закрученных потоков с малой степенью закрутки. Длина и ширина этой зоны растет с ростом параметра крутки. Осевая скорость внутри этой области мала, а на границе с основным потоком вообще достигает нуля.

При наличии локализованного источника тепловыделения эта приосевая зона пониженных скоростей сильно перегревается и плотность в ней резко падает. В результате на границе с этой областью также резко растет радиальная составляющая прямого потока, направленная к оси трубы по градиенту температуры. Следствием этого является преломление линий тока к оси трубки.

В результате проникновения закрученных периферийных областей потока в осевую область тангенциальная скорость вблизи оси трубы увеличивается по сравнению со случаем без источника, осевая скорость также растет. Эффективность конвективного охлаждения растет с ростом расхода газа. При малых расходах газа приосевая зона нагревается сильнее. В результате преломление линий тока происходит под большим углом и основной поток протекает через локальную зону источника к выходному отверстию, пробивая и разрушая зону противотока. За источником по потоку образуется менее плотная горячая область. При увеличении расхода газа, т.е. более эффективном охлаждении, преломление линий тока оказывается не столь значительным и разрушение зоны противотока происходит только вблизи источника или не происходит вовсе. В результате область наиболее горячего разреженного газа выдувается против потока газа, причем в зоне источника и перед источником тангенциальная скорость в осевой зоне гораздо больше, чем за источником.

Полученные закономерности изменения структуры потока с локальным источником нагрева в зависимости от расхода газа позволяют качественно объяснить наблюдаемые особенности светимости поперечного разряда в закрученном потоке. Очевидно, что интенсивность излучения будет больше в более нагретой области. При малых расходах газа сильно нагретые и возбужденные в разрядной области продукты эрозии электродов и плазмохимических реакций уносятся в прямом направлении от разрядной области, образуя светящийся след по потоку. С увеличением расхода длина этого следа уменьшается. Дальнейшее увеличение расхода газа приводит к выносу светящихся продуктов плазмохимии осевым противотоком, образуя светящийся конус, растущий в направлении завихрителя.

Работа частично поддержана АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (2009–2010 гг.), проект 2.1.1.309.

Литература

[1] Суржиков С.Т. Бифуркация дозвукового газового потока при обтекании локализованного объема низкотемпературной плазмы // ТВТ. – 2002. – Т. 40. – №4. – С. 591–600.

[2] Асмолов Е.С., Казаков А.В., Киселев А.Ф., Русьянов Д.А. К расчету закрученных турбулентных многофазных течений вязкого теплопроводного газа с объемным тепловыделением // ТВТ. – 2005. – Т. 43. – №4. – С. 594–602.

[3] Щукин В.К., Халатов А.А. Теплообмен, массообмен и гидродинамика закрученных потоков в осесимметричных каналах. – М.: Машиностроение, 1982. – 200 с.

[4] Klimov A., Bitiurin V., Tolkunov B. et al. Study of a Longitudinal Plasmoid Created by Capacity Coupled HF Discharge in Vortex Airflow // Paper AIAA 2009-1046. – 2009.

УДК 517.982.4

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, АСИМПТОТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Завьялов Б.И.[1]

Обобщенные функции, обладающие квазиасимптотикой по траекториям, определяющихся однопараметрическими группами линейных преобразований аргументов этих функций в асимптотической шкале правильно меняющихся функций, называются асимптотически однородными по этим группам преобразований. Предельные обобщенные функции будут однородны по этим группам. В докладе будет дано полное описание асимптотически однородных обобщенных функций вдоль траекторий, определяемых непрерывными мультипликативными однопараметрическими группами преобразований, у которых вещественные части всех собственных значений инфинитезимальной матрицы положительны, в том числе и для критических порядков асимптотической шкалы.

[1]Завьялов Борис Иванович (bzavial@mi.ras.ru), Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

УДК 621.391

МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ И НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

Зайцев В.В.[1]

При обработке информации аналоговыми методами чрезвычайно широко используются инерционные преобразования сигналов нелинейными системами. Основой теоретического анализа таких преобразований служит теория нелинейных колебаний (ТНК) [1]. Иначе обстоят дела в области цифровой обработки сигналов (ЦОС). Теория и практика ЦОС в подавляющем большинстве случаев оперирует линейными системами, функционирующими в дискретном времени, — линейными ДВ-системами.

По формальным признакам к нелинейным динамическим ДВ-системам наиболее близки точечные отображения, в частности, отображения Пуанкаре [2]. Последние строятся на основе решений дифференциальных уравнений движения динамических систем и служат для качественного анализа особенностей поведения исходных систем в непрерывном времени. Можно также постулировать вид точечного отображения и рассматривать его как модель для описания некоторой физической ситуации. Таким путем получен ряд известных точечных отображений с регулярным и хаотическим поведением — отображения Заславского, Хенона, Холмса и другие. Однако весьма проблематично целенаправленно использовать эти отображения в системах ЦОС.

Поэтому практический интерес представляют методы синтеза нелинейных ДВ-систем, позволяющие воспроизводить в дискретном времени характеристики колебаний, наблюдаемых в аналоговой системе-прототипе. Один из таких методов, основанный на принципе инвариантности импульсной характеристики резонансной цепи аналоговой системы по отношению к дискретизации времени, был описан автором ранее. В настоящем сообщении принцип импульсной инвариантности предлагается использовать совместно с процедурой эквивалентной линеаризации ТНК.

Пусть в непрерывном времени динамическая система резонансного типа описывается уравнением движения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0 f\,(x)\,\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 g(x)x. \tag{1}$$

Здесь ω_0 и Q — собственная частота и добротность линейного резонанса, а $f(x)$ и $g(x)$ — четные функции диссипативной и реактивной нелинейностей системы.

Нелинейному уравнению (1) соответствует линеаризованное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_e(a)}\frac{dx}{dt} + \omega_e^2(a)x = 0 \tag{2}$$

с эквивалентными частотой $\omega_e(a)$ и добротностью $Q_e(a)$ резонатора, при этом вид их амплитудной зависимости определяется видом нелинейностей $f(x)$ и $g(x)$.

[1]Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Линейный диссипативный осциллятор (2) предлагается использовать в качестве аналогового прототипа для синтеза динамической системы, функционирующей в дискретном времени. Из множества известных методов синтеза линейных ДВ-систем выберем наиболее обоснованный с физической точки зрения метод инвариантности импульсных характеристик. Основой метода, как это отражено в его названии, является представление импульсной характеристики ДВ-системы отсчетами импульсной характеристики аналоговой системы-прототипа, взятыми с интервалом дискретизации Δ. Не останавливаясь на подробностях, приведем полученное в рамках метода разностное уравнение движения ДВ-системы:

$$x[n] = 2\cos(2\pi\,\Omega_e(a))\alpha(a)x[n-1] - \alpha^2(a)x[n-2]. \tag{3}$$

Здесь $\Omega_e = \omega_e/\omega_d$ — эквивалентная частота резонатора, нормированная на частоту дискретизации $\omega_d = 2\pi/\Delta$, а коэффициент $\alpha = \alpha(a)$ равен

$$\alpha(a) = \exp\left(-\pi\frac{\Omega_0}{Q_e(a)}\right).$$

Уравнение (3) представляет собой линеаризованное уравнение движения ДВ-осциллятора. Для того, чтобы превратить (3) в алгоритм генерации ДВ-колебаний, его необходимо дополнить уравнением связи между параметром a и процессом $x[n] = x\,(n\Delta)$. В аналоговом прототипе a — это амплитуда автоколебаний. Сохраняя физический смысл параметра, будем определять амплитуду путем квадратичного детектирования и низкочастотной фильтрации. В таком случае одно из возможных уравнений связи будет иметь вид

$$I[n] = \sigma I[n-1] + 2\pi\,\Omega_c x^2[n],\;\; a = \sqrt{I[n-1]}, \tag{4}$$

где $\sigma = \exp(-2\pi\Omega_c)$, Ω_c — нормированная частота среза НЧ фильтра первого порядка. Здесь также введен временной сдвиг в один интервал дискретизации.

Для множества допустимых нелинейностей $f(x)$ и $g(x)$ аналоговых систем уравнения (3)–(4) определяют семейство нелинейных колебательных систем, функционирующих в дискретном времени. Исследование их динамических характеристик проводится как методом численного эксперимента, так и с помощью асимптотических методов ТНК, распространенных на системы с дискретным временем. Как показывают результаты исследований, нелинейные ДВ-системы (3)–(4), сохраняя основные черты аналоговых прототипов, способны демонстрировать новые эффекты, не наблюдаемые в непрерывном времени.

Литература

[1] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. 504 с.

[2] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 с.

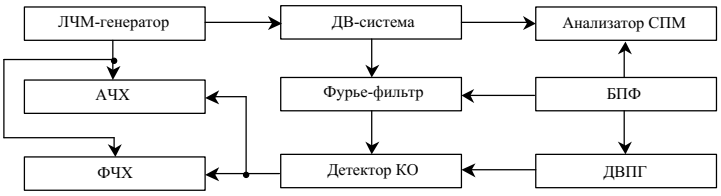
УДК 517.962.2: 574.34

О СИНХРОНИЗАЦИИ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ЦИКЛОВ

Зайцев В.В., Агибалов С.А.[1]

Математическое моделирование процессов в био- и экосистемах является одним из основных методов их теоретического исследования[1]. Знаменитая модель Вольтерра, описывающая циклические процессы в системе хищник-жертва известна уже более семидесяти лет. Тем не менее, исследования в рамках различных модификаций этой классической модели активно проводились все эти годы, в том числе и в области экономики [2]. Согласно сложившимся к настоящему времени представлениям о динамике системы хищник–жертва ее основным движением являются устойчивые автоколебания численностей видов. Поскольку эффект захвата частоты (фазовая синхронизация) — характерный признак автоколебаний, вызывает интерес исследование его проявлений в модели Вольтерра.

В настоящем сообщении процессы фазовой синхронизации автоколебаний в системе хищник–жертва исследованы методом численного эксперимента. Основу эксперимента составляет модель системы в дискретном времени (ДВ-модель), предложенная в работе [3].



Структурная схема эксперимента показана на рисунке Она содержит программно реализованные устройства: генератор с линейной частотной модуляцией сигнала (ЛЧМ), анализатор спектральной плотности мощности (СПМ), детектор комплексной огибающей первой гармоники (КО) и построители амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристик. В численном эксперименте используются также дискретные преобразования Фурье (БПФ) и Гильберта (ДВПГ).

Показано, что АЧХ и ФЧХ автоколебаний, захваченных внешним гармоническим сигналом, имеют вид, характерный для автоколебательных систем с мягкой неизохронностью.

Литература

[1] Мюррей Дж. Математическая биология. Т. 1. – М.-Ижевск: РХД, 2009. – 776 с.

[2] Романовский М.Ю., Романовский Ю.М. Введение в эконофизику. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. – 280 с.

[3] Зайцев В.В., Карлов А.В. (мл), Телегин С.С. ДВ-модель системы хищник–жертва // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – 2009. – Вып. 6. – С. 139–148.

[1]Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@ssu.samara.ru), Агибалов Сергей Александрович (comphysic@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

УДК 517.956

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА—БИЦАДЗЕ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Зарубин А.Н.[1]

В области $D = D^+ \cup D^-_1 \cup D^-_2 \cup J$, где $D^+ = \{(x,y) : |x| < +\infty, 0 < y < h\}$ $(0 < h \equiv \text{const})$, $D^-_1 = \{(x,y) : x > 0, -x < y < 0\}$, $D^-_2 = \{(x,y) : x < 0\,,\ x < y < 0\}$, $J = \{(x,y) : |x| < +\infty, y = 0\}$, рассмотрим уравнение

$$U_{xx}(x,y) + \operatorname{sgn} y\, U_{yy}(x,y) = 0. \tag{1}$$

Задача Т. Найти исчезающую при $x \to \pm\infty$, $0 \le y \le h$, непрерывную в $\overline{D}$ функцию $U(x,y)$, с непрерывными в D производными $U_x(x,y)$ и $U_y(x,y)$ (при $x \to 0$ допускается особенность функции $U_y(x,0)$ порядка меньше единицы), удовлетворяющую уравнению (1) в области D, краевым условиям

$$\begin{array}{ll} U(x,h) = \varphi(x), & |x| < +\infty; \\ U(x,-x) = \psi_1(x), & x \ge 0; \\ U(x,x) = \psi_2(x), & x \le 0 \end{array} \tag{2}$$

и условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0-} U(x,y) = \lim_{y\to 0+} U(x,y) = \omega(x), \tag{3}$$

$$\lim_{y\to 0-} U_y(x,y) = \lim_{y\to 0+} U_y(x,y) = \nu(x), \tag{4}$$

где $\varphi(x), \psi_i(x) (i = 1,2)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции, а $\omega(x), \nu(x)$ — функции, подлежащие определению в процессе построения решения задачи Т.

Теорема. Если функции $\varphi(x) \in C^2(J)$, $\psi_1(x) \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$, $\psi_2(x) \in C(-\infty,0] \cap C^2(-\infty,0)$, абсолютно интегрируемы на своих промежутках и $\varphi(\pm\infty) = 0$, $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, $\psi_1(+\infty) = \psi_2(-\infty) = 0$, то существует единственное решение задачи Т.

Доказательство единственности решения задачи Т следует из того, что однородная задача Т имеет в $\overline{D}$ тривиальное решение.

Решение задачи Дирихле в области D^+ для уравнения (1), исчезающее на бесконечности, удовлетворяющее условиям (2_1), (3), найдено с помошью общего решения уравнения (1) в форме

$$\begin{aligned} U(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big\{ \Big[R_x^{-iy+ih(2k+1)} - R_x^{iy+ih(2k+1)} \Big] \varphi(x) + \\ + \Big[R_x^{iy+2ihk} - R_x^{-iy+2ih(k+1)} \Big] \omega(x) \Big\}, \end{aligned} \tag{5}$$

где R_x^τ — оператор сдвига по переменной x : $R_x^\tau q(x) = q(x-\tau)$.

[1]Зарубин Александр Николаевич (alex_zarubin@mail.ru), Орловский государственный университет, 302026, Россия, г. Орел, ул. Комсомольская, 95.

Исходя из (5) функциональное соотношение между $\omega(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из D^+ на линию $y=0$, имеет вид

$$\nu(x)=i\omega'(x)-2i\sum_{k=0}^{+\infty}R_x^{2ihk}\omega'(x)+2i\sum_{k=0}^{+\infty}R_x^{ih(2k+1)}\varphi'(x),-\infty<x<+\infty. \tag{6}$$

Функциональные соотношения

$$\omega'(x)=\nu(x)+\psi_1(x/2),x>0, \tag{7}$$

$$\omega'(x)=-\nu(x)+\psi_2(x/2),x<0, \tag{8}$$

на линии $y=0$ из областей D_1^-, D_2^- получены из решений задач Коши с данными (3)–(4) в областях D_1^-, D_2^- с учетом условий (2_2)–(2_3).

Вопрос существования решения задачи T сводится к разрешимости системы (6)–(8), которая редуцируетя к разностному уравнению

$$\nu(x)=-i\mathrm{sgn}xR_x^{2ih}\nu(x)+g(x),|x|<+\infty,$$

имеющему решение

$$\begin{aligned}\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-i\mathrm{sgn}xR_x^{2ih}\right)^k g(x)=\\ =\sum_{k=0}^{+\infty}(-i\mathrm{sgn}x)^kR_x^{2ihk}g(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-i\mathrm{sgn}x)^kg(x-2ihk),\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$g(x)=H(x)g_1(x)+H(-x)g_2(x),$$

а $g_i(x)$ выражаются через функции $\varphi(x),\psi_i(x)(i=1,2)$; $H(\xi)$ — функция Хевисайда.

Для восстановления интегральной формы решений (9), (5) следует учесть возможность представления любой непрерывной функции в виде свертки с дельта-функцией Дирака.

УДК 517.9

p-АДИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ КОННА

Зеленов Е.И.[1]

В докладе предложена конструкция Фредгольмова модуля, естественным образом связанного с деревом Брюа—Титса и действием p-адической проективной линейной группы группы на этом дереве. Мы будем работать в рамках квантового исчисления, предложенного А. Конном [1]. Основной целью будет построение квантового дифференциала и изучение его свойств. В частности, доказывается, что квантовый дифференциал функции f является компактным тогда и только тогда, когда f квазинепрерывна. Даются также необходимые и достаточные условия принадлежности квантового дифференциала идеалу операторов конечного ранга и идеалам Шаттена-фон Неймана.

Литература

[1] Conn A. Noncommutative geometry. – Academic Press, 1994.

[1]Зеленов Евгений Игоревич (evgeny.zelenov@gmail.com), Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 117966, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 42.

УДК 519.2+51-77

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИНАНСОВЫХ КРАХОВ ДЖОХАНСЕНА—СОРНЕТТА И ЕЕ УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ

Зубарев А.П.[1], *Пивоварова А.С.*, *Стеряков А.А.*[2]

В работах [1, 2] был предложен подход к моделированию предкрахового поведения цен, основанный на предположении об иерархической организации агентов на рынке. Такая иерархическая структура агентов во многом отражает реальную иерархическую организацию фондового рынка, которая может быть как постоянным свойством рынка, так и спонтанно возникшим [3, 4]. В данной модели индивидуальные трейдеры (агенты нулевого уровня) объединяются в группы из m агентов (агенты первого уровня), далее агенты первого уровня также объединяются в группы по m агентов, формируя агентов 2 уровня и т.д. В таком случае получается иерархическая организация, в которой агенты порядка n состоят из m^n индивидуальных трейдеров. Для исследования модели можно положить $m = 2$. Предполагается, что что каждый индивидуальный трейдер i обладает предпочтительным временем t_i для покупки акций, которое в отсутствии взаимодействия между агентами имеет показательное распределение $p_0(t) = \lambda \exp\{-\lambda t\}$. Взаимодействие агентов происходит таким образом, что информация о том, что некоторый агент уже совершил покупку, является для еще не вступивших в торговлю агентов поводом пересмотреть принятое ранее решение о времени покупки. В итоге, влияние агента i в момент времени t_i на агента j, собственное время совершения покупки которого равно t_j, приводит к новому времени совершения покупки агентом j, равному $t_{ij} = t_i + 2^{-\beta}(t_j - t_i)$, где $\beta \geq 0$ — коэффициент влияния. Можно показать, что плотность вероятности $p_N(t)$ срабатывания на рынке агента уровня N удовлетворяет системе рекуррентных уравнений

$$p_N(t) = \frac{2}{2^{-\beta}} \int_0^t p_{N-1}(t_1)\, p_{N-1}\left(\frac{t - \left(1 - 2^{-\beta}\right) t_1}{2^{-\beta}}\right) dt_1.$$

В рамках данной модели можно дать определение краха как критической точки t_c во времени, при приближении к которой срабатывают все агенты. Математически существование критической точки означает, что при увеличении N функция $p_N(t)$ стремиться к дельта-функции $p_N(t) \to p_\infty(t) \equiv \delta(t - t_c), \quad N \to \infty$. Точное аналитическое выражение для критической точки можно получить только в случае $\beta = 1$. Случай $\beta \neq 1$ исследован нами численно, при этом строилась зависимость количества агентов, выставивших заявки на покупку, от времени. При приближении к критической точке на разных временных масштабах наблюдаются логопериодические колебания, наложенные на степенную зависимость. Оказывается, что значение критической точки t_c в пределе $N \to \infty$ одно и тоже для любой начальной реализации распределения времен действий. При численном анализе системы количество

[1]Зубарев Александр Петрович (apzubarev@mail.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

[2]Пивоварова Анна Сергеевна (a-pivovarova@mail.ru), Стеряков Александр Александрович (lubopitnij@mail.ru), Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34.

агентов всегда ограничено, поэтому время краха t_c будет различным для различных начальных реализаций. Однако при увеличении числа агентов разброс таких значений должен уменьшаться, т.е. плотность распределения времен краха t_c должна стремиться к дельта-функции. Для подтверждения этого факта были построены функции плотности распределения времен крахов для систем с различным числом агентов. Было показано, что распределение точек краха действительно сужается с увеличением числа агентов к некоторому критическому значению времени краха.

Одним из недостатков вышеприведенной модели является то, что агенты являются однородными по взаимодействию друг с другом. Такое упрощение не является вполне оправданным, т.к. введение иерархической структуры агентов требует явного учета их взаимного расположения при взаимодействии. Поэтому целесообразным выглядит введение зависимости степени влияния агентов друг на друга от расстояния d_{ij} между ними, которое определяется как $d_{ij} = p^m$, где p — арность дерева, m — количество уровней дерева до первого общего предка от элементов i и j. Данное расстояние является ультраметрическим, т.е. удовлетворяет усиленному неравенству треугольника $d_{ik} \leq \max(d_{ij}, d_{jk})$. Далее можно предположить, что влияние агентов друг на друга не одинаково, а уменьшается с расстоянием. Т.е. время действия агента j под влиянием агента i уменьшается до величины

$$t_{ij} = t_j - \frac{1}{(d_{ij})^\beta}(t_j - t_i). \tag{1}$$

При численном исследовании были получены решения, представляющие собой самоподобные нелинейные колебания, наложенные на степенной закон. Постоение плотностей распределения точек краха при разном числе агентов показало, что наблюдается поведение аналогичное исходной иерархической модели. Т.е. плотность распределения также стремиться к δ-функции, при этом сужение происходит быстрее, чем в модели Джохансена—Сорнетта.

Следует отметить, что случай влияния сработавшего кластера лишь на соседний кластер является довольно грубым приближением реальных процессов распространения информации на рынке. Ясно, что влияние агентов друг на друга сильно неоднородно и зависит от взаимного расположения агентов внутри иерархической структуры. Пусть начальные времена действия агентов являются случайными с показательным законом распределения. В момент, когда агент с наименьшим временем выставляет свою заявку, информация о его действиях начинает влиять на всех агентов на рынке, однако данное влияние тем меньше, чем дальше в ультраметрическом смысле находятся трейдеры от данного сработавшего агента. Тогда новое время действия еще не сработавшего агента j при условии, что некоторый i-й агент вступил в торговлю в момент времени t_i, определяются соотношением (1). Принципиальным отличием данной модели от иерархических моделей, описанных ранее, является то, что влияние агентов начинает учитываться не только при срабатывании некоторого кластера, а присутствует всегда. Каждый сработавший агент сокращает время срабатывания всех оставшихся агентов.

Численное исследование данной модели показало, что в малой окрестности критической точки, т.е. времени срабатывания всех агентов, наблюдается сильное пороговое изменение количества вступивших в торговлю агентов с увеличивающейся амплитудой и частотой. Стоит отметить, однако, что визуальное наблюдение такого поведения затрудненно из-за быстрого убывания периода полученных колебаний. Исследование плотностей функций распределения времен крахов в зависимости от числа агентов показало, что эти функции сужаются, а время, соответствующее их максимумам, уменьшается с увеличением числа участников рынка.

Литература

[1] Sornette D., Johansen. A. A hierarchical model of financial crashes. – Physica A. – V. 261. – 1998. – P. 581–598.

[2] Sornette D., Johansen A., Bouchaud J.-Ph. Stock market crashes, Precursors and Replicas // Journal de Physique, France. – V. 6. – 1996. – P. 167–175.

[3] Huang Y., Ouillon G., Saleur H., Sornette D. Spontaneous generation of discrete scale invariance in growth models // Phys. Rev. – E 55. – 1997. – P. 6433–6447.

[4] Tostesen E. Dynamics of hierarchically clustured cooperative agents, Cand. Scient. Thesis, University of Copenhagen, 1995.

УДК 517.9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЙ БИКОМПЛЕКС

Жаринов В.В.[1]

В вариационном исчислении на евклидовом пространстве важную роль играет вариационный бикомплекс. В связи с все возрастающим интересом к решетчатым моделям актуально стоит вопрос о построении его аналога на многомерной прямоугольной решетке. В докладе такой аналог предлагается в специальной постановке, связанной с выбором класса дифференциально-разностных функций на решетке. При этом вид построенного бикомплекса существенно отличается от ожидаемого. Такое отличие связано с выбором класса функций. Отметим, что в стандартной постановке задача пока не решена.

[1]Жаринов Виктор Викторович, Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

УДК 530.1 539.12

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА И ЕЕ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИХ СЛЕДСТВИЯХ

Журавлев В.М.[1]

В докладе излагается способ интерпретации целочисленного электрического заряда как топологического инварианта — эйлеровой характеристики областей трехмерного пространства, ограниченных особыми изоповерхностями функции Морса [1–3]. Соответствующая функция Морса связывается с функцией высоты трехмерного многообразия вложенного в объемлющее четырехмерное пространство и играет роль нового потенциала электродинамики с точечными зарядами. Показано. что данный подход допускает переопределение электрических и магнитных полей, что позволяет формально избавится от расходимостей в собственной энергии точечных зарядов. Выводятся уравнения электродинамики с точечными целочисленными зарядами. Показано, что В рамках такого подхода предлагается интерпретация барионного заряда, как другого топологического инварианта трехмерного пространства — числа "ручек Уилера" [4]. В целом это позволяет построить топологическую интерпретацию частиц как областей трехмерного пространства, ограниченных особыми изоповерхностями фундаментального потенциала по их топологической структуре и числу "ручек Уилера" вклеенных в область. Предлагаемое развитие этого подхода позволяет получить геометрическую интерпретацию волновой функции частицы и геометрический аналог статистического постулата квантовой теории. На основе такой интерпретации,исходя из геометрических соображений и принципа соответствия выводится уравнение Шредингера. Высказываются общие соображения как получить теорию со спином.

Литература

[1] Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленным зарядом и топология // Гравитация и электромагнетизм. – Минск. – БГУ. – 1998. – С. 42–50.

[2] Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленным зарядом и топология // Изв. взов. Серия физика. – 2000. – №2. – С. 134–140.

[3] Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленным зарядом и топология // Критич. технол. и фундамент. пробл. физики конденсир. сред. – Ульяновск, 2001. – С. 42–72.

[4] Misner C.W., Wheeler J.A. Ann. Phys. USA, 1957. – V. 2. – P. 527–532; Wheeler J.A., Geometrodynemics. – NY: Academic Press, 1962.

[1] Журавлев Виктор Михайлович (zhvictorm@gmail.com), Ульяновский государственный университет, 432001, Россия, г. Ульяновск, ул. Л.Толстого, 42.

УДК 530.1 532.5

МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ПОДСТАНОВОК КОУЛА—ХОПФА И МНОГОМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Журавлев В.М., Зиновьев Д.А., Самойлов В.В., Хасанов И.Ш. [1]

В докладе излагается общие принципы метода вычисления классов и иерархий уравнений в частных производных, интегрируемых с помощью метода обобщенных подстановок Коула—Хопфа [1, 3]. Рассматриваются результаты по применению этого подхода к задачам гидромеханики сжимаемой жидкости [2]. Излагается вариант метода обобщенных подстановок Коула—Хопфа для уравнений записанных в матричной форме. Излагаются общие принципы переноса идей метода на уравнения, записанные в терминах обобщенных производных. Показано, что метод может быть распространен на уравнения с любыми типами производных D_t и D_x по двум независимым переменным, для которых выполнены два условия. Первое условие состоит в требовании перестановочности производных:

$$D_x D_t F = D_t D_x F.$$

Второе условие состоит в выполнении правила Лейбница:

$$D_x(F \cdot G) = D_x(F) \cdot G + F \cdot D_x(G) + P_x[D_x(F), D_x(G), F, G],$$
$$D_t(F \cdot G) = D_t(F) \cdot G + F \cdot D_t(G) + P_t[D_t(F), D_t(G), F, G],$$

где $P_x[D_x(F), D_x(G), F, G]$ и $P_t[D_t(F), D_t(G), F, G]$ — полиномы, зависящие только от самих функций и их первых производных. В частности, это позволяет распространить метод Коула—Хопфа на уравнения в разностных производных [4, 5] с оператором дифференцирования:

$$D_x \hat{F} = \frac{1}{\Delta x}\Big(\hat{F}_{i+1} - \hat{F}_{i+1}\Big),$$

и правилом Лейбница:

$$D_x\Big(\hat{F}\hat{G}\Big) = \Big(D_x\hat{F}\Big)\hat{G} + \hat{F}\Big(D_x\hat{G}\Big) + \Delta x\Big(D_x\hat{F}\Big)\Big(D_x\hat{G}\Big).$$

Здесь Δx — шаг сетки. Так же метод может быть распространен уравнения с дифференцированием на матричных алгебра в форме коммутатора:

$$D_x \hat{F} = [\hat{x}, \hat{F}],$$

со стандартным правилом Лейбница. Здесь $\hat{x}$ — некоторый выделенный элемент матричной алгебры.

В докладе рассматривается результаты распространения метода обобщенных подстановок Коула—Хопфа на многомерные уравнения в частных и других типах производных. Предлагаются упрощенные модификации этого метода для задач гидромеханики.

[1] Журавлев Виктор Михайлович (zhvictorm@gmail.com), Зиновьев Дмитрий Александрович (zhvictorm@gmail.com), Самойлов Вадим Владимирович, (zhvictorm@gmail.com), Хасанов Илдус Шавкетович (zhvictorm@gmail.com), Ульяновский государственный университет, 432001, Россия, г. Ульяновск, ул. Л.Толстого, 42.

Литература

[1] Журавлев В.М., Никитин А.В. Новый подход к построению нелинейных эволюционных уравнений, линеаризуемых с помощью подстановок типа Коула—Хопфа // Нелинейный мир. – 2007. – Т. 5. – №9. – С. 603–611.

[2] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула—Хопфа и точно интегрируемые модели одномерных течений сжимаемой жидкости // Письма в ЖЭТФ. – 2008. – Т. 87. – №5. – С. 314–318; Метод обобщенных подстановок Коула—Хопфа в размерности $1+2$ и интегрируемые модели двумерных течений сжимаемой жидкости // Письма в ЖЭТФ. – 2008. – Т. 88. – В. 3. – С. 194–197.

[3] Журавлев В.М. Метод обобщенных подстановок Коула—Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений // ТМФ. – 2009. – Т. 158. – №1. – С. 58–71.

[4] Журавлев В.М., Журавлев А.В. Новый метод идентификации нелинейных моделей пространственно-временных процессов и прогнозирования по эмпирическим данным // Нелинейный мир. – 2009. – №10. – С. 763–771.

[5] Журавлев В.М., Журавлев А.В., Корнилов Д.А., Никитин А.В., Самойлов В.В. Метод обобщенных подстановок Коула—Хопфа в теории нелинейных дискретных систем // Прикладная математика и механика. – Ульяновск. – 2009. – УлГТУ. – С. 89–103.

УДК 517.958

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЛИУВИЛЛЯ В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МЕТОДОМ ПОГРУЖЕНИЯ В РАСШИРЕННОЕ КОМПЛЕКСНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Журавлев В.М.[1], *Корнилов Д.А.*[2]

Настоящая работа посвящена исследованию классов точных решений уравнений Лиувилля и методам их построения. Уравнения Лиувилля являются частным случаем более общего класса нелинейных уравнений Клейна—Гордона. Эти уравнения играют важную роль в различных разделах теоретической физики. В частности, стационарные течения идеальной жидкости на плоскости в целом описываются всевозможными нелинейными уравнениями Клейна—Гордона, но явные решения для таких течений удается получить в основном для случая, когда соответствующее уравнение для функции тока сводится к уравнению Лиувилля [1]. Это объясняется тем, что среди уравнений Клейна—Гордона уравнение Лиувилля выделяется повышенной внутренней симметрией. Это делает уравнение Лиувилля интересным объектом в ряде других задач математической и теоретической физики, например, в квантовой теории поля и теории гравитации, где получение точных решений является важным фактором выяснения свойств физических систем. В этом плане можно отметить и использование свойств этого уравнения в задачах автоволновых процессов [2, 3]. Это уравнение тесно связано и с такими разделами физики, как теория гравитации, теория поля и т.д. В качестве характерного примера приведем работу [4], в которой с помощью уравнения Лиувилля описывается самосогласованная динамика гравитационного и электростатического полей Вселенной, заполненной заряженной жидкостью. Укажем также на работы [5–8], в которых была прослежена взаимосвязь уравнения Лиувилля с рядом уравнений математической физики и, в частности, с диффузионными нелинейными уравнениями теории автоволн. В работе [9] рассматривалась взаимосвязь уравнения Лиувилля и двумеризованных цепочек Тоды.

Основным объектом исследования в данной работе будут уравнения Лиувилля (УЛ) (с операторами Лапласа (УЛ-Л) и Д'Аламбера)), имеющие вид

$$\Delta\Phi = \Omega_0 \exp\{-2\Phi\}, \qquad \Box\Phi = \Omega_0 \exp\{-2\Phi\}, \tag{1}$$

где Ω_0 — вещественная постоянная. При этом однородные уравнения Лапласа и Д'Аламбера как частные случаи УЛ, соответствующие значению $\Omega_0 = 0$. Это позволяет классы решений уравнений Лапласа и Д'Аламбера описывать с помощью специальных классов уравнения Лиувилля.

В основе метода лежит возможность внедиагонального представления операторов Лапласа и Д'Аламбера [5, 10], при которых они имеют вид суммы смешанных

[1]Журавлев Виктор Михайлович (zhvictorm@gmail.com), Ульяновский государственный университет, 442900, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

[2]Корнилов Дмитрий Александрович (kda75@mail.ru), Ульяновский государственный университет, филиал в г. Димитровграде, 433507, Россия, Ульяновская обл., г. Димитровград, проспект Димитрова, 4.

производных от координат:

$$\Delta = \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \varepsilon_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{i<j}^{N} \gamma_{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}. \qquad (2)$$

Здесь d — размерность координатного пространства R^d, на котором определен оператор Лапласа или Д'Аламбера,

$$\varepsilon_\alpha = \pm 1, \quad \alpha = 1, \ldots, d, \quad z_i = \sum_{\alpha=1}^{d} a_\alpha^{(i)} x_\alpha, \quad i = 1, \ldots, N,$$

а $a_\alpha^{(i)}$ — коэффициенты некоторого линейного преобразования координат $\mathbf{x} \in R^d$ в координаты $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^N$: $R^d \stackrel{\xi}{\to} \mathbf{C}^N$, вообще говоря комплексного, координатного пространства $\mathbf{C^N}$ размерности N ($d \leq N$), γ_{ij} матрица постоянных коэффициентов с нулевой диагональю $\gamma_{ii} = 0,\ i = 1, \ldots, N$.

В настоящей работе, следуя данному методу, построены и изучены свойства различных точных решения уравнения Лиувилля, а также проведена их классификация

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг.

Литература

[1] Журавлев В.М. ПММ. – **58**. – №6. – 61. – 1994.
[2] Лезнов А.Н., Савельев М.В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. – М.: Наука, 1985. – 279 с.
[3] Журавлев В.М. ЖЭТФ. – 1996. – Т. 110. – №6. – С. 910–929.
[4] Zhuravlev V.M., Kornilov D.A. Latent mass effect in an inhomogeneous cosmo-logical model with a self-interacting scalar field and a perfect fluid. – Grav.& Cosm. – **5**. – №4. – P. 325–328 (1999).
[5] Журавлев В.М. ТМФ. – 1999. – **120**. – №1. – P. 1–19.
[6] Журавлев В.М. Письма в ЖЭТФ. – **65**. – №3. – 285(1997).
[7] Журавлев В.М., ЖЭТФ. – 1998. – **114**. – №5.
[8] Журавлев В.М. Точные решения уравнений нелинейной диффузии в двумерном координатном пространстве // ТМФ. – 2000. – Т. 124. – №2. – С. 265–278.
[9] Журавлев В.М. Квадратичные формы и точные решения уравнений двумеризованных цепочек Тоды // Ученые записки УлГУ, сер. физическая. – 2000. – №2(9). – С. 3–11.
[10] Журавлев В.М., Корнилов Д.А. Метод погружения в расширенное комплексное пространство и эффективизация вычислений точных решений уравнений Лиувилля в многомерных пространствах // Математические методы теоретической физики. Сборник статей. – Ульяновск: УлГУ, 2007. – С. 129–147.

УДК 621.396

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ РАДИОСИГНАЛОВ В НЕОДНОРОДНОЙ ИОНОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Ипатов Е.Б.[1]

Электромагнитный импульс, прошедший через ионосферу, несет информацию, как о регулярной структуре ионосферы, так и о ее возмущениях. Однако сложность выделения этой информации из основных характеристик сигнала: его формы и спектра — чрезвычайно велика, поскольку мы всегда имеем дело с интегральным эффектом, формируемым в протяженной, пространственно неоднородной, нестационарной, диспергирующей среде. Практически единственным методом, позволяющим выделить эффекты различного плана, остается прямое численное моделирование распространения радиосигналов, максимально учитывающее возможные радиофизические эффекты на трассе распространения.

В настоящей работе представлен метод комплексного численного моделирования пространственно-временной структуры радиосигналов, распространяющихся в неоднородной ионосферной плазме. При задании пространственной структуры плазмы использована глобальная параметрическая модель, характеристики которой восстановлены по ионограммам вертикального зондирования. Определены спектральные, временные и пространственные распределения полей как в регулярных однородных областях, так и в областях многолучевости и фокусировки.

Электромагнитное поле в ионосферной плазме без учета влияния магнитного поля Земли удовлетворяет уравнение Клейна—Гордона [1, 2]:

$$\Delta\widetilde{U} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\widetilde{U}}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2(\mathbf{r})}{c^2}\widetilde{U}, \tag{1}$$

где c — скорость света; $\omega_p = \omega_p(\mathbf{r})$ — плазменная частота (круговая); t — время, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор текущей точки в декартовой системе координат; $\widetilde{U}(\mathbf{r},t) = A(\mathbf{r})S(t)$ — амплитуда поля.

Применяя преобразование

$$U(\mathbf{r},\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{U}(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega t)dt$$

к уравнению (1), получаем для Фурье-компоненты уравнение Гельмгольца [3, 4]:

$$[\Delta + k_0^2 n^2(\mathbf{r},\omega)]U(\mathbf{r},\omega) = 0 \tag{2}$$

с начальным условием

$$U|_\Omega = A(a,b)\exp(ik_0|\mathbf{r}|)F(\omega). \tag{3}$$

Здесь $k_0 = \omega/c$; $n(\mathbf{r},\omega)$ — показатель преломления, зависящий от пространственных координат $\mathbf{r}$ и частоты волны ω, $F(\omega)$ — Фурье-образ исходного сигнала $S(t)$, поверхность $\Omega = \{(x^2+y^2+z^2)^{1/2} = R_0\}$, a, b — угловые координаты на сфере радиуса R_0,

[1] Ипатов Евгений Борисович (ipatoveb@mail.ru), Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700, Россия, г. Долгопрудный Московской обл., Институтский пер., 9.

$A(a,b)$ — коэффициент, характеризующий амплитуду и диаграмму направленности излучения источника. Значение R_0 выбирается таким, чтобы $U|_\Omega$ представляла собой амплитуду монохроматического волнового поля в дальней зоне источника для всего спектра функции $S(t)$. В расчетах полагалось, что R_0 равняется 1 км.

Для построения асимптотического решения (2)–(3) используется метод канонического оператора Маслова [5, 6, 7, 8], который позволяет свести задачу к решению гамильтоновой системы из шести обыкновенных дифференциальных уравнений для координат x, y, z и чисел k_x, k_y, k_z

$$\frac{dx}{dl} = k_x, \qquad \frac{dk_x}{dl} = \frac{1}{2}\frac{\partial n^2(x,y,z)}{\partial x},$$
$$\frac{dy}{dl} = k_y, \qquad \frac{dk_y}{dl} = \frac{1}{2}\frac{\partial n^2(x,y,z)}{\partial y},$$
$$\frac{dz}{dl} = k_z, \qquad \frac{dk_z}{dl} = \frac{1}{2}\frac{\partial n^2(x,y,z)}{\partial z}$$

с начальными данными Коши

$$x|_{l=0} = 0, \qquad k_x|_{l=0} = \cos a\, \sin b,$$
$$y|_{l=0} = 0, \qquad k_y|_{l=0} = \sin a\, \cos b,$$
$$z|_{l=0} = 0, \qquad k_z|_{l=0} = \sin b.$$

Для восстановления профиля электронной концентрации, усредненной как по времени снятия ионограммы, так и по пространственным координатам используется метод [9], основанный на критерии χ^2.

Расчеты показывают, что производительность предлагаемых алгоритмов делает возможным применять их для решения таких задач, как распространение широкополосных и свехширокополосных сигналов, формирование полей ближней зоны в неоднородных средах, диагностика ионосферной плазмы импульсами специальной формы.

Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы.

Литература

[1] Крюковский А.С., Лукин Д.С. Краевые и угловые катастрофы в равномерной геометрической теории дифракции. – М.: МФТИ, 1999. 86 с.

[2] Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. – М.: Наука, 1967. – 550 с.

[3] Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. Лучевое приближение и вопросы распространения радиоволн. – М.: Мысль, 1971. – 265 с.

[4] Дэвис К. Радиоволны в ионосфере. – М.: Мир, 1973. – 502 с.

[5] Маслов В.П. Теория возмущений и асимтотические методы. – М.: МГУ, 1965. – 553 с.

[6] Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 296 с.

[7] Ипатов Е.Б., Лукин Д.С., Палкин Е.А. Численная реализация метода канонического оператора Маслова в задачах распространения коротких радиоволн в ионосфере Земли // Изв. ВУЗов. Радиофизика. – 1990. – Т. 33. – №5. – С. 562–573.

[8] Ipatov E.B., Lukin D.S., Palkin E.A. Maslov canonic operator in problems of numerical simulation of diffraction and propagation waves in inhomogeneous media // Sov. J. of Numer. Anal. and Math. Mod. – 1990. – V. 5. – No. 6. – P. 465–488.

[9] Ипатов Е.Б., Глушнев С.Ф., Чивилев В.И., Палкин Е.А. Моделирование дисперсионных эффектов радиосигналов в неоднородной ионосфере Земли // Радиотехника и электроника. – 2003. – Т. 48. – №12. – С. 1436–1442.

УДК 517.958:532.5

РАЗРЕШИМОСТЬ СОВМЕСТНОЙ МОДЕЛИ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

Ипатова В.М.[1]

Разрешимость совместной модели атмосферы и океана исследовалась в [1–3], но при этом предполагалось, что вертикальная скорость воздуха и воды равняется нулю на границе соприкосновения двух сред, и возвышение уровня поверхности океана не учитывалось при записи уравнений модели, к тому же плотность воды считалась линейной функцией температуры и солености. Подобные допущения не используются в современных численных моделях [4–6]. Кроме того, они неприемлемы для целей ассимиляции данных, поскольку возвышение уровня поверхности океана является одной из реально наблюдаемых величин. Модель термодинамики океана с условием свободной поверхности изучалась в [7, 8] для случая линейной плотности и в [9, 10] для случая непрерывной по Липшицу плотности воды.

Далее будем отмечать верхними индексами a и s величины, относящиеся к атмосфере и к океану соответственно. Пусть Ω — открытое подмногообразие сферы радиуса R с кусочно-гладкой границей, (x, y, r) — сферические координаты, $x \in [0, 2\pi)$ — долгота, $y \in [-\pi/2; \pi/2]$ — широта,$z = r - R$, $H(x, y)$ — положительная непрерывно дифференцируемая функция, задающая рельеф дна, $Q^a = \Omega \times (0, R_{\max})$, $Q^s = \{(x, y) \in \Omega, 0 < z < -H(x, y)\}$, $t \in (0, t_1)$, $t_1 < \infty$, $\mathbf{u} = (u, v)$ — вектор "горизонтальной" скорости, w — вертикальная скорость, $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, w)$, T — температура, P — давление, ρ — плотность, q — удельное влагосодержание воздуха, S — соленость воды, ξ — возвышение уровня поверхности океана относительно невозмущенного состояния $z = 0$, $d_t = \partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla_3$, $A = -\mu\triangle - \nu\partial_{zz}^2$, $B(u) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -f_c \\ f_c & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $f_c = l + u \operatorname{tg} y$, $l = 2\omega \sin y$ — параметр Кориолиса.

В области $G^a = Q^a \times (0, t_1)$ рассматриваются уравнения атмосферы

$$
\begin{aligned}
&d_t^a \mathbf{u}^a + (A^a + B(u^a))\mathbf{u}^a + \frac{1}{\rho^a}\boldsymbol{\nabla} P^a = \mathbf{f}^a,\\
&\operatorname{Div} \mathbf{U}^a = 0,\\
&\partial_z P^a = -g\rho^a,\\
&P^a = R\rho^a T^a,\\
&d_t^a T^a + A_T^a T^a - \frac{RT^a}{P^a c_p} d_t^a P^a = f_T^a,\\
&d_t^a q + A_q q = f_q,
\end{aligned}
$$

а в области $G^s = Q^s \times (0, t_1)$ рассматриваются уравнения океана

$$
\begin{aligned}
&d_t^s \mathbf{u}^s + (A^s + B(u^s))\mathbf{u}^s + \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla} P^s = \mathbf{f}^s,\\
&\operatorname{Div} \mathbf{U}^s = 0,\\
&\partial_z P^s = -g\rho^s,\\
&d_t^s T^s + A_T^s T^s = f_T^s,\\
&d_t^s S + A_S S = f_S,\\
&\rho^s = \rho(T^s, S),
\end{aligned}
$$

[1] Ипатова Валентина Михайловна (ipatval@mail.ru), Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700, Россия, г. Долгопрудный Московской обл., Институтский пер., 9.

где $\rho(T,S)$ — заданная непрерывная по Липшицу функция,

$$|\rho(T_1,S_1)-\rho(T_2,S_2)| \le L\sqrt{(T_1-T_2)^2+(S_1-S_2)^2} \qquad \forall T_1,T_2,S_1,S_2 \in \mathbb{R}.$$

При $z=0$ ставится условие свободной поверхности $w^s = \partial_t\xi - Q_w$, где Q_w — поток влаги в океан. Остальные граничные условия соответствуют [1, 7].

Основные различия в записи уравнений модели атмосферы и океана обусловлены свойствами сжимаемости газа и несжимаемости жидкости. Уравнения атмосферы упрощаются путем перехода к P-системе координат [11, 12], то есть к независимым переменным (x,y,P^a,t), где $P^a \in [P_s, P_{\min}]$.

Предполагается, что на поверхности океана при $z=0$ выполняется условие $P^s = P_s + g\rho_0\xi$. Доказывается разрешимость начально-краевой задачи для совместной модели в классе слабых решений, удовлетворяющих дополнительному энергетическому неравенству.

Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы.

Литература

[1] Lions J.-L., Temam R., Wang S. Mathematical theory for the coupled atmosphere-ocean models (CAO III) // J. Math. Pures Appl. – 1995. – No. 74. P. 105–163.

[2] Temam R. Ziane M. Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics // Handbook of Mathematical Fluid Dynamics. – Amsterdam: Elsevier, 2004. – V. 3.

[3] Petcu M., Temam R.M., Ziane M. Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics // Handbook of numerical analysis. Special volume: Computational Methods for the Atmosphere and the Oceans. – Amsterdam: Elsevier, 2009. – V. 14. – P. 577–750.

[4] Russell G.L., Miller J.R., Rind D. A coupled atmosphere-ocean model for transient climate change studies // Atmosphere-ocean. – 1995. – V. 33. – No. 4. – P. 683–730.

[5] Yu Y., Zhang Z., Guo Y. Global coupled ocean-atmosphere general circulation models in LASG/IAP // Adv. Atmos. Sci. – 2004. – V. 21. – P. 444—455.

[6] Володин Е.М., Дианский Н.А. Моделирование изменений климата в XX–XXII столетиях с помощью совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 2006. – Т. 42. – №3. – С. 291–306.

[7] Агошков В.И., Ипатова В.М. Теоремы существования для трехмерной модели динамики океана и задачи ассимиляции данных // ДАН. – 2007. – Т. 412. – №2. С. 151–153.

[8] Агошков В.И., Ипатова В.М. Разрешимость задачи усвоения данных наблюдений в трехмерной модели динамики океана // Дифф. уравнения. – 2007. – Т. 43. – №8. – С. 1064–1075.

[9] Ipatova V.M. Solvability of the ocean hydrothermodynamics problem under a nonlinear state equation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2008. – V. 23. – No. 2. – P. 185–195.

[10] Ипатова В.М. Задачи ассимиляции данных для основных уравнений термодинамики океана с непрерывной по Липшицу плотностью // Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики. Сборник научных трудов. – М.: МФТИ, 2008. – С. 56–79.

[11] Марчук Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1974. – 357 с.

[12] Ипатова В.М. Некоторые подходы к построению совместной модели атмосферы и океана // Альманах соврем. науки и образ. – Тамбов: Грамота, 2009. – №6. – С. 70–74.

УДК 517.984

СВОЙСТВА ПРОЕКЦИИ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Исламов Г.Г.[1]

Свойства микромира, обнаруживаемые наблюдателем, проявляются в макромире через его взаимодействие с прибором [1]. Прибор создает информационную картину микрообъекта как его проекцию на макромир. Поэтому при формальном описании поведения микрообъекта с ним связывают систему абстрактных математических понятий: состояние объекта, алгебру наблюдаемых квантовой механики и уравнения динамики в форме Гейзенберга, либо Шредингера [2]. Согласно подходу Шредингера, при описании динамики микрочастицы посредством волновой функции $\psi(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве состояний B, необходимо задать самосопряженный оператор $H : B \to B$ с плотной областью определения $D(H) \subset B$. Этот оператор, называемый гамильтонианом, позволяет выразить энергию микрочастицы через квадратичную форму $(H\psi(t), \psi(t))$ как функцию времени t. В стационарных состояниях $\psi(t) = e^{-i\nu t}\varphi, \varphi \in B$ энергия $E = \hbar\nu$ постоянна и равна собственному значению нормированной собственной функции φ гамильтониана $H : H\varphi = E\varphi$. Как мы видим, энергетический и частотный спектр микрочастиц связаны формулой Планка—Эйнштейна—де-Бройля $E = \hbar\nu$, где $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27} эрг \cdot сек$ — постоянная Планка. Волновая функция микрообъекта $\psi(t)$ описывает детерминированный процесс в гильбертовом пространстве состояний B. С информационной картиной микрообъекта мы связываем проекцию $\xi(t) = Q\psi(t)$ волновой функции, где $Q : B \to B$ есть проектор (в общем случае не ортогональный), который согласован с гамильтонианом условием инвариантности $QHQ = QH$ в области определения $D(H)$. Гипотетический объект, отвечающий проекции $\xi(t)$, мы называем псевдочастицей. Отмеченный выше замечательный факт о линейной зависимости двух видов спектра не имеет места для псевдочастиц. Расчеты показывают, что за счет незначительных изменений в энергетическом спектре псевдочастицы можно получить сильные сдвиги в ее частотном спектре. Такое свойство псевдочастиц позволяет создать новый тип информационных процессов, частота изменения которых не зависит линейно от затрачиваемой энергии. Это снимает проблему "теплового барьера", имеющего место при использовании микрочастиц с высокой энергией для моделирования информационных процессов. Тем самым открывается прямой путь создания вычислительной техники, основанный на применении уникальных свойств псевдочастиц. Основы математической теории динамики таких объектов заложены в известном труде Дж. фон-Неймана [3]. Псевдочастицы с уникальными свойствами появляются при несамосопряженных возмущениях гамильтониана потенциального поля, действующего на микрочастицу. Это было показано в работах [4–6].В работе [6] установлено, что каждому проектору $Q : B \to B$, удовлетворяющему в области определения гамильтониана условию инвариантности, отвечает разрешимое относительно K линейное операторное уравнение $HQ - QH = KQ$. При этом проекция $\xi(t) = Q\psi(t)$ волновой функции $\psi(t)$ удовлетворяет возмущенному уравнению Шредингера $i\hbar\dot{\xi}(t) = (H - K)\xi(t), t > 0$. Кроме того, если $P = I - Q$ (I — тождественный

[1]Исламов Галимзян Газизович (ggislamov@udm.net), Удмуртский государственный университет, 426032, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

оператор) конечномерен, то K также будет конечномерным оператором. Всякое решение $\xi(t)$ возмущенного уравнения Шредингера, для которого квадратичная форма $((H-K)\xi(t),\xi(t))$ вещественна при любом $t>0$, называется псевдоволновой функцией. Эта функция описывает динамику псевдочастицы, которая движется в потенциальном поле возмущенного гамильтониана $H-\mathrm{Re}K$ и вихревом поле комплексного потенциала $\mathrm{Im}K$.

Литература

[1] Марков М.А. О трех интерпретациях квантовой механики: об образовании понятия объективной реальности в человеческой практике. Изд. 2–е. – М.: Книжный дом "Либроком", 2010. – 112 с.

[2] Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. – Ижевск: НИЦ "РХД", 2001. – 256 с.

[3] Фон Нейман. Математические основы квантовой механики. – М.: Наука, 1964. – 368 с.

[4] Исламов Г.Г. Об одном обобщении уравнения Шредингера // Международная научная конференция "75 лет высшему образованию в Удмуртии": материалы конф. / Удмурт. гос. ун-т. – Ижевск, 2006. — Ч. 2: Естественные науки. – С. 5–6.

[5] Исламов Г.Г. Квантовый осциллятор в вихревых полях // Материалы международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений" (Москва, МГУ, 30 марта – 2 апреля 2009 г.). – М.: Изд-во "Университетская книга", 2009. – С. 153–154.

[6] Исламов Г.Г. Расчет вихревых полей минимального ранга для квантового осциллятора // Материалы 9-ой международной конференции-семинара "Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах" (Владимир, ВГУ, 2–3 ноября 2009 г.). – Владимир, 2009. – С. 190–194.

УДК 517.9

СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ АБЕЛЯ

Исмагилова Р.Р.[1]

Существует целый ряд обобщений оператора дробного интегродифференцирования. В докладе приводятся некоторые обобщения, с помощью аппарата функции матриц, касающиеся операторов дробного интегрирования и дифференцирования Римана—Лиувилля на случай матричного интегродифференцирования. Среди приложений дробного интегродифференцирования особое место занимает вопрос представления решения систем уравнений абелевского типа. Введенный в работах [1, 2] матричный интегродифференциальный оператор позволет подойти к вопросу о разрешимости системы обобщенных уравнений Абеля (соответственно к смешанным задачам теории упругости). Результаты работы пересекаются с работами M. Lowengrub, J. Walton [3] и И.Л. Васильева [4]. Матричное интегродифференцирование позволяет исследовать задачи для более широких классов систем интегродифференциальных уравнений. Однако применимость матричного интеграла и матричной производной при решении систем дифференциальных уравнений в дробных производных изучена очень мало.

В работе представлен вариант полугруппового свойства для случая когда A и B постоянные коммутативные матрицы. Введен класс вектор-функций AC^n, где n–мультииндекс, необходимый для доказательства основных свойств, представленных в докладе. В работе исследовано дробное интегрирование и дифференцирование матричного порядка как взаимно обратные операции. Доказывается теорема о композиции операторов матричного интегрирования и дифференцирования,которая содержит $|n|$ дополнительных условий, и теорема, задающая необходимые условия разрешимости матричного уравнения Абеля.

Литература

[1] Андреев А.А. Нелокальные краевые задачи для одной модельной вырождающейся системы гиперболического типа // Краевые задачи для уравнений математичечской физики. – Куйбышев: Куйбыш. гос. пед. ин-т, 1990. – С. 3–7.

[2] Исмагилова Р.Р. Система обобщенных уравнений типа Абеля для смешанной задачи теории упругости // Международная конференция по математической физике и ее приложениям. – 2008. – С. 82–83.

[3] Lowengrub M., Walton J. Systems of generalized Abel equations // SAIAM J.Math.Anal. – 1979. – V. 10. – No. 4. – P. 749–807.

[4] Васильева И.Л. О единственности решения системы уравнений Абеля с постоянными коэффициентами // Доклады АН БССР. – 1981. – Т. 25. – №2. – С. 105–107.

[1] Исмагилова Рина Ринатовна (isriri@mail.ru), Самарский государственный технический университет, 443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

Казакова Ю.А.[1]

В докладе предложен метод построения решений систем дифференциальных уравнений с частными производными и рассмотрено его применение к уравнениям аэрогидромеханики. Метод основан на параметризации и является достаточно эффективным при отыскании точных частных решений систем квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Рассматривается система дифференциальных уравнений с частными производными

$$F_k(x_1,...,x_m,u_1,...,u_n,u_{1x_1},...,u_{nx_1},...,u_{1x_m},...,u_{nx_m})=0,\ k=1\div n, \qquad (1)$$

где $u_k(x_1,...,x_m)$ — функции m переменных x_1, x_2 , ..., x_m. При переходе к новым переменным ξ_1, ξ_2, ..., ξ_m, которые являются функциями переменных x_1, x_2, ..., x_m, решение системы (1) отыскивается в виде

$$u_k=U_k(\xi_1,\xi_2,...,\xi_m),\ k=1\div n; \qquad x_l=X_l(\xi_1,\xi_2,...,\xi_m),\ l=1\div m, \qquad (2)$$

Частные производные $\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$ находятся по формулам

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial U_k}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_l}, \qquad \frac{\partial \xi_j}{\partial x_l}=\frac{\Delta_{jl}}{\Delta}, \qquad \Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \cdots \frac{\partial X_1}{\partial \xi_m} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial X_m}{\partial \xi_1} & \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \xi_m} \end{vmatrix}\neq 0. \qquad (3)$$

В (3) Δ_{jl} — определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца на столбец с нулевыми элементами, кроме элемента с номером l, равным единице. Тогда система уравнений (1) преобразуется к виду

$$F_k(\xi_1,...,\xi_m,X_1,...,X_m,X_{1\xi_1},...X_{m\xi_m},U_1,...,U_n,U_{1\xi_1},...U_{n\xi_m})=0. \qquad (4)$$

В этой системе $U_k(k=1\div n)$, $X_l(l=1\div m)$ являются функциями переменных $\xi_1,\xi_2,...,\xi_m$. Решение полученной системы уравнений можно искать в виде многочленов

$$\begin{aligned} U_k&=\sum_{i=0}^{\alpha_k}u_{ki}(\xi_1,...,\xi_{s-1},\xi_{s+1},...\xi_m)\xi_s^i,\ k=1\div n,\ s=1\div m,\\ X_l&=\sum_{j=0}^{\gamma_l}x_{lj}(\xi_1,...,\xi_{s-1},\xi_{s+1},...\xi_m)\xi_s^j,\ l=1\div m,\ s=1\div m, \end{aligned} \qquad (5)$$

где $\alpha_k,\gamma_l\in N$ (N — множество натуральных чисел). Задача состоит, в частности, в определении параметров $\alpha_k,\gamma_l\in N$, для которых система дифференциальных уравнений для $u_{ki}(\xi_1,...\xi_{m-1})$, $x_{lj}(\xi_1,...\xi_{m-1})$ является определенной или недоопределенной.

[1]Казакова Юлия Александровна (sunwave@inbox.ru), Ульяновский государственный технический университет, 432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.

Данный метод применялся к нескольким системам уравнений аэрогидромеханики. С помощью программы, описанной в [1], проведена классификация решений полиномиального вида, получены все возможные значения параметров $\alpha_k, \gamma_l \in N$.

Построены решения некоторых систем уравнений в газовой динамике. Например, частным случаем параметрических решений являются построенные в работе решения простых и двойных волн. Построены также решения асимптотических трансзвуковых уравнений для плоских и осесимметричных течений, описывающие течения газа с местными сверхзвуковыми зонами в соплах Лаваля.

Литература

[1] Velmisov P.A., Todorov M.D., Kazakova J.A. Some classes of the solutions of aerohydromechanic equations // Applications of Mathematics in Engineering and Economics. – Soft trade, Sofia, Bulgaria, 2008. – P. 427–441.

УДК 532.546+628.516

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОЛИМЕРИЗАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

Кайракбаев А.К. [1]

В докладе обсуждаются некоторые дополнения к математической модели полимеризационного процесса, предложенной в [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d[M]}{d\tau} = -[k_0 n_e][M] - [k_{11}][R]^2[M],\ [M(0)] = [M_0], \\ \dfrac{d[B]}{d\tau} = [k_2][B] - [k_{22}][B][R]^2 + [k_{11}][M][R]^2,\ [B(0)] = [B_0], \\ \dfrac{d[R]}{d\tau} = [k_0 n_e][M] + [b_0 n_e][B] + [k_1][R] - \\ \qquad\qquad -([k_{11}[M] + [k_{22}][B])[R]^2,\ [R(0)] = [R_0]. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $[M]$ — концентрация исходного вещества, $[R]$ — суммарная концентрация активных радикалов, $[B]$ — концентрация синтезируемых продуктов, $[n_e]$ — концентрация электронов. $[k_0]$, $[b_0]$, $[\rho_0]$ — коэффициенты скоростей распада молекул исходного вещества, частиц нового продукта и первичных радикалов под воздействием электронных импульсов, $[k_{22}]$, $[k_{11}]$ — коэффициенты скорости синтеза нового продукта. $[k_2] = [\chi_2 - b_0 n_e]$, где $[\chi_2]$ — коэффициент скорости диффузионного пребывания тяжелых частиц в зону реакции, $[k_1] = [\rho_0 n_e - \chi_1]$, $[\chi_1]$ — коэффициент скорости диффузионного ухода радикалов (легких частиц) из зоны реакции, τ — время. Концентрации $[M]$, $[R]$, $[B]$, $[n_e]$ измеряются в (m^{-3}). Размерности $\dfrac{d[M]}{d\tau}$, $\dfrac{d[R]}{d\tau}$, $\dfrac{d[B]}{d\tau}$, $\sim (m^{-3}c^{-1})$; $[k_i] \sim (c^{-1})$; $[k_{ii}]$, $[k_0]$, $[b_0] \sim (m^3 c^{-1}), \tau \sim (c)$.

Переходя к безразмерным величинам с помощью равенств

$$\begin{aligned} &[M] = [M_0]\mu,\ [B] = [M_0]\beta,\ [R] = [M_0]r,\ t[T] = \tau, \\ &k_0 n_e = [k_0][n_e][T],\ k_{ii} = [k_{ii}][M_0][T], \\ &b_0 n_e = [b_0][n_e][T],\ k_i = [k_i][T],\ \dot{(\ )} = \frac{d}{dt}, [T] = 100c, \end{aligned}$$

получим задачу

$$\begin{cases} \dot{\mu} = -k_0 n_e \mu - k_{11} r^2 \mu,\ \mu(0) = 1, \\ \dot{\beta} = k_2 \beta + k_{11} r^2 \mu - k_{22} r^2 \beta,\ \beta(0) = \beta_0, \\ \dot{r} = k_0 n_e \mu + b_0 n_e \beta + k_1 r - k_{11} r^2 \mu - k_{22} r^2 \beta,\ r(0) = r_0. \end{cases} \tag{2}$$

Далее, предполагается, что

$$0 \le \beta_0, r_0 < 1. \tag{3}$$

Следует отметить, что значения коэффициентов системы уравнений (2) неизвестны. Известно лишь то, что

$$b_0 n_e, k_{ii}, k_0 n_e > 0. \tag{4}$$

[1] Кайракбаев Аят Крымович (kairak@mail.ru), Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

Целью работы является определение необходимых и достаточных условий, при которых любое решение задачи (2) удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq \mu(t), \beta(t), r(t) \leq 1, \quad i = \overline{1,5}, \forall t \in [0; \infty). \tag{5}$$

Теорема. *Каждое решение задачи (2), (3)удовлетворяет неравенствам (5) тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} k_0 n_e - k_{11} - k_{22} + b_0 n_e + k_1 < 0, \\ k_0 n_e + k_1 < k_{11}, \\ 0 \leq k_2 < k_{22} - k_{11}. \end{cases} \tag{6}$$

Более того, установлены необходимые условия существования релаксационного периодического решения системы (2) при выполнении неравенств (6).

Литература

[1] Зынь В.И. Топология и кинетика плазмохимической полимеризации в нестационарном тлеющем разряде //Докторская диссерт., 1995.

УДК 531.19

О ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ В РАВНОВЕСНОМ КЛАССИЧЕСКОМ КАНОНИЧЕСКОМ АНСАМБЛЕ

Калинин М.И.[1]

Обоснование предельного термодинамического перехода для равновесных молекулярных систем рассматривалось многими авторами [1–4]. Рассмотрение основывалось на доказательстве существования решения уравнения Кирквуда—Зальцбурга для бесконечномерного вектора состояния предельной молекулярной системы, компонентами которого являются частичные функции распределения всех порядков. Поскольку, как показано в [5, 6, 7], не все частичные функции распределения являются независимыми, а старшие выражаются через духчастичную, в докладе предлагается другой подход, позволяющий рассматривать термодинамический предельный переход для отдельных частичных функций распределения равновесного классического канонического ансамбля. В евклидовом пространстве строится произвольная последовательность измеримых множеств с мерами Лебега (объемами), удовлетворяющими условиям термодинамического предельного перехода, на которых и исследуются предельные свойства отдельных частичных функций распределения молекулярных систем.

Литература

[1] Боголюбов Н.Н., Хацет Б.И. О некоторых математических вопросах теории статистического равновесия // Доклады АН СССР. – 1949. – Т. 63. – С. 321–324.

[2] Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. – М.: Мир, 1971. – 368 с.

[3] Петрина А.Я., Герасименко В.И., Малышев П.В. Математические основы классической статистической механики. – Киев: Наукова Думка, 1985. – 263 с.

[4] Загребнов В.А. Теорема Боголюбова–Рюэля: новое доказательство и обобщения // Теоретическая и математическая физика. – 1982. – Т. 51. – С. 389–402.

[5] Березин Ф.А. Соотношения между корреляционными функциями в классической статистической физике // Теоретическая и математическая физика. – 1970. – Т. 3. – С. 115–125.

[6] Калинин М.И. О полноте описания равновесного канонического ансамбля двухчастичной функцией распределения // Теоретическая и математическая физика. – 1970. – Т. 145. – С. 123–132.

[7] Калинин М.И. О взаимно-однозначном соответствии между распределением Гиббса и двухчастичной функцией распределения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – №8/1(67). – С. 535–549.

[1] Калинин Михаил Иванович (kalinin@vniims.ru), Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы, 119361, Россия, г. Москва, ул. Озёрная, 46.

УДК 531.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ДИСКА НА РЕОЛОГИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ

Кальмова М.А., Павлов Г.В.[1]

Реологические модели находят широкое применение при анализе работы конструкции из синтетических материалов. К достоинствам применения реологических моделей следует отнести относительную простоту их математического описания, поскольку уравнения движения в основном выражаются в форме обыкновенных дифференциальных уравнений. Теоретически и экспериментально доказано [1], что реологическое тело Кельвина—Фойхта наиболее корректно описывает природу несовершенной упругости при стационарных и нестационарных колебаниях не металлических материалов. Но, к сожалению, вопрос построения уравнений Лагранжа для анализа гироскопических систем с упруго-вязкими элементами модели Кельвина в литературе практически не освещался. При составлении уравнений Лагранжа в такого рода системах обычно вводят функцию Релея с полной или неполной диссипацией, или поправку на рассеяние энергии в форме нелинейной функции, учитывающей гистерезисные потери. Известно, что тело на реологической связи совершает затухающие колебания, которые накладываются на медленное экспоненциальное движение. Подтверждение этому факту явились результаты анализа автора о движении диска по безмассовой балке на реологическом основании Кельвина [2], когда по условию связи была исключена из рассмотрения угловая координата, описывающая нутационные колебания диска. Однако, при движение диска по плоскому основанию тела Кельвина затухающих колебаний в ограниченном временном отрезке не наблюдалось. Всё это остро ставит вопрос об анализе устойчивости движения диска. Рассмотрено движение однородного кругового жесткого диска массой M и радиусом r, по вязкоупругому основанию, наделенному деформационно-демпфирующими свойствами, отвечающими физической модели Кельвина, и работающему совместно с безмассовой оболочкой-мембраной с конечной жесткостью c1 на растяжение. Предполагается, что основание имеет точечный контакт с диском, причем силы взаимодействия сводятся к силе, приложенной в точке касания и вертикально направленной. Уравнения движения диска представлены в форме уравнений Рауса с множителями связи и допускают частные решения, описывающие стационарные движения диска по прямой. Составлены уравнения не возмущенного движения, которые показывают, что имеется трехмерное многообразие стационарных движений диска. Получены уравнения возмущенного движения. Рассмотрены условия устойчивости стационарных движений по первому приближению. Характеристическое уравнение представлено в форме полинома пятой степени с тремя нулевыми корнями, которым соответствуют простые элементарные делители. Три нулевых корня характеристического уравнения обусловлены трехмерностью многообразия стационарных движений. В работе рассмотрены условия устойчивости прямолинейного движения диска которому соответствует характеристическое уравнение третей степени. Условия асимптотической устойчивости по Гурвицу не выполняются, вследствии наличия отрицательных коэффициентов, поэтому прямолинейное движение

[1]Кальмова Мария Александровна (Kalmova@mail.ru), Павлов Георгий Василеч (ignatov63@gmail.com), Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская , 194.

диска неустойчиво. Подтверждение факта неустойчивости является криволинейная форма неподвижной центроиды, полученная численным интегрированием уравнения движения диска.

Литература

[1] Горошко О.А. Неголономные системы,что деформируются(на украинском языке) // Вестник Киевского университета. – 1983. – С. 51–55.

[2] Павлов Г.В. Динамика диска, катающегося по балке на упруго-вязком основании // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – 2007. – №9/1. – С. 165–171.

УДК 617.9

ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ НА СУПЕРМНОГООБРАЗИЯХ

Канин Д.Л.[1]

В докладе предпринимается попытка рассмотреть вторичное квантование на супермногообразии на следующем уровне абстракции по сравнению со стандартным фоковским. В качестве первоочередных источников здесь можно отметить [1–3] (целесообразность проблемы и ее связь с современной квантовой теорией суперполя) и [4, 5] (развитие альтернативного языка квантовых структур для первичного квантования на пуассоновых многообразиях).

Стартуя с понятия коммутативной джетовой суперструктуры на супермногообразии, являющейся адекватным математическим орудием классического суперполевого формализма, определяется и строится так называемая квантовая джетовая суперструктура. Формулируется свойство квантуемости для последней — определенные условия, при которых ее можно интерпретировать как вторичное квантование коммутативной джетовой суперструктуры.

На основе таких "вторично проквантованных" квантовых джетовых суперструктур возникает некоторый подход к квантовому суперполевому формализму. В рамках этого подхода демонстрируется его связь со стандартным представлением Фока и квантовый суперсимметричный осциллятор как простейший пример квантовой супердинамической системы.

Литература

[1] Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. – М.: Наука. Физматлит, 1986. – 319 с.

[2] DeWitt B. Supermanifolds. – Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1992. – 423 pp.

[3] Сарданашвили Г.А. Современные методы теории поля. – Т. 1–4. – М.: УРСС, 1996-2000. – 224, 167, 214, 158 с.

[4] Трещев Д.В. Квантовые наблюдаемые: алгебраический аспект // Труды института им. В.А. Стеклова. – Т. 250. – 2005. – С. 211–244.

[5] Трещев Д.В. Некоммутативные структуры // Труды института им. В.А. Стеклова. – Т. 259. – 2007. – С. 203–242.

[1] Канин Дмитрий Леонидович (kanind@mail.ru), Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

УДК 539.421.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА ТРЕЩИНЫ В ЗЕРНИСТОМ МАТЕРИАЛЕ

Каракулина Е.О.[1]

В докладе представлены результаты численного моделирования развития трещин в зернистом материале. Основной целью работы являлось получение зависимости коэффициента интенсивности напряжений первого рода от значения модуля Юнга межзеренного заполнителя.

Рассматривался зернистый материал, содержащий плоскую трещину длиной $2l$. Структура материала была представлена в виде сетки гексагональных зерен. Диаметр зерна исследуемого материала $d = 1$ мм.

В качестве параметра задачи выступал модуль Юнга межзеренного заполнителя. Упругие характеристики зерна не изменялись. Ширина заполнителя между зернами породы h=0,1 мм. Жесткость заполнителя определялась следующими равенствами

$$K_n = \frac{E_{\text{зап}}}{h}, \qquad K_s = \frac{G}{h}.$$

Численный расчет выполнялся методом граничных элементов [1].

Краевые условия имели вид: $\sigma_s = 0$; $\sigma_n = \sigma_n^0$ на трещине, где σ_s, σ_n соответственно касательные и нормальные напряжения, σ_n^0 — задаваемое нормальное напряжение.

Для вычисления коэффициента интенсивности напряжений первого рода использовали критерий [2]:

$$K_I = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{G}{2(1-\nu)}\lim_{x\to l}\frac{D_n}{\sqrt{l-x}}, \tag{1}$$

где K_I — коэффициент интенсивности напряжений первого рода; $2l$ — длина трещины; G — модуль сдвига.

В результате численных расчетов были найдены нормальные смещения берегов трещины. Анализ полученных данных показал, что развитие трещины в дискретной среде отличается от ее развития в сплошном материале, а уменьшение значений упругих характеристик межзеренного заполнителя приводит к увеличению разрывов смещений.

Найденные аппроксимирующие функции, описывающие разрывы нормальных смещений берегов трещины, позволили вычислить коэффициенты интенсивности напряжений первого рода по формуле (1).

В результате исследования получено аналитическое выражение для вычисления коэффициента интенсивности напряжений 1-го рода в дискретных средах с различным модулем упругости межзеренного заполнителя.

Литература

[1] Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 328 с.

[2] Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб.: Наука, 1999. – 385 с.

[1] Каракулина Елена Олеговна (elok2004@yandex.ru), Оренбургский государственный университет, 460018, Россия, г. Оренбург, пр. Победы, 13.

УДК 519.7

АДИАБАТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФАЗЫ БЕРРИ

Катанаев М.О.[1]

Дано новое простое доказательство адиабатической теоремы в конечномерном случае как для невырожденных, так и для вырожденных состояний. В качестве примера рассмотрена двухуровневая система, которая интегрируется в явном виде. Показано, что оценка погрешности, данная в адиабатической теореме неулучшаема. Дана геометрическая интерпретация фазы Берри и ее неабелева обобщения Вилчека–Зи в терминах связностей на главных расслоениях. Показано, что во всех случаях главное расслоение может быть тривиально, однако связность и соответствующая группа голономии нетривиальны. Поэтому основную роль играют не топологические эффекты, а геометрические.

Представленная работа частично поддержана грантами РФФИ 08-01-00727-а и 09-01-12161-офи-м, грантом президента Российской Федерации на поддержку научных школ НШ-7675.2010.1 и программой Отделения математики РАН "Современные проблемы теоретической математики".

[1]Катанаев Михаил Орионович (katanaev@mi.ras.ru), Математический институт им. В.А.Стеклова, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

УДК 519.688

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ

Кетова К.В., Трушкова Е.В.[1]

В докладе представлен алгоритм решения задачи маршрутизации, с точки зрения минимальной стоимости перевозки топливно-энергетических ресурсов (ТЭР) между различными объектами логистической системы топливообеспечения региона.

В настоящее время разрабатывается стратегия развития топливно-энергетической отрасли, ориентированной на местные возобновляемые энергоресурсы [1].

При переходе на местные возобновляемые источники энергии особую актуальность приобретает задача логистики топливообеспечения региональной распределенной системы теплоснабжения.

В качестве исходной информации, необходимой для решения задачи топливообеспечения региона, используется информация о местах расположения предприятий лесозаготовки и деревопереработки, информация о населенных пунктах с теплоисточниками (котельными), которые планируется перевести с традиционных видов топлива (уголь, мазут, электроэнергия) на альтернативный вид топлива (древесную щепу).

Логистическая схема снабжения теплоисточников щепой состоит из 4-х уровней. На предприятиях деревопереработки и лесозаготовки образуются древесные отходы, которые свозятся на пункты накопления отходов, где проходят первичную механическую переработку. Первично переработанные древесные отходы направляются в пункты подготовки топлива, где осуществляется сортировка, тепловая обработка и упаковка щепы. На последнем этапе щепа транспортируется до потребителей, которыми выступают теплоисточники региона.

Так как транспортные расходы входят в стоимость конечного продукта (тепловой энергии), то для каждого этапа транспортировки древесных отходов и ТЭР необходимо решать задачу маршрутизации.

Для решения задачи маршрутизации предложен комплексный алгоритм решения, проходящий в 3 этапа:

1. Нахождение первоначального маршрута, с помощью упрощенного алгоритма A* [2].

2. Получение множества допустимых маршрутов с помощью метода Йена для построения допустимых маршрутов.

3. Нахождение оптимального маршрута. Реализуется генетический алгоритм, использующий операторы скрещивания, отбора и мутации, адаптированные под задачу маршрутизации.

Применение оператора кроссинговера является самой важной частью алгоритма. Оператор кроссинговера применяется в случае наличия общего узла или общего ребра. Приведем алгоритм применения оператора кроссинговера по общему узлу.

1. Пусть имеются два различных маршрута, имеющих один общий узел.

[1]Кетова Каролина Вячеславовна, Трушкова Екатерина Васильевна (e.v.trushkova@mail.ru), Ижевский государственный технический университет, 426052, Россия, г. Ижевск, Заречное шоссе, 31–47.

2. Скрещиванием исходных маршрутов (родительские маршруты) по общему узлу получаем два новых маршрута (дочерние маршруты).

3. Для дочерних маршрутов рассчитывается стоимость перевозки одной тонны ТЭР. Если стоимость перевозки дочерних маршрутов ниже стоимости перевозки по родительским маршрутам, то они участвуют в дальнейшем решении задачи маршрутизации.

Каждый этап алгоритма обладает приемлемой скоростью работы и невысокой сложностью для реализации на ЭВМ. В целом алгоритм позволяет избежать сплошного перебора всех возможных вариантов маршрутов перевозки.

Литература

[1] Преснухин В.К., Русяк И.Г., Королев С.А. и др. Концепция Республиканской целевой программы "Снабжение отдаленных населенных пунктов Удмуртской Республики местными видами топлива". – Ижевск: ИжГТУ, 2010. – 371 с.

[2] Рассел С.Дж., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный подход. – М.: Вильямс, 2006. – С. 157–162.

УДК 539.3

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ СВЯЗАННОГО МИКРОПОЛЯРНОГО ТЕРМОУПРУГОГО ПОЛЯ

Ковалев В.А.[1], *Мельников А.Д.*, *Радаев Ю.Н.*[2]

Обобщенная термоупругость как часть современной термомеханики континуума в настоящее время существует в трех нелинейных термодинамически корректных вариантах GNI, GNII, GNIII: в линейном приближении первый вариант (GNI/CTE) приводит к закону теплопроводности Фурье и *параболическому* уравнению теплопроводности; второй вариант (GNII) основывается на представлении о распространении тепла как волновом процессе, не сопровождающемся производством энтропии, и приводит к *гиперболическому* уравнению распространения тепла; третий вариант (GNIII) — наиболее общий — включает GNI, GNII в качестве предельных случаев. Теория GNII-термоупругости исторически развивалась по пути альтернативного подхода к математическому моделированию процесса теплопроводности в твердых телах с помощью уравнений гиперболического аналитического типа, обеспечивающих конечную скорость распространения теплового сигнала и неизменность его амплитуды. Исключительно важным следует признать то обстоятельство, что обобщенная термоупругость типа GNII может быть сформулирована как теория поля: все основные соотношения GNII-термоупругости могут быть последовательно выведены из принципа наименьшего действия с соответствующим образом подобранным лагранжианом. В представляемой работе в рамках классической теории поля с помощью принципа наименьшего действия и теории геометрических вариационных симметрий действия рассматриваются вывод уравнений поля для связанного гиперболического микрополярного термоупругого континуума (MPTE) в плоском пространстве—времени и построение канонических тензоров энергии—импульса для микрополярных термоупругих тел в контексте GNII, когда процесс распространения тепла определяется обобщенным уравнением теплопроводности гиперболического аналитического типа.

1. Наиболее фундаментальное положение классической теории поля (CFT; см., например, [1–4]) состоит в том, что каждая динамическая система математически описывается функционалом действия $\Im$:

$$\Im = \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, ..., X^\beta) d^4X, \tag{1}$$

где φ^k — упорядоченный набор физических полевых величин, число которых предполагается конечным; X^β $(\beta = 1, 2, 3, 4)$ — пространственно-временные координаты; $X^4 = ct$ (константа c имеет смысл характерной скорости и ее можно положить равной единице); d^4X — "естественный" элемент объема пространства—времени; $\mathcal{D}$ — область 4-пространства (в рамках классической нелинейной механики сплошных сред и действия для трехмерного деформируемого тела следует считать, что $\mathcal{D}$ — декартово произведение отсчетной конфигурации тела, деформацию которого обычно

[1]Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru), Московский городской университет управления Правительства Москвы, 107045, Россия, г. Москва, ул. Сретенка, 28.

[2]Мельников Артем Дмитриевич (melnickov@ssu.samara.ru), Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

описывают, сравнивая отсчетную конфигурацию с актуальной деформированной, и интервала времени с границами t_1, t_2), в пределах которой изменяются пространственно-временные координаты X^1, X^2, X^3, X^4.

Как это принято в современном вариационном исчислении, через ∂_β в дальнейшем обозначается оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате X^β:

$$\partial_\beta = \partial_\beta^{\mathrm{expl}} + \sum_{s\geq 0} \left(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}...\partial_{\alpha_s}\partial_\beta\varphi^l\right) \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}...\partial_{\alpha_s}\varphi^l)}, \tag{2}$$

где $\partial_\beta^{\mathrm{expl}}$ — оператор частного дифференцирования по *явному* вхождению переменной X^β.

2. Отправным пунктом для математического описания физических полей служит принцип Гамильтона—Остроградского (или принцип наименьшего действия), который гласит, что действительное поле реализуется в пространстве—времени таким образом, что действие оказывается экстремальным, т.е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей φ^k:

$$\delta\Im = 0. \tag{3}$$

Здесь не подвергаются варьированию пространственно-временные координаты X^β и 4-область интегрирования.

Полные вариации пространственно-временных координат и полевых переменных, отвечающие всем допустимым однопараметрическим геометрическим преобразованиям

$$\widetilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \widetilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \tag{4}$$

где

$$\mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = X^\beta, \quad \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = \varphi^k,$$

вычисляются согласно

$$\delta X^\beta = \varepsilon\left(\frac{\partial\mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}, \quad \delta\varphi^k = \varepsilon\left(\frac{\partial\Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}. \tag{5}$$

В случае, когда лагранжиан $\mathcal{L}$ зависит от градиентов переменных поля порядка не выше первого ($m = 1$), вариациям физических полей φ^k при неварьируемых пространственно-временных координатах отвечает вариация действия

$$\delta\Im = \int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\delta\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\delta\varphi^k)\right\}d^4X,$$

или, выделяя дивергентное слагаемое, —

$$\delta\Im = \int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right\}\delta\varphi^k d^4X + \int\partial_\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\delta\varphi^k\right)d^4X. \tag{6}$$

Исчезающим как на границе пространственной области интегрирования, так и на границах временного интервала вариациям физических полей φ^k будет отвечать вариация действия

$$\delta\Im = \int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right\}\delta\varphi^k d^4X. \tag{7}$$

Принцип наименьшего действия сводится к условию равенства нулю первой вариации функционала действия на реальном физическом поле при всех допустимых вариациях переменных поля и неварьируемых пространственно-временных координатах. Из этого условия получаются дифференциальные уравнения поля в форме уравнений Эйлера—Лагранжа

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = 0, \tag{8}$$

где в случае $m \geq 1$

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \cdots . \tag{9}$$

Оператор $\mathcal{E}_k$, определенный согласно (9), называется оператором Эйлера. Структура дифференцирований в операторе Эйлера становится более понятной и обозримой, если ввести обозначения

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^l} = \underset{0}{\partial_l}, \qquad \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}...\partial_{\alpha_s}\varphi^l)} = \underset{s}{\partial_l^{\alpha_1\alpha_2...\alpha_s}} \tag{10}$$

и записать его символически в форме

$$\mathcal{E}_l = \sum_{s\geq 0} (-1)^s \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}...\partial_{\alpha_s} \underset{s}{\partial_l^{\alpha_1\alpha_2...\alpha_s}}. \tag{11}$$

3. Будем предполагать, что преобразования (4) образуют однопараметрическую группу (группу Ли; см., например, [5, 6]). Введем символ преобразования (4)

$$\varsigma \cdot \partial = \xi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial X^\alpha}\right)_{\text{expl}} + h^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \tag{12}$$

и заметим также, что

$$h^j = \frac{\delta \varphi^j}{\varepsilon}, \qquad \xi^\alpha = \frac{\delta X^\alpha}{\varepsilon}.$$

Действие

$$\Im = \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, ..., X^\beta) d^4X \tag{13}$$

в результате геометрического преобразования (4), определяющего замену переменных $(X^\beta, \varphi^k) \to (\widetilde{X}^\beta, \widetilde{\varphi}^k)$, трансформируется в "эквивалентное" действие

$$\widetilde{\Im} = \int\limits_{\widetilde{\mathcal{D}}} \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, ..., \widetilde{X}^\beta) d^4\widetilde{X},$$

где $\mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, ..., X^\beta) \to \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, ..., \widetilde{X}^\beta)$ есть преобразование "естественной" плотности лагранжиана в соответствии с заменой переменных (4).

Интеграл действия как объект физического измерения должен сохранять свою величину при преобразовании (4), т.е. функционалы $\Im$ и $\widetilde{\Im}$ эквивалентны:

$$\widetilde{\Im} = \Im. \tag{14}$$

Эквивалентность функционалов $\Im$ и $\widetilde{\Im}$ означает, что это на самом деле один и тот же объект, только представленный с помощью разных наборов пространственно-временных и полевых переменных.

Если данное выше равенство выполняется также и после замены в $\widetilde{\Im}$

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, ..., \widetilde{X}^\beta) \to \mathcal{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, ..., \widetilde{X}^\beta), \tag{15}$$

обеспечивающей неизменность *формы* функционала действия, то говорят, что функционал действия абсолютно инвариантен относительно геометрической группы преобразований (4). Указанное равенство может выполняться не точно, а с невязкой порядка $o(\varepsilon)$. В этом случае речь должна идти об инфинитезимальной инвариантности функционала действия относительно геометрической группы преобразований (4).

Критерий инфинитезимальной инвариантности функционала действия имеет вид

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = 0, \tag{16}$$

где вариация лагранжиана $\delta\mathcal{L}$ — линейная по ε часть приращения

$$\mathcal{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, ..., \widetilde{X}^\beta) - \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, ..., X^\beta). \tag{17}$$

В терминах теоретико-группового анализа дифференциальных уравнений в частных производных указанный критерий приобретает форму

$$(\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial)\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial\xi^\gamma}{\partial X^\gamma} = 0, \tag{18}$$

пригодную для лагранжианов, зависящих от градиентов полевых переменных порядка не превышающего m. Здесь действие оператора $\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial$ на лагранжиан определяется формулами продолжения

$$\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial = \varsigma\cdot\partial + \sum_{s=1}^{m} h^l_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_s}\partial_l^{\alpha_1\alpha_2...\alpha_s}, \tag{19}$$

$$h^l_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_s} = \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}...\partial_{\alpha_s}(h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma) + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}...\partial_{\alpha_s}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma. \tag{20}$$

Однопараметрическая группа преобразований, относительно которой действие инвариантно, называется также симметрией действия.

Вводя четырехмерный вектор тока (рассматривается случай $m = 1$)

$$J^\beta = \frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\left(\delta\varphi^k - \frac{\partial\varphi^k}{\partial X^\alpha}\delta X^\alpha\right) + \mathcal{L}\delta X^\beta\right\}, \tag{21}$$

вариацию действия (13), отвечающую геометрической группе преобразований (4), можно при условии выполнения уравнений поля $\mathcal{E}_j(\mathcal{L}) = 0$ представить в форме

$$\delta\Im = \varepsilon\int(\partial_\beta J^\beta)d^4X. \tag{22}$$

Воспользуемся теперь предположением об абсолютной (инфинитезимальной) инвариантности функционала действия относительно группы преобразований (4). Ясно, что тогда в (22) следует полагать $\delta\Im = 0$ и соответствующий закон сохранения имеет следующую четырехмерную дивергентную форму:

$$\partial_\beta J^\beta = 0, \tag{23}$$

где компоненты 4-вектора J^β вычисляются по формуле (21), если группа геометрических симметрий действия известна:

$$J^\beta = \mathcal{L}\left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \times \\ \times \left[\left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} - \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\alpha(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha}\right]. \tag{24}$$

4. Далее будет рассматриваться случай, когда плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ явно не зависит от пространственно-временных координат X^β, т.е.

$$\partial_\alpha^{\text{expl}} \mathcal{L} = 0. \tag{25}$$

Поскольку $\mathcal{L}$ включает в качестве множителя $\sqrt{\ }$, то представляется необходимым сразу же ограничиться плоским пространством—временем. Тогда, переходя при необходимости к декартовым координатам, можно считать, что $\partial_\alpha^{\text{expl}} g_{\mu\nu} = 0$, $\partial_\alpha^{\text{expl}} \sqrt{\ } = 0$.

Наличие "прямолинейной оси" в искривленном римановом пространстве—времени нельзя гарантировать a priori. Риманово пространство—время допускает инфинитезимальное движение (а, следовательно, и однопараметрическую непрерывную группу конечных движений) тогда и только тогда, когда существует координатная система, компоненты метрического тензора которой не зависят от одной из координат $X^{\beta'}$; в этом случае координатные кривые $X^{\beta'}$ представляют собой траектории движения и выполняется условие $\partial_{\beta'} \sqrt{\ } = 0$. Группы движений называются также изометриями риманова пространства.[3] Группа движений риманова пространства—времени характеризуется тем, что компоненты метрического тензора будут в точности такими же функциями от "новых" пространственно-временных координат, сохраняя инфинитезимальный метрический интервал $g_{\alpha\gamma}(\widetilde{X}^\beta) d\widetilde{X}^\alpha d\widetilde{X}^\gamma = g_{\alpha\gamma}(X^\beta) dX^\alpha dX^\gamma$, где "новые" и "старые" пространственно-временные координаты связаны формулами группового преобразования.

Плоское четырехмерное пространство—время допускает, в частности, четыре независимых однопараметрических группы движений, являющихся трансляциями вдоль соответствующих прямолинейных осей. Зафиксируем отсчетный четыре-индекс α и рассмотрим однопараметрическую группу трансляций пространства—времени вдоль прямолинейной α-оси:

$$X^\beta \to \widetilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon) = X^\beta + \varepsilon \delta_\alpha^\beta. \tag{26}$$

Такого рода преобразования включают также сдвиги временной координаты.

Функционал действия любой 4-области пространственно-временного многообразия должен быть абсолютно инвариантен относительно группы трансляций пространства—времени, если плотность лагранжиана явно не зависит от координат X^β (т.е. $\partial_\alpha^{\text{expl}} \mathcal{L} = 0$), следовательно, для координатного направления α 4-вектор тока $J^\beta_{(\alpha)} = T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ образует тензор второго ранга (канонический тензор энергии—импульса)

$$T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = \mathcal{L}\delta^\mu_\lambda - (\partial_\lambda \varphi^l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^l)}. \tag{27}$$

[3] См.: Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. – М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1947. – С. 251–254; Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. – М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. – С. 266–303; Петров А.З. Пространства Эйнштейна. – М.: Физматлит, 1961. – 464 с.

Канонический закон сохранения, соответствующий группе трансляций пространства—времени, есть

$$\partial_\beta T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = 0. \tag{28}$$

5. В микрополярной теории упругости (МРЕ) конечная деформация тела, представляемая преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \tag{29}$$

положения $\mathbf{X}$ отсчетной конфигурации в соответствующее актуальное место $\mathbf{x}$, сопровождается ротационной микродеформацией

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t), \tag{30}$$

где $\boldsymbol{\phi}$ — вектор микровращения (полярный вектор, определяющий конечный поворот локального триэдра, связанного с микроэлементом). С дополнительными ротационными степенями свободы, которыми наделяется микроэлемент, связана и дополнительная инерция, импульс $\mathbf{p}_{\text{micro}}$ и кинетическая энергия K_{micro}:

$$\mathbf{p}_{\text{micro}} = \rho_{\text{R}} \boldsymbol{\mathfrak{I}} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}, \quad K_{\text{micro}} = \frac{1}{2} \rho_{\text{R}} \dot{\boldsymbol{\phi}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{I}} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}, \tag{31}$$

где $\boldsymbol{\mathfrak{I}}$ — тензор инерции, точкой обозначается частное дифференцирование по времени при фиксированном отсчетном положении $\mathbf{X}$.

Ставя своей целью вывод уравнений поля, описывающих деформацию и микродеформацию микрополярного термоупругого тела (MPTE) с гиперболическим обобщенным уравнением теплопроводности в духе теории GNII, воспользуемся принципом наименьшего действия и формализмом теории поля CFT.

Прежде всего, заметим, что в качестве определяющих переменных следует принять градиент деформации $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}_{\text{R}} \otimes \mathbf{x}$, полярный вектор микровращения $\boldsymbol{\phi}$ и его градиент $\boldsymbol{\nabla}_{\text{R}} \otimes \boldsymbol{\phi}$, градиент температурного смещения $\boldsymbol{\nabla}_{\text{R}} \vartheta$ и скорость температурного смещения $\dot{\vartheta}$. Температурное смещение ϑ вводится как первообразная по времени (при фиксированных Лагранжевых переменных) от температуры θ

$$\vartheta = \int \theta \, dt. \tag{32}$$

В декартовых Лагранжевых X_α ($\alpha = 1, 2, 3$) и Эйлеровых координатах x_j ($j = 1, 2, 3$) плотность (на единицу объема в отсчетном состоянии) лагранжиана микрополярного термоупругого тела имеет форму разности плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X_\alpha, \phi_j, \dot{x}_j, \dot{\phi}_j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x_j, \partial_\alpha \phi_j, \partial_\alpha \vartheta) = \frac{1}{2}\rho_{\text{R}}(X_\alpha)\dot{x}_k\dot{x}_k + \frac{1}{2}\rho_{\text{R}}(X_\alpha)\dot{\phi}_j \mathfrak{I}_{jk}\dot{\phi}_k - \\ - \psi(X_\alpha, \phi_j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x_j, \partial_\alpha \phi_j, \partial_\alpha \vartheta).\end{aligned} \tag{33}$$

Вариационный интеграл микрополярного термоупругого действия, следовательно, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\Im = \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(X_\alpha, \phi_j, \dot{x}_j, \dot{\phi}_j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x_j, \partial_\alpha \phi_j, \partial_\alpha \vartheta) dX_1 dX_2 dX_3 dt \\ (\alpha = 1, 2, 3; \ j = 1, 2, 3),\end{aligned} \tag{34}$$

где $\mathcal{D}$ — декартово произведение трехмерной области евклидова пространства (отсчетной конфигурации тела) и интервала времени с границами t_1, t_2.

Обратим внимание на то обстоятельство, что плотность лагранжиана (33) не зависит явно от Эйлеровых переменных x_j в силу принципа Галилеевой инвариантности (речь идет об инвариантности плотности лагранжиана относительно трансляций в пространстве мест $\mathbf{x}$). Точно так же можно полагать, что плотность лагранжиана явно не зависит от температурного смещения ϑ, считая данное предположение некоей разновидностью принципа калибровочной инвариантности.

Прежде чем сформулировать уравнения поля как уравнения Эйлера—Лагранжа для функционала (34) рассмотрим определяющие уравнения микрополярного термоупругого континуума. В рамках Лагранжева полевого формализма определяющие уравнения выступают просто как обозначения для частных производных, которые вводятся в целях сокращения записи уравнений поля:

$$\begin{aligned} &S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = \frac{\partial\psi}{\partial(\partial_\alpha x_j)}, \\ &\mathcal{M}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = \frac{\partial\psi}{\partial(\partial_\alpha \phi_j)}, \quad \mathcal{A}_j = -\frac{\partial\psi}{\partial\phi_j}, \\ &s = -\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\vartheta}}, \quad j^\alpha_{\mathrm{R}} = -\frac{\partial\psi}{\partial(\partial_\alpha\vartheta)}, \end{aligned} \tag{35}$$

где $\alpha = 1,2,3$, $j = 1,2,3$; или в "прямой" записи

$$\begin{aligned} &\mathbf{S} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}}, \\ &\boldsymbol{\mathcal{M}} = \frac{\partial\psi}{\partial(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\otimes\boldsymbol{\phi})}, \quad \boldsymbol{\mathcal{A}} = -\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\phi}}, \\ &s = -\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\vartheta}}, \quad \boldsymbol{j}_{\mathrm{R}} = -\frac{\partial\psi}{\partial(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\vartheta)}. \end{aligned} \tag{36}$$

Укажем на смысл символов, участвующих в записи определяющих уравнений: ψ — плотность свободной энергии Гельмгольца (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии), $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\otimes\mathbf{x}$ — градиент деформации, $\mathbf{S}$ — первый тензор напряжений Пиола—Кирхгофа, $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ — тензор микронапряжений, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ — момент (сопряженный микровращениям), s — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии), $\boldsymbol{j}_{\mathrm{R}}$ — вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии), ϑ — температурное смещение.

Уравнения Эйлера—Лагранжа для функционала (34) естественно распадаются на три группы и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \rho_{\mathrm{R}}\ddot{x}_j = 0 && (\alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3), \\ &\partial_\alpha \mathcal{M}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \mathcal{A}_j - \rho_{\mathrm{R}}\mathfrak{I}_{jk}\ddot{\phi}_k = 0 && (\alpha = 1,2,3;\ j,k = 1,2,3), \\ &\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = 0 && (\alpha = 1,2,3). \end{aligned} \tag{37}$$

Таким образом, уравнения поля (37), представляющие собой уравнения Эйлера—Лагранжа для функционала микрополярного термоупругого действия, включают два векторных уравнения и одно скалярное уравнение — уравнение баланса энтропии (с *отсутствующим* производством энтропии).

Уравнения поля в "прямой" тензорной записи имеют форму

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial(\rho_{\mathrm{R}}\mathbf{v})}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\cdot\mathbf{S} = \mathbf{0},\\
&\left.\frac{\partial(\rho_{\mathrm{R}}\boldsymbol{\mathfrak{I}}\cdot\dot{\boldsymbol{\phi}})}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{M}} = \boldsymbol{\mathcal{A}},\\
&\left.\frac{\partial s}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{R}} = 0.
\end{aligned} \tag{38}$$

С помощью известных методов теории поля можно вычислить компоненты канонического тензора энергии—импульса; они распадаются на следующие четыре группы.

i: $\lambda,\mu = 1,2,3$

$$T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = \mathcal{L}\delta^{\mu}_{\lambda} + S^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda x_l) + \mathcal{M}^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda\phi_l) - j^{\mu}_{\mathrm{R}}(\partial_\lambda\vartheta); \tag{39}$$

ii: $\lambda = 4$; $\mu = 1,2,3$

$$T^{\mu\cdot}_{\cdot 4} = S^{\mu\cdot}_{\cdot l}\dot{x}_l + \mathcal{M}^{\mu\cdot}_{\cdot l}\dot{\phi}_l - j^{\mu}_{\mathrm{R}}\dot{\vartheta}; \tag{40}$$

iii: $\lambda = 1,2,3$; $\mu = 4$

$$T^{4\cdot}_{\cdot\lambda} = -\rho_{\mathrm{R}}(\partial_\lambda x_l)\dot{x}_l - \rho_{\mathrm{R}}(\partial_\lambda\phi_l)\mathfrak{I}_{lk}\dot{\phi}_k - s(\partial_\lambda\vartheta); \tag{41}$$

iv: $\lambda = 4$; $\mu = 4$

$$T^{4\cdot}_{\cdot 4} = \mathcal{L} - \rho_{\mathrm{R}}\dot{x}_l\dot{x}_l - \rho_{\mathrm{R}}\mathfrak{I}_{lk}\dot{\phi}_l\dot{\phi}_k - s\dot{\vartheta}. \tag{42}$$

Компоненты (**i**) тензора энергии—импульса, взятые с противоположным знаком, формируют тензор напряжений Эшелби

$$-\mathbf{P} = \mathcal{L}\mathbf{I} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\mathcal{M}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\otimes\boldsymbol{\phi})^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{j}_{\mathrm{R}}\otimes(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\vartheta). \tag{43}$$

Из компонент (**ii**) образуется вектор Умова—Пойнтинга

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{v} + \boldsymbol{\mathcal{M}}\cdot\dot{\boldsymbol{\phi}} - \theta\boldsymbol{j}_{\mathrm{R}}. \tag{44}$$

Компоненты (**iii**) определяют вектор псевдоимпульса поля

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = -\rho_{\mathrm{R}}\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} - \rho_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\otimes\boldsymbol{\phi})\cdot\boldsymbol{\mathfrak{I}}\cdot\dot{\boldsymbol{\phi}} - s\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\vartheta. \tag{45}$$

Компонента (**iv**) тензора энергии—импульса есть (с отрицательным знаком) плотность гамильтониана

$$T^{4\cdot}_{\cdot 4} = -\mathcal{H}. \tag{46}$$

Представленная работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (ГК 02.741.12.2173) и при частичной поддержке РФФИ (проект №10-01-00184-а "Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости").

Литература

[1] Радаев Ю.Н. Нелинейная теория упругости как физическая теория поля // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2000. – №4(18). – С. 87–113.

[2] Радаев Ю.Н. Нелинейная теория упругости как физическая теория поля // Проблемы механики: Сб. статей. к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского (Под ред. акад. Д.М. Климова.). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – С. 658–684.

[3] Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Математические модели и современные физические теории поля // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9. – В. 4. – Ч. 2. – С. 41–94.

[4] Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 156 с.

[5] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[6] Olver P.J. Equivalence, Invariants and Symmetry. – Cambridge, New York, Melbourne: Cambridge University Press, 1995. – 526 pp.

УДК 539.3

ВОЛНОВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ТЕРМОМЕХАНИКА

Ковалев В.А.[1], *Радаев Ю.Н.*[2]

Представляемая работа посвящена физическим основам и математическому аппарату современной волновой термомеханики сплошных сред. Выбор теории поля в качестве единственного источника вывода соотношений волновой термомеханики диктуется тем обстоятельством, что большинство разделов физики и механики к настоящему времени уже приведены в соответствие с принципами теории поля и в значительной степени опираются на формализм теории поля. Следуя [1–4], в работу включены основные понятия, определения и принципы волновой термомеханики сплошных сред как физической теории поля в 4-мерном искривленном пространстве—времени и развивается Лагранжев полевой формализм, связанный с принципом наименьшего действия и возможностью вариационного описания поля с помощью указанного принципа. Развивается теория ([5, 6]) геометрических вариационных симметрий поля и законов сохранения (включая ряд их новых форм). Теория поля затем применяется в качестве альтернативного подхода к математическому моделированию процесса теплопроводности в твердых телах (упругих и микрополярно упругих) с помощью гиперболических уравнений, обеспечивающих конечную скорость транспорта тепла и возможность распространения незатухающих тепловых волн "второго звука" в твердых телах. Дано обоснование того, что теория гиперболической термоупругости полностью согласуется с основными принципами термодинамики и предсказывает нулевое производство энтропии при распространении термической волны "второго звука". Последнее утверждение справедливо, только если Лагранжиан связанного термоупругого поля *обладает* свойством трансляционной инвариантности относительно сдвигов температурного смещения.

Процессы транспорта тепла в твердых телах могут моделироваться с помощью принципиально разных подходов в зависимости от того какой физический механизм принимается для его объяснения: термическая диффузия или термическая волна "второго звука". Классическая теория термоупругости (CTE, conventional thermoelasticity) основывается на законе теплопроводности Фурье, который устанавливает пропорциональность вектора потока тепла и отрицательного градиента (антиградиента) температуры. Соответствующее уравнение теплопроводности, как известно, принадлежит к параболическому типу. Исследование фундаментальных решений параболического уравнения теплопроводности позволяет заключить, что температурное возмущение, локализованное в определенном месте термоупругого тела, должно немедленно ощущаться (хотя и с экспоненциальным затуханием) и в любом другом (сколь угодно удаленном) месте, а это, вообще говоря, противоречит принципу причинности. Классическая теория термоупругости предсказывает, таким образом, бесконечно большую скорость распространения любого термического сигнала.

Явление теплопроводности посредством распространения (с конечной скоростью) незатухающих термических волн получило название "второго звука". Моделирование волн "второго звука" является актуальной проблемой термомеханики, поскольку

[1]Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru), Московский городской университет управления Правительства Москвы, 107045, Россия, г. Москва, ул. Сретенка, 28.

[2]Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

их существование в кристаллах высокой чистоты в области сверхнизких температур подтверждено экспериментально. Нулевое производство энтропии, сопровождающее такие волны, позволяет вести речь об использовании "второго звука" для передачи теплового сигнала без потерь энергии на значительные расстояния.

В начале 90-х гг. Грином и Нахди [7, 8] была предложена весьма общая, отличная от классической теория теплопроводности, известная в настоящее время как GN-теория. Она полностью согласуется с принципами термодинамики и была развита в общей нелинейной форме в трех вариантах I, II, III: в линейном приближении первый вариант (GNI/CTE) приводит к закону теплопроводности Фурье и параболическому уравнению теплопроводности, второй вариант (GNII) предлагает рассматривать распространение тепла как волновой недиссипативный процесс (dissipationless thermoelasticity) и приводит к *гиперболическому* уравнению распространения тепла, третий вариант (GNIII) — смешанный — включает первые два в качестве предельных случаев.

Главным преимуществом теории GNII-термоупругости является то обстоятельство, что она допускает вариационную полевую формулировку [9]: все основные соотношения GNII-термоупругости могут быть последовательно выведены из принципа наименьшего действия с соответствующим образом подобранным лагранжианом. В представляемой работе приводится Лагранжева полевая формулировка для связанного GNII-термоупругого поля (рассматриваются как нелинейный вариант, так и линеаризованные связанные уравнения); дан вывод дифференциальных уравнений поля и канонических законов сохранения. Скорости распространения слабых разрывов перемещений и температурных смещений исследуются с помощью геометрических и кинематических условий совместности Адамара—Томаса.

Методами волновой термоупругости изучаются особенности распространения гармонических термоупругих волн произвольного азимутального порядка вдоль длинного цилиндрического волновода, боковая поверхность которого непроницаема для тепла. Исследование реализовано в трех термодинамически корректных вариантах: GNI/CTE, GNII, GNIII. В вычислительном аспекте внимание уделено волнам со вторыми, третьими и более высокими азимутальными числами. В рамках наиболее общей модели линейной теории GNIII-термоупругости получено решение задачи о прохождении связанной гармонической термоупругой волны с высоким азимутальным числом (номером окружной гармоники) n вдоль оси свободного теплоизолированного цилиндрического волновода кругового поперечного сечения. Найден частотный детерминант указанного типа волн и средствами MathCAD 14 численно проведено исследование частотного уравнения в плане решения весьма сложной для высоких азимутальных чисел проблемы локализации на комплексной плоскости значений волновых чисел. Результаты исследования в случае высоких окружных гармоник ($n = 20, 97$) даны в виде графиков с зонами локализации корней частотного уравнения. Проведен анализ характерных для больших n закономерностей поведения частотного детерминанта в заданной области значений действительной и мнимой частей волнового числа связанной термоупругой волны.

Представленная работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (ГК 02.741.12.2173) и при частичной поддержке РФФИ (проект №10-01-00184-а "Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости").

Литература

[1] Радаев Ю.Н. Нелинейная теория упругости как физическая теория поля // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – 2000. – №4(18). – С. 87–113.

[2] Радаев Ю.Н. Нелинейная теория упругости как физическая теория поля // Проблемы механики: Сб. статей. к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского (Под ред. акад. Д.М. Климова.). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – С. 658–684.

[3] Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Математические модели и современные физические теории поля // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9. – В. 4. – Ч. 2. – С. 41–94.

[4] Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 156 с.

[5] Noether E. Invariante Variationsprobleme // Kgl. Ges. Wiss. Nachr. Göttingen. Math.-Physik. Kl. 2. – 1918. – S. 235–257.

[6] Olver P.J. Equivalence, Invariants and Symmetry. – Cambridge, New York, Melbourne: Cambridge University Press, 1995. – 526 pp.

[7] Green A.E., Naghdi P.M. On undamped heat waves in an elastic solid // J. Therm. Stress. – 1992. – V. 15. – P. 253–264.

[8] Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. – 1993. – V. 31. – P. 189–208.

[9] Kalpakides V.K., Maugin G.A. Canonical formulation and conservation laws of thermoelasticity without dissipation // Reports in Mathematical Physics. – 2004. – V. 53. – P. 371–391.

УДК 539.3

ДИНАМИКА ТРЕХСЛОЙНЫХ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Ковалев В.А.[1], *Ревинский Р.А.*[2]

Исследования собственных и вынужденных колебаний трехслойных оболочек и пластин имеют как теоретическое, так и прикладное значение [1, 2]. Это связано, в частности, с тем, что тонкостенные конструкции, образуемые тонкими несущими внешними слоями и средним слоем (заполнителем) значительно большей толщины, имеют меньший вес при заданной жесткости в сравнении с однородными конструкциями. Кроме того, средний слой может выполнять дополнительные конструктивные функции, не связанные с обеспечением жесткости, например теплоизоляционные. Следует также отметить, что наиболее жесткими трехслойными непологими оболочками (т.е. обладающими наибольшей жесткостью при фиксированной массе) являются оболочки с несимметричной структурой слоев.

В работе исследуются трехслойные оболочки в случае, когда толщина среднего слоя значительно больше толщин внешних слоев [3]. Средний слой рассматривается в постановке теории оболочек с конечной сдвиговой жесткостью (теория Миндлина–Рейснера), внешние слои — в постановке мембранной теории. Предполагается, что способы соединения слоев в единый пакет гарантируют отсутствие их смещения относительно друг друга; перемещения оболочки малы по сравнению с толщиной конструкции; нормальные напряжения на площадках, касательных к поверхности осреднения, не учитываются. Деформирование пакета слоев определяется гипотезой ломаной нормали; нормальный элемент среднего слоя после деформирования не остается перпендикулярным к поверхности осреднения, а поворачивается на некоторый угол, не искривляясь и не изменяя своей длины. Материал внешних слоев полагается изотропным термоупругим, а материал внутреннего слоя является изотропным термовязкоупругим. Для указанных трехслойных оболочек используется вариационный принцип конволютивного типа [4]. Из вариационного принципа выводятся связанные уравнения движения и теплопроводности, а также краевые и начальные условия. Краевые условия рассматриваются в наиболее общей форме, которые соответствуют упругому закреплению оболочки на опорном контуре.

Разработан и реализован вычислительный алгоритм, который позволяет провести анализ влияния асимметрии пакета слоев и вязкоупругих свойств среднего слоя на поведение собственных частот и форм колебаний при различных краевых условиях. Рассмотрен численный пример для трехслойной полусферической стальной оболочки с внутренним бетонным слоем [3, 5]. Исследована зависимость комплексных собственных значений от величины времени релаксации материала среднего слоя. При увеличении времени релаксации действительная часть собственных значений уменьшается до нуля, т.е. поведение конструкции становится упругим. Осуществлена классификация комплексных собственных форм. Показано наличие кратных собственных значений и произведен анализ структуры соответствующих корневых подпространств. В результате вычислительного эксперимента отмечены зависимость собственных форм от модулей вязкости модели в случаях, когда период

[1]Ковалев Владимир Александрович (vlad_koval@mail.ru), Московский городской университет управления Правительства Москвы, 107045, Россия, г. Москва, ул. Сретенка, 28.

[2]Ревинский Роман Александрович (rvskra@gmail.com), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

n–го собственного колебания приближается к величине времени релаксации материала среднего слоя. Найдены комплекснозначные собственные значения и собственные функции. Отрицательные действительные части собственных значений характеризуют затухание собственных колебаний, вызванных собственной и термической диссипацией. Построены разложения, определяющие динамическую реакцию при импульсных воздействиях.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-08-01180-а).

Литература

[1] Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.

[2] Kovalev V.A. Transient oscillation of the elliptic thermoviscoelastic plates // Books of Abstracts of the XXXVIII Summer school-conference Advanced problems in mechanics. St. Peterburg. – 2010. – P. 57.

[3] Ковалев В.А., Ревинский Р.А. Распределение собственных значений для трехслойных вязкоупругих сферических оболочек // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2008. – № 8/2 (67). – С. 188–200.

[4] Ковалев В.А. Динамика многослойных термовязкоупругих пластин // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9. – Вып. 4. – Ч. 2. – С. 41–94.

[5] Ковалев В.А., Ревинский Р.А. Распределение собственных частот для трехслойных вязкоупругих полусферических оболочек // Тезисы докладов XVI Зимней школы по механике сплошной среды "Механика сплошной среды как основа современных технологий". Пермь – Екатеринбург. – 2009. – С. 192–193.

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В МОДЕЛИРОВАНИИ ЭКОНОМИКИ РЕГИОНОВ РОССИИ

Ковалева Е.Д.[1], *Сидоренко В.Н.*, *Солодовникова Е.А.*[2]

В данной работе рассматриваются результаты исследований российских и зарубежных авторов, посвященных разработкам математических моделей хаотической динамики экономики. Большое внимание уделено явлению циклов и хаоса в экономических системах, исследованию устойчивости таких систем, а также управлению хаосом. Отдельно проанализирована динамическая модель диффузионного типа [1–3], описывающая развитие ключевых показателей экономики (совокупного капитала, совокупного спроса и нормы прибыли) регионов России. Данная модель впервые была предложена Магницким Н.А., затем проанализирована Дерновым А.В., Сидоренко В.Н., Сидоровым С.В., после чего подверглась верификации Ковалевой Е.Д. и Солодовниковой Е.А. по данным региональной статистики, сведенных в сопоставимые ряды динамических показателей за последние 150 лет в работе [4].

Рассматриваемая в работе нелинейная динамическая модель диффузионного типа описывается системой из трех нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и описывает процесс общественного воспроизводства, включая стадии производства, распределения, обмена и потребления. Отличительной чертой этой модели от аналогичных моделей, разработанных в России и за рубежом, является то, что основной переменной, стимулирующей экономическое развитие, служит распределение нормы прибыли, определяющей направленность и интенсивность движения (диффузию) капитала и его самовозрастание посредством производства прибавочной стоимости, величина которой также определяется нормой прибыли. В рамках такого подхода экономическая система описывается без использования традиционных производственных функций.

Два из уравнений системы описывают изменение и интенсивность движения (диффузию) капитала и платежеспособного спроса между регионами под воздействием изменения нормы прибыли, происходящие вследствие несоответствия предложения производимой в экономике продукции платежеспособному спросу на нее. Дисбаланс между спросом и предложением описывается третьим уравнением системы. В работе проведен анализ бифуркаций однородных по пространству решений системы уравнений. Доказано, что при изменении определенных (бифуркационных) параметров соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений может иметь следующие режимы поведения: стационарный, циклический с наличием циклов любого периода и любой кратности, хаотический. Описан тип возникающего при этом странного аттрактора.

Показано, что рассматриваемая нелинейная динамическая модель может описывать широкий спектр экономических систем: от командно-административной до чисто рыночной. При большом "давлении" государства на бизнес экономика может существовать некоторое время с низкими уровнями капитализации и потребления,

[1]Ковалева Елена Дмитриевна, к.ф.-м.н. (kovaleva_ed@mail.ru), Московский городской университет управления Правительства Москвы, 107045, Россия, г. Москва, ул. Сретенка, 28.

[2]Сидоренко Владимир Николаевич (v_sidorenko@mail.ru), Солодовникова Евгения Алексеевна (esolodovnikova@gmail.com), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 3-й новый учебный корпус, Экономический факультет.

а затем разрушается путем уменьшения до нуля платежеспособного спроса населения. При среднем "давлении" государства на бизнес экономика может существовать в практически стационарном (по существу, застойном) состоянии с низким уровнем капитализации и потребления, не разрушаясь при этом длительное время. При низком "давлении" государства на бизнес экономика может развиваться циклично, а также разрушаться под действием глобальных кризисов путем перехода к хаосу через субгармонический каскад бифуркаций.

Данная модель была успешно апробирована на данных российской региональной статистики [4].

Литература

[1] Магницкий Н.А. Математическая модель саморазвивающейся рыночной экономики // Труды ВНИИСИ. – 1991. – С. 16–22.

[2] Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 320 с.

[3] Дернов А.В., Магницкий Н.А., Сидоренко В.Н., Сидоров С.В. Динамический подход к оценке состояния рыночной экономики // Стратегии динамического развития России: единство самоорганизации и управления. Материалы Первой международной научно-практической конференции. Том 2. Часть 1-я / Под общей ред. д. соц. н., проф. В.Л. Романова. – М.: Изд-во "Проспект", 2004. – С. 55–60.

[4] Сидоренко В.Н. Природные ресурсы, окружающая среда и население регионов России за 150 лет. Статистический временник. – М.: ТЕИС, 2010. – 160 с.

УДК 539.376

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ С УЧЕТОМ ГРАНИЧНЫХ ЭФФЕКТОВ

Коваленко Л.В., Попов Н.Н.[1]

Приводится решение нелинейной стохастической краевой задачи ползучести тонкой пластины при плоском напряженном состоянии при условии, что упругие деформации малы и ими допустимо пренебречь. Материал пластины считается стохастически неоднородным, так что тензоры напряжений и скоростей деформаций являются случайными функциями координат x_1 и x_2 в декартовой ортогональной системе координат.

Нелинейная стохастическая задача ползучести состоит из дифференциальных уравнений равновесия для напряжений, условия совместности деформаций, детерминированных граничных условий и определяющих соотношений ползучести, взятых в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения в стохастической форме.

При помощи метода возмущений нелинейная стохастическая задача сводится к системе трех линейных уравнений в частных производных относительно флуктуаций тензора напряжений. Эта система при помощи перехода к функции напряжений была сведена к одному дифференциальному уравнению, решение которого представлено в виде суммы двух рядов. Первый ряд задает решение вдали от границы тела без учета краевых эффектов, второй ряд представляет собой решение в пограничном слое, его члены быстро затухают по мере удаления от границы пластины.

В качестве примера рассмотрено растяжение стохастически неоднородной полуплоскости в направлении двух осей и одноосное растяжение стохастически неоднородной полосы.

На основе полученных аналитических решений проведен статистический анализ случайных полей напряжений и деформаций, в результате которого установлено, что вблизи границы пластины существует узкий пограничный слой, в котором напряженно-деформированное состояние отлично от напряженно-деформированного состояния вдали от границы среды. Получено, что в условиях ползучести концентрация напряжения на границе пластины, возникающая за счет неоднородности материала, в два и более раза больше чем на бесконечности в зависимости от параметра нагружения и степени неоднородности материала. Показано, что разброс напряжений и деформаций в пограничном слое может быть намного больше, чем для глубинных слоев, причем ширина этого слоя зависит от степени неоднородности материала и от параметров нагружения.

Таким образом, флуктуации напряжений в пограничном слое играют существенную роль и их необходимо учитывать при решении вопроса о надежности элементов конструкций по критерию длительной прочности.

[1]Коваленко Людмила Викторовна (flytitmouse@mail.ru), Попов Николай Николаевич (ponick25@gmail.com), Самарский государственный технический университет, 443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

УДК 517.956.4

УБЫВАНИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х.[1]

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n$, $n \geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для параболического уравнения второго порядка с двойной нелинейностью рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^{n} (|\boldsymbol{\nabla} u|^{m-2} u_{x_\alpha})_{x_\alpha}, \quad m > k > 1, \quad (t, \mathbf{x}) \in D; \tag{1}$$

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \quad u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in L_k(\Omega). \tag{2}$$

Работа посвящена исследованию зависимости скорости стабилизации решения задачи (1), (2) при $t \to \infty$ от геометрии неограниченной области Ω в предположении финитности начальной функцией $\varphi(\mathbf{x})$.

Теорема 1. *Для решения задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \geq \|\varphi\|_{L_k(\Omega)} \left(C(\varphi)t + 1\right)^{-1/(m-k)}, \quad t > 0. \tag{3}$$

Основная идея из работы Мукминова Ф.Х. [1] получения оценки сверху решения первой смешанной задачи для линейного параболического уравнения в неограниченной области Ω заключается в следующем. Сначала устанавливается оценка убывания решения по мере удаления на бесконечность области Ω. Затем, для фиксированного значения t, выбирается ограниченная часть области Ω за пределами которой решение "пренебрежимо мало", и в этой ограниченной части устанавливается оценка убывания решения по времени. В настоящей работе такой же метод применяется для квазилинейного уравнения.

Для изучения убывания решения задачи (1)–(2) при $|\mathbf{x}| \to \infty$ будем пользоваться понятием λ-разбиения области, которое позволяет получать точные оценки решений краевых задач для линейных эллиптических и параболических уравнений. Это понятие можно считать обобщением понятия λ-последовательности, введенного ранее в работах [2, 3] для областей, расположенных вдоль выделенной оси.

В настоящей работе, адаптируя понятие λ-разбиения на квазилинейный оператор, устанавливаются равномерные по времени оценки сверху для уравнения (1) в широком классе областей с некомпактными границами. Будем предполагать, что неограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ представлена в виде объединения $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$ последовательности вложенных $\Omega^{(N)} \subset \Omega^{(N+1)}$ ограниченных областей, удовлетворяющих следующим требованиям. Дополнения $\Omega^{(N)}_{(N-1)} = \Omega^{(N)} \setminus \overline{\Omega^{(N-1)}}$ распадаются на конечное число связных компонент $\omega_i^{(N)}$, $i = \overline{1, p^{(N)}}$: $\Omega^{(N)}_{(N-1)} = \bigcup\limits_{i=1}^{p^{(N)}} \omega_i^{(N)}$, $N = \overline{1, \infty}$. Пересечения $(\partial\Omega^{(N)}) \bigcap \Omega = S^{(N)}$, $N = \overline{0, \infty}$, представляют собой конечное

[1] Кожевникова Лариса Михайловна (kosul@mail.ru), Мукминов Фарит Хамзаевич (mfkh@rambler.ru), Стерлитамакская государственная педагогическая академия, 453103, Россия, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 37.

число липшицевых гиперповерхностей $S_i^{(N)} = \partial\omega_i^{(N)} \bigcap S^{(N)}$ ($S_i^{(N)} \neq \varnothing$ могут быть несвязными), $i = \overline{1, p^{(N)}}$, $N = \overline{1, \infty}$.

Для множества $Q \subset \Omega$ введем обозначение

$$\lambda[Q] = \inf \left\{ \|\boldsymbol{\nabla} g\|^m_{L_m(Q)} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{L_m(Q)} = 1 \right\}.$$

Определим векторы $t^{(N)} = (t_1^{(N)}, ..., t_{p^{(N)}}^{(N)})$ и $\lambda^{(N)} = (\lambda_1^{(N)}, ..., \lambda_{p^{(N)}}^{(N)})$ формулами $t_i^{(N)} = \operatorname{dist}(S_i^{(N)}, \widetilde{S}_i^{(N-1)})$, где $\widetilde{S}_i^{(N-1)} = \partial\omega_i^{(N)} \cap S^{(N-1)} \neq \varnothing$, $\lambda_i^{(N)} = \lambda\left[\omega_i^{(N)}\right]$, $i = \overline{1, p^{(N)}}$, $N = \overline{1, \infty}$. Будем предполагать, что существует число $\theta > 0$ такое, что выполняются неравенства

$$1 \leq \theta \lambda_i^{(N)} (t_i^{(N)})^m, \quad i = \overline{1, p^{(N)}}, \quad N = \overline{1, \infty}. \tag{4}$$

Описанное выше представление $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$ при выполнении неравенств (4) будем называть λ-разбиением области.

Предполагается, что начальная функция имеет ограниченный носитель так, что

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega^{(0)}.$$

Определим последовательность

$$F(N) = 1/\inf \left\{ \|\boldsymbol{\nabla} g\|_{L_m(\Omega^{(N)})} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_k(\Omega^{(N)})} = 1 \right\}, \quad N = \overline{0, \infty}.$$

Теорема 2. *Пусть для области* Ω *существует* λ*-разбиение* $\Omega = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} \Omega^{(N)}$. *Тогда найдутся положительные числа* $M(\theta, \|\varphi\|, m, k)$, $\kappa(\theta, m, k)$ *такие, что для решения* $u(t, \mathbf{x})$ *задачи* (1)–(2) *справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq M t^{-1/(m-k)} F^{1/(m-k)}(N(t)), \quad t > 0, \tag{5}$$

с произвольной неотрицательной функцией, удовлетворяющей неравенству

$$F(N(t)) \exp(\kappa(m-k)N(t)) \geq t, \quad t > 0.$$

Заметим, что практически всегда можно устроить разбиение с выполнением условия: существует положительная константа b такая, что

$$F(N) \leq C \exp(bN), \quad N \geq 0.$$

В этом случае можно положить

$$\exp(N(t)) = t^{1/(b+\kappa(m-k))}, \quad t > 0,$$

и оценкиа (5) принимает вид

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq M t^{-\kappa/(b+\kappa(m-k))}, \quad t > 0.$$

Если же выполнено условие

$$\lim_{N\to\infty} \ln F(N)/N = 0,$$

то можно выбрать

$$\exp(N(t)) = t^{1/(\kappa(m-k))}, \quad t > 0, \tag{6}$$

и оценка (5) принимает вид

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \le M t^{-(1-\varepsilon)/(m-k)}, \quad \varepsilon \in (0,1), \quad t > 0. \tag{7}$$

Выбор функции $N(t)$ формулой (6) является оптимальным, поскольку оценка (7) имеет показатель степени близкий к показателю $1/(m-k)$ оценки снизу (3).

Литература

[1] Мукминов Ф.Х. Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка // Матем. сб. – 1980. – Т. 111(153). – №4. – С. 503–521.

[2] Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. Убывание решения первой смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка с младшими членами // Фундамент. и прикл. матем. – 2006. – Т. 12. – №4. – С. 113–132.

[3] Кожевникова Л.М. Стабилизация решений псевдодифференциальных параболических уравнений в неограниченных областях // Изв. РАН. Сер. матем. – 2010. – Т. 74. – №2. – С. 109–130.

УДК 531+534.01+532.517.4

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА, ДИНАМИКА СПЛОШНЫХ СРЕД И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Козлов В.В.[1]

Рассматривается динамика континуума взаимодействующих частиц, описываемая кинетическим уравнением Власова. Выводится бесконечная цепочка точных уравнений движения такой среды в эйлеровом представлении и исследуются их общие свойства. Важным примером служит бесстолкновительный газ, демонстрирующий необратимое поведение. Несмотря на потенциальный характер взаимодействия отдельных частиц, для динамики континуума характерны диссипативные свойства. Рассматривается вопрос о возможности применения уравнения Власова к моделированию мелкомасштабной турбулентности.

[1]Козлов Валерий Васильевич (vvkozlov@mi.ras.ru), Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

УДК 517.9

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

Козлова Е.А.[1]

Уравнение Геллерстедта $y^m u_{xx}+u_{yy}=0$ (m — нечетное положительное) является одним из наиболее известных уравнений смешанного типа. (При $m=1$ — уравнение Трикоми.) Для этого случая Гельфандом И.М. и Баррос–Нето Х. в [3, 4] были построены фундаментальные решения в областях, ограниченных характеристиками уравнения (решения уравнения с δ-функцией в правой части, [1]). В докладе с помощью описанного в [3, 4] метода исследовано уравнение Геллерстедта при произвольном нечетном m и уравнение $\operatorname{sign}(y)|y|^{\lambda}u_{xx}+u_{yy}=0$ при произвольном $\lambda>0$.

Фундаментальные решения уравнения Геллерстедта выражаются с помощью гипергеометрической функции Гаусса и совпадают при $m=1$ с результатами [3, 4].

В работе рассмотрена вырождающаяся система уравнений смешанного типа $\operatorname{sign}(y)|y|^{G}u_{xx}+u_{yy}=0$, где G — квадратная матрица с положительными собственными значениями. С помощью невырожденного преобразования $Tu=v$ осуществляется переход к системе $\operatorname{sign}(y)|y|^{\Lambda_G}v_{xx}+v_{yy}=0$, где Λ_G — нормальная Жорданова форма матрицы G.

Для каждого из уравнений полученной системы (типа Геллерстедта) выписываются фундаментальные решения. Тем самым в областях, ограниченных характеристиками уравнений исследуемой системы, получены фундаментальные решения. Эти решения образуют матрицу-функцию [2], которая и является специальным решением системы уравнений Геллерстедта.

Литература

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.

[2] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 577 с.

[3] Barros-Neto J., Gelfand I.M. Fundamental solutions for the Tricomi operator // Duke Math. Journal. – 1999. – V. 98. – No. 3. – P. 465–483.

[4] Barros-Neto J., Gelfand I.M. Fundamental solutions for the Tricomi operator, II // Duke Math. Journal. – 2002. – V. 111. – No. 3. – P. 561–584.

[1] Козлова Елена Александровна (leni2006@mail.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

УДК 517.956.4

КВАНТОВЫЙ ВЫВОД ФОРМУЛЫ АРРЕНИУСА

Козырев С.В.[1]

Предлагается новый подход к выводы формула Аррениуса из кинетической теории. В этом подходе уравнение диффузии в потенциале представляется в виде эволюционного уравнения для некоторого оператора Шредингера. Показывается, что формула Аррениуса для скорости надбарьерного перехода выводится из формулы для скорости подбарьерного (туннельного) перехода для рассматриваемого оператора Шредингера.

Обсуждается связь предложенного подхода с виттеновским методом доказательства неравенств Морса. В нашем подходе виттеновская спектральная асимптотика оказывается низкотемпературной и формула Аррениуса является поправкой к виттеновской асимптотике.

Представленная работа частично поддержана грантами РФФИ 08-01-00727-а и 09-01-12161-офи-м, грантом президента Российской Федерации на поддержку научных школ НШ-7675.2010.1 и программой Отделения математики РАН "Современные проблемы теоретической математики", а также аналитической ведомственной целевой программой МОН "Развитие научного потенциала высшей школы 2009-2010 годы" проект 3341.

Литература

[1] Волович И.В., Козырев С.В., Квантовый вывод формулы Аррениуса. (to be published).

[1] Козырев Сергей Владимирович (kozyrev@mi.ras..ru), Математический институт им В.А.Стеклова РАН, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

УДК 532.516:517.958

ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА

Коптев А.В.[1]

Рассмотрен один из вариантов уравнений Навье—Стокса. Он соответствует случаю движения несжимаемой жидкости в поле потенциальных массовых сил.

Автором предложена новая система переменных, образованная основными неизвестными u, v, w, p и ассоциированными неизвестными Ψ_i. Для последних неизвестных введено название псевдофункции тока.

Преимущество новых неизвестных состоит в следующем. Посредством этих неизвестных, путем применения аналитических методов оказывается возможным построить общий интеграл уравнений Навье—Стокса [1–2]. Он представляет совокупность нескольких соотношений, связывающих основные и ассоциированные неизвестные. Для случая 3D таких соотношений девять, а для случая 2D пять.

Для всех соотношений такого типа порядок производных основных неизвестных на единицу меньше их порядка в исходных уравнениях Навье—Стокса. То есть, для скоростей порядок производных по координатам первый, а для давления нулевой — давление фигурирует аддитивно.

Некоторые из этих соотношений содержат квадратичные нелинейности вида u^2, v^2, w^2, uv, uw, или vw. Можно сказать, что эти соотношения представляют аналоги уравнения Риккати в частных производных.

Каждое из соотношений, представляющих общий интеграл, содержит аддитивные функции, полученные в процессе интегрирования. Для случая 3D это функции трех переменых — либо двух координат и времени, либо трех координат. Для случая 2D это функции двух переменных — либо одной координаты и времени, либо двух координат. Для случая 3D аддитивных функций пятнадцать, для случая 2D их пять.

Автором доказано, что указанные соотношения, рассмотреные в совокупности, представляют интеграл уравнений Навье—Стокса. Для доказательства этого утверждения найдена комбинация первых производных, с помощью которых указанные соотношения трансформируются в исходные уравнения Навье—Стокса.

Построенный интеграл справедлив и для уравнений Эйлера [3]. Для этого достаточно на всех этапах построения положить равной нулю величину, обратную числу Рейнольдса. Известные интегралы уравнений Эйлера (интеграл Бернулли и интеграл Лагранжа—Коши) получаются, как частные случаи описываемого выше интеграла. Возникающие взаимосвязи общего и частного удобно иллюстрируются в виде дерева. В основании дерева располагается описываемый выше общий интеграл уравнений Навье—Стокса для случая 3D.

По мнению автора этот интеграл можно назвать общим интегралом движения несжимаемой жидкости. Автор надеется, что этот интеграл со временем будет всесторонне исследован и займет достойное место в практических расчетах. И с соотношений, образующих этот интеграл, можно будет начинать решение конкретных гидромеханических задач.

Поскольку эти соотношения более простые, чем исходные уравнения Навье—Стокса, то в перспективе можно получить ощутимую выгоду.

[1]Коптев Александр Владимирович (Alex.Koptev@mail.ru), Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций, 198035, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7.

Литература

[1] Коптев А.В. Новый подход к исследованию уравнений Навье–Стокса. – Саранск: Труды СВМО. – Т. 3–4. – 2001. – С. 281–287.

[2] Коптев А.В. Интегралы уравнений Навье–Стокса. – Саранск: Труды СВМО. – Т. 6. – 2004. – С. 215–225.

[3] Коптев А.В. Гидродинамические уравнения Эйлера. История и перспективы решения // Математика и ее приложения, Вып. 1, Межвузовский сборник научных трудов. – СПб: СПГУВК, 2008. – С. 43–58.

УДК 539.3

ИЗГИБ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО ПО ДЛИНЕ КОНТУРА, В РАМКАХ ГИПОТЕЗ ВЛАСОВА

Косых Э.Г.[1]

Применение дорогих высокопрочных материалов в различных отраслях техники и строительства приводит к необходимости применять тонкостенные конструкции и в частности тонкостенные стержни. Работу упругих тонкостенных стержней исследовал В.З. Власов [1]. Им сформулирована т.н. гипотеза жесткого контура, введены понятия секториальных геометрических характеристик, центра изгиба, построена система разрешающих дифференциальных уравнений и приведены решения конкретных задач для стержней постоянного - не зависящего от продольной координаты контура, а так же при толщине элементов контура, постоянной вдоль продольной оси.

В настоящей работе исследуется упругий стержень переменного вдоль продольной оси контура с учетом изменения толщины стержня по длине.

Вводится криволинейная ось поперечного сечения вместе с соответствующей координатой s — это след пересечения срединной поверхности с плоскостью поперечного сечения. Эта ось имеет в общем случае несколько ветвей, и в нашей постановке задачи концы этих ветвей имеют уже не постоянные координаты x_{K_V}, y_{K_V} — здесь индекс K_V — указывает на координаты концов v-ой ветви, а зависящие от z, т.е. координаты границ суть функции переменной z: $x_{K_V}(z)$, $y_{K_V}(z)$.

В каждой точке криволинейной оси в поперечном сечении вводим местную систему осей (v, w, u) — здесь v — направление касательной вдоль s; w — направление внутренней нормали к срединной поверхности в этой точке, u — направление в точке параллельно оси z. Перемещения точки по этим направлениям обозначим теми же символами.

Используя вариационный принцип Лагранжа, получена система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях:

$$
\begin{aligned}
&\left(F\zeta_{,z} - S_y\xi_{,zz} - S_x\eta_{,zz} - S_\omega\theta_{,zz}\right)_{,z} = -\frac{1}{E}q_z,\\
&\left(-S_y\zeta_{,z} + I_y\xi_{,zz} + I_{xy}\eta_{,zz} + I_{\omega x}\theta_{,zz}\right)_{,zz} = \frac{1}{E}\left(q_x + \int\limits_{L(z)} P_{z,z}x ds\right),\\
&\left(-S_x\zeta_{,z} + I_{xy}\xi_{,zz} + I_x\eta_{,zz} + I_{\omega y}\theta_{,zz}\right)_{,zz} = \frac{1}{E}\left(q_y + \int\limits_{L(z)} P_{z,z}y ds\right),\\
&\left(-S_\omega\zeta_{,z} + I_{\omega x}\xi_{,zz} + I_{\omega y}\eta_{,zz} + I_\omega\theta_{,zz}\right)_{,zz} -\\
&\qquad - \left(\frac{G}{E}I_d\theta_{,z}\right)_{,z} = \frac{1}{E}\left(m + \int\limits_{L(z)} P_{z,z}\omega ds\right).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь q_x, q_y, q_z — проекции погонной нагрузки от $p(z,s)$; m — погонный момент относительно выбранного полюса от заданной внешней нагрузки; $\xi(z)$, $\eta(z)$, $\zeta(z)$ —

[1]Косых Эдуард Григорьевич (ed-ksykh@rambler.ru), кафедра строительной механики, Белорусский государственный университет транспорта, 246653, Беларусь, г. Гомель, ул. Кирова, 34.

перемещения вдоль осей x, y, z; $\theta(z)$ — угол закручивания, обусловленный депланацией и чистым кручением поперечного сечения; S_x, S_y, S_ω — стаческие осевые и секториальные моменты; I_x, I_y, I_{xy} — осевые и центробежный моменты инерции; $I_{\omega x}$, $I_{\omega y}$, I_ω — секториальные моменты инерции; I_d — полярный момент инерции; F — площадь поперечного сечения.

Решение системы (1) можно привести к матричной форме

$$(w) = C_1 Co(E, z) + C_2 Si(E, z) + (w_q). \tag{2}$$

Здесь (w) — вектор седьмого порядка. Матричные функции Co(E, z) и $Si(E, z)$ рассмотрены в [2]. Последнее слагаемое в (2) — это частное решение матричной системы (1).

Как частный случай рассматривается аналитическое представление переменной жесткости кусочно-постоянной (ступенчатой) функцией.

Литература

[1] Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.: Физматгиз, 1959.

[2] Косых Э.Г. Продольно-поперечный изгиб трехслойных стержней переменной жесткости // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – №8/1(67). – С. 390–400.

УДК 517.538.2

УСЛОВИЕ НА МНИМЫЕ ЧАСТИ ТОЧЕК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КАК КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ C_0 И L^p

Краснобаев И.О.[1]

Доклад посвящен проблеме Мюнца—Саса — проблеме описания полных систем вида

$$e(\Lambda) = \{e^{-\lambda_n t}\},\ \lambda_n \in \Lambda = \{\lambda_n \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\lambda_n > 0\} \tag{1}$$

в пространствах $L^p(0,+\infty)$ и $C_0[0,\infty) = \{f \in C[0,+\infty) : f(+\infty) = 0\}$.

Известно, что условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} = +\infty \tag{2}$$

является достаточным для полноты системы (1) в указанных пространствах, но не является необходимым. В связи с этим появилась задача описать расположение точек Λ в правой полуплоскости, при котором условие (2) являлось бы необходимым для полноты системы (1). Такое описание было получено в 1975 году А.М. Седлецким [1]: в классе последовательностей Λ, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \operatorname{dist}(\Lambda, iy)}{1+y^2} dy > -\infty, \tag{3}$$

условие (2) является необходимым и достаточным условием полноты системы (1) в пространствах C_0 и L^p, $p > 2$. Однако, если точки последовательности Λ находятся в полосе $A > \operatorname{Re}\lambda_n > 0$ и выполняется условие (2), вместо условия (3) может быть использовано похожее условие на проекции точек λ_n на мнимую ось, что и показывает данная теорема:

Теорема. *В классе последовательностей Λ, таких, что $A > \operatorname{Re}\lambda_n > 0$, $A \in \mathbb{R}$ и для которых*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \operatorname{dist}(\operatorname{Im}\lambda_n, y)}{1+y^2} dy > -\infty,$$

условие (2) является необходимым и достаточным условием полноты системы (1) в пространствах C_0 и L^p, $p > 2$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 09-01-00225.

Литература

[1] Седлецкий А.М. К проблеме Мюнца—Саса для пространства $C[0,1]$ // Тр. Моск. энергетического ин-та. – 1975. – Вып. 260. – С. 89–98.

[1] Краснобаев Игорь Олегович (maths_igor@mail.ru), Москвоский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119234, Россия, г. Москва, Воробьевы горы, 1.

УДК 515.1

УРАВНЕНИЯ ЯНГА—МИЛЛСА, ГРАВИТАЦИЯ И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Кривоносов Л.Н.[1], *Лукьянов В.А.*[2]

Исследование посвящено изучению геометрии 4-мерного многообразия, конформная связность которого удовлетворяет системе уравнений Янга—Миллса. Основная цель — получение реалистической модели пространства-времени, в рамках которой можно было бы объяснить все четыре фундаментальных взаимодействия в Природе. Предлагаемая модель пространства-времени представляет собой дифференцируемое расслоенное многообразие с 4-мерной базой M. К каждой точке этого многообразия присоединен слой, представляющий собой 5-мерное проективное пространство P_5, содержащее квадрику

$$-(x_1)^2+(x_2)^3+(x_3)^2+(x_4)^2+2x_0x_5=0.$$

Группой инвариантности этой квадрики является конформная группа $C(3,1)$. Эта группа позволяет ввести на многообразии M конформную связность

$$\Omega=\begin{pmatrix}\omega_0^0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & 0\\ \omega^1 & 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & \omega_1^4 & \omega_1\\ \omega^2 & \omega_1^2 & 0 & -\omega_2^3 & -\omega_2^4 & -\omega_2\\ \omega^3 & \omega_1^3 & \omega_2^3 & 0 & -\omega_3^4 & -\omega_3\\ \omega^4 & \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 & 0 & -\omega_4\\ 0 & \omega^1 & -\omega^2 & -\omega^3 & -\omega^4 & -\omega_0^0\end{pmatrix},$$

состоящую из пфаффовых форм. Пространства конформной связности были рассмотрены Картаном в [1]. Матрица кривизны

$$\Phi=d\Omega+\Omega\wedge\Omega=\begin{pmatrix}\Phi_0^0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & 0\\ \Phi^1 & 0 & \Phi_1^2 & \Phi_1^3 & \Phi_1^4 & \Phi_1\\ \Phi^2 & \Phi_1^2 & 0 & -\Phi_2^3 & -\Phi_2^4 & -\Phi_2\\ \Phi^3 & \Phi_1^3 & \Phi_2^3 & 0 & -\Phi_3^4 & -\Phi_3\\ \Phi^4 & \Phi_1^4 & \Phi_2^4 & \Phi_3^4 & 0 & -\Phi_4\\ 0 & \Phi^1 & -\Phi^2 & -\Phi^3 & -\Phi^4 & -\Phi_0^0\end{pmatrix}$$

конформной связности такого многообразия состоит из 15 существенных компонент, являющихся внешними дифференциальными формами 2-го порядка.

Линейный оператор Ходжа $*$, действующий на множестве внешних дифференциальных 2-форм, матрице кривизны Φ ставит в соответствие матрицу $*\Phi$. Так как матрица Φ удовлетворяет тождествам Бианки

$$d\Phi+\Omega\wedge\Phi-\Phi\wedge\Omega=0,$$

[1]Кривоносов Леонид Николаевич, Нижегородский государственный технический университет им. Алексеева, 603950, ГСП-41, г. Н.Новгород, ул. Минина, 24.

[2]Лукьянов Вячеслав Анатольевич (oxyzt@ya.ru), Заволжский филиал Нижегородского государственного технического университета им. Алексеева, Нижегородская область, г. Заволжье, ул. Павловского, 1а.

то требование выполнения симметричных им уравнений Янга–Миллса

$$d * \Phi + \Omega \wedge * \Phi - * \Phi \wedge \Omega = 0$$

наделяет многообразие двойственностью, которая реализует наблюдаемую в Природе двойственность элементарных частиц.

Количества компонент матрицы Φ кривизны конформной связности достаточно, чтобы моделировать все 4 известные в Природе фундаментальные взаимодействия. В частности, форма Φ_0^0 моделирует электромагнитное взаимодействие, а формы Φ^i, $i = 1, 2, 3, 4$ — слабое взаимодействие.

Для сопоставления предложенной модели пространства-времени с реальностью необходимо найти хотя бы одно полное решение системы уравнений Янга—Миллса, представляющей собой в развернутом виде 60 нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, связывающих 60 искомых функций. Даже с помощью вычислительных машин решить такую задачу в настоящее время не представляется возможным. Однако в некоторых случаях систему уравнений Янга—Миллса удается упростить за счет уменьшения числа искомых функций.

Если положить $\Phi^i = 0$ и $\Phi_0^0 = 0$ (нормальное пространство конформной связности), то количество неизвестных функций уменьшается до 20. В итоге получается, что уравнения Янга—Миллса сводятся к системе уравнений гравитации, состоящей из 10-ти уравнений Эйнштейна

$$R_{jm} = 2b_{jm} + \frac{1}{6} R \eta_{jm}$$

(R_{jm} — тензор Риччи, η_{jm} — метрический тензор, $R = \eta^{jm} R_{jm}$) и 9-ти уравнений движения вещества

$$\eta^{mn} \left(b_{km|pn} - b_{kp|mn} + b_{im} \Phi^i_{kpn} \right) = 0,$$

где функции b_{jm} связаны с компонентами тензора энергии-импульса:

$$b_{jm} = \frac{1}{2} T_{jm} + \frac{1}{6} R \eta_{jm},$$

а Φ^i_{kpn} — компоненты 2-формы кривизны Φ^i_k. Этот случай был разобран в [2].

Если потребовать, чтобы $\Phi^i = 0$ (пространство без кручения), то система уравнений Янга—Миллса сводится к трем группам: 10-ти уравнениям Эйнштейна, 9-ти уравнениям движения вещества и 8-ми уравнениям Максвелла

$$d\Phi_0^0 = 0; \qquad d * \Phi_0^0 = 0.$$

Данный случай был рассмотрен в [3]. Тем самым осуществлено успешное объединение гравитации и электромагнетизма в модели многообразия конформной связности *без кручения*. Это делает оптимистичной идею объединения всех 4 видов взаимодействий в Природе в рамках 4-мерного многообразия конформной связности *с кручением*.

Литература

[1] Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. – Издательство Казанского университета, 1962. – 210 с.

[2] Кривоносов Л.Н., Лукьянов В.А. Связь уравнений Янга—Миллса с уравнениями Эйнштейна // Изв. вузов. Матем. – 2009. – No. 9. – С. 69–74.

[3] Кривоносов Л.Н., Лукьянов В.А. Связь уравнений Янга—Миллса с уравнениями Эйнштейна и Максвелла // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. – 2:4 (2009). – С. 432–448.

УДК 533.6

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ГАЗА МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПЛОСКОСТЯМИ

Крупенников А.В.[1]

В докладе представлены результаты исследования безвихревых изэнтропических потенциальных течений идеального газа, которые описываются нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных для потенциала скорости $\varphi(t,\theta,t)$:

$$\begin{gathered}\varphi_{tt}+2\varphi_r\varphi_{rt}+\frac{2}{r^2}\varphi_\theta\varphi_{\theta t}+\varphi_r^2\varphi_{rr}+\frac{1}{r^4}\varphi_\theta^2\varphi_{\theta\theta}+\\ +\frac{2}{r^2}\varphi_r\varphi_\theta\varphi_{r\theta}-\frac{1}{r^3}\varphi_r\varphi_\theta^2=a^2\left(\varphi_{rr}+\frac{1}{r}\varphi_r+\frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}\right),\\ a^2=\frac{\gamma+1}{2}-(\gamma-1)\left(\varphi_t+\tfrac{1}{2}\varphi_r^2+\tfrac{1}{2r^2}\varphi_\theta^2\right),\quad \gamma=\text{const},\end{gathered}\tag{1}$$

где a — скорость звука; r, θ — полярные координаты; t — время. Для этого уравнения найден класс решений, используемый для описания течений газа между вращающимися по законам $\theta=\theta_1(t)$, $\theta=\theta_2(t)$ плоскостями, образующими острый или тупой угол. Решение можно применять для описания течений с ударной волной, имеющий форму вращающегося луча.

Применялись следующие методы:

1) аналитический метод построения решений дифференциального уравнения с частными производными, основанный на сведении уравнения с некоторым числом независимых переменных к уравнению с меньшим числом переменных,

2) численно-аналитический метод Галеркина, который позволяет свести решение дифференциального уравнения с частными производными для функции двух переменных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений,

3) численный метод решения начально-краевой задачи для дифференциального уравнения 2-го порядка с частными производными, а именно метод конечных разностей.

Большую сложность для математического моделирования представляет нелинейность рассматриваемого дифференциального уравнения с частными производными. Найдено точное решение исследуемой задачи в случае некоторых заданных законов движения пластин. Также построено численное решение задачи методом Галеркина и методом конечных разностей при произвольных законах движения пластин.

Полученные результаты имеют как практическую значимость — с точки зрения приложений в газовой динамике, так и теоретическую — с точки зрения развития методов построения решений нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Литература

[1] Булаев С.В., Вельмисов П.А., Крупенников А.В. Об одном классе потенциальных течений газа // Тезисы докладов XXI Всероссийской конференции "Аналитические методы в газовой динамике". – Санкт-Петербург, 2006. – С. 17–18.

[1] Крупенников Алексей Валерьевич (al.krupennikov@mail.ru), Ульяновский государственный технический университет, 432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.

[2] Вельмисов П.А., Булаев С.В., Крупенников А.В. Об одном классе безвихревых изэнтропических течений газа // Труды международной конференции КЛИН-2006. Том 4: Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – С. 108–110.

[3] Вельмисов П.А., Крупенников А.В. Применение метода Галеркина для решения одной нелинейной задачи газовой динамики // Труды международной конференции КЛИН-2007. Том 4: Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике: синтез, анализ, диагностика. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – С. 72–76.

[4] Вельмисов П.А., Крупенников А.В., Маценко П.К. Применение метода конечных разностей для решения одной нелинейной начально-краевой задачи газовой динамики // Механика и процессы управления: Сб. науч. тр. – Ульяновск, 2007. – С. 21–25.

УДК 129.05.33

СВЕРХТОНКАЯ СТРУКТУРА АТОМА МЮОННОГО ГЕЛИЯ

Крутов А.А., Мартыненко А.П.[1]

Атом мюонного гелия (μe^3_2He) представляет собой простейшую трехчастичную систему, состоящую из электрона, отрицательно заряженного мюона и положительно заряженного гелиона (^3_2He). Этот атом имеет более сложную сверхтонкую структуру по сравнению с мюонным гелием (μe^4_2He), так как сверхтонкое расщепление уровней энергии обусловлено взаимодействием магнитных моментов всех трех частиц [1–5]. Исследование спектра энергии мюонного гелия имеет важное значение для проверки квантовой электродинамики (КЭД) [6]. Сверхтонкое расщепление основного состояния атома (μe^3_2He) было измерено с достаточно хорошей точностью в [7]:

$$\Delta\nu^{hfs}_{exp} = 4166.3(2)\ MHz. \tag{1}$$

В отличие от уровней энергии двухчастичных атомов, которые изучены в КЭД с очень высокой точностью [6], теоретические расчеты сверхтонкого расщепления основного состояния мюонного гелия ($\mu\, e\, ^3_2He$) были выполнены как в рамках теории возмущений [1, 4], так и вариационным методом [3, 5] с меньшей точностью.

Сверхтонкое расщепление основного состояния атома ($\mu\ e\ ^3_2He$) определяется следующим гамильтонианом:

$$\delta H = -\frac{8\pi}{3}\boldsymbol{\mu}_N\cdot\boldsymbol{\mu}_\mu\delta(\mathbf{x}_\mu) - \frac{8\pi}{3}\boldsymbol{\mu}_\mu\cdot\boldsymbol{\mu}_e\delta(\mathbf{x}_\mu-\mathbf{x}_e) - \frac{8\pi}{3}\boldsymbol{\mu}_e\cdot\boldsymbol{\mu}_N\delta(\mathbf{x}_e), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\mu}_e = -g_e e/(2m_e)\mathbf{s}_e$, $\boldsymbol{\mu}_\mu = -g_\mu e/(2m_\mu)\mathbf{s}_\mu$, $\boldsymbol{\mu}_N = -g_N e/(2m_p)\mathbf{I}_N$ — магнитные моменты электрона, мюона, гелиона. $\mathbf{x}_e$, $\mathbf{x}_\mu$ радиусы-векторы электрона и мюона по отношению к ядру. Поскольку нерелятивистская волновая функция системы может быть представлена в виде произведения координатной и спиновой волновых функций, сдвиг уровней энергии за счет взаимодействия (2) определяется матричным элементом:

$$\delta E = <\delta H> = -a\ \mathbf{I}_N\mathbf{s}_\mu - b\ \mathbf{s}_\mu\mathbf{s}_e - c\ \mathbf{s}_e\mathbf{I}_N, \tag{3}$$

где

$$a = \frac{2\pi\alpha}{3}\frac{g_N g_\mu}{m_p m_\mu} < \delta(\mathbf{x}_\mu),\ b = \frac{2\pi\alpha}{3}\frac{g_\mu g_e}{m_\mu m_e} < \delta(\mathbf{x}_\mu-\mathbf{x}_e),$$
$$c = \frac{2\pi\alpha}{3}\frac{g_e g_N}{m_e m_p} < \delta(\mathbf{x}_e). \tag{4}$$

Диагонализация матричного элемента $<\delta H>$ дает собственные значения энергии системы трех частиц:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}(a+b+c) \pm \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^{1/2},\ \lambda_3 = -\frac{1}{4}(a+b+c). \tag{5}$$

[1]Крутов Андрей Александрович(aakrutov@rambler.ru), Мартыненко Алексей Петрович (mart@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Значения $\lambda_{1,2}$ и λ_3 соответствуют величине полного момента системы, равного $1/2$ и $3/2$. В случае мюонного гелия $(\mu e_2^3 He)$ мы имеем $a \gg b$ и $a \gg c$, поэтому с хорошей точностью значения $\lambda_{1,2}$ равны

$$\lambda_1 = \frac{3}{4}a + \ldots, \lambda_2 = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}(b+c) + \ldots. \tag{6}$$

В результате наименьший интервал сверхтонкой структуры основного состояния, который был изучен экспериментально [7], определяется выражением:

$$\Delta\nu^{hfs} = \lambda_2 - \lambda_3 = \frac{3}{4}(b+c) + O\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right). \tag{7}$$

В рамках теории возмущений по постоянной тонкой структуры α и отношению масс электрона и мюона, сформулированной Лакдавалой и Мором [1], а также в нашей работе [8], мы вычисляем ряд поправок, которые важны для получения более точной теоретической величины сверхтонкого расщепления основного состояния (7):

- однопетлевые поправки поляризации вакуума порядка $\alpha^5 M_e/M_\mu$;
- однопетлевые электронные вершинные поправки порядка α^5, $\alpha^5 M_e/M_\mu$;
- поправки на структуру ядра порядка α^6;
- релятивистские поправки порядка α^6.

Основные амплитуды взаимодействия частиц, которые рассматривались в данной работе, представлены на рис.1-2.

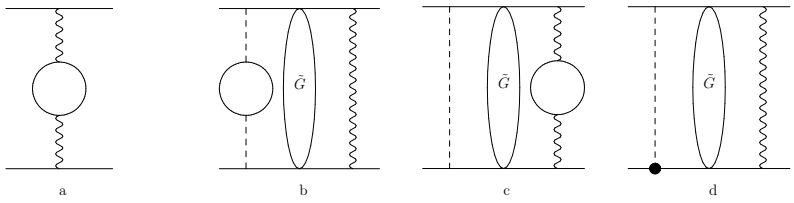


Рис 1. Эффекты поляризации вакуума, структуры ядра. Пунктирной линией обозначен кулоновский фотон. Волнистая линия представляет сверхтонкую часть потенциала Брейта. $\tilde{G}$ — кулоновская функция Грина

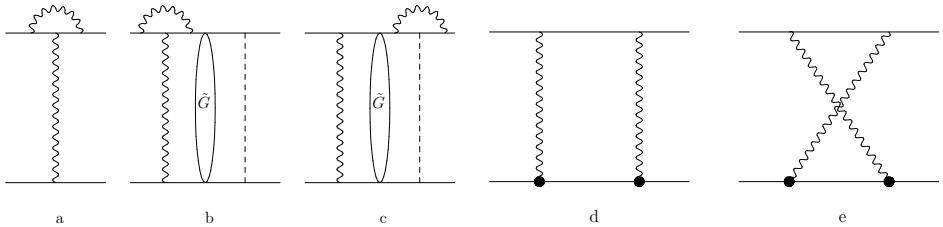


Рис 2. Вершинные поправки, эффекты структуры и отдачи ядра. Жирной точкой обозначена вершинная функция ядра

Полученный нами результат сверхтонкого расщепления основного состояния $\Delta\nu^{hfs} = 4165.43$ МГц улучшает предыдущее вычисление [1] за счет учета новых

вкладов. Остающееся различие между данным теоретическим результатом и экспериментальной величиной (1), находится в пределах теоретической ошибки ± 0.7 МГц и экспериментальной погрешности.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФП "Научные и педагогические кадры инновационной России" (грант No. НК-20П/1).

Литература

[1] Lakdawala S.D., Mohr P. Calculation of the muonic ^3He hyperfine structure // Physical Review A. – 1981. – V. 24. – P. 2224–2227.

[2] Huang K.-N., Hughes V.W. Theoretical hyperfine structure of the muonic ^3He and ^4He atoms // Physical Review A. – 1982. – V. 26. – P. 2330–2233.

[3] Drachman R.L. Hyperfine structure in muonic helium: excited states // Journal of Physics B. – 1983. – V. 16. – P. L749–L51.

[4] Ming-Keh Chen. Hyperfine splitting for the ground-state muonic ^3He atom — corrections up to α^2 // Journal of Physics B. – 1993. – V. 26. – P. 2263–2272.

[5] Frolov A.M. Properties and hyperfine structure of helium-muonic atoms // Physical Review A. – 2000. – V. 61. – P. 022509–022518.

[6] Eides M.I., Grotch H., Shelyuto V.A. Theory of light hydrogen-like atoms // Physics Reports. – 2001. – V. 342. – P. 62–261.

[7] M. Gladish et al., Proc. 8th Int. Conf. on Atom. Phys., ed. I. Lindgren, A. Rosen and S. Svanberg (NY, Plenum).

[8] Krutov A.A., Martynenko A.P. Ground-state hyperfine structure of the muonic helium atom // Physical Review A. – 2008. – V. 78. – P. 032513–032524.

УДК 530.12

НОВЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ИНФЛЯЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ В КИРАЛЬНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Кубасов А.С.[1]

1. Киральные космологические модели. Действие и тензор энергии-импульса для самогравитирующей нелинейной сигма модели с потенциалом самодействия $W(\varphi)$ имеют вид [1]

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{R}{2k} + \frac{1}{2} h_{AB}(\varphi) \varphi^A_{,\mu} \varphi^B_{,\nu} g^{\mu\nu} - W(\varphi) \right), \tag{1}$$

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{A,\mu} \varphi^A_{,\nu} - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \varphi^A_{,\alpha} \varphi^B_{,\beta} g^{\alpha\beta} h_{AB} - W(\varphi^C) \right), \tag{2}$$

где $g_{\mu\nu}(x)$ — метрика пространства-времени, и h_{22} — метрика фонового поля $\varphi = (\varphi^1, ..., \varphi^n)$, $\partial_\mu \varphi^A = \varphi^A_{,\mu}$.

Вариация действия (1) по φ^C дает уравнение киральных полей

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \varphi^{,\mu}_A) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{BC}}{\partial \varphi^A} \varphi^C_{,\mu} \varphi^B_{,\nu} g^{\mu\nu} + W_{,A} = 0, \tag{3}$$

где $W_{,A} = \dfrac{\partial W}{\partial \varphi^A}$. Метрики кирального пространства и пространства-времени Фридмана—Робертсона—Уокера запишем в форме:

$$ds^2_{ts} = d\phi^2 + h_{22}(\phi, \psi) d\psi^2, \tag{4}$$

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \tag{5}$$

2. Метод решения. Полевые уравнения двухкомпонентной киральной космологической модели (3) в метрике (4) и уравнения Эйнштейна принимают вид

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \phi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial W}{\partial \phi} = 0, \tag{6}$$

$$3H(h_{22}\dot{\psi}) + \partial_t (h_{22}\dot{\psi}) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \psi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial W}{\partial \psi} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) + \frac{1}{2} h_{22}(t) \dot{\psi}^2(t) = \frac{1}{k} \left[\frac{K}{a^2} - \dot{H} \right], \tag{8}$$

$$W(t) = \frac{3}{k} \left(H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} + \frac{2}{3} \frac{K}{a^2} \right). \tag{9}$$

Рассмотрим три физически значимых случая: 1) пространственно-плоская Вселенная ($K = 0$), 2) открытая Вселенная ($K = -1$), 3) замкнутая Вселенная ($K = 1$).

[1] Кубасов Александр Сергеевич (as-kubasov@rambler.ru), Ульяновский государственный университет, 432001, Россия, г. Ульяновск, ул. Л.Толстого, 42.

Суть метода заключается в специальном разбиении ТЭИ киральных полей. Используя разбиения в случае 1) в виде

$$h_{22}(\phi,\psi) \equiv h_{22}(\phi), W(\phi,\psi) = W_1(\phi) + W_2(\psi) \tag{10}$$

и в случае 2) и 3) — в виде

$$h_{22}(\phi,\psi) \equiv h_{22}(\phi), W(\phi,\psi) = W_1(\phi) + e^{f(\phi)}W_2(\psi) \tag{11}$$

получены классы новых точных решений.

Предложенный подход позволяет по-новому описать открытую и замкнутую Вселенную. Проблема евклидовости Вселенной обсуждается во многих работах [2]. По имеющимся данным современная наблюдаемая Вселенная близка к пространственно-плоской. Предложенный метод решения для открытой или замкнутой Вселенной позволяет разделить компоненты киральных полей на плоскую часть и часть, отвечающую за "скривление" пространства-времени до открытого или замкнутого. Таким образом, генерация решений зависит от выбора масштабного фактора, или, при небольшой модификации метода, от потенциала W. Отметим, что структура уравнений модели такова, что если на начальном этапе Вселенная начала свою эволюцию, как открытая или замкнутая, то этому этапу соответствовало поле ψ. При дальнейшем расширении, когда доминирование компоненты $\frac{3}{k}\left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H}\right)$ начало преобладать над $\frac{2}{k}\frac{K}{a^2}$, основную роль начало играть поле ϕ.

Выводы. При исследовании киральной двухкомпонентной космологической модели, порождающей степенную и экспоненциальную инфляцию в плоской, открытой и замкнутой Вселенной, были получены решения, которые будут представлены в статье. Особый интерес представляет структура решений, отвечающая открытой и замкнутой Вселенной. В этом случае поля распределяются таким образом, что поле ϕ отвечает пространственно плоской вселенной, а поле ψ — за "скривление" плоского пространства времени до открытого или замкнутого. В свете проблемы евклидовости наблюдаемой вселенной [2], это приводит к мысли, что, если в начальный период своей эволюции Вселенная была замкнутой или открытой и ей отвечало поле ψ, то при последующем расширении начало преобладать поле ϕ.

Автор признателен профессору Червону С.В. за постановку задачи и интерес к работе.

Литература

[1] Chervon S.V. Chiral non-linear sigma models and cosmological inflation // Gravitation and Cosmology. – 1995. – V. 1. – No. 2. – P. 91–96.

[2] Линде А.Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космологияю. – М.: Наука, 1990. – 275 с.

УДК 517.957

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ТИПА "РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ" В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ ТЬЮРИНГА

Курушина С.Е.[1]

Изучено поведение двухкомпонентной системы типа "реакция–диффузия", учитывающей влияние внешней флуктуирующей среды:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \tau} = P(x_1, x_2, \chi_0, \chi_{10} ... \chi_n) + f_1(\mathbf{r}, \tau) P_2(x_1, x_2, \chi_{k+1}, ... \chi_n) + \nabla^2 x_1,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \tau} = Q(x_1, x_2, \eta_0, \eta_{10} ... \eta_n) + f_2(\mathbf{r}, \tau) Q_2(x_1, x_2, \eta_{k+1}, ... \eta_n) + D\nabla^2 x_2,$$

в окрестности точки бифуркации Тьюринга. Здесь x_1, x_2 — динамические переменные, $\chi_0 \dots \chi_n$, $\eta_0 \dots \eta_n$ — параметры задачи, D, — отношение коэффициентов диффузии компонент, P, Q, P_2 и Q_2 — нелинейные функции, описывающие взаимодействие подсистем. Флуктуации окружающей среды моделируются как стационарное однородное изотропное гауссово поле с нулевым средним и функцией корреляции: $\langle f_i(\mathbf{r}\,', t') f_j(\mathbf{r}\,'', \tau) \rangle = \Phi_i(|\mathbf{r}\,' - \mathbf{r}\,''|) \delta(t' - \tau)\, \delta_{ij}$.

Получены обобщенные уравнения Гинзбурга–Ландау (УГЛ) для этой системы в случае возникновения неустойчивости типа мягкой моды. В результате проведения процедуры усреднения по ансамблю реализаций УГЛ получены уравнения для моментов незатухающих мод (параметров порядка) исследуемой системы и дисперсионное уравнение для инкрементов усредненных параметров порядка.

Показано, что наличие внешнего шума приводит к изменению инкремента нарастания каждой моды и изменению области неустойчивости. Это обуславливает зависимость скорости образования пространственных диссипативных структур от параметров случайного поля и смещение точки бифуркации. Кроме того, мультипликативные флуктуации параметров приводят к смещению статистически стационарного состояния каждой моды и изменению условий резонансного взаимодействия неустойчивых мод.

Численное моделирование эволюции пространственных диссипативных структур, возникающих в стохастических системах Гирера—Майнхардта и Шеффера, качественно подтверждает выводы, сделанные выше [1, 2].

Литература

[1] Курушина С.Е., Иванов А.А.Диссипативные структуры в системе реакция-диффузия в поле мультипликативных флуктуаций // Известия ВУЗов. – Прикладная нелинейная динамика. – 2010. – №3. С. 85–103.

[2] Курушина С.Е., Завершинский И.П., Максимов В.В., Желнов Ю.В. Образование диссипативных структур в двухкомпонентных системах типа реакция–диффузия во флуктуирующей среде // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – №1(20). – С. 143–153.

[1] Курушина Светлана Евгеньевна (kurushina72@mail.ru), Самарский государственный аэрокосмический университет, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34.

УДК 517.957

УСТОЙЧИВОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ШЕФФЕРА ВБЛИЗИ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ ТЬЮРИНГА

Курушина С.Е., Максимов В.В.[1]

В работе представлены результаты исследования влияния мультипликативных флуктуаций параметров на устойчивость в окрестности точки бифуркации стохастической системы фитопланктон—зоопланктон—рыба Шеффера:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial \tau} &= x_1(1-x_1) - \frac{a_0}{r_0}(1+f_2(\mathbf{r},\tau))\frac{x_1x_2}{(1+bx_1)} + \nabla^2 x_1;\\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} &= \frac{a_0}{r_0}(1+f_2(\mathbf{r},\tau))\frac{x_1x_2}{(1+bx_1)} - \\ &\quad -\frac{m_0}{r_0}(1+f_1(\mathbf{r},\tau))x_2 - \frac{g^2x_2^2}{r_0(1+h^2x_2^2)}f + \frac{d_2}{d_1}\nabla^2 x_2.\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x_1 — плотность биомассы популяции фитопланктона, x_2 — плотность биомассы популяции зоопланктона, параметры r_0, a_0, b, m_0, g, h, f, d_1 и d_2 подробно описаны в [1, 2]. Флуктуации окружающей среды моделируются как стационарное однородное изотропное гауссово поле с нулевым средним и функцией корреляции: $\langle f_i(\mathbf{r}\,',t')f_j(\mathbf{r}\,'',\tau)\rangle = \Phi_i(|\mathbf{r}\,' - \mathbf{r}\,''|)\delta(t'-\tau)\,\delta_{ij}$.

Получены уравнения для моментов параметров порядка этой системы, а также дисперсионное уравнение для неустойчивых мод.

Исследованы зависимости инкрементов неустойчивых мод от волнового числа стохастической системы (1), рассчитанные на основании дисперсионного уравнения.

Показано, что в закритической области при увеличении интенсивности флуктуаций θ_1 поля $f_1(\mathbf{r},\tau)$, входящего в линейную компоненту системы (1), область неустойчивых мод увеличивается. Кроме того, инкременты при наличии шума больше инкрементов при его отсутствии. Таким образом, при наличии мультипликативного шума амплитуды неустойчивых мод нарастают значительно быстрее, чем в его отсутствии, что ускоряет процесс разрушения однородного состояния и образования диссипативных структур. Важно отметить, что увеличение интенсивности θ_2 поля $f_2(\mathbf{r},\tau)$, входящего в нелинейную компоненту системы (1), влияет на процесс образования диссипативных структур значительно сильнее.

Исследованы зависимости действительных частей собственных значений неустойчивых мод от волнового числа в докритической области. Показано, что при наличии мультипликативных флуктуаций возникает область неустойчивости — шум индуцирует параметрическую неустойчивость системы (1) в докритической области.

Аналитическое исследование поведения системы (1) в окрестности точки бифуркации Тьюринга в поле внешних флуктуаций показало наличие следующих особенностей процесса образования пространственных диссипативных структур.

Расширяется область неустойчивости систем. Внешние шумы приводят к увеличению инкрементов неустойчивых мод, в результате чего амплитуды неустойчивых мод нарастают быстрее, чем в отсутствии шума, что ускоряет процесс разрушения однородного состояния и образования диссипативных структур. Происходит сдвиг

[1]Курушина Светлана Евгеньевна (kurushina72@mail.ru), Максимов Валерий Владимирович (maximov52@dmail.ru), Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34.

стационарного состояния каждой моды, изменяются условия резонансного взаимодействия мод, возникает параметрическое возбуждение системы.

Численное моделирование эволюции пространственных диссипативных структур, возникающих в системе (1), качественно подтверждает выводы, сделанные выше [3].

Литература

[1] Scheffer M. Fish and nutrients interplay determines algal biomass: a minimal model // OIKOS. – 1991. – No. 62. – P. 271–282.

[2] Malchow H. Motional instabilities in prey-predator systems // J. Theor. Biol. – 2000. – V. 204. – P. 639–647.

[3] Курушина С.Е., Завершинский И.П., Максимов В.В., Желнов Ю.В. Образование диссипативных структур в двухкомпонентных системах типа реакция–диффузия во флуктуирующей среде // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – №1(20). – С. 143–153.

УДК 530.1

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Курьянович Э.А.[1]

В докладе предпринята попытка построения теории релятивистского броуновского движения, следуя предложению И.В. Воловича [1]. Используя релятивистское действие [2], была выписана формула плотности вероятности перехода броуновской частицы из одной заданной точки пространства в другую заданную точку в заданный промежуток времени [3–5]. Была успешно найдена нормировочная константа, придающая смысл этой формуле, т.е. такая, что плотность вероятности становится равным конечному, не равному нулю числу. При вычислении этой константы была использована геометрическая интерпретация N-мерного пространства траекторий и метод математической индукции. Далее была выдвинута гипотеза об асимптотике этой константы при условии стремления размерности пространства траекторий к бесконечности. Подтвердить эту гипотезу пока не удалось, также не удалось подсчитать саму плотность вероятности.

Литература

[1] Волович И.В. О релятивистском броуновском движении. – 2008. – Препринт.
[2] Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Теоретическая физика (Том 2. Теория поля). – М.: Наука, 1988.
[3] Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. – М.: Мир, 1965.
[4] Глимм Дж. Джаффе А. Математические методы квантовой физики. – М.: Мир, 1984.
[5] Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. – М.: Мир, 1968.

[1] Курьянович Эдуард Анатольевич (kurianovich@mail.ru), Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ ПРИНЦИПИАЛЬНО РЕАЛИЗУЕМОГО УЧАСТКА "ПАДАЮЩЕЙ" ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДЛЯ МАТЕРИАЛА ТИПА ТРЕСКА

Лаврова Т.Б.[1]

Для континуальной механики разрушения одним из основополагающих является понятие разупрочнения материала. Упругопластические определяющие соотношения с разупрочнением в принципе позволяют описывать начальные стадии разрушения материалов в рамках подхода и с помощью методов механики сплошной среды. При изучении разупрочнения необходимо использовать варианты теории течения, в которых поверхность текучести рассматривается в пространстве деформаций. Для материалов типа Треска эта поверхность обладает тем свойством, что нормаль в ее гладкой точке представляет собой симметризованную диаду. Ребра поверхности текучести типа Треска характеризуются тем, что нормали к граням, при пересечении которых образуются эти ребра, являются соосными симметризованными диадами. В данной работе показано, что условие непрерывности пластического отклика на деформацию приводит к тому, что инкрементальное определяющее соотношение для параметра истории на ребре не может быть выбрано независимо, это условие полностью определяется вышеупомянутым условием непрерывности пластического отклика при переходе с грани на ребро. Построены инкрементальные определяющие соотношения как в гладких точках поверхности текучести типа Треска, так и в точках, принадлежащих ребрам этой поверхности. То есть получены модули пластического отклика материала для всех режимов деформирования материала (будем считать, что тензор упругих модулей при разгрузке соответствует закону Гука для изотропного материала). Считается, что материал упрочняющийся, если все его модули для пластического отклика положительны и разупрочняющийся, если среди этих модулей имеется хотя бы один отрицательный. Если под модулями, знак которых характеризует свойства упрочнения или разупрочнения, понимать "истинные" модули в смысле Я. Рыхлевского, т.е. собственные числа тензора модулей как линейного оператора, отображающего пространство симметричных тензоров второго ранга(т.е. пространство тензоров малых деформаций) в себя(т.е. в пространство приращений тензора напряжений Коши), то их положительность (упрочнение) эквивалентна положительной определенности соответствующей квадратичной формы, задающей приращение работы внутренних сил, а наличие среди них отрицательных (разупрочнения) эквивалентно наличию отрицательных значений этой квадратичной формы, что соответствует определениям упрочнения и разупрочнения по Друккеру.

Таким образом, в процессе деформирования разупрочнение начинает реализовываться в тот момент, когда наименьший "истинный" модуль пластического отклика становится отрицательным. Состояния разупрочнения материала являются достижимыми в тех пределах, в которых условие разупрочнения совместимо с неравенством Адамара (или при строгом неравенстве с неравенством сильной эллиптичности) для модулей материала в режиме активного пластического нагружения.

[1]Лаврова Татьяна Борисовна (lavr@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

При нарушении этого неравенства любая конфигурация тела с любыми граничными условиями становится неустойчивой. Это утверждение является следствием теоремы Адамара и ее обобщения на упругопластические материалы. В данной работе показано, что разупрочнение в гладкой точке поверхности текучести для упругопластических материалов типа Треска не достижимо. В отличие от случая активного пластического нагружения в гладкой точке поверхности текучести типа Треска, где разупрочнение не возможно, случай полного пластического нагружения на ребре характеризуется тем, что на ребре имеется конечная достижимая степень разупрочнения. В работах Е.И. Рыжака доказано, что не только существуют испытательные устройства, в которых возможно устойчивое однородное деформирование образца вплоть до нарушения неравенства сильной эллиптичности, но и в некоторых из них (кроме измерения деформаций) возможно прямое измерение усилий. С помощью всех перечисленных свойств, характеризующих как материал, так и подходящие программы деформирования, были построены совместимые с неравенством Адамара "падающие" участки диаграмм деформирования на ребре условия текучести для одного класса материалов типа Треска.

УДК 519.63

ПРОЕКЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАМЕ

Лежнев В.Г., Марковский А.Н.[1]

В ограниченной области $Q \subset R^2$ с достаточно гладкой границей $S = \partial Q$ рассматривается краевая задача

$$(\lambda + \mu)\nabla \div \bar{u}(x) + \mu\Delta\bar{u}(x) = \bar{f}(x), \quad x \in Q, \tag{1}$$

$$\bar{u}(x)|_S = \bar{b}(x), \tag{2}$$

предполагается, что компоненты вектор-функции правой части $\bar{f}(x) = \{f_1(x), f_2(x)\}$ суммируемы с квадратом $\bar{f}(x) \in \bar{L}_2(Q)$, граничное векторное поле $\bar{b}(x)$ непрерывно, параметры λ, μ действительны.

1. Справедливо разложение в прямую сумму [1]

$$\bar{L}_2(Q) = \bar{P}(Q) \oplus \bar{V}(Q),$$

где $\bar{P}(Q)$ — замыкание в норме $\bar{L}_2(Q)$ множества непрерывных потенциальных в Q векторных полей, ортогональных границе S; $\bar{V}(Q)$ — замыкание гладких соленоидальных полей.

Разложим искомое векторное поле $\bar{u}(x)$ и поле правой части $\bar{f}(x)$ на ортогональные слагаемые

$$\bar{u}(x) = \bar{p}(x) + \bar{s}(x), \quad \bar{f}(x) = \bar{f}_p(x) + \bar{f}_s(x).$$

Известны алгоритмы разложения вектор-функций из $\bar{L}_2(Q)$ на ортогональные слагаемые [2].

Подставляя в уравнение (1) и используя равенства $\nabla \div \nabla\varphi(x) = \nabla\Delta\varphi(x) = \Delta\bar{p}(x)$ для потенциальной функции $\varphi(x)$ поля $\bar{p}(x)$, получим

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\bar{p}(x) + \mu\Delta\bar{s}(x) = \bar{f}_p(x) + \bar{f}_s(x). \tag{3}$$

Поскольку соленоидальное и потенциальное подпространства могут пересекаться только по гармоническому векторному полю, то прибавим и отнимем $(\lambda+2\mu)\nabla q(x)$, где $q(x)$ — соответствующая задаче гармоническая функция, и уранение (3) расщепляется на два

$$(\lambda + 2\mu)(\Delta\bar{p}(x) - \nabla q(x)) = \bar{f}_p(x), \tag{4}$$

$$\mu\Delta\bar{s}(x) + (\lambda + 2\mu)\nabla q(x) = \bar{f}_s(x). \tag{5}$$

2. Приводя уравнение (4) к виду $\nabla((\lambda + 2\mu)(\Delta\varphi(x) - q(x)) - \varphi_f(x)) = 0$, где $\nabla\varphi_f(x) = \bar{f}_p(x)$, и применяя к нему оператор Лапласа, для потенциальной функции $\varphi(x)$ искомого поля $\bar{p}(x)$ получаем неоднородное бигармоническое уравнение $(\lambda + 2\mu)\Delta^2\varphi(x) = g(x)$, $g(x) = \Delta\varphi_f(x)$.

[1]Лежнев Виктор Григорьевич (lzhnv@kubsu.ru), Марковский Алексей Николаевич (mark@kubsu.ru), Кубанский государственный университет, 350040, Россия, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149.

Обозначим через $\psi(x)$ и $\psi_f(x)$ функции тока соответствующих соленоидальных полей $\bar{s}(x) = \nabla_c\psi(x)$ и $\bar{f}_s(x) = \nabla_c\psi_f(x)$; пусть $\eta(x)$ — сопряженная к $q(x)$ гармоническая функция, $\nabla q(x) = \nabla_c\eta(x)$. Тогда приводя уравнение (5) к виду $\nabla_c(\mu\Delta\psi(x)+(\lambda+2\mu)\eta(x) - \psi_f(x)) = 0$, применяя к нему оператор Лапласа для функции тока $\psi(x)$ искомого поля $\bar{s}(x)$, получаем неоднородное бигармоническое уравнение $\mu\Delta^2\psi(x) = h(x)$, $h(x) = \Delta\psi_f(x)$.

3. Рассмотрим краевую задачу (1)–(2). Разложим граничное векторное поле $\bar{b}(x)$ на нормальную $\bar{m}(x)$ и касательную $\bar{l}(x)$ составляющие. Будем обозначать через $\bar{n}$ и $\bar{t}$ единичные векторы — внешний нормальный к S и касательный в направлении положительного обхода.

Для определения $\varphi(x)$ и $\bar{p}(x) = \nabla\varphi(x)$ рассмотрим следующую задачу бигармонического уравнения:

$$\Delta^2\varphi(x) = g(x),\ x \in Q, \tag{6}$$

$$\varphi(x)|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}\right|_S = (\bar{n}, \bar{m}) = (\bar{n}, \bar{b}(x)). \tag{7}$$

Полученное векторное поле $\bar{p}(x) = \nabla\varphi(x)$ удовлетворяет граничному условию $\bar{p}(x) = \bar{m}(x)$, $x \in S$. Действительно, $(\bar{m} - \nabla\varphi)\perp\bar{n}$ по второму условию в (7). Из первого следует ортогональность $\nabla\varphi\perp S$ и $(\bar{m} - \nabla\varphi)\perp\bar{t}$. Следовательно, векторное поле $\bar{m} - \nabla\varphi$ на S равно нулю, и граничное условие выполняется.

Соленоидальное поле $\bar{s}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\bar{s}(x) = \frac{1}{\mu}\nabla_c(\psi_f(x) - (\lambda + 2\mu)\eta(x)),\ x \in Q, \tag{8}$$

должно также выполняться граничное условие $\bar{s}(x) = \bar{l}(x)$ при $x \in S$.

Векторное поле будем формировать из двух соленоидальных слагаемых $\bar{s}(x) = \bar{s}_0(x) + \bar{s}_1(x)$ с граничными условиями $\bar{s}_0(x) = 0$, $\bar{s}_1(x) = \bar{l}(x)$ при $x \in S$.

Пусть $\psi(x)$ — функция тока для $\bar{s}_1(x)$, $\bar{s}_1(x) = \nabla_c\psi(x)$. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta^2\psi(x) = h(x),\ x \in Q, \tag{9}$$

$$\psi(x)|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi(x)}{\partial n}\right|_S = (\bar{l}, \bar{t}). \tag{10}$$

Из (10) следует, что выполняются граничные условия для $\bar{s}_1(x)$. Действительно, второе условие (10) переписывается в виде $(\bar{l}, \bar{t}) = (\nabla\psi, \bar{n}) = (\nabla_c\psi, \bar{t})$, то есть $(\bar{l} - \nabla_c\psi)\perp\bar{t}$. Из первого имеем $\nabla\psi\perp S$, или $\nabla_c\psi\perp\bar{n}$, $(\bar{l} - \nabla_c\psi)\perp\bar{n}$. Следовательно, векторное поле $\bar{l} - \nabla_c\psi$ на S равно нулю, граничное условие для $\bar{s}_1(x)$ выполняется.

Обозначим теперь $\Delta\psi = \xi$. Тогда $\Delta\bar{s}_1 = \Delta\nabla_c\psi = \nabla_c\xi$ и для $\bar{s}_0(x)$ из (8) получаем задачу уравнения Пуассона

$$\Delta\bar{s}_0(x) = \frac{1}{\mu}\nabla_c(\psi_f(x) - (\lambda + 2\mu)\eta(x) - \mu\xi(x)),\ x \in Q,$$

с однородным граничным условием. Можно показать что решение этой задачи $\bar{s}_0(x)$ соленоидальное векторное поле.

Алгоритм решения задачи (1)–(2) сводится к решению двух краевых задач для неоднородного бигармонического уравнения и последующего решения двух краевых задач для уравнения Пуассона. Для численного решения этих задач удобно использовать проекционный метод базисных потенциалов [3].

Работа выполнена в рамках проекта 2.1.1/3828 целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)" Министерства образования и науки Российской Федерации.

Литература

[1] Быховский Э.Б., Смирнов Н.В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых в заданной области, и операторах векторного анализа // Тр. МИАН СССР. – 1960. – Т. 59. – С. 5—36.

[2] Лежнев В.Г., Данилов Е.А. Задачи плоской гидродинамики. – Краснодар, 2000.

[3] Лежнев В.Г., Марковский А.Н. Метод базисных потенциалов для неоднородного бигармонического уравнения // Вестник Самарского госуниверситета. – Естественно научная серия. – 2008. – №8/1(67). – С. 127—139.

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ

Леоненко Д.В.[1]

Все более широкое распространение в промышленности находят слоистые элементы конструкций. Несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, служащие для образования монолитной конструкции, обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями. В работе рассматриваются собственные поперечные колебания упругого трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем с учетом рассеяния энергии в слоях.

Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Бернулли, в жестком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта слоев используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

Уравнения движения трехслойного стержня следуют из вариационного принципа Лагранжа с учетом работы сил инерции. В результате решения системы получены выражения для определения собственных чисел и собственных частот колебаний при шарнирном опирании торцов стержня.

Проведен численный анализ полученных решений для оснований различной жесткости. Исследованы зависимости частот собственных колебаний от жесткости основания и геометрических размеров стержня.

[1]Леоненко Денис Владимирович (leoden@tut.by), Белорусский государственный университет транспорта, 246653, Республика Беларусь, г. Гомель, ул. Кирова, 34.

УДК 519.213, 517.98

О ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Лыков К.В.[1]

Мы рассматриваем пространства измеримых функций на полуинтервале $(0,1]$ с мерой Лебега μ. Перестановкой x^* измеримой функции $x = x(t)$ называем невозрастающую непрерывную слева неотрицательную функцию на $(0,1]$, равноизмеримую с $|x|$, т.е. такую, что

$$\mu\{t \in (0,1] : x^*(t) > \tau\} = \mu\{t \in (0,1] : |x(t)| > \tau\} \quad \text{для всех } \tau > 0.$$

Перестановка всегда существует и единственна [1].

Напомним, что банахово пространство E измеримых функций на полуинтервале $(0,1]$ называется симметричным, если из условий $x \in E$ и $y^*(t) \leqslant x^*(t)$ для всех $t \in (0,1]$ следует $y \in E$ и $\|y\|_E \leqslant \|x\|_E$. Фундаментальной функцией φ_E симметричного пространства E называется функция

$$\varphi_E(a) := \|\chi_{(0,a]}\|_E,$$

где через $\chi_{(0,a]} = \chi_{(0,a]}(t)$ обозначена характеристическая функция (индикатор) множества $(0,a]$, $a \in (0,1]$. Подробнее с теорией симметричных пространств можно познакомиться по книге [1].

Будем говорить, что в симметричном пространстве E выполнено свойство единственности проблемы моментов и писать $E \in \mathrm{UMP}$ (UMP — the Uniqueness in the Moment Problem), если для каждого $x \in E$ и произвольной измеримой функции y из условия

$$\int_0^1 |x(t)|^n \, dt = \int_0^1 |y(t)|^n \, dt \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N},$$

следует $y^*(t) = x^*(t)$ для всех $t \in (0,1]$. Если в E свойство единственности проблемы моментов не выполняется, будем писать $E \notin \mathrm{UMP}$.

Рассмотрим следующее условие для фундаментальной функции φ_E пространства E:

$$\int_0^1 \sqrt{\varphi_E(t)}\,\frac{dt}{t} = +\infty. \tag{$*$}$$

Теорема 1. *Пусть фундаментальная функция φ_E симметричного пространства E удовлетворяет условию*

$$\varphi_E(t) \leqslant C\varphi_E(t^2) \quad \textit{для всех } t \in (0,1]$$

с некоторой константой $C > 0$ и условию $(*)$. Тогда $E \in \mathrm{UMP}$.

[1]Лыков Константин Владимирович (alkv@list.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Пусть $\varphi = \varphi(t)$ — возрастающая вогнутая функция на $(0,1]$ такая, что $\lim_{t\to 0+}\varphi(t) = 0$. Пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ состоит из всех измеримых функций $x = x(t)$ на $(0,1]$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{M(\varphi)} := \sup_{0<t\leqslant 1} \frac{\varphi(t)}{t} \int\limits_0^t x^*(s)\,ds < +\infty.$$

Фундаментальная функция пространства Марцинкевича $M(\varphi)$ совпадает с определяющей это пространство функцией φ. Кроме того, пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ — самое широкое из всех симметричных пространств с фундаментальной функцией φ [1].

Теорема 2. *Пусть $x_0 = x_0(t) := 1/\varphi(t) \in M(\varphi)$ и фундаментальная функция пространства $M(\varphi)$ не удовлетворяет условию $(*)$, т.е.*

$$\int\limits_0^1 \sqrt{\varphi(t)}\,\frac{dt}{t} < +\infty.$$

Тогда $M(\varphi) \not\subset$ UMP.

Пример. Пространство Орлича $\mathrm{Exp}L^\alpha$, $\alpha > 0$, состоит из функций $x = x(t)$ таких, что

$$\int\limits_0^1 \left(e^{|x(t)|^\alpha/\lambda} - 1\right) dt \leqslant 1$$

для некоторого $\lambda = \lambda(x) > 0$. Норма в $\mathrm{Exp}L^\alpha$ эквивалентна функционалу

$$\|x\| = \sup_{0<t\leqslant 1} \log^{-1/\alpha}(e/t)x^*(t).$$

Кроме того, пространство Орлича $\mathrm{Exp}L^\alpha$ совпадает с пространством Марцинкевича $M(\varphi_\alpha)$, где $\varphi_\alpha(t) = \log^{-1/\alpha}(e/t)$ при достаточно малых значениях t. Из сформулированных теорем получаем, что $\mathrm{Exp}L^\alpha \in$ UMP тогда и только тогда, когда $\alpha \geqslant 1/2$.

В доказательстве теоремы 1 используется условие Карлемана (см., например, [2, 3]) и экстраполяционные соотношения, полученные в [4, 5]. Доказательство теоремы 2 опирается на условие Крейна [2, 3].

Работа частично поддержана грантом РФФИ 10-01-00077-а и тематическим планом г/б НИР СамГУ 1.7.09.

Литература

[1] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[2] Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов. – М.: ГИ ФМЛ, 1961. – 312 с.

[3] Стоянов Й. Контрпримеры в теории вероятностей. – М.: Факториал, 1999. – 288 с.

[4] Асташкин С.В., Лыков К.В. Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, близких к L_∞ // Сибирский математический журнал. – 2006. – V. 47. – №5. – С. 974–992.

[5] Асташкин С.В., Лыков К.В. Сильно экстраполяционные пространства и интерполяция // Сибирский математический журнал. – 2009. – V. 50. – №2. – С. 250–266.

УДК 517.977.8

К ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Мамадалиев Н., Тухтасинов М.[1]

В данной работе получены достаточные условия для завершения преследования с запаздыванием по времени. Настоящая работа примыкает к исследованиям [1–3].

В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается квазилинейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением с запаздывающим аргументом

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - f(u,v), \;\; t \geq 0, \tag{1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $n \geq 1$; A, B — постоянные матрицы, размерности которых $(n \times n)$; h — фиксированное действительное число; $u \in P \subset \mathbb{R}^p$ — управляющий параметр преследования, $v \in Q \subset \mathbb{R}^q$ — управляющий параметр убегания; P, Q — компакты; $f : P \times Q \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция. Терминальное множество M имеет вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 — подпространство $\mathbb{R}^n$, $M_1 \subset L$ — ортогональное дополнение M_0 в $\mathbb{R}^n$; π — матрица оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L; под операцией $\underline{*}$ понимается операция геометрической разности [1]. В качестве начального множества $N(R(\cdot))$ берется множество измеримых однозначных ветвей многозначного отображения $R(s)$, $-h \leq s \leq 0 :\; N(R(\cdot)) = \{z_0(s) :,\; z_0(s) \in R(s), s \in [-h, 0]\}$. Через $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(R(\cdot)))$, обозначим множество (пучок) всех траекторий уравнения (1), исходящих в момент $t = 0$ из точек начального множества $N(R(\cdot))$, при допустимых управлениях $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ преследующего и убегающего игроков соответственно.

При изучении игры (1) мы отождествляем себя с преследователем. В этом случае наша цель заключается в приведении пучка траекторий $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(R(\cdot)))$ на терминальное множество M. В случае, когда задача управления пучками траекторий разрешима, то будем говорить, что в игре (1) пучок траекторий можно перевести из начального множества $N(R(\cdot))$ на множество M за время T. Заметим, что когда начальное множество $N(R(\cdot))$ одноточечно, такие задачи изучались многими авторами [1, 2].

Пусть $\tau \geq 0$, $r \in [0, \tau]$. Через $K(r)$, $-\infty < r \leq \tau$, — обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами: а) $K(r) = \tilde{0}$, $r < 0$, $\tilde{0}$ — нулевая матрица порядка n; б) $K(r) = E$, E — единичная матрица порядка n; в) элементы матрицы $K(r)$ принадлежат классу $C[0, \tau]$; г) $K(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{K}(r) = AK(r) + BK(r-h)$, $0 < r \leq \tau$.

Рассмотрим следующее многозначное отображение

$$F(r) = \bigcap_{v \in Q} F(r, v), \;\; r \geq 0,$$

где $F(r,v) = \pi K(r) f(P,v)$ и $\pi K(r) f(P,v) = \Big\{\pi K(r) f(u,v) : u \in P\Big\}$. Пусть ω — произвольное разбиение отрезка $[0,\, \tau] :\;\; \omega = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = \tau\}$, $v_i(r)$, $t_{i-1} \leq r \leq$

[1]Мамадалиев Нуманжон (M_numana59@mail.ru), Тухтасинов Муминжан (mumin51@mail.ru), Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 1.

$t_i,\ i = 1, 2, ..., k,$ — произвольная измеримая функция со значениями из множества Q. $\Omega \subset M_1 \underline{*} H[\tau, N(R(\cdot))]$, где

$$H[\tau, N(R(\cdot))] = \pi K(\tau)R(0) + \int\limits_{-h}^{0} \pi K(\tau - r - h)BR(r)dr.$$

Положим $A_0 = \Omega$, и

$$A_i = \bigcap_{v_i(\cdot)} \Big[A_{i-1} + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \pi K(r) f(P, v_i(r))dr\Big],$$

$$i = 1, 2, ..., k, A_k(\Omega, \omega) = A_k,\ \ W(\Omega, \tau) = \bigcap_{\omega} A_k(\Omega, \omega),$$

где пересечение берется по всевожможным разбиениям ω отрезка $[0,\ \tau]$. Рассмотрим множество

$$W_2\Big[M_1 \underline{*} H[\tau, N(R(\cdot))],\ \tau\Big] = \bigcup_{\Omega} W(\Omega,\ \tau),\quad \tau > 0.$$

Теорема 1. Предположим, что при некотором $\tau = \tau_1$ имеет место включение

$$0 \in W_2\Big[M_1 \underline{*} H(\tau, N(R(\cdot))), \tau\Big].$$

Тогда в игре (1) пучок траекторий можно перевести из множества $N(R(\cdot))$ на множество M за время $T = \tau_1$. При этом для конструирования $u[t]$ используются значения $u(s),\ 0 \le s < t$, и $v(s),\ 0 \le s \le t + \varepsilon$, где ε — произвольное фиксированное положительное число.

Пусть по-прежнему $i = 1, 2, ..., k$, а (ср.[3])

$$M^{(i)} = \bigcup_{M_{i-1}(\cdot)} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \bigcap_{v \in Q} \Big[M_{i-1}(r) + \pi K(r) f(P, v))\Big] dr,$$

где $M_0(r),\ t_0 \le r \le t_1,$ — произвольная измеримая замкнутозначная многозначная функция,

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} M_0(r)dr \subset M^{(0)}, \qquad M^{(0)} = M_1 \underline{*} H[\tau, N(R(\cdot))],$$

$M_{i-1}(r),\ t_{i-1} \le r \le t_i,\ i > 1,$ — произвольная измеримая замкнутозначная многозначная функция,

$$\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} M_{i-1}(r)dr \subset M^{(i-1)}.$$

Положим

$$M^{(k)}(\omega) = M^{(k)},\quad W_3\Big[M_1 \underline{*} H[\tau, N(R(\cdot))],\ \tau\Big] = \bigcup_{\omega} M^{(k)}(\omega),\quad \tau > 0.$$

Теорема 2. Предположим, что при некотором $\tau = \tau_2$ имеет место включение

$$0 \in W_3\Big[M_1 \underline{*} H(\tau, N(R(\cdot))), \tau\Big].$$

Тогда в игре (1) пучок траекторий можно перевести из множества $N(R(\cdot))$ на множество M за время $T = \tau_2$. При этом для конструирования $u[t]$ используются t, значения $u(s),\ 0 \le s < t$, и $v(s),\ 0 \le s \le t$.

Литература

[1] Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. – М: Наука, 1988. – Т. 2. – 575 с.

[2] Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний // ДАН СССР. – 1971. – Т. 197. – №5. – С. 1018–1021.

[3] Сатимов Н.Ю. К методам решения игровых задачах управления пучками траекторий // ДАН СССР. – 1990. – Т. 314. – №1. – С. 132–134.

УДК 517.968+539.3

СМЕШАННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Манжиров А.В.[1]

Исследуются смешанные многомерные интегральные уравнения, содержащие интегральные операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования. Предложен конструктивный проекционный метод их решения, позволяющий получать результат в форме с выделенными в явном виде главными особенностями. Обсуждаются приложения теории в механике.

Рассмотрим смешанное интегральное уравнение с N дополнительными условиями [1–6]:

$$c(t)m(\mathbf{r})(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)q(\mathbf{r},t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{F}q(\mathbf{r},t)=f(\mathbf{r},t),\quad \mathbf{r}\in\Omega,\quad t\in[\tau_0,T], \tag{1}$$

$$\int_\Omega q(\boldsymbol{\xi},t)f_k(\boldsymbol{\xi})d\Omega_\xi=M_k(t),\quad i=1,\ldots,N,\quad f(\mathbf{r},t)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(t)f_i(\mathbf{r})-g(\mathbf{r},t), \tag{2}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор в $\mathbb{R}^n$, Ω — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, $c(t)$ — непрерывная по t на интервале $[\tau_0,T]$ заданная функция, $\alpha_k(t)$ $(k=1,\ldots,N)$ — непрерывные по t на интервале $[\tau_0,T]$ искомые функции, $q(\mathbf{r},t)$ — непрерывная в $L_2(\Omega)$ по t на $[\tau_0,T]$ искомая функция, $g(\mathbf{r},t)$ — непрерывная в $L_2(\Omega)$ по t на $[\tau_0,T]$ заданная функция [7], $m(\mathbf{r})$ — заданная функция из $L_2(\Omega)$, $\{f_1(\mathbf{r}),\ldots,f_N(\mathbf{r})\}$ — некоторая система N линейно независимых функций из $L_2(\Omega)$; $\mathbf{I}$ — тождественный оператор, $\mathbf{V}_k$ $(k=1,2)$ — интегральные операторы Вольтерра с непрерывными либо полярными ядрами $K_k(t,\tau)$, $\mathbf{F}$ — вполне непрерывный, самосопряженный и положительно определенный оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ с ядром $k_F(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi})\in L_2(\Omega\times\Omega)$.

Совершая в (1), (2) замену переменных по формулам

$$Q(\mathbf{r},t)=q(\mathbf{r},t)\sqrt{m(\mathbf{r})},\quad F(\mathbf{r},t)=f(\mathbf{r},t)/\sqrt{m(\mathbf{r})},\quad k(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi})=k_F(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi})/\sqrt{m(\mathbf{r})m(\boldsymbol{\xi})},$$

приходим к интегральному уравнению и дополнительным условиям

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)Q(\mathbf{r},t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{A}Q(\mathbf{r},t)=F(\mathbf{r},t), \tag{3}$$

$$\int_\Omega Q(\boldsymbol{\xi},t)\frac{f_k(\boldsymbol{\xi})}{\sqrt{m(\boldsymbol{\xi})}}d\Omega_\xi=M_k(t),\quad k=1,\ldots,N, \tag{4}$$

$$F(\mathbf{r},t)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(t)\frac{f_i(\mathbf{r})}{\sqrt{m(\mathbf{r})}}-\frac{g(\mathbf{r},t)}{\sqrt{m(\mathbf{r})}},\quad \mathbf{A}\phi(\mathbf{r},t)=\int_\Omega k(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi})\phi(\boldsymbol{\xi},t)d\Omega_\xi, \tag{5}$$

которые в дальнейшем и предстоит решать. Отметим, что если оператор $\mathbf{F}$ является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным оператором из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, то он называется оператором Гильберта—Шмидта [8].

Для построения решения смешанного интегрального уравнения (3) с дополнительными условиями (4) введем базис специального вида в $L_2(\Omega)$ с явной зависимостью от функции $1/\sqrt{m(\mathbf{r})}$. Для этого дополним систему N линейно независимых

[1]Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru), Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Россия, г. Москва, пр-т Вернадского, 101-1.

функций $\{f_1(\mathbf{r}), \ldots, f_N(\mathbf{r})\}$ так, чтобы получилась полная система в $L_2(\Omega)$, а затем воспользуемся процедурой ортогонализации, приведенной, например в [9].

Для функций $p_1(\mathbf{r}), \ldots, p_N(\mathbf{r})$ из полученного базиса в $L_2(\Omega)$ выполнены следующие соотношения:

$$p_k(\mathbf{r}) = \frac{P_k(\mathbf{r})}{\sqrt{m(\mathbf{r})}} = \sum_{i=1}^{k} a_{ki} \frac{f_i(\mathbf{r})}{\sqrt{m(\mathbf{r})}}, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{6}$$

Обращая систему алгебраических уравнений (6), получим

$$\frac{f_k(\mathbf{r})}{\sqrt{m(\mathbf{r})}} = \sum_{i=1}^{k} b_{ki} p_i(\mathbf{r}), \quad k = 1, \ldots, N, \tag{7}$$

матрица $[b_{ki}]$ которой является обратной по отношению к матрице $[a_{ki}]$ исходной системы.

Гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств: $L_2(\Omega) = L_2^\circ(\Omega) + L_2^*(\Omega)$. Здесь $L_2^\circ(\Omega)$ — евклидово пространство с базисом $\{p_1(\mathbf{r}), \ldots, p_N(\mathbf{r})\}$, а $L_2^*(\Omega)$ — гильбертово пространство с базисом $\{p_{N+1}(\mathbf{r}), p_{N+2}(\mathbf{r}), \ldots\}$. Заметим, что любые непрерывные функции t из $L_2(\Omega)$ могут быть представлены в виде суммы непрерывных функций t со значениями из $L_2^\circ(\Omega)$ и $L_2^*(\Omega)$. Для функции $Q(\mathbf{r}, t)$ это представление имеет вид

$$Q(\mathbf{r}, t) = Q^\circ(\mathbf{r}, t) + Q^*(\mathbf{r}, t), \quad Q^\circ(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} Q_i^\circ(t) p_i(\mathbf{r}). \tag{8}$$

Используя дополнительные условия (4) совместно с (7) и (8), получим систему уравнений, решение которой имеет вид:

$$Q_k^\circ(t) = \sum_{i=1}^{k} a_{ki} M_i(t), \quad k = 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Принимая во внимание (6) правая часть (5) уравнения (3) может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
&F(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t) \frac{f_i(\mathbf{r})}{\sqrt{m(\mathbf{r})}} - \frac{g(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{m(\mathbf{r})}} = F^\circ(\mathbf{r}, t) + F^*(\mathbf{r}, t), \\
&F^\circ(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=k}^{N} [\alpha_i(t) b_{ik} - G_k^\circ(t)] p_k(\mathbf{r}), \quad F^*(\mathbf{r}, t) = -G^*(\mathbf{r}, t), \\
&\frac{g(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{m(\mathbf{r})}} = G^\circ(\mathbf{r}, t) + G^*(\mathbf{r}, t), \quad G^\circ(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} G_i^\circ(t) p_i(\mathbf{r}), \\
&G_k^\circ(t) = \int_\Omega \frac{g(\boldsymbol{\xi}, t)}{\sqrt{m(\boldsymbol{\xi})}} p_k(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_\xi.
\end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что в представлении (8)–(10) для функции $Q(\mathbf{r}, t)$ из дополнительных условий (4) определена функция $Q^\circ(\mathbf{r}, t)$, а функцию $Q^*(\mathbf{r}, t)$ необходимо найти. У функции $F(\mathbf{r}, t)$ наоборот — требуется найти $F^\circ(\mathbf{r}, t)$, а $F^*(\mathbf{r}, t)$ задается известной функцией $g(\mathbf{r}, t)/\sqrt{m(\mathbf{r})}$. Отмеченные особенности позволяют классифицировать полученную задачу как особый случай обобщенной проекционной задачи, рассмотренной ниже.

Рассмотрим операторное уравнение

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)y(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{A}y(t)=f(t), \tag{11}$$

где $y(t)$ и $f(t)$ — непрерывные функции t из гильбертова пространства H, $c(t)>0$ — непрерывная скалярная функция t; $\mathbf{I}$ — единичный оператор; $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный самосопряженный положительный оператор из H в H; $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ — операторы Вольтерра по t, причем для любых непрерывных по t скалярных функций $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ операторы $(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)$, $(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)$, $\{\mathbf{I}-[\omega_1(t)\mathbf{V}_1+\omega_2(t)\mathbf{V}_2]\}$ и им обратные не выводят функции из класса непрерывных.

Гильбертово пространство H можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $H=H^\circ\oplus H^*$. Тогда непрерывные функции t со значениями из пространства H можно записать в виде алгебраической суммы функций из подпространства H° и подпространства H^*

$$f(t)=f^\circ(t)+f^*(t),\quad y(t)=y^\circ(t)+y^*(t), \tag{12}$$

где $f^\circ(t)$, $y^\circ(t)$ — непрерывные функции t из подпространства H°, а $f^*(t)$, $y^*(t)$ — непрерывные функции t из подпространства H^*.

Обобщенная проекционная задача состоит в следующем: *Пусть функции* $f(t)$ *и* $y(t)$ *удовлетворяют уравнению* (11) *и представимы в виде* (12). *Для заданных функций* $y^\circ(t)$ *и* $f^*(t)$ *необходимо найти неизвестные функции* $y^*(t)$ *и* $f^\circ(t)$.

Введем оператор $\mathbf{P}^\circ$ ортогонального проектирования из пространства H в подпространство H°. Оператор $\mathbf{P}^*=\mathbf{I}-\mathbf{P}^\circ$ проектирует пространство H на подпространство H^*. Также имеют место соотношения

$$\mathbf{P}^\circ f(t)=f^\circ(t),\quad \mathbf{P}^* f(t)=f^*(t),\qquad \mathbf{P}^\circ y(t)=y^\circ(t),\quad \mathbf{P}^* y(t)=y^*(t).$$

Подействуем оператором $\mathbf{P}^*$ на уравнение (11). В результате получим новое уравнение, которое после некоторых преобразований приобретает вид

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)y^*(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}^*\mathbf{A}y^*(t)=f^*(t)-(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}^\circ\mathbf{A}y^\circ(t). \tag{13}$$

Можно показать, что оператор $\mathbf{P}^*\mathbf{A}$ является компактным, самосопряженным и положительно определенным оператором из H^* в H^*.

Пусть φ_k — собственные функции оператора $\mathbf{P}^*\mathbf{A}$ соответствующие собственным значениям γ_k:

$$\mathbf{P}^*\mathbf{A}\varphi_k=\gamma_k\varphi_k. \tag{14}$$

Эти собственные функции образуют базис пространства H^* [10] и тогда любую непрерывную функцию t из пространства H^* можно представить в виде разложения по этому базису

$$\begin{aligned} &y^*(t)=\sum_i y_i^*(t)\varphi_i,\qquad f^*(t)=\sum_i f_i(t)\varphi_i,\\ &\hat f^*(t)=(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}^*\mathbf{A}y^*(t)=\sum_i \hat f_i^*(t)\varphi_i. \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя представления (15) в (13) и используя (14) получим уравнение для определения функций разложения $y_k^*(t)$, а следовательно и неизвестной функции $y^*(t)$:

$$\begin{aligned} &y_k^*(t)=(\mathbf{I}-\mathbf{V}^k)^{-1}\tilde f_k^*(t)=(\mathbf{I}+\mathbf{W}^k)\tilde f_k^*(t),\\ &\mathbf{V}^k=\frac{c(t)\mathbf{V}_1+\gamma_k\mathbf{V}_2}{c(t)+\gamma_k},\quad \tilde f_k^*(t)=\frac{f_k(t)-\hat f_k^*(t)}{c(t)+\gamma_k}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\mathbf{W}^k$ — резольвентный оператор Вольтерра для оператора $\mathbf{V}^k$.

Возвращаясь к исходной задаче, введем оператор ортогонального проектирования, отображающий пространство $L_2(\Omega)$ на $L_2^\circ(\Omega)$:

$$\mathbf{P}^\circ\phi(\mathbf{r},t)=\int_\Omega \phi(\boldsymbol{\xi},t)\sum_{i=1}^{N} p_i(\mathbf{r})p_i(\boldsymbol{\xi})d\Omega_\xi. \tag{17}$$

Оператор ортогонального проектирования $\mathbf{P}^*=\mathbf{I}-\mathbf{P}^\circ$ отображает пространство $L_2(\Omega)$ на $L_2^*(\Omega)$. Также имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}^\circ F(\mathbf{r},t)=F^\circ(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{P}^* F(\mathbf{r},t)=F^*(\mathbf{r},t),\\ &\mathbf{P}^\circ Q(\mathbf{r},t)=Q^\circ(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{P}^* Q(\mathbf{r},t)=Q^*(\mathbf{r},t). \end{aligned} \tag{18}$$

Подействовав оператором $\mathbf{P}^*$ на уравнение (3), получим интегральное уравнение в подпространстве $L_2^*(\Omega)$ (с известной правой частью) для определения функции $q^*(\mathbf{r},t)$:

$$\begin{aligned} &c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)Q^*(\mathbf{r},t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}^*\mathbf{A}Q^*(\mathbf{r},t)=\\ &\qquad\qquad =-G^*(\mathbf{r},t)-(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}^*\mathbf{A}Q^\circ(\mathbf{r},t),\\ &\mathbf{P}^*\mathbf{A}\phi(\mathbf{r},t)=\int_\Omega k^*(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi})\phi(\boldsymbol{\xi},t)d\Omega_\xi,\\ &k^*(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi})=k(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi})-\int_\Omega k(\mathbf{s},\boldsymbol{\xi})\sum_{i=1}^{N} p_i(\mathbf{r})p_i(\mathbf{s})d\Omega_s. \end{aligned} \tag{19}$$

Оператор $\mathbf{P}^*\mathbf{A}$ является оператором Гильберта—Шмидта, действующим из $L_2^*(\Omega)$ в $L_2^*(\Omega)$. Решение уравнения (19) будем строить в виде ряда по собственным функциям этого оператора, которые образуют базис пространства $L_2^*(\Omega)$. Пусть $\varphi_k(\mathbf{r})$ — собственные функции оператора $\mathbf{P}^*\mathbf{A}$, соответствующие собственным значениям γ_k. Тогда

$$\mathbf{P}^*\mathbf{A}\varphi_k(\mathbf{r})=\gamma_k\varphi_k(\mathbf{r}), \quad k=N+1,\,N+2,\,\ldots\,. \tag{20}$$

Собственные функции $\varphi_k(\mathbf{r})$ можно представить в виде разложения по базисным функциям $p_k(\mathbf{r})$:

$$\varphi_k(\mathbf{r})=\sum_{i=N+1}^{\infty}\varphi_i^{(k)}p_i(\mathbf{r}). \tag{21}$$

Так как ядро $k(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi})$ можно разложить в двойной ряд по функциям $p_k(\mathbf{r})$:

$$k(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi})=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}R_{ij}p_i(\mathbf{r})p_j(\boldsymbol{\xi}), \quad R_{ij}=\int_\Omega\int_\Omega k(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi})p_i(\mathbf{r})p_j(\boldsymbol{\xi})d\Omega_x d\Omega_\xi,$$

то с учетом (19) можно получить разложение в двойной ряд и ядра $k^*(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi})$:

$$k^*(\mathbf{r},\boldsymbol{\xi})=\sum_{i=N+1}^{\infty}\sum_{j=N+1}^{\infty}R_{ij}p_i(\mathbf{r})p_j(\boldsymbol{\xi})+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{\infty}R_{ij}p_i(\mathbf{r})p_j(\boldsymbol{\xi}). \tag{22}$$

Подставляя (21) и (22) в (20), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения собственных значений γ_k и собственных функций $\varphi_k(\mathbf{r})$:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}R_{mi}\varphi_i^{(k)}=\gamma_k\varphi_m^{(k)}, \quad m=N+1,\,N+2,\,\ldots\,. \tag{23}$$

Для построения решения уравнения (19) представим функции $Q^*(\mathbf{r},t)$ и $G^*(\mathbf{r},t)$ в виде рядов по собственным функциям $\varphi_k(\mathbf{r})$:

$$Q^*(\mathbf{r},t)=\sum_{i=N+1}^{\infty}Q_i^*(t)\varphi_i(\mathbf{r}),\quad G^*(\mathbf{r},t)=\sum_{i=N+1}^{\infty}G_i^*(t)\varphi_i(\mathbf{r}),$$
$$G_k^*(t)=\int_\Omega\frac{g(\boldsymbol{\xi},t)}{\sqrt{m(\boldsymbol{\xi})}}\varphi_k(\boldsymbol{\xi})d\Omega_\xi$$

и подставим их в (19). Тогда, учитывая (8)–(10) и (18)–(22), получим последовательность уравнений Вольтерра второго рода для определения неизвестных функций $Q_k^*(t)$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{V}^k)Q_k^*(t)=\tilde F_k^*(t),\qquad \mathbf{V}^k\phi(\mathbf{r},t)=\int_{\tau_0}K_k^*(t,\tau)\phi(\mathbf{r},\tau)d\tau,$$
$$\mathbf{V}^k=\frac{c(t)\mathbf{V}_1+\gamma_k\mathbf{V}_2}{c(t)+\gamma_k},\qquad K_k^*(t,\tau)=\frac{c(t)K_1(t,\tau)+\gamma_kK_2(t,\tau)}{c(t)+\gamma_k},$$
$$\tilde F_k^*(t)=-\frac{1}{c(t)+\gamma_k}\left[G_k^*(t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\sum_{i=1}^{N}K_k^{(i)}Q_i^\circ(t)\right],$$
$$K_k^{(i)}=\sum_{n=N+1}^{\infty}R_{in}\varphi_n^{(k)},\qquad i=1,\ldots,N,\qquad k=N+1,\,N+2,\ldots.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$q(\mathbf{r},t)=\frac{Q(\mathbf{r},t)}{\sqrt{m(\mathbf{r})}}=\frac{1}{m(\mathbf{r})}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i}a_{ij}M_j(t)P_i(\mathbf{r})+\sum_{i=N+1}^{\infty}Q_i^*(t)\Phi_i(\mathbf{r})\right],$$
$$\Phi_k(\mathbf{r})=\sum_{i=N+1}^{\infty}\varphi_i^{(k)}P_i(\mathbf{r}).$$

Отметим, что в решении в явном виде выделена функция $m(\mathbf{r})$, что позволяет нам проводить аналитические вычисления даже для быстро осциллирующих и разрывных функций $m(\mathbf{r})$.

Подействовав оператором $\mathbf{P}^\circ$ на выражение (19), можно получить уравнения для нахождения неизвестных функций $\alpha_k(t)$ $(k=1,\ldots,N)$.

Литература

[1] Манжиров А.В. Контактные задачи для неоднородно стареющих и вязкоупругих тел // Механика контактных взаимодействий. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – С. 549–565.

[2] Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. – Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. – 318 с.

[3] Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Integral Equations, 2nd edition. – Boca Raton: Chapman & Hall/ CRC, 2008. – 1144 p.

[4] Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. – М.: Наука, 1991. – 176 с.

[5] Манжиров А.В. Смешанные интегральные уравнения контактной механики и трибологии // Смешанные задачи механики деформируемого тела: Материалы V Рос. конф. с междунар. участием. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. – С. 221–224.

[6] Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. – М.: Машиностроение, 1988. – 254 с.
[7] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
[8] Гурса Э. Курс математического анализа. Том третий. Часть II. Интегральные уравнения и вариационное исчисление. – М.; Л.: ГТТИ, 1934. – 318 с.
[9] Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 1962. – 500 с.
[10] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 496 с.

УДК 517.095

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Мартемьянова Н.В.[1]

Рассмотрим вырождающееся уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа с неизвестной правой частью

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - b^2K(y)u = f(x) \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где $K(y) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^n$, $n > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b > 0$ — заданные действительные числа, и поставим следующую обратную задачу с нелокальным граничным условием.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \tag{2}$$

$$f(x) \in C(0,1); \tag{3}$$

$$Lu = f(x), (x,y) \in D_- \cup D_+; \tag{4}$$

$$u(0,y) = u(1,y),\ u_x(0,y) = 0,\ -\alpha \le y \le \beta; \tag{5}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x),\ u(x,-\alpha) = \psi(x),\ 0 \le x \le 1; \tag{6}$$

$$u_y(x,-\alpha) = g(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{7}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$ — заданные достаточно гладкие функции,

$$\varphi(0) = \varphi(1), \psi(0) = \psi(1),\ \varphi'(0) = \psi'(0) = 0, \tag{8}$$

$D_+ = D \cap \{y > 0\},\ D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь прежде всего работы Тихонова А.Н. [1], Лаврентьева М.М. [2, 3], Иванова В.К. [4] и их учеников. Более подробно об этом можно найти в монографии Денисова А.М. [5].

В последние годы в работах [6, 7] для обоснования единственности и существования решения прямых задач для уравнений смешанного типа используется метод спектральных разложений. Таким методом решены обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа [8, 9].

Отметим, что прямая задача с условиями (6) и (7) для уравнения смешанного типа (1) в прямоугольной области D исследована в [10].

Обратная задача (2)–(7) для уравнения (1) при $n = 0$ изучена в работе [11]. В данной работе установлен критерий единственности решения задачи (2)–(7) для уравнения (1) при всех $n > 0$. Решение построено в виде сумм биортогональных рядов по системам собственных и присоединенных функций соответствующих взаимно-сопряженных задач. Отметим, что базисность этих систем в пространстве L_2 была впервые доказана в работе [12] и использована в [13].

[1]Мартемьянова Нина Викторовна (ninamartem@yandex.ru), Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, 443090 Россия, г. Самара, ул. Антонова-Овсеенко, 26.

Литература

[1] Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН. – 1943. – Т. 39. – №5. – С. 195–198.

[2] Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 157. – №3. – С. 520–521.

[3] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 286 с.

[4] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.

[5] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. – М.: МГУ, 1994. – 208 с.

[6] Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. – 2007. – Т. 413. – №1. – С. 23–26.

[7] Сабитов К.Б. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка // Докл. РАН. 2009. Т.427, №5. С. 593 – 596.

[8] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Докл. РАН. – 2009. – Т. 429. – №4. – С. 451–454.

[9] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Известия Вузов. Математика. – 2010. – №4. – С. 55–62.

[10] Сабитова Ю.К. Краевые задачи с нелокальным условием для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. Автореферат дисс. ... к.ф.-м.н. – Стерлитамак: СГПА, 2007. – 20 с.

[11] Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Известия Вузов. Математика. (в печати).

[12] Ильин В.А. О существовании приведенной системы собственных и присоединеных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Труды Матем. института им. В.А. Стеклова. – 1976. – Т. 142. – С. 148–155.

[13] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13. – №2. – С. 294–304.

УДК 539.12

ДВАЖДЫ ТЯЖЕЛЫЕ БАРИОНЫ В КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЙ КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ

Мартыненко А.П., Салеев А.В. [1]

Переход от двухкварковых связанных состояний к трехкварковым системам приводит к ряду проблем, связанных с определением трехчастичной релятивистской волновой функции, а также вида потенциала взаимодействия кварков в барионе. На практике, важно иметь такую теорию, которая бы позволяла получать надежные результаты для всех наблюдаемых величин в экспериментах, касающихся барионной спектроскопии, процессов рождения и распада. Дважды тяжелые барионы (Q_1Q_2q) представляют собой интересную трехкварковую систему. Два тяжелых кварка образуют "ядро" (Q_1Q_2), вокруг которого на расстоянии порядка $1/m_q$ движется легкий кварк. Такое представление ведет к кварк-дикварковой модели барионов. Проблема спектра масс барионов с двумя тяжелыми кварками исследовалась многими авторами. При этом использовались кварк-дикварковое приближение, гиперцентральное приближение, вариационный метод [1–7].

В данной работе мы выполнили новый расчет спектра масс барионов в релятивистской квазипотенциальной кварковой модели. Цель работы состояла в улучшении точности теоретического расчета за счет использования стохастического вариационного метода. Полный гамильтониан бариона был представлен в виде суммы гамильтонианов двухкварковых взаимодействий. Волновая функция трехкварковой системы аппроксимируется линейной комбинацией гауссовых экспонент, или базисных волновых функций (гауссов базис) [8, 9]:

$$\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)=\sum_{k=1}^{K} c_k \exp\{-\sum_{i<j}^{3}\alpha_{ij}^{k}(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)^2\}. \qquad (1)$$

Точность аппроксимации контролируется путем задания размерности базиса K и качеством отбора элементов. Критерием отбора является обеспечение минимальной энергии при решении задачи на собственные значения для оператора Гамильтона при его действии на волновую функцию Ψ. Базис генерируется следующим образом. Выполняется решение задачи для нескольких разных $\Psi^{1..M}$ в которые был добавлен произвольно сформированный элемент базиса, различный для каждой Ψ^i, затем выбирается наиболее удачная по значению энергии Ψ^m. Функция Ψ^m становится новым базисом, и процедура повторяется заново, всего K раз, таким образом количество элементов базиса достигает K. Преимущество метода заключается в его скорости и высокой точности, которая достигается вследствие оптимизации алгоритма диагонализации гамильтониана и возможностью контролировать число стохастических вариаций M. Метод позволяет также вычислять матричные элементы потенциала взаимодействия в старших порядках теории возмущений.

В качестве начального приближения для изучения спектра масс барионов мы выбрали нерелятивистский трехкварковый гамильтониан, состоящий из кулоновских

[1]Мартыненко Алексей Петрович (mart@ssu.samara.ru), Салеев Артем Владимирович (sartemv@mail.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

членов и потенциала конфайнмента:

$$H_0 = \frac{\mathbf{p_1^2}}{2m_1} + \frac{\mathbf{p_2^2}}{2m_2} + \frac{\mathbf{p_3^2}}{2m_3} - \frac{2}{3}\sum_{i<j}\frac{\alpha_s^{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}[1 + \frac{\alpha_s^{ij}}{4\pi}(\widetilde{a}_1 + 8\gamma_E\beta_0)] + \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}(Ar_i + B). \quad (2)$$

Положение кварка i относительно точки связи струн, которая приближенно совпадает с точкой центра масс, задается вектором $\mathbf{r}_i$, а $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, константа парного взаимодействия $\alpha_s^{ij} = \alpha_s(\widetilde{\mu}_{ij}^2)$ зависит от приведенной массы пары $\widetilde{\mu}_{ij}^2$.

Спектр масс барионов в начальном приближении определяется численным решением задачи на собственные значения для данного гамильтониана с помощью стохастического вариацинного метода. Полученные волновые функции затем используются при расчете многочисленных матричных элементов оператора взаимодействия кварков. В настоящей работе как и в [3–5] трехкварковый потенциал имеет вид суммы парных потенциалов взаимодействия типа Брейта

$$V^{SI}(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}) = \sum_{k=1}^{7}\triangle V_k(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}), \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\triangle V_1 = -\sum_{k=1}^{3}\frac{A}{8m_i^2}\nabla_i^2 r_i + \sum_{k=1}^{3}\frac{A}{8m_i^2}\{r_i[\mathbf{p}_i^2 - \frac{(\mathbf{p}_i\mathbf{r}_i)^2}{r_i^2}]\}_W + \\ + \sum_{i,j=1,i<j}^{3}\frac{A}{2m_im_j}\{r_{ij}[\mathbf{p}_{ij}^2 - \frac{(\mathbf{p}_{ij}\mathbf{r}_{ij})^2}{r_{ij}^2}]\}_W,\end{aligned} \quad (4)$$

$$\triangle V_2 = \sum_{i,j=1,i\neq j}^{3}\frac{1}{8m_i^2}\nabla_i^2(-\frac{2}{3}\frac{\alpha_s^{ij}}{r_{ij}}), \quad (5)$$

$$\triangle V_3 = \sum_{i=1}^{3}\frac{B}{8m_i^2}\mathbf{p}_i^2 - \sum_{i,j=1;i<j}^{3}\frac{B}{2m_im_j}\mathbf{p}_{ij}^2 - \sum_{i=3}^{3}\frac{\mathbf{p}_i^4}{8m_i^3}, \quad (6)$$

$$\triangle V_4 = -\sum_{i,j=1;i<j}^{3}\frac{1}{2m_im_j}\{\frac{2}{3}\frac{\alpha_s^{ij}}{r_{ij}}[\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j + \frac{(\mathbf{p}_i\mathbf{r}_{ij})(\mathbf{p}_j\mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^2}]\}_W, \quad (7)$$

$$\triangle V_5 = \sum_{i,j=1;i<j}^{3}\frac{3{\alpha_s^{ij}}^2}{8\pi m_i^2}\nabla_i^2\frac{\ln(\widetilde{\mu}_{ij}r_{ij})}{r_{ij}}, \quad (8)$$

$$\triangle V_6 = \sum_{i,j=1;i<j}^{3}\frac{3{\alpha_s^{ij}}^2}{2\pi m_im_j}\{\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j\frac{\ln(\widetilde{\mu}_{ij}r_{ij})}{r_{ij}} + \frac{(\mathbf{p}_i\mathbf{r}_{ij})(\mathbf{p}_j\mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^2}(\frac{\ln(\widetilde{\mu}_{ij}r_{ij})}{r_{ij}} - \frac{1}{r_{ij}})\}_W, \quad (9)$$

$$\triangle V_7 = -\sum_{i<j}^{3}\frac{4{\alpha_s^{ij}}^2}{3\pi|\mathbf{r}_{ij}|}\beta_0\ln(\widetilde{\mu}_{ij}|\mathbf{r}_{ij}|). \quad (10)$$

Вклад отдельных слагаемых $\triangle V_k$ в массу бариона был получен в первом порядке теории возмущений. Для этого использовались волновые функции (1), а сами матричные элементы были выражены в аналитическом виде в терминах переметров c_k, α_{ij}^k. Получены наблюдаемые массы барионов, содержащих два тяжелых кварка и проведено сравнение с расчетами других авторов.

Литература

[1] Capstick S. Isgur N., Baryons in a relativized quark model with chromodynamics // Physical Review D. – 1986. – V. 34. – P. 2809–2835.

[2] Richard J.M., The Nonrelativistic three-body problem for baryons // Physics Reports. – 1992. – V. 212. – P. 1–76.

[3] Ebert D., Faustov R.N., Galkin V.O., Martynenko A.P., Saleev V.A., Heavy baryons in the relativistic quark model // Zeitschrift fur Physik C. – 1997. – V. 76. – P. 111–115.

[4] Ebert D., Faustov R.N., Galkin V.O., Martynenko A.P. Mass spectra of doubly heavy baryons in the relativistic quark model // Physical Review D. – 2002. – V. 66. – P. 014008–014037.

[5] Martynenko A.P., Ground-state triply and doubly heavy baryons in a relativistic three-quark model // Physics Letters B. – 2008. - V. 663. – P. 317–321.

[6] Narodetskii I.M., Trusov M.A., The Heavy baryons in the nonperturbative string approach // Physics of Atomic Nuclei. – 2002. – V. 65. – P. 917–924.

[7] Gershtein S.S., Kiselev V.V., Likhoded A.K., Onischenko A.I. Spectroscopy of doubly heavy baryons. – Physical Review D. – 2000. – V. 62. – P. 054021–054032.

[8] Varga K., Suzuki Y. Precise solution of few body problems with stochastic variational method on correlated Gaussian basis // Physical Review C. – 1995. – V. 52. – P. 2885–2905.

[9] Varga K., Suzuki Y., Solution of few body problems with the stochastic variational method: 1. Central forces // Computer Physics Communications. – 1997. – V. 106. – P. 157–168.

УДК 519.999

ПАРНОЕ РОЖДЕНИЕ ЧАРМОНИЯ В ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ

Мартыненко А.П.[1], *Трунин А.М.*[2], *Элекина Е.Н.*[3]

В экспериментах двух коллабораций Belle и BaBar были измерены сечения рождения пары $(c\bar{c})$ мезонов [1, 2] в электрон-позитронной аннигиляции. Они выявили значительное расхождение с теоретической величиной сечений рождения пары, которая предсказывалась в рамках нерелятивистской квантовой хромодинамики (НРКХД) [3–6] в лидирующем порядке по α_s. Для улучшения теоретического описания процессов рождения пары S-волновых мезонов в реакции $e^+ + e^- \to J/\Psi + \eta_c$ были предприняты значительные усилия, которые включали как вычисление вкладов следующего порядка по α_s, так и расчет релятивистских поправок, связанных с относительным движением кварков, образующих конечные мезонные состояния [3–9]. В результате расхождение между теорией и экспериментом для процессов $\sigma(e^+ + e^- \to J/\Psi + \eta_c)$ удалось преодолеть. Несмотря на эти успехи, достигнутые в рамках НРКХД, потенциальных моделях и в подходе на световом конусе, задача парного рождения чармония в e^+e^- аннигиляции сохраняет свою актуальность. С одной стороны причина состоит в том, что наряду с рождением S-волновых состояний значительный интерес представляют собой другие процессы рождения P- и D-волновых состояний чармония. С другой стороны разнообразие используемых методов описания парного рождения чармония ставит задачу сравнения получаемых в них результатов для лучшего понимания кварк-глюонной динамики.

В данной работе мы продолжаем исследование эксклюзивного парного рождения чармония в e^+e^- аннигиляции на основе релятивистской кварковой модели [7–9] в случае, когда в конечном состоянии образуются S- и P-волновые мезоны $(c\bar{c})$. Релятивистская кварковая модель дает решение многих задач в физике тяжелых кварков. Некоторые основные особенности кварковых моделей и НРКХД очень похожи. Так разложение амплитуд рождения чармония и оператора взаимодействия тяжелых кварков по степеням малого относительного импульса, аналогично разложению НРКХД по относительной скорости кварков v. Ряд основных непертурбативных матричных элементов в НРКХД подходе может быть выражен через волновые функции связанных состояний кварков. Релятивистская кварковая модель дает возможность изучать вопрос об уширении мезонных волновых функций благодаря учету релятивистских поправок специального вида. Это в свою очередь ведет к росту сечений парного рождения чармония. Цель данного исследования состояла в последовательном вычислении релятивистских эффектов как в амплитудах S- и P-волнового рождения мезонов (см. рис.1), так и в их волновых функциях.

В рамках пертурбативной квантовой хромодинамики амплитуда рождения пары мезонов имеет вид:

[1]Мартыненко Алексей Петрович(mart@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

[2]Трунин Антон Маратович(amtrnn@gmail.com), Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева, 443086, Россия, г. Самара, ул. Лукачева, 34.

[3]Элекина Елена Николаевна (elekina-e1@yandex.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

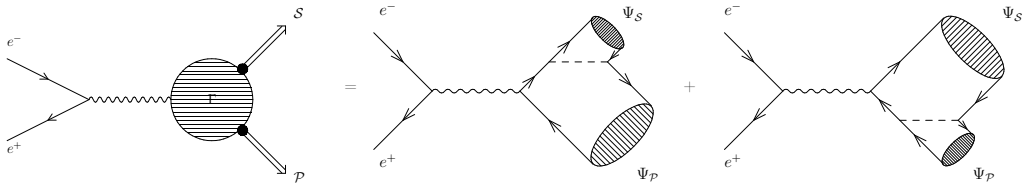


Рис 3. Амплитуда парного рождения чармония в e^+e^- аннигиляции. $\mathcal{S}$ обозначает S-волновой мезон, $\mathcal{P}$ — P-волновой мезон. Волнистая линия соответствует фотону, а пунктирная — глюону. Γ — вершинная функция парного рождения чармония

$$\mathcal{M}(p_-,p_+,P,Q)=\frac{8\pi^2\alpha\alpha_s\mathcal{Q}_c}{3s}\bar v(p_+)\gamma^\beta u(p_-)\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\times$$
$$\times Sp\left\{\Psi^{\mathcal{S}}(p,P)\Gamma_1^{\beta\nu}(p,q,P,Q)\Psi^{\mathcal{P}}(q,Q)\gamma_\nu+\right.$$
$$\left.+\Psi^{\mathcal{P}}(q,Q)\Gamma_2^{\beta\nu}(p,q,P,Q)\Psi^{\mathcal{S}}(p,P)\gamma_\nu\right\}, \tag{1}$$

где p,q и P,Q — относительные и полные импульсы кварков в мезонах, а релятивистские волновые функции связанных состояний кварков равны

$$\Psi^{\mathcal{S}}(p,P)=\frac{\Psi_0^{\mathcal{S}}(\mathbf{p})}{\left[\frac{\epsilon(p)}{m}\frac{(\epsilon(p)+m)}{2m}\right]}\left[\frac{\hat v_1-1}{2}+\hat v_1\frac{\mathbf{p}^2}{2m(\epsilon(p)+m)}-\frac{\hat p}{2m}\right]\times$$
$$\times\hat{\varepsilon_S}^*(1+\hat v_1)\left[\frac{\hat v_1+1}{2}+\hat v_1\frac{\mathbf{p}^2}{2m(\epsilon(p)+m)}+\frac{\hat p}{2m}\right], \tag{2}$$

$$\Psi^{\mathcal{P}}(q,Q)=\frac{\Psi_0^{\mathcal{P}}(\mathbf{q})}{\left[\frac{\epsilon(q)}{m}\frac{(\epsilon(q)+m)}{2m}\right]}\left[\frac{\hat v_2-1}{2}+\hat v_2\frac{\mathbf{q}^2}{2m(\epsilon(q)+m)}+\frac{\hat q}{2m}\right]\times$$
$$\times\hat\varepsilon^*_{\mathcal{P}}(Q,S_z)(1+\hat v_2)\left[\frac{\hat v_2+1}{2}+\hat v_2\frac{\mathbf{q}^2}{2m(\epsilon(q)+m)}-\frac{\hat q}{2m}\right]. \tag{3}$$

В лидирующем порядке по α_s вершинная функция примет вид:

$$\Gamma_1^{\beta\nu}(p,P;q,Q)=\gamma_\mu\frac{(\hat l-\hat q_1+m)}{(l-q_1)^2-m^2+i\epsilon}\gamma_\beta D^{\mu\nu}(k_1)+$$
$$+\gamma_\beta\frac{(\hat p_1-\hat l+m)}{(l-p_1)^2-m^2+i\epsilon}\gamma_\mu D^{\mu\nu}(k_1), \tag{4}$$

$$\Gamma_2^{\beta\nu}(p,P;q,Q)=\gamma_\beta\frac{(\hat q_2-\hat l+m)}{(l-q_2)^2-m^2+i\epsilon}\gamma_\mu D^{\mu\nu}(k_2)+$$
$$\gamma_\mu\frac{(\hat l-\hat p_2+m)}{(l-p_2)^2-m^2+i\epsilon}\gamma_\beta D^{\mu\nu}(k_2). \tag{5}$$

С помощью соотношений (1)–(5) проведен расчет релятивистских эффектов в рождении пары и показано, что сечения рождения претерпевают значительный рост (фактор 2) при энергии $\sqrt{s}=10.6$ ГэВ.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФП "Научные и педагогические кадры инновационной России" (грант No. НК-20П/1).

Литература

[1] Abe K., et al. Study of double charmonium production in e^+e^- annihilation at $\sqrt{s} =$ $= 10.6$ GeV // Physical Review D. – 2004. – V. 70. – P. 071102–071110.

[2] Aubert B., et al. Measurement of double charmonium production in e^+e^- annihilation at $\sqrt{s} = 10.6$ GeV // Physical Review D. – 2005. – V. 72. – P. 031101–031108.

[3] Braaten E., Lee J. Exclusive double charmonium production from e^-e^+ annihilation into a virtual photon // Physical Review D. – 2003. – V. 67. – P. 054007–054020; 2005. – V. 72. 099901(E).

[4] Braguta V.V., Likhoded A.K., Luchinsky A.V. The processes $e^+e^- \to J/\Psi\chi_{c0}$, $\Psi(2S)\chi_{c0}$ at $\sqrt{s} = 10.6$ GeV in the framework of light cone formalism // Physics Letters B. – 2006. – V. 635. – P. 299–304.

[5] Liu K.-Y., He Z.-G., Chao K.-T. Problems of double-charm production in e^+e^- annihilation at $\sqrt{s} = 10.6$ GeV // Physics Letters B. – 2003. – V. 557. – P. 45–54.

[6] Bodwin G.T., Kang D., Lee J. Potential-model calculation of an order-v^2 nonrelativistic QCD matrix element // Physical Review D. – 2006. – V. 74. – P. 014014–014026.

[7] Ebert D., Martynenko A.P. Relativistic effects in the production of pseudoscalar and vector doubly heavy mesons from e^+e^- annihilation // Physical Review D. – 2006. – V. 74. – P. 054008–054020.

[8] Ebert D., Faustov R.N., Galkin V.O., Martynenko A.P. Relativistic description of the double charmonium production in e^+e^- annihilation // Physics Letters B. – 2009. – V. 672. – P. 264–269.

[9] Elekina E.N., Martynenko A.P., Relativistic effects in the double S- and P-wave charmonium production in e^+e^- annihilation // Physical Review D. – 2010. – V. 81. – P. 054006–054017.

УДК 519.999

ВКЛАД ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ ПРОТОНА В СВЕРХТОНКУЮ СТРУКТУРУ МЮОННОГО ВОДОРОДА

Мартыненко А.П., Элекина Е.Н.[1]

В настоящее время квантовая электродинамика (КЭД) является единственной квантовополевой моделью, которая проверяется в различных экспериментах с точностью $10^{-6} \div 10^{-7}$ [1]. Исследование структуры уровней энергии простейших атомов представляет собой важную задачу для получения более точных значений фундаментальных физических констант. Интервал сверхтонкой структуры (СТС) атома водорода был измерен много лет назад с очень высокой точностью [1]:

$$\Delta E^{hfs}_{exp} = 1420\ 405\ 751.7667(9)\ Hz. \tag{1}$$

Теоретическое выражение для интервала сверхтонкой структуры обычно представляют в виде ($\Delta E^{hfs}_{th} = 2\pi\hbar\Delta\nu^{hfs}_{th}$):

$$\Delta E^{hfs}_{th} = E_F(1 + \delta_{QED} + \delta_s + \delta_p),\ E_F = \frac{8}{3}\alpha^4\frac{\mu_P m_p^2 m_e^2}{(m_p + m_e)^3}. \tag{2}$$

Слагаемое δ_{QED} обозначает вклад КЭД эффектов, а δ_s и δ_p включают эффекты структуры и поляризуемости ядра. Основные теоретические неопределенности выражения (2) связаны именно с этими поправками. Цель данной работы состоит в исследовании поправки на поляризуемость протона в сверхтонкой структуре атомов электронного и мюонного водорода [2–8].

В последнее время достигнут значительный прогресс в экспериментальном изучении тонкой структуры мюонного водорода [9]. Предварительные экспериментальные результаты свидетельствуют о том, что имеется некоторое различие между теорией и экспериментом. Оно требует пересчета различных вкладов как в лэмбовский сдвиг, так и в сверхтонкую структуру спектра энергии. Одним из таких вкладов является поправка на поляризуемость протона. Основной вклад в эффект поляризуемости протона дают двухфотонные однопетлевые амплитуды виртуального комптоновского рассеяния на протоне. Он может быть выражен в терминах структурных функций нуклона для поляризованного рассеяния $G_{1,2}(W, Q^2)$ [2, 3]:

$$\Delta E^{hfs}_p = \frac{Z\alpha m_e}{2\pi m_p(1+\kappa)}E_F(\Delta_1 + \Delta_2) = (\delta_{1\ p} + \delta_{2\ p})E_F = \delta_p E_F, \tag{3}$$

$$\Delta_1 = \int_0^\infty \frac{dQ^2}{Q^2}\left\{\frac{9}{4}F_2^2(Q^2)\beta_0(\sigma) - 4m_p^3\int_{\nu_{th}}^\infty \frac{d\nu}{\nu}\beta_1(\sigma,\theta)G_1(\nu,Q^2)\right\}, \tag{4}$$

$$\Delta_2 = -12m_p^2\int_0^\infty \frac{dQ^2}{Q^2}\int_{\nu_{th}}^\infty d\nu\beta_2(\sigma,\theta)G_2(\nu,Q^2), \tag{5}$$

$$\beta_0(\sigma) = \frac{4}{9\sigma^2}[-3\sigma + 4\sigma\sqrt{1+\sigma} + 2 - 2\sqrt{1+\sigma}],\ \theta = \nu^2/Q^2, \sigma = \frac{4m_1^2}{Q^2}, \tag{6}$$

[1]Мартыненко Алексей Петрович(mart@ssu.samara.ru), Элекина Елена Николаевна (elekina-e1@yandex.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

$$\beta_1(\sigma,\theta)=\frac{\theta}{\sigma(-1+\sigma\theta)}\left[\frac{-2\sqrt{1+\sigma}+2-4\sigma^2-2\sigma}{\sqrt{1+\sigma}}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\sigma(-\theta^2+\theta^{3/2}\sqrt{1+\theta}+\theta+2}{\sqrt{\theta(1+\theta)}}\right],$$

$$\beta_2(\sigma,\theta)=\frac{2}{\sigma(-1+\sigma\theta)}[1-\sqrt{1+\sigma}+\sigma(-\theta+\sqrt{\theta(1+\theta)}].$$

Поляризационные структурные функции протона можно представить в виде ($g_1(\nu,Q^2)=m_2^2\nu G_1(\nu,Q^2)$, $g_2(\nu,Q^2)=m_2\nu^2G_2(\nu,Q^2)$):

$$g_1(\nu,Q^2)=\frac{m_2\cdot K}{8\pi^2\alpha(1+Q^2/\nu^2)}\left[\sigma_{1/2}(\nu,Q^2)-\sigma_{3/2}(\nu,Q^2)+\frac{2\sqrt{Q^2}}{\nu}\sigma_{TL}(\nu,Q^2)\right], \quad (7)$$

$$g_2(\nu,Q^2)=\frac{m_2\cdot K}{8\pi^2\alpha(1+Q^2/\nu^2)}\left[-\sigma_{1/2}(\nu,Q^2)+\sigma_{3/2}(\nu,Q^2)+\frac{2\nu}{\sqrt{Q^2}}\sigma_{TL}(\nu,Q^2)\right], \quad (8)$$

где K — кинематический потоковый фактор виртуальных фотонов, $\sigma_{1/2}$, $\sigma_{3/2}$ — сечения виртуального фотопоглощения в состоянии системы фотон-нуклон с полным моментом равным $1/2$ и $3/2$. Индекс TL у сечения σ_{TL} обозначает случай рассеяния, когда спиральность фотона изменяется с поперечной в начальном состоянии на продольную в конечном состоянии. Для построения сечений $\sigma_{1/2}$, $\sigma_{3/2}$, σ_{TL} в резонансной области ($W\le 2$ ГэВ) применялся усовершенствованный вариант изобарной модели, которая описывает процессы фото- и электророждения π, η мезонов, нуклонных резонансов на нуклоне. В рамках этой модели используется параметризация Брейта—Вигнера для сечений поглощения $\sigma_{1/2}$, $\sigma_{3/2}$, σ_{TL}. С помощью программы MAID [10] были построены функции $g_{1,2}(\nu,Q^2)$ в численном виде (см. рис.1). В нерезонансной области использовались эволюционные уравнения для партонных распределений, через которые можно выразить поляризационные структурные функции нуклона. Новое численное значение поправки на поляризуемость протона для мюонного водорода равно $\delta_p=(4.1\pm 1.0)\cdot 10^{-4}$. Дальнейшее уточнение полученных результатов связано с экспериментальным изучением процессов электророждения нуклонных резонансов на детекторе CLAS [8] и более точным определением параметров изобарной модели [10].

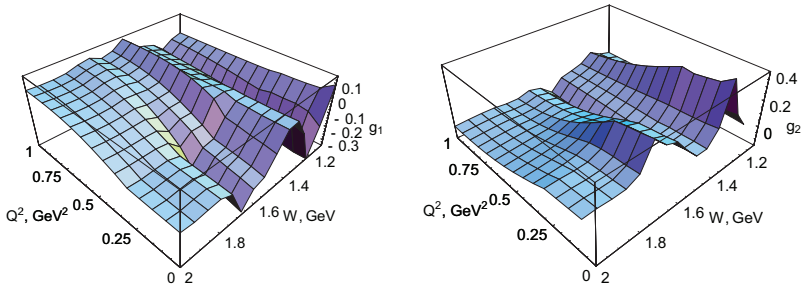


Рис 4. Поляризационные структурные функции протона $g_{1,2}(W,Q^2)$ в зависимости от Q^2 $(0\div 1)$ ГэВ^2 и W $(1.1\div 2.0)$ ГэВ

Работа выполнена при финансовой поддержке ФП "Научные и педагогические кадры инновационной России" (грант No. НК-20П/1).

Литература

[1] Eides M.I., Grotch H., Shelyuto V.A. Theory of light hydrogen-like atoms // Physics Reports. – 2001. – V. 342. – P. 62–261.

[2] Faustov R.N., Martynenko A.P. Proton polarizability contribution to hydrogen hyperfine splitting. – European Physical Journal C. – 2002. – V. 24. – P.281–285; Physics of Atomic Nucl. – 2002. – V. 65. – P. 265–270.

[3] Cherednikova E.V., Faustov R.N., Martynenko A.P., Proton polarizability contribution to the hyperfine splitting in muonic hydrogen // Nuclear Physics A. – 2002. – V. 703. – P. 365–377.

[4] Friar J.L., Sick I. Zemach moments for hydrogen and deuterium // Physics Letters B. – 2005. – V. 579. – P. 285–289.

[5] Brodsky S.J. et al. Constraints on the proton structure from precision atomic-physics measurements // Physical Review Letters. – 2005. – V. 94. – P. 022001–022004.

[6] Volotka A.V., Shabaev V.M., Plunien G., Soff G. Zemach and magnetic radius of the proton from the hyperfine splitting in hydrogen // European Physical Journal D. – 2005. – V. 33. – P. 23–27.

[7] Dupays A. et al., Proton Zemach radius from measurements of the hyperfine splitting of hydrogen and muonic hydrogen // Physical Review A. – 2003. – V. 68. – P. 052503–052508.

[8] Carlson C.E., Nazaryan V., Griffioen K. Proton structure corrections to electronic and muonic hydrogen hyperfine splitting // Physical Review A. – 2008. – V. 78. – P. 022517–022526.

[9] Pohl R., Nez F., Antognini A., et al., Nature. – 2010 (to be published)

[10] Drechsel D., Kamalov S.S., Tiator L. Unitary isobar model — MAID2007 // European Physical Journal A. – 2007. – V. 34. – P. 69–97.

УДК 51.72

К ВОПРОСУ О МАССАХ ФЕРМИОНОВ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Марчук Н.Г.[1]

В Стандартной Модели электрослабых взаимодействий массы фермионов возникают в результате юкавского взаимодействия фермионов с полем Хиггса спина 0. В работе обсуждается модель в которой частицы спина $1/2$ обладают зарядом порождающим неабелево калибровочное поле спина 1 со спинорной калибровочной симметрией. Масса частицы определяется константой взаимодействия частицы с этим калибровочным полем.

В работах [1–5] был предложен и разработан новый подход к уравнениям теории поля, основанный на так называемых *модельных уравнениях теории поля*. В настоящей работе указанный подход к уравнениям теории поля развивается в следующем направлении: предложены модельные уравнения Дирака–Янга–Миллса описывающие взаимодействие частицы спина $1/2$ одновременно с двумя полями Янга–Миллса, причем одно из них обладает унитарной симметрией, а другое – спинорной симметрией.

Литература

[1] Марчук Н.Г. Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда – Ижевск: РХД, 2009.

[2] Marchuk N.G. Technique of Tensors with Values in the Atyah-Kähler Algebra in the New Representation of Dirac–Yang–Mills Equations / Russian Journ. of Math. Phys. – 2006. – Vol. 13. – No. 3. – P. 299–314.

[3] Marchuk N.G. New Representation of Dirac–Yang–Mills Equations // Russian Journ. of Math. Phys. – 2006. – Vol. 13. – No. 4. – P. 397–413.

[4] Marchuk N.G. Model Dirac–Maxwell equations with pseudounitary symmetry // Theoretical and Mathematical Physics. – 2008. – No. 157(3). – P. 1723—1732.

[5] Marchuk N.G. A concept of Dirac-type tensor equations // Nuovo Cimento – 2002. – V. 117B. – No. 12. – P. 1357–1388.

[1]Марчук Николай Гурьевич (nmarchuk2005@yandex.ru), Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

УДК 517.95

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Мелишева Е.П.[1]

Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Lu = \operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + u_{yy} - b^2 \operatorname{sgn} y \cdot u(x,y) + C(y)\, u(x,0) = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) : 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, α, β — заданные положительные действительные числа, $C(y) = C_1(y)$ при $y \geq 0$, $C(y) = C_2(y)$ при $y \leq 0$, $C_i(y)$, $i = 1, 2,$ — заданные непрерывные функции.

Задача Дирихле. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,\, y) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2\left(D_+ \cup D_-\right); \tag{2}$$

$$Lu(x,\, y) \equiv 0, \quad (x,\, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,\, y) = u(1,\, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \tag{4}$$

$$u(x,\, \beta) = \varphi(x), u(x,\, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1)$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Отметим, что краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных рассмотрены в работах Нахушева А.М. и его учеников (см [1]). В работе [2] для нагруженного параболо–гиперболического уравнения в прямоугольной области изучена начально–граничная задача, в которой методом спектральных разложений [3] установлен критерий единственности решения этой задачи и само решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения.

Задача (2)–(5) при $b = 0$ изучена в работе автора [4]. В данной работе при всех $b > 0$ установлены необходимое и достаточное условия единственности решения задачи (2)–(5) и решение построено в виде суммы ряда Фурье.

Пусть $u(x,y)$ — решение задачи (2)–(5). Рассмотрим функцию

$$u_k(y) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x,y) \sin \pi k x dx. \tag{6}$$

На основании (6), с учетом уравнения (1) и однородных граничных условий (4), получим

$$u_k''(y) - \lambda_k^2 u_k(y) = -C_1(y)\, u_k(0), \quad y > 0, \tag{7}$$

$$u_k''(y) + \lambda_k^2 u_k(y) = -C_2(y)\, u_k(0), \quad y < 0, \tag{8}$$

где $\lambda_k = \sqrt{b^2 + (\pi k)^2}$.

[1]Мелишева Екатерина Петровна (melisheva86@mail.ru), Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, 443090, Россия, г. Самара, ул. Антонова–Овсеенко, 26.

В силу условий (2) и (5) дифференциальные уравнения (7) и (8) имеют единственные решения

$$u_k(y)=\begin{cases}\psi_k\dfrac{C_{1k}(y)\operatorname{sh}\lambda_k\beta-C_{1k}(\beta)\operatorname{sh}\lambda_k y}{\lambda_k\Delta_{\alpha\beta}(k)}+\\ \qquad+\psi_k\dfrac{\operatorname{sh}[\lambda_k(y-\beta)]}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}+\varphi_k\dfrac{\Delta_{\alpha y}(k)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}, & y>0,\\ \psi_k\dfrac{\Delta_{-y\beta}(k)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}-\varphi_k\dfrac{\sin\lambda_k(\alpha+y)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}-\\ \qquad-\varphi_k\dfrac{C_{2k}(y)\sin\lambda_k\alpha+C_{2k}(-\alpha)\sin\lambda_k y}{\lambda_k\Delta_{\alpha\beta}(k)}, & y<0,\end{cases}\tag{9}$$

где

$$C_{1k}(y)=\int_0^y C_1(t)\operatorname{sh}[\lambda_k(y-t)]dt,\quad C_{2k}(y)=\int_y^0 C_2(t)\sin[\lambda_k(t-y)]dt,$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\alpha y}(k)&=\frac{\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k}[C_{1k}(y)-\lambda_k\operatorname{ch}\lambda_k y]-\\&\qquad-\frac{\operatorname{sh}\lambda_k y}{\lambda_k}[\lambda_k\cos\lambda_k\alpha+C_{2k}(-\alpha)],\quad y\ge 0,\\ \Delta_{-y\beta}(k)&=\frac{\sin\lambda_k y}{\lambda_k}[\lambda_k\operatorname{ch}\lambda_k\beta-C_{1k}(\beta)]-\\&\qquad-\frac{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}{\lambda_k}[\lambda_k\cos\lambda_k y+C_{2k}(y)],\quad y\le 0,\\ \Delta_{\alpha\beta}(k)&=\frac{\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k}[C_{1k}(\beta)-\lambda_k\operatorname{ch}\lambda_k\beta]-\\&\qquad-\frac{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}{\lambda_k}[\lambda_k\cos\lambda_k\alpha+C_{2k}(-\alpha)]\ne 0,\quad k\in N.\end{aligned}\tag{10}$$

Пусть $u(x,\,y)$ — решение однородной задачи (2)–(5) (где $\varphi(x)=\psi(x)\equiv 0$) и выполнено условие (10) при всех $k\in N$. Тогда $\varphi_k=\psi_k\equiv 0$ и из формул (9) и (6) следует, что при любом $y\in[-\alpha,\,\beta]$

$$\int_0^1 u(x,\,y)\sin\pi kx dx=0,\quad k=1,2,\ldots\quad .\tag{11}$$

Из равенств (11) в силу полноты системы синусов $\left\{\sqrt{2}\sin\pi kx\right\}$ в пространстве $L_2[0,1]$ следует, что $u(x,\,y)=0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $y\in[-\alpha,\beta]$. Поскольку в силу (2) функция $u(x,\,y)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $u(x,\,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

Теорема 1. *Если существует решение задачи (2)–(5), то оно единственно только тогда, когда выполнено условие (10) при всех $k\in N$.*

Решение задачи (2)–(5) при условии (10) будем искать в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,\,y)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(y)\sin\pi kx,\tag{12}$$

где функции $u_k(y)$ определяются по формулам (9), из которых видно, что выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ является знаменателем. Для обоснования существования решения (12) данной задачи необходимо показать существование чисел α, β и функций $C_i(y)$, $i = 1, 2$, таких, что при больших k выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ отделено от нуля.

Лемма 1. Если выполнено одно из следующих условий: 1) $\alpha = p$ — натуральное; 2) $\alpha = p/q$, $p, q \in N$, $(p, q) = 1$, $(q, 4) = 1$, то существует постоянная C_0, такая, что при больших k и любом фиксированном $\beta > 0$ справедлива оценка

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geq C_0 e^{\pi k\beta} > 0. \tag{13}$$

С учетом леммы 1 доказана следующая

Теорема 2. *Если* $\varphi(x) \in C^3[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$ *и* $\psi(x) \in C^3[0,1]$, $\psi(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$, $C_1(y) \in C[0, \beta]$, $C_2(y) \in\in C[-\alpha, 0]$ *и выполнены условия (10) и (13), то существует единственное решение задачи (2)–(5) и оно определяется рядом (12).*

Литература

[1] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

[2] Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для нагруженного уравнения параболо–гиперболического типа // Докл. АМАН. Нальчик. – 2009. – Т. 11. – №1. – С. 66–73.

[3] Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Математические заметки. – 2009. – Т. 86. – Вып. 2 – С. 273–279.

[4] Мелишева Е.П. Задачи Дирихле для нагруженного уравнения Лаврентьева—Бицадзе // Вестик Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – (в печати).

УДК 517.9

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПУАССОНОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И УРАВНЕНИЯ ТИПА ДИРАКА

Минаждинова Л.А.[1]

Построены процессы типа пуассоновских в евклидовых пространствах, такие, что переходные меры принимают значения в сепарабельных банаховых алгебрах. Распределениями таких процессов являются счетноаддитивные меры со значениями в тех же алгебрах (не обязательно коммутативных). С помощью таких мер построены решения эволюционных уравнений типа Дирака (с некоммутирующими коэффициентами). Частным случаем является импульсное представление решения классического уравнения Дирака (с матричными коэффициентами), полученное в [1–3].

Литература

[1] Shamarov N.N. Matrix-Valued Cylindrical Measures of Markov Type and their Fourier Transforms // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2003. – V. 10. – No. 3. – P. 1–16.

[2] Шамаров Н.Н. Функциональный интеграл по счетно-аддитивной мере, представляющий решение уравнения Дирака // Труды Московского Математического Общества. – 2005 – Т. 66. – С. 263–276.

[3] Шамаров Н.Н. Мера Пуассона–Маслова и формулы Фейнмана для решения уравнения Дирака // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – Вып. 6. – С. 193–211.

[1] Минаждинова Лилия Анясовна (lilli05@mail.ru), Московский архитектурный институт, 107031, Россия, г. Москва, ул. Рождественка, 11.

УДК 517.956.6

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Мирсабуров М.[1], *Рузиев М.Х.*[2]

Рассмотрим уравнение

$$(\operatorname{sign} y)\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0 \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, где D^+ — полуплоскость $y > 0$, D^- — конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками AC и BC уравнения (1), выходящими из точек $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, и отрезком AB прямой $y = 0$, I — интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$. В (1) m, β_0 — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $-m/2 < \beta_0 < 1$.

Введем обозначения: $I_1 = \{(x, y) : -\infty < x \le 1,\ y = 0\}$, $I_2 = \{(x, y) : 1 \le x < \infty,\ y = 0\}$, $C_0(C_1)$ — точки пересечения характеристики $AC(BC)$ с характеристикой, исходящей из точки $E(c, 0)$, где $c \in I$ — произвольное фиксированное число.

Рассмотрим диффеоморфизм $p(x) \in C^1[-1, c]$, переводящий отрезок $[-1, c]$ в $[c, 1]$, причем $p'(x) < 0$, $p(-1) = 1$, $p(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = \delta - kx$, где $k = (1 - c)/(1 + c)$, $\delta = 2c/(1 + c)$.

Задача. Требуется найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x, y) \in C(\bar{D})$, где $\bar{D} = D \cup I_1 \cup AC \cup BC \cup I_2$;

2) $u(x, y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1 [1] в области $D^- \setminus (EC_0 \cup \cup EC_1)$;

4) выполняются равенства $\lim\limits_{R\to\infty} u(x, y) = 0$, $y \ge 0$, $R^2 = x^2 + \dfrac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}$;

5) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y)|_{y=0} = \tau_i(x),\ \forall x \in I_i, i = 1, 2,$$

$$u[\theta_0(x)] + \mu u[\theta_1(p(x))] = \psi(x),\ -1 \le x \le c,$$

$$u(p(x), 0) = \rho u(x, 0) + f(x),\ -1 \le x \le c \tag{2}$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0} u_y = \lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0} u_y, x \in I \setminus \{c\},$$

причем эти пределы при $x = \pm 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = (m + 2\beta_0)/2(m + 2)$, $\theta_0(x_0)$ и $\theta_1(x_0)$ — соответственно аффиксы точек

[1] Мирсабуров М. (mruziev@mail.ru), Термезский государственный университет, Республика Узбекистан, г. Термез.

[2] Рузиев М.Х. (mruziev@mail.ru), Институт математики и информационных технологий АН РУз., Республика Узбекистан, г. Ташкент.

пересечения характеристик AC и BC с характеристиками, исходящими из точки $(x_0, 0)$, $x_0 \in I$:

$$\theta_0(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - i\left[\frac{(m+2)(1+x_0)}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

$$\theta_1(x_0) = \frac{1 + x_0}{2} - i\left[\frac{(m+2)(1-x_0)}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

$\psi(x)$, $f(x)$ — заданные функции, причем $\psi(x)$, $f(x) \in C[-1, c] \cap C^{1,\alpha}(-1, c)$, $\psi(-1) = 0$, $f(-1) = 0$, $f(c) = 0$, $\mu = \text{const} > 0$, $0 < \rho < 1$. Функции $\tau_i(x)$ в окрестности точек $x = -1$, $x = 1$ представимы в виде $\tau_i(x) = (1 - x^2)\tilde{\tau}_i(x)$ и удовлетворяют условию Гельдера на любых отрезках $[-N, -1]$, $[1, N]$, $N > 1$, и для достаточно больших $|x|$ — неравенству $|\tau_i(x)| \le M\,|x|^{-\delta}$, δ, $M = \text{const} > 0$. Заметим, что условие (2) является аналогом условия Франкля [2–4].

Имеет место следующая

Теорема. Пусть выполнены условия $0 < \rho < 1$, $\mu > 0$, $p(x) = \delta - kx$. Тогда задача однозначно разрешима.

Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума. При доказательстве существования решения задачи применяется метод интегральных уравнений. Исследуемая задача эквивалентным образом поэтапно сводится к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши и интегрального уравнения Винера—Хопфа, а также интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Отметим, что в работе [5] в ограниченной области исследована краевая задача с нелокальным граничным условием на характеристике для уравнения (1), при $\beta_0 = -(m/2)$.

В настоящей работе исследуется корректность задачи, где части C_0C и C_1C соответственно характеристик AC и BC освобождены от краевых условий и это недостающее нелокальное условие эквивалентно заменено аналогом условия Франкля.

Литература

[1] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М., 1985. – 304 с.

[2] Франкль Ф.И. Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20. – №2. – С. 196–202.

[3] Девингталь Ю.В. Известия Вузов, математика. – 1958. – 2(3). – С. 39–51.

[4] Линь Цзянь-бин. Вестник ЛГУ. Сер. матем., мех. и астрон. – 1961. – 3(13). – С. 28–39.

[5] Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Математические заметки. – 2009. – 85:11. – С. 748–761.

УДК 517.927

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ШЕСТОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ С РАЗРЫВНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Митрохин С.И.[1]

Рассмотрим дифференциальный оператор шестого порядка с суммируемым потенциалом с разрывной весовой функцией, заданный дифференциальными уравнениями

$$y_1^6(x) + q_1(x)y_1(x) = \lambda a^6 y_1(x), \quad 0 \le x \le x_1,\ a > 0, \tag{1}$$

$$y_2^6(x) + q_2(x)y_2(x) = \lambda b^6 y_2(x), \quad x_1 \le x \le \pi,\ b > 0, \tag{2}$$

и граничными условиями следующего вида:

$$y_1^{(m_1)}(0) = y_1^{(m_2)} = \ldots = y_1^{(m_5)} = y_2^{(n_1)}(\pi) = 0, \tag{3}$$

где $m_1 > m_2 > \ldots > m_5$, $m_1, m_2, \ldots, m_5, n_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 5\}$, где λ — спектральный параметр, функция $q(x)$ называется *потенциалом*.

Всего в (3) возможны 36 различных комбинаций граничных условий, мы считаем, что $y^{(0)}(x) = y(x)$.

Мы будем предполагать, что потенциал $q(x)$ является суммируемой функцией на отрезке $[0, \pi]$:

$$q(x) \in \mathcal{L}_1[0,\pi] \ \Leftrightarrow\ \frac{d}{dx}\left(\int_0^x q(t)dt\right) = q(x) \text{ п. в. на } [0,\pi]. \tag{4}$$

Дифференциальные операторы вида (1)–(2) с условием (3) начали изучаться недавно. Фундаментальная работа ([1]) для дифференциального оператора второго порядка появилась в 2000-м году. В ней для таких операторов получена асимптотика любого порядка для решений дифференциального уравнения и асимптотика собственных значений любого порядка. В работе [2] методом, отличным от метода работы [1], изучался дифференциальный оператор четвертого порядка в случае $m_1 = n_1 = 2$, $m_2 = n_2 = 0$. В монографии [3] метод работы [2] обобщен на дифференциальный оператор $2n$-го порядка ($n = 2, 3, 4, \ldots$), на функционально-дифференциальные операторы второго и четвертого порядка, и на дифференциальные операторы четвертого порядка с разрывной весовой функцией.

Пусть $\lambda = s^6$, $s = \sqrt[6]{\lambda}$ — некоторая фиксированная ветвь корня, выбранная условием $\sqrt[6]{1} = +1$. Пусть w_k — корни шестой степени из единицы, то есть $w_k^6 = 1$, $w_k = \sqrt[6]{1} = e^{\frac{2\pi i(k-1)}{6}} = z^{k-1}$, $z = e^{\frac{2\pi i}{6}}$, $k = 1, 2, \ldots, 6$. Числа w_k находятся на единичной окружности и делят ее на шесть равных частей, причем $w_1 = 1$.

В работе [2] нами доказана следующая теорема.

[1]Митрохин Сергей Иванович (mitrokhin-sergey@yandex.ru), Московский государственный университет, 119192, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1.

Теорема 1. *Общее решение дифференциальных уравнений (1)–(2) имеет вид*

$$y_1^{(m)}(x,s)=\sum_{k=1}^{6}C_{1k}y_{1k}^{(m)}(x,s),\quad y_2^{(m)}(x,s)=\sum_{k=1}^{6}C_{2k}y_{2k}^{(m)}(x,s),\quad m=0,1,\ldots,5, \tag{5}$$

где C_{1k} — произвольные постоянные, $y_{1k}(x,s)$, $y_{2k}(x,s)$ — линейно независимые решения дифференциальных уравнений (1)–(2), причем при $|s|\to\infty$ справедливы следующие асимптотические разложения:

$$y_{1k}^{(m)}(x,s)=(as)^m\Big(w_k^m e^{aw_k sx}-\frac{1}{6a^5s^5}A_{15k}^m(x,s)+O\Big(\frac{e^{\mathrm{Im}\,(|s|x)}}{s^{10}}\Big)\Big),\quad k=1,2,\ldots,6;$$

$$y_{2k}^{(m)}(x,s)=(bs)^m\Big(w_k^m e^{bw_k sx}-\frac{1}{6b^5s^5}A_{25k}^m(x,s)+O\Big(\frac{e^{\mathrm{Im}\,(|s|x)}}{s^{10}}\Big)\Big),\quad k=1,2,\ldots,6;$$

$$A_{15k}^m(x)=\sum_{n=1}^{6}\frac{w_n^m}{w_n^5}e^{aw_n sx}\int_0^x q_1(t)e^{a(w_k-w_n)st}dt_{q1kn},\quad m=0,1,2,\ldots,5;$$

$$A_{25k}^m(x)=\sum_{n=1}^{6}\frac{w_n^m}{w_n^5}e^{bw_n sx}\int_{x_1}^x q_2(t)e^{b(w_k-w_n)st}dt_{q2kn},\quad m=0,1,2,\ldots,5. \tag{6}$$

При этом справедливы следующие формулы:

$$y_{1k}^{(m)}(0,s)=(as)^m;\quad y_{2k}^{(m)}(x_1,s)=(bs)^m\cdot w_k^m\cdot e^{bw_k sx_1};$$

$$k=1,2,\ldots,6;\quad m=0,1,2,\ldots,5.$$

Идею разложения вида (6) мы изложили в главе 5 монографии [3].

Теорема 2. *Асимптотика собственных значений краевой задачи (1)–(3) в секторе отрезка AB индикаторной диаграммы ($A(1;0)$, $B(1/2;\sqrt{3}/2)$) имеет вид*

$$s_{k,6}=\frac{2\pi iK_1}{M(w_1-w_2)}+\frac{2\pi id_{5k}}{M(w_1-w_2)K_1^5}+O\Big(\frac{1}{K_1^{10}}\Big),$$

$$K_1=k+\frac{M_0+N}{6},\quad M_0=\sum_{n=1}^{5}m_n,\quad N=n_1,\quad k=1,2,\ldots,$$

$$d_{5k,6}=-\frac{M^6}{384\pi^6}\Big[\Big(\frac{1}{a^5}\int_0^{x_1}q_1(t)dt_{q1,11}+\frac{1}{b^5}\int_{x^1}^{\pi}q_2(t)\Big)-2\Big(\frac{1}{a^5}\Big(\int_0^{x_1}\ldots\Big)_2+\frac{1}{b^5}\Big(\int_{x_1}^{\pi}\ldots\Big)_3\Big)\Big],$$

$$\Big(\int_0^{x_1}\ldots\Big)_2=\int_0^{x_1}q_1(t)\sin\Big(\frac{2a\pi}{M}\cdot K_1t+\frac{\pi(1-2M_0)}{6}\Big)dt,$$

$$\Big(\int_{x_1}^{\pi}\ldots\Big)_3=\int_{x_1}^{\pi}q_2(t)\sin\Big(\frac{2\pi K_1}{M}\cdot(bt+(a-b)x_1)+\frac{\pi(1-2M_0)}{6}\Big)dt.$$

Литература

[1] Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма—Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Известия РАН. Серия: матем. – 2000. – Т. 64, № 4. – С. 47–108.

[2] Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, математика, механика. – 2009. – № 3. – С. 14–17.

[3] Митрохин С. И. Спектральная теория операторов: гладкие, разрывные, суммируемые коэффициенты. – М.: ИНТУИТ, 2009. – 364 с.

УДК 519.999

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МЕХАНИКА: ЭВОЛЮЦИЯ МОМЕНТОВ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМА О ВОЗВРАЩЕНИИ

Михайлов А.И.[1]

Проблема необратимости, т.е. вопрос способе редукции необратимых по времени уравнений макроскопической динамики (уравнений переноса и др.) к фундаментальным микроскопическим уравнениям (уравнениям Гамильтона и Шредингера) является одной из наиболее глубоких проблем оснований физической теории. С тех пор как были сформулированы парадоксы Лошмидта и Пуанкаре—Цермело устанавливающие противоречие между картиной релаксации к термодинамическому равновесию и основополагающими свойствами механического движения — в частности следствием теоремы Пуанкаре о возвращении является невозможность существования энтропии как функции канонических переменных, монотонно возрастающей на траекториях системы — стало ясно, что редукционизм в узком смысле, т.е. вывод макроскопических уравнений только из оснований механики скорее всего невозможен, да и методологически неприемлим. С другой стороны,истинность как уравнений механики, так и уравнений физической кинетики делает необходимым построение процедуры вывода макроскопических уравнений из некоторых дополнительных прескрипций, причем в рамках этих прескрипций вывод должен быть однозначен, а сами прескрипции не зависимы от конкретного вида гамильтониана системы. К настоящему моменту был предложен ряд подходов к решению проблемы необратимости, и тем не менее она все еще остается не решенной. Большинство современных подходов рассматривают свойства макроскопической динамики как атрибуты фазового потока механической как целого, а не одной изолированной траектории, существенно различаясь в реализации этого методологичесого принципа.

Наиболее известным подходом такого рода является метод Боголюбова [1], заключающейся в построении цепочки уравнений Боголюбова—Борна—Грина—Кирквуда—Ивона путем усреднения многочастичного уравнения Лиувилля. Другой оригинальный метод развит Пригожиным [2]. Этот метод также исходит из уравнения Лиувилля, однако предлагает совсем иную его интерпретацию, основанную на аналогии между уравнениями Лиувилля и Шредингера. Скобка Пуассона с функцией Гамильтона (оператор Лиувилля) рассматривается как аналог гамильтониана, действующего в пространстве состояний — функций распределений, а в роли макроскопических величин (прежде всего температуры и энтропии) выступают операторы не коммутирующие с оператором Лиувилля. Недавно предложен еще один способ интерпретации уравнения Лиувилля как фундаментального уравнения механики — функциональная механика [3], также рассматривающая в качестве состояния системы функцию распределения, но состояние не макроскопической, а микроскопической системы. Поскольку функциональная механика модифицирует уравнения классической микроскопической динамики, необходимо разобраться к каким наблюдаемым последвием приводит подобная модификация. Данный доклад, надеюсь, позволит пролить свет на этот вопрос.

[1]Михайлов Андрей Игоревич (mikhailov1984@gmail.ru), Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

Уравнение Лиувилля (1) определяет динамику системы в функциональной формулировке классической механики.

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho v^i) = 0. \tag{1}$$

Решение задачи Коши для уравнения Лиувилля может быть записано в виде $\rho(t) = \rho_0(u(-t,x))$ где ρ_0 — начальное распределение, а $u(-t,x)$ — поток векторного поля. Разлагая экспоненту векторного поля в ряд Тейлора по координате и усредняя по начальному распределению можно вычислить средние значения вектора состояния как функции моментов начального распределения M^α где α — мультииндекс, а $u_\alpha = \partial^\alpha u/\alpha!$ частная производяная порядка α,с соответствующим весом.

$$\langle u(t,x)\rangle = \sum_\alpha M^\alpha u_\alpha. \tag{2}$$

Естественным образом возникает задача проследить эволюцию центрированных моментов всех порядков. Аналогичным образом используя разложение в ряд Тейлора и переставляя умножение и суммирование мы можем построить алгоритм (3) для вычисления момента распределения любого порядка, если заданы начальные моменты.

$$M^\alpha(t) = \sum_{\substack{\delta_k;\\ \delta_k \leqslant \delta_{k+1}\forall k}} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \left[u_\gamma^{\alpha-\beta} \left(\sum_{\text{перестановки}} \prod_{\substack{k=1;\\ \delta_k \leqslant \delta_{k+1}\forall k}}^{|\beta|} u_{\delta_k}^{i_k} \right) \right] \left[M^{(\alpha-\beta)\gamma} \prod_{\substack{k=1;\\ \delta_k \leqslant \delta_{k+1}\forall k}}^{|\beta|} M^{\delta_k} \right]. \tag{3}$$

Заметим, если распределение имеет вид $\rho(x) = \frac{1}{\varepsilon^D}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, то для его моментов справедлива следующая оценка по порядку величины $M^\alpha \sim \varepsilon^{|\alpha|}$, поэтому используя (3) в численных рассчетах мы можем удерживать лишь конечное число членов ряда, сохраняя приемлимую точность при иследовании динамику средних значений канонических переменных на временах сравнимых с периодом. С другой стороны, существование слабого предела функции распределения (см. [4]) приводит к тому что всякая траектория средних значений канонических переменых заканчивается в значениях координат средних по предельному распределению, а значит на бесконечно больших временах, когда нужно учитывать все члены ряда, формула (3) не удобна, поскольку не позволяет выделить асимптотику. Сохранение фазового объема и финитность движения являются условиями теоремы Пуанкаре о возвращении, однако функциональная механикак предсказывает возникновение отклонений (4) траекторий усредненных от начальной точки за период

$$\left\langle \sum_{i=1}^D (u^i(t,x) - u^i(0,x))^2 \right\rangle = \sum_{\substack{\alpha,\,\beta\\ 1\leqslant|\alpha|,|\beta|}} M^{\alpha+\beta} \sum_{i=1}^D (u_\alpha^i u_\beta^i). \tag{4}$$

Указанный эффект возникает в силу зависимости периода от начальной точки[2] — дифференцируя условие периодичности $u(T(x),x) = u(0,x)$ по координате, мы получаем непериодичности старших производных $u_\alpha(T(x),x) \neq u_\alpha(0,x)$, при этом глобальная периодичность в функциональной механике сохраняется.

[2]Понятно, что для точек, лежащих на одной орбите, период одинаков.

Разрушение периодичности в функциональной механике приводит к несохранению на траекториях средних значений координат интегралов движения классической системы

$$I(\langle u(t,x)\rangle) - I(u(t,x)) = \sum_{\beta} \sum_{\substack{\delta_k; \\ \delta_k \leqslant \delta_{k+1} \forall k}} \left[\left(\sum_{\text{перестановки}} \prod_{\substack{k=1; \\ \delta_k \leqslant \delta_{k+1} \forall k}}^{|\beta|} u_{\delta_k}^{i_k} \right) \prod_{\substack{k=1; \\ \delta_k \leqslant \delta_{k+1} \forall k}}^{|\beta|} M^{\delta_k} I_\beta \right]. \quad (5)$$

Таким образом возникает парадокс — в функциональной механике средние значения инвариантов движения, например энергии сохраняются, но как функции средних значений координат инварианты,и в частности гамильтониан убывают, следовательно предсказание динамики существенно зависит от того, какие величины измеряются — измерение инвариантов позволяет гораздо точнее предсказать состояние классической системы в последующий моменты времени.

Литература

[1] Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. – М., Л.: ОГИЗ. Гостехиздат, 1946.

[2] Пригожин И. От существующего к возникающему: время и сложность в физических науках. Пер. с англ. /Под ред., с предисл. и послесл. Ю. Климонтовича. – Изд. 2-е, доп. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 288 с.

[3] Volovich I.V. Time Irreversibility Problem and Functional Formulation of Classical Mechanics. – arXiv:0907.2445v1 [cond-mat.stat-mech]

[4] Козлов В.В. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. – Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 320 с.

УДК 51-7, 519.2, 519.6

РЕКУРРЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ КУМУЛЯТИВНЫХ ФУНКЦИЙ РИСКА

Михайлова Е.В., Авряскина М.С.[1]

В докладе представлены результаты анализа рекуррентных методов построения кумулятивных функций убытков для предприятия.

Осуществление предпринимательской деятельности неразрывно связано с заключением договоров. Под обязательством согласно ГК РФ (ст. 307 ГК РФ) понимается обязанность одного лица (должника) совершить определенное действие в пользу другого лица (кредитора), либо воздержаться от него. Обязательства возникают из договора, вследствие причинения вреда и иных оснований, предусмотренных ГК РФ. Обязательства должны исполняться надлежащим образом и в срок в соответствии с условиями договора.

Рассмотрим портфель из N договоров предприятия с различными контрагентами.

Пусть X_n — дискретная случайная величина, принимающая значения x_n с вероятностями q_n и описывающая размер убытка предприятия по n-му ($n = \overline{1,N}$) договору.

Структурируем случайную величину иска X_n как показано в [1]. Тогда, величину X_n, фактически описывающую индивидуальный иск можно записать в виде произведения:

$$X_n = I_n \cdot Y_n,$$

где I_n — индикатор, показывающий факт наступления события, связанного с получением ущерба по договору с n-м контрагентом ($I_n = 0$, если обязательства по договору исполнены полностью, $I_n = 1$ в противном случае); Y_n — описывает размер ущерба в случае, когда $I_n = 1$.

Тогда распределение случайной величины I_n может быть определено так:

$$P(I_n = 0) = P(X_n = 0) = p_0,$$

$$P(I_n = 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - p_0 = q_0.$$

Распределение случайной величины Y_n — это условное распределение иска X_n, при условии, что $X_n > 0$:

$$P(Y_n = x_n) = P(X_n = x_n | X_n > 0) = \frac{P(X_n = x_n)}{P(X_n > 0)} = \frac{p_i}{1 - p_0}, i = 1, \ldots n.$$

Нормируем значения возможных ущербов. Пусть $x_n = l_n \cdot B$, где B — порядок убытков, l_n — нормированное значение x_n.

Далее будем полагать, что нормированные значения l_n целочисленны. Тогда очевидно, что l_n будут принимать ограниченное число значений, например J.

Таким образом, можно считать, что все договора разбиты на J групп.

[1]Михайлова Елена Владимировна (milena82@yandex.ru), Авряскина Маргарита Алексеевна (entobez@bk.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Кроме того, по различным договорам неисполнение обязательств наступает с различной вероятностью. Пусть в результате анализа контрагентов получено I различных вероятностей q_i $(i = \overline{1,I})$ нарушения исполнения обязательств.

Тогда можно подсчитать количества договоров N_{ij}, соответствующие различным вероятностям q_i и дискретизированным значениям ущерба l_j $(i = 1, \dots n)$.

В результате получим таблицу, в каждой ячейке которой расположены величины N_{ij}.

Требуется определить кумулятивный размер ущерба предприятия.

Рекуррентный метод de Pril [2, 3] основан на модели индивидуальных рисков. Для расчета используется формула:

$$p(s) = \frac{1}{s} \sum_{j}^{\min(s,J)} \sum_{l=0}^{[\frac{s}{j}]} A(l-1,j)p(s - j \cdot l),$$

с начальным значением

$$p(0) = p_0 = \prod_{i=1}^{I} (1 - q_i)^{\sum_j^J N_{ij}}.$$

Тогда кумулятивная функция убытков примет вид:

$$R(s) = p(s \le S) = \sum_{s=0}^{S_{\max}} p(k).$$

Рекуррентный метод Panjer [4] основан на модели коллективных рисков. Для расчета используется формула:

$$P_S(s) = \sum_{j=1}^{\min(s,J)} p(j) \cdot P_S(s-j) \cdot \left(a + \frac{b \cdot j}{s}\right),$$

с начальным значением

$$P_S(0) = H_S(0) = \pi(0) = P(\nu = 0),$$

при условии

$$\pi(k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \cdot \pi(k-1),$$

где a, b — некоторые константы, определяемые процессом поступления исков.

Кумулятивная функция убытков, полученная по методу Panjer имеет вид:

$$R(s) = p(s \le S) = \sum_{s=0}^{S_{\max}} P_S(s).$$

Таким образом, на основе применения рекуррентных методов de Pril и Panjer получены графики кумулятивных функций и функций плотностей распределения для 35 портфелей. Проанализирована сходимость методов в зависимости от размера порфеля и рассматриваемых в них вероятностей.

Литература

[1] Фалин Г.И. Математический анализ рисков в страховании. – М.: Российский юридический издательский дом, 1994. – 130 с.

[2] De Pril. On the exact computation of the aggregate claims distribution in the individual life model // Astin Bulletin. – 1986. – №16.2. – P. 109–112.

[3] De Pril. The aggregate claims distribution in the individual model with arbitrary positive claims // Astin Bulletin. – 1989. – №19.1. – P. 9–24.

[4] Panjer H.H. Recursive evaluation of a famaly of compound distributions // Astin Bulletin. – 1981. – №12. – P. 12–26.

УДК 519.2

ПРИМЕНЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ БЮЛЬМАНА—ШТРАУБА ДЛЯ АНАЛИЗА РЕНТАБЕЛЬНОСТИ

Михайлова Е.В., Никишов В.Н.[1]

В докладе представлены результаты исследования доверительной модели Бюльмана—Штрауба для анализа рентабельности.

Рентабельность является важнейшим показателем, отражающим конечные финансовые результаты деятельности предприятия. Проблема прогнозирования коэффициента рентабельности на следующий период актуальна, т.к. на основе полученных значений предприятие может принимать решения об объемах и видах ведения хозяйственной деятельности в следующем периоде.

Для получения коэффициента рентабельности на следующий период можно использовать подходы, используемые в страховании и подробно описанные в [1]. Тогда рентабельность предприятия будет определяться как взвешенное среднее значений рентабельности, определенных на основе описанных выше подходов.

Рассмотрим производственную деятельность предприятия за ряд лет. Для этого введем две матрицы: прибыли D и затрат S. По строкам матриц расположены данные о партиях товаров (работ, услуг), распределенные по годам.

Пусть строки $i = \overline{1,I}$ — количество групп (номенклатур) товаров, а столбцы $j = \overline{1,J}$ — количество лет наблюдений.

В общем случае в каждой группе находится N_{ij} договоров. Пронумеруем договора в группе по $k = 1, \ldots, N_{ij}$.

Допустим, что величины D_{ijk} являются случайными со средним $E(D_{ijk}) = \mu$ и дисперсией $Var(D_{ijk}) = \sigma^2$.

На основе данных о прибыли и затратах для предприятия можно рассчитать матрицу X, элементами которой являются коэффициенты рентабельности $X_{ij} = D_{ij}/S_{ij}$ отдельной группы товаров i в год наблюдения j.

На основе исходных данных рассчитаем величины, считая, что индексом "+" обозначается суммирование:

$$S_{i+} = \sum_{j=1}^{J} S_{ij}, \qquad S_{+j} = \sum_{i=1}^{I} S_{ij}, \qquad S_{++} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} S_{ij},$$

$$D_{i+} = \sum_{j=1}^{J} D_{ij}, \qquad D_{+j} = \sum_{i=1}^{I} D_{ij}, \qquad D_{++} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} D_{ij},$$

$$X_{i+} = \frac{1}{S_{i+}}\sum_{j=1}^{J} X_{ij}S_{ij}, \quad X_{+j} = \frac{1}{S_{+j}}\sum_{i=1}^{I} X_{ij}S_{ij}, \quad X_{++} = \frac{1}{S_{++}}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} X_{ij}S_{ij}.$$

Среднее значение и дисперсия рентабельности отдельной группы договоров определяются выражениями:

$$E(X_{ij}) = m, \qquad Var(X_{ij}) = \frac{s^2}{S_{ij}},$$

[1]Михайлова Елена Владимировна (milena82@yandex.ru), Никишов Виктор Николаевич (TSh-sea05@yandex.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

где $m = \mu/d$ — параметр, характеризующий среднее значение на единицу расходов, $s^2 = \sigma^2/d$ — параметр, характеризующий дисперсию на единицу расходов.

Таким образом можно считать, что величины X_{ij} независимы и имеют нормальное распределение $N\left(m, \dfrac{s^2}{S_{ij}}\right)$. При этом средние значения m в группах могут различаться, а дисперсии одинаковы и равны $\dfrac{s^2}{S_{ij}}$.

Проверка гипотез осуществляется на основе критериев Стьюдента, Фишера или дисперсионного анализа [2–5].

Согласно модели Бюльмана—Штрауба величины X_{ij} можно представить так:

$$X_{ij} = m + \Omega_i + \Omega_{ij},$$

где Ω_i и Ω_{ij} — независимые случайные величины с математическим ожиданием и дисперсиями, определяемыми выражениями:

$$E(\Omega_i) = E(\Omega_{ij}) = 0, \qquad Var(\Omega_i) = a, \qquad Var(\Omega_{ij}) = \frac{s^2}{S_{ij}}.$$

Заметим, что построение модели подобного рода оправдано, если гипотеза о равенстве средних групп отвергается (в противном случае портфель предпринимательских договоров можно считать однородным и рентабельность по всем видам деятельности будет одинакова).

Структурные параметры модели задаются выражениями:

$$\widehat{s}^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - X_{i+})^2 S_{ij}, \qquad a = \frac{W - V}{K},$$

где

$$W = \frac{1}{IJ-1}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{S_{ij}}{S_{++}}(X_{ij} - X_{++})^2,$$

$$V = \frac{1}{I(J-1)}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{S_{ij}}{S_{++}}(X_{ij} - X_{i+})^2,$$

$$K = \frac{1}{IJ-1}\left[1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{I} S_{i+}^2}{S_{++}^2}\right].$$

На основе построенной модели получены выражения для расчета прогнозных значений рентабельности с использованием однородной и неоднородной схем.

Однородная схема:

$$Z_k = X_{k+}\gamma_k + \frac{1-\gamma_k}{\gamma}\sum_{i=1}^{I}\gamma_i X_{i+},$$

где

$$\gamma_k = \frac{aS_{k+}}{aS_{k+} + s^2}.$$

Неоднородная схема:

$$Z_k = m(1-\gamma_k) + \gamma_k X_{i+} = X_{++}(1-\gamma_k) + \gamma_k X_{i+}.$$

Таким образом, на основе построенной модели Бюльмана—Штрауба получены прогнозные значения рентабельности и проведен анализ полученных результатов.

Литература

[1] Каас Р.И.,Гувертс Ж., Дэнэ Ж., Детун М. Современная актуарная теория риска: перев. с англ. – М.: Янус-К, 2007. – 376 с.

[2] Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.

[3] Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975.

[4] Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с.

[5] Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 993 с.

УДК 530.1

НЕЙТРОН-АНТИНЕЙТРОННЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ В СОЛНЕЧНЫХ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧАХ

Молчатский Л.С.[1], *Панков В.Д.*[2]

Одним из давних загадочных вопросов физики элементарных частиц является вопрос о сохранении барионного заряда. С точки зрения современных физических теорий эта величина не должна быть строго сохраняющейся, так как она не связана с какой-либо калибровочной симметрией. Однако эксперименты по поиску процессов с нарушением закона сохранения барионного заряда пока не привели к положительному результату. Эти поиски ограничены двумя типами экспериментов: поисками распада протона и нейтрон-антинейтронных осцилляций в потоках холодных нейтронов, идущих от ядерного реактора. В настоящее время большие надежды возлагаются на опыты с ультрахолодными нейтронами в ловушках [1, 2].

В данной работе исследуется возможность поиска $n - \tilde{n}$ осцилляций в солнечных космических лучах (СКЛ). Согласно астрофизическим данным [3] при хромосферных вспышках на Солнце в космическое пространство выбрасываются мощные потоки протонов, ядер гелия и других химических элементов с энергиями, достигающими значений порядка $10\,GeV$. Поскольку удельная энергия связи нуклонов в атомных ядрах порядка $8\,MeV/nucleon$, в потоках с энергией $E \geq 10\,MeV$ присутствуют нейтроны. Если барионный заряд не сохраняется и в природе существуют нейтрон-антинейтронные осцилляции, то в потоках, идущих от Солнца, должны иметь место переходы

$$n \to \tilde{n} \to \tilde{p} + e^+ + \nu_e. \tag{1}$$

Привлекательность экспериментов с СКЛ в сравнении с экспериментами на поверхности Земли состоит в следующем.

При несохранении барионного заряда зарядовые состояния не являются стационарными. Связь между зарядовыми и стационарными состояниями дается углом смешивания, который определяется соотношением

$$\sin 2\theta = \frac{2\delta}{E_2 - E_1}, \tag{2}$$

где δ — параметр смешивания состояний, E_1 и E_2 — энергетические уровни стационарных состояний нейтрон-антинейтронной системы. Вероятность перехода —

$$w(n \to \tilde{n}) \propto \sin^2 2\theta. \tag{3}$$

Поскольку магнитные моменты нейтрона и антинейтрона противоположны по знаку, в присутствии внешнего магнитного поля взаимодействие системы с полем вносит доминирующий вклад в расщепление уровней, равный $|E_2 - E_1| = 2\,|\mu|\,B$, где B — индукция внешнего магнитного поля. Таким образом, из формул (2) и (3) следует, что интенсивности протекания процессов (1) на поверхности Земли и в СКЛ связаны соотношением

$$I(Earth)/I(cosmic - ray) \approx (B_{cr}/B_E)^2. \tag{4}$$

[1]Молчатский Лев Соломонович (levmolchatsky@mail.ru), Самарский государственный педагогический университет, 443099, Россия, г. Самара, ул. М. Горького, 65/67.

[2]Панков Владимир Дмитриевич, Самарский государственный университет 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Так как индукция магнитного поля у поверхности Земли $B \approx 0.5\,G$, а в среде космического излучения — $B_{cr} \approx 5 \times 10^{-5}\,G$ [3] , из формулы (4) следует, что фактор подавления осцилляций в земных условиях в сравнении с условиями в (СКЛ) равен

$$I(Earth)/I(cosmic - ray) \approx 10^{-8}.$$

Этот результат является аргументом в пользу эффективности экспериментов с СКЛ.

Вычисления, выполненные в работе, показывают, что среди антинуклонов в окрестности Земли должны доминировать антипротоны, возникающие в результате цепочки переходов (1). В общем нуклонном потоке СКЛ в окрестности Земли следует ожидать, что $I_{\tilde{p}}/I_{total} \approx 10^{-16} - 10^{-17}$.

Литература

[1] Kerbikov B.O., Kudryavtsev A.E., Lensky V.A. Neutron-antineutron oscillations in a trap revisited // ЖЭТФ. – 2004. – Т. 125. – В. 3. С. 476–485.

[2] Ignatovich V. On $n - \tilde{n}$ oscillation of ultracold neutrons // Phys. Rev. D. – 2003. – V. 67. – 016004(8).

[3] Сюняев Р.А. и др. Физика космоса. Энциклопедия. – М., 1986.

УДК 530.1 531.011 577.21

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОДСТАНОВКИ КОУЛА—ХОПФА И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Обрубов К.С., Журавлев В.М.[1]

В докладе излагается переформулировка метода обобщенных подстановок Коула—Хопфа [1–3] на случай нелинейных дискретных конечномерных динамических систем. Метод основывается на возможности перенести общий принцип вычисления линеаризуемых методом обобщенных подстановок Коула—Хопфа уравнений в частных производных на уравнения, в которых частная производная по координате заменена на дифференциальный оператор на матричной алгебре. Таким оператором является матричный коммутатор:

$$D_x\hat{F} = [\hat{x}, \hat{F}]$$

со стандартным правилом Лейбница. Здесь $\hat{x}$ — некоторый выделенный элемент матричной алгебры. Производная по времени в стандартном методе Коула—Хопфа сохраняется и в новом подходе. В результате удается строить решения большого числа нелинейных динамических систем, в том числе систем типа Вольтерра—Лотки и систем типа гиперцикл. В докладе приводятся конкретные примеры вычисления интегрируемых уравнений и построения их точных решений.

Литература

[1] Журавлев В.М., Никитин А.В. Новый подход к построению нелинейных эволюционных уравнений, линеаризуемых с помощью подстановок типа Коула—Хопфа // Нелинейный мир. – 2007. – Т. 5. – №9. – С. 603–611.

[2] Журавлев В.М. Метод обобщенных подстановок Коула—Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений // ТМФ. – 2009. – Т. 158. – №1. – С. 58–71.

[3] Журавлев В.М., Журавлев А.В., Корнилов Д.А., Никитин А.В., Самойлов В.В. Метод обобщенных подстановок Коула—Хопфа в теории нелинейных дискретных систем // Сб. Прикладная математика и механика. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – С. 89–103.

[4] Эйген М., Шустер П. Гиперцикл. Принципы самоорганизации макромолекул. Перевод с английского. – М.: Мир, 1982. – 270 с.

[1] Обрубов Константин Сергеевич (zhvictorm@gmail.com), Журавлев Виктор Михайлович (zhvictorm@gmail.com), Ульяновский государственный университет, 432001, Россия, г. Ульяновск, ул. Л.Толстого, 42.

УДК 517.968.22: 517.58

О ДВУХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ, ОБОБЩАЮЩИХ ФУНКЦИЮ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА, ИХ СВОЙСТВАХ И ПРИМЕНЕНИИ

Огородников Е.Н.[1]

Обозначим

$$\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)=\Gamma\left(\begin{array}{c}\mu\\ \nu\end{array}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{n}\Gamma\left(\begin{array}{c}k\rho+\nu\\ k\rho+\mu\end{array}\right)z^n, \tag{1}$$

$$\mathcal{E}_\rho(z;\mu)=\Gamma(\mu)\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{n}\Gamma\left(\begin{array}{c}k\rho+1\\ k\rho+\mu\end{array}\right)\frac{z^n}{n!}, \tag{2}$$

суммы рядов, где $\Gamma(\mu)$ — гамма-функция Эйлера, $\Gamma\left(\begin{array}{c}\mu\\ \nu\end{array}\right)=\dfrac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu)}$; $z,\mu,\nu\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\rho>0$; ν, $k\rho+\nu\notin\mathbb{Z}_0^-$.

Первая из функций $\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)$ примыкает к хорошо известной обобщенной функции Миттаг—Леффлера, введенной Килбасом А.А. и Сайго М. в работе [1] как сумма ряда

$$E_{\alpha,m,l}(z)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

с коэффициентами

$$c_0=1\ \text{ и }\ c_n=\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left[\begin{array}{c}\alpha(km+l)+1\\ \alpha(km+l+1)+1\end{array}\right]\ \ (n\in\mathbb{N}),$$

где $\alpha,l\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\alpha>0$, $m>0$, $\alpha(km+1)\notin\mathbb{Z}^-$ $(k\in\mathbb{N}_0)$. Свойства этой специальной функции изучались в работах [2, 3]. Определение и некоторые основные факты можно найти в монографии [4].

Вторая из введенных выше функций возникла в работе автора [5] в процессе решения начально-краевой задачи для вырождающегося уравнения дробной диффузии, записанного в терминах дробной производной Кобера—Эрдейи, при попытке распространить функцию $\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)$ на случай $\nu=0$. Нетрудно показать, что

$$\lim_{\nu\to0}\mathcal{E}_\rho(z;\nu,\mu)=\Gamma(\mu)\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{n}\Gamma\left(\begin{array}{c}k\rho+1\\ k\rho+\mu\end{array}\right)\frac{\left(\dfrac{z}{\rho}\right)^n}{n!}=\mathcal{E}_\rho\left(\frac{z}{\rho};\mu\right).$$

Как было сказано выше, функции вида (1) и (2) возникают при решении начальных задач для дифференциальных уравнений дробного порядка с переменными коэффициентами. Одним из методов обоснования корректности постановки этих решений и методов их решения является идея редукции дифференциального уравнения к соответствующему интегральному уравнению вольтерровского типа [4]. Поэтому основное внимание в докладе отводится задаче нахождения явных решений интегрального уравнения с правой частью специального вида

$$\varphi(x)-\lambda x^\beta I_{0x}^\alpha x^\eta\varphi(x)=kx^{\sigma-1}, \tag{3}$$

[1]Огородников Евгений Николаевич (eugen.ogo@gmail.com), Самарский государственный технический университет, 443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

где $I_{0x}^{\alpha} f \equiv \left(I_{0+}^{\alpha} f\right)(x)$ — левосторонний интеграл Римана—Лиувилля порядка α.

В частности, при $\alpha + \beta \neq \sigma \ \ (\sigma > 0)$ решение уравнения (3) записывается с помощью функции (1), в которой $\rho = \alpha + \beta + \eta$, $\mu = \sigma - \beta$, $\nu = \sigma - \alpha - \beta$, и имеет вид

$$\varphi(x) = kx^{\sigma-1}\mathcal{E}_{\rho}(\lambda x^{\rho}; \nu, \mu).$$

В случае $\alpha + \beta = \sigma$ его решение принимает вид

$$\varphi(x) = kx^{\sigma-1}\mathcal{E}_{\sigma}\left(\frac{x^{\sigma}}{\sigma}; \alpha\right).$$

Кроме частных случаев $\eta = 0$ или $\beta = 0$, рассмотрены особые случаи, когда уравнение (3) является уравнением третьего рода. Найдено решение интегрального уравнения (3) с правой частью в виде обобщенного степенного ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x^{\sigma})^n$.

Для функций (1) и (2) приводятся формулы дробного интегрирования и дифференцирования. Указана связь с известными функциями.

В качестве примеров приведены решения задачи типа Коши для дробного дифференциального уравнения

$$D_{0x}^{\alpha} y - \lambda x^{\beta} y = 0 \ \ (0 < x \leq b; \alpha > 0; \lambda \in \mathbb{R}),$$

$$\left(D_{0x}^{\alpha-k} y\right)(0+) = b_k \ \ (b_k \in \mathbb{R}; k = 1, 2 \ldots n; n = -[-\alpha])$$

в терминах функций (1), (2) и аналогичные задачи для дифференциальных уравнений с производной Кобера—Эрдейи.

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию (проект РНП 2.1.1/3397), РФФИ (проект №07-01-00478-а).

Литература

[1] Kilbas A.A., Saigo M. On solution of integral equation of Abel–Volterra type // Diff. Integr. Equat. – No. 8. – 1995. – P. 993–1011.

[2] Gorenflo R., Kilbas A.A., Rogosin S.V. On the generalized Mittag-Leffler type function // Integral Transform. Spec. Fund. – 1998. – 7(3–4). – P. 215–224.

[3] Горенфло Р., Килбас А.А., Рогозин С.В. О свойствах обобщенной функции Миттаг-Леффлера // Доклады НАН Беларуси. – 1998. – Т. 42. – №5. – С. 34–39.

[4] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations // Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 pp.

[5] Огородников Е.Н. Нелокальные краевые задачи для одного модельного параболического уравнения с дробной производной // В сб.: Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. Четвертой Всероссийской научн. конф. с междунар. участием. Ч. 3. – Самара: СамГТУ, 2007. – С. 147–152.

УДК 517.95: 517.968.72

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВОЛНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ И МЛАДШИМИ ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА—ЛИУВИЛЛЯ

Огородников Е.Н., Яшагин Н.С.[1]

К настоящему моменту времени накоплено достаточно большое количество результатов, относящихся к постановке и методам решения начальных, начально-краевых, нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений с частными дробными производными Римана—Лиувилля или Капуто [1]. Основное внимание авторов, чаще всего, сосредоточено на дифференциальных уравнениях дробного порядка: уравнениях дробной диффузии, диффузионно-волновых уравнениях, уравнениях с операторами дробного дифференцирования по всем переменным. Уравнения с младшими дробными производными изучены, как нам кажется, недостаточно. Подобные дифференциальные уравнения интересны уже тем, что, с одной стороны, для них оказываются корректными классические постановки начальных и начально-краевых задач, с другой стороны, их решения наделены свойствами, присущими некоторым нелинейным объектам и их математическим моделям.

Левосторонний частный интегро-дифференциальный оператор Римана—Лиувилля порядка $\alpha(\alpha \in \mathbb{R})$ по переменной $t\,(t \in [a,b])$ мы обозначаем I_{at}^{α} и его действие на функцию, например, двух переменных $u = u(x,t)$ определяется равенствами:

$$I_{at}^{\alpha} = D_{at}^{-\alpha} u \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^t \dfrac{u(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \ (\alpha > 0), \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^n I_{at}^{n+\alpha} u \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^n D_{at}^{-(n+\alpha)} u \ (\alpha \le 0), \end{cases} \tag{1}$$

где $n = [-\alpha]+1$, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера. В соответствии с определением (1) при $\alpha \ge 0$ символ $D_{at}^{\alpha} u$ означает частную дробную производную по t порядка α и $D_{at}^{\alpha} u = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^n I_{at}^{n-\alpha} u$.

В докладе рассмотрено линейное однородное дифференциальное уравнение с волновым оператором

$$u_{tt} + \sum_{k=1}^{n} a_k D_{0t}^{\alpha_k} u_t + \sum_{s=1}^{m} b_s D_{0t}^{\beta_s} u = a^2 u_{xx}, \tag{2}$$

постоянными коэффициентами a_k, b_s и действительными параметрами α_k, β_s $(a_k, b_s \in \mathbb{R}, \alpha_k, \beta_s \in (0,1), k = 1,2 \ldots n, s = 1,2 \ldots m)$ относительно искомой функции $u = u(x,t)$ в области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l, t > 0\}$.

Задача. Найти решение дифференциального уравнения (2) $u(x,t) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap$ $\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \ (t \ge 0) \tag{3}$$

[1]Огородников Евгений Николаевич (eugen.ogo@gmail.com), Яшагин Николай Сергеевич (nik-yashagin@yandex.ru), Самарский государственный технический университет, 443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

и начальными условиями

$$u(x,0)=\tau(x),\ \ u_t(x,0)=\nu(x)\ \ (0\le x\le l). \tag{4}$$

Используя классический метод Фурье, решение задачи (2)–(4) ищем в виде

$$u(x,t)=X(x)T(t).$$

Как и в случае волнового уравнения относительно $X(x)$ приходим к задаче Штурма–Лиувилля и определяем собственные значения $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ и собственные функции $X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{l}x$ этой задачи ($n\in\mathbb{N}$). Для функции $T(t)$ получим множество дифференциальных уравнений

$$T_n''+\sum_{k=1}^{n}a_kD_{0t}^{\alpha_k}T_n'+\sum_{s=1}^{m}b_sD_{0t}^{\beta_s}T_n+\lambda_na^2T_n=0, \tag{5}$$

где $T_n(t)=T_n(t,\lambda_n)\,(n\in\mathbb{N})$.

Обоснованию существования и единственности решения задачи Коши для уравнений вида (5) посвящена работа авторов [2].

Пусть заданы значения

$$T_n(0)=A_n, T_n'(0)=B_n. \tag{6}$$

Тогда решение задачи Коши (5)–(6) можно представить в виде

$$T_n(t)=A_nf_n(t)+B_ng_n(t), \tag{7}$$

где $f_n(t)$, $g_n(t)$ — фундаментальная система решений уравнения (5), обладающего свойствами: $f_n(0)=1, g_n(0)=0$ и $f_n'(0)=0$, $g_n'(0)=1$.

Считая теперь A_n, B_n в (7) произвольными действительными константами, можно записать решение уравнения (2), удовлетворяющего граничным условиям (3), в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_nf_n(t)+B_ng_n(t)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{8}$$

Подчиняя (8) начальным условиям (4), в предположении, что функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ допускают разложение в ряд Фурье по собственным функциям $\sin\frac{n\pi}{l}x$, находим решение поставленной задачи

$$u(x,t)=\frac{2}{l}\int_0^l\sum_{n=1}^{\infty}\left[\tau(\xi)f_n(t)+\nu(\xi)g_n(t)\right]\sin\frac{n\pi}{l}\xi\sin\frac{n\pi}{l}xd\xi.$$

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию (проект РНП 2.1.1/3397), РФФИ (проект №07-01-00478-а).

Литература

[1] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 pp.

[2] Огородников Е.Н., Яшагин Н.С. Существование, единственность и структура решения задачи Коши для одного класса обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля / В сб.: Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. Седьмой Всероссийской научн. конф. с междунар. участием. Ч. 3. – Самара: СамГТУ, 2010. – С. 225–232.

УДК 539.376:517.968.72

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЯЗКО-УПРУГОГО ТЕЛА С ПАМЯТЬЮ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Огородников Е.Н., Радченко В.П., Яшагин Н.С.[1]

В монографии [1] приведены различные одномерные модели вязко-упругого тела с памятью (наследственно-упругого тела) основанные на использовании дробного дифференцирования (в том, или ином смысле его определения), в частности, уравнение

$$\sigma + \sum_{k=1}^{n} b_k D_{0t}^{\beta_k} \sigma = E_0 \varepsilon + \sum_{k=1}^{m} E_k D_{0t}^{\alpha_k} \varepsilon, \tag{1}$$

где $\sigma = \sigma(t)$ и $\varepsilon = \varepsilon(t)$ — напряжение и деформация в момент времени t; b_k, E_0, E_k — заданные постоянные величины; $D_{0t}^{\alpha}\varphi \equiv \left(D_{0+}^{\alpha}\varphi\right)(t)$ — левосторонняя дробная производная Римана—Лиувилля порядка α.

Реологическая модель (1) является обобщением стандартной модели вязко-упругого тела [2], совпадая с последней при $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{N}$, и в общем случае содержит различные наборы междупредельных производных порядков $\alpha_k, \beta_k \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}$. Конкретизируя зависимость (1), можно записать равенство

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{s} b_{ki} D_{0t}^{k+\beta_{ki}} \sigma = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{r} a_{kj} D_{0t}^{k+\alpha_{kj}} \varepsilon, \tag{2}$$

где $b_{00} = 1$, $a_{00} = E_0$; $\alpha_{kj} = \{\alpha_k\}$ $(j = 1, 2 \ldots r)$, $\beta_{ki} = \{\beta_k\}$ $(i = 1, 2 \ldots s)$ — дробные части чисел α_k, β_k, причем $\alpha_{k0} = \beta_{k0} = 0$, при любых k.

Изучение и использование реологических моделей вида (2) наталкивается на определенные трудности, связанные с фактом несуммируемости в общем случае дробных производных $D_{0t}^{\alpha}\varphi$ порядка $\alpha > 1$.

Вместо основного соотношения между напряжением, деформацией и их производными в виде (2) в работе авторов [3] предложено следующее равенство:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{s} b_{ki} D_{0t}^{\beta_{ki}} \sigma^{(k)} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{r} a_{kj} D_{0t}^{\alpha_{kj}} \varepsilon^{(k)}, \tag{3}$$

где для функции $u = u(t)$, $u^{(k)} = \left(\dfrac{d}{dt}\right)^{(k)} u$. В частности, ограничиваясь одной целой и одной междупредельной производной в каждом интервале $[k, k+1)$, можно записать

$$\sum_{k=0}^{n} \left(b_{k0} + b_{k1} D_{0t}^{\beta_k}\right) \sigma^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} \left(a_{k0} + a_{k1} D_{0t}^{\alpha_k}\right) \varepsilon^{(k)}. \tag{4}$$

Считая $\sigma = \sigma(t)$ заданной функцией времени, для определения зависимости $\varepsilon = \varepsilon(t)$, в частности, при $m = 1$, получим дифференциальное уравнение с дробными производными

$$E_0 \varepsilon + a_{01} D_{0t}^{\alpha_0} \varepsilon + a_{10} \dot{\varepsilon} + a_{11} D_{0t}^{\alpha_1} \dot{\varepsilon} = f(t), \tag{5}$$

[1]Огородников Евгений Николаевич (eugen.ogo@gmail.com), Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru), Яшагин Николай Сергеевич (nik-yashagin@yandex.ru), Самарский государственный технический университет, 443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

где $f(t)$ — суть левая часть равенства (4).

В классе функций $\dot{\varepsilon}(t) \in AC[0,T]$ и $f(t) \in L(0,T)$ уравнение (5) редуцируется к интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода

$$a_{11}\varepsilon + a_{10}I_{0t}^{\alpha_1}\varepsilon + a_{01}I_{0t}^{1+\alpha_1-\alpha_0}\varepsilon + E_0 I_{0t}^{1+\alpha_1}\varepsilon = I_{0t}^{1+\alpha_1} f, \tag{6}$$

решение которого заведомо существует и единственно.

В докладе выделены специальные случаи уравнения (6), в которых его решение может быть найдено в явном виде в терминах специальной функции типа Миттаг—Леффлера [3].

Использование реологических соотношений (4) при моделировании вязко-упругих элементов осцилляторов неизбежно приводит к дифференциальным уравнениям с дробными производными Римана—Лиувилля.

В качестве модельного дробного осцилляционного уравнения в работе [4] рассмотрено дифференциальное уравнение

$$\ddot{u} + \sum_{k=1}^{n} a_k D_{0t}^{\alpha_k}\dot{u} + \sum_{s=1}^{m} a_k D_{0t}^{\beta_s} u + b_0 u = f(t), \tag{7}$$

где $\alpha_k, \beta_s \in (0,1)$, $k = 1,2\ldots n$; $s = 1,2\ldots m$, для которого обоснована корректность задачи Коши в классической постановке: $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$. В настоящей работе уравнение (7) рассмотрено в предположении, что $\alpha_k \in [0,1)$, а $\beta_s \in (0,2)$. Обоснованы существование и единственность решения видоизмененной задачи типа Коши с начальными данными

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+}\left(\dot{u} + \sum_{k=1}^{n} a_k I_{0t}^{1-\alpha_k}\dot{u} + \sum_{s=1}^{m} b_s I_{0t}^{1-\beta_s} u\right) = u_1.$$

Простейший пример уравнения вида (7) с дробной производной Римана—Лиувилля порядка больше единицы и соответствующая постановка начальной задачи приведены в работе [5]. Решение найдено в явном виде в терминах некоторых специальных функций, связанных с функцией типа Миттаг–Леффлера и введенных авторами в работе [6].

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию (проект РНП 2.1.1/3397), РФФИ (проект №07-01-00478-а).

Литература

[1] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 pp.

[2] Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.

[3] Радченко В.П., Огородников Е.Н., Яшагин Н.С. Математические модели вязкоупругого тела и вынужденные колебания дробных осцилляторов / В сб.: Тринадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука: Матеріали конференції. Ч. 1. – Київ, 2010. – С. 344–345.

[4] Огородников Е.Н., Яшагин Н.С. Существование, единственность и структура решения задачи Коши для одного класса обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля / В сб.: Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. Седьмой Всероссийской научн. конф. с междунар. участием. Ч. 3. – Самара: СамГТУ, 2010. – С. 225–232.

[5] Огородников Е.Н., Яшагин Н.С. Постановка и решение задач типа Коши для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана–Лиувилля // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. – №1(20). – С. 24–36.

[6] Огородников Е.Н., Яшагин Н.С. Некоторые специальные функции в решении задачи Коши для одного дробного осцилляционного уравнения // Вестник Самар. госуд. техн. ун-та. Серия: физ.-мат. науки. – Самара: СамГТУ, 2009. – №.1(18). – С. 276–279.

УДК 51.72

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНОЙ НАНОСТРУКТУРЫ

Островская Н.В., Полякова В.В., Попков А.Ф.[1]

Исследована динамика векторов намагниченности в трехслойной планарной структуре, состоящей из двух ферромагнитных нанослоев разной толщины, разделенных немагнитной металлической прослойкой. Структура помещена в постоянное внешнее магнитное поле и управляется спин-поляризованным током инжекции. В пионерской работе [1] на основе физических представлений было показано, что в подобной структуре, в зависимости от величины тока инжекции, возможны две равновесные конфигурации распределения вектора намагниченности в магнитных слоях — антипараллельная при малых токах и параллельная при больших. Теоретический результат был позднее подтвержден экспериментально, напр., в работах [2, 3] и привел к разработке концепции магниторезистивной энергонезависимой компьютерной памяти. Это побудило нас к более детальному анализу процессов, протекающих в такой структуре.

В работе [1] и ряде последующих теоретических работ динамика намагниченности управляемого слоя была рассмотрена без учета взаимного влияния слоев (напр., [4]). В построенной нами модели это влияние учитывается: математическая модель структуры представляет собой два связанных уравнения Ландау—Лифшица—Гильберта динамики векторов намагниченности в каждом слое [5]. В силу малых линейных размеров структуры (порядка нескольких нанометров) члены, отвечающие обменным взаимодействиям и содержащие пространственные производные, в обоих уравнениях могут быть опущены, так что распределение намагниченности в каждом слое можно считать однородным. Таким образом, модель сводится к нелинейной динамической системе уравнений относительно компонент векторов намагниченности. Поскольку величина модуля векторов намагниченности в структуре постоянна, полное фазовое пространство системы четырехмерно и представляет собой прямое произведение двух сферических поверхностей единичного радиуса. Нами было рассчитано число особых точек динамической системы в зависимости от величин внешнего магнитного поля и тока инжекции, определены их типы и координаты. Было найдено, что при определенных комбинациях параметров в системе возникают предельные циклы, указывающие на возбуждение прецессии намагниченности в слоях структуры. При фиксированных значениях поля были выявлены интервалы значений тока, в которых динамика намагниченности имеет однотипный характер. Показано, что прежде чем система достигнет состояния устойчивого переключения с параллельной конфигурацией намагниченности, она проходит каскад бифуркаций с различными типами спиновой динамики. Численно были установлены пороговые значения тока, при котором происходит перестройка фазовых портретов динамической системы.

[1]Островская Наталья Владимировна (ost-miet@yandex.ru), Полякова Виктория Владиславовна (vika.breeze@gmail.com), Попков Анатолий Федорович (afpopkov@inbox.ru), Московский государственный институт электронной техники (технический университет), 124498, Россия, Москва, Зеленоград, Солнечная аллея, 5.

Литература

[1] Slonczewski J.C. Current-driven excitation of magnetic multilayers // JMMM. – 1996. – V. 159. – L1.

[2] Katine J.A. et al. Current-driven magnetization reversal and spin wave excitations in Co/Cu/Co pillars // Phys. Rev. Lett. – 2000. – V. 84. – P. 3149.

[3] Grollier J. et al. Field dependence of magnetization reversal by spin transfer // Phys. Rev. B. – 2003. – V. 67. – P. 174402.

[4] Bonin R., Serpico C., Bertotti G. et al. Analytical study of magnetization dynamics driven by spin-polarized currents // Eur. Phys. J. B. – 2007. – V. 59. – P. 435–445. DOI: 10.1140/epjb/e2007-00051-5

[5] Ostrovskaya N.V., Polyakova V.V., Popkov A.F. Numerical simulation of current-driven magnetization dynamics in three-layered magnetic structures // J. Phys.: Conf. Ser. – 2010. – V. 200. – 072073. DOI: 10.1088/1742-6596/200/7/072073.

УДК 530.12

ТОЧНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ФАНТОМНЫХ И ТАХИОННЫХ ПОЛЕЙ

Панина О.Г.[1], *Червон С.В.*[2]

В рамках космологии мира на бране класс точных решений для скалярных фантомных и тахионных полей весьма ограничен [1], поэтому требуются новые подходы для получения точных решений. В настоящей работе рассматривается приложение метода суперпотенциала к решению задач космологии с полями темного сектора. Впервые метод суперпотенциала был аппробирован в работе [2] в приложении к миру на бране.

Представим суперпотенциал как потенциал полной энергии в виде

$$W(\varphi) = \frac{1}{2}U(\varphi) + V(\varphi), \quad U(\varphi) = \dot{\varphi}. \tag{1}$$

При этом следует указать вид зависимости поля темного сектора от времени. Тогда мы можем получить из уравнений скалярного поля и Эйнштейна выражения для суперпотенциала и параметра Хаббла:

$$W(\varphi) = \frac{3\kappa}{4}\left(\int U(\varphi)d\varphi\right)^2, \quad H = \frac{\kappa}{4}\sqrt{3\kappa}\int U(\varphi)d\varphi. \tag{2}$$

Суперпотенциал для полей темного сектора строится по аналогии с методом построения для обычного скалярного поля. Форма суперпотенциала зависит от характеристик конкретного поля темного сектора. В настоящей работе исследуются космологические модели эволюции Вселенной с одним скалярным полем, включающие фантомные и тахионные поля.

Введя в рассмотрение суперпотенциал как функцию от кинетической и потенциальной энергии поля темного сектора, можно понизить порядок уравнения скалярного поля, что существенно упрощает поиск точных решений. При решении динамического уравнения скалярного поля совместно с уравнениями Эйнштейна относительно масштабного фактора и физического потенциала получены новые классы точных космологических решений [3, 4] для фантомных и тахионных полей.

В рамках данного подхода получены решения с несколькими разными типами эволюции скалярного поля.

Литература

[1] Copeland E.J., Sami M., Tsujikawa S. Dynamics of Dark Energy // ArXiv:hep-th/0603057.

[2] Chervon S.V., Sami M. Точные решения космологической инфляции на бране Рандалл–Сандрум // Электронный журнал "Исследовано в России" 2009. – С. 1151–1160. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2009/088.pdf

[1] Панина Ольга Геннадьевна (panina.ph@gmail.com), Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева, 443086, Россия, г. Самара, Московское ш., 34.

[2] Червон Сергей Викторович (chervon.sergey@gmail.com), Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, 432700, Россия, г. Ульяновск, площадь 100-летия со дня рождения В.И.Ленина, 4.

[3] Sami M. A primer on problems and prospects of dark energy // arXiv:0904.3445v3 [hep-th].
[4] Tsujikawa S. Dark energy: investigation and modeling // arXiv:1004.1493v1 [astro-ph.CO].

УДК 539.37

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Пеньков В.Б., Стебенев И.Н.[1]

Метод граничных состояний (МГС) применен для решения основных задач упругости изотропных тел при стационарных гармонических колебаниях призматических тел произвольного односвязного поперечного сечения.

Ряд характерных МГС [1] особенностей позволяют эффективно решать задачи статики изотропных тел. Перспективное развитие данного метода просматривается для решений задач динамики (например, стационарных гармонических колебаний).

Применим решение Кильчевского [2] для определения основных характеристик вынужденных стационарных колебаний среды. Через полученные разрешающие соотношения [3] для периодических колебаний упругих тел "набирается" сепарабельный базис пространств внутренних состояний.

Найдена взаимосвязь между функциями в разрешающих уравнениях Н.А. Кильчевского и Н.И. Остросаблина [4].

Внутреннее состояние в МГС определяется наборами компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений. Вводится скалярное произведение, определяемое через интеграл от свертки тензоров напряжений и деформаций по области занятой телом (потенциальная энергия упругого деформирования). Выполняется ортогонализация исходного базиса.

На границе тела напряжения оставляют "след" в виде поверхностных усилий, которые вместе с граничными значениями перемещения образуют граничное состояние. Строится базис пространства граничных состояний, ортогональный в смысле скалярного произведения — поверхностного интеграла от свертки векторов поверхностных усилий и перемещений. В пространстве граничных состояний скалярное произведение выражает собой принцип виртуальных работ внешних сил в динамике [5].

В силу теорем Бетти, Сомильяны и принципа возможных перемещений, оба пространства внутренних и граничных состояний сопряжены гильбертовым изоморфизмом. Это позволяет задачу отыскания внутреннего состояния свести к проблеме построения изоморфного ему граничного состояния, которое существенно зависит от краевых условий. В общем случае проблема сводится к решению системы уравнений разложением относительно коэффициентов Фурье искомых состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса.

Решена первая и вторая задача упругости для односвязного многоугольного поперечного сечения прямоугольной призмы.

Литература

[1] Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т. 2. – №2. – С. 115–137.

[1] Пеньков Виктор Борисович (viktorp@lipetsk.ru), Стебенев Иван Николаевич (ivan-vanadiy@yandex.ru), Липецкий государственный технический университет, 398600, Россия, г. Липецк, ул. Московская, 30.

[2] Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. – Киев: Наукова думка, 1972. – 148 с.

[3] Пеньков В.Б., Стебенев И.Н. Генерирование базиса пространства состояний колеблющейся упругой среды // Авиакосмические технологии «АКТ-2008»: труды IX Всероссийской научно-технической конференции и школы молодых ученых, аспирантов и студентов. – Воронеж: Воронежский государственный технический университет, 2008. – С. 169–173.

[4] Остросаблин Н.И. Функции кинетических напряжений в механике сплошных сред. // Динамика сплошных сред: Сборник научных трудов. Выпуск 125: Механика структурно-неоднородных сред. – Новосибирск: Институт гидродинамики СО РАН, 2007. – С. 76–116.

[5] Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.

УДК 517.9

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЖИВЫХ СИСТЕМ И ЗАДАЧА РАСПОЗНАВАНИЯ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пешин С.В.[1]

Рассматриваются условия взаимодействия систем и распознавания при непрерывном изменении положения наблюдателя от рассматриваемого источника образа. Условия, накладываемые на пространство: 1) аддитивность; 2) многомерность; 3) многомасштабность и иерархичность; 4) наличие катализатора или ингибитора. Условия, накладываемые на временные процессы: ограниченность во времени. Обсуждаются условия применимости механики Ньютона, Гамильтона, Шредингера и Лагранжа. Зародившись в недрах классической механики, динамический подход к описанию физических явлений был распространен впоследствии на все области физики и на любые объекты макро- и микромира. Понятие информации относится к передаче, приему и обработке каких-либо сведений или сигналов. Наивысшего развития и использования оно достигло в компьютерной технике. Казалось бы, нет области, где эти понятия приходили бы в соприкосновение друг с другом. Однако это не так: при эволюции сложных физических систем возможно появление точек бифуркации, где динамическое поведение объекта может сильно зависеть от малых возмущений, т.е. от сигналов, приходящих либо от окружения, либо от других динамических систем. Поэтому для сложных физических систем одинаково важным являются как динамические, (т.е. грубые), так и информационные (т.е. более тонкие) аспекты поведения систем. Именно этому вопросу — взаимодействию динамических и информационных аспектов поведения сложных систем — и посвящено настоящее выступление.

[1]Пешин Сергей Владимирович (peshin@fryazino.net), Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, 141190, Россия, Московская обл., г. Фрязино, пл. Введенского, 1.

УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В РАМКАХ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПОДХОДА

Писковский Е.В.[1]

В настоящей работе рассматривается применение метода функциональной механики [1] к модельной задаче о траектории осциллятора с кубической нелинейностью, описываемого уравнением Дюффинга. В отличие от классического подхода, в котором рассматривается индивидуальные траектории, в функциональном подходе, предложенном И.В. Воловичем [1], основным понятием является вероятностное распределение на фазовом пространстве и средние значения координаты и импульса.

Проводится сравнение среднего значения координаты в функциональном подходе и классической траектории нелинейного осциллятора, полученной с помощью метода Крылова—Боголюбова—Митропольского [2]. Установлена зависимость разности усредненной и классической траекторий с течением времени от дисперсии начальных данных. Также исследуется зависимость величины временного порога, после которого наблюдается существенное расхождение усредненной и классической траекторий, от дисперсии начальных данных.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 08-01-00727-а и 09-01-12161-офи-м.

Литература

[1] Волович И.В. Проблема необратимости и функциональная формулировка классической механики // Вестник Самарского университета. – Самара: Изд. "Самарский университет", 2008. – №8/1(67). – С. 35–60.

[2] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1955. – 408 с.

[1] Писковский Евгений Викторович (piskovskiy@mi.ras.ru), Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700, Россия, М.О., г. Долгопрудный, Институтский пер, 9.

УДК 539.376

КЛАСС АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Попов Н.Н., Радченко В.П.[1]

Исследование напряженно-деформированного состояния элементов конструкций в условиях нелинейной ползучести материала является достаточно сложной задачей даже в детерминированной постановке. Необходимость учета структурной неоднородности материала приводит к стохастическим краевым задачам, в которых кроме физической нелинейности определяющих уравнений приходится учитывать и статистическую нелинейность.

Одним из основных методов решения стохастических краевых задач механики деформируемого твердого тела является метод малого параметра, позволяющий свести стохастически нелинейную задачу к последовательности статистически линейных задач. Однако этот подход связан с математическими трудностями вычислительного характера, поэтому при решении конкретных задач обычно ограничиваются первым (реже вторым) приближением метода малого параметра, которое справедливо для слабонеоднородных сред.

Приводится решение стохастической нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Задача рассматривается в цилиндрических координатах для случая плоского деформированного состояния. Стохастические свойства материала трубы описываются при помощи случайной функции одной переменной (радиуса), которая распределена по нормальному закону. Определяющие соотношения ползучести принимаются в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения в стохастической форме.

Решение стохастических уравнений ползучести сводится к статистически нелинейному уравнению второго порядка относительно радиального напряжения, которое при помощи метода малого параметра приводится к системе статистически линейных дифференциальных уравнений, из которой можно найти составляющие радиального напряжения с любой степенью точности.

Проведено исследование случайного поля напряжений и скоростей деформаций при ползучести в зависимости от степени неоднородности и показателя нелинейности материала с учетом членов до третьего приближения метода малого параметра. При этом предполагалось, что корреляционные функции механических характеристик являются знакопеременными затухающими функциями и моменты второго порядка могут быть выражены через корреляционную функцию случайного однородного поля, зависящего только от радиуса.

Выполнен анализ сходимости метода малого параметра для полей напряжений на основе комбинированного подхода с использованием метода статистических испытаний и точного решения детерминированной задачи для трубы из неоднородного по радиусу материала. Полученные результаты свидетельствуют о хорошей скорости сходимости метода малого параметра в задачах установившейся ползучести.

[1]Попов Николай Николаевич (ponick25@gmail.com), Радченко Владимир Павлович (radch@samgtu.ru), Самарский государственный технический университет, 443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Рассмотрен вариант задачи, когда стохастические свойства материала трубы описываются случайной функцией двух аргументов радиуса r и угла φ. Решение строилось на основе первого приближения метода малого параметра с использованием функции напряжений, относительно которой получено дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка.

В результате детального статистического анализа случайных полей напряжений и скоростей деформаций установлено, что случайные вариации реологических свойств материала могут оказывать существенное влияние на оценку работоспособности толстостенных труб. Время до разрушения, вычисленное с учетом стохастических неоднородностей может оказаться существенно меньше по сравнению с обычным детерминированным прогнозом.

УДК 530.1: 537.86

ФРАКТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ НА ОСНОВЕ ДРОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ И СКЕЙЛИНГА В ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ПРОБЛЕМАХ ФИЗИКИ

Потапов А.А.[1]

I. В настоящее время явно ощущается недостаточность традиционных физических моделей. С созданием в 70-х гг. XX в. фрактальной геометрии (Мандельброт Б.) в науку и технику начали стремительно проникать идеи дробных размерностей, дробных операторов, недифференцируемых функций, скейлинга. Данные математические понятия, объединенные с физикой фракталов, образуют новые "мостики", довольно неожиданные, между не только смежными дисциплинами, что зачастую приводит к эффективным методам решения задач, иногда трудно разрешимых на данном уровне развития классических научных направлений. Другими словами, полное описание процессов современной обработки сигналов и полей невозможно лишь с помощью формул классической математики. Эволюция взглядов автора и развитие на сегодняшний момент в ИРЭ РАН "фрактальной идеологии" исследований показаны на рис. 1, где приведены сведения и о моменте их интенсивного развертывания [1–10].

Рис 1. Эскиз развития новых технологий на основе фракталов, дробных операторов и скейлинга

[1]Потапов Александр Алексеевич (potapov@cplire.ru), Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, 125009, Россия, г. Москва, ул. Моховая, 11, корп. 7.

II. Все приведенные результаты получены в рамках нового фундаментального научного направления "Фрактальная радиофизика и фрактальная радиоэлектроника: проектирование фрактальных радиосистем", предложенного и развиваемого автором в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, начиная с 80-х гг. XX в. [1–10]. В частности, физическое моделирование дробных операторов позволяет создавать радиоэлементы на пассивных элементах, моделирующие фрактальные импедансы с частотным скейлингом [2, 10]. При конечной стадии построения модели фрактального импеданса можно регулировать диапазоны частот, в которых будет наблюдаться степенная частотная зависимость импеданса. В таком случае мы впервые на практике реализуем "фрактальный конденсатор" [1, 2, 10]. Основываясь на полученных результатах, можно говорить о проектировании фрактальных элементов, фрактальных антенн, фрактальных частотно-избирательных поверхностей и, самое главное, принципиально новых фрактальных радиосистем — рис. 2. Более подробно все рассматриваемые вопросы представлены на сайте автора: www.potapov-fractal.com

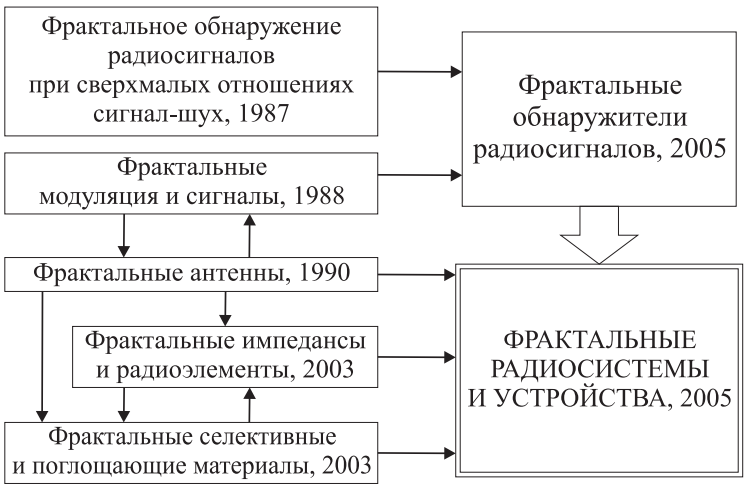


Рис 2. Авторская концепция фрактальных радиосистем и устройств / фрактальных импедансов

III. Исходя из всего вышесказанного, можно объективно говорить о становлении *московской научной школы фрактальных методов* с центром в ИРЭ РАН. Учет фрактальности и скейлинга модифицирует основные уравнения физики. Дробное интегродифференцирование предлагает более богатый и более общий класс дифференциальных и интегральных операторов. Для аппаратной реализации устройств и методов фрактальной радиоэлектроники необходима элементная база, позволяющая непосредственно выполнять обработку сигналов в пространстве дробной меры и моделировать фрактальные объекты и процессы, динамика которых подчиняется дифференциальным уравнениям дробного порядка — *фрактальные импедансы*.

Коренное отличие фрактальной радиофизики от классической связано с принципиально иным подходом к основным составляющим сигнала и поля. Это позволяет *перейти на новый уровень информационной структуры реальных немарковских сигналов и полей* [1–10].

В докладе на основе [1–10] определены направления дальнейших исследований. Автор надеется, что в докладе ему удалось показать на достаточно многочисленных

примерах существующие и потенциальные "фазовые" точки применения фракталов, дробных операторов и эффектов скейлинга в науке и технике. По крайней мере: "*При изучении наук примеры не менее поучительны, чем правила*", И. Ньютон.

Литература

[1] Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. – М.: Логос, 2002. – 664 с.

[2] Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Университетская книга, 2005. – 848 с.

[3] Потапов А.А. Фракталы и хаос как основа новых прорывных технологий в современных радиосистемах. – Дополнение к кн.: Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах / Пер. с англ. – М.: Техносфера, 2006. – С. 374–479.

[4] Потапов А.А. Фрактальные модели и методы на основе скейлинга в фундаментальных и прикладных проблемах современной физики // Сб. науч. тр. "Необратимые процессы в природе и технике" / Под ред. В.С. Горелика и А.Н. Морозова. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – В. II. – С. 5–107.

[5] Потапов А.А., Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Пахомов А.А., Герман В.А. Новейшие методы обработки изображений / Под ред. А.А. Потапова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 496 с (Монография — по гранту РФФИ № 07-07-07005).

[6] Подосенов С.А., Потапов А.А., Соколов А.А. Импульсная электродинамика широкополосных радиосистем и поля связанных структур / Под ред. А.А. Потапова. – М.: Радиотехника, 2003. – 720 с.

[7] Потапов А.А. Фрактальные методы исследования флуктуаций сигналов и динамических систем в пространстве дробной размерности // Глава в кн. "Флуктуации и шумы в сложных системах живой и неживой природы" / Под ред. Р.М. Юльметьева и др. – Казань: Мин-во образования и науки Республики Татарстан, 2008. – С. 257–310.

[8] Потапов А.А., Гильмутдинов А.Х., Ушаков П.А. Фрактальные элементы и радиосистемы: Физические аспекты / Под ред. А.А. Потапова. – М.: Радиотехника, 2009. – 200 с.

[9] Антипов О.И., Неганов В.А., Потапов А.А. Детерминированный хаос и фракталы в дискретно-нелинейных системах / Под ред. и с предисловием акад. Ю.В. Гуляева и чл.-корр. РАН С.А. Никитова. – М.: Радиотехника, 2009. – 235 с.

[10] Потапов А.А., Черных В.А. Дробное исчисление А.В. Летникова, теория фракталов и скейлинг / Под ред. А.А. Потапова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 820 с.

УДК 530.1: 537.86

ПРИМЕНЕНИЕ ФИГУРНЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕШЕТЧАТЫХ УПАКОВОК

Потапов А.А.[1], *Чернышев С.Л.*[2]

Решетчатые упаковки шаров изучаются в связи с моделированием атомных и молекулярных структур, как твердых тел, так и жидкостей. Проблема упаковки шаров для решеток взаимосвязана и с проблемой кодирования информации. Известно, что поиск плотной упаковки шаров в многомерном пространстве эквивалентен отысканию кода, допускающего устойчивую (без искажений) передачу информации. При этом большей плотности упаковки соответствует меньшая вероятность ошибки кодирования [1]. Конструирование фотонных кристаллов на основе фрактальных структур, фрактальных микроантенн и фрактальных частотно-избирательных структур [2–4], также связано с проблемой упаковки.

В статье для моделирования решетчатых упаковок применяются фигурные числа, известные пифагорейцам, определенные Диофантом [5]. Фигурное число $\Phi_L^M(N)$ — это математический объект, объединяющий в себе число, множество и геометрическую фигуру и характеризуемый тремя целочисленными параметрами [6–7]. Значение параметра L определяет порядок арифметического ряда, задающего фигурные числа. Параметр M определяет количество составных частей геометрических фигур и соответственно их группу симметрии. Натуральные числа N — это номера, например, моментов времени, определяющие эволюцию объектов.

Значению $L = 1$ соответствуют фигурные числа на прямой; значению $L = 2$ — фигурные числа на плоскости; значению $L = 3$ — фигурные числа в трехмерном пространстве и т.д. Для фигурных чисел на плоскости ($L = 2$) значение $M = 0$ соответствует треугольным числам; $M = 1$ — четырехугольным; $M = 2$ — пятиугольным и т.д. Таким образом, число k углов многоугольника, на каждой стороне которого расположено $(N - 1)$ точек, определяется с помощью параметра M соотношением $M = k + 3$. Здесь N — номер этапа эволюции фигурного числа. Фигурные числа как плоские, так и многомерные, находят применение для решения различных задач. Суммы соответствующих треугольных чисел позволяют определить нумерующие функции, с помощью которых устанавливается биекция неотрицательных целочисленных координат векторов в пространствах с размерностями $L2 > L1 > 0$. В [6] приведены явные выражения для нумерации точек трех- и четырехмерных решеток с неотрицательными целочисленными координатами.

Четырехугольные фигурные числа представляют собой функции, определяющие кратность вырождения электронных состояний (d-мерное евклидово пространство, $d > 1$) и взаимосвязанные с квантовыми числами [7, 8]. Пятиугольные плоские числа применяются в известной формуле Эйлера [9], представляющей собой частный случай формулы Якоби, используемой для вычисления числа частиц (d-мерных шаров) с заданной нормой, упакованных в определенной решетке. Формула Эйлера позволяет также получить простое рекуррентное соотношение для определения числа разбиений натурального числа на натуральные слагаемые. Эта же величина ха-

[1] Потапов Александр Алексеевич (potapov@cplire.ru), Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, 125009, Россия, г. Москва, ул. Моховая, 11, к7.

[2] Чернышев С.Л. (nature@front.ru), Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского (МАТИ), 109240, Россия, г. Москва, Берниковская наб., 14.

рактеризует число неприводимых представлений симметрических групп конечного порядка.

Фигурные числа могут служить моделями как решетчатых, так и нерешетчатых упаковок объектов (точек, частиц), представляющих d-мерные шары. Каждая единица фигурного числа представляет один шар. С точки зрения передачи информации по кодируемым каналам, каждая точка (шар) представляет собой кодовое слово размерности шара. Размерность евклидова пространства, в котором размещаются точки фигурного числа, определяется числом отсчетов в соответствии с известной теоремой В.А. Котельникова, необходимым для заданной полосы частот при кодировании.

В данной работе рассмотрены кубические решетки Z_d (соответствующие решетчатые упаковки) и решетки вида A_d ($d \geq 1$) [1]. Упаковки в решетках A_2 и A_3, согласно [1], являются плотнейшими на плоскости и в трехмерном пространстве (для случая $d = 3$ среди решетчатых упаковок). Исследуется возможность упаковки шаров, образующих треугольные $\Phi_d^0(n)$ и четырехугольные $\Phi_d^1(n)$ числа, в рассматриваемые решетки соответствующих размерностей. Фигурное число $\Phi_L^M(N)$ задается следующими соотношениями [6]:

$$\Phi_{L+1}^M(N) = \sum_{i=0}^{i=N} \Phi_L^M(i).$$

Здесь $L = 0, 1, 2, \ldots$; $M = 0, 1, 2, \ldots$; $N = 0, 1, 2, \ldots$. При этом $\Phi_L^M(0) = 0$; $\Phi_L^M(1) = 1$; $\Phi_0^M(N) = \mathrm{M} + 1$ при $N > 1$. Критерием возможности упаковки служит существование биекции между неотрицательными целочисленными координатами $(x_1, \ldots, x_d)$ шаров, упакованных в решетку и координатами шаров, образующих соответствующее фигурное число. Полагаем, что такая биекция связывает эквивалентные решетки Z_1 и A_1 и фигурные числа $\Phi_1^0(n)$ и $\Phi_2^0(n)$. На плоскости фигурные числа $\Phi_2^1(n)$ упаковываются в квадратную решетку Z_2, а фигурные числа $\Phi_2^0(n)$ в гексагональную решетку A_2. Показано, что для $d = 1, 2, 3, \ldots$ фигурные числа $\Phi_d^0(n)$ упаковываются в решетки вида A_d, определяемые соотношениями $A_d : (x_0, x_1, \ldots, x_d) \in Z_{d+1}; x_0 + x_1 + \ldots + x_d = 0$.

Литература

[1] Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы: В 2-х тт. – М.: Мир, 1990.

[2] Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Университетская книга, 2005. – 848 с.

[3] Потапов А.А. Фрактальные модели и методы на основе скейлинга в фундаментальных и прикладных проблемах современной физики // Сб. науч. тр. "Необратимые процессы в природе и технике" / Под ред. В.С. Горелика и А.Н. Морозова. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – Вып. II. – С. 5–107.

[4] Потапов А.А., Черных В.А. Дробное исчисление А.В. Летникова, теория фракталов и скейлинг / Под ред. А.А. Потапова. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2010. – 820 с.

[5] Диофант Александрийский. Арифметика и книга о многоугольных числах / Пер. с древнегреческого Ю.Н. Веселовского; Ред. и комментарии И.Г. Башмаковой. – М.: Наука, 1974. – 328 с.

[6] Чернышев С.Л. Нумерующие функции неотрицательных целочисленных координат L-мерных векторов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т. 15. – №1. – С. 147–155.

[7] Чернышев С.Л., Чернышев Л.С. Квантовый анализ результатов измерений // Измерительная техника. – 2006. – №12. – С. 3–8; Chernyshev S.L., Chernyshev L.S. // Measurement Techniques. – 2006. – V. 49. – №12. – P. 1171–1178.

[8] Negadi T., Kibler M. The Periodic Table in Flatland // Intern. Journal of Quantum Chemistry. – 1996. – V. 57. – №1. – P. 53–61.

[9] Кац В.Г., Чен П. Квантовый анализ / Пер. с англ. – М.: МЦНМО, 2005. – 128 с.

УДК 532.537

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ НА ПРОДОЛЬНЫЙ КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ 2-ГО ПОРЯДКА СО ВРЕМЕНЕМ

Пыркова О.А.[1]

В работе принимается следующая модель потока: поток предполагается как смесь двух режимов – чисто турбулентного колмогоровского режима (τ), взятого с весом, равным значению коэффициента перемежаемости (доли турбулентного режима) $\gamma = \rho_\tau/\rho$ и чисто вязкого режима (ν), взятого с весом $(1-\gamma)$. Для каждого из режимов в отдельности существуют инварианты Лойцянского Loi и автомодельности: колмогоровская для турбулентного режима и по Миллионщикову для вязкого. В рассматриваемой модели происходит смешение закономерностей, характерных для этих режимов.

Относительно зависимости для γ предполагается, что она такого же вида, как принято у Лойцянского [1]: $\gamma = 1 - \exp\left(-c_1 K_\tau^+\right)$, но с другой эмпирической постоянной c_1. Лойцянским выражение для γ введено, во многом, из интуитивных физических соображений, так что вопрос о совершенствовании зависимости для γ остается открытым. Выражение для K_τ^+ принято в виде аппроксимации, на основе развиваемой полуэмпирической модели переноса, между выражениями для одноточечного случая $\left(\xi = \dfrac{r}{\lambda} = \infty\right)$ инерционного интервала и предельного перехода при $(\xi \to 0)$.

В рамках модели, использующейся в работе, принято гипотетическое соотношение $\mathrm{Loi}(t) = = \gamma(\mathrm{Loi})_\tau + (1-\gamma)(\mathrm{Loi})_\nu$. Т.к. величина коэффициента перемежаемости γ с ростом времени стремится к нулю [3], то $\mathrm{Loi}(t)$ стремится к $(\mathrm{Loi})_\nu$. Это согласуется с выводом Седова [5] о том, что величина интеграла Лойцянского меняется с течением времени, поэтому, вообще говоря, не может рассматриваться в качестве характерной постоянной. И только на заключительном этапе вырождения интеграл Лойцянского становится инвариантом, когда принимает значение равное $(\mathrm{Loi})_\nu$.

Рассматриваемая модель дает ответы на вопросы, возникающие в связи с поведением зависимости для продольного коэффициента корреляции второго порядка [4]

$$f(\xi) = \gamma \frac{u_\tau^2}{u^2} f_\tau(\xi) + (1-\gamma)\frac{u_\nu^2}{u^2} f_\nu(\xi)$$

в различные моменты времени.

В предположении, что при малых временах можно использовать степенные зависимости от времени для пульсационной составляющей скорости потока получено, что с ростом времени кривые для продольного коэффициента корреляции $f(\xi)$, рассчитанного по модели, выходят на чисто турбулентный колмогоровский режим затухания f_τ при меньших значениях безразмерной величины ξ. Это согласуется с четко выраженным Хинце мнением ряда авторов [2, 6, 8] о том, что турбулентность находится в простом автомодельном режиме лишь частично.

Кривые для продольного коэффициента корреляции в чисто вязком случае f_ν не зависят от времени.

Сравнение поведения продольного коэффициента корреляции с учетом перемежаемости $f(\xi)$ в различные моменты времени показало, что при малых значениях

[1]Пыркова Ольга Анатольевна (omukha@mail.ru), Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.

аргумента ξ кривые совпадают, будучи близки к автомодельному решению по Миллионщикову f_ν в чисто вязком случае, а затем начинают удаляться от него, выходя на чисто турбулентный режим f_τ тем быстрее, чем больше значение времени. При этом кривые, соответствующие большим временам, располагаются ниже, что качественно вполне согласуется с опытными данными, приведенными в [3].

Модельная зависимость для продольного коэффициента корреляции второго порядка имеет асимптотически экспоненциально затухающий вид и согласуется с опытными данными Бэтчелора—Таунсенда—Стюарта. Модели переноса Обухова—Коважного—Гейзенберга—Кармана [2, 3, 7, 8], дающие правильное описание в инерционном интервале спектра, становятся более приемлемыми, так как погрешности в их асимптотиках при убывании коэффициента перемежаемости до нуля становятся малыми.

Автор благодарит Онуфриева А.Т. за неоценимую помощь в работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект 2.1.1/500) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы.

Литература

[1] Лойцянский Л.Г. Полуэмпирические теории взаимодействия процессов молекулярного и молярного обменов в турбулентном движении // Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. – М., Л.: АН, 1962. – С. 143–166.

[2] Монин А.С. Статистическая гидромеханика / А. С. Монин, А. М. Яглом. – М.: Физматгиз., 1967. – 720 с.

[3] Онуфриев А.Т., Пыркова О.А. Задача о затухании слабой турбулентности в однородном изотропном потоке // Препринт МФТИ. — М.: МФТИ, 2005. – 13 с.

[4] Онуфриев А.А., Онуфриев А.Т., Пыркова О.А. Задача о затухании однородной изотропной турбулентности с учетом явления перемежаемости // Актуальные проблемы фундаментальной и прикладной математики: Сб. науч. трудов. – М.: МФТИ, 2009. – С. 124–135.

[5] Седов Л.И. Методы подобия размерности в механике. —М.: Наука, 1981. – 448 с.

[6] Batchelor G.K. The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, New York, 1953. (Имеется перевод: Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. – М.: ИЛ, 1955. – 137 с.)

[7] Driscoll, Kennedy. Model for the turbulent energy spectrum // Phys. Fluids, 1983. – V. 26. – No. 5. – P. 1228–1233.

[8] Hinze J.O. Turbulenct, N-Y–Toronto–London: McGraw-Hill, 1959. (Имеется перевод: Хинце И.О. Турбулентность. – М.: Физматгиз, 1963. – 680 с.)

УДК 531:530.145

СЖАТЫЕ СОСТОЯНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ КВАНТОВОЙ ЭВОЛЮЦИИ

Радионов А.А., Тлячев Т.В., Чеботарев А.М.[1]

В докладе рассматриваются задачи квантовой динамики, решения которых представляются в виде математического ожидания функционалов скачкообразных процессов. Полученные результаты используются для описания динамики заряженных частиц в нанопленках под действием скрещенных электрических и магнитных полей. Спектральные задачи для гамильтонианов, не содержащих электрическое поле, подробно изучались в работах [1, 2].

Пусть B — симметричная $(n \times n)$-матрица, C — эрмитова $(n \times n)$-матрица, $f \in \mathbb{C}^n$ — комплексный вектор, $m(dp)$ –вероятностная мера в $\mathbb{R}^n$, а $\phi(p) : \mathbb{R}^n \to [0, 2\pi)$ — вещественная функция (фазовая функция, заданная по $\mathrm{mod} 2\pi$). Рассмотрим уравнение Шредингера $(i\partial_t + \widehat{H})\psi = 0$ с вторично квантованным гамильтонианом

$$\widehat{H} = H_2 + V\left(\frac{a^\dagger + a}{\sqrt{2}}\right), \quad V(x) = \kappa \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)+i\phi(p)} m(dp), \quad \kappa > 0,\ \mathrm{Im}\, V = 0,$$
$$H_2 = \frac{1}{2}\big((a^\dagger, Ba^\dagger) + (a, \overline{B}a)\big) + (a^\dagger, Ca) + (\overline{f}, a) + (f, a^\dagger).$$

Рассмотрим однородный по времени и координатам марковский скачкообразный процесс p_s, переходная вероятность которого описывается уравнением Колмогорова—Феллера:

$$\partial_t P(\Gamma, t|x) = \kappa \int m(dq)\big(P(\Gamma, t|x+q) - P(\Gamma, t|x)\big), \quad P(\Gamma, 0|x) = I_\Gamma(x).$$

Процесс p_s совершает n скачков за время t с вероятностью $P_n(t) = \dfrac{(\kappa t)^n}{n!}\, e^{-\kappa t}$, $P(p_s - p_{s-0} \in A) = m(A)$. По аналогии с работой [3], рассмотрим представление решения уравнения Шредингера $i\partial_t\psi + \widehat{H}\psi = 0$ в виде математического ожидания хронологического произведения случайных операторов, сохраняющего класс сжатых состояний:

$$\psi(t) = e^{\kappa t}\, \mathbb{E}_t \overleftarrow{\prod_k} e^{\frac{i}{\sqrt{2}}(q_k, (a^\dagger_{t-\tau_k} + a_{t-\tau_k})) + i(\phi(q_k) + \frac{\pi}{2})}\, e^{iH_2 t}\psi(0), \quad a_t \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{iH_2 t} a\, e^{-iH_2 t}.$$

Число сомножителей в правой части () случайное: в каждом сомножителе моменты τ_k распределены равномерно на $[0, t]$ и упорядочены так, что операторы с бóльшими τ_k действуют позже. Поскольку моменты $\{\tau_k\}$ и скачки $\{q_m\}$ — независимые случайные величины и τ_k распределены равномерно, то такими же свойствами обладают $s_k = t - \tau_k$ и q_m. Преобразование $a \to a_t$ операторов рождения-уничтожения является каноническим [4] в том смысле, что $[a_k(t), a_j(t)] = 0$, $[a_k(t), a_j^\dagger(t)] = \delta_{kj}$

$$\dot{a}_t = i[H_2, a_t] = -i(B\, a_t^\dagger + C\, a_t + f), \quad \dot{a}_t^\dagger = i[H_2, a_t^\dagger] = i(\overline{B}\, a_t + C\, a_t^\dagger + \overline{f}).$$

[1] Радионов Александр Андреевич (alex.radionov89@gmail.com), Тлячев Тимур Вячеславович (timattv@gmail.com), Чеботарев Александр Михаилович (chebotarev@phys.msu.ru), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, 119991, Россия, Москва, ул. Лебедева, 1.

Поэтому существует семейство $(n\times n)$-матриц $\{\Phi_t, \Psi_t\}$ такое, что

$$\begin{pmatrix} a_t \\ a_t^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \overline{\Psi}_t & \overline{\Phi}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} + i\int_0^t \begin{pmatrix} \Phi_{t-\tau} & \Psi_{t-\tau} \\ \overline{\Psi}_{t-\tau} & \overline{\Phi}_{t-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f \\ \overline{f} \end{pmatrix} d\tau.$$

Оператор тока $\hat{I}_t = i(a_t - a_t^\dagger)$ выражается в терминах матриц Φ_t и Ψ_t:

$$\hat{I}_t = i(\Psi_t - \overline{\Phi}_t)\, a^\dagger + i(\Phi_t - \overline{\Psi}_t)\, a + 2\mathrm{Re}\, f_t, \quad f_t = \int_0^t (\Phi_s f - \Psi_s \overline{f})\, ds, \tag{1}$$

а для $\psi(0) = |\,0\,\rangle$ средний ток $I_t \stackrel{\text{def}}{=} \langle \psi(t), \hat{I}_t \psi(t)\rangle$ вычисляется через две независимые случайные реализации функционалов $\{Z_t, W_t\}$ и $\{\widetilde{Z}_t, \widetilde{W}_t\}$, определенных ниже в теореме 1:

$$I_t = e^{2\kappa t}\mathbb{E}_t\, e^{i(W_t - \widetilde{W}_t)} \times \\ \times\big\{2\mathrm{Re}\, f_t + ie^{-\frac{1}{2}|Z_t - \widetilde{Z}_t|^2}\big[(\Phi_t - \overline{\Psi}_t)\widetilde{Z}_t e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}\,(\widetilde{\overline{Z}}_t, Z_t)} - (\overline{\Phi}_t - \Psi_t)\overline{Z}_t e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}\,(\widetilde{\overline{Z}}_t, Z_t)}\big]\big\}.$$

Теорема 1. *Решение уравнения $(i\partial_t + \widehat{H})\psi = 0$ имеет вид математического ожидания по случайным сдвигам фазы и когерентным сдвигам состояния $\psi_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{iH_2 t}\psi(0)$:*

$$\psi(t) = e^{\kappa t}\,\mathbb{E}_t\, e^{iW_t + (Z_t, a^\dagger) - (\overline{Z}_t, a)}\psi_t, \quad Z_t = \; i\textstyle\sum_k z_k, \quad z_k = (\overline{\Phi}_{s_k} + \Psi_{s_k})^T q_k/\sqrt{2} \in \mathbb{C}^n, \\ W_t = \textstyle\sum_k \big(\sqrt{2}\,(q_k, \mathrm{Re}\, f_{s_k}) + \; \phi(q_k) + \frac{\pi}{2} + \mathrm{Im}\,\big(\overline{z}_k, \sum_{j<k} z_j\big)\big),$$

где скачки $\{q_k\}_1^K$, $q_k \in \mathbb{R}^n$, моменты скачков $\{s_k\}_1^K$, $s_k \in (0,t)$ и их число K — независимые случайные величины.

В качестве примера рассматривается модельный гамильтониан $\widehat{H}_c = H_2 + V_{\alpha,\beta}(x)$, где

$$H_2 = \frac{1}{2}\left((p_1 + Hx_2)^2 + p_2^2\right) + E_1 x_1 + E_2 x_2, \quad V_{\alpha,\beta}(x) = V_0\,\frac{(3 - v(\beta x))^\alpha}{4^\alpha}, \\ v(x) = \cos x_1 + \cos\left(x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right) + \cos\left(x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right),$$

$x \in \mathbb{R}^2$, α, $\beta > 0$, $v(x)$ — функция, инвариантная относительно группы симметрий кристаллической углеродной пленки, поворотов на угол $\dfrac{\pi}{3}$ вокруг начала координат и сдвигов на 2π по оси x_1 и на $\dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}$ по оси x_2; $\max v|_{x_2=0} = 1\dfrac{1}{8}$, $\max v|_{x_1=0} = = 1$. Параметр β регулирует масштаб, а параметр α — высоту барьера и отношение $\max V_{6,10}(x_1, 0)/\max V_{6,10}(0, x_2)$ (см. рис.1). Каждое слагаемое потенциала $v(x)$ порождает равновероятные скачки в $\mathbb{R}^2$, значения которых состоят из точек носителя Фурье-образа: $\pm\{1, 0\}$, $\pm\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\}$, $\pm\{1, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\}$.

Гамильтониан H_2 является оператором энергии в калибровке Ландау в скрещенных однородных электрическом и магнитном полях без учета спина. Уравнение Шредингера с модельным гамильтонианом $\widehat{H}_c$ описывает динамику электрона в кристаллической углеродной пленке под действием электрического поля с компонентами (E_1, E_2) в плоскости пленки и перпендикулярного магнитного поля H. Для рассматриваемой модельной задачи найден явный вид матриц Φ_t и Ψ_t и построены случайные функционалы W_t и Z_t. В докладе обсуждаются результаты численного анализа зависимости тока от внешних полей.

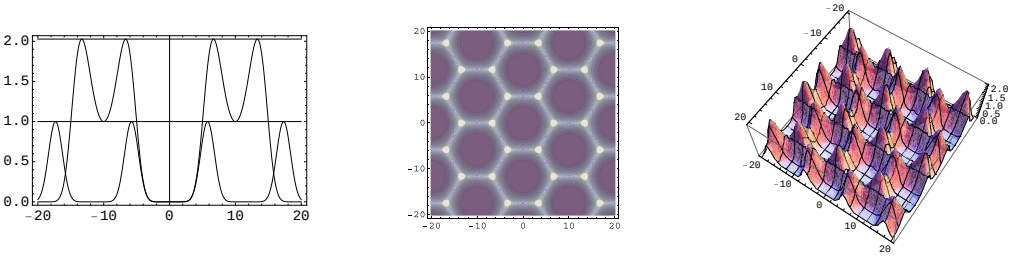


Рис 3. На первом графике изображен потенциал $V_{\alpha,\beta}(x)$ в сечениях $x_2 = 0$ и $x_1 = 0$ при $\alpha = 6$, $\beta = 10$, $v_0 = 1$ ($\max V_{6,10}(x_1, 0) = 2$, $\max V_{6,10}(0, x_2) = 1$). Второй и третий графики — двумерная и трехмерная визуализации потенциала $V_{6,10}(x)$

Литература

[1] Гейлер В.А., Маргулис В.А. Структура спектра магнитно-блоховского электрона в двумерной решетке // ТМФ. – 1984. – Т. 61. – №1. – С. 140–149.

[2] Гейлер В.А., Явнорешаемые квантовомеханические модели заряженной частицы в магнитном поле // Матем. моделирование. – 1995. – Т. 7. – №5. – С. 26–28.

[3] Polyakov A.V. Stochastic solution of the Schrödinger equation // RJMP. – 2004. – V. 11. – №2. – P. 209–220.

[4] Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. – М.: Наука, 1986. – 318 с.

УДК 517.9

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ. ПРОБЛЕМЫ КОРРЕКТНОСТИ

Радкевич Е.В.[1]

Доклад посвящен двум темам, связанным с исследованием корректности смешанной задачи:

1) Хорошо известно, что одна из проблем кинетики неравновесных процессов связана с недостаточной информацией о начально-краевых данных большей части неравновесных переменных, которые не имеет интуитивного физического смысла– их нельзя определить из эксперимента. К тому же число неравновесных переменных настолько велико, что числа, разумных с физической точки зрения, граничных условий не достаточно для постановки смешанной задачи. Тогда в каком смысле надо понимать корректность смешанной задачи? В докладе будет приведен подход Чепмана к исследованию возникающих здесь проблем.

2) Анализ полиномиальных пучков дисперсионных уравнений систем моментов Грэда для кинетических уравнениний Больцмана и Фокера—Планка показывает, что для моментных аппроксимаций кинетических уравнений (и в более широком смысле моделей механики сплошных сред) переменная кратность характеристик является следствием самой природы описываемых физических процессов, связаных с включением в описание моментов высокого порядка, неравновесных, неконсервативных переменных. Будут приведены достаточные условия корректности смешанной залачи в случае кратности корней характеристического уравнения.

Литература

[1] Gui-Qiang Chen, Levermore C.D., Tai-Ping Luui Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy // Comm. on Pure and Appl. Math. – 1994. – V. XLVII. – P. 787–830.

[2] Chapman S., Cowling T. Mathematical Theory on Non-uniform Gases // 3nd. ed. Cambridge: Univ. Press, 1970.

[3] Radkevich E.V. Irreducible Chapman–Enskog Projections and Navier–Stokes Approximations // Instability in Models Connected with Fluid Flows. II. Edited by Claude Bardos and Andrei Fursikov; International Mathematical Series. – V. 6. – P. 85–151, Springer(2007).

[4] Радкевич Е.В. Проекции Чепмена-Энскога и проблемы Навье-Стокс приближения // Труды Мат. Инст. им. Стеклова. – 2005. – Т. 250. – С. 219–225 Перевод: Proceedings of the Steclov Institute of Mathematics. – 2005. – V. 250. – P. 1–7.

[5] Palin V.V., Radkevich E.V. Hyperbolic Regularization of Conservation Laws // ISSN 1061-9208, Russian J. of Math. Phys. – 2008. – V. 15. – No. 3. – P. 401–421.

[6] Palin V.V., Radkevich E.V. Mathematical aspects of the Maxwell problem // Applicable Analysis. – 2009. – V. 88. – No. 8. – P. 1233–1264.

[1] Радкевич Евгений Владимирович, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119991, Россия, Москва, ГСП-1, Воробьевы горы.

УДК 517.984

СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР ОДНОГО ТРЕХЧАСТИЧНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Расулов Т.Х., Рахмонов А.А.[1]

Исследованию существенного спектра трехчастичных непрерывных и дискретных операторов Шредингера посвящены многие работы (см. например [1, 2], соответственно). В данной работе рассматривается трехчастичный модельный оператор H. Выделен канальный оператор и через спектр канального оператора описано местоположение существенного спектра оператора H.

Пусть $\mathbf{T}^\nu \equiv (-\pi;\pi]^\nu$ — ν-мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $L_2(\mathbf{T}^\nu)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbf{T}^\nu$ и $L_2^s((\mathbf{T}^\nu)^2)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) симметричных функций, определенных на $(\mathbf{T}^\nu)^2$.

В гильбертовом пространстве $L_2^s((\mathbf{T}^\nu)^2)$ рассмотрим линейный ограниченный самосопряженный оператор

$$H = H_0 - V_1 - V_2,$$

где операторы H_0 и V_i $(i = 1, 2)$ определяются по формулам

$$(H_0 f)(p,q) = u(p,q)f(p,q),$$

$$(V_1 f)(p,q) = \int\limits_{\mathbf{T}^\nu} v(q,s)f(p,s)ds,$$

$$(V_2 f)(p,q) = \int\limits_{\mathbf{T}^\nu} v(p,s)f(s,q)ds.$$

Здесь u и v — вещественнозначные симметричные непрерывные функции на $(\mathbf{T}^\nu)^2$.

Для формулировки основных результатов работы наряду с оператором H рассмотрим также оператор H_1, действующий в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbf{T}^\nu)^2)$ по формуле

$$H_1 = H_0 - V_1.$$

Легко можно проверить, что оператор H_1 коммутирует с любым оператором умножения на ограниченную функцию $\alpha(p)$ в $L_2((\mathbf{T}^\nu)^2)$.

Из разложения в прямой интеграл пространства $L_2((\mathbf{T}^\nu)^2)$:

$$L_2((\mathbf{T}^\nu)^2) = \int\limits_{\mathbf{T}^\nu} \oplus L_2(\mathbf{T}^\nu)dp \tag{1}$$

следует, что оператор H_1 разлагается в прямой интеграл

$$H_1 = \int\limits_{\mathbf{T}^\nu} \oplus h_1(p)dp,$$

[1]Расулов Тулкин Хусенович (rth@mail.ru), Рахмонов Аскар Ахмадович (araxmonov@mail.ru), Бухарский государственный университет, 200100, Узбекистан, г. Бухара, ул. М. Икбол, 11.

где оператор (модель Фридрихса) $h_1(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, действует в $L_2(\mathbf{T}^\nu)$ по формуле

$$h_1(p) = h_0(p) - v_1.$$

Здесь операторы $h_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$ и v_1 определяются по правилам:

$$(h_0(p)f)(q) = u(p,q)f(q), \quad (v_1 f)(q) = \int\limits_{\mathbf{T}^\nu} v(q,s)f(s)ds.$$

Отметим, что в разложении (1) под знаком прямого интеграла стоят одинаковые слои.

Оператор возмущения v_1 оператора $h_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$ является самосопряженным одномерным оператором. Из известной теоремы Г. Вейля [1] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр $\sigma_{ess}(h_1(p))$ оператора $h_1(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$ совпадает с существенным спектром оператора $h_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$. Известно, что $\sigma_{ess}(h_0(p)) = [m(p); M(p)]$, где числа $m(p)$ и $M(p)$ определяются по равенствам

$$m(p) = \min_{q \in \mathbf{T}^\nu} u(p,q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathbf{T}^\nu} u(p,q).$$

Из последних двух фактов следует, что $\sigma_{ess}(h_1(p)) = [m(p); M(p)]$.

Замечание. *Отметим, что для некоторого $p \in \mathbf{T}^\nu$ существенный спектр оператора $h_1(p)$ может превратиться в точку $\{m(p)\}$ и следовательно, для любого $p \in \mathbf{T}^\nu$ мы не можем сказать, что существенный спектр оператора $h_1(p)$ является абсолютно непрерывным. Например, если функция $u(\cdot,\cdot)$ имеет вид*

$$u(p,q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(p+q) + \varepsilon(q),$$

где функция $\varepsilon(\cdot)$ определяется равенством

$$\varepsilon(q) = \sum_{i=1}^{\nu}(1 - cosq_i),\ q = (q_1, \cdots, q_\nu) \in \mathbf{T}^\nu \quad u \quad p = (\underbrace{\pi, \cdots, \pi}_{\nu}) \in \mathbf{T}^\nu,$$

тогда $\sigma_{ess}(h_1(p)) = \{4\nu\}$.

Очевидно, что оператор H_1 является ограниченным и самосопряженным в $L_2((\mathbf{T}^\nu)^2)$ и он выбран единственном образом из оператора H в силу свойства разложимости в прямой операторный интеграл.

Положим

$$m = \min_{p,q \in \mathbf{T}^\nu} u(p,q),\ M = \max_{p,q \in \mathbf{T}^\nu} u(p,q),$$

$$\sigma_{two}(H_1) = \bigcup_{p \in \mathbf{T}^\nu} \sigma_{disc}(h_1(p)), \quad \sigma_{three}(H_1) = [m; M].$$

Спектр оператора H_1 описывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Для спектра оператора H_1 имеет место равенство*

$$\sigma(H_1) = \sigma_{two}(H_1) \cup \sigma_{three}(H_1).$$

Теперь сформулируем теорему, которая описывает существенный спектр оператора H.

Теорема 2. *Существенный спектр оператора H совпадает со спектром оператора H_1, т.е. $\sigma_{ess}(H) = \sigma(H_1)$.*

Согласно теореме 2 оператор H_1 обладает характеристическим свойством канального оператора соответствующего оператора Шредингера. По этой причине мы назовем их канальными операторами, соответствующими оператору H. Заметим, что канальный оператор H_1 имеет более простую структуру, чем H, и поэтому теорема 2 играет важную роль при дальнейших исследованиях спектра оператора H.

Теперь введем новые подмножества существенного спектра оператора H.

Определение. *Множества $\sigma_{two}(H_1)$ и $\sigma_{three}(H_1)$ называются двухчастичными и трехчастичными ветвями существенного спектра оператора H, соответственно.*

Литература

[1] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. – Т. 4. Анализ операторов. – М.: Мир, 1982.

[2] Лакаев С.Н., Муминов М.Э. Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке // Теор. и мат. физ. – 2003. – Т. 135. – №3. – С. 478–503.

УДК 517.984

ПОРОГОВЫЕ ЯВЛЕНИЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА

Расулов Т.Х., Турдиев Х.Х.[1]

В настоящей работе рассматривается обобщенная модель Фридрихса $h(p)$, в случае функции специального вида w_i, $i = 1, 2$, являющейся параметром оператора $h(p)$. Эта функция имеет невырожденный минимум в нескольких различных точках. Изучены пороговые явления для $h(p)$ в зависимости от точки минимума функции w_2. Результаты настоящей работы являются обобщениями соответствующих результатов из работ [1]. Отметим, что в работе [2] получены аналогичные результаты для модели Фридрихса.

Пусть $\mathbf{T}^3 \equiv (-\pi;\pi]^3$ — трехмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $L_2(\mathbf{T}^3)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbf{T}^3$ и $\mathbf{C}$ — одномерное комплексное пространство.

Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0 = \mathbf{C}$ и $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbf{T}^3)$, т.е. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Рассмотрим обобщенную модель Фридрихса $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, действующую в $\mathcal{H}$ по правилу

$$h(p) = \begin{pmatrix} h_{00}(p) & h_{01} \\ h_{10} & h_{11}(p) \end{pmatrix},$$

где операторы $h_{ii}(p) : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1$, $p \in \mathbf{T}^3$ и $h_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1$, $i \neq j$ определяются по формулам

$$(h_{00}(p)f_0)_0 = w_1(p)f_0, \quad (h_{01}f_1)_0 = \int\limits_{\mathbf{T}^3} v(s)f_1(s)ds,$$

$$(h_{10}f_0)_1(q) = v(q)f_0, \quad (h_{11}(p)f_1)_1(q) = w_2(p,q)f_1(q).$$

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1$, $v(\cdot)$ — вещественнозначная аналитическая четная функция на $\mathbf{T}^3$, а функции $w_1(\cdot)$ и $w_2(\cdot,\cdot)$ определены по формулам

$$w_1(p) = \varepsilon(p) + \lambda, \quad w_2(p,q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(p+q) + \varepsilon(q),$$

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{3}(1 - \cos mp^{(i)}),\ p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in \mathbf{T}^3, \quad m \in \mathbf{N},$$

где λ — фиксированное положительное число, а $\mathbf{N}$-множество натуральных чисел.

Очевидно, что оператор $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$ ограничен и самосопряжен в $\mathcal{H}$.

Обозначим через $n \equiv n(m)$ число точек

$$(p_i, q_j) \in (\mathbf{T}^3)^2, \quad p_i = (p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, p_i^{(3)}), \quad q_j = (q_j^{(1)}, q_j^{(2)}, q_j^{(3)}),$$

для которых

$$p_i^{(k)}, q_j^{(k)} \in \left\{0, \pm\frac{2}{m}\pi; \pm\frac{4}{m}\pi; \cdots; \pm\frac{m'}{m}\pi\right\}, \quad k = 1, 2, 3,$$

[1] Расулов Тулкин Хусенович (rth@mail.ru), Турдиев Халим Хамраевич (hturdiev@mail.ru), Бухарский государственный университет, 200100, Узбекистан, г. Бухара, ул. М. Икбол, 11.

причем $p_s \neq p_l$ и $q_s \neq q_l$ при $s \neq l$; здесь

$$m' = \begin{cases} m-2, & \text{если } m \text{ четная} \\ m-1, & \text{если } m \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Можно легко проверить, что функция $w_2(\cdot,\cdot)$ (соот. $w_1(\cdot)$) имеет невырожденный минимум в точках $(p_i, q_j) \in (\mathbf{T}^3)^2$ (соот. $p_i \in \mathbf{T}^3$) и $n = (m'+1)^6$, Дополнительно будем предполагать, что $m \geq 3$ (если $m = 1, 2$, тогда $n = 1$, а в настоящей работе нам интересен случай $n > 1$).

При каждом фиксированном $p \in \mathbf{T}^3$ определим регулярную в $\mathbf{C}\backslash\sigma_{ess}(h(p))$ функцию (детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$)

$$\Delta(p\,;z) = w_1(p) - z - \int\limits_{\mathbf{T}^3} \frac{v^2(s)ds}{w_2(p,s)-z}.$$

Функция $w_2(\cdot,\cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках $(p_i, q_j) \in (\mathbf{T}^3)^2$, $i, j = \overline{1, \sqrt{n}}$, а функция $v(\cdot)$ является аналитической на $\mathbf{T}^3$, поэтому из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега и равенства $\Delta(p_i\,;0) = \Delta(p_1\,;0)$, $i = \overline{2, \sqrt{n}}$ следует, что

$$\Delta(p_1\,;0) = \lim_{p \to p_i} \Delta(p\,;0), \qquad i = \overline{1, \sqrt{n}}.$$

Замечание. *Имеет место равенство* $h(p_1) \equiv h(p_i)$, $i = \overline{2, \sqrt{n}}$.

Пусть $C(\mathbf{T}^3)$ (соот. $L_1(\mathbf{T}^3)$) — банахово пространство непрерывных (соот. интегрируемых) функций, определенных на $\mathbf{T}^3$.

Определение. *Говорят, что оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, если число 1 является собственным значением оператора*

$$(G\psi)(q) = \frac{v(q)}{2\lambda} \int\limits_{\mathbf{T}^3} \frac{v(s)\psi(s)ds}{\varepsilon(s)}, \quad \psi \in C(\mathbf{T}^3)$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию $\psi(q_j) \neq 0$ при некотором $j \in \{1, 2, \cdots, \sqrt{n}\}$.

Если оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, тогда вектор-функция $f = (f_0, f_1)$, где

$$f_0 = \text{const} \neq 0, \quad f_1(q) = -\frac{v(q)f_0}{2\varepsilon(q)}, \tag{1}$$

удовлетворяет уравнению $h(p_1)f = 0$ и $f_1 \in L_1(\mathbf{T}^3) \setminus L_2(\mathbf{T}^3)$.

Если оператор $h(p_1)$ имеет нулевое собственное значение, тогда вектор-функция $f = (f_0, f_1)$, где f_0 и f_1 определены по формуле (1), удовлетворяет уравнению $h(p_1)f = 0$ и $f_1 \in L_2(\mathbf{T}^3)$.

Для точности предположим, что если оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, тогда функция $v(\cdot)$ отлична от нуля только в n_0, $1 < n_0 \leq \sqrt{n}$ точках множества $\{q_j\}_{j=1}^{\sqrt{n}}$. Далее, не нарушая общности (в противном случае перенумеруем) предположим, что $v(q_j) \neq 0$ при $j = \overline{1, n_0}$. Так как $\{p_j\}_{j=1}^{\sqrt{n}} \equiv \{q_j\}_{j=1}^{\sqrt{n}}$, положим $p_j = q_j$, $j = \overline{1, n_0}$.

Следующая теорема о необходимых и достаточных условиях для того чтобы, либо число $z = 0$ являлось собственным значением оператора $h(p_1)$, либо оператор $h(p_1)$ имел резонанс с нулевой энергией.

Теорема 1. *а) Оператор $h(p_1)$ имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда $\Delta(p_1\,;0)=0$ и $v(q_j)=0$, $j=\overline{1,\sqrt{n}}$;*
б) Оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией тогда и только тогда, когда $\Delta(p_1\,;0)=0$ и $v(q_j)\neq 0$ при некотором $j\in\{1,2,\cdots,\sqrt{n}\}$.

Теперь сформулируем результат о разложении определителья Фредгольма.

Теорема 2. *Если оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, тогда имеет место разложение*

$$\Delta(p\,;z)=\frac{\pi^2}{m^2}\sum_{j=1}^{n_0}v^2(q_j)\sqrt{\frac{3}{4}|p-p_i|^2-z}+O(|p-p_i|^2)+O(|z|)$$

при $|p-p_i|\to 0$, $i=\overline{1,n_0}$ и $z\to -0$.

Литература

[1] Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space // Discrete Spectrum Asymptotics. J. Stat. Phys. – 2007. – V. 127. – No. 2. – P. 191–220.

[2] Расулов Т.Х. Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // Теор. и матем. физ. – 2010. – Т. 163. – №1. – С. 34–44.

УДК 517.956.32

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ЛЫКОВА

Репин О.А.[1], *Кумыкова С.К.*[2]

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y^2 u_x + v_y - au = 0, \\ v_x + u_y = 0 \end{cases} \tag{1}$$

в области D, ограниченной характеристиками $AC : x - \dfrac{1}{2}y^2 = 0$, $BC : x + \dfrac{1}{2}y^2 = 1$ и отрезком $\overline{I} : 0 \leqslant x \leqslant 1$ прямой $y = 0$.

Задача. Найти решение $u(x, y)$, $v(x, y)$ системы (1) из класса $\mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^1(D \cup I)$, имеющие непрерывные вторые производные в области D, причем $u_x(x, 0)$, $u_y(x, 0)$ могут иметь интегрируемые особенности при стремлении x к точкам A и B, и удовлетворяющие условиям

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$A(x)\left(I_{0+}^{\delta_1,\, \delta_2,\, \frac{a-3}{4}-\delta_1} u\left[\theta_0(t)\right]\right)(x) + \\ + B(x)\left(I_{1-}^{\mu_1,\, \mu_2,\, -\frac{a+3}{4}-\mu_1} u\left[\theta_1(t)\right]\right)(x) = C(x) \quad 0 < x < 1,$$

где $|a| < 1$, $\varphi(x)$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ — известные функции, такие, что

$$\varphi(x) \in \mathbb{C}^2(\overline{I}) \cap \mathbb{C}^3(I), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0,$$

$A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in \mathbb{C}^1(\overline{I}) \cap \mathbb{C}^3(I)$, $A^2(x) + B^2(x) \neq 0$ для любых $x \in [0, 1]$; δ_1, δ_2, μ_1, μ_2 — действительные постоянные.

$\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик системы (1), выходящих из точки $(x, 0)$ $(0 < x < 1)$ с характеристиками AC и BC соответственно.

$\left(I_{0+}^{\alpha,\, \beta,\, \eta} f\right)(x)$, $\left(I_{1-}^{\alpha,\, \beta,\, \eta} f\right)(x)$ — обобщенные интегралы и производные с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b; c; z)$, введенные в [1] (см. также [2. С. 326–327]) и имеющие при действительных α, β, η и $x > 0$ вид

$$\left(I_{0+}^{\alpha,\, \beta,\, \eta} f\right)(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} F\left(\alpha + \beta,\, -\eta;\, \alpha;\, 1 - \frac{t}{x}\right) f(t)\, dt \\ (\alpha > 0,\ 0 < x < 1),$$

$$\left(I_{0+}^{\alpha,\, \beta,\, \eta} f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{0+}^{\alpha+n,\, \beta-n,\, \eta-n} f\right)(x) \\ (0 < x < 1,\ \alpha < 0,\ n = [-\alpha] + 1),$$

[1]Репин Олег Александрович (matstat@mail.ru), Самарский государственный экономический университет, 443090, Россия, г. Самара, ул. Советской Армии, 141.

[2]Кумыкова Светлана Каншубиевна, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 360004, Россия, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

$$\left(I_{1-}^{\alpha,\,\beta,\,\eta}f\right)(x)=\frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x}^{1}(t-x)^{\alpha-1}F\left(\alpha+\beta,\,-\eta;\,\alpha;\,\frac{t-x}{1-x}\right)f(t)\,dt$$
$$(\alpha>0,\ 0<x<1),$$

$$\left(I_{1-}^{\alpha,\,\beta,\,\eta}f\right)(x)=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_{1-}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f\right)(x)$$
$$(0<x<1,\ \alpha<0,\ n=[-\alpha]+1).$$

Для различных значений δ_1, δ_2, μ_1, μ_2 доказана однозначная разрешимость исследуемой задачи.

Литература

[1] Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu Univ. – 1978. – V. 11. – №2. – P. 135–143.

[2] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

УДК 517.951

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО АНАЛОГА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА КООРДИНАТНЫХ ПЛОСКОСТЯХ

Родионова И.Н.[1]

Уравнение

$$U_{xyz}+\frac{\gamma}{z}U_{xy}+\frac{\beta}{y}U_{xz}+\frac{\alpha}{x}U_{yz}+\frac{\beta\gamma}{yz}U_x+\frac{\alpha\gamma}{xz}U_y+\frac{\alpha\beta}{xy}U_z+\frac{\alpha\gamma\beta}{xyz}U=0, \tag{1}$$

$0<\alpha,\beta,\gamma-\text{const}<1$, рассмотрим на множестве $H=H_1\cup H_2$, где $H_1=\{(x,y,z)/\ 0<x<y<h,\ 0<z<+\infty\}$, $\text{h}-\text{const}$, $h>0$; $H_2=\{(x,y,z)/0<y<x<h,\ 0<z<+\infty\}$.

Доказана однозначная разрешимость и получены в явном виде решения следующих краевых задач.

На множестве H найти решение уравнения (1), непрерывное в H с условиями:

Задача I:

$$U(x,h,z)=\psi(x,z),\qquad 0<x<h,\quad 0<z<+\infty, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to 0}y^{\beta}U(x,y,z)=\varphi(x,z),\qquad 0<x<h,\quad 0<z<+\infty, \tag{3}$$

$$\lim_{z\to 0}z^{\gamma}U(x,y,z)=f_1(x,y),\quad 0<x<y<h, \tag{4}$$

$$\lim_{z\to 0}z^{\gamma}U(x,y,z)=f_2(x,y),\quad 0<y<x<h, \tag{5}$$

на плоскости $x=y$ удовлетворяющее условиям сопряжения

$$\tau_1(x,z)=\lim_{y\to x+0}U(x,y,z)=\lim_{y\to x-0}U(x,y,z)=\tau_2(x,z), \tag{6}$$

$$x^{2\beta}\lim_{y\to x+0}(U_x-U_y)=x^{2\alpha}\lim_{y\to x-0}(U_x-U_y)+\left(x^{2\alpha}U(x,x,z)\right)'_x. \tag{7}$$

Задача II: с данными (2), (4), (5), а также $\int\limits_0^x U(x,t,z)dt=\varphi_2(x,z)$ и условиями сопряжения (6) и (7).

Задача III: с условиями $\int\limits_0^y t^{\alpha}U(t,y,z)dt=\varphi_1(y,z)$, $\int\limits_0^x t^{\beta}U(x,t,z)dt=\varphi_3(x,z)$, а также (4), (5) и сопряжением на плоскости $y=x$ (6) и

$$x^{2\beta}\lim_{y\to x+0}(U_x-U_y)=x^{2\alpha}\lim_{y\to x-0}(U_x-U_y). \tag{8}$$

[1]Родионова Ирина Николаевна (mvdolg@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г.Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта АВЦП 3341 ведомственной программы Министерства образования и науки РФ и контракта 2173 ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг.

Литература

[1] Захаров В.Н. Краевые задачи для одного уравнения, вырождающегося на координатных плоскостях. Доклады 52-ой научной конференции СГПУ (Сборник трудов) май 1998 г., Самара.

УДК 917.946

АНАЛИЗ ПРОДУКТИВНОСТИ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДОБЫВАЮЩИХ СКВАЖИН

Ротерс П.В.[1]

В докладе представлена математическая модель, позволяющая анализировать продуктивность систем добывающих скважин. Система скважин моделируется плоской бесконечной двоякопериодической решеткой точечных стоков одинаковой мощности.

В настоящее время для оценки продуктивности системы скважин используются так называемый shape factor (коэффициент формы). Он позволяет определить среднее давление в области питания скважины в зависимости от формы его контура питания. В работе [3] величина коэффициента формы была вычислена для ряда решеток (прямоугольная, равнобедренно-треугольная, ромбическая) и сравнена с коэффициентом формы для идеального кругового контура.

В данной работе найдена аналитическая зависимость коэффициента формы от типа решетки, что позволяет рассчитать shape factor для любой формы контура питания. Аналогично работам из области вихревой динамики [1, 2] для двоякопериодических систем скважин была построена математическая модель с привлечением эллиптических функций Вейерштрасса. Данная модель задает комплексный потенциал, являющийся двоякопериодической функцией, в виде:

$$\varphi(z, \bar{z}) = \ln \sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} - \frac{\pi}{\Delta} z\bar{z}, \tag{1}$$

где $\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса, $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - 2\eta_1$, $\eta_1 = \zeta(\omega_1/2)$ — квазипериод дзета-функции Вейерштрасса, Δ — площадь ячейки для выбранного типа решетки.

Вещественная часть данного потенциала определяет поле давления, а его производная – поле скоростей. Данная математическая модель позволила вычислить распределения поля давления и поля скоростей в решетках произвольных конфигураций и определить контуры питания скважин, расположенных в узлах решетки.

В итоге для коэффициента продуктивности скважины $PI = 1/\mathrm{Re}[\varphi(z, \bar{z})]$ было найдено явное выражение:

$$PI = 2/\ln\left[\frac{4\Delta}{\gamma C_A r_w^2}\right], \tag{2}$$

где $\gamma = 1,781$, r_w — радиус скважины, C_A — коэффициент формы контура питания скважины.

Для одной скважины, расположенной в параллелограмме периодов, коэффициент формы может быть рассчитан следующим образом:

$$C_A(\tau) = \frac{16\pi^2}{\gamma}\mathrm{Im}\tau \left| q^{\frac{1}{3}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^{2n}\right)^4 \right|, \tag{3}$$

где $\tau = \omega_1/\omega_2$ — отношение периодов решетки, $q = \exp[i\pi\tau]$.

[1] Ротерс Павел Вячеславович (roters@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

В случае, когда в параллелограмме периодов расположены две скважины с одинаковым дебитом Q, коэффициент формы каждой их них может быть найден благодаря установленной зависимости:

$$C_A^{(2)}(\tau) = \frac{\gamma}{8}\frac{R_{12}^2}{\Delta}\left[C_A^{(1)}(\tau)\right]^2, \tag{4}$$

где $C_A^{(2)}$ — коэффициент формы для одной из двух скважин, расположенных в параллелограмме периодов; $C_A^{(1)}$ — коэффициент формы для одной скважины в параллелограмме периодов с дебитом $2Q$; R_{12} — выражает расстояние между двумя скважинами:

$$\ln R_{12} = \operatorname{Re}\ln\left[\sigma(z_1 - z_2) - \frac{\alpha(z_1 - z_2)^2}{2}\right] - \frac{\pi}{2\Delta}|z_1 - z_2|^2. \tag{5}$$

Значения коэффициента C_A полностью совпали со значениями, вычисленными Дитцом и другими авторами путем численного суммирования бесконечных условносходящихся рядов для некоторых типов решеток.

Литература

[1] О'Нейл К.А. О гамильтовой динамике вихревых решеток. // Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей. – Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2003. – С. 336–353.

[2] Ткаченко В.К. О вихревых решетках // ЖЭТФ. – 1965. – Т. 49. – С. 1875–1883.

[3] Dietz D.N. Determination of Average Reservoir Pressure From Build-Up Surveys. – Rejswijk, The Netherlands: SPE, 1965. – P. 955–959.

УДК 530.12+539.1.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РАСШИРЕНИЕ ЛОРЕНЦЕВОЙ СИММЕТРИИ ДО КОНФОРМНОЙ ДЛЯ МАССИВНЫХ ЧАСТИЦ В ПРЕДЕЛЕ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Рудой Ю.Г., Вернигора И.А.[1]

Вот уже более полувека в астрофизике космических лучей (КЛ) в области сверхвысоких энергий (порядка 10^{18}–10^{20} эВ) остается открытой проблема существования предела Грейзена—Зацепина—Кузьмина (ГЗК), предположенного практически одновременно и независимо в работах [1] и [2]. Согласно этим работам, распределение по энергиям протонной компоненты первичных КЛ должно резко обрываться в области энергий порядка $E_{\text{ГЗК}} \approx 5 \cdot 10^{19}$эВ за счет потерь энергии протонов на фоторождение пионов в реакциях вида $p + \gamma \to p + \pi^0$ или $p + \gamma \to n + \pi^+$ (с последующим β-распадом $n \to p + e^- + \nu_e$), где γ — фотоны реликтового излучения.

Несмотря на длительное время, прошедшее с момента предсказания предела ГЗК, его экспериментальный статус все еще остается не вполне определенным (см., например, [3]). Поэтому начиная с работы Киржница и Чечина [4] (см. также Коулмен и Глэшоу [5] и более поздние работы [6, 7]) — рассматривалась возможность, оставаясь в рамках «обычной» физики, найти ресурсы ее "деформации", допускающие (по крайней мере, в принципе) преодоление предела ГЗК. Согласно [4], подобную роль могло бы сыграть отклонение от лоренцевской кинематики при очень высоких значениях лоренц-фактора $\gamma = E/E_0 \approx 10^{10} \div 10^{11}$.

Однако в [4] этот подход был сформулирован на полуфеноменологическом уровне и, на наш взгляд, нуждается в более надежном математическом обосновании, что и является целью данной работы. Наша исходная идея состоит в том, что при сверхвысоких значениях энергии и лоренц-фактора γ в кинематике любых массивных частиц с необходимостью появляются "конформные" поправки по степеням $1/\gamma$ (отсутствующие для безмассовых частиц в пределе $1/\gamma = 0$). Здесь имеет место аналогия с хорошо известными релятивистскими (лоренцевскими) поправками по степеням малой величины $\gamma - 1$ (точнее, по степеням $\beta = v/c \sim (\gamma - 1)^{1/2}$, c — скорость света) к обычной галилеевской кинематике.

Теоретической основой подобного подхода служит постепенное расширение группы допустимых преобразований с ростом значений γ: от группы Галилея G_{10} к группе Лоренца—Пуанкаре P_{10} и далее к конформной группе Вейля—Фока C_{15}, причем число точных инвариантов в этом процессе сокращается. Тем не менее, предполагается возможность не только точного, но и приближенного нарушения той или иной симметрии, а также применимость теории возмущений по соответствующим малым параметрам $\gamma - 1$ и $\xi \equiv 1/\gamma$.

В частности, при малых $\xi = E_0/E$ следует заменить лоренцев скаляр $I_L(p; E_0) = E^2 - p^2 = E_0^2$, инвариантный при любых значениях E_0 и ξ, на конформный скаляр $I_C(p; E_0) = C(\xi) I_L(p; E_0)$, который является точным инвариантом только в безмассовом случае $E_0 = 0$, $\xi = 0$. Именно последнее обстоятельство и указывает естественный путь построения теории возмущений для $C(\xi)$ по малому параметру ξ при переходе от группы P_{10} к группе C_{15}.

[1]Рудой Юрий Григорьевич (rudikar@mail.ru), Вернигора Ирина Александровна (wenera-83@mail.ru), Российский университет дружбы народов, кафедра, 117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

Группа P_{10} определяется 10 параметрами и является тензорным произведением группы лоренцевых вращений L_6 и группы трансляций $T_4(c)$, определяемой произвольным постоянным 4-вектором c. Группа C_{15} включает дополнительно к P_{10} одномерную подгруппу D_1 дилатаций с одним скалярным параметром $\lambda > 0$, а также подгруппу "специальных" конформных преобразований, или преобразований Мебиуса—Вейля—Фока, $C_4(c) = \mathbf{R}T_4(c)\mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — нелинейное (зависящее от P) преобразование инверсии $\mathbf{R}P \equiv -P/P^2$, вообще не содержащее каких-либо параметров и обладающее инволютивным свойством $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}$.

Под действием преобразований $C_4(c)$ любой 4-вектор P переходит в

$$P_C = C(P;c)P + \Delta P(P;c), \quad \Delta P(P;c) = C(P;c)cP^2; \quad P_C^2 = C(P;c)P^2, \qquad (1)$$

причем конформный множитель $C(P;c)$ дается выражением

$$C(P;c) = [\sigma(P;c)]^{-1}, \quad \sigma(P;c) = 1 - 2cP + c^2P^2 = c^2(P - c/c^2)^2. \qquad (2)$$

Для поставленных в данной работе целей достаточно ограничиться физически выделенным выбором $c = -aP$ $(a \geqslant 0)$ с последующим переходом к однородным координатам: от вектора 4-импульса P к вектору 4-скорости $V = P/E = (1, v = p/E)$ (это удобно, поскольку $V^2 = \xi^2$). Показано, что за счет выбора конформного параметра в виде $a = \alpha\gamma^*$, где $\gamma^* = E_{\text{Планка}}/E_{\text{протона}} \approx 10^{18}$, $\alpha = O(1)$, действительно удается преодолеть предел ГЗК для протонов, причем несмотря на различие подходов, полученные результаты в целом согласуются с [4–8].

Литература

[1] Greisen K. // Phys. Rev. Lett. – 1966. – V. 16, No 17. – P. 748–750.
[2] Зацепин Г.Т., Кузьмин В.А. // Письма в ЖЭТФ. – 1966. – Т. 4. – С. 114–116.
[3] Березинский В.С. // Труды ВККЛ-31. – М.: МГУ, 2010.
[4] Киржниц Д.А., Чечин В.А. // Ядерная физика. – 1972. – Т. 15. – вып. 5. – С. 1051–1058.
[5] Coleman S., Glashow S.L. // Phys. Rev. D. – 1999. – V. 59. – P. 116008.
[6] Gonzalez–Mestres L. // 2000. Proc. 26th ICRC. – 1999. – arXiv: physics/0003080v1.
[7] Scully S.T., Stecker F.W. // arXiv: astro-ph/0811.2230v4.
[8] Jacobson T., Liberati S., Mattingly D. // arXiv:hep-ph/0407370v1.

УДК 539.3

О НАРУШЕНИИ НЕРАВЕНСТВА АДАМАРА ПРИ УПРОЧНЕНИИ МАТЕРИАЛА

Рыжак Е.И.[1]

Понятия упрочнения и разупрочнения связаны с тензором модулей жесткости, задающим инкрементальное определяющее соотношение для напряжений Коши, а неравенство Адамара (имеющее смысл универсального необходимого условия устойчивости) связано с другим тензором модулей жесткости, задающим инкрементальное соотношение для напряжений Пиолы. Разные тензоры модулей материала связаны между собой, и неравенство Адамара может нарушаться как за счет разупрочнения, так и при упрочнении за счет достаточно больших девиаторных напряжений. В работе для некоторого известного простого модельного инкрементального определяющего соотношения получены условия нарушения неравенства Адамара при упрочнении материала. Конкретно, получены критические значения напряжений и пара векторов, на которых адамарова биквадратичная форма впервые принимает нулевое значение. Рассмотрены существенные отличия локализационной неустойчивости, возникающей в данном случае, от традиционно принимаемых свойств локализационной неустойчивости, характерных для случая, когда локализация порождается разупрочнением материала.

[1]Рыжак Евгений Измаилович (e_i_ryzhak@mail.ru), Институт физики Земли РАН, 123995, Россия, г. Москва, ул. Б. Грузинская, 10.

УДК 519.98

О ДИНАМИКЕ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ С ВЫРОЖДЕННЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ

Сакбаев В.Ж.[1]

Квантовый гамильтониан с вырожденной характеристической формой рассматривается вместе со своей проколотой окрестностью в пространстве замкнутых линейных операторов. Задание меры, сосредоточенной в произвольной проколотой окрестности вырожденного гамильтониана, превращает регуляризацию в случайный процесс. Сформулирована и решена задача о наблюдаемости динамической системы в пространстве квантовых состояний, определяемой математическим ожиданием случайного процесса, представляющего регуляризацию квантовой системы с вырожденным гамильтонианом: неизвестное начальное состояние системы определяется по значениям математического ожидания в один или в два различных момента времени. Исследуется структура множества крайних точек совокупности квантовых состояний.

Изучается задача Коши для уравнения Шредингера

$$i\frac{d}{dt}u(t) = \mathbf{L}u(t),\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(+0) = u_0,\ u_0 \in H = L_2(R), \tag{2}$$

где $\mathbf{L}$ — симметрический плотно определенный оператор в гильбертовом пространстве H, заданный дифференциальным выражением второго порядка в симметричной форме

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2}\left[a(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}a(x)\right] + b(x) \tag{3}$$

с ограниченными кусочно непрерывными коэффициентами и неотрицательным коэффициентом $g(x)$ при старшей производной. Вырождение опратора — обращение в нуль коэффициента $g(x)$ — приводит к несамосопряженности симметрического оператора $\mathbf{L}$. Предположим, что симметрический оператор $\mathbf{L}$ удовлетворяет условию $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) > \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* - i\mathbf{I})) = 0$ и поэтому генерирует изометрическую но не унитарную полугруппу $e^{i\mathbf{L}t}$, $t > 0$. С задачей Коши (1), (2) связана последовательность регуляризованных задач Коши с начальным условием (2) для уравнений

$$i\frac{d}{dt}u(t) = \mathbf{L}_\epsilon u(t),\ t > 0,\ \epsilon \in E \equiv (0,1), \tag{4}$$

где при каждом $\epsilon \in E$ оператор $\mathbf{L}_\epsilon$ самосопряжен и равномерно эллиптичен, а при $\epsilon \to 0$ последовательность $\{\mathbf{L}_\epsilon\}$ аппроксимирует оператор $\mathbf{L}$. Например, такое поведение проявляет последовательность операторов $\mathbf{L}_\epsilon$, $\epsilon \in (0,1)$, $\epsilon \to 0$, задаваемых дифференциальными выражениями второго порядка с равномерно отделенным от нуля коэффициентом $g_\varepsilon(x) = g(x) + \epsilon$ вместо $g(x)$.

[1]Сакбаев Всеволод Жанович (fumi2003@mail.ru), Московский физико-технический институт, 141700, Россия, г. Долгопрудный, Московская обл., Институтский пер., 9.

Пусть $B(X)$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве X. Для исследования поведения при $\epsilon \to 0$ последовательности регуляризованных полугрупп $\{e^{-i\mathbf{L}_\epsilon t},\, t > 0,\}_{\epsilon\in E,\,\epsilon\to 0}$ в пространстве H изучается последовательность соответствующих регуляризованных динамических полугрупп $\{T_\epsilon(t),\, t > 0\}_{\epsilon\in E,\,\epsilon\to 0}$ в банаховом пространстве квантовых состояний $(B(H))^*$, действующих по правилу

$$T_\epsilon(t)r = \rho_\epsilon(t,r),\ r \in (B(H))^*$$

где $\langle T_\epsilon(t)r, \mathbf{A}\rangle = \langle r, e^{i\mathbf{L}_\epsilon t}\mathbf{A}e^{-i\mathbf{L}_\epsilon t}\rangle\ \forall\ \mathbf{A} \in B(H)$.

Теорема 1. *Пусть $t > 0$. Тогда последовательность операторов $\{e^{-i\mathbf{L}_\epsilon t}\}$ не содержит подпоследовательности, сходящейся сильной операторной топологии, а последовательность операторов $\{T_\epsilon(t)\}$ не имеет подпоследовательности, сходящейся в *-слабой операторной топологии пространства $B((B(H))^*)$.*

Через $\Sigma(H)$ обозначим множество квантовых состояний — пересечение единичной сферы $S_1((B(H))^*)$ с положительным конусом $(B(H))^*_+$ пространства $(B(H))^*$. Пусть $\Sigma^p(H)$ есть множество чистых состояний — функционалов $\rho_u \in \Sigma(H)$, действие которых на любой элемент $\mathbf{A} \in B(H)$ задается равенством $\langle \rho_u, \mathbf{A}\rangle = (u, \mathbf{A}u)$, где u — произвольный элемент единичной сферы $S_1(H)$ пространства H.

Последовательность динамических полугрупп $\{T_\epsilon(t)\}_{\epsilon\in E,\,\epsilon\to 0}$ изучается как случайный процесс со значениями в пространстве $B((B(H))^*)$, определенный на измеримом пространстве параметров регуляризации $(E, 2^E)$ с конечно аддитивной неотрицательной нормированной мерой μ на σ-алгебре всех подмножеств 2^E, сосредоточенной в произвольной проколотой окрестности предельной точки $\epsilon = 0$. Класс $W(E)$ удовлетворяющих указанным условиям мер непуст (см. [1]). Математическое ожидание процесса $T_\epsilon(t)$, определенное интегралом Петтиса по мере $\mu \in W(E)$, задает семейство усредненных динамических преобразований (см. [2])

$$T^\mu(t) = \int\limits_E T_\epsilon(t)d\mu,\ t > 0,$$

действующих на произвольное начальное состояние $r \in \Sigma(H)$ таким образом, что

$$\langle T^\mu(t)r, \mathbf{A}\rangle = \int\limits_E \langle T_\epsilon(t)r, \mathbf{A}\rangle d\mu \quad \forall\ \mathbf{A} \in B(H).$$

Отображение $T^\mu(t)$ является линейным непрерывным преобразованием пространства $(B(H))^*$ с инвариантным множеством $\Sigma(H)$, но не инъективнно и не сюръективно (см. [3]).

Известно, что множество квантовых состояний $\Sigma(H)$ совпадает с замыканием в *-слабой топологии пространства $(B(H))^*$ множества выпуклых комбинаций чистых квантовых состояний $\Sigma^p(H)$, которое вкючено во множество крайних точек $\mathrm{Extr}(\Sigma(H))$. С другой стороны, множество крайних точек нормальных квантовых состояний $\Sigma^n(H)$ совпадает с множеством чистых состояний $\Sigma^p(H)$, а множество $\Sigma^n(H)$ – с замыканием в топологии нормы пространства $(B(H))^*$ множества выпуклых комбинаций чистых квантовых состояний $\Sigma^p(H)$ (см. [4]). Обозначим через $\Sigma^w(H)$ множество квантовых состояний, представимых в виде интеграла Петтиса $\rho = \int\limits_{\mathbf{N}} \mathbf{P}_{e_k} d\mu$, где $\{e_k\}$ — ортонормированная система в H, $\mathbf{P}_{e_k}$ — ортогональный проектор на вектор e_k и μ — чисто конечно-аддитивная мера на множестве $\mathbf{N}$, определенная на алгебре всех подмножеств 2^N и принимающая только значения 0 и 1.

Теорема 2. *Любая точка множества $\Sigma^w(H)$ является крайней точкой множества $\Sigma(H)$. Множество $\Sigma(H)$ совпадает с замыканием в топологии нормы пространства $(B(H))^*$ выпуклой оболочки множества $\Sigma^w(H)$.*

Теорема 3. *Существует класс мер $M \subset W(E)$ такой, что $\forall\ \mu \in \mathcal{M}(t)$ семейство отображений $T^\mu(t), t > 0$, обладает следующим свойством наблюдаемости. Существует такой функционал $\Phi(\rho, r)$, $(\rho, r) \in \Sigma(H) \times \Sigma^p(H)$, что для каждого $\rho_0 \in \Sigma^p(H)$ и любого $t > 0$ множество точек строгого минимума функционала $\Phi(T^\mu(t)\rho_0, \cdot)$ есть кривая $\mathcal{C}(t) \in \Sigma^p(H)$, гомеоморфная окружности. Для любого $t > 0$ найдется такое $t_1 \neq t$, $t_1 > 0$, что кривые $\mathcal{C}(t)$ и $\mathcal{C}(t_1)$ имеют единственную общую точку $\rho_0 = \mathcal{C}(t) \bigcap \mathcal{C}(t_1)$.*

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ N 09-01-00265, N 10-01-00395, ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы и АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы", проект N 2.1.1/500.

Литература

[1] Hewit E., Iosida K. Finitely additive measures // Trans. Amer. Math. Soc. – 1952. – V. 72. – P. 46–66.

[2] Sakbaev V.Zh. Stochastic Properties of Degenerated Quantun Systems // Infinite Dimentional Analysis, Quantum Probabilities and Related Topics. – 2010. – V. 13. – P. 65–85.

[3] Сакбаев В.Ж. Об усреднении квантовых динамических полугрупп // ТМФ. – 2010 (принята в печать).

[4] Эмх Ж. Алгебраические методы в статистической механики и квантовой теории поля. – М.: Мир, 1976. – 423 с.

УДК 539.1

АССОЦИАТИВНОЕ РОЖДЕНИЕ КВАРКОВ В КВАЗИ-МУЛЬТИ-РЕДЖЕВСКОЙ КИНЕМАТИКЕ НА КОЛЛАЙДЕРАХ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Салеев В.А., Шипилова А.В.[1]

Мы рассматриваем ассоциативное рождение кварков совместно с фотонами в подходе квази-мульти-реджевской кинематики [1], основанном на гипотезе реджезации t-канальных глюонов и кварков при высоких энергиях. Наш анализ базирован на предписании Кимбера—Мартина—Рыскина [2] для неинтегрированых глюонных и кварковых функций распределения, с использованием коллинеарных функций распределения Мартина—Робертса—Стирлинга—Торна партонов в протоне [3] в качестве исходных.

Основной вклад в изучаемые нами процессы вносит подпроцесс рассеяния реджезованного глюона на реджезованном кварке с рождением кварка и фотона, который описывается эффективной вершиной Реджеон—Реджеон—кварк—фотон [4]. Используя данную вершину, мы получили квадрат модуля амплитуды исследуемого подпроцесса и с его помощью вычислили различные сечения ассоциативного кварк-фотонного рождения. Наши расчеты хорошо согласуются с экспериментальными данными Коллабораций CDF и D0, полученными на коллайдере Тэватрон, без привлечения свободных параметров [5] .

Литература

[1] Fadin V.S., Lipatov L.N. Radiative corrections to QCD scattering amplitudes in a multi-Regge kinematics // Nuclear Physics B. – 1993. – V. 406. – P. 259–292; Next-to-leading Corrections to the BFKL Equation From the Gluon and Quark Production // Nuclear Physics B. – 1996. – V. 477. – P. 767–808.

[2] Kimber M.A., Martin A.D., Ryskin M.G. Unintegrated parton distributions // Physical Review D. – 2001. – V. 63. – P. 114027-1–114027-19.

[3] Martin A.D., Roberts R.G., Stirling W.J., Thorne R.S. NNLO global parton analysis // Physics Letters B. – 2002. – V. 531. – P. 216–224.

[4] Saleev V.A. Quark Reggeization and Prompt Photon Production at HERA and Tevatron // Proceedings of XVII International Workshop on Deep-Inelastic Scattering and Related Topics. 2009. Madrid, Spain; Progress in High Energy Physics. – 2009. – V. 3. – P. 106–112.

[5] Kniehl B.A., Saleev V.A., Shipilova A.V. Inclusive b and $b\bar{b}$ production with quasi-multi-Regge kinematics at the Tevatron // Physical Review D. – 2010. – V. 81. – P. 094010-1–094010-13.

[1] Салеев Владимир Анатольевич (saleev@ssu.samara.ru), Шипилова Александра Викторовна (alexshipilova@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

УДК 539.183+539.194

ДИНАМИКА ПРОЦЕССА ПЕРЕХОДА МЕЖДУ СОСТОЯНИЯМИ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

Самарин А.Ю.[1]

Переход — изменение физических характеристик системы — может являться объектом самостоятельного изучения в том случае, если представляет собой процесс, логическую последовательность событий. Это приводит к предположению конечности и непрерывности времени изменения волновых функций дискретного спектра [1]. С другой стороны, дискретность значений физических величин и спектра волновых функций не позволяет физически рассматривать материальный объект, в процессе перехода между состояниями в силу отсутствия у него в это время каких-либо физических характеристик. Согласно квантовой теории это обстоятельство носит универсальный характер при взаимодействии микросистем. В докладе представлен метод описания процесса перехода, основанный на использовании матричных элементов физических величин — функций комплексных переменных (матричных элементов координаты и времени) [2, 3]. Основу этих матричных элементов составляют континуальные интегралы (интегралы по траекториям) [4]. Для описания временного хода эволюции волновой функции в процессе квантового скачка в структуру матричных элементов вводятся переменные пространства и времени перехода. Динамическое уравнение для этих матричных элементов, в форме интегралов по траекториям, практически неразрешимо. В докладе показано, каким образом эти матричные элементы могут быть представлены в виде функций комплексных переменных — матричных элементов координаты и времени, имеющих однозначную физическую интерпретацию в начале и конце перехода. Предложен вариационный принцип, позволяющий вывести динамическое уравнение для матричных элементов перехода.

Литература

[1] Самарин А.Ю. Возникновение стабильных состояний атомов и молекул за счет обменного взаимодействия возбужденных электронов // Вестник самарского гос. техн. ун-та. – Сер. Физ.-мат. науки, 2009. – №1(18). – С. 214–221.

[2] Самарин А.Ю. Волновое уравнение перехода между состояниями дискретного спектра // Вестник. самарского гос. техн. ун-та. – Сер. физ.-мат. науки, 2009. – №2(19). – С. 226–229.

[3] Самарин А.Ю. Волновое уравнение перехода между состояниями дискретного спектра // Вестник самарского гос. техн. ун-та. – Сер. физ.-мат. науки, 2010. – №1(20). – С. 188–196.

[4] Фейман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. – М,: Мир, 1968. – 382 с.

[1]Самарин Алексей Юрьевич (Sfvfrinay@Yahoo.com), Самарский государственный технический университет, 443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

УДК 517.956.32

РЕШЕНИЕ В ЯВНОМ ВИДЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА—ЛИУВИЛЛЯ

Сайганова С.А.[1]

Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - D^{\alpha}_{0+,\,y}u = 0 & (y > 0,\ 0 < \alpha < 1), \\ xu_{xx} + yu_{yy} + pu_x + qu_y = 0 & (y < 0,\ \dfrac{1}{2} < p,\ q < 1,\ q \geqslant p), \end{cases} \tag{1}$$

где $D^{\alpha}_{0+,\,y}$ — частная дробная производная Римана—Лиувилля порядка α, $0 < \alpha < 1$, от функции $u(x,\,y)$ по второй переменной [1. с. 341].

Данная работа посвящена изучению уравнения (1) в области D, которая представляет собой объединение квадрата $D^{+} = \{(x, y) :\ 0 \leqslant x,\ y \leqslant 1\}$, единичного интервала $I = (0,\,1)$ прямой $y = 0$ и области D^{-}, лежащей в нижней полуплоскости $(y < 0)$ и ограниченной характеристиками $AC : x + y = 0$, $BC : \sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1$ уравнения (1), прямой $y = 0$, $A(0,0)$, $B(1,0)$.

Пусть $\left(I^{\alpha,\,\beta,\,\eta}_{0+} f\right)(x)$ — оператор обобщенного дробного интегро-дифференцирования, введенный в [1, с. 326—327].

Задача. Найти решение $u(x,\,y)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,\,y) = \varphi_0(y), \quad u(1,\,y) = \varphi_1(y), \quad 0 < y < 1,$$

$$\left(I^{\frac{1}{2}-q,\ \frac{1+q-p}{2},\ \frac{p+q-1}{2}}_{0+} t^{q-1} u\left[\theta_0(t)\right]\right)(x) =$$

$$= Ax^{\frac{p+q-3}{2}} u(x,\,0) + Bx^{\frac{p+q-1}{2}+\varepsilon} \quad (0 < x < 1,\ \frac{1}{2} < p,\ q < 1,\ q \geqslant p,\ \varepsilon > 0),$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha} u(x,\,y) = \lim_{y\to 0-} u(x,\,y) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha} \left(y^{1-\alpha} u(x,\,y)\right)_y = \lim_{y\to 0-} (-y)^q u_y(x,\,y) \quad (0 < x < 1).$$

Здесь $\theta_0(x) = \dfrac{x}{4} - i\dfrac{x}{4}$ — точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $(x,\,0)$ с характеристикой AC, $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$ — заданные функции, такие, что

$$y^{1-\alpha}\varphi_0(y),\ y^{1-\alpha}\varphi_1(y) \in C(0,\,1),$$

A и B— действительные константы.

Решение $u(x,\,y)$ поставленной задачи находим в классе дважды дифференцируемых в области D функций таких, что

$$y^{1-\alpha} u(x,\,y) \in C(\overline{D}^{+}),\ u(x,\,y) \in C(\overline{D}^{-}),$$
$$u_{xx} \in C\left(D^{+} \cup D^{-}\right),\ u_{yy} \in C(\overline{D}^{-}),$$
$$y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha} u\right)_y \in C\left(D^{+} \cup \{(x,\,y):\ 0 < x < 1,\ y = 0\}\right).$$

[1]Сайганова Светлана Александровна (syomina_sa@mail.ru), Самарский государственный технический университет, 443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

В работе доказаны теоремы единственности и существования решения исследуемой задачи.

Литература

[1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

УДК 530.12

МЕТОД ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ПОГРУЖЕНИЙ В СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИГМА МОДЕЛИ

Свистунова Ю.А.[1], *Червон С.В.*[2]

Чисто кинетические самогравитирующие нелинейные сигма модели (НСМ) описываются действием

$$S = \int\limits_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} d^m x \left(\frac{R}{2\kappa} + \frac{1}{2} h_{AB}(\varphi) \varphi^A_{,\mu} \varphi^B_{,\nu} g^{\mu\nu} \right).$$

Здесь $(\mathcal{M}^m, g_{\mu\nu}(x))$ — пространство–время, $(\mathcal{N}^n, h_{AB}(\varphi))$ — киральное пространство, с координатами $\varphi = (\varphi^1, ..., \varphi^n)$, представляющими собой мультиплет киральных полей. Одним из методов исследования НСМ, позволяющий получить точные космологические решения самосогласованной системы уравнений Эйнштейна и киральных полей является метод изометрического погружения (ИП). Данный подход заключается в погружении изометрическим образом пространство целей в пространство–время [1], при этом происходит упрощение уравнений за счет выбора связи между киральными полями и пространственно-временными координатами. Эта связь основывается на применении теоремы Кэмпбелла—Магаарда [2]. Опираясь на обобщение теоремы Кэмпбелла—Магаарда [3, 4] на случай, когда источником гравитации является мультиплет киральных полей, используя аналогию с работой [5, 4] применяется метод генерации на основе ИП для сферически-симметричной НСМ.

В данной работе исследовались двух-, трех- и пятикомпонентные НСМ.

Для двух- и трехкомпонентных НСМ были получены точные решения.

В рамках трехкомпонентной НСМ метод генерации точных решений заключается в следующем. Метрика пространства-времени выбирается в гауссовых нормальных координатах

$$ds^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + \varepsilon du^2,$$

где $\varepsilon = \pm 1; \alpha, \beta, ... = 0, 1, 2; u = x^3$. Метрику кирального пространства представим в виде:

$$dS^2_N = h_{\alpha\beta}(\varphi^\gamma) d\varphi^\alpha d\varphi^\beta.$$

Предполагая связи между координатами φ^γ и координатами x^γ, а также метрикой кирального (погружаемого) пространства и метрикой пространства–времени:

$$\varphi^\gamma = x^\gamma \ ; \quad h_{\alpha\beta}(\varphi^\gamma) = g_{\alpha\beta}(x^\gamma),$$

где $g_{\alpha\beta}(x^\gamma) = \bar{g}_{\alpha\beta}(x^\gamma, u = 0)$ или $g_{\alpha\beta}(x^\gamma) = \bar{g}_{\alpha\beta}(x^\gamma, u = 0)$, постулируем соотношение между трехмерным блоком метрики пространства–времени и пространством целей. Таким образом, получаем

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = (\omega_0 u - 1)^2 h_{\alpha\beta}(x^\gamma).$$

[1]Свистунова Юлия Александровна (u.a.svistunova@gmail.com), Ульяновский государственный университет, 432000, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42.

[2]Червон Сергей Викторович (sv_chervon@rambler.ru), Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, 432000, Россия, г. Ульяновск, Площадь 100-летия со дня рождения В.И. Ленина, 4.

Исследовались два класса моделей:

1. Первый класс определялся $\bar{g}_{33} = -1$ и $u = x^3 = r$. Соответствующее пространство погружения:

$$ds_1^2 = (\omega_0 r - 1)^2 (h(r,t)dt^2 - f(r,t)r^2 d\theta^2 - r^2 f(r,t)\sin^2\theta d\phi^2) - dr^2,$$

где $h(r,t)$ и $f(r,t)$ — некоторые функции времени и координат, ω_0 — некоторая константа.

2. Второй класс включает в себя частный случай, когда $h(r,t) = \text{const} = 1$. Тогда можно выбрать $\bar{g}_{33} = 1$ и $u = x^3 = t$. Пространство погружения определяется метрикой:

$$ds_2^2 = dt^2 - (\omega_0 t - 1)^2 (f(r,t)r^2 d\theta^2 - r^2 f(r,t)\sin^2\theta d\phi^2 - dr^2).$$

Для каждого класса моделей методом генерации на основе ИП были получены точные решений в рамках сферически-симметричной НСМ.

Аналогичнам образом исследовалась двукомпонентная НСМ, построенная как двумерная часть сферически-симметричного пространства-времени. В рамках данной модели также были получены точные решения. В этом случае для применения метода ИП метрика пространства–времени:

$$ds^2 = \bar{g}_{\alpha,\beta}(x^\gamma, x^2)dx^\alpha dx^\beta + \epsilon(dx^2)^2 + F(x^\gamma, x^k)(dx^3)^2.$$

Здесь $\alpha, \beta = 0, 1$; $k = 2, 3$. Тогда метрика кирального пространства:

$$dS_{ch}^2 = h_{\alpha,\beta}(\varphi^\gamma)d\varphi^\alpha d\varphi^\beta.$$

Соотношения между компонентами метрик и координатами:

$$\varphi^\gamma = x^\gamma \ ; \quad h_{\alpha,\beta} = g_{\alpha,\beta} \ ; \quad g_{\alpha,\beta}(x^\gamma) = \bar{g}_{\alpha,\beta}(x^\gamma, 0).$$

Для двухкомпонентной НСМ рассматривались также было исследовано два класса моделей.

Литература

[1] Иванов Г.Г. Симметрии, законы сохранения и точные решения в нелинейной сигма-модели // Теоретичесая и математическая физика. – 1983. – Т. 57. – №1. – С. 45–54.

[2] Campbell J. A Course of Differential Geometry. – Oxford: Claredon, 1926.; Magaard L. Zur einbettung riemannscher Raume in Einstein-Raume und konformeuclidische Raume. – PhD Thesis. – Kiel, 1963.

[3] Bezerra V., Chervon S., Dahia F. and Romero C., Self-gravitating nonlinear sigma model, isometric embeddings and harmonic maps // 2004.

[4] Червон С., Свистунова Ю. Генерирование точных решений в трехкомпонентной самогравитирующей кинетической нелинейной сигма-модели с использованием изометрических погружений // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – №2. – С. 95–107.

[5] Anderson E. Dahia F., Lidsey J., Romero C. Embeddings in Spacetimes Sourced by Scalar Fields // J. Math. Phys. – 2003. – V. 44. – P. 5108–5119 (gr-qc/0111094).

УДК 514.84

ГИПОТЕЗА О ГАРМОНИЧЕСКИХ СФЕРАХ

Сергеев А.Г.[1]

Гармонические сферы задаются гладкими отображениями римановой сферы в римановы многообразия, являющимися экстремалями функционала энергии, определяемого интегралом типа Дирихле. Они удовлетворяют нелинейным эллиптическим уравнениям, обобщающим уравнение Лапласа—Бельтрами. В случае, когда рассматриваемые римановы многообразия являются комплексными, голоморфные и антиголоморфные сферы являются локальными минимумами функционала энергии, однако у этого функционала имеются, как правило, и неминимальные критические точки.

С другой стороны, поля Янга—Миллса также являются экстремалями некоторого функционала, задаваемого действием Янга—Миллса. Локальные минимумы этого функционала называются инстантонами и анти-инстантонами. Вначале считалось, что они исчерпывают все критические точки действия Янга—Миллса на 4-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, пока не были построены примеры неминимальных полей Янга–Миллса.

Имеется очевидное формальное сходство между полями Янга—Миллса и гармоническими отображениями, но после работы Атьи 1984 г. стало ясно, что это сходство имеет на самом деле более глубокую природу. Более конкретно, гипотеза о гармонических сферах утверждает, что имеется прямое соответствие между пространством модулей G-полей Янга—Миллса на $\mathbb{R}^4$ и пространством центрированных гармонических отображений римановой сферы в пространство петель ΩG, где G — компактная группа Ли. Обсуждению указанной гипотезы и посвящен доклад.

[1]Сергеев Армен Глебович (sergeev@mi.ras.ru), Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

УДК 510.2, 519.6, 511.11

ЧИСЛЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИМИ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ: ОПИСАНИЕ ПОДХОДА, ПРИЛОЖЕНИЯ И ДЕМОНСТРАЦИЯ РАБОТЫ КОМПЬЮТЕРА

Сергеев Я.Д.[1]

Вопросам, связанным с бесконечностью и с ее "противоположностью" — бесконечно малыми величинами, посвящена обширная литература (см., например [1–10]). Эти вопросы, как правило, затрагивают проблемы, напрямую связанные с основаниями математики. Те ответы на них, которые считаются удовлетворительными в каждый конкретный исторический период, активно используются как в формировании фундамента математики этого времени, так и при решении прикладных задач. Именно использование понятий бесконечно большого и бесконечно малого в численных вычислениях (в том числе и с применением компьютеров) и расширение границ их применения является основной задачей настоящего исследования.

Существующие системы счисления не позволяют численно работать с бесконечными и бесконечно малыми величинами на компьютере, используя **те же** формальные правила, что и при работе с конечными числами. Среди причин, которые не позволяют нам организовать такую работу, можно выделить, как минимум, следующие: существование неопределенных форм (например, $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$), невыполнение для бесконечности аристотелевского принципа "часть меньше целого" (действительно, для любого конечного x следует $x+1 > x$, тогда как $\infty+1 = \infty$) и невозможность хранения бесконечного числа знаков в конечной памяти компьютера. Несмотря на это, ввиду огромного значения понятия бесконечности для математики, люди стараются включить его в работу с компьютером, например, разрабатывая системы вычислений, использующие символы $+\infty$ и $-\infty$ (или более сложные системы записи символов, которые часто связаны с той или иной версией нестандартного анализа, кардинальными или ординальными (порядковыми) числами).

Нашей целью является решение прикладных задач и создание компьютера, выполняющего численные (не символьные) вычисления с бесконечными и бесконечно малыми величинами, используя те же формальные правила, которыми мы пользуемся при работе с конечными числами.

В докладе показывается, что многие вычислительные трудности, возникающие при работе с бесконечностью (например, некоторые парадоксы, неопределенные формы при нахождении пределов, и т.д.) не обусловлены природой бесконечности, а являются следствием слабости традиционных систем записи чисел. Аналогично тому, как это происходит в естественных науках, в математике существует триада: исследователь, объект исследования и инструмент исследования, точность которого влияет на результаты наблюдения. В математике к инструментам исследования могут быть отнесены, в первую очередь, системы записи чисел. Хорошо разработанные современные системы записи конечных чисел позволяют проводить вычисления с высокой точностью с конечными величинами, однако, при работе с бесконечными числами мы испытываем трудности. Например, мы не в состоянии зафиксировать результат операции $x + 1$ и отметить, что $x + 1 > x$, если x — бесконечное число.

[1]Сергеев Ярослав Дмитриевич (yaro@si.deis.unical.it), Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород; Distinguished Full Professor, University of Calabria, Rende, Italy; Affiliated Researcher, the Institute of High Performance Computing and Networking of the National Research Council of Italy.

В докладе рассматривается новый, физически ориентированный, подход к численным вычислениям, позволяющий построить простую и наглядную арифметику для работы не только с конечными числами, но и с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами (см. обзор [13], описание ряда приложений в [12–16] и научно-популярную книгу [11]). Построенная арифметика естественно распространяет наблюдаемое в окружающем нас мире свойство "часть всегда меньше целого", используемое при работе с конечными числами, на бесконечно большие и бесконечно малые величины.

Предлагаемая методология позволяет вычислить у определенных бесконечных множеств число их элементов. При этом новый подход не противоречит взглядам Кантора и Робинсона (нестандартный анализ), а дополняет их (см. [13, 18, 19, 20]). Для ряда задач устанавливаются точности описаний математических объектов, предоставляемые традиционными инструментами (язык Кантора и Робинсона) и новой системой записи. Аналогично тому, как это происходит при физических измерениях приборами разной точности, оба предоставляемых ответа верны с точностью, обеспечиваемой прибором (в данном случае — математическим языком).

Предлагается новая позиционная система с бесконечной базой, позволяющая записывать бесконечно большие и бесконечно малые величины в явной форме конечным числом символов. Предлагаемый подход позволяет дать детальные ответы на серию классических вопросов и парадоксов, имеющих дело с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами. В частности, с новых позиций рассматриваются Первая Проблема Гильберта и машины Тьюринга (см. [18, 19]). Обсуждаются границы применимости нового подхода. Рассматриваются примеры и приложения.

Новый подход позволяет построить компьютер (получены патенты РФ и ЕС), выполняющий численные (не символьные) вычисления с конечными, бесконечно большими и бесконечно малыми величинами. Во время доклада демонстрируется калькулятор для персональных компьютеров, который выполняет численные вычисления с бесконечно большими, конечными и бесконечно малыми величинами. В заключение отметим, что тексты ряда статей доступны по адресу [21].

Литература

[1] Cantor G. Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers. – Dover Publications. – New York, 1955.

[2] Conway J.H., Guy R.K. The Book of Numbers. – New York: Springer–Verlag, 1996.

[3] Gödel K. The Consistency of the Continuum-Hypothesis. – Princeton: Princeton University Press. 1940.

[4] Hardy G.H. Orders of infinity. – Cambridge: Cambridge University Press, 1910.

[5] Hilbert D. Mathematical Problems: Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900 // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1902. – No. 8 P. 437–479.

[6] Knopp K. Theory and Application of Infinite Series. – New York: Dover Publications, 1990.

[7] Leibniz G.W., Child J.M. The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz. – New York: Dover Publications, 2005.

[8] Mayberry J.P. The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.

[9] Newton I. Method of Fluxions. – 1671.

[10] Robinson A. Non-Standard Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton 1996.

[11] Sergeyev Ya.D. Arithmetic of Infinity, CS: Edizioni Orizzonti Meridionali, 2003.

[12] Sergeyev Ya.D. Blinking Fractals and Their Quantitative Analysis Using Infinite and Infinitesimal Numbers // Chaos, Solitons & Fractals. – 2007. – V. 33(1). – P. 50–75.

[13] Sergeyev Ya.D. A New Applied Approach for Executing Computations with Infinite and Infinitesimal Quantities // Informatica. – 2008. – V. 19(4). – P. 567–596.

[14] Sergeyev Ya.D. Evaluating the Exact Infinitesimal Values of Area of Sierpinski's Carpet and Volume of Menger's Sponge // Chaos, Solitons & Fractals. – 2009. – V. 42(5). – P. 3042–3046.

[15] Sergeyev Ya.D. Numerical Point of View on Calculus for Functions Assuming Finite, Infinite, and Infinitesimal Values Over Finite, Infinite, and Infinitesimal Domains // Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications. 2009. V.71(12). P. e1688–e1707.

[16] Sergeyev Ya.D. Numerical Computations and Mathematical Modelling with Infinite and Infinitesimal Numbers // J. Applied Mathematics & Computing. 2009. V.29. P. 177–195.

[17] Sergeyev Ya.D. Computer System for Storing Infinite, Infinitesimal, and Finite Quantities and Executing Arithmetical Operations with Them, EU patent 1728149, 2009.

[18] Sergeyev Ya.D. Counting Systems and the First Hilbert Problem // Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications. 2010. V.72(3-4). P. 1701–1708.

[19] Sergeyev Ya.D. and Garro A. Observability of Turing Machines: A Refinement of the Theory of Computation // Informatica. 2010. (in press).

[20] Sergeyev Ya.D. Lagrange Lecture: Methodology of numerical computations with infinities and infinitesimals // Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino. (in press).

[21] The Infinity Computer web page, http://www.theinfinitycomputer.com.

УДК 535.21

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛАЗЕРНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ АТОМОВ

Сибатов Р.Т., Учайкин В.В.[1]

Лазерным охлаждением и пленением атомов называют новый технологический процесс получения атомов с температурами в диапазоне нанокельвинов (то есть со скоростями порядка мм/с), существенно обогативший широкую область нанофизических исследований — от спектроскопии сверхвысокого разрешения и атомных часов до атомной интерферометрии и конденсации Бозе—Эйнштейна [1]. Вследствие обмена импульсами и фотонами лазерного излучения и приобретения импульсов отдачи при спонтанном излучении процесс эволюции атомного импульса выглядит как случайное блуждание в импульсном пространстве. Идея нового метода охлаждения состоит в создании в окрестности начала координат импульсного пространства ($\mathbf{p} = 0$) небольших размеров "ловушки", куда атомы могут попадать в результате случайных блужданий и оставаться там продолжительное время. Охлаждение, характеризуемое в импульсном пространстве возрастанием концентрации атомов в окрестности $\mathbf{p} = 0$ и уменьшением ее за пределами ловушки, в математическом плане обусловлено конкуренцией двух процессов: импульсной диффузией и обращением в нуль вероятности выхода из точки $\mathbf{p} = 0$. История каждого атома характеризуется последовательностью взаимно независимых случайных вели-чин $\tau_1, \theta_1, \tau_2, \theta_2, \tau_3, \theta_3, ...$, где θ_j — случайная продолжительность j-го пленения, τ_j – случайная продолжительность диффузии между j-м и $j+1$-м пленением, называемая временем рециркуляции. Плотности распределения этих случайных величин обозначим $q_\tau(t)$ и $q_\theta(t)$.

Если частота перескока в окрестности $\mathbf{p} = 0$ ведет себя по закону

$$R(\mathbf{p}) \simeq \frac{1}{\tau_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha, \quad p < p_0,$$

то

$$P(\theta_j > \theta) \sim A\theta^{-\nu}, \quad \theta \to \infty,$$

где показатель ν связан с α и размерностью импульсного пространства D соотношением $\nu = D/\alpha$.

Концентрация охлажденных атомов $N_0(t)$ пропорциональна вероятности обнаружить атома в начале координат $f_0(t)$. Последняя функция выражается с помощью интеграла

$$f_0(t) = \int_0^t [F(t') - F'(t')]dt'$$

через разницу темпов переходов $F(t)$ и $F'(t)$, удовлетворяющих системе интегральных уравнений (при условии, что движение начинается с освобождения из ловушки):

$$F(t) = q_\tau(t) + \int_0^t F'(t-t')q_\tau(t')dt',$$

[1]Сибатов Ренат Тимергалиевич, Учайкин Владимир Васильевич(vuchaikin@gmail.com), Ульяновский государственный университет, 432000, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42.

$$F'(t) = \int\limits_0^t F(t-t')\ q_0(t')dt'.$$

Применив преобразование Лапласа и решив алгебраическую систему, получим

$$\widetilde{f}_0(\lambda) = \frac{\widetilde{q}_\tau(\lambda)}{\lambda} \cdot \frac{1-\widetilde{q}_0(\lambda)}{1-\widetilde{q}_\tau(\lambda)\widetilde{q}_\theta(\lambda)}.$$

Как следует из физических положений

$$1-\widetilde{q}_\theta(\lambda) \sim A\lambda^\alpha, \quad 1-\widetilde{q}_\tau(\lambda) \sim B\lambda^\beta,$$

где $0 < \alpha, \beta < 1$. В области малых значений λ функция $\widetilde{f}_0(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$A\lambda^\alpha \widetilde{f}_0(\lambda) + B\lambda^\beta \widetilde{f}_0(\lambda) = A\lambda^{\alpha-1}.$$

Применив обратное преобразование Лапласа, приходим к дробно-дифференциальному уравнению

$$[{}_0\mathsf{D}_t^\alpha + b_0 {}_0\mathsf{D}_t^\beta] f_0(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}.$$

Его решение, полученное с помощью метода функций Грина, имеет вид:

$$f_0(t) = t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta,\alpha+1-\beta}(-bt^{\alpha-\beta}).$$

Оно хорошо согласуется с результатами численного моделирования рассматриваемого процесса методом Монте-Карло.

Работа поддержана Российским фоном фундаментальных исследований, грант 10-1-00608.

Литература

[1] Барду Ф., Бушо Ж.-Ф., Аспе А., Коэн-Таннуджи К. Статистика Леви и лазерное охлаждение. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 240 с.

[2] Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Изд-во "Артишок", 2008. – 510 с.

УДК 621.382

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЭНДОТАКСИИ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ГЕТЕРОСТРУКТУР КАРБИДА КРЕМНИЯ НА КРЕМНИИ С ТРЕБУЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Сивакова К.П.[1]

При проведении технологических операций в полупроводниковых материалах почти всегда неизбежно происходит диффузия и перераспределение примесей, и математическое моделирование диффузионных процессов является одним из эффективных методов оптимизации технологии получаемых материалов и приборов.

В большинстве работ при расчете диффузионного легирования на основе численных методов учитываются особенности физического механизма формирования тонких пленок. Эти особенности необходимо анализировать в каждом конкретном случае отдельно. В свою очередь, процесс эндотаксии (процесс диффузионного преобразования *Si*-фазы в *SiC*-фазу при одновременном легировании модифицирующими примесями разного типа проводимости) недостаточно изучен, как с позиции анализа диффузионных процессов, протекающих в процессе роста и легирования гетероструктур карбида кремния на кремнии, так и с позиции их комплексного анализа. Таким образом, моделирование диффузионных процессов для случая эндотаксии, а также практическая реализация результатов моделирования в процессе получения гетероструктур *3C-SiC/Si*, работающих в области высоких температур, является актуальной задачей.

В работе проведено численное моделирование процесса диффузионного легирования с учетом внутреннего электрического поля для гетероструктур следующих типов: *n-Si(P)/n-SiC(P)/p-SiC(B)*, *p-Si(B)/p-SiC(B)/n-SiC(P)* и *n-Si(P)/n-SiC(P)/p-SiC(Ga)*, где легирующие примеси P — фосфор, B — бор, Ga — галлий. Типичные кривые распределения приведены в сравнение с результатами, полученными без учета внутреннего электрического поля. Показано, что внутреннее электрическое поле оказывает существенное влияние на распределении примесей.

Установлено, влияние поля усиливается с ростом времени отжига, что оказывают существенное влияние на закономерности миграции примесей и на характер залегания p–n-перехода в структуре. Модель с учетом внутреннего электрического поля дает хорошее согласование теоретических и экспериментальных результатов, поэтому для прогнозирования глубины залегания p–n-перехода в гетероструктурах кубического карбида кремния на кремнии данная модель может быть применена, что позволит получать гетероструктуры *3C-SiC/Si* с требуемыми параметрами.

[1]Сивакова Ксения Петровна (sivakovakp@mail.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

УДК 519.863.2

ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗВИТИЕ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УПРАВЛЯЕМОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

Симонов П.М.[1], *Вагин А.А.*[2]

Обеспечить текущие нужды производства в расходных ресурсах (материалы, заготовки, полуфабрикаты и так далее) можно с помощью оборотных фондов. Для этого используется оборотный капитал. Потребность производства в оборотном капитале зависит от производственной мощности. Следовательно, можно вести процентную величину: загруженность производственных мощностей, зависящую от наличия оборотного капитала и собственно производственной мощности. В докладе представлены результаты исследования на примере модели Солоу.

Классические модели, использующие производственные функции, оперируют обобщенными факторами производства, независящими от их внутренней роли в процессе производства. Данный подход упрощает модель, позволяя при этом достаточно точно моделировать поведение исследуемого объекта, но в некоторых случаях этого может оказаться недостаточно, например, для принятия решений и управления процессом.

В тезисах доклада будет рассмотрена модель с управляемым распределением ресурсов внутри производства по способу их участия в производственном процессе.

Дадим основные определения и свойства производственной функции с распределением ресурсов (управляемой производственной функции).

Для производства нам необходимо: наличие основных фондов (станки, инструменты и приспособления), для формирования которых используется основной капитал и наличие доступного труда. Обозначим величину возможного (предельного) выпуска $F(K_{opf}, L)$, где K_{opf} — накопленные основные производственные фонды, L — доступный труд. Будем считать, что F — производственная функция степени однородности один.

Теперь введем процентную величину: загруженность производственных мощностей, зависящую от наличия оборотного капитала и собственно производственной мощности:

$$G\left(K_{oc}, F\right) \in [0,1), \;\; K_{oc} \geq 0, \;\; F \geq 0,$$

где K_{oc} — оборотный капитал, F — предельная мощность производства. Введем дополнительно параметр $u(t) \in [0,1]$, и запишем основной и оборотный капитал, как функции суммарного капитала производства K:

$$K_{opf} = u(t)K, \quad K_{oc} = (1-u(t))K.$$

Тогда функцию, описывающую конечное производство можно записать в виде:

$$\widetilde{F}(K, L, u(t)) = F(u(t)K, L) \cdot G((1-u(t))K, F(K, L)).$$

Поставим задачу оптимального экономического роста в случае управляемой экономической функции. Как и неоклассической задаче об оптимальном экономическом

[1]Симонов Петр Михайлович (simonov@econ.psu.ru), Пермский государственный университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15.

[2]Вагин Александр Алексеевич (simpm2@mail.ru), Пермский государственный технический университет, 614000, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29.

росте имеется одна фазовая координата — капиталовооруженность рабочего $k(t)$, а уравнение движения — это основное дифференциальное уравнение неоклассического экономического роста:

$$\dot{k}(t) = \widetilde{f}(k, u(t)) - (\eta + \mu u(t))k(t) - c(t), \quad \widetilde{f}(k, u(t)) = \widetilde{F}(k, 1, u(t))/L.$$

Начальное состояние задается значением капиталовооруженности одного рабочего $k(t_0) = k_0$.

Будем оптимизировать интеграл

$$W = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)}(\beta Q(c(t)) + (1-\beta)\widetilde{f}(k, u(t)))\, dt \to \max,$$

$$\beta \in [0, 1],\ 0 \le c(t) \le \widetilde{f}(k(t), u(t))$$

на решениях дифференциального уравнения неоклассического экономического роста при условиях $k(t_0) = k_0$. Этот интеграл принимает наибольшее значение при единственном $\{k^*, u^*\}$.

Работа частично поддержана грантом РФФИ, администрацией Пермского края №10-01-96054-р-урал-а, и ЗАО "ПРОГНОЗ".

Литература

[1] Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономического теория. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 576 с.

[2] Кузнецов Ю.А. Оптимальное управление экономическими системами. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2008. – 449 с.

УДК 517.958:532.5

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАВИХРЕННОСТИ

Сироченко В.П.[1]

Изучение законов движения жидкостей всегда играло важную роль в развитии техники и естествознания. Во многих практических случаях жидкость можно с большой достоверностью считать вязкой несжимаемой ньютоновской средой, и происходящие в ней процессы моделировать с помощью уравнений Навье—Стокса [1].

В настоящее время при исследовании задач гидродинамики активно используется численное моделирование [2]. Использование для численного решения задач динамики вязкой жидкости уравнений Навье—Стокса в естественных переменных скорость-давление приводит к определенным вычислительным трудностям. Это связано с отсутствием уравнения для давления и особой ролью уравнения неразрывности. При решении задачи для уравнения неразрывности обычно вводятся специальные процедуры [2]. Попытки преодоления этих трудностей связаны обычно с выбором новых неизвестных функций путем преобразования уравнений Навье—Стокса. Это позволяет избежать явного присутствия давления в уравнениях, а также непосредственного использования уравнения неразрывности.

С этой целью для плоских течений в большинстве случаев вводится в рассмотрение функция тока. Введение уравнения переноса для завихренности позволяет получить описание течения в переменных завихренность-функция тока. По сравнению с уравнениями Навье—Стокса в естественных переменных количество уравнений уменьшается с трех до двух, а для решения параболического уравнения для завихренности и эллиптического уравнения для функции тока могут быть применены эффективные численные методы для уравнений математической физики [3]. В случае двумерных многосвязных областей (задачи обтекания тел потоком жидкости) завихренность и функция тока должны удовлетворять кроме соответствующих начальных и граничных условий еще некоторым интегральным соотношениям, которые эквивалентны однозначности давления в жидкости. Имеются публикации, в которых условия однозначности не содержатся в постановке задачи, что приводит к неверным результатам при математическом моделировании реальных течений. В статье [4] доказана эквивалентность постановок в переменных завихренность-функция тока и в исходных переменных скорость-давление в двумерных многосвязных областях. Существенную роль в установлении эквивалентности играют интегральные условия однозначности давления.

Для математического моделирования трехмерных течений вязкой жидкости в односвязных областях применяются две постановки, получающиеся из уравнений Навье-Стокса путем исключения давления: постановка в переменных завихренность-векторный потенциал и постановка в переменных завихренность-скорость [2]. Однако доказательства эквивалентности этих постановок хорошо изученной постановке в переменных скорость-давление, по-видимому, отсутствуют, несмотря на значительное количество публикаций, использующих эти постановки.

В докладе дано доказательство эквивалентности постановок с использованием завихренности соответствующей начально-краевой задаче для уравнений Навье—

[1]Сироченко Владимир Прохорович (sir@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Стокса в односвязных и многосвязных областях, в том числе для случая теплопроводной жидкости. Показано, что в важном для практики случае многосвязных областей постановки должны содержать нелокальные условия однозначности давления.

Литература

[1] Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973.

[2] Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т.: Т.2. – М.: Мир, 1991. – 552 с.

[3] Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983.

[4] Кузнецов Б.Г., Сироченко В.П. О постановке задач гидродинамики в многосвязных областях // Вычислительные технологии: Сб. научн. трудов. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 1995. – Т. 4. – №12. – С. 209–218.

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Скороход А.В.[1]

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = \begin{cases} y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, & y > 0, m > 0, \\ u_{xy} - \dfrac{q}{x-y}(u_x - u_y) = 0, & y < 0, x < 0, \\ u_{xy} - \dfrac{q}{x+y}(u_x + u_y) = 0, & y < 0, x > 0, \quad q = \dfrac{m}{2(m+2)}, \end{cases} \tag{1}$$

в области D, ограничений при $y > 0$ гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$, с концами в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$, отрезками прямых $x = -1$, $y = x$, $x = 1$, $y = -x$ при $y < 0$.

Для уравнения (1) в области D поставим следующие краевые задачи типа Геллерстедта с интегральным условием сопряжения.

Задача V_1. *Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям*:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_+) \cap C^1(D_-),\ u_{xy} \in C(D_-);$$

$$Lu \equiv 0,\ (x,y) \in D_+ \cup D_-;$$

$$u(x,y)\,|_\Gamma = \varphi(s),\ 0 \le s \le l;$$

$$u(-1,y) = \psi_1(y),\ u(1,y) = \psi_2(y),\ y \in [-1,0];$$

$$u_y(x,+0) = -{v^1}_-(x),\ x \in (0,1);\ u_y(x,+0) = {v^1}_-(x),\ x \in (0,1),$$

где

$${v^1}_-(x) = \frac{d}{dx}\int_x^0 (t-x)^{-\lambda} u(t,0)dt + \int_x^0 (t-x)^{-\lambda} u(x,t)dt, \quad 0 < \lambda < 1,\ x \in (-1,0);$$

$${v^2}_-(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-r} u(t,0)dt + \int_0^x (x-t)^{-r} u(x,t)dt, \quad 0 < r < 1,\ x \in (0,1);$$

$\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\varphi(s)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi_1(0) = \varphi(l)$, $\psi_2(0) = \varphi(0)$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, ${D^1}_- = D \cap \{x < 0, y < 0\}$, ${D^2}_- = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_- = {D^1}_- \cap {D^2}_-$.

Задача V_2. *Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям*:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_+) \cap C^1(D_-), \quad u_{xy} \in C(D_-);$$

$$Lu \equiv 0,\ (x,y) \in D_+ \cup D_-;$$

[1]Скороход Анна Владимировна (scorohodav@mail.ru), Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, 443090, Россия, г. Самара, ул. Антонова-Овсеенко, 26.

$$u(x,y)\mid_{\Gamma}=\varphi(s),\ 0\le s\le l;$$
$$u(x,x)=\psi_1(x),\ x\in[-1,0];\ u(x,-x)=\psi_2(x),\ x\in[0,1];$$
$$u_y(x,+0)=v^1{\_}(x),\ x\in(0,1);\ u_y(x,+0)=-v^2{\_}(x),\ x\in(0,1),$$

где

$$v^1{\_}(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{-\lambda}u(t,0)dt+\int\limits_{x}^{0}(t-x)^{-\lambda}u(x,t)dt,\quad 0<\lambda<1,\ x\in(-1,0);$$

$$v^2{\_}(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{1}(t-x)^{-r}u(t,0)dt+\int\limits_{0}^{x}(x-t)^{-r}u(x,t)dt,\quad 0<r<1,\ x\in(0,1);$$

$\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\varphi(s)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi_1(0)=\psi_2(0)$.

В данной работе приводится доказательство существования и единственности решения задач V_1, V_2 при некоторых ограничениях на кривую Г. Единственность доказывается на основании метода экстремума [1], а существование сводится к разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Более подробное доказательство указанных утверждений приводится в работах автора [2–4].

Литература

[1] Сабитов К.Б. О принципе максимума для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – №11. – С. 1967–1976.

[2] Скороход А.В. О существовании и единственности задачи Геллерстедта для уравнения смешанного типа со специальными условиями сопряжения // Вестник СГУ. Естественно-научная серия. – №2(61). – 2008. – С. 60–68.

[3] Скороход А.В. О существовании решения задачи типа Геллерстедта для уравнения смешанного типа с нелокальным условием сопряжения // Труды СФ АН РБ. Серия "Физико-метаматические и технические науки". – Вып. 6. – Уфа: Гилем, 2009. – С. 127–143.

[4] Скороход А.В. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа // Интегративный характер современного математического образования. Материалы второй всероссийской научно-практической конференции, посвященной памяти заслуженного деятеля науки РФ, доктора физ.-мат. наук, профессора В.Ф. Волкодавова (Самара, 26–28 октября 2009г.). – Самара: ПГСГА, 2009. – С. 67–72.

УДК 517.1

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Смолянов О.Г.[1]

Бесконечномерные гамильтоновы системы и их квантовые аналоги являются естественными моделями систем, рассматриваемых в классической и квантовой статистической механике.

Так как, согласно известной теореме А. Вейля, на бесконечномерных (локально выпуклых) пространствах не существует меры Лебега (т.е. ненулевой инвариантной относительно сдвигов σ-конечной локально конечной счетно-аддитивной меры), то в качестве уравнений Лиувилля в бесконечномерном случае естественно рассматривать уравнения относительно функций вещественного аргумента, принимающих значения в пространстве (неотрицательных) мер на фазовом пространстве гамильтоновой системы или на гильбертовом пространстве соответствующей квантовой системы; такие уравнения называются уравнениями Лиувилля относительно мер. Бесконечномерные уравнения Лиувилля относительно мер используются для получения — без перехода к так называемому термодинамическому пределу — вероятностных аналогов классических систем уравнений Боголюбова (называемых также цепочками уравнений Боголюбова—Борна—Грина—Кирквуда—Ивона), а также обобщений самих систем уравнений Боголюбова.

В докладе расмотрен метод представления решений бесконечномерных уравнений Лиувилля относительно вероятностных мер и соответствующих аналогов уравнений Боголюбова и их вероятностных аналогов с помощью формул Фейнмана. Вероятностные аналоги системы уравнений Боголюбова существенно отличаются от классической системы уравнений Боголюбова [2]. Именно, меры на конечномерных пространствах, плотностями которых являются неизвестные функции в бесконечной системе уравнений Боголюбова, не являются конечными и, следовательно, не могут быть сделаны вероятностными путем какой бы то ни было нормировки[2]; отсюда следует, что мера на фазовом пространстве, псевдообразами [3] которой эти меры являются[3], может не быть даже σ-конечной, так что стандартная техника цилиндрических мер оказывается к ней неприменимой. Тем не менее, эволюция меры на фазовом пространстве, описываемая системой уравнений Боголюбова, совпадает с той, которая описывается уравнением Лиувилля относительно функций вещественного аргумента, принимающих значения в пространстве мер на фазовом пространстве — но на этот раз эти меры не являются вероятностными.

В том случае, когда рассматриваемая бесконечномерная гамильтонова система моделирует систему классических невзаимодействующих частиц, все уравнения вероятностного аналога системы уравнений Боголюбова оказываются независимыми, и в этом случае с помощью результата работы [8] (являющегося развитием результатов работ [1] и [6]) показано, что распределение вероятностей на *конфигурационном* пространстве стремится (в смысле [8]) к произведению независимых равномерных распределений.

[1]Смолянов Олег Георгиевич (Smolyanov@yandex.ru), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119992, Россия, г. Москва, Воробьевы горы, д.1.

[2]Эти функции интерпретируются как плотности частиц и их конечных наборов.

[3]В случае бесконечных мер псевдообразы заменяют проекции.

Отметим также, что решение бесконечномерного уравнения Лиувилля относительно мер является слабым пределом мерозначных функций, являющихся решениями уравнений Лиувилля относительно мер на конечномерных подпространствах исходного бесконечномерного фазового пространства.

Результаты доклада получены совместно с В.В. Козловым.

Литература

[1] Пуанкаре. А. Избранные труды. Т. 3. – М.: Наука, 1974.
[2] Боголюбов. Н.Н. Собрание научных трудов. Т. 5. – М.: Наука, 2006.
[3] Бурбаки Н. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. – М.: Наука, 1970.
[4] Смолянов О.Г., Фомин С.В. // Успехи матем. наук. – 1976. – Т. 31. –№4. – С. 3–56.
[5] Smolyanov O.G., von Weizsaecker H. // Comptes Rend. Acad. Sci. Paris. – 1995. – T. 321. – S. I. – P. 103–108.
[6] Козлов В.В. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. – М., Ижевск, 2002.
[7] Kozlov V.V. // Reg. Chaotic Dyn. – 2004. – №1. – P. 23–34.
[8] Козлов В.В., Смолянов О.Г. // ТВП. – 2006. – Т. 51. – В. 2. – С. 1–18.
[9] Аккарди Л., Смолянов О.Г. // ДАН. – Т. 424. – No. 5. – 2009. – С. 583–587.

УДК 539.421.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ РАСКЛИНИВАЮЩЕЙ ТРЕЩИНЫ В НАРУШЕННОМ МАТЕРИАЛЕ

Спиридонова Е.В., Белобородова С.В.[1]

В докладе представлены результаты численного решения задачи развития расклинивающей трещины в нарушенном материале. Целью данной работы является разработка аналитического представления коэффициента интенсивности напряжений первого рода в нарушенном материале.

Была поставлена и решина задача построения критерия развития расклинивающей трещины AB в материале, нарушенном трещиной CD с различными углами наклона к оси Ox, при изменении длины зияющей трещины L и расстояния от зияющей трещины до наклонной d. Для упрощения расчетов введено условие того, что величина $(d+L)$ является постоянной. Расклинивающая трещина моделируется прямолинейным разрезом конечной длины. На берегах трещины AO заданы сдвиговые и нормальные смещения, а на трещине OB сдвиговые и нормальные напряжения.

Краевые условия имели следующий вид:

$$u_n^i = u_n^0;\ \sigma_s^i = 0 \text{ на трещине } AO;$$

$$\sigma_s^i = 0;\ \sigma_n^i = 0 \text{ на трещине } OB.$$

Для определения аналитического представления коэффициента интенсивности напряжений первого рода, необходимо использовать критерий [1], учитывающий нормальные разрывы смещений на берегах трещины.

В результате численного решения поставленной задачи методом разрывных смещений [2], была найдена аппроксимирующая зависимость нормального раскрытия зияющей трещины.

Анализ результатов моделирования показал, что погрешность выбора аппроксимирующей зависимости составляет в среднем 3%.

В результате расчетов были построены аналитические зависимости крэффициенов интенсивности напряжений первого рода в нарушенном материале, с учетом длины зияющей трещины L, расстояния от зияющей трещины до наклонной d, величины $(d+L)$ и угла наклона к оси Ox.

Таким образом, разработанные критерии разрушения материалов позволяют прогнозировать рост расклинивающей трещины на плоскости, ослабленной естественной трещиной.

Литература

[1] Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб.: Наука, 1999. – 385 с.

[2] Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 328 с.

[1]Спиридонова Екатерина Владимировна (skatyusha@rambler.ru), Белобородова Светлана Валентиновна (svetabelkhor@yandex.ru), Оренбургский государственный университет, 460018, Россия, г. Оренбург, пр. Победы, 13.

УДК 539.3

НЕУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Старовойтов Э.И.[1], *Протуро И.И.*[2]

Введение. Экспериментально теоретический метод решения задач линейной вязкоупругости был предложен и апробирован Ильюшиным [1]. Для трехслойных стержней и круговых пластин он был применен в [2, 3]. Изгиб упругих прямоугольных ортотропных трехслойных пластин исследован в [4–6]. В данном докладе рассмотрен цилиндрический изгиб ортотропной прямоугольной пластины с линейно вязкоупругим заполнителем.

Постановка задачи. Рассмотрен цилиндрический изгиб симметричной по толщине трехслойной пластины с ортотропными упругими несущими слоями и жестким изотропным линейно вязкоупругим заполнителем. Система координат x, y, z связана со срединной плоскостью заполнителя. Пластина считается достаточно длинной в направлении оси Oy. Она нагружена постоянной в направлении этой оси поперечной нагрузкой $p = p(x)$, $q = q(x)$. Вдоль оси Ox нагрузка может меняться произвольно. Для описания кинематики пакета использована гипотеза "ломаной" нормали: в тонких несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине сравнительно толстом заполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. Через $w(x)$ и $u(x)$, обозначен прогиб и продольное перемещение средней плоскости заполнителя соответственно. Так как материалы всех слоев несжимаемы в поперечном направлении, то прогиб в остальных точках нормали к срединной поверхности совпадает с $w(x)$. По контуру предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости. Деформации малые. Физические уравнения вязкоупругости для заполнителя принимаются в виде:

$$s_x^{(3)} = 2G_3^* э_x^{(3)}, \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3^* э_{xz}^{(3)}, \quad G_3^*(F(t)) \equiv G^{(3)}\left(F(t) - \int_0^t R_3(t-\tau)F(\tau)d\tau\right). \quad (1)$$

где $s_{ij}^{(3)}$, $\sigma^{(3)}$ — девиаторная и шаровая части тензора напряжений; $э_{ij}^{(3)}$, $\epsilon^{(3)}$ — девиаторная и шаровая части тензора деформаций; $G_3^*(t)$ — оператор линейной вязкоупругости; $R_3(t)$ — ядро релаксации материала заполнителя; K_3 — модуль объемной деформации заполнителя.

Решение задачи. Решение соответствующей задачи линейной теории упругости для симметричной по толщине пластины, консольно закрепленной и находящейся под действием постоянных поверхностных нагрузок p, q, имеет вид [3]:

$$u = \frac{p}{a_1}x\left(1 - \frac{1}{2}x\right),$$

$$\psi = \frac{a_3\, q}{a_4 a_5}\left(\mathrm{cth}(\beta)\ \mathrm{sh}(\beta x) - \mathcal{H}(\beta x) - x + 1\right),$$

[1]Старовойтов Эдуард Иванович (edstar@mail.by), Белорусский государственный университет транспорта, 246653, Беларусь, г. Гомель, ул. Кирова, 34.

[2]Протуро Иван Иванович (aaalpha@mail.ru), Белорусский государственный университет транспорта, 246653, Беларусь, г. Гомель, ул. Кирова, 34.

$$w=\frac{q}{a_4}\left[\frac{a_3^2}{a_4a_5\beta}\Big(\mathrm{cth}(\beta)\,\mathcal{H}(\beta x)-\mathrm{sh}\,(\beta x)-\beta x\left(\frac{x}{2}-1\right)-\mathrm{cth}(\beta)\Big)+\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{4}\right]. \qquad (2)$$

Решение задачи линейной вязкоупругости для рассматриваемой трехслойной пластины можно получить, воспользовавшись экспериментально-теоретическим методом аппроксимаций Ильюшина [1]. Дополнительно предполагается выполнение условия $\beta<1$, что имеет место, например, при $G_3\ll G$, $K_3\ll K$. Это условие выполняется для композитных трехслойных пластин, у которых, как правило, указанные параметры упругости в несущих слоях на два порядка выше, чем в заполнителе. Операторный вид решения задачи об изгибе симметричной трехслойной консольно закрепленной пластины с линейно вязкоупругим заполнителем получим из соотношений (2) формальной заменой констант a_i на $a_i^*=a_i\{G_3\to G_3^*\}$ — операторы, получаемые из коэффициентов a_i в решении (2), в которых модуль сдвига G_3 заменяется оператором линейной вязкоупругости G_3^* (1). При этом преобразуем операторы, входящие в правые части решения, выделяя в них операторы Ильюшина $g_{\beta k}^*$: $g_{\beta k}^*=1/(1+\beta_k\omega^*)$, $\omega^*=2G_3^*/3K_3$, $\beta_k=\mathrm{const}$.

$$w^*=\frac{q}{24}x^2\left[\left(-x^2-6\right)\alpha_2g_{\beta2}^*+4x\left(\alpha_4+\alpha_5g_{\beta3}^*\right)-24\left(\alpha_8g_{\beta2}^*+\alpha_9g_{\beta4}^*+\alpha_{10}g_{\beta5}^*\right)\right],$$

$$\psi^*=q\left[\tfrac{1}{2}x^2(1-x)\left(\alpha_4+\alpha_3g_{\beta3}^*\right)+2x\left(x^2-1\right)\left(\alpha_6g_{\beta4}^*+\alpha_7g_{\beta5}^*\right)\right],$$

$$u^*=px\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)\alpha_1g_{\beta1}^*. \qquad (3)$$

Соответствующие изображениям $g_{\beta k}^*$ функции $g_{\beta k}(t)$, отражающие вязкоупругие свойства заполнителя, считаются известными из экспериментов [1]. Решение задачи об изгибе трехслойной консоли с вязкоупругим заполнителем следует в явном виде из (3) после расшифровки операторов w^*, u^*, ψ^*:

$$\begin{aligned}
u&=x\left(1-\frac{x}{2}\right)\alpha_1\int_0^t g_{\beta1}(t-\tau)dp(\tau),\\
\psi&=\frac{x^2}{2}(1-x)\left(\alpha_4+\alpha_3\int_0^t g_{\beta3}(t-\tau)dq(\tau)\right)+\\
&\qquad+2x\left(x^2-1\right)\left(\alpha_6\int_0^t g_{\beta4}(t-\tau)dq(\tau)+\alpha_7\int_0^t g_{\beta5}(t-\tau)dq(\tau)\right),\\
w&=\frac{x^2}{24}\left[4x\left(\alpha_4+\alpha_5\int_0^t g_{\beta3}(t-\tau)dq(\tau)\right)-\right.\\
&\quad-\left(\left(x^2+6\right)\alpha_2+24\alpha_8\right)\int_0^t g_{\beta2}(t-\tau)dq(\tau)-\\
&\qquad\left.-24\left(\alpha_9\int_0^t g_{\beta4}(t-\tau)dq(\tau)+\ \alpha_{10}\int_0^t g_{\beta5}(t-\tau)dq(\tau)\right)\right].
\end{aligned} \qquad (4)$$

Таким образом, для описания деформирования консольно закрепленной трехслойной пластины с линейно вязкоупругим заполнителем достаточно знания пяти экспериментальных функций Ильюшина $g_{\beta k}(t)$. В случае шарнирного опирания торцов пластины решение (4) изменится, но привлечения новых функций $g_{\beta k}(t)$ не потребуется.

Литература

[1] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.

[2] Старовойтов Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 344 с.

[3] Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Деформирование металлополимерных систем. – Мн.: Беларуская навука, 2004. – 342 с.

[4] Старовойтов Э.И., Протуро И.И. Напряженно-деформированное состояние прямоугольной трехслойной композитной пластины // Вестник гражданских инженеров (Санкт-Петербург). – 2009. – №1(18). – С. 34–38.

[5] Протуро И.И. Изгиб прямоугольной трехслойной ортотропной пластины // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2010. – Т. 15. – №1. – С. 9–13.

[6] Старовойтов Э.И., Протуро И.И. Деформирование трехслойных ортотропных пластин под действием локальных нагрузок // Вестник Самарского государственного университета. – 2008. – №8/1(67). – С. 469–478.

УДК 539.42

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В МАТЕРИАЛЕ СО СТЕПЕННЫМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ ЗАКОНОМ

Степанова Л.В.[1]

Анализ напряженно-деформированного состояния вблизи кончика трещины является одной из основных проблем современной механики трещин. Особый интерес вызывало и вызывает исследование полей напряжений и деформаций у вершины трещины в материалах с нелинейными определяющими уравнениями. Наибольшее распространение получил степенной закон связи между напряжениями и деформациями (или напряжениями и скоростями деформаций, если речь идет о степенном законе теории установившейся ползучести). Определение напряженно-деформированного состояния в материале со степенным законом является предметом многочисленных исследований, начиная с классических работ Дж. Хатчинсона, Дж. Райса и Дж. Розенгрена (ХРР) [1, 2], в которых установлена асимптотика напряжений вблизи устья трещины и показано, что компоненты тензора напряжений определяются в соответствии с равенством

$$\sigma_{ij}(r,\theta) = \left(\frac{J}{BI_n r}\right)^{1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \qquad (r \to 0),$$

где J — инвариантный интеграл механики разрушения, r, θ — полярные координаты с полюсом в вершине трещины, B, n — материальные константы степенного закона упрочнения, $I_n = I_n(n)$ — безразмерный J-интеграл, $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$ — универсальное угловое распределение напряжений, определяемое из решения краевой задачи. В течение многих лет построение высших приближений в задаче ХРР являлось предметом многочисленных исследований [3, 4]. Во всех упомянутых работах главный член асимптотических разложений напряжений — решение ХРР [1, 2]. В настоящее время сложилось понимание о необходимости определения всего спектра собственных значений в задаче ХРР [5]. В [5] отмечается, что в большинстве работ пренебрегают слагаемыми более высоких порядков вида $r^{3/2}$, r, $r^{1/2}$, $r^{-3/2}$, $r^{-5/2}$, ... в полном решении Уильямса при исследовании упругопластических задач. Если существует область пластического течения, охватывающая вершину трещины, то полное решение вне области пластического течения должно содержать слагаемые более высоких порядков. В [5] обсуждается справедливость ряда традиционных гипотез, принимаемых при изучении задач о трещинах в упругопластических материалах, а именно, предположение о маломасштабном пластическом течении. Дискуссия, развернутая в [5], ведет к следующим вопросам общего характера. 1) Сколько сингулярных слагаемых для выбранного неупругого материала может математически существовать вблизи вершины трещины и как они могут быть определены? 2) При каких условиях то или иное слагаемое в асимптотическом разложении можно трактовать как физически обоснованное и играющее доминирующую роль? А именно, если классическое решение ХРР с теоретически известным собственным значением $s = -1/(n+1)$ не является доминирующим слагаемым в окрестности вершины трещины, то как можно найти общую функциональную зависимость $s = s(n)$?

[1]Степанова Лариса Валентиновна (lst@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Для определения всего спектра собственных значений можно воспользоваться методом возмущений, развитым в асимптотической теории. Целью настоящего исследования будет анализ собственных значений нелинейной задачи на собственные значения, которая получается при рассмотрении трещины нормального отрыва, с помощью метода возмущений. Изучим напряженно-деформированного состояние в окрестности вершины трещины нормального отрыва в материале со степенными определяющими уравнениями $\varepsilon_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2$, где ε_{ij} — компоненты тензора деформаций, s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений; $\sigma_e = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ — интенсивность напряжений; B, n — материальные константы.

Степенной характер определяющих уравнений задачи позволяет обратиться к представлению функции напряжений Эри $F(r,\theta)$ в полярных координатах с полюсом в вершине трещины в виде разложения по собственным функциям: $F(r,\theta) = r^{\lambda+1}f(\theta)$. В задаче о трещине отрыва условие совместности приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) четвертого порядка относительно функции $f(\theta)$:

$$
\begin{aligned}
&f_e^2 f^{IV}\left\{(n-1)\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]^2+f_e^2\right\}+C_1 f_e^4 f''-C_2 f_e^4\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]+\\
&+(n-1)(n-3)\left\{\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]\left[(1-\lambda^2)f'+f'''\right]+4\lambda^2 f'f''\right\}^2\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]+\\
&+(n-1)f_e^2\left\{\left[(1-\lambda^2)f'+f'''\right]^2+\left[(1-\lambda^2)f+f''\right](1-\lambda^2)f''+4\lambda^2\left(f''^2+f'f'''\right)\right\}\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]+\\
&+2(n-1)f_e^2\left\{\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]\left[(1-\lambda^2)f'+f'''\right]+4\lambda^2 f'f''\right\}\left[(1-\lambda^2)f'+f'''\right]+\\
&+C_1(n-1)f_e^2\left\{\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]\left[(1-\lambda^2)f'+f'''\right]+4\lambda^2 f'f''\right\}f'+f_e^4(1-\lambda^2)f''=0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $f_e^2 = \left[(1-\lambda^2)f+f''\right]^2+4\lambda^2 f'^2$, $C_1 = 4\lambda\left[(\lambda-1)n+1\right]$, $C_2 = (\lambda-1)n\left[(\lambda-1)n+2\right]$. Вместе с граничными условиями отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины $f(\theta=\pm\pi)=0$, $f'(\theta=\pm\pi)=0$ уравнение (1) постулирует нелинейную задачу на собственные значения.

Аналитическое выражение для собственного значения λ как функции от показателя нелинейности материала n и от λ_0 — собственного числа, отвечающего невозмущенной линейной задаче ($n=1$), может быть найдено с помощью представлений

$$
\lambda = \lambda_0+\varepsilon, \qquad n = 1+\varepsilon n_1+\varepsilon^2 n_2+\dots, \quad f(\theta) = f_0(\theta)+\varepsilon f_1(\theta)+\varepsilon^2 f_2(\theta)+\dots, \tag{2}
$$

где ε — отклонение собственного числа λ от собственного числа линейной задачи λ_0 при изменении n, $f_0(\theta)$ — решение "невозмущенной" линейной задачи ($n=1$). С помощью асимптотических представлений (2) из краевой задачи для ОДУ (1) получается бесконечная последовательность краевых задач относительно функций $f_i(\theta)$.

В работе получены трехчленные асимптотические разложения показателя нелинейности материала n для различных значений собственного числа λ_0, соответствующего линейной задаче. Используя найденные асимптотические разложения, можно найти оценку для собственных значений λ, отвечающих произвольному n и далее данная оценка должна быть уточнена, например, с помощью численного исследования исходного нелинейного уравнения. Найдено, что выражения для коэффициентов асимптотических разложений и сами трехчленные разложения показателя нелиней-

ности материала имеют вид:

$$n = 1 - \frac{2\varepsilon}{\lambda_0 - 1} + \varepsilon^2 n_2 + O(\varepsilon^3),$$
$$\lambda_0 \leqslant -\frac{3}{2},\ n_2 = -\frac{\lambda_0^5 - 2\lambda_0^4 - 7\lambda_0^3 + 12\lambda_0^2 + 4\lambda_0 - 6}{(\lambda_0 + 1)(\lambda_0 - 1)^4}, \tag{3}$$
$$\lambda_0 \geqslant \frac{3}{2},\ n_2 = -\frac{\lambda_0^5 - 2\lambda_0^4 - 7\lambda_0^3 + 10\lambda_0^2 + 4\lambda_0 - 4}{(\lambda_0 + 1)(\lambda_0 - 1)^4}.$$

Для $\lambda_0 = 1/2$ (что соответствует классической задаче XPP) можно показать, что

$$n_k = (-1)^{k+1}(\lambda_0 - 1)^{-(k+1)}, \quad n = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}(-\varepsilon)^k(\lambda_0 - 1)^{-(k+1)} = -\lambda/(\lambda - 1),$$

$$\lambda = n/(n+1).$$

Таким образом, в этом частном случае получена хорошо известная формула, связывающая собственное число λ и показатель нелинейности материала n, что подтверждает результаты проведенного асимптотического анализа.

Литература

[1] Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. – 1968. – V. 16. – №1. – P. 13–31.

[2] Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. – 1968. – V. 16. – №1. – P. 1–12.

[3] Nguyen B.N., Onck P.R., Van Der Giessen E. On Higher-Order Crack-Tip Fields in Creeping Solids // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2000. – V. 67. – №2. – P. 372–382.

[4] Nikishkov G.P. An algorithm and a computer program for the three-term asymptotic expansion of elastic-plastic crack tip stress and displacement fields // Engng. Fracture Mechanics. – 1995. – V. 50. – №1. – P. 65–83.

[5] Hui C.Y., Ruina A. Why K? High order singularities and small scale yielding // Intern. J. of Fracture. – 1995. – V. 72. – P. 97–120.

УДК 517.958

СТРУНЫ НА ПЛОСКОСТИ: КОСЫ ОСОБЕННОСТЕЙ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Талалов С.В.[1]

В докладе представлены результаты исследования геометрии бесконечных $(1+2)D$ струн в рамках подхода, предложенного ранее автором [1, 2]. Мотивация исследований связана с тем вниманием, которое в последнее время уделяется исследованию и моделированию энионов — гипотетических частиц с дробной статистикой (см, например, [3]). Это обусловлено, в частности, идеями их применения в моделях топологических квантовых компьютеров [4]. Мировые линии энионов образуют косы различной топологии, что и позволяет реализовывать (квантовые) вычислительные алгоритмы. Реальные "элементарные" частицы существуют в трехмерном пространстве E_3, являясь, соответсвенно, либо бозонами, либо фермионами. Энион, по-видимому, наблюдать возможно лишь как квазичастицу — т.е. как некоторое коллективное возбуждение системы с большим числом степеней свободы, эволюционирующей в той или иной квазиплоской структуре. Простейшая планарная динамическая система с бесконечным числом степеней свободы, солитонные возбуждения которой позволяют наглядно моделировать косы мировых линий различной топологии — это бесконечная струна в трехмерном пространстве — времени; данный объект и является предметом исследования в представленном докладе.

Локальная структура мирового листа описывается в представляемом подходе с помощью системы нелинейных уравнений, которая обобщает известное уравнение Лиувилля [5]. Группа симметрии данной системы (обобщающая $2D$ конформную группу $\xi_\pm \to f_\pm(\xi_\pm)$) позволяет провести факторизацию множества струнных мировых листов, что позволяет далее сосредоточиться на изучении их особенностей — мировых линий точек возврата. Оказывается, что каждому смежному классу можно сопоставить ту или иную (в зависимости от выбора представителя) спектральную задачу. Так, в определенных случаях представитель в указанных смежных классах может быть выбран так, что его мировой лист восстанавливается (с точностью до группы движений пространства $E_{1,2}$) по решениям пары спектральных задач Штурма–Лиувилля, коэффиенты которых определены второй квадратичной формой мирового листа. Рассматриваются "N-солитонные решения" (т.е. безотражательные потенциалы в данном случае); суммарное число точек дискретного спектра в указанных спектральных задачах соответствует числу нитей косы мировых линий точек возврата струны. Рассматривается возможность интерпретации такой системы как модели взаимодействующих "квазичастиц" на плоскости.

Литература

[1] Талалов С.В. // ТМФ. – 2007. – Т. 152. – No. 3. – С. 430–439; ТМФ. – 2009. – Т. 159. – No. 1. – С. 58–63.

[2] Талалов С.В. // ТМФ. – 2000. – Т. 123. – №1. – С. 38.; Journ. of Phys. A. – 1989. – V. 22. – P. 2275.

[1] Талалов Сергей Владимирович (svtalalov@tltsu.ru), Тольяттинский государственный университет, 445667, Россия, г. Тольятти Самарской обл., ул. Белорусская, 14.

[3] Negro J., del Olmo M.A., Tosiek J. // J. Math. Phys. – 2006. – 47: 033508.
[4] Kitaev A.Yu. // Annals Phys. 2003. – V. 303. – P. 2–30. – ArXiv: quant-ph/9707021
[5] Погребков А.К., Талалов С.В. // ТМФ. – 1987. – Т. 70. – №3. – С. 342.

УДК 519.6: 517.977.56 :622.692

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО В СРЕДНЕМ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕФТЕПРОВОДОМ

Топко Л.В.[1]

Теплогидравлические процессы транспортировки нефти по трубопроводу диаметра D и длины L, описывается дифференциальными уравнениями [1–6]

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\vartheta\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{4k}{\rho cD}\left(\theta_e-\theta\right),\quad (t,x)\in Q; \tag{1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-\rho g\gamma\frac{\nu^m\left(\theta\right)}{D^{m+1}}\left(\frac{\pi\vartheta}{4}\right)^{2-m}-\frac{16\tau_0(\theta)}{3D}-\rho g\frac{dH_b}{dx},\quad (t,x)\in Q; \tag{2}$$

с начальным и граничными условиями

$$\theta\left(0,x\right)=\theta_0\left(x\right),x\in(0,L),\quad \theta\left(t,0\right)=\alpha\left(t\right),\quad P\left(t,0\right)=\beta\left(t\right),t\in(0,T), \tag{3}$$

где t — время; x — пространственная координата; $\theta=\theta\left(t,x\right)$ — температура нефти; $P=P\left(t,x\right)$ — давление нефти; $\vartheta=\vartheta\left(t\right)$ — скорость движения нефти; $k=k\left(t,x\right)$ — коэффициент теплопередачи от нефти в окружающую среду через стенку трубы; ρ — плотность нефти; c — удельная теплоемкость нефти; $\theta_e=\theta_e\left(t,x\right)$ — температура окружающей среды; g — ускорение свободного падения; γ,m — эмпирические коэффициенты, зависящие от режима течения нефти; $H_b=H_b\left(x\right)$ — высота нефтепровода над уровнем моря; $\theta_0\left(x\right)$ — начальное распределение нефти в трубопроводе; $\alpha\left(t\right)$, $\beta\left(t\right)$ — температура и давление нефти на входе в трубопровод.

Процессы транспортировки нефти по трубопроводам находятся под воздействием факторов случайного характера. В уравнениях (1)–(3) случайными величинами и функциями являются эмпирические коэффициенты в уравнении (2), m,γ, коэффициент теплопередачи от нефти в окружающую среду $k=k\left(t,x\right)$, температура окружающей среды $\theta_e=\theta_e\left(t,x\right)$ и др. В силу этого случайными будут температура нефти $\theta=\theta\left(t,x\right)$ и давление нефти $P=P\left(t,x\right)$.

Предположим, что в уравнении (1) случайные функции $k=k\left(t,x\right)$, $\theta_e=\theta_e\left(t,x\right)$ представлены в виде линейных комбинаций линейно независимых детерминированных функций с известными законами распределения.

Введем случайные векторы $S_1=(C_1,C_2,\ldots C_n,D_1,D_2,\ldots,D_k)\,,S_2=(\gamma,m)\,$, компоненты которых будем считать независимыми случайными (непрерывными или дискретными) величинами с известными законами распределения.

Реализации вектора $S=(S_1,S_2)$ будем обозначать $S^q=(S_1^q,S_2^q)$, а решение системы (1)–(3) при различных S^q будем обозначать $\theta^q\left(t,x\right)=\theta\left(t,x;S^q\right),P^q\left(t,x\right)=$ $=P\left(t,x;S^q\right)$ и называть их реализациями решения $\theta\left(t,x\right),P\left(t,x\right)$ системы (1)–(3).

Под решением стохастической системы (1)–(3) будем понимать совокупность реализаций $\theta^q\left(t,x\right),P^q\left(t,x\right),q=1,2,\ldots,N$.

В качестве управления выберем температуру $\alpha(t)$ и давление $\beta(t)$ нефти на входе в трубопровод и введем множества допустимых управлений.

Для решения задачи оптимального в среднем управления тепловым режимом в нефтепроводе будем использовать метод последовательных приближений, который показывает хорошую сходимость.

[1]Топко Людмила Валерьевна (ltopko@gmail.com), Павлодарский государственный университет им.С.Торайгырова, 140000, Казахстан, г. Павлодар, ул. Ломова, 64.

Литература

[1] Черняев В.Д., Галлямов А.К., Юкин А.Ф., Бондаренко П.М. Трубопроводный транспорт нефти в сложных условиях эксплуатации. – М.: Недра, 1990. – 232 с.

[2] Агапкин В.М., Кривошеин Б.Л., Юфин В.А. Тепловой и гидравлический расчеты трубопроводов для нефти и нефтепродуктов. – М.: Недра, 1981. – 256 с.

[3] Гусейнзаде М.А., Юфин В.А. Неустановившееся движение нефти и газа в магистральных трубопроводах. – М. : Недра, 1981. – 232 с.

[4] Evseyeva A.U., Neronov V.S. The mathematical model of the viscoplastic fluids flow through the pipelines // Modelling, Simulation & Control. Ser. B. AMSE Press. – France, Paris, 1988. – V. 18. – №1. – P. 31–42.

[5] Жумагулов Б.Т., Смагулов Ш.С., Евсеева А.У., Нестеренкова Л.А. Трубопроводный транспорт высоковязких и высокозастывающих нефтей. – Алматы: Гылым, 2002. – 140 с

[6] Неронов В.С. Математическое моделирование и оптимальное управление теплогидравлическимими процессами в нефтепроводах с учетом случайных факторов. – Астана: ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 2005. – 107 с.

УДК 536.758

УРАВНЕНИЕ ТИПА БОЛЬЦМАНА И H-ТЕОРЕМА В ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Трушечкин А. С.[1]

Предлагается процедура получения уравнения типа Больцмана из уравнения Лиувилля в конечном объеме в рамках функционального подхода к классической механике [1, 2]. Оно основывается на разделении двух масштабов пространства-времени — макро- и микроскопического. В соответствии с идеологией функциональной формулировки механики начальное состояние системы частиц формируется на основе измерений, которые имеют погрешность [3]. Следовательно, можно говорить о точности, с которой задана начальная функция плотности вероятности в уравнении Лиувилля. Допустим, наши измерительные приборы прослеживают изменения физических величин лишь на макромасштабе, много большем, чем характерный радиус взаимодействия частиц (микромасштаб). Тогда соответствующую начальную функцию плотности нельзя использовать в качестве начального данного для уравнения Лиувилля, поскольку последнее представляет собой описание динамики на микромасштабе и в него явно входит потенциал взаимодействия между частицами (с характерным радиусом взаимодействия). Тем не менее, для макроскопической начальной функции плотности можно получить уравнение типа Больцмана, воспользовавшись уравнением Лиувилля и идеологией цепочек Боголюбова [4], если предположить, что начальные условия для микроскопической функции плотности задаются с помощью макроскопической функции. Для полученного уравнения верна H-теорема о возрастании энтропии.

Литература

[1] Волович И.В. Проблема необратимости и функциональная формулировка классической механики // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2008. – № 8/1(67). – С. 35—55.

[2] Волович И.В. Уравнения Боголюбова и функциональная механика // Теоретическая и математическая физика. – 2010 (принято в печать).

[3] Трушечкин А.С. Необратимость и роль измерительного прибора в функциональной формулировке классической механики // Теоретическая и математическая физика. – 2010 (принято в печать).

[4] Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. – М.–Л.: Гостехиздат, 1946. – 119 с.

[1] Трушечкин Антон Сергеевич (trushechkin@mi.ras.ru), Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.

УДК 524.1-352

ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ УСКОРЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В МЕЖЗВЕЗДНОЙ СРЕДЕ

Учайкин В.В.[1]

В предыдущей статье [1] обсуждался физический смысл дробно-дифференциального уравнения диффузии в связи с проблемами, возникшими при его применении к описанию переноса космических лучей в Галактике. В настоящей работе дробно-дифференциальный подход рассматривается применительно к описанию ускорения (точнее, доускорения) космических лучей в межзвездных магнитных полях. В отличие от предыдущей задачи, речь идет теперь о поведении частиц *в импульсном пространстве*. Последовательные взаимодействия (*столкновения*) заряженной частицы с более или менее локализованными неоднородностями магнитного поля — от движущихся с относительно небольшой скоростью магнитных облаков, которые имел в виду Ферми в своих пионерских работах [2], до сильных ударных волн в остатках сверхновых, о которых идет речь в обзоре Бережко и Крымского [3], можно рассматривать как *мгновенные перелеты из одной точки импульсного пространства в другую*. Приобретаемые частицей в результате таких столкновений импульсы $\Delta\mathbf{p}_i$ являются случайными, и даже при изотропном их распределении представляющая частицу в импульсном пространстве точка

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}_1 + \Delta\mathbf{p}_2 + \Delta\mathbf{p}_3 + \dots ,$$

подобно броуновской частице, все дальше уходит от точки (импульса) инжекции ускорения $\mathbf{p}_0$, что и означает дальнейшее ускорение (доускорение) частицы.

Первая модель Ферми была, по существу, динамической, частица ускорялась непрерывно (за счет разницы между частотами встречных и догоняющих столкновений) и ее спектральная функция спустя интервал времени t после начала движения имела вид дельта-функции

$$f(E,t) = \delta(E - E_0 e^{at}),$$

удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial f(E,t)}{\partial t} = -\frac{\partial[aEf(E,t)]}{\partial E} + \delta(E - E_0)\delta(t).$$

Флуктуационный же механизм ускорения описывается (в изотропном случае) уравнением

$$\frac{\partial f(\mathbf{p},t)}{\partial t} = \mathsf{K}f(\mathbf{p},t) + \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)\delta(t). \tag{1}$$

Оператор K здесь зависит от распределения приращения импульса $\Delta\mathbf{p}$ в элементарном столкновении. Если средний квадрат этого приращения конечен, то $\mathsf{K}f(\mathbf{p},t) = D\triangle f(\mathbf{p},t)$, где D — коэффициент диффузии в импульсном пространстве. Если он бесконечен, но $\Delta\mathbf{p}_i$ независимы, одинаково распределены и характеризуются изотропным распределением с асимптотикой степенного вида $\mathsf{P}(|\Delta\mathbf{p}_i| > x) \propto x^{-\nu}$, $\nu \in (0,2)$, то $\mathsf{K}f(\mathbf{p},t) = D_\nu \triangle^{\nu/2} f(\mathbf{p},t)$, где $\triangle^{\nu/2}$ — оператор Лапласа в степени $\nu/2$ (см.

[1] Учайкин Владимир Васильевич(vuchaikin@gmail.com), Ульяновский государственный университет, 432000, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42.

[4]). Наконец, наиболее эффективный механизм ускорения космических лучей (на фронтах ударных волн, возникающих при взрывах сверхновых звезд) характеризуется пропорциональностью (в статистическом смысле) приращения импульса са-мому импульсу вступающей в столкновение с волной частицы, $\Delta\mathbf{p}_i = \mathbf{q}p_i$, где $\mathbf{q}$ — изотропно распределенный вектор со степенной плотностью абсолютной величины $|\mathbf{q}| > 1$. В этом случае столкновительный член не приводится к дробно-дифференциальному виду:

$$\mathsf{K}f(\mathbf{p},t)=\mu\nu\left\{\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\xi}{2}\int\limits_{1}^{\infty}f\left(\mathbf{p}\Big/\sqrt{1+2\xi q+q^2},t\right)\Big/\left(\sqrt{1+2\xi q+q^2}\right)^3 q^{-\nu-1}dq-f(\mathbf{p},t)\right\}.$$

Уравнение (1), как и все вытекающие из него уравнения, начинается со "слова" $\partial f(\mathbf{p},t)/\partial t$. В кинетической интерпретации это означает марковость процесса, автоматически приводящую к экспоненциальному распределению времени (пробега) между столкновениями. В любом университетском учебнике по физической кинетике можно найти вывод этого распределения в случае разреженного газа. Никто, однако, не сможет ответить на вопрос, каково реальное распределение интервалов времени между столкновениями столкновениями космической частицы с облаками межзвездного магнитного поля. Можно предположить, например, что оно вовсе не экспоненциальное, а, допустим, степенное: $\mathsf{P}(\Delta t_i > t) \propto t^{-\alpha},\ \alpha \in (0,1)$. Это вполне согласуется с самоподобной картиной турбулентных движений, с ее степенными закономерностями.

Гипотеза о фрактальном характере межзвездной среды, выдвигаемая в ряде работ, также ведёт к степенным распределениям. В принципе, речь идет о поведении магнитных силовых линий в межзвездном пространстве. Обычно мы представляем их как относительно плавные линии, в некоторых местах упирающиеся в магнитные пробки, пересекающиеся с другими, резко меняющие свои направления, и сами выполняющие со временем "диффузионный танец". Вдоль них и движутся "ведущие центры" несущихся по винтовым траекториям частиц. Так вот, если по мере увеличения обзора и соответствующего уменьшения масштаба эти плавные отрезки перестают быть заметными и хаотичность структуры становится основной доминантой, мы имеем асимптотически однородную среду, пробеги в которой можно моделировать обычной экспонентой. Если же по мере увеличения обзора в его поле попадают отрезки линий все больших размеров, замещающие собой те, которые стали теперь малыми в результате уменьшения масштаба, так что (качественно, конечно) структура внешне не изменилась, то это и есть фрактальная структура. В этих условиях ожидать экспоненциального распределения пробегов, характерного для сильно перемешанных сред, особых оснований нет, хотя и категорически отвергнуть такую возможность — тоже. Удобным способом сохранения "в одном пакете" таких, казалось бы несовместимых качеств как раз и является введение дробной производной по времени:

$$ {}_0\mathsf{D}_t^{\alpha} f(\mathbf{p},t) = \mathsf{K}f(\mathbf{p},t) + \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)\delta_\alpha(t), \qquad (2)$$

где ${}_0\mathsf{D}_t^{\alpha}$ — оператор дробной производной Римана—Лиувилля, а $\delta_\alpha(t) \equiv {t_+}^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$. Переход от первой производной по времени к дробной порядка $\alpha < 1$ не требует специального решения уравнения с дробной производной: удобнее воспользоваться соотношением, связывающим решения уравнений (1)–(2) [4]:

$$f_\alpha(\mathbf{p},t) = (t/\alpha)\int\limits_0^{\infty} f_1(\mathbf{p},\tau)g_+(t\tau^{-1/\alpha};\alpha)\tau^{-1/\alpha-1}d\tau.$$

Здесь $g_+(t;\alpha)$ — односторонняя устойчивая (в смысле Леви) плотность вероятности с трансформантой Лапласа [5]

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda t) g_+(t;\alpha) dt = \exp(-\lambda^\alpha),$$

а t, τ и λ — обезразмеренные переменные.

В работе находятся решения дробно-дифференциальных уравнений ускорения космических лучей во фрактальной среде и исследуются их свойства.

Работа поддержана РФФИ, грант 10-01-00608.

Литература

[1] Учайкин В.В. О дробно-дифференциальной модели переноса космических лучей в галактике // Письма в ЖЭТФ. – 2010. – Т. 91. – С. 115–120.

[2] Fermi E. Of the origin of the cosmic radiation // Phys. Rev. – 1949. – V. 75. – P. 1169–1174; Galactic magnetic fields and the origin of cosmic radiation // Astrophys. Journ. – 1954. V. 119. – P. 1–6.

[3] Бережко Е.Г., Крымский Г.Ф. Ускорение космических лучей ударными волнами // УФН. – 1988. – Т. 154. – С. 49–91.

[4] Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Изд-во "Артишок", 2008. – 510 с.

[5] Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1983. – 304 с.

УДК 533.7: 519.63

ПЛОТНОСТИ ПОТОКОВ ГАЗОВОЙ И ПЫЛЕВОЙ ФРАКЦИЙ ВНУТРЕННЕЙ КОМЫ КОМЕТЫ 67P/CHURYUMOV—GERASIMENKO ВБЛИЗИ ПЕРИГЕЛИЯ

Филиппов Ю.П.[1]

В работе выполнен расчет плотностей потоков газовой и пылевой фракций внутренней комы короткопериодической кометы 67P/Churyumov—Gerasimenko с использованием результатов модели внутренней комы кометы [1]. Для расчета плотности потоков газа были применены основные уравнения динамики сплошной среды (уравнения Эйлера) в приближении аксиальной симметрии внутренней комы. Для решения систе-мы дифференциальных уравнений были использованы граничные условия с учетом имеющихся феноменологических данных для кометы. Предполагалось, что газовая фракция комы является двухкомпонентной: H2O-газ, CO-газ.

Потоки пыли с поверхности ядра характеризуются широким спектром возможных значений масс. Для расчета плотностей потоков пылевой фракции был использован алгоритм [1], основанный на разбиении спектра значений масс пылевых частиц на большое количество интервалов и использовании кумулятивного массового распределения [2]. При вычислении температуры пылевых частиц и поверхности ядра кометы были использованы новые результаты, полученные авторами настоящей работы. Здесь были вычислены производства пыли как для отдельных интервалов, так и для всего спектра масс.

В численном анализе результатов показано, что моноксид углерода дает определяющий вклад в концентрацию и потоки молекул газа на ночной стороне ядра. Данный факт указывает на принципиальную необходимость учета CO-компоненты в прецизионном моделировании газовой фракции комы. Получены распределения радиальной и тангенциальной скорости молекул газа. Показано, что распространение пыли и газа имеет почти сферически симметричный характер. Подобный характер распространения газа был обнаружен в теоретическом моделировании комы комет 46/PWirtanen, 81/PWild 2 [3], C/1995Hale-Bopp [4]. Здесь также представлены гистограммы распределения плотностей потоков пылевых частиц и их массы для различных классов. Для массивных частиц вычислены предельные значения фазового угла, для которых частицы данного класса еще могут быть подняты с поверхности ядра.

Литература

[1] Muller M., Grun E. An Engineering Model of the Dust and Gas Environment of the Inner Coma of Comet P/Wirtanen // GIADA Documents Archive. – RO-ESC-TA-5501. – 1998.

[2] Divine N. Dust flux models for CRAF at P/Tempel 2 // Jet Propulsion Laboratory, inter-office memorandum. – 5137-87-53. – 1987.

[1] Филиппов Юрий Петрович (yuphil@ssu.samara.ru), Самарский государственный университет, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

[3] Muller M. A model of the Inner coma of comets with applications to the comets P/Wirtanen and P/Wild 2: Dissertation for the degree of Doctor of Natural Sciences. – Hei-delberg, Germany, 1999. – 97 pp.

[4] Combi M.R., Kabin K., DeZeeuw D.L., Gombosi T.I. Dust-gas interrelations in comets: Observations and theory // Earth, Moon, and Planets. – 1997. – V. 79. – P. 275–306.

УДК 524.8

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ИНФЛЯЦИЯ В МОДЕЛЯХ ГРАВИТАЦИИ С ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Фомин И.В.[1]

В работе рассматривается обобщенное действие для моделей с высшими производными

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[\frac{1}{2}R + \alpha R^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + V(\varphi)\right]$$

в метрике Фридмана [1].

В рамках эквивалентности данной модели теории гравитации Эйнштейна со скалярным полем, найдем масштабный фактор и параметр Хаббла из уравннения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{H}}{H}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{H}}{H}\right)^2 + 3\dot{H} = 0. \tag{1}$$

Решение получим в следующем виде

$$t - t_0 = \frac{1}{6C^{2/3}}\left[2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1+\frac{2\sqrt{H}}{C^{1/3}}}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{\left(\sqrt{H} - C^{1/3}\right)^2}{H + \sqrt{H} + C^{2/3}}\right)\right]. \tag{2}$$

Учитываем, что $H = \dfrac{\dot{a}}{a}$ и интегрируем $\int Hdt = Ht - \int tdH$ по частям. В результате получаем

$$\tilde{H} = \left(C^{2/3} + \left(\frac{1}{\tilde{a}}\right)^3\right)^{2/3} = \frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}}. \tag{3}$$

Решение этого уравнения будет

$$t - t_0 = \int \frac{da}{a\left(C^{3/2} + \left(\frac{1}{a}\right)^3\right)^{2/3}} = \frac{a^2}{2e}\,{}_2F_1\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-a^3C^{3/2}}{e}\right) + \text{const}, \tag{4}$$

где ${}_2F_1\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{-a^3C^{3/2}}{e}\right)$ — гипергеометрическая функция (функция Гаусса)

Асимптотическими решениями будут инфляционная стадия $a \sim \exp(\beta t)$ и радиационно-доминированный режим расширения $a \sim t^{1/2}$. Таким образом, в полученном решении есть естественный выход из инфляции на последующие стадии эволюции Вселенной.

Уравнение (3) представляет взаимосвязь масштабного фактора и параметра Хаббла в случае эквивалентности моделей с высшими производными моделям со скалярным полем [2]

$$\tilde{a}(H) = \left(\tilde{H}^{3/2} - C^{3/2}\right)^{1/3} = F_0^{1/2} a(H). \tag{5}$$

[1]Фомин Игорь Владимирович (ingvor@inbox.ru), Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана, 105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д.5.

Выбор постоянной C соответствует виду конформного множителя $F(R) = \dfrac{\partial f(R)}{\partial R}$ в случае эквивалентности моделей.

Исходя из полученного вида масштабного фактора, можно рассчитать основные космологические парамеры [3].

Литература

[1] Liddle A.R. and Lyth D.H. Phys. Rep. – 1993. – **231**. – 1.

[2] Mukhanov V.F., Feldman H.A., Brandenberger R.H. Theory of cosmological perturbations. – Phys. Rev. – 1992. – **215**. – 203.

[3] Chervon S.V., Fomin I.V., About the calculation of cosmological parameters in exact models of inflation. – Gravitation and Cosmology. – (2007).

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Холкина Н.А.[1]

Проблема моделирования напряженно-деформированного состояния пластических тел с рассеянным полем микроповреждений является одной из важнейших задач механики деформируемого твердого тела, особенно в применении к выяснению вопросов распространения трещин. Данная тематика актуальна в плане совершенствования расчетов на прочность элементов конструкций. Теоретические рассмотрения и экспериментальные данные свидетельствуют о существенном влиянии рассеянного поля микроповреждений, локализованных в зонах пластического течения у концентраторов напряжений (трещины, вырезы и другие дефекты), на распределение напряжений в теле. Расчет указанного влияния с помощью связанной краевой задачи (пластичность-поврежденность) составляет основу работы.

В работе рассматривается жесткопластическое тело, подчиняющееся критерию текучести Треска, с рассеянным анизотропным полем повреждений.

Математическое моделирование анизотропной поврежденности являлось предметом интенсивных исследований на протяжении последних десятилетий. Классические представления о поврежденности связаны с так называемым геометрическим подходом [1], позволяющим довольно просто учесть анизотропию состояния поврежденности. При помощи этого подхода эффект возрастания внутренних напряжений в среде с повреждениями представляется с помощью понятия эффективного напряжения. Тензор эффективных напряжений строится как внутреннее произведение тензора напряжений Коши и соосного ему обратного тензора сплошности. Условие соосности выполняется, если в процессе нагружения можно пренебречь влиянием упругой деформации на состояние поврежденности.

Тензорная мера анизотропной поврежденности является мерой сокращения, вследствие распределения микроповреждений, реально несущей нагрузку площади двумерного элемента тела в зависимости от его ориентации. Поврежденность представляется симметричным тензором поврежденности второго ранга, главные оси которого совпадают с главными осями тензора напряжений [2–4]. Это позволяет преодолеть трудности, связанные с несимметричностью введенных ранее тензорных мер анизотропной поврежденности, а также дать ясную геометрическую и механическую интерпретацию собственных значений и главных направлений тензора поврежденности.

Связанная постановка задачи, когда пластическое течение искажается полем повреждений, и одновременно повреждения возрастают в процессе накопления пластических деформаций, значительно сложнее с точки зрения общих свойств уравнений, возможных постановок задач и возможных подходов к их интегрированию, по сравнению с традиционными уравнениями теории пластичности.

Разработанная математическая модель базируется на уравнениях, включающих уравнения равновесия, условие пластичности, уравнение несовместности приращений пластических деформаций, соотношения ассоциированного закона течения с

[1] Холкина Наталья Александровна (knatalyasamgu@mail.ru), Московский городской университет управления Правительства Москвы, 103045, Россия, г. Москва, ул. Сретенка, 28.

учетом повреждений, а также уравнения, определяющие изменение главных поврежденностей в зависимости от приращений деформаций.

Получена замкнутая система статических и кинематических уравнений теории связанной пластичности и поврежденности в изостатической координатной системе относительно приращений главных напряжений, главных скоростей пластических деформаций и приращений перемещений [5, 6], которая оказывается наиболее удобной для представления и анализа уравнений связанной задачи. Доказано, что система основных соотношений относится к гиперболическому типу, что позволяет обобщить понятие поля скольжения на случай связанных анизотропных состояний поврежденности. Наклон линий скольжения для связанного состояния не совпадает с наклоном линий скольжения при идеально пластическом течении.

Исследована задача о локализации пластических деформаций и повреждений в пределах шейки одноосно растягиваемого образца в осесимметричной постановке с учетом накопления анизотропной поврежденности.

В процессе решения связанной (пластичность-поврежденность) осесимметричной задачи были численно определены поле изостат и значение предельной растягивающей силы при аппроксимации контура свободной границы дугой эллипса для связанной осесимметричной задачи.

Поскольку сжатие происходит в радиальном и окружном направлениях, то накопление повреждений происходит согласно уравнениям: $dD_1 = 0$, $dD_2 = 0$, $dD_3 = \mathrm{K} d\varepsilon_3^P$.

Численный анализ позволяет заключить, что при $\kappa h = 1/2$, $\mathrm{K} = 3/2$ решение существует всегда, поскольку всюду выполняется неравенство $D_3 < 1$. Рассматривался процесс нагружения по монотонно возрастающей величине горизонтального размера пластической зоны вдоль свободного берега трещины до момента пересечения границы пластической зоны с точкой E. Величина шага λ разностной схемы имеет порядок $10^{-4}h$. Дальнейшее измельчение сетки не приводит к существенным изменениям величины предельной растягивающей нагрузки, что косвенно свидетельствует о сходимости вычислительного процесса.

Предельная нагрузка в этом случае вычисляются в виде

$$\frac{P_*}{2\pi k h^2} = 0,822\ldots .$$

Литература

[1] Мураками С., Радаев Ю.Н. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 1996. – №4. – С. 93–110.

[2] Radayev Y.N., Murakami S., Hayakawa K. Mathematical Description of Anisotropic Damage State in Continuum Damage Mechanics // Trans. Japan Soc. Mech. Engn. – V. 60A. – No. 580. – 1994. – P. 68–76.

[3] Radayev Y.N. On directional average of the local anisotropic damage // Int. J. Fracture. – 2004. – V. 128. – P. 293–307.

[4] Radayev Y.N. Constitutive models of anisotropic damage and modeling of damaging microprocesses in solids // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. Второй спец. выпуск. – 2003. – С. 74–86.

[5] Радаев Ю.Н. Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности // Вестник Самарского гос. университета. – 1999. – №4(14). – С. 70–93.

[6] Радаев Ю.Н. Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2000. – №5. – С. 27–45.

УДК 539.4

РАЗРЫВНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ КОРЫ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ

Чугунов А.И.[1], *Horowitz C.J.*[2]

Разрывное напряжение (максимум кривой деформация-напряжение) коры нейтроной звезды играет важную роль для физики нейтронных звезд, включая глитчи пульсаров, излучение гравитационных волн, а также вспышки при звездотрясениях. Нами проведен большой объем молекулярно-динамических расчетов разрывного напряжения при различных параметрах неидеальности (обратных температурах) и скоростях деформации. Результаты расчетов описаны в рамках динамической теории прочности Журкова. Полученная аппроксимация применена для оценки напряжения, которое кора нейтронной звезды может поддерживать в течение времени порядка секунды-года. На таких временных масштабах разрывное напряжение сильно зависит от температуры и может быть очень малым при параметрах неидеальности $\Gamma \lesssim 200$. Этот эффект может ограничивать долговечность гор на поверхности коры нейтронной звезды. Также предложена альтернативная модель разрывного напряжения независящего от времени воздействия, которая может быть использована для оценки верхнего предела разрывного напряжения. Результаты опубликованы в статье [1].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (08-02-00837), программы Ведущие научные школы России (НШ 3769.2010.2), гранта Президента Российской Федерации для молодых кандидатов наук (МК-5857.2010.2), гранта департамента энергии США (DE-FG02-87ER40365) и Общеуниверситетского исследовательского гранта от IBM для Университета Индианы.

Литература

[1] Chugunov A.I., Horowitz C.J. Breaking stress of neutron star crust // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters, accepted; arXiv:1006.2279.

[1] Чугунов Андрей Игоревич (andr.astro@mail.ioffe.ru), Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе, ул. Политехническая 26, 194021 Санкт-Петербург, Россия.

[2] Horowitz Charles, (horowit@indiana.edu), Department of Physics and Nuclear Theory Center, Indiana University, Bloomington, IN 47405.

УДК 517.9

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА И ФЕЙНМАНА—КАЦА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ p-АДИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Шамаров Н.Н.[1]

Классический однородный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами (например, оператор Лапласа), от комплексной функции нескольких вещественных переменных можно определить как псевдодифференциальный оператор (ПДО), символ которого равен квадратичной форме от "импульсных" переменных, сопряженных исходным. Степени оператора Лапласа определяются аналогично с помощью символов, равных соответствущим удвоенным степеням нормы вектора, составленного из "импульсных" координат. В случае комплексных функций конечного числа переменных, пробегающих поле не вещественных, но p-адических чисел, та же схема со степенями нормы приводит к определению операторов Владимирова D^α, являющихся аналогами степени $\alpha/2$ оператора Лапласа. В обоих случаях итоговый оператор получается в результате последовательного применения трех операций: обратного преобразования Фурье, умножения на однородную функцию-символ от "импульсных" переменных и, наконец, прямого преобразования Фурье. Данный алгоритм можно применить и в случае функций бесконечного числа переменных с той лишь разницей, что (обобщенные) меры, получаемые после первого (обратного) преобразования Фурье и на которые умножается символ, невозможно отождествить с функциями, даже обобщенными, в силу отсутствия (по теореме Вейля) достаточно хорошей меры Хаара на бесконечномерных пространствах.

Бесконечномерные ПДО в пространствах функций, определенных на вещественных локально выпуклых пространствах были определены с помощью описанного способа О.Г.Смоляновым. Одной из важнейших мотивировок их изучения является современная теория струн и бран, адекватным математическим аппаратом которой является бесконечномерный анализ, поскольку начинается она с выписывания функционального интеграла по траекториям, проходящим в бесконечномерном пространстве. Отметим для сравнения, что в квантовой механике аналогичный интеграл (Фейнмана) берется хоть и по бесконечномерному пространству траекторий, но эти "классические" траектории являются отображениями отрезка в конечномерное пространство.

Формулой Фейнмана в конфигурационном пространстве называется представление решения эволюционного уравнения в виде предела интегралов по конечным декартовым степеням области определения этого решения. Формулой Фейнмана–Каца в конфигурационном пространстве называется представление того же решения в виде интеграла по пространству отображений отрезка в область определения решения.

В докладе строятся однородные замкнутые ПДО, аналогичные степеням бесконечномерного лапласиана, действующие в банаховых пространствах функций, определенных, в свою очередь, на функциональных пространствах над полем p-адических чисел, и доказываются формулы Фейнмана и Фейнмана—Каца для элементов полугрупп, порожденных этими ПДО как генераторами.

[1]Шамаров Николай Николаевич (nshamarov@yandex.ru), Институт теоретических проблем микромира им. Н.Н. Боголюбова, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, ул. Хохлова, 1.

Одним из ключевых технических средств в конструкции разрешающей полугруппы для эволюционного уравнения является теорема о формуле Чернова, которая в настоящей работе применена для получения формул, называемых формулами Фейнмана и Фейнмана—Каца в конфигурационном пространстве.

Формулой Фейнмана в фазовом пространстве называется представление решения эволюционного уравнения в виде предела интегралов по декартовым степеням так называемого фазового пространства, являющегося произведением области определения искомой функции на двойственное к ней пространство. Формулой Фейнмана—Каца в фазовом пространстве называется представление того же решения с помощью интеграла по пространству отображений отрезка в фазовое пространство.

Для получения формул Фейнмана и Фейнмана—Каца в бесконечномерном вещественном фазовом пространстве формула Чернова впервые применена О.Г. Смолянновым. Аналогичный результат может быть получен и в случае p-адических бесконечномерных пространств.

Результаты могут быть использованы при построении теории p-адических струн с вещественным действием.

УДК 517.9

ДЕЛЬТА-УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ ГРАНУЛИРОВАННОГО ГАЗА

Шелкович В.М.[1]

Гранулированные (то есть, сыпучие) среды (granular media) давно используются быту, в промышленности, в технологии. При этом, несмотря на огромное прикладное значение гранулированных сред, их свойства до недавнего времени практически не изучались. Два десятилетия назад началось интенсивное изучение таких материалов. Теоретическое описание поведения гранулированных материалов находится пока в зачаточном состоянии.

В докладе представлены результаты исследования системы уравнений гидродинамики гранулированного газа

$$\begin{array}{rcl} \rho_t + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{U}) & = & 0, \\ (\rho\mathbf{U})_t + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{U}\otimes\mathbf{U} + I\,\rho T) & = & \mathbf{U}, \\ T_t + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{U}T) & = & -(\gamma-2)T\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{U} - \Lambda\rho T^{3/2}, \end{array} \tag{1}$$

где $\cdot$ — скалярное произведение векторов, $\otimes$ — тензорное произведение векторов, I — единичная матрица; ρ — плотность, $\mathbf{U}\in\mathbb{R}^n$ — скорость, T — температура, γ — адиабатический индекс, $p=\rho T$ — давление. Здесь γ — адиабатический индекс ($\gamma=2$ и $\gamma=5/3$ для случаев $n=2$ и $n=3$, соответственно), Λ — константа, связанная с энергией процессов столкновений и вычисляемая в рамках кинетической теории.

На физическом уровне строгости в [2] было показано, что система (1) может допускать решение, содержащее в плотности δ-функцию: $\rho(x,t)=2m_*(t)\delta(x)+\rho_*(x,t)$, где $m_*(t)$, $\rho_*(x,t)$ — гладкие функции.

Мы рассматриваем решения типа δ-ударных волн в этой системе (1). Такие сингулярные решения имеют физический смысл.

Путь $\Gamma=\big\{(x,t):S(x,t)=0\big\}$ — гиперповерхность коразмерности 1 в верхнем полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+=\{(x,t):x\in\mathbb{R}^n,\ t\in[0,\infty)\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$, $\Gamma_t=\big\{x\in\mathbb{R}^n:S(x,t)=0\big\}$ — движущаяся поверхность в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через ν единичную нормаль к поверхности Γ_t, направленная (в положительном направлении) из $\Omega_t^-=\{x\in\mathbb{R}^n:S(x,t)<0\}$ в $\Omega_t^+=\{x\in\mathbb{R}^n:S(x,t)>0\}$. Временная компонента нормального вектора $-G=\dfrac{S_t}{|\boldsymbol{\nabla}S|}$ представляет собой *скорость волнового фронта* Γ_t вдоль нормали ν.

Для системы (1) рассмотрим *начальные данные типа δ-ударных волн*

$$\begin{array}{c} \big(\mathbf{U}^0(x),\rho^0(x),T^0(x),\,x\in\mathbb{R}^n;\,\mathbf{U}^0_\delta(x),\,x\in\Gamma_0\big), \\ \text{где}\quad \rho^0(x) \;=\; \widehat{\rho}^{\,0}(x)+e^0(x)\delta(\Gamma_0), \end{array} \tag{2}$$

такие что $\mathbf{U}^0\in L^\infty\big(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\big)$, $\widehat{\rho}^{\,0},T^0\in L^\infty\big(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}\big)$, $e^0\in C(\Gamma_0)$, $\Gamma_0=\big\{x:S^0(x)=0\big\}$ — начальное положение фронта δ-ударной волны, $\boldsymbol{\nabla}S^0(x)\big|_{S^0=0}\neq 0$, $\mathbf{U}^0_\delta(x)$, $x\in\Gamma_0$ — *начальная скорость* δ-ударной волны, $\delta(\Gamma_0)$ $(\equiv\delta(S^0))$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная на поверхности Γ_0.

[1]Шелкович Владимир Михайлович (shelkv@yahoo.com), Санкт-Петербургский Архитектурно-Строительный Университет, 190005, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, 4.

Определение 1. Тройка распределений (U, ρ, T) и гиперповерхность Γ, где $\rho(x,t)$ представлена в виде суммы

$$\rho(x,t) = \widehat{\rho}(x,t) + e(x,t)\delta(\Gamma),$$

и $\mathbf{U} \in L^\infty\big(\mathbb{R}^n \times (0,\infty); \mathbb{R}^n\big)$, $\widehat{\rho}, H \in L^\infty\big(\mathbb{R}^n \times (0,\infty); \mathbb{R}\big)$, $e \in C(\Gamma)$, называется *решением типа δ-ударной волны* для задачи Коши (1), (2), если для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ выполнены интегральные тождества

$$\int_0^\infty \int \widehat{\rho}\Big(\varphi_t + \mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi\Big)\,dx\,dt + \int_\Gamma e\frac{\delta\varphi}{\delta t}\frac{d\Gamma}{\sqrt{1+G^2}} + \int \widehat{\rho}^{\,0}(x)\varphi(x,0)\,dx + \int_{\Gamma_0} e^0(x)\varphi(x,0)\,d\Gamma_0 = 0,$$

$$\int_0^\infty \int \Big(\widehat{\rho}\,\mathbf{U}\Big(\varphi_t + \mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi\Big) + \widehat{\rho}\,T\nabla\varphi\Big)\,dx\,dt + \int_\Gamma e\mathbf{U}_\delta\frac{\delta\varphi}{\delta t}\frac{d\Gamma}{\sqrt{1+G^2}} + \int \mathbf{U}^0(x)\widehat{\rho}^{\,0}(x)\varphi(x,0)\,dx + \int_{\Gamma_0} e^0(x)\mathbf{U}^0_\delta(x)\varphi(x,0)\,d\Gamma_0 = 0,$$

$$\int_0^\infty \int T\Big(\varphi_t + \mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi\Big)\,dx\,dt - \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+\setminus\Gamma}\Big((\gamma-2)T\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{U} + \Lambda\rho T^{3/2}\Big)\varphi\,dx\,dt + \int T^0(x)\varphi(x,0)\,dx = 0.$$

Здесь $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, $d\Gamma$ — поверхностная мера на поверхности Γ, $d\Gamma_0$ — поверхностная мера на поверхности Γ_0; $\mathbf{U}_\delta = \nu G = -\dfrac{S_t\boldsymbol{\nabla}S}{|\boldsymbol{\nabla}S|^2}$ скорость δ-ударной волны, $\dfrac{\delta\varphi}{\delta t}$ — δ-производная по временной переменной t (совпадающая с Лагранжевой производной)

$$\frac{\delta\varphi}{\delta t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + G\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big|_\Gamma = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{U}_\delta\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi\Big|_\Gamma = \frac{D\varphi}{Dt}\Big|_\Gamma,$$

$\delta(\Gamma)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная на поверхности Γ.

Используя определение 1 и повторяя практически слово в слово доказательство теоремы [1. Теорема 9.1], мы выведем *условия Ранкина—Гюгонио* для системы (1):

Теорема 1. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ — область, разделяемая гладкой гиперповерхностью $\Gamma = \big\{(x,t) : S(x,t) = 0\big\}$ на левую и правую части $\Omega^\mp = \{(x,t) : \mp S(x,t) > 0\}$. Пусть $(\boldsymbol{U}, \rho, T)$, Γ — решение типа δ-ударной волны для системы (1), а $\boldsymbol{U}, \rho, T$ являются гладкими в $\Omega^\pm$ и имеют односторонние пределы $U^\pm$, $\widehat{\rho}^{\,\pm}$, $T^\pm$ на Γ. Тогда на гиперповерхности разрыва Γ имеют место* условия Ранкина—Гюгонию для δ-ударной волны

$$\begin{aligned} \frac{\delta e}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t}\cdot(e\mathbf{U}_\delta) &= \big([\rho\mathbf{U}] - [\rho]\mathbf{U}_\delta\big)\cdot\nu, \\ \frac{\delta(e\mathbf{U}_\delta)}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t}\cdot(e\mathbf{U}_\delta\otimes\mathbf{U}_\delta) &= \big([\rho\mathbf{U}\otimes\mathbf{U} + \mathbf{I}\,\rho T] - [\rho\mathbf{U}]\mathbf{U}_\delta\big)\cdot\nu, \end{aligned}$$

где $\nabla_{\Gamma_t} = \left(\dfrac{\delta}{\delta x_1}, \ldots, \dfrac{\delta}{\delta x_n}\right)$, $\dfrac{\delta f}{\delta x_j} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \nu_j\dfrac{\partial f}{\partial\nu}\right)\Big|_\Gamma$, δ-производная по временной переменной x_j.

Как известно, решения типа δ-ударных волн связаны с процессами переноса и концентрации (см. [1]). Мы исследуем *процессы переноса массы, момента и энергии* из пространства, окружающего движущийся фронт δ-ударной волны на этот фронт.

Решена задача Коши, связанная с распространением одиночной δ-ударной волны в системе (1).

Литература

[1] Шелкович В.М. Сингулярные решения систем законов сохранения типа δ- и δ'-ударных волн и процессы переноса и концентрации // Успехи математических наук. – 2008. – Т. 63. – Вып. 3. – С. 73–146.

[2] Fouxon I., Meerson B., Assaf M., Livne E. Formation of density singularities in hydrodynamics of inelastic gases // Phys. Review, E. – 2007. – V. 75. – 050301(R), (4 pages).

УДК 512.5

СТРУКТУРА ЕВКЛИДОВА И УНИТАРНОГО ПРОСТРАНСТВА НА СИСТЕМАХ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Широков Д. С.[1]

В докладе рассмотрен один из самых распространенных примеров системы гиперкомплексных чисел — алгебра Клиффорда [1] над полем вещественных или комплексных чисел произвольной конечной размерности. Алгебра Клиффорда является одним из возможных обобщений вещественных, комплексных чисел и кватернионов и имеет применение во многих разделах современной математики и физики. К примеру, алгебра Клиффорда находит свое применение в теории поля [3], робототехнике, обработке сигналов и изображений, химии, небесной механике, электродинамике и др.

Для элементов алгебры Клиффорда с фиксированным базисом ([2] и [3]) определяются операции четностного и Клиффордова сопряжения. На основе этих операций вводится операция эрмитова сопряжения, которая явно зависит от фиксированных генераторов алгебры Клиффорда. Эрмитово сопряжение позволяет ввести операцию скалярного произведения и задать структуру евклидова (в вещественном случае) или унитарного (в комплексном случае) пространства на алгебре Клиффорда.

Также рассмотрена алгебра Клиффорда заданной квадратичной формы с выделенным линейным подпространством элементов ранга один [1]. Для данного объекта определяются понятия рангов и кватернионных типов [4] в бескоординатной форме. Проведены рассуждения, которые позволяют ввести структуру евклидова (или унитарного) пространства на алгебрах Клиффорда заданной квадратичной формы без фиксированного базиса.

Литература

[1] Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors. – Cambridge University Press, 1997.

[2] Marchuk N.G., Shirokov D.S. Unitary spaces on Clifford algebras. – Advances in Applied Clifford Algebras. – V. 18. – No. 2. – 2008.

[3] Марчук Н.Г. Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда. – М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. – 304 с.

[4] Широков Д.С. Классификация элементов алгебр Клиффорда по кватернионным типам // Докл. АН. – Т. 427. – №6. – 2009.

[1] Широков Дмитрий Сергеевич (shirokov@mi.ras.ru), Математический институт им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук, 119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

УДК 530.1 531.01

МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ В ТЕОРИИ СЛУЧАЙНО-ВОЗМУЩЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Шляпин В.А., Миронов В.В., Журавлев В.М., Корнилов Д.А.[1]

В докладе излагается общий подход к анализу случайно-возмущенных нелинейных динамических систем с помощью метода максимальной энтропии [1–3]. В основе подхода лежит метод усреднения уравнений случайно-возмущенной системы по ансамблю, который приводит к системе уравнений, часто именуемой уравнениями Рейнольдса. Как хорошо известно система уравнений Рейнольдса для нелинейных уравнений оказывается незамкнутой в следствие наличия высших моментов случайной величины усредненных уравнениях. В предлагаемом подходе замыкание уравнений Рейнольдса производится с помощью метода максимальной энтропии. Метода максимальной энтропии гарантирует, что полученные с его помощью уравнения для моментов дают распределение с максимально большим числом микросостояний (микротраекторий системы), с помощью которых реализуется каждая усредненная траектория системы. Это обеспечивает максимальную наблюдаемость таких траекторий.

В работе излагаются результаты применения такого подхода в теории конечномерных систем, в том числе, гамильтоновским. Для простых систем типа Вольтерра-Лотки проанализированы условия устойчивости решений и некоторые важные их свойства, связанные с их специальным представлением, полученным с помощью линейных преобразований. Вычислены уравнений усредненной динамики гамильтоновских систем и получены термодинамические соотношения для параметров усредненной динамики.

Так же кратко излагаются результаты применения теории к задачам локально равновесной турбулентности сжимаемой жидкости. Выедены уравнения и приведен анализ течений Куэтта.

Литература

[1] Журавлев В.М., Шляпин В.А. Принцип вторичного максимума энтропии и уравнения Рейнольдса в стохастической динамике одномерных нелинейных систем // Нелинейный мир. – 2008. – Т. 6. – №7. – С. 352–363.

[2] Журавлев В.М. Турбулентность течений несжимаемой жидкости вблизи локального равновесия и принцип вторичного максимума энтропии // ЖТФ. – 2009. – №1. – С. 16–27.

[3] Журавлев В.М., Шляпин В.А. Метод сопряженных функций в стохастической динамике одномерных нелинейных систем и принцип вторичного максимума энтропии // Прикладная математика и механика. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – С. 72–88.

[1] Шляпин Вячеслав Александрович (zhvictorm@gmail.com), Миронов Павел Павлович, (zhvictorm@gmail.com), Журавлев Виктор Михайлович (zhvictorm@gmail.com), Корнилов Дмитрий Александрович (zhvictorm@gmail.com), Ульяновский государственный университет, 432001, Россия, г. Ульяновск, ул. Л.Толстого, 42.

УДК 517.23:530.12:531.51

КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Щиголев В.К.[1]

В последнее десятилетие наблюдается активный интерес к применению дробных производных в различных областях физики, где они играют существенную и иногда ведущую роль в понимании сложных классических и квантовых систем [1]. На этом фоне достижения дробно-дифференциального анализа в теории гравитации и космологии оказываются куда как более скромными, и едва ли наберется два десятка публикаций, посвященных этой теме (см., например, [2–5]. В то же время, известны существенные проблемы современной теоретической космологии [6], побуждающие к серьезным модификациям возможных источников ускоренного расширения Вселенной или самой гравитационной теории. В этом плане вполне оправдан появившийся интерес к дробно-дифференциальным модификациям космологических моделей.

В данной работе мы приводим обзор основных публикаций на тему дробно дифференциального подхода в космологии, известных автору, и предлагаем подходы к выводу модифицированных уравнений Фридмана и Уилера—ДеВитта, позволяющие, на наш взгляд, избежать конфликта между цельноразмерностью (псевдо)Риманова пространства-времени ОТО и дробностью порядка производных в модифицированных уравнениях. При этом мы обсуждаем и вопрос о выборе определения дробных производных между производными Римана–Лиувилля (ПРЛ) и Капуто (ПК) на основе простейших вариантов решений модифицированных уравнений. Как отмечено в работе [3], существует два различных подхода к введению дробных производных в космологию: простейший (Last Step Modification, LSM), когда производные целого порядка в уравнениях Эйнштейна для данной геометрической конфигурации заменяются их дробными аналогами, то есть $\partial_t \to D_t^\alpha$, и фундаментальный (First Step Modification, FSM), когда модификация начинается с построения дробно-дифференциальной геометрии.Интенсивно развиваемый подход к модификации уравнений космологии и вообще неконсервативных систем лагранжевой динамики на основе вариационного принципа для функционала действия дробного порядка (Fractional Action-Like Variational Approach, FALVA) в работах El-Nabulsi [2],представляет один из возможных вариантов промежуточной модификации (Intermediate Step Approach, ISA), упомянутой в работе [3].

Наши исследования базируются в большей части именно на ISA, поскольку уравнения классической и квантовой космологии могут быть получены из вариационного принципа для функционала действия Энштейна–Гильберта, в котором вариация производится как по масштабному фактору , так и по шаговой функции N, или, как показано в [6], последнее может быть заменено условием временной масштабной инвариантности, и в любом случае легко поддающегося обобщению на дробно-порядковый случай. Кроме того, получен дробно-дифференциальный аналог уравнений Фридмана, включающих скалярное поле, как источник гравитации, и уравнения Уилера—ДеВитта в рамках ISA и LSM. Также мы обсуждаем вопрос о возможной эредитарности (памяти) в космологических моделях с дробными производными в силу нелокального характера ПРЛ и ПК и в связи с возможным существованием

[1]Щиголев Виктор Константинович (vkshch1@yahoo.com), Ульяновский государственный университет, 432000, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

скрытых переменных, в роли которых может выступать, скажем, квинтэссенция или фантомные поля.

Литература

[1] Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.

[2] El-Nabulsi A.R. Fractional Unstable Euclidean Universe // EJTP 8. – 2005. – P. 1–11; EJTP 5. – 2008. – No. 17. – P. 103–106; Rom. Journ. Phys. – V. 52. – No. 3–4. – P. 467–481; Rom. Report in Phys. – 2007. – V. 59. – No. 3 P. 763–771.

[3] Roberts M.D. Fractional Derivative Cosmology/ arXiv: 0909.117 [gr-qc].

[4] Munkhammar J. Riemann-Liouville Fractional Einstein Field Equations/arXiv: 1003.4981[physics.gen-ph].

[5] Vacaru S.I. Fractional Nonholonomic Ricci Flows/arXiv:1004.0625[math.DG].

[6] Kiselev V.V. Vector field as a quintessence partner/arXiv: 0402095 [gr-qc].

УДК 517.968.72

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТИПА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ МЛАДШИХ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПУТЕМ ФАКТОРИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Яшагин Н. С.[1]

Рассматривается уравнение

$$\ddot{u} + \sum_{k=0}^{n} a_k D_{0t}^{1+\alpha_k} u + \sum_{k=0}^{m} b_k D_{0t}^{\beta_k} u = f(t), \tag{1}$$

где $u(t)$ — искомая, а $f(t)$ — заданная функции, D_{0t}^{α} — левосторонняя дробная производная порядка α [1], $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$, $t \in [0,T]$; $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k, \beta_k \in (0,1)$. Известно, что подобные уравнения могут выступать в качестве модельных дифференциальных уравнений дробных осцилляторов [2, 3].

Для уравнения (1) ставиться, в соответствии с [4], задача типа Коши

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+} \left[\dot{u}(t) + \sum_{k=0}^{n} a_k D_{0t}^{\alpha_k} u \right] = u_1. \tag{2}$$

Задача (1)–(2) редуцируется к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Если интегральное уравнение допускает факторизацию, то нетрудно найти решение поставленной задачи в терминах обобщенной функции типа Миттаг—Леффлера

$$E_{\bar{\alpha}}(z;\mu) = \sum_{k_1,k_2\ldots k_n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} z_i^{k_i}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i + \mu\right)}, \tag{3}$$

где $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ — мультииндекс, $z = (z_1, z_2 \ldots z_n)$ — вектор переменных, параметры $\mu, \alpha_i \in \mathbb{C}$, причем $\mathrm{Re}\alpha_i > 0, i = \overline{1,n}$. Обобщение функции типа Миттаг—Леффлера на случай многих переменных несколько в иной, чем (3) форме предложено в работе C.B. Hadid, Yu. Luchko [5].

В работе далее рассмотрена постановка видоизмененной задачи типа Коши

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+} \left[\dot{u}(t) + \sum_{k=0}^{n} a_k \left(D_{0t}^{\alpha_k} u - u(t) \right) \right] = u_1, \tag{4}$$

решение которой находиться аналогично задаче (1)–(2). Постановка начальной задачи с условиями (4) мотивирована желанием получить классические начальные условия при переходе к пределу по параметрам дробности $\alpha_k, \beta_k \to 0$.

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию (проект РНП 2.1.1/3397), РФФИ (проект №07-01-00478-а).

[1] Яшагин Николай Сергеевич (nik-yashagin@yandex.ru), Самарский государственный технический университет, 443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Литература

[1] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 pp.

[2] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

[3] Огородников Е.Н. Математические модели дробных осцилляторов, постановка и структура решения задачи Коши // Мат. моделирование и краевые за-дачи: Тр. Шестой Всероссийской научн. конф. с междунар. участием. Ч. 1. – Самара: СамГТУ, 2009. – С. 177–181.

[4] Огородников Е.Н., Яшагин Н.С. Постановка и решение задач типа Коши для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана—Лиувилля // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. – №1(20). – С. 24–36.

[5] Hadid S.B., Luchko Yu. An operational method for solving fractional differential equations of an arbitrary real order // Panam. Math. J. – 1966. No. 6(1). P. 57–73.

УДК 541.1

MODELLING OF ADSORPTION OF MOLECULES OF ORGANIC SUBSTANCES ACTING AS INHIBITORS OF CORROSION AND HYDROGEN ABSORPTION BY METALS USING QUANTUM CHEMISTRY

Beloglazov G.S.[1]

The task of computer modeling of molecular properties such as inhibitive efficiency of organic additions (OrA) is to serve the aim of purposeful organic synthesis of efficient inhibitors of corrosion and hydrogen absorption of metals on the basis of known qualitative and quantitative structure-to-property relationships. On the first stage of such modeling, it makes sense to establish (a) which quantum chemical characteristics being obtained from the computations prove to be in significant (and best if one to one) relationship with experimental data on efficiency against corrosion and hydrogen absorption, and (b) the right size of polyatomic cluster which, on one hand, would already correctly map the qualitative and quantitative dependencies characterizing the important processes involving metal protection (including adsorption of OrA on the surface of metal being protected) and their results (taking into account the status of the media and other conditions of corrosion and/or hydrogen absorption), on another hand, so that a researcher is not yet exposed to massive problems of too long calculations.

A series of nine Organic Additives (**OrA**) — hydrazides and hydrazones, four of which are the derivatives of glycolic acid, was studied in three qualities: as inhibitors of hydrogen absorption of steel (a), corrosion inhibitors (b), and biocides against mushroom growth on metal surface (c).

The obtained data show that acceptor properties of the studied OrA (represented by LUMO energies) are not responsible for their biocide action.

(a) None strong correlation have been established so far for the case of hydrogen absorption. Among the calculated values of the correlation coefficients between the computed Quantum Chemical Characteristics (QCC) and experimentally measured inhibiting efficiencies, the only significant correlations are between the net electric Mulliken charge on the nitrogen atom (N1) forming one of the two N-H groups in the studied molecules of the **OrA** under question, and:

(b) corrosion inhibiting efficiencies of only those hydrazides and hydrazones that are not the derivatives of glycolic acid;

(c) efficiencies of biocide action of only those hydrazides and hydrazones that are not the derivatives of glycolic acid.

Some typical results of correlation analysis are given in Table 1 below:

The obtained results agree with the data previously published. Generally, the development of the proposed approach is promising from the point of view of the prospects of building possibly universal model capable of describing inhibitive action against corrosion and hydrogen absorption by metals in different media and under various conditions.

[1]Beloglazov G.S. (drgeorge59@mail.ru.), Unversity of Dodoma, Dodoma, Tanzania, P.O. 259, TANZANI.

Table 1

Correlation coefficients between the efficiencies of the studied **OrA** (not the derivatives of glycolic acid) and computed quantum chemical characteristics (QCC)

OrA concentration, mMol/L	Correlation coefficients between inhibiting efficiencies and QCC (%)					
	HOMO	LUMO	Dip. moment	Electric charge Q on Nitrogen1	Electric charge Q on Nitrogen2	Electric charge Q on Oxygen
0.25	51	5	–41	**98.5**	–36	13
0.5	51	5	–41	**98.5**	–29	13
1	51	5	–41	**98.5**	–28	13

AMS Subject Classification: 82C20, 82C05, 60F17, 76A02

THE DERIVATION OF HYDRODYNAMIC EQUATIONS FOR HARMONIC CRYSTALS

Dudnickova T.V. [1]

The paper concerns the problems of the derivation of the limiting "hydrodynamic" equations from the Hamilton dynamics (see, for example, [1] for a detailed discussion of the results and methods on this problem). As the model we consider the harmonic crystals in the half-space $\mathbb{Z}^d_+ = \{z \in \mathbb{Z}^d : z_1 > 0\}$, with zero boundary condition. In the harmonic approximation, the crystal is characterized by the displacements $u(z,t) \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{Z}^d_+$, of the crystal atoms from their equilibrium positions. The field $u(z,t)$ is governed by a discrete wave equation.

The derivation of hydrodynamic equations is connected with the problem of convergence to an equilibrium measure. Hence, the first step in our investigation is the proof of such convergence. We study the distribution μ_t of the random solution $u(\cdot,t)$ at time $t \in \mathbb{R}$. It is assumed that the initial probability measure μ_0 has zero mean, a finite mean energy density and some mixing properties. We prove the weak convergence of μ_t to an equilibrium Gaussian measure as $t \to \infty$ (see [7]). In [3, 4], we have analyzed the long-time convergence to an equilibrium distribution for systems described by partial differential equations in $\mathbb{R}^d$. In [5–7], the results were extended to harmonic crystals.

To derive the hydrodynamic equations we apply the special so-called hydrodynamic limit procedure. We introduce a small scale parameter $\varepsilon > 0$ and consider a family of the initial measures $\{\mu^\varepsilon_0, \varepsilon > 0\}$ satisfying some conditions. In particular, (i) for any $r \in \mathbb{R}^d_+ + = \{r \in \mathbb{R}^d : r_1 > 0\}$ and $z, z' \in \mathbb{Z}^d_+$, the covariance of the measure μ^ε_0 at points $[r/\varepsilon]+z$ and $[r/\varepsilon] + z'$ converges to a limit matrix as $\varepsilon \to 0$; (ii) the covariance of μ^ε_0 at points $z, z' \in \mathbb{Z}^d_+$ vanishes as $|z - z'| \to \infty$ uniformly in ε. Given nonzero $\tau \in \mathbb{R}$ and $r \in \mathbb{R}^d_+$, we study the distribution $\mu^\varepsilon_{\tau/\varepsilon^\kappa, r/\varepsilon}$ of the random solution $u(z,t)$ close to the spatial point $[r/\varepsilon]$ and at time moments τ/ε^κ with an κ, $\kappa \in (0,1]$. In the case $\kappa < 1$, we prove that the measures $\mu^\varepsilon_{\tau/\varepsilon^\kappa, r/\varepsilon}$ converge to a limit measure as $\varepsilon \to 0$, which is Gaussian and its covariance matrix does not depend on τ. For $\kappa = 1$, the limit is established,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu^\varepsilon_{\tau/\varepsilon, r/\varepsilon} = \mu^G_{\tau,r}, \tag{1}$$

where $\mu^G_{\tau,r}$ is a Gaussian measure. In particular, we derive the explicit formulas for the covariance matrix of the limit measure. These formulas allow us to conclude that the Fourier transform of the limit covariance matrix evolves according to the following equation:

$$\partial_\tau f_{\tau,r}(\theta) = i\, C(\theta) \nabla\Omega(\theta) \cdot \nabla_r f_{\tau,r}(\theta), \quad r \in \mathbb{R}^d_+, \quad \tau > 0, \tag{2}$$

where $C(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1}(\theta) \\ -\Omega(\theta) & 0 \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{T}^d$, and, roughly, $\Omega(\theta)$ is the dispersion relation of the harmonic crystal. The boundary and initial conditions for (2) are written in terms of the initial covariance matrix. The equation (2) can be considered as the analog of the Euler equation for our model. In [2], the equation (2) was derived for the infinite chain of harmonic oscillators on one-dimensional lattice $\mathbb{Z}^1$.

[1] Dudnickova Tatiana Vladimirovna (tdudnikov@mail.ru), Elektrostal Polytechnical Institute, 144000, Russia, Elektrostal, Pervomajskaya Str., 7.

In phonon physics it is standard practice to use the Wigner function $W(t, r, \theta)$ as density of phonons with wave number θ at location r and at specified time t. W evolves according to the semiclassical energy transport equation

$$\partial_t W(t, r, \theta) = -\nabla\Omega(\theta) \cdot \nabla_r W(t, r, \theta), \quad r \in \mathbb{R}^d_+, \tag{3}$$

$W(t, r, \theta)$ at fixed r, t are expressed by the covariance of the Gaussian measure $\mu^G_{t,r}$ which is invariant under the lattice dynamics. Thus (3) can be understood as the equation governing the motion of the parameters which characterize the locally stationary measures. The results (1)–(3) are proved in [8]. For harmonic crystals in the entire space $\mathbb{Z}^d$, they were obtained in [6].

The next result is the derivation of the equation for the "next correction" to the limiting Euler equation (2). Namely, we establish that the correlation matrices of the measures $\mu^\varepsilon_{\tau/\varepsilon^2, r/\varepsilon}$ (i.e., for $\kappa = 2$) are approximated by matrix-valued functions $q^\varepsilon_{\tau,r}(z - -z')$ as $\varepsilon \to 0$. Moreover, the functions $f^\varepsilon_{t,r}(\theta) := \hat{q}^\varepsilon_{\varepsilon t,r}(\theta)$ evolve according to the following (Navier–Stokes type) equation

$$\partial_t f^\varepsilon_{t,r}(\theta) = iC(\theta) \left(\nabla\Omega(\theta) \cdot \nabla_r f^\varepsilon_{t,r}(\theta) + \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tr} \left[\nabla^2\Omega(\theta) \cdot \nabla^2_r f^\varepsilon_{t,r}(\theta) \right] \right), \quad r \in \mathbb{R}^d_+, \quad t > 0,$$

where $\nabla^2_r f$ stands for the matrix of second partial derivatives of f with respect to r.

The present work was partially supported by the RFBR grant (09-01-00288).

References

[1] Dobrushin R.L., Sinai Ya.G., Sukhov Yu.M. Dynamical systems of statistical mechanics and kinetic equations. Chapter 10. Dynamical systems of statistical mechanics // Dynamical systems–2. Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr. – 1985. – V. 2. – VINITI. – Moscow. – P. 235–284.

[2] Dobrushin R.L., Pellegrinotti A., Suhov Yu.M., Triolo L. One dimensional harmonic lattice caricature of hydrodynamics // J. Stat. Phys. – 1986. – V. 43. – P. 571–607.

[3] Dudnikova T.V., Komech A.I., and Spohn H. On a two-temperature problem for wave equation // Markov Processes and Related Fields. – 2002. – V. 8. – P. 43–80.

[4] Dudnikova T.V., Komech A. On a two-temperature problem for the Klein-Gordon equation // Teor. Veroyatnost. i Primenen. – 2005. – V. 50. – No. 4. – P. 675–710 [in Russian] (English transl. Theory Probab. Appl. – 2006. – V. 50. – No. 4. – P. 582–611).

[5] Dudnikova T.V., Komech A.I., Spohn H. On the convergence to statistical equilibrium for harmonic crystals // J. Math. Phys. – 2003. – V. 44. – P. 2596–2620.

[6] Dudnikova T.V., Spohn H. Local stationarity for lattice dynamics in the harmonic approximation // Markov Processes and Related Fields. – 2006. – V. 12. – No. 4. – P. 645–578.

[7] Dudnikova T.V. On the asymptotical normality of statistical solutions for harmonic crystals in half-space // Russian J. Math. Phys. – 2008. – V. 15. – No. 4. – P. 460–472.

[8] Dudnikova T.V. Lattice dynamics in the half–space. Energy transport equation // to appear in J. Math. Phys. – 2010. – V. 51. – No. 6 (Preprint at http://arxiv.org/abs/0905.4806).

УДК 517.5

ON AN OPTIMIZATION PROBLEM WITH RESPECT TO DOMAIN FOR THE EIGENVALUES OF THE LAPLACE OPERATOR*

Gasimov Y.S.[1]

Let's consider the set K of the pairs $d = (D_1, D_2) \in M \times M$ satisfying the condition $D_1 + D_2 = D$, where M is a set of convex bounded domains from R^n, $D \in M$ is a fixed domain, $D_1 + D_2 = \{x \in R^n : \ x = x_1 + x_2, \ x_1 \in D_1, \ x_2 \in D_2\}$.

We consider the following problem on K

$$-\Delta u = \lambda u, \ x \in D_1, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \ x \in S_{D_1}, \tag{2}$$

$$-\Delta v = \mu v, \ x \in D_2, \tag{3}$$

$$v(x) = 0, \quad x \in S_{D_2}. \tag{4}$$

The first eigenvalues of the problems (1), (2) and (2), (4) define by λ_1 and μ_1 correspondingly. The object under investigation is the problem

$$J(d) = \lambda_1(D_1) + \mu_1(D_2) \to \min, \qquad d \in K. \tag{5}$$

In [1] the following formulas have been obtained for the first variation of the eigenvalues with respect to domain

$$\delta\lambda_1(D_1) = -\int_{S_{D_1^*}} |\nabla u_1|^2 \left[P_{D_1}(n(x)) - P_{D_1^*}(n(x))\right] ds, \tag{6}$$

$$\delta\mu_1(D_2) = -\int_{S_{D_2^*}} |\nabla u_1|^2 \left[P_{D_2}(n(x)) - P_{D_2^*}(n(x))\right] ds, \tag{7}$$

where

$$P_D(x) = \max_{l \in D} (l, x), \qquad x \in R^n$$

support function of the domain D.

Now let's show that K is a convex set. To do this let's take any

$$d = (D_1, D_2), \ \bar{d} = \left(\bar{D}_1, \bar{D}_2\right) \in K$$

and $\alpha \in (0, 1)$.

Then $D_1 + D_2 = D$ and $\bar{D}_1 + \bar{D}_2 \in D$. Multiplying by α and $(1 - \alpha)$ correspondingly and taking a sum we obtain

$$\alpha D_1 + \alpha D_2 + (1 - \alpha)\bar{D}_1 + (1 - \alpha)\bar{D}_2 = D.$$

[1]Gasimov Yusif S. (ysfgasimov@yahoo.com), Institute of Applied Mathematics, Baku State University, AZ1148, Azerbaijan, Baku, Z. Khalilov Str., 23.

*This research is supported by Baku State University Internal Grant Program "50+50".

It means that $\alpha d + (1-\alpha)\,\bar{d} \in K$. Thus K is convex.
As we see from (5)

$$\delta J(D) = \delta\lambda_1(D_1) + \delta\mu_1(D_2). \tag{8}$$

Substituting here (6), (7) considering convexity of K we obtain the following necessary condition of optimality for the problem (5) with respect to d

$$\begin{aligned}&\int_{S_{D_1^*}} |\nabla u_1|^2 \left[P_{D_1^*}(n(x)) - P_{D_1}(n(x))\right] ds - \\ &\quad - \int_{S_{D_2^*}} |\nabla u_1|^2 \left[P_{D_1^*}(n(x)) - P_{D_1}(n(x))\right] ds \le 0, \quad \forall d = (D_1, D_2) \in K.\end{aligned} \tag{9}$$

It should be noted that the pair $d = (D/2, D/2) \in K$ satisfies this condition. But the problem to prove that this condition is also sufficient for any $D \in M$ is open. However it is proved that in the case when D is a ball of proper dimension (9) is also sufficient condition for the pair $(D/2, D/2)$.

References

[1] Gasimov Y.S. On some properties of the eigenvalues by the variation of the domain // Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – V. 10. – N. 2. – 2003. – P. 249–255.

УДК 517.984

FINITENESS OF THE NUMBER OF EIGENVALUES OF A BLOCK OPERATOR MATRIX

Ibrogimov O.O.[1], *Rasulov T.H.*[2]

In this note we consider a block operator matrix $H(K)$ and study its spectrum depending on quasi-momentum K. The problem of the infiniteness of the discrete spectrum of $H(0)$ was connected with the existence of so-called threshold-energy resonance of the generalized friedrichs model $h(0)$, see [1–3]. In this paper we prove that if the operator $h(0)$ has a threshold-energy resonance, then for any $K \neq 0$ the operator $H(K)$ has finitely many eigenvalues below the bottom of its essential spectrum

Denote by $\mathbb{T}^3$ the three-dimensional torus, the cube $(-\pi,\pi]^3$ with appropriately identified sides. Let $\mathbb{C}$ be the field of complex numbers, $L_2(\mathbb{T}^3)$ be the Hilbert space of square integrable (complex) functions defined on $\mathbb{T}^3$ and $L_2^s((\mathbb{T}^3)^2)$ be the Hilbert space of square integrable (complex) symmetric functions defined on $(\mathbb{T}^3)^2$.

Denote by $\mathcal{H}$ the direct sum of spaces $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbb{T}^3)$ and $\mathcal{H}_2 = L_2^s((\mathbb{T}^3)^2)$, that is, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

The Hilbert space $\mathcal{H}$ is called the *three-particle cut subspace* of the Fock space.

Let $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ be the block operator matrix of the form

$$H(K) = \begin{pmatrix} H_{00}(K) & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & H_{11}(K) & H_{12} \\ 0 & H_{12}^* & H_{22}(K) \end{pmatrix},$$

where the operators $H_{ii}(K) : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$ and $H_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i \neq j$, $i,j = 0,1,2$ are defined by the rule

$$(H_{00}(K)f_0)_0 = w_0(K)f_0, \quad (H_{01}f_1)_0 = \int\limits_{\mathbb{T}^3} v_0(s)f_1(s)ds,$$

$$(H_{11}(K)f_1)_1(p) = w_1(K;p)f_1(p), \quad (H_{12}f_2)_1(p) = \int\limits_{\mathbb{T}^3} v_1(s)f_2(p,s)ds,$$

$$(H_{22}(K)f_2)_2(p,q) = w_2(K;p,q)f_1(p).$$

Here $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0,1,2$, $w_0(\cdot)$ and $v_1(\cdot)$ are real-valued bounded functions on $\mathbb{T}^3$, $v_2(\cdot)$ is a real-valued analytic function on $\mathbb{T}^3$, and the functions $w_1(\cdot;\cdot)$ and $w_2(\cdot;\cdot,\cdot)$ has the form

$$w_1(K;p) = \varepsilon(\frac{K}{2}-p)+\varepsilon(\frac{K}{2}+p)+\lambda, \quad w_2(K;p,q) = \varepsilon(\frac{K}{3}+p)+\varepsilon(\frac{K}{3}+q)+\varepsilon(\frac{K}{3}-p-q)$$

for some $\lambda > 0$, where

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{3}(1-\cos p_i), \quad p = (p_1,p_2,p_3) \in \mathbb{T}^3.$$

[1]Ibrogimov Orif Olimovich (orif141988@mail.ru), Samarkand State University, 140104, Uzbekistan, Samarkand, University Boulevard, 15.

[2]Rasulov Tulkin Husenovich (rth@mail.ru), Bukhara State University, 200100, Uzbekistan, Bukhara, M. Ikbol Str, 11.

Under these assumptions the operator $H(K)$ is bounded and self-adjoint in $\mathcal{H}$. Moreover, one can see that for any $K \in \mathbb{T}^3$ the function $w_2(K;\cdot,\cdot)$ (resp. $w_1(K;\cdot)$) has a unique non-degenerate minimum at the point $(0,0) \in (\mathbb{T}^3)^2$ (resp. $0 \in \mathbb{T}^3$).

In modern mathematical physics the operators H_{01} and H_{12} (resp. H_{10} and H_{21}) defined in the Fock space are called annihilation (resp. creation) operators.

In order to formulate our main result we introduce the family of the bounded and self-adjoint operators $h(K;p)$, $p \in \mathbf{T}^3$ acts in $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ as

$$h(K;p) = \begin{pmatrix} h_{00}(K;p) & h_{01} \\ h_{01}^* & h_{11}(K;p) \end{pmatrix}$$

with the entries

$$(h_{00}(K;p)f_0)_0 = w_1(K;p)f_0, \quad (h_{01}f_1)_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\mathbb{T}^3} v_2(s)f_1(s)ds,$$

$$(h_{11}(K;p)f_1)_1(q) = w_2(K;p,q)f_1(q).$$

Set

$$m(K) = \min_{p,q\in\mathbb{T}^3} w_2(K;p,q) = 3\varepsilon(\frac{K}{3}), \quad M(K) = \max_{p,q\in\mathbb{T}^3} w_2(K;p,q).$$

The following theorem describes essential spectrum of $H(K)$.

Theorem 1. *For the essential spectrum of $H(K)$ the equality*

$$\sigma_{ess}(H(K)) = \bigcup_{p\in\mathbb{T}^3} \sigma_{disc}(h(K,p)) \cup [m(K), M(K)],$$

holds, where $\sigma_{disc}(h(K,p))$ is the discrete spectrum of $h(K,p)$.

The sets $\bigcup_{p\in\mathbb{T}^3} \sigma_{disc}(h(K,p))$ and $[m(K), M(K)]$ are called two-particle and three-particle branches of the essential spectrum of $H(K)$, respectively.

Let $C(\mathbb{T}^3)$ be the Banach space of continuous functions on $\mathbb{T}^3$.

Definition. *The operator $h(0;0)$ is said to have a zero energy resonance, if the number 1 is an eigenvalue of the operator*

$$(G\psi)(q) = \frac{v_2(q)}{4\lambda}\int \frac{v_2(s)\psi(s)ds}{\varepsilon(s)}, \quad \psi \in C(\mathbb{T}^3)$$

and the associated eigenfunction ψ (up to constant factor) satisfies the condition $\psi(0) \neq 0$.

Let us denote by $N(K,z)$ the number of eigenvalues (including multiplicities) of $H(K)$ lying below $z < \min\sigma_{ess}(H(K))$.

The main result of the present paper is the following theorem.

Theorem 2. *Let the operator $h(0,0)$ have a threshold energy resonance. Then for all $K \neq 0$ the operator $H(K)$ has a finite number of eigenvalues below the bottom of the essential spectrum of $H(K)$ and for the function $N(\cdot,0)$ the relation*

$$\lim_{|K|\to 0} \frac{N(K,0)}{|\log|K||} = \frac{\gamma_0}{\pi}$$

holds, where γ_0 is the unique positive solution of the equation

$$\gamma\sqrt{3}\cosh\frac{\pi\gamma}{2} = 8\sinh\frac{\pi\gamma}{6}.$$

We remark that the operator $H(K)$ have not been considered before and the Theorem 2 applies to lattice systems only and has no analogue for the continuous case.

References

[1] Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space // Discrete Spectrum Asymptotics. J. Stat. Phys. – 2007. – V. 127. – No. 2. – P. 191–220.

[2] Abdullaev Zh.I. Finiteness of the discrete spectrum for non-trivial values of the full quasi-momentum in the system of three bosons on a lattice // Russian Math. Surveys. – 2007. – V. 62. – No. 1. – P. 175–201.

[3] Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. Schrödinger Operators on Lattices. The Efimov Effect and Discrete Spectrum Asymptotics // Ann. Henri Poincaré. – 2004. – V. 5. – P. 743–772.

УДК 517.9

COMPUTATIONAL COMPLEXITY OF QUANTUM ALGORITHM AND APPLICATIONS

Iriyama S., Ohya M.[1]

Introduction. We have studied on quantum algorithm for several years. Ohya and Volovich discovered the quantum algorithm with chaos dynamics called the OMV quantum algorithm which can solve SAT problem, one of NP complete problems, in polynomial time[1, 2, 3, 4, 5]. We applied this quantum algorithm to the other problems, multiple alignment of amino acid sequence, Hamilton closed path problem, protein folding problem and EXPTIME problem[3, 11]. Therefore we found that OMV quantum algorithm is useful for searching problems, i.e., to search the objects which satisfy the given conditions. In the field of Bio-Information there exist many searching problems, and we can apply our quantum algorithm to them.

In this talk, we explain the definition of a generalized quantum Turing machine, and discuss the computational complexity of quantum algorithm.

Generalized quantum Turing machine. Let Q be a set of states including an initial state q_0 and a set of final states $\{q_F\}$ and Σ a set of alphabets including a blank symbol $\#$. We denote a set of all infinite sequences of alphabets in Σ as

$$\Sigma^* = \Sigma \times \Sigma \times \cdots = \Sigma^\infty.$$

Let $A \in \Sigma^*$ be a sequence of alphabets representing the tape state as

$$A = \cdots, \#, a_{-M^-}, \cdots, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots, a_{M^+}, \#, \cdots$$

where a_k is a tape alphabet and $M^-, M^+ \in \mathbb{N}$. $M^- + M^+ + 1$ is called the tape length. Each tape alphabet has a unique index. We write the k-th tape alphabet a_k as $A(k)$.

The GQTM M_{gq} is defined by the quadruplet $(Q, \Sigma, \mathcal{H}, \Lambda_\delta)$, where Λ_δ is a quantum transition function from a configuration to a configuration. Q and Σ are represented by a density operator on Hilbert space the $\mathcal{H}_Q$ and $\mathcal{H}_\Sigma$, which are spanned by canonical basis $\{|q\rangle ; q \in Q\}$ and $\{|a\rangle ; a \in \Sigma\}$, respectively. A tape configuration A is a sequence of elements of Σ represented by a density operator on the Hilbert space $\mathcal{H}_\Sigma$ spanned by a canonical basis $\{|A\rangle ; A \in \Sigma^*\}$, where Σ^* is the set of all sequences of alphabets in Σ. A position of tape head is represented by a density operator on the Hilbert space $\mathcal{H}_Z$ spanned by a canonical basis $\{|i\rangle ; i \in \mathbb{Z}\}$. Then a configuration ρ of GQTM M_{gq} is described by a density operator in $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_\Sigma \otimes \mathcal{H}_Z$. Let $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ be the set of all density operators in the Hilbert space $\mathcal{H}$.

Here, we define the transition function

$$\delta_1 : \mathbb{R} \times Q \times \Sigma \times Q \times \Sigma \times Q \times \Sigma \times \{0, \pm 1\} \times Q \times \Sigma \times \{0, \pm 1\} \to \mathbb{C}.$$

A quantum transition function is given by a quantum channel Λ_{δ_1} satisfying the following condition.

[1]Satoshi Iriyama (iriyama@is.noda.tus.ac.jp), Masanori Ohya (ohya@is.noda.tus.ac.jp), Tokyo University of Science, 2463, Yamazaki, Noda City, Chiba, Japan.

Definition 1. *Λ_{δ_1} is called a quantum transition channel if there exists a transition function δ_1 such that for all quantum configuration $\rho = \sum_k \lambda_k |\psi_k\rangle \langle\psi_k|$, $|\psi_k\rangle = \sum_l \alpha_{k,l} |q_{k,l}, A_{k,l}, i_{k,l}\rangle$, $\sum_k \lambda_k = 1, \forall \lambda_k \geq 0$, $\sum_l |\alpha_{k,l}|^2 = 1, \forall \alpha_{k,l} \in \mathbb{C}$ it holds*

$$\begin{aligned}&\Lambda_{\delta_1}(\rho) \equiv \\ &\equiv \textstyle\sum_{k,l,m,n,p,b,d,p',b',d'} \delta_1\left(\lambda_k, q_{k,l}, A_{k,l}(i_{k,l}), q_{m,n}, A_{m,n}(i_{m,n}), p, b, d, p', b', d'\right) \times \\ &\qquad \times |p, B, i_{k,l} + d\rangle \langle p', B', i_{m,n} + d'|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B(j) &= \begin{cases} b & j = i_{k,l} \\ A_{k,l}(j) & otherwise \end{cases} \\ B'(j) &= \begin{cases} b' & j = i_{m,n} \\ A_{m,n}(j) & otherwise \end{cases}\end{aligned}$$

so that the RHS of the first equation is a state.

Definition 2. *$M_{gq} = (Q, \Sigma, \mathcal{H}, \Lambda_\delta)$ is called a LQTM(Linear Quantum Turing Machine) if there exists a transition function*

$$\delta_2 : Q \times \Sigma \times Q \times \Sigma \times Q \times \Sigma \times \{0, \pm 1\} \times Q \times \Sigma \times \{0, \pm 1\} \to \mathbb{C}$$

such that for all quantum configuration ρ_k, Λ_{δ_2} is written as

$$\begin{aligned}\Lambda_{\delta_2}(\rho_k) &\equiv \textstyle\sum_{k,l,m,n,p,b,d,p',b',d'} \delta_2\left(q_{k,l}, A_{k,l}(i_{k,l}), q_{m,n}, A_{m,n}(i_{m,n}), \right. \\ &\quad \left. p, b, d, p', b', d'\right) |p, B, i_{k,l} + d\rangle \langle p', B', i_{m,n} + d'|\end{aligned}$$

so that the RHS is a state. For all quantum configuration $\sum_k \lambda_k \rho_k$, Λ_{δ_2} is affine;

$$\Lambda_{\delta_2}\left(\sum_k \lambda_k \rho_k\right) = \sum_k \lambda_k \Lambda_{\delta_2}(\rho_k)$$

Definition 3. *A GQTM M_{gq} is called unitary QTM (UQTM), if the quantum transition channel Λ_{δ_3} is a unitary channel implemented: $\Lambda_{\delta_3} = Ad_{U_{\delta_3}}$. U_{δ_3} is given by, for $|\psi\rangle = |q, A, i\rangle$,*

$$\begin{aligned}U_{\delta_3} |\psi\rangle &= U_{\delta_3} |q, A, i\rangle \\ &= \sum_{p,b,d} \delta_3(q, A(i), p, b, d) |p, B, i + d\rangle\end{aligned}$$

where

$$\delta_3 : Q \times \Sigma \times Q \times \Sigma \times \{0, 1\} \to \mathbb{C}$$

is a transition function and it satisfies for any $q \in Q, a \in \Sigma$, $q' (\neq q) \in Q, a' (\neq a) \in \Sigma$,

$$\sum_{p,b,d} |\delta_3(q, a, p, b, d)|^2 = 1.$$

$$\sum_{p,b,d,d'} \delta_3(q', a', p, b, d')^* \delta_3(q, a, p, b, d) = 0.$$

Remark 1. *Classical Turing Machine(CTM) is represented as LQTM that transition channel has diagonal part only. Moreover, for any* $q, p \in Q, a, b \in \Sigma, d \in \{0, \pm 1\}$*, define* $\delta_3(q, a, p, b, d) = 0$ *or* 1 *then UQTM is a reversal CTM.*

A chaos amplifier used in [1, 2] is a non-linear quantum channel, the details of this channel and its application to the SAT problem will be discussed in the section 4.4.

Results. We showed the following results:

- SAT problem is belongs to BGQPP [6, 7].
- Construction of universal quantum Turing machine(a generalization of BV type universal QTM) [8].
- Quantum algorithm for partial recursive function with a superposition [10].
- Pebble game(EXPTIME) belongs to BGQPP if we assume Oracle [11].

References

[1] Ohya M., Volovich I.V. Quantum computing and chaotic amplification // J. opt. B. – 2003. – 5. – No. 6. – P. 639–642.

[2] Ohya M., Volovich I.V. New quantum algorithm for studying NP-complete problems // Rep. Math. Phys. – 2003. – 52. – No. 1. – P. 25–33.

[3] Ohya M., Volovich I.V. Mathematical Foundation of Quantum Computers // Teleportations and Cryptography, to be published.

[4] Ohya M., Masuda N., NP problem in Quantum Algorithm // Open Systems and Information Dynamics. – 2000. – 7. – No. 1. – P. 33–39.

[5] Iriyama S., Ohya M. Rigorous Estimate for OMV SAT Algorithm // Open Systems & Information Dynamics. – 2008. – 15. – 2. – P. 173–187.

[6] Iriyama S., Ohya M., Volovich I.V. Generalized Quantum Turing Machine and its Application to the SAT Chaos Algorithm // QP-PQ: Quantum Prob. White Noise Anal., Quantum Information and Computing. – 2006. – 19. – World Sci. Publishing. – P. 204–225.

[7] Iriyama S., Ohya M. Language Classes Defined by Generalized Quantum Turing Machine // Open System and Information Dynamics. – 2008. – 15:4. – P. 383–396.

[8] Iriyama S., Miyadera T., Ohya M. Note on a Universal Quantum Turing Machine // Physics Letter A. – 2008. – No. 372. – P. 5120–5122.

[9] Iriyama S., Ohya M. Quantum algorithm for SAT problem using entangled degree // Proc. of 2008 International Symposium on Physics of Quantum Technology. – 2008. – No. 175.

[10] Iriyama S., Ohya M. The problem to construct Unitary Quantum Turing Machine for compute partial recursive function // TUS. – 2009. – Preprint.

[11] Iriyama S., Ohya M. Quantum Algorithm for Pebble Game and Its Computational Complexity // TUS. – 2010. – Preprint.

[12] Iriyama S., Ohya M., Sato K., Volovich I.V. Photosynthetic Antenna and Entropy Decreasing // 2010. – To be published.

УДК 539.1

TERNARY Z_3-GRADED ALGEBRAS AS REPRESENTATION OF QUARKS

Kerner R.[1]

We consider cubic and ternary algebras with Z_3-grading, with cubic constitutive relations instead of binary ones. Both associative and non-associative cases are discussed. We construct the Z_3-graded analogs of Grassmann and exterior algebras, and show explicitly how the lowest dimensional cases can be constructed.

We show how the Lorentz symmetry represented by the $SL(2,C)$ group can be introduced without any notion of metric, just as the symmetry of Z_3-graded cubic algebra and its constitutive relations. Parallelly, non-associative ternary algebra of cubic matrices (three-valenced covariant tensors) is introduced, and its representation is found in terms of the Pauli matrices. The relationship of such algebraic constructions with quark states is also considered.

Finally, we introduce a cubic generalization of Dirac's equation, based on the 3×3 complex matrices spanning cubic generalization of the Clifford algebra. The diagonalized equation is of third order, displaying solutions with complex wave vectors and frequencies. Although these solutions cannot propagate, we show how their cubic combinations can generate ordinary wave solutions in Minkowskian space-time.

References

[1] Kerner R. J. Math. Phys. – 1992. – No. 33. – P. 403–412.
[2] Vainerman L., Kerner R. J. Math. Phys. – 1996. – No. 37. – P. 2553–2561.
[3] Abramov V., Kerner R., Le Roy B. J. Math. Phys. – 1997. – No. 38. – P. 1650–1669.
[4] Kerner R. The cubic chessboard // Classical and Quantum Gravity. – 1997. – Vol. 14. – No. 1A. P. A203–A216.
[5] Ternary algebraic structures and their applications in physics. – 2000. – arXiv:math-ph/0011023v1.

[1] Kerner Richard (richard.kerner@upmc.fr), Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée, Tour 13-23, Boite Courrier 121, Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu, 75005 Paris, France.

УДК 51.7

RENORMALIZATION GROUP IN PROJECTIVE SPACE REPRESENTATION

Missarov M.D.[1]

Fermionic model on the hierarchical lattice is defined by the Hamiltonian

$$H(\psi^*;\alpha) = \sum_{i,j\in\Lambda} d_n^{-\alpha}(i,j)[\bar\psi_1(i)\psi_1(j) + \bar\psi_2(i)\psi_2(j)] +$$

$$+ \sum_{i\in\Lambda}[r(\bar\psi_1(i)\psi_1(i) + \bar\psi_2(i)\psi_2(i)) + g\bar\psi_1(i)\psi_1(i)\bar\psi_2(i)\psi_2(i)],$$

where $d_n(i,j)$ denote hierarchical distance on the hierarchical lattice Λ with elementary cell size $n = p^d$, p is any prime number, d is formal dimension of the lattice, α is model parameter, r and g are real-valued coupling constants, all components of the fermionic field are generators of a Grassmann algebra [1, 2].

We investigate an action of block-spin renormalization group (RG) transformation in the space of non-normalized Grassmann-valued "densities" of single spin "distribution" $f(\psi^*;c_0,c_1,c_2) = c_0 + c_1(\bar\psi_1\psi_1 + \bar\psi_2\psi_2) + c_2\bar\psi_1\psi_1\bar\psi_2\psi_2$. Particularly, if $c_0 \neq 0$, we can write the density f in the exponential form $f(\psi^*;c_0,c_1,c_2) = c_0\exp\{-L(\psi^*;r(c),g(c))\}$, where

$$c = (c_0,c_1,c_2),$$

$$r(c) = -c_1/c_0,\ \ g(c) = (c_1^2 - c_0c_2)/c_0^2,$$

$$L(\psi^*(x);r,g) = r\left(\bar\psi_1(x)\psi_1(x) + \bar\psi_2(x)\psi_2(x)\right) + g\bar\psi_1(x)\psi_1(x)\bar\psi_2(x)\psi_2(x).$$

If $c_0 = 0$, as, for example, in the case of Grassmann δ-function $\delta(\psi^*) = \bar\psi_1\psi_1\bar\psi_2\psi_2$, the exponential representation is impossible. We call c-coordinates by projective coordinates, because points (c_0,c_1,c_2) and $a(c_0,c_1,c_2)$, $a \neq 0$ define the same model. The RG-transformation $R(\alpha)$ in projective space representation has the following form: $R(\alpha)c = c'$, where

$$c_0' = n^2(c_2 - 2c_1 + c_0)^{n-2}\left[(c_1 - c_0)^2 + \frac{1}{n}(c_0c_2 - c_1^2)\right],$$

$$c_1' = \lambda_1 n^2(c_2 - 2c_1 + c_0)^{n-2}\left[(c_1 - c_0)(c_2 - c_1) + \frac{1}{n}(c_0c_2 - c_1^2)\right],$$

$$c_2' = \lambda_1^2 n^2(c_2 - 2c_1 + c_0)^{n-2}\left[(c_2 - c_1)^2 + \frac{1}{n}(c_0c_2 - c_1^2)\right],$$

$\lambda_1 = p^{\alpha-d}$. If $c_2 - 2c_1 + c_0 \neq 0$, we can omit this factor. Projective space representation give us global picture of RG-dynamics and more natural definition of RG-map. For example, RG-transformation in (r,g)-space is well defined, if $g \neq n(r+1)^2$. The critical parabola $g = n(r+1)^2$ in c-space is described as a set of $c = (c_0,c_1,c_2)$, such that $c_0' = (c_1 - c_0)^2 + (c_0c_2 - c_1^2)/n = 0$. But RG-transformation in c-space is well defined in this case also. The mapping $R(\alpha)$ is correctly defined as the mapping from two-dimensional

[1]Missarov Mukadas Dmuhtasibovich (Moukadas.Missarov@ksu.ru), Kazan Federal University, 420008, Russia, Kazan, ul. Kremlevskaya, 18.

projective space to itself everywhere except the point $(1,1,1)$ because $R(\alpha)(1,1,1) = (0,0,0)$. In the (r,g) plane this is the point $(-1,0)$, and we call this point the singular point of the RG mapping. RG-map in (r,g)-space have three finite fixed points, if $\alpha \neq d$ and one infinitely far fixed point, which in c-space is described by the vector $(0,0,1)$, determining the Grassmann $\delta(\psi^*)$-function density.

We realize 2-dimensional projective c–space (c_0,c_1,c_2) as a unit disk $D = \{(c_1,c_2) : c_1^2 + c_2^2 \leq 1\}$, where the opposite points of the boundary circle $S = \{(c_1,c_2) : c_1^2 + c_2^2 = 1\}$ must be identified. The regular point (r,g) in the plane of coupling constant corresponds to the point $(c_1(r,g), c_2(r,g))$,

$$c_1(r,g) = -\frac{r}{\sqrt{1+r^2+(r^2-g)^2}}, \qquad c_2(r,g) = -\frac{r^2-g}{\sqrt{1+r^2+(r^2-g)^2}}.$$

The δ-function fixed point in (c_1,c_2)-space is given as $(0,1)$. The line $\{(r,g) : g = 0\}$ in (c_1,c_2)-space is described as a curve $\{(c_1(r,0), c_2(r,0)) : r \in R\}$ which can be considered as closed curve because $(c_1(r,0), c_2(r,0)) \to (0,1)$, when $r \to \pm\infty$. The lower half-plane, $\{(r,g) : g < 0\}$ in (c_1,c_2)-space in given as a domain D_1, bounded by above mentioned curve. We investigate RG-dynamics in the domain $D \setminus D_1$ which corresponds to the upper half-plane in (r,g)-space.We suppose in the following that $\alpha > d$.

Let $g(r;a) = (r-a)(r-b_0)^{-1}(r+1)^2, b_0 = (1-p^{-d})(1-p^{-\alpha})^{-1}$. We denote by $\gamma_\pm(a)$ the following curves in (c_1,c_2)-space:

$$\gamma_+(a) = \{c_1(r,g(r;a)), c_2(r,g(r;a)) : r \geq a\}\,,\ \gamma_-(a) = \{c_1(r,g(r;a)), c_2(r,g(r;a)) : r \leq a\}\,.$$

Let us denote limiting point of $\gamma_+(a)$ when $r \to +\infty$ as $\left(c_1^+(a), c_2^+(a)\right)$ and limiting point of $\gamma_-(a)$ when $r \to -\infty$ as $\left(c_1^-(a), c_2^-(a)\right)$. Both limiting points lie on the boundary circle S. Let $\rho_{1,+}(a)$ and $\rho_{1,-}(a)$ denote the shortest part of the S between points $\left(c_1^+(a), c_2^+(a)\right)$ and $(0,1)$ and $\left(c_1^-(a), c_2^-(a)\right)$ and $(0,1)$ correspondingly. Finally, let $\rho_{2,+}(a)$ denote the curve $\{(c_1(r,0), c_2(r,0)) : r \geq a\}$ and $\rho_{2,-}(a)$ denote the curve $\{(c_1(r,0), c_2(r,0)) : r \leq a\}$. We consider curvilinear triangles $T_+(a)$ and $T_-(a)$ enclosed by curves $\gamma_+(a)$, $\rho_{1,+}(a)$, $\rho_{2,+}(a)$ and $\gamma_-(a)$, $\rho_{1,-}(a)$, $\rho_{2,-}(a)$ correspondingly.

Theorem 1. *Domains $T_+(a)$ for $a \geq 4$ and $T_-(a)$ for $a \leq -5$ are RG–invariant. Any point of $T_+(a)$, $a \geq 4$ and any point of $T_-(a)$, $a \leq -5$ tends to the $(0,1)$ under RG–iterations.*

Computer experiments show that almost all points of $D \setminus D_1$ (except fixed points and invariant curves) find themselves in $T_+(4)$ or $T_-(5)$ under finite number of RG–iterations.

References

[1] Missarov M.D. RG-invariant curves in the fermionic hierarchical model // Teor. Mat. Fiz. – 1998. – V. 114. – No. 3. – P. 323–336.

[2] Missarov M.D. Renormalization group solution of fermionic Dyson model// Asymptotic Combinatorics with Application to Mathem. Physics, V.A.Malyshev and A.M.Vershik (eds.). – 2002. – Kluwer Academic Publishers. – P. 151–166.

УДК 517.5

AN EQUIVALENCE TO PARSEVAL FRAMES

Ryabtsov I.S.[1]

There have been presented several types of frame equivalence [1–3]. A new approach to the definition of frame equivalence, which is based on the length transformation of frame vectors with "angles" being constant.

Definition. Two frames $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ and $G = \{g_i\}_{i=1}^M$ in $\mathbb{R}^N$ *are equivalent*, if there exists such a set $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ of nonzero constants that for any $i = \overline{1, M}$ there holds $f_i = \alpha_i g_i$.

The above given equivalence splits the whole set of frames into disjoint classes.

Let's choose a frame $\text{norm}(\mathbb{F}) = \{n_i\}_{i=1}^M$, called *normalized element* for the given class $\mathbb{F}$, which identifies this class uniquely. This frame is defined by the following conditions

$$\|n_i\| = 1, \quad i = \overline{1, M}.$$

For any class $\mathbb{F}$ there exists one and only one frame $\text{norm}(\mathbb{F})$. If we know any frame $F \in \mathbb{F}$ from the class, than we can always find a normalized element.

All the classes of frames are divided in two types: the first containing Parseval frames and those which do not. Let's agree that class $\mathbb{F}$ contains Parseval frames, if there exists a set of nonzero constants $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ such that the system of vectors $\{\alpha_i n_i\}_{i=1}^M$ is Parseval frame. In other cases we can say that the class does not contain Parseval frames.

The main result of the work is connected with the possibility to check the existence of Parseval frames for "almost" all classes.

Theorem. For any class of frames $\mathbb{F}$, taken arbitrarily from the set of all classes but some zero-set, one can we can establish the presence of Parseval frames in the class by means of special algorithm .

Usage of LDL^T decomposition from [4, 5] give us an opportunity to use the algorithm quite effectively and helps to reduce the necessary computations to a minimum.

References

[1] Roderick B. Holmes, Vern I. Paulsen. Optimal frames for erasures, Department of Mathematics. – University of Houston. – Houston. – TX. – 77204-3476. – USA.

[2] Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. – Birkhäuser. – Boston, 2002.

[3] Casazza P.G., Tremain J.C. A brief introduction to hilbert space frame theory and its applications. – Department of Mathematics. – University of Missouri. – Columbia. – MO 65211-4100.

[4] Demmel. J.W. Applied Numerical Linear Algebra. – Philadelphia, 1997.

[5] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in C The Art of Scientific Computing. Second Edition. – Cambridge University Press.

[1] Ryabtsov Igor Sergeevich (tinnulion@mail.ru), Samara State University, 443011, Russia, Samara, Academica Pavlova Str., 1.

УДК 530.145

DYNAMICS OF NONEQUILIBRIUM THERMAL ENTANGLEMENT FOR THREE-QUBIT SYSTEM

Sinayskiy I.E., Pumulo N., Petruccione F.[1]

In describing real physical systems one should always take into account the influence of the surroundings. The study of open systems is particularly important for understanding processes in quantum physics [1]. Here we consider a chain of three qubits. The first and the last qubit are coupled to separate bosonic baths at different temperatures. The total Hamiltonian of the system is given by:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_{B1} + \hat{H}_{B3} + \hat{H}_{SB1} + \hat{H}_{SB3}, \tag{1}$$

where $\hat{H}_S$ is the Hamiltonian of the qubit subsystem,

$$\hat{H}_S = \sum_{i=1}^{3} \frac{\epsilon_i}{2} \hat{\sigma}_i^z + K \sum_{i=1}^{2} \left(\hat{\sigma}^+{}_i \hat{\sigma}^-{}_{i+1} + \hat{\sigma}^-{}_i \hat{\sigma}^+{}_{i+1} \right). \tag{2}$$

The Hamiltonians of the reservoirs for the first qubit ($j = 1$) and the last qubit ($j = 3$) are given by sum of harmonic oscillators. The interaction between the qubit subsystem and the bosonic baths is described by

$$\hat{H}_{SBj} = \hat{\sigma}_j^+ \sum_n g_n^{(j)} \hat{b}_{n,j} + \hat{\sigma}_j^- \sum_n g_n^{(j)*} \hat{b}_{n,j}^\dagger. \tag{3}$$

Of course, $\hat{\sigma}_j^\pm, \hat{\sigma}_j^z$ are the well-known Pauli matrices and $\hat{b}_{n,j}^\dagger$ and $\hat{b}_{n,j}$ denote bosonic creation and annihilation operators. In Born-Markov approximation the equation for the evolution of the reduced density matrix $\hat{\rho}$ of the qubit subsystem is:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}_S, \hat{\rho}] + \mathcal{L}_1(\hat{\rho}) + \mathcal{L}_N(\hat{\rho}) \tag{4}$$

with dissipators

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j(\hat{\rho}) \equiv \sum_{\mu,\nu} J_{\mu,\nu}^{(j)}(\omega_{j,\nu}) \{ [\hat{V}_{j,\mu}, [\hat{V}_{j,\nu}^\dagger, \hat{\rho}]] - \\ -(1 - e^{\beta_j \omega_{j,\nu}}) [\hat{V}_{j,\mu}, \hat{V}_{j,\nu}^\dagger \hat{\rho}] \}. \end{aligned} \tag{5}$$

We derive analytical expressions for the reduced density matrix of the qubit subsystem. With the help of the obtained analytical solutions we study the dynamics of entanglement. Special attention is given to the entanglement in the stationary state of the system. We perform a comparison of the steady state concurrence with two-qubit case studied earlier [2] and show that for certain range of the parameters the concurrence for the three qubit case is greater than in the two-qubit one.

References

[1] Breuer H.-P., Petruccione F. The Theory of Open Quantum Systems. – Oxford University Press, 2002.

[2] Sinaysky I., Petruccione F., Burgarth D., Phys. Rev. – 2008. – **A78**. – 062301.

[1] Ilya Evgenievich Sinayskiy (sinayskiy@ukzn.ac.za), Nathan Pumulo (nate95@gmail.com), Francesco Petruccione (petruccione@ukzn.ac.za), Quantum Research Group, School of Physics and National Institute for Theoretical Physics, University of KwaZulu-Natal, Durban, 4001, South Africa.

Научное издание

Материалы второй международной конференции

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

(Самара, 29 августа – 4 сентября 2010 г.)

Под редакцией чл.-корр. РАН И.В. Воловича
и д.ф.-м.н., проф. Ю.Н. Радаева

Компьютерная верстка, макет С.А. Пантелеев

Подписано в печать 16.07.2010. Формат 70×108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл.-печ. л. 32,03; уч.-изд. л. 22,87. Typeset by LaTeX2e. Тираж 250 экз. Заказ №330.
Издательство "Книга". 443070, г. Самара, ул. Песчаная, 1, офис 403, тел. 8 (846) 267-36-83.
Отпечатано в ООО "Типография "Книга", 443070, г. Самара, ул. Песчаная, 1, офис 403,
тел. 8 (846) 267-36-83, E-mail: slovo@samaramail.ru