

Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Кемеровский государственный университет
Кемеровский научный центр СО РАН
Институт вычислительных технологий СО РАН
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2012)

Материалы XI Всероссийской
научно-практической конференции
с международным участием
23–24 ноября 2012 года

Часть 1

Кемерово
ООО «Практика»
2012

УДК 519
ББК 22.17
И74

Редколлегия:

Р. Т. Якупов, доктор физ.-мат. наук, профессор;
А. А. Назаров, доктор техн. наук, профессор;
И. Р. Гарайшина, кандидат физ.-мат. наук, доцент

И74 **Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2012)** [Текст] : материалы XI Всерос. науч.-практ. конф. с международ. участием (г. Анжеро-Судженск, 23–24 нояб. 2012 г.) / редкол. : Р. Т. Якупов, А. А. Назаров, И. Р. Гарайшина ; сост. М. С. Лобова. – Кемерово : Практика, 2012. – Ч. 1. – 157 с. ; 300 с. – ISBN 878-5-86388-037-7.

В сборник вошли материалы докладов, представленных на XI Всероссийской научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование», по направлениям: математические методы в науке и технике и экономико-математическое моделирование.

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519
ББК 22.17

*Конференция проводится при поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований (проект № 12-07-06083-г).*

ISBN 878-5-86388-037-7

© Филиал Кемеровского государственного
университета в г. Анжеро-Судженск, 2012

Раздел 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ОПЫТОВОГО ГЕНЕРАТОРА ОДИНОЧНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

К. Е. Афанасьев, С. В. Стуколов

Кемеровский государственный университет

В Кемеровском государственном университете на протяжении многих лет под руководством профессора К. Е. Афанасьева ведется разработка численных методов решения задач динамики жидкости со свободными границами. Для исследования взаимодействия уединенных волн с береговыми сооружениями и препятствиями применяется технология методов граничных элементов [1]. Также начаты работы по исследованию и развитию условно-бессеточных и бессеточных методов для решения задач динамики несжимаемой жидкости со свободными границами, в которых происходят существенные деформации расчетной области, сопровождаемые разрывами основных характеристик течения. Среди условно-бессеточных методов можно отметить метод естественных соседей [2], среди полностью бессеточных – Smooth Particle Hydrodynamics (SPH, [3]). В лаборатории морских и гидротехнических сооружений (филиал ОАО «26-й ЦНИИ», Санкт-Петербург) на протяжении более 30 лет экспериментальными и теоретическими методами исследуется трансформация волн на акваториях бухт, воздействие их на гидротехнические и береговые сооружения. Создана научная школа под руководством профессора Ю. З. Алешкова, представителями которой являются петербургские авторы статей [4–6].

Цель данной работы заключается в создании численной модели работы опытового волнопродуктора и в сопоставлении результатов физического и численного моделирования трансформации одиночных волн на пологом откосе [7–8].

В лабораторных условиях одиночная волна генерировалась вакуумным волнопродуктором в гидроволновом лотке, имеющем длину 40 м, ширину 1 м и высоту стенок 1,2 м. Высота одиночной волны варьировалась в диапазоне от 7 до 20 см при уровне невозмущенной жидкости, равном 55 см. Заложение откоса α составляло 1:50 (рис. 1).

Ввиду того что генерируемая волна имеет большую длину, можно пренебречь влиянием вязкости и рассматривать задачи в постановке, основанной на модели идеальной несжимаемой жидкости.

Численное моделирование на первом этапе выполнялось методом граничных элементов в потенциальной постановке. Начальные данные, задающие уединенную волну, взяты из работы [2].

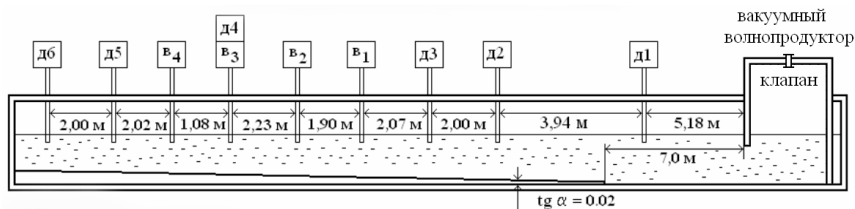


Рис. 1. Геометрия размещения волномеров ($V_1 - V_4$) и датчиков давления (Д1–Д6)

Для сравнения измеряемых характеристик, полученных экспериментально и численно, экспериментальные данные приводились к безразмерному виду. В качестве характерных размерных величин взяты глубина лотка и ускорение свободного падения.

На рис. 2а приведено сравнение высот распространяющихся по откосу волн для безразмерной амплитуды начальной волны $A = 0,2$. Расхождение численных и экспериментальных результатов можно объяснить различными начальными данными: в численных расчетах начальные данные соответствуют уединенной волне, полученной из решения соответствующей стационарной задачи, а в экспериментах вид волновой поверхности имеет вид солитона с пучком движущихся за ним волн меньшей амплитуды, что объясняется способом генерации. Поэтому при численных расчетах возникла необходимость моделирования работы вакуумного волнопродуктора.

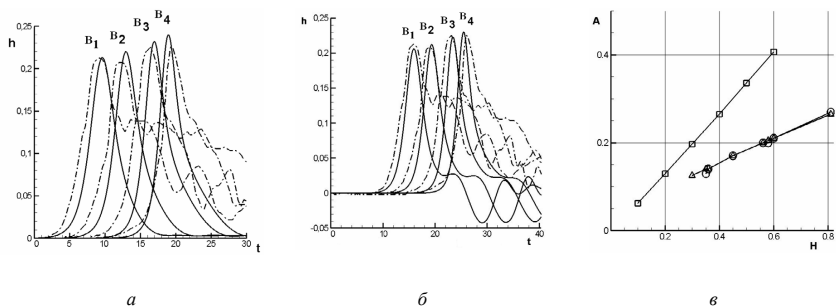


Рис. 2. Моделирование работы волнопродуктора

а, б – зависимость возвышения свободной поверхности от времени:

а – случай использования начальных расчетных данных в виде уединенной волны, б – моделирование работы волнопродуктора без учета разрежения воздуха внутри него. Штрихпунктирная линия – данные эксперимента, сплошная – численные результаты. Номер кривой соответствует номеру датчика;

в – сравнение зависимости амплитуды A создаваемой волны

от высоты H набора жидкости в волнопродуктор: $\circ$ – экспериментальные данные, $\square$ – данные, полученные без учета втекания воздуха через заслонку, Δ – данные, полученные с учетом втекания воздуха через заслонку волнопродуктора

На рис. 3а приведена схема работы волнопродуктора: насосом откачивается воздух до достижения требуемой высоты жидкости в колоколе, затем открывается заслонка и воздух проникает в колокол, а жидкость из колокола под действием силы тяжести истекает в лоток, создавая длинную волну.

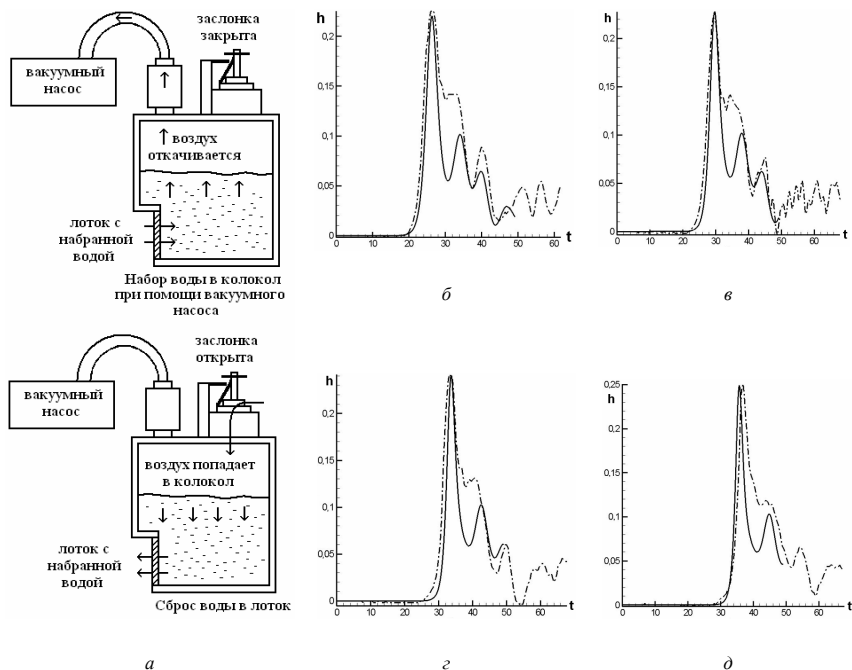


Рис. 3: а – схема работы вакуумного волнопродуктора, б–д – графики изменения возвышения свободной поверхности с учетом втекания воздуха через заслонку. Штрих-пунктирная линия – данные эксперимента, сплошная – численные результаты. Номер рисунка соответствует номеру датчика

На первом этапе моделирования выполнены расчеты без учета втекания воздуха через заслонку волнопродуктора. Давление на свободные поверхности в лотке и в колоколе принималось атмосферным. Истечение жидкости из колокола происходило под действием силы тяжести и без изменения давления воздуха внутри колокола. На рис. 2в приведено сравнение экспериментальных и расчетных амплитуд генерируемых волн в зависимости от высоты набора воды в колокол. Из рисунка видно, что расчетные значения высот волн больше экспериментальных при одинаковых высотах набора воды в колокол. На рис. 2б приведено сравнение высот волн

в местах размещения волномеров при амплитуде исходной волны $A = 0,2$. Хвостовой профиль расчетной волны не совпадает с экспериментальным.

Анализ проведенных расчетов показал, что давление в колоколе продолжительное время ниже атмосферного, поэтому для адекватного моделирования работы волнопродуктора требуется учитывать втекание воздуха в колокол через заслонку.

Алгоритм расчета, моделирующий работу вакуумного волнопродуктора, можно представить в следующем виде:

1) Задается высота набора воды в волнопродукторе, определяется давление из интеграла Бернулли через заданный перепад уровней воды в лотке и колоколе. Данное давление необходимо создавать в волнопродукторе для удержания воды на заданном уровне. Зная давление, из уравнения состояния можем определить плотность (масса) воздуха в колоколе волнопродуктора.

2) Определяется скорость втекания воздуха через клапан на основе уравнения Бернулли для сжимаемого газа и значений давления внутри волнопродуктора и вне него.

3) Определяется масса проникающего в волнопродуктор воздуха за расчетный шаг по времени через известные значения площади отверстия клапана, скорости втекания и плотности атмосферного воздуха.

4) Внутри волнопродуктора переопределяется плотность воздуха.

5) Из уравнения состояния баротропного газа определяется его давление внутри волнопродуктора.

6) Находится значение безразмерного давления, которое подставляется в условие на свободной границе жидкости в волнопродукторе. Выполняется шаг по времени в методе граничных элементов (определяются положение свободной границы и распределение функций, описывающих течение).

7) Определяется объем воздуха в волнопродукторе на новом шаге по времени, корректируются значения давления и плотности.

8) Переход к пункту 2.

На рис. 2в приведено сравнение амплитуд волн, генерируемых экспериментальным и расчетным путем, в зависимости от высоты набора воды в колокол. Удовлетворительного совпадения удалось добиться подбором площади отверстия клапана.

На рис. 3б–д приведено сравнение профилей свободной поверхности в местах установки волномеров при амплитуде исходной волны $A = 0,2$.

По результатам сопоставления можно сделать вывод о работоспособности предложенного алгоритма моделирования работы вакуумного волнопродуктора. Незначительные отличия возмущений за фронтом волны можно объяснить тем, что задача рассматривается в потенциальной постановке, при которой не могут исследоваться вихревые течения. Стенка, разделяющая волнопродуктор и лоток с набранной водой, имеет острую

кромку. Поэтому в процессе генерации волны может возникать вихревое течение, которое также оказывает воздействие на профиль генерируемой волны. Дальнейшие исследования предполагается проводить с использованием разработанного алгоритма моделирования работы вакуумного волнопродуктора и бессеточных или условно-бессеточных методов, позволяющих провести моделирование с учетом вихреобразования.

Библиографические ссылки

1. Afanasiev K. E., Stukolov S. V. Simulation of problems with free surfaces by a boundary element method // Springer: Computational Science and High Performance Computing. Series: Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design (NNFM). – 2005. – Vol. 88. – P. 307–338.
2. Афанасьев К. Е., Рейн Т. С. Моделирование задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами бессеточным методом естественных соседей // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13. – №4. – С. 7–24.
3. Afanasiev K. E., Makarchuk R. S., Popov A. Yu. Comparative Analysis of the SPH and ISPH Methods // Notes on numerical fluid mechanics and multidisciplinary. Computational Science and Performance Computing III. Springer, 2007. – Vol. 101. – P. 206–223.
4. Манойлин С. В., Максимов В. В., Федоров А. С. Трансформация нелинейных длинных волн на шельфе // Исследования по цунами. – М.: Изд-во АН СССР, 1988. – С. 81–85.
5. Нуднер И. С., Максимов В. В. Воздействие волн цунами на морские гидротехнические сооружения // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. – 2008. – № 2. – С. 45–56.
6. Максимов В. В., Манойлин С. В., Нуднер И. С. Взаимодействие длинной одиночной волны с морскими гидротехническими сооружениями (экспериментальный подход) // Вычислительные технологии: Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. «Математика, механика, информатика». – Алматы; Новосибирск, 2008. – Т. 13. – № 3 (58). – Ч. II. – С. 361–364.
7. Афанасьев К. Е., Камынин Е. Ю., Карабцев С. Н., Максимов В. В., Нуднер И. С., Семенов К. К., Стуколов С. В. Численное и экспериментальное исследование процессов обрушения и последующего распространения нелинейных удаленных волн в прибрежной зоне // Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики: труды X Всерос. конф. – СПб.: Наука. – 2010. – С. 304–307.
8. Афанасьев К. Е., Максимов В. В., Нуднер И. С., Семенов К. К., Стуколов С. В. Численное моделирование работы опытового волнопродуктора одиночных волн // Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики: труды XI Всерос. конф. – СПб.: Наука. – 2012. – С. 201–203.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕАКЦИЙ ПРОЦЕССА ДЕПАРАФИНИЗАЦИИ

Н. С. Белинская, Е. В. Францина

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Приоритетными направлениями развития российского топливно-энергетического комплекса является модернизация сырьевых и перераба-

тывающих производств, увеличение глубины переработки сырья, снижение энергоемкости производства и повышение его экологичности.

Одним из путей глубокой переработки нефти выступает производство малосернистых дизельных топлив с низкой температурой застывания путем переработки тяжелых продуктов нефтяной промышленности – бензина висбрекинга и атмосферного газойля. Процесс депарафинизации используется для производства экологически чистого летнего и зимнего дизельного топлива со сверхнизким содержанием серы и полиароматических углеводородов, соответствующего требованиям европейских стандартов к дизельному топливу. Продукты, получаемые на установке гидродепарафинизации, отличаются низким содержанием серы, улучшенными низкотемпературными свойствами. Учитывая особые требования северных регионов России к низкотемпературным характеристикам моторных топлив, следует признать, что задача производства низкозастывающих дизельных топлив, удовлетворяющих современным и перспективным экологическим требованиям, особенно актуальна. Несмотря на широкий выбор и разнообразие методов по улучшению низкотемпературных свойств дизельных топлив, данная проблема остается не решенной не только в России, но и за рубежом [1].

Однако с использованием метода математического моделирования возможны как создание компьютерной моделирующей системы процесса депарафинизации, так и оптимизация последнего.

Целью данной работы выступает математическое моделирование процесса производства дизельных топлив.

Ключевым этапом моделирования является подробный термодинамический анализ химического процесса. Он помогает выяснить необходимые условия получения целевого продукта, а также позволяет установить границы и вероятность протекания тех или иных реакций. Но для такого анализа необходима достаточно полная информация о термодинамических свойствах реагирующих веществ.

Таким образом, для достижения поставленной цели на текущем этапе исследований необходимо решить следующие задачи: провести термодинамический анализ реакций процесса депарафинизации; на его основе составить схему превращений углеводородов в химическом процессе; создать кинетическую модель. Названные этапы моделирования будут рассмотрены ниже.

Сегодня для предсказания молекулярных свойств химических систем, таких как энергия, структура, спектральные характеристики, термодинамические параметры, параметры ядерного магнитного резонанса и т. д., широко используются методы молекулярно-механического и квантово-химического (полуэмпирического и неэмпирического) моделирования.

Они не имеют жесткой привязки к узким классам органических соединений и способны учесть множество эффектов, таких как колебательные и вращательные движения атомов, конфигурация электронных орбиталей, эффекты сопряжения двойных связей и др. Данные методы позволяют на основе расчетов электронной структуры молекул, путем решения уравнения Шредингера, предсказать различные молекулярные свойства химических систем: энергию, структуру, спектральные характеристики, термодинамические параметры и др.

На основании имеющихся теоретических представлений о химизме и механизме процесса гидродепарафинизации смеси бензина висбрекинга и атмосферного газойля, а также анализа технологических потоков на установке был составлен полный список возможных реакций данного процесса: гидрирование олефинов в парафины, гидрокрекинг парафинов $C_{12} - C_{27}$, гидрокрекинг наftenов, изомеризация парафинов $C_{12} - C_{27}$, циклизация изопарафинов, гидрирование моноароматических углеводородов, гидрирование диароматических углеводородов, образование коксогенных структур (КГС).

Для оценки термодинамических свойств углеводородов, участвующих в процессе депарафинизации, были применены квантово-химические методы расчета. Расчеты проводились с использованием программных продуктов Gaussian и GaussView. В качестве метода расчета выбран метод DFT – Density Functional Theory. Теоретическим приближением являлась модель B3LYP, теория функционала плотности Беке (B3), использующая электронную корреляцию Ли Янга и Пера (LYP). Базис 3-21G.

Главное преимущество выбранного метода заключается в том, что модели DFT учитывают эффект электронной корреляции, т. е. тот факт, что электроны в молекуле отталкиваются друг от друга в результате взаимодействия. Приближение Хартри-Фока также, в какой-то степени, учитывает эти корреляции: каждый электрон «видит» другой, они взаимодействуют с некой средней электронной плотностью, тогда как методы, включающие электронные корреляции, вычисляют мгновенное взаимодействие пар электронов с противоположными спинами. Это приближение приводит к тому, что расчеты по Хартри-Фоку оказываются менее точными для определенных типов молекулярных систем. Таким образом, методы DFT имеют преимущества перед более дорогими методами *ab initio* [2].

Вероятность протекания реакций при заданных условиях процесса (температура 345–405°C и давление 8,19–8,61 МПа) была оценена по значению изобарно-изотермического потенциала ΔG .

По результатам проведенного термодинамического анализа химических превращений в ходе процесса гидродепарафинизации была составлена формализованная схема превращений.

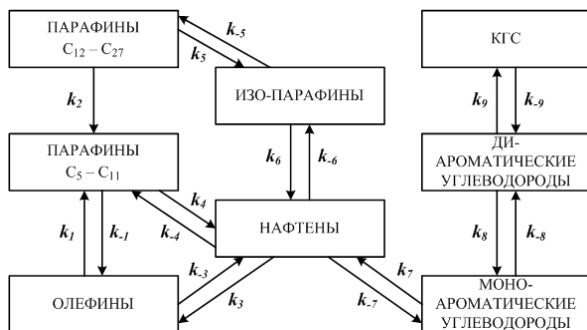


Рис. 1. Схема превращений в процессе гидродепарафинизации

На основе составленной схемы превращений была разработана кинетическая модель:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dC_{\text{олефины}}}{d\tau} &= -W_1 + W_{-1} + W_3 - W_{-3}, \\ \frac{dC_{\text{парафины } C_5-C_{11}}}{d\tau} &= W_1 - W_{-1} + W_2 - W_{-4} + W_{-4}, \\ \frac{dC_{\text{парафины } C_{12}-C_{27}}}{d\tau} &= -W_2 - W_5 + W_{-5}, \\ \frac{dC_{\text{изо-парафины}}}{d\tau} &= W_5 - W_{-5} - W_6 + W_{-6}, \\ \frac{dC_{\text{нафтенy}}}{d\tau} &= -W_3 + W_{-3} + W_4 - W_{-4} + W_6 - W_{-6} + W_7 - W_{-7}, \\ \frac{dC_{\text{моно-аром}}}{d\tau} &= -W_7 + W_{-7} + W_8 - W_{-8}, \\ \frac{dC_{\text{ди-аром}}}{d\tau} &= -W_8 + W_{-8} - W_9 + W_{-9}, \\ \frac{dC_{\text{КТС}}}{d\tau} &= W_9 - W_{-9}, \\ \frac{dC_{\text{водород}}}{d\tau} &= -W_1 + W_{-1} - W_2 - W_3 + W_{-3} - W_4 + W_{-4} - W_6 - W_{-6} - \\ &\quad - W_7 + W_{-7} - W_8 - W_9 + W_{-9}. \end{aligned} \right.$$

Скорости реакций, входящих в схему превращений углеводородов в ходе процесса депарафинизации, были записаны согласно закону действующих масс (табл.).

Выражения скоростей реакций процесса депарафинизации

Тип реакции	Выражение для скорости реакции	
	Прямая реакция	Обратная реакция
Гидрирование олефинов в парафины	$W_1 = k_1 C_{\text{олефины}} \times C_{\text{водород}}$	$W_{-1} = k_{-1} C_{\text{парафины } C5-C11}$
Гидрокрекинг парафинов $C_{12} - C_{27}$	$W_2 = k_2 C_{\text{парафины } C11-C27} \times C_{\text{водород}}$	—
Гидрокрекинг нафтенов с образованием олефинов	$W_3 = k_3 C_{\text{нафтенны}} \times C_{\text{водород}}$	$W_{-3} = k_{-3} C_{\text{олефины}} \times C_{\text{парафины } C5-C11}$
Гидрокрекинг нафтенов с образованием парафинов $C_{12} - C_{27}$	$W_4 = k_4 C_{\text{нафтенны}} \times C_{\text{водород}}$	$W_{-4} = k_{-4} C_{\text{олефины}} \times C_{\text{парафины } C5-C11}$
Изомеризация парафинов $C_{12} - C_{27}$	$W_5 = k_5 C_{\text{парафины } C12-C27}$	$W_{-5} = k_{-5} C_{\text{изо-парафины}}$
Циклизация изопарафинов в нафтенны	$W_6 = k_6 C_{\text{изо-парафины}}$	$W_{-6} = k_{-6} C_{\text{нафтенны}} \times C_{\text{водород}}$
Гидрирование моно-ароматических углеводородов	$W_7 = k_7 C_{\text{моно-аром.}} \times C_{\text{водород}}$	$W_{-7} = k_{-7} C_{\text{нафтенны}}$
Гидрирование диароматических углеводородов	$W_8 = k_8 C_{\text{ди-аром.}} \times C_{\text{водород}}$	$W_{-8} = k_{-8} C_{\text{моно-аром.}}$
Образование коксогенных структур (КГС)	$W_9 = k_9 C_{\text{ди-аром.}} \times C_{\text{водород}}$	$W_{-9} = k_{-9} C_{\text{КГС}}$

Компьютерная реализация кинетической модели осуществлена с применением языка программирования Pascal.

Составление схемы превращений и разработка на ее основе кинетической модели процесса является важнейшим этапом в создании математической модели, так как в ходе решения обратной кинетической задачи с применением программно-реализованной кинетической модели определяются кинетические параметры, которые будут заложены в математическую модель, учитывающую физико-химические закономерности протекания процесса, позволяющую проводить прогнозные расчеты работы установки и рекомендовать оптимальные условия процесса с целью повышения ресурсоэффективности производства малосернистых низкозастывающих дизельных топлив.

Библиографические ссылки

1. Павлов И. В., Дружинин О. А., Хавкин В. А. [и др.]. Особенности технологии деструктивных гидрогенизационных процессов в производстве низкозастывающих дизельных топлив // Мир нефтепродуктов. – 2010. – № 6. – С. 17–21.
2. Полещук О. Х., Кижнер Д. М. Химические исследования методами расчета электронной структуры молекул. – Томск: Изд-во ТПУ, 2006. – 146 с.

ПОСТРОЕНИЕ АДАПТИВНОГО ДЕТЕКТОРА МОМЕНТОВ МГНОВЕННОЙ СМЕНЫ СЦЕН В ВИДЕОПОТОКЕ¹

А. Л. Богданов

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Последние достижения в области сжатия потокового видео и рост пропускной способности каналов сети Internet привели к широкому распространению интернет-сервисов, связанных с той или иной формой обработки видеоданных, как, например, YouTube. Рост объемов накапливаемых массивов видеоданных требует эффективных инструментов их индексации для последующей разработки различных систем контекстного поиска и других сервисов. Разбиение видеопотока на сцены является одной из первых процедур его обработки. В дальнейшем к извлеченным сценам могут применяться различные алгоритмы анализа, кластеризации, распознавания объектов, движения и т. д.

Задача разбиения видеопотока на сцены формулируется следующим образом. Имеется *видеопоток*, представляющий собой упорядоченный во времени набор *кадров*. Требуется найти кадры, являющиеся первыми кадрами сцен.

Существует несколько типов процесса смены сцены. *Резкая*, или *мгновенная*, *смена сцены* (*abrupt*, или *cut*) является результатом последовательного соединения двух различных сцен. *Плавная смена сцены* (*gradual transition*) продолжается несколько кадров, она есть результат применения специальных эффектов, таких как *затемнение* (*fade-in*), *просветление* (*fade-out*), *растворение* (*dissolve*) и т. д.

В данной работе рассматривалась задача обнаружения момента мгновенной смены сцен, которая формулировалась следующим образом: построить *детектор* (*классификатор*), который каждый кадр видеопотока относит к одному из двух классов – 1 (*первый кадр сцены*) или 0 (*внутренний кадр сцены*).

Существует множество подходов к решению такой задачи. С обзором достижений в этой области можно ознакомиться, например, в работе [1]. В основе большинства подходов лежит применение специальных функций, которые принято называть *метриками*, так как они вычисляются на основе близлежащих кадров и характеризуют их различие. Типичный график такой функции изображен на рис. 1. На графике хорошо видны «всплески», в большинстве случаев соответствующие моментам смены сцен. Для обнаружения таких всплесков обычно выбирается некоторое *пороговое значение* T_m , превышение которого интерпретируется как сигнал о смене сцены. Таким образом, задача построения детектора сводится к выбору метрики и порогового значения.

¹ Работа выполнена в ООО «Томсклаб».

Естественно, в работе детектора возможны ошибки: момент смены сцены может детектироваться и тогда, когда его фактически нет (*ложное срабатывание*, или *false positive*); момент смены сцены не детектируется (*пропуск*, или *false negative*).

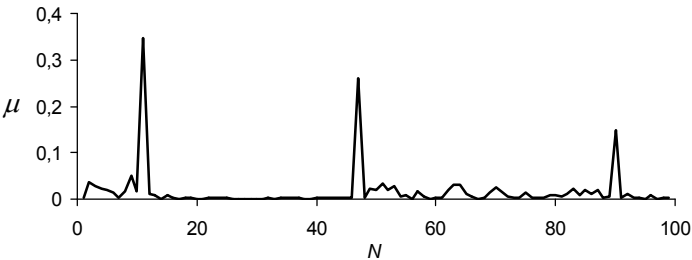


Рис. 1. График различий между текущим и предыдущим кадрами (фрагмент фильма «Троя», N – номера кадра, μ – значение метрики)

Качество работы детектора на некотором видеопотоке можно оценивать по количеству допущенных им ошибок и с помощью относительных показателей, таких как чувствительность $Se = TP / P$ и специфичность $Sp = TN / N$, где TP – количество правильно детектированных кадров первого класса (1), P – общее количество кадров первого класса, TN – количество правильно детектированных кадров второго класса (0), N – общее количество кадров второго класса. Чем ближе значение показателей Se и Sp к единице, тем выше качество работы детектора.

Одним из подходов повышения качества работы детектора, предложенным в работе [2], является разбиение кадров на *блоки* (табл. 1). Суть подхода состоит в следующем. Для каждой пары соответствующих друг другу блоков близлежащих кадров вычисляется значение метрики. Если ее значение превышает пороговое значение, то считается, что блок сигнализирует о наличии смены сцены. Если доля таких блоков превысит некоторое пороговое значение T_b , то принимается решение о наличии момента смены сцены.

Таблица 1

Кадр, разбитый на непересекающиеся блоки

Блок (1, 1)	...	Блок (1, j)	...	Блок (1, n)
...		...		...
Блок (i, 1)	...	Блок (i, j)	...	Блок (i, n)
...		...		...
Блок (m, 1)	...	Блок (m, j)	...	Блок (m, n)

На качество работы детектора влияют выбор метрики, выбор количества блоков, на которые разбивается кадр, выбор пороговых значений T_m и T_b , а также, что немаловажно, характер содержимого видеопотока.

Последнее обстоятельство существенно ограничивает возможности построения полностью автоматизированных систем разбиения видеопотоков на сцены. Устранению этого ограничения посвящена данная работа.

Разработка адаптивного детектора проводилась в два этапа. На первом этапе была собрана *база видеопотоков*, оценено качество работы некоторых популярных метрик, исследовано влияние пороговых значений T_m и T_b на качество работы детектора. В качестве опорной была выдвинута гипотеза, что все видеопотоки можно разделить на четыре класса по двум признакам: *светлый – темный, спокойный – динамичный*. Затем с сайта YouTube был загружен набор из 27 видеопотоков, представляющих собой либо рекламные ролики известных фильмов, либо их фрагменты. При выборе видеопотоков внимание уделялось тому, чтобы все четыре класса были в равной степени представлены в базе. Затем из каждого видеоролика извлекались *фрагменты*, состоящие из 1500 кадров (примерно одна минута) и содержащие только мгновенные смены сцен (кадры с плавными сменами сцен удалялись). Были получены следующие результаты:

1. Увеличение количества блоков с $4 (2 \times 2)$ до $100 (10 \times 10)$ приводит к значительному повышению качества работы детектора, дальнейшее увеличение количества блоков не приводит к сколько-нибудь заметному повышению качества его работы.

2. Хороших результатов можно добиться при совместном использовании метрик $\mu_E = |E_k - E_{k-1}| / 255$ и $\mu_S = |S_k - S_{k-1}| / 255$, где E_k – среднее значение интенсивности пикселей блока кадра с номером k и S_k – их средне-квадратичное отклонение. При этом решающее правило гласит: *если значение хотя бы одной из метрик превысит пороговое значение T_m , то блок сигнализирует о смене сцены*.

3. Оптимальные пороговые значения T_m и T_b лежат в диапазонах $[0,03; 0,07]$ и $[0,2; 0,8]$ соответственно. Кроме того, для каждого фрагмента были построены *области оптимальных* (в смысле минимума суммарного количества ошибок) *пороговых значений T_m и T_b* (рис. 2), а их центральные точки были объявлены *оптимальными пороговыми значениями*.

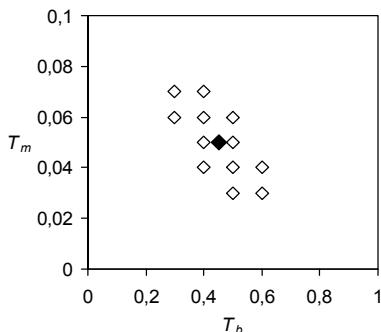


Рис. 2. Область оптимальных пороговых значений T_m и T_b (фрагмент фильма «Матрица»)

Второй этап был посвящен исследованию зависимости между оптимальными пороговыми значениями и собственно построению адаптивного детектора моментов смены сцен. Задача формулировалась следующим образом: для текущего кадра данного фрагмента, используя данные из нескольких близлежащих кадров, необходимо определить пороговые значения T_m и T_b , наиболее близкие к их оптимальным значениям. Использовалось разбиение на 100 (10×10) блоков.

Было обнаружено, что между оптимальными значениями T_m и T_b имеется зависимость, которую можно достаточно хорошо аппроксимировать полиномом третьей степени (рис. 3).

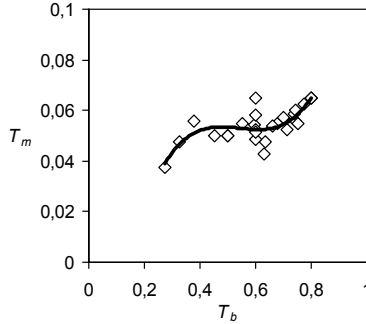


Рис. 3. Зависимость между оптимальными пороговыми значениями T_m и T_b аппроксимируется полиномом $T_m = -0,0823 + 0,772 T_b - 1,449 T_b^2 + 0,8876 T_b^3$

Данный результат позволил свести задачу построения адаптивного детектора к задаче адаптивного выбора одного-единственного порогового значения T_b . Наилучших результатов удалось добиться при следующем способе его вычисления:

$$T_b^{(k)} = \frac{T_1^{(k)} + T_2^{(k)}}{2}, \quad (1)$$

где $T_b^{(k)}$ – это аппроксимируемое пороговое значение T_b для кадра с номером k , величины $T_1^{(k)}$ и $T_2^{(k)}$ вычисляются по следующим формулам:

$$T_1^{(k)} = 1,2813 + 0,1278 \cdot \ln(E_{BW}^{(k)}) + 0,1037 \cdot \ln(D_{FW}^{(k)}), \quad (2)$$

$$T_2^{(k)} = 1,2813 + 0,1278 \cdot \ln(E_{FW}^{(k)}) + 0,1037 \cdot \ln(D_{BW}^{(k)}), \quad (3)$$

где

$$E_{BW}^{(k)} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} E_{k-i}, \quad E_{FW}^{(k)} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} E_{k-1+i}, \quad D_{BW}^{(k)} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} D_{k-i}, \quad D_{FW}^{(k)} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} D_{k-1+i}.$$

Величина E_i , присутствующая в этих формулах, – это среднее значение интенсивности пикселей кадра с номером i , она отвечает за признак «светлый – темный» опорной гипотезы. Величина D_i – это значение специально разработанной метрики, характеризующей степень изменений содержимого i -го кадра по сравнению с предыдущим кадром, т. е. отвечаю-

шей за признак «спокойный – динамичный» опорной гипотезы. Вычисляется она следующим образом:

$$D_i = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{10} \sum_{q=1}^9 h \Delta_{pq}^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^9 \sum_{q=1}^{10} v \Delta_{pq}^{(i)} \right), \quad (4)$$

где

$$h \Delta_{pq}^{(i)} = \frac{1}{512} \left| (E_{p,q}^{(i)} - E_{p,q+1}^{(i)}) - (E_{p,q}^{(i-1)} - E_{p,q+1}^{(i-1)}) \right|,$$

$$v \Delta_{pq}^{(i)} = \frac{1}{512} \left| (E_{p,q}^{(i)} - E_{p+1,q}^{(i)}) - (E_{p,q}^{(i-1)} - E_{p+1,q}^{(i-1)}) \right|,$$

$E_{p,q}^{(i)}$ – это среднее значение интенсивности пикселей (p, q) -го блока в кадре с номером i .

Процесс обучения (идентификации параметров модели) проводился на обучающем подмножестве сцен, составлявшем треть от объема собранной базы видеопотоков. Анализ качества работы построенного детектора проводился на всей базе. Результаты приведены в табл. 2, где в третьей колонке представлены значения показателей гипотетического детектора, который некоторым образом для каждого фрагмента выбирает оптимальные пороговые значения T_m и T_b .

Таблица 2

Результаты сравнительного анализа качества работы адаптивного детектора

Показатель	Адаптивный детектор	Гипотетический детектор
Общее количество кадров	40500	40500
Количество кадров класса 1	1098	1098
Количество кадров класса 0	39402	39402
Количество правильно классифицированных кадров класса 1	1039	1032
Количество ошибочно классифицированных кадров класса 1	59	66
Количество правильно классифицированных кадров класса 0	39354	39337
Количество ошибочно классифицированных кадров класса 0	48	65
Общее количество ошибок	107	131
Чувствительность детектора	0,9463	0,9399
Специфичность детектора	0,9989	0,9984

Библиографические ссылки

1. Koprinska I., Carrato S. Temporal video segmentation: A survey // Signal Processing: Image Communication. – 2001. – № 16. – P. 477–500.

2. Xiong W., Lee J.C.-M., Ip M.C. Net comparison: a fast and effective method for classifying image sequences // Proceedings of SPIE: Conference on Storage and Retrieval for Image and Video Databases III. – San Jose, CA. –1995. – Vol. 2420. –P. 318–328.

РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ В МАЛОУГЛОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

О. Б. Браславская, И. Ю. Гендрина

Томский политехнический университет

Фундаментом теории переноса изображения в рассеивающих средах являются два раздела современной науки: теория линейных систем и теория переноса излучения.

Для описания процесса распространения света в среде необходимо знание таких оптических характеристик, как показатели рассеяния и поглощения, а также индикатрисы рассеяния, которые определяются следующим образом:

κ – коэффициент пропорциональности, который называется *показателем поглощения*;

$\sigma(\beta)$ – коэффициент пропорциональности, называемый *показателем рассеяния в направлении β* ;

$x(\beta) = \sigma(\beta) / \sigma$ – *индикатриса* рассеяния – относительное угловое распределение силы света излучения, рассеянного элементарным объемом.

Распространение света в рассеивающей и поглощающей среде описывается следующим уравнением:

$$\frac{dI(R, n)}{dl} = -\varepsilon I(R, n) + \frac{\sigma}{4\pi} \iint I(R, n') x(n, n') dn' + B(R, n). \quad (1)$$

Предположим, что входным сигналом системы является точечная масса $\delta(x - x_1, y - y_1)$, расположенная в точке (x_1, y_1) . Результирующий выходной сигнал будет функцией x, y и параметров x_1, y_1 :

$$L[\delta(x - x_1, y - y_1)] = h(x, y; x_1, y_1). \quad (2)$$

Это функция называется точечно-импульсной реакцией или функцией рассеяния точки. Другими словами, мы получили отклик системы на точечную массу. Так как произвольная функция $f(x, y)$ может быть представлена как суперпозиция (интеграл) точечных масс, то результирующий выходной сигнал равен

$$g(x, y) = \iint f(\xi, \eta) h(x, y, x_1, y_1) d\xi d\eta. \quad (3)$$

Используя выражение (2), определим реакцию $g(x, y)$ как двумерную свертку входного сигнала $f(x, y)$ с функцией рассеяния точки $h(x, y)$.

$$g(x, y) = \iint f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = f(x, y) ** h(x, y) \quad (4)$$

Предположим, что $f(x, y) = e^{j(ux+vy)}$. Подставляя эту функцию в выражение (4), получаем выражение

$$g(x, y) = \iint h(\xi, \eta) e^{j(u(x-\xi)+v(y-\eta))} d\xi d\eta. \quad (5)$$

Если $H(u, v) = \iint h(\xi, \eta) e^{-j(u\xi+v\eta)} d\xi d\eta$, то

$$g(x, y) = L[e^{j(ux+vy)}] = H(u, v) e^{j(ux+vy)}.$$

Функция $H(u, v)$ является двумерным преобразованием Фурье функции $h(x, y)$. Она называется частотной характеристикой двумерной системы, а именно оптической передаточной функцией.

Постановка задачи. Рассмотрим систему передачи изображения: источник – рассеивающая среда – приемник.

На нижней поверхности среды расположен источник, на верхней границе среды – приемник. Наша система удовлетворяет условиям линейной системы. Рассмотрим плоскопараллельную слоистооднородную среду с мононаправленным источником и приемником. Оси источника и приемника совпадают.

Рассмотрим в качестве оптической модели среды три модели:

4 слоя, индикатриса рассеяния, зависящая от угла, и коэффициент ослабления, зависящий от высоты;

21 слой, индикатриса рассеяния, зависящая от угла и высоты, и коэффициенты поглощения и ослабления;

однородный слой, индикатриса рассеяния, зависящая от угла, и коэффициент ослабления, зависящий от высоты.

Интегральной характеристикой рассеивающей среды является оптическая толщина, определяемая $\tau = \sum \varepsilon(z) dz$.

Метод расчета. Для получения характеристик системы передачи изображения в рамках теории переноса изображения и теории линейных систем воспользуемся решением в МУП.

В любой точке среды интенсивность излучения $I(R, n)$ имеет заметное значение лишь в области углов вблизи направления n_0 источника и быстро убывает с увеличением расстояния $|n - n_0|$. В этом случае приходят к малоугловому уравнению переноса.

Общее решение малоуглового уравнения переноса имеет вид:

$$\Phi(z, p) = \varepsilon(z) - \sigma(z)x(p, z).$$

Частным случаем является оптическая передаточная функция (ОПФ) среды

$$S(v, z) = \exp\left(-\int_0^z (\varepsilon(z - \xi) - \sigma(z - \xi)x(v\xi, z - \xi)) d\xi\right). \quad (6)$$

Если оптические характеристики среды не зависят от глубины, то для ОПФ слоя найдем

$$S(v, z) = \exp(-\varepsilon z + \sigma \int_0^z x(v\xi) d\xi). \quad (7)$$

Фурье-преобразованием ОПФ является функция размытия точки (ФРТ)

$$S(r, z) = 2\pi \int_0^{\infty} S(v, z) J_0(vr) v dv. \quad (8)$$

Перейдем к построению изображения заданного объекта в системе.

Если среды нет, то изображение объекта совпадает с самим объектом. А если есть среда, которая описывается ОПФ или ФРТ, то изображение можно получить двумя способами.

В первом случае изображение можно получить непосредственно по формулам (3), (4) с использованием ФРТ.

Есть другой способ. Иногда удобнее рассматривать объект в частотной области. В этом случае двумерное Фурье-преобразование интеграла свертки (4), как известно, представляет собой произведение следующего вида:

$$G(u, v) = F(u, v) * H(u, v). \quad (9)$$

Если к нему применить обратное преобразование Фурье, то получим изображение в пространственной области.

Частным случаем линейной инвариантной системы является система с круговой симметрией, для которой используют прямое и обратное преобразование Ганкеля в прямой и пространственной частотной области.

Построим изображение объекта, заданного в виде функции обратной пропорциональности: $f = \frac{1}{r}$.

Для заданного объекта формула $g(x, y) = \iint f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$ превращается в новую формулу:

$$g1(r_1) = 2\pi \int_0^R h(r - r_1) dr. \quad (10)$$

Проделав несложные преобразования с формулой (9), получим формулу для нахождения изображения вторым способом:

$$g2(r_1) = \int_0^W F(\omega) J_0(r_1 \omega) d\omega. \quad (11)$$

Результаты расчетов. ОПФ, ФРТ были получены в МУП путем численного интегрирования с помощью формулы левых прямоугольников в среде MatLAB 7.12.0 (R2011a). Результаты приведены на рис. 1–3. Анализ приведенных данных позволяет сделать следующие выводы.

Как видно на рис. 1, 2, для всех трех случаев ОПФ – монотонно убывающая функция, слабо зависящая от длины волны и от заданных коэффициентов ослабления и поглощения.

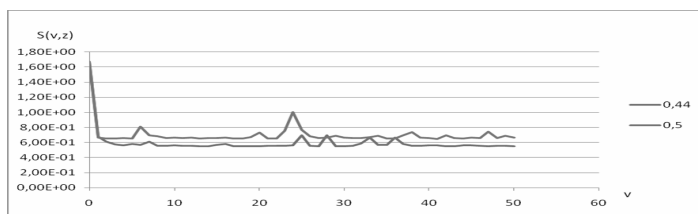


Рис. 1. ОПФ для первой модели атмосферы для длин волн 0,44 и 0,50

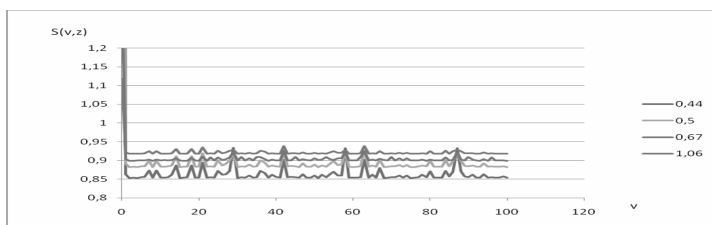


Рис. 2. ОПФ для второй модели для четырех длин волн

Например, ОПФ для первой модели атмосферы имеет примерно одинаковый спад от центрального угла для разных длин волн – 60 %. ОПФ для второй модели при монотонном возрастании длины волны имеет спад 80, 50, 40 и 20 % соответственно. Так как тип модели незначительно влияет на ОПФ и зависимость возникает от τ , то вместо стратосферной модели атмосферы можно рассмотреть однородную модель с соответствующим значением τ .

ФРТ сильно зависит от длины волны. Разница между центральным углом и хвостами функции достигает четырех порядков для первой модели и трех порядков – для второй модели. Соответственно, разница ФРТ между моделями атмосферы составляет один порядок. Следовательно, зависимость ФРТ от длины волны меньше, чем зависимость от типа модели. Чем прозрачней среда, тем ФРТ ближе к δ -функции.

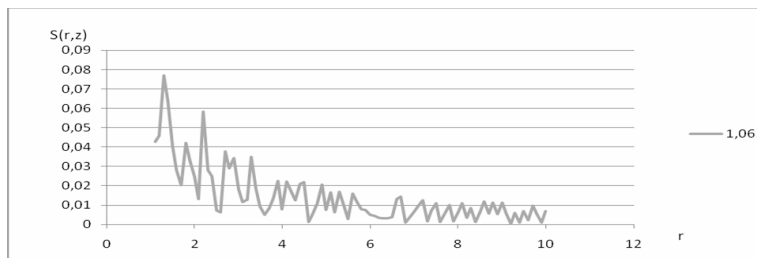


Рис. 3. ФРТ для первой модели для длины волны 1,06

По результатам полученных изображений можно сделать следующие выводы. Из вида графиков следует, что изображения, полученные двумя способами численным интегрированием в среде Matlab, совпадают в пределах погрешности. Для первой модели при длине волны 0,50 и для второй модели при длине волны 1,06 наблюдается самое большое отличие между объектом и его изображением (рис. 4, 5).

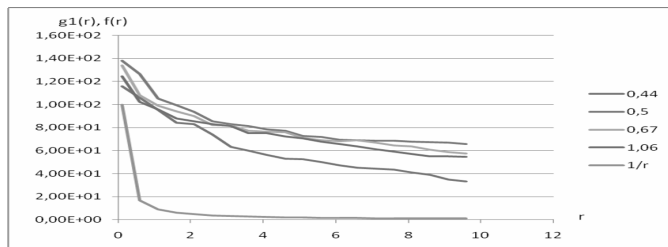


Рис. 4. Объект и полученное изображение для первой модели

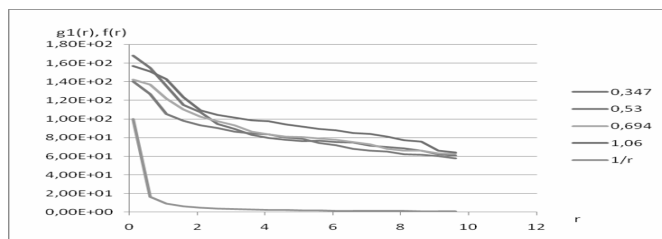


Рис. 5. Объект и полученное изображение для второй модели

В результате работы были решены следующие задачи:

1. Рассчитаны системные характеристики для оптикопередающей системы в МУП. В частности, были получены закономерности.

Отмечено, что МУП позволяет посчитать ОПФ и ФРТ с маленьким шагом. Несмотря на то что МУП обладает небольшой областью применимости, данный метод показывает хорошие результаты в безоблачной атмосфере.

МУП ограничивает область применимости со средами, в которых индикатриса имеет ярко выраженную анизотропию диаграммы направленности.

2. Выполнен анализ зависимости от оптико-геометрических условий наблюдения.

3. Построены изображения тестовых объектов для различных оптико-геометрических условий наблюдения.

Библиографические ссылки

1. Зега Э. П., Иванов А. П., Кацев И. Л. Перенос изображения в рассеивающей среде. – Минск: Наука и техника, 1985. – 327 с.
2. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. – М.: Мир, 1971. – 495 с.

ОСОБЕННОСТИ И ПРАКТИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ И ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

А. Ф. Булат, И. Н. Слащев

*Институт геотехнической механики им. Н. С. Полякова НАН Украины
г. Днепропетровск*

Фундаментом для разработки эффективных технологий горных работ, обеспечивающих высокую производительность и безопасные условия труда горняков, является прогнозирование геомеханического состояния породного массива. Технологии компьютерного анализа геомеханических процессов чаще всего основаны на методах граничных элементов, конечных разностей и конечных элементов, которые показали себя с наилучшей стороны. Вместе с тем упругие модели среды не имеют возможности расчета эволюции напряженно-деформированного состояния (НДС) во времени, неупругого деформирования пород, процессов движения газонасыщенных флюидов и др., что часто приводит к результатам, которые не подтверждаются измерениями в выработках.

Вычислительный комплекс «ГЕО-РС»[©] (разработан в ИГТМ НАН Украины) реализует технологию компьютерного анализа состояния породного массива совмещенными процедурами методов конечных элементов и начальных напряжений (МКЭ-МНН). Особенности системы моделирования являются: обеспечение расчетов упругого, упруго-пластического и других видов запредельных напряженно-деформированных состояний структурно-неоднородного породного массива, учет скольжения слоев пород и закономерностей протекания процессов в трещиноватых водо- и газонасыщенных средах. Система имеет ряд функций, позволяющих анализировать состояние среды не только по критерию Кулона-Мора, который хорошо себя зарекомендовал и широко применяется для расчетов, но и по критериям Сен-Венана, Мизеса, Боткина, Треска, параметру Надаи-Лоде, проводить анализ состояния пород внутри зон неупругих деформаций с использованием инвариантов составляющих тензора напряжений, определять кинетику зарождения разрушений, магистральных трещин и другие характеристики, что на сегодняшний день является новым и перспективным.

Анализ состояния трещиноватого массива базируется на исследованиях [1], которыми установлено, что оценку параметров систем дополнительных трещин при решении задач по неупругим средам рационально выполнять на основе определения ориентации и величины сдвигающих сил. Это связано с тем, что под действием изменяющихся во времени и пространстве нагрузок, обусловленных перераспределением полей напряжений и зон неупругих деформаций, в зонах с площадками сдвига равных направлений фиксируется активизация процесса распространения магистральных трещин, преимущественно по направлениям структурных де-

фектов, сопровождающаяся формированием блочных структур. Зная ориентацию в геопространстве систем эндогенных, тектонических и дополнительных трещин техногенного происхождения, можно техническими средствами управлять нагрузками на крепь выработок.

В результате вычисления параметров НДС породного массива, по значениям максимальных $\sigma_1^{\text{Pr.el}}$, минимальных $\sigma_3^{\text{Pr.el}}$ и касательных напряжений τ^{xy} вычисляется ориентация векторов максимальных главных напряжений для каждого элемента расчетной схемы. Формируется вектор $\{\alpha_\sigma^{xy}\}$, содержащий значения углов наклона α_σ^{xy} максимального главного напряжения к координатной оси x :

$$\{\alpha_\sigma^{xy}\} \leftarrow \alpha_{\sigma_i}^{xy} = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2\tau_i^{xy}}{\sigma_{1_i}^{\text{Pr.el}} - \sigma_{3_i}^{xy}} \right) \leftarrow \left\{ \begin{bmatrix} \sigma^{\text{el}} \\ \sigma^{\text{Pr.el}} \end{bmatrix}_i \mid i_{++} \right\}, \quad (1)$$

где $[\sigma^{\text{el}}]$ и $[\sigma^{\text{Pr.el}}]$ – массивы текущих значений осевых и главных напряжений, соответственно;

i – инкремент, наращивающий индексы массивов (и программных классов) до числа элементов.

Так как реализация условий предельного состояния происходит в зоне неупругих деформаций на двух площадках, наклоненных под углами β_1 и β_2 к вектору максимального главного напряжения, то для определения и визуализации проекций площадок скольжения на плоскость каждого элемента расчетной схемы в системе формируется двумерный массив $[\beta]$

$$[\beta] \leftarrow [\beta_{1_i}, \beta_{2_i}] = \alpha_{\sigma_i}^{xy} \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_i}{2} \right) \leftarrow \left\{ \{\alpha_\sigma^{xy}\} \mid [\text{FMS}_5] \mid i_{++} \right\}, \quad (2)$$

где $[\text{FMS}_5]$ – элемент программного класса, содержащий значения углов внутреннего трения φ_i элементов модели.

В результате расчетов выявляются границы зон дезинтеграции слоистых пород, участки зарождения разрушений и ориентация в геопространстве магистральных трещин с учетом природных структурных дефектов реального массива, что позволяет определять параметры сложных геомеханических и газодинамических процессов.

Как один из примеров практического использования метода моделирования можно привести реализацию концепции эффективного поддержания подготовительных выработок, которая заключается в снижении разрушающего действия горного давления на крепь путем использования эффекта поэтапного вовлечения породного массива в охранную конструкцию, несущая способность и режим работы которой соответствуют ожидаемым смещениям и нагрузкам на различных временных этапах взаимодействия системы «крепь–породный массив». В результате исследований [2] обоснованы каждый из элементов и вся система комбинированного поддержания подготовительных выработок, включающая средства анкер-

ного и рамно-анкерного крепления, литые полосы из быстротвердеющих материалов, крепи усиления, охранные бутовые полосы с различными параметрами деформирования.

Преимущества метода в полной мере проявились при анализе НДС газонасыщенных сред, который основан на использовании закономерностей разрушения массива под совместным действием сил горного и газового давлений. Реализация данного метода включает автоматический расчет внутрипластовых газовых давлений в зависимости от степени разрушения пород на базе линейного, параболического и полиномиального видов функций снижения горного и газового давлений в зоне разупрочнения.

Работу метода продемонстрируем на примере полиномиальной модели снижения горного и газового давлений в зоне разупрочнения. Представим падение напряжений в зоне разупрочнения на интервале от начала неупругого деформирования до уровня остаточной прочности коэффициентами, характеризующими изменения максимальных главных напряжений k_σ и давления газа k_p (изменяются от 0 при отсутствии напряжений до 1 в точке предела прочности) в зависимости от изменения максимальной деформации k_ϵ (рис. 1).

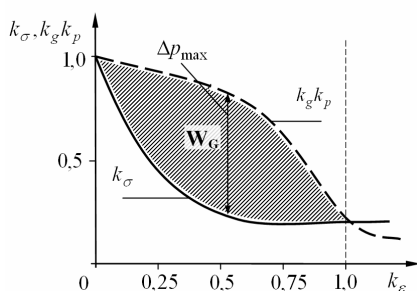


Рис. 1. Изменения коэффициентов спада напряжений и давления газа при разупрочнении (для наглядности графики совмещены и показаны в сопоставимых координатах, k_g – коэффициент, характеризующий отношение величины горного давления к величине газового давления в нетронутом массиве на глубине H)

Переходя от коэффициентов к текущим значениям максимальных главных напряжений $\sigma_1^{\text{Pr.el}}$ и деформаций $\epsilon_1^{\text{Pr.el}}$ модели на интервале от предельной упругой деформации ϵ_1^{lim} до деформации в точке перехода к остаточной прочности $k^{\text{in}} \epsilon_1^{\text{lim}}$ (k^{in} – коэффициент пластичности породы), получим выражение для расчета работы газового давления W_G

$$k_g W_G = \int_{\epsilon_1^{\text{lim}}}^{k^{\text{in}} \epsilon_1^{\text{lim}}} [k_g p_G(\epsilon_1^{\text{Pr.el}}) - \sigma_1^{\text{Pr.el}}(\epsilon_1^{\text{Pr.el}})] d\epsilon, \quad (3)$$

где $p_G(\epsilon_1^{\text{Pr.el}})$, $\sigma_1^{\text{Pr.el}}(\epsilon_1^{\text{Pr.el}})$ – функции снижения газового давления и напряжений в зоне разупрочнения, соответственно.

Для полиномиального вида функции из выражения (3) получим

$$k_g W_G = \int_{\varepsilon_1^{\text{lim}}}^{k^{\text{in}} \varepsilon_1^{\text{lim}}} \left[k_g \sum_{n=0}^{n=3} a_n \varepsilon^{\text{Pr.el.}n} - \sum_{n=0}^{n=3} b_n \varepsilon^{\text{Pr.el.}n} \right] d\varepsilon, \quad (4)$$

где a_n и b_n – регрессионные коэффициенты, задающие форму кривых падения газового и горного давлений, соответственно.

Подставляя в соотношение (4) значения a_n и b_n , полученные по результатам шахтных исследований, определим полную дополнительную работу газа при разупрочнении породного массива:

$$k_g W_G = (k^{\text{in}} - 1)(\varepsilon^{\text{Pr.el.}}(k_g - 1) - 0,5\varepsilon^{\text{Pr.el.}2}(0,24k_g - 2,74) + 0,33\varepsilon^{\text{Pr.el.}3}(0,22k_g - 3,1) - 0,25\varepsilon^{\text{Pr.el.}4}(0,81k_g - 1,17)). \quad (5)$$

Для каждого элемента расчетной схемы МКЭ вычисляется работа сил горного давления. Если элемент попадает в зону разупрочнения, то дополнительная работа, реализованная силами газового давления при текущем значении деформации, рассчитывается по соотношению

$$W_G(\varepsilon) = k_g W_G, \quad (6)$$

а если в зону остаточной прочности – то определяется полная работа по соотношению (5). Работы сил горного и газового давлений суммируются, вычисляется прирост сил, который распределяется между узлами расчетной схемы путем добавления к матрице сил системы. На последующей итерации добавленные напряжения вычитаются. Повторение итераций производится до тех пор, пока каждый элемент изучаемой схемы при рассчитанном значении напряжений не будет иметь деформацию, соответствующую деформационной модели насыщенного газом породе.

В результате использования метода был решен ряд актуальных научных и прикладных задач, в частности, установлены новые закономерности изменения геомеханического состояния и газовой проницаемости газонасыщенного породного массива под влиянием очистных работ и реакция на данные процессы пространственных и временных параметров различных по геологической структуре источников газовыделения, определены параметры заложения дегазационных скважин. В качестве примера на рис. 2 показан вариант использования метода для определения зон активизации десорбционных процессов и путей миграции потоков свободного метана в условиях ПАТ «Шахта им. Н. С. Засядько».

Элементы технологии моделирования вошли в экспериментально-аналитический метод комплексного анализа состояния газонасыщенного породного массива [3], преимуществами которого являются определение серий расчетов идеализированных квазистационарных состояний насыщенной газом геосреды газопроводящих магистральных трещин, их верификация по результатам мониторинга в горных выработках и сравнительный анализ полученных данных с решением серии обратных задач. Для шахтных исследований используются геофизические методы (электрометрический, виброакустический, радиометрический и др.), которые на сего-

дняшний день в полной мере апробированы в ИГТМ НАН Украины и отражены в нормативно-технической документации.

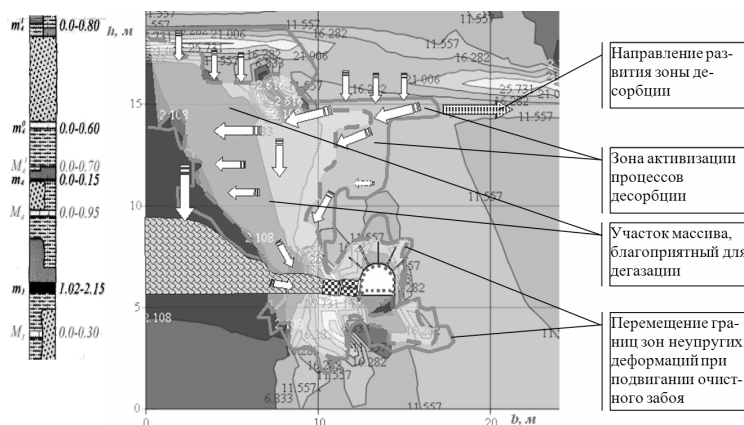


Рис. 2. Прогноз изменения максимальных главных напряжений во времени (изобары $\sigma_1^{t+\Delta t} - \sigma_1^t$, МПа) и зон неупругих деформаций за период установившихся сдвижений породного массива (стрелками показаны направления перемещения газовых потоков)

Методы и средства математического моделирования широко применяются, они показали высокую эффективность: при обосновании способов обеспечения устойчивости выработок; оперативном прогнозе миграции потоков свободного метана и обосновании способов подземной дегазации на пластах m_3 и l_4 ПАТ «Шахта им. Н. С. Засядько»; при оценке надежности систем комбинированного крепления на пластах c_4 и c_5 шахт «Самарская» и «Павлоградская»; при оценке способов управления горным давлением на пласте h_7 шахты «Нестор»; при разработке новых типов крепей и средств охраны выработок с учетом специфики исходного напряженного состояния и деформационных процессов в трещиноватом породном массиве на шахтах им. К. А. Румянцева, им. А. И. Гаевого и др.

Библиографические ссылки

1. Слащев И. Н. Оценка техногенной трещиноватости методами математического моделирования // Геотехническая механика. – Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2010. – Вып. 85. – С. 239–250.
2. Слащев И. Н. Прогноз устойчивости систем комбинированного поддержания подготовительных выработок в сложных горно-геологических условиях глубоких шахт: сб. науч. трудов НГУ. – Днепропетровск: РИК НГУ, 2010. – Т. 1. – № 35. – С. 67–77.
3. Булат А. Ф., Курносов С. А., Слащев И. Н. [и др.]. Экспериментально-аналитический метод прогноза направлений и интенсивности газовых потоков // Геотехническая механика. – Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2005. – Вып. 59. – С. 10–21.

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ НА ОСНОВЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ С ЭКСПЕРТНОЙ ПОДДЕРЖКОЙ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

Л. В. Галицкая, О. Н. Чащин

*Сибирский университет потребительской кооперации
г. Новосибирск*

Рассматривается задача управления классом сложных технологических объектов управления со следующими характерными особенностями:

1. Технологический объект управления представляет собой комплекс взаимосвязанных процессов преобразования сырья и топлива в конечный продукт, которые характеризуются функционально и технологически пересекающимися множествами переменных входов, выходов и внутреннего состояния.

2. Большой объем контролируемых переменных и их расчетных признаков, необходимых для представительной оценки состояния оборудования технологического комплекса, хода технологических процессов и затрат энергоресурсов.

3. Низкая прозрачность процесса, так как отсутствует возможность непосредственного контроля развития отдельных стадий процесса, в связи с чем необходимо использовать методы моделирования для текущего расчета, анализа и прогнозирования показателей процесса.

4. Глубокая взаимосвязь всех процессов при ограниченности ресурсов на управление, в связи с чем результаты непосредственного контроля часто не позволяют определить первопричину отклонений в технологическом процессе без специальных исследований (моделирования).

5. Наличие случайных измерительных помех различной природы и характера, но всегда достаточно интенсивных, что снижает качество информации и требует (для обеспечения необходимого качества измерительной информации) специальных помехозащищенных алгоритмов обработки сигналов измерительной информации.

Типичными объектами такого класса являются современные металлургические агрегаты, например доменные, электросталеплавильные и обжиговые печи, кислородные конвертеры, агломерационные машины и агрегаты внепечной обработки стали.

На содержательном уровне проблема управления объектами такого класса может быть сформулирована в виде задачи многомерного корреляционного анализа. Условимся различать два основных вида характеристик объекта управления (ОУ), оценки которых используются при выработке управляющих воздействий:

а) *параметры объекта*, представляющие собой характеристики, определяющие вид зависимости между входными воздействиями и выходными величинами объекта (например, коэффициенты передачи, постоянные времени и т. п.);

б) *координаты состояния объекта*, представляющие собой изменяющиеся во времени характеристики, значения которых в каждый момент времени вместе с будущими значениями входных воздействий определяют будущие изменения во времени интересующих нас выходных величин объекта управления.

Говоря о задачах оценивания, будем далее иметь в виду задачи оценивания координат состояния объекта управления. Координаты состояния объекта физически реализуются в виде сигналов измерительной информации (СИИ) – временной последовательности выходов датчиков физических величин; дискретных сигналов состояния (ДСС) – выходов позиционных (релейного типа) датчиков, связанных с изменением режимов работы оборудования и условий хода технологии

Совокупность СИИ и ДСС образуют множество контролируемых технологических сигналов, а в более общем случае – множество контролируемых технологических показателей (ТП) ОУ.

Известны алгоритмы управления, например, тепловым состоянием доменной печи с использованием ситуационного подхода к анализу групп взаимосвязанных ТП, характеризующих различные стороны его развития. Для этой цели используются хорошо контролируемые параметры чугуна, шлака, колошникового газа и проч., а также их обобщенные признаки и расчетные показатели. Число таких показателей и признаков, опубликованных в литературных источниках, достаточно велико, что даже затрудняет их выбор в деле практического использования. При этом для повышения достоверности оценок теплового состояния последние должны формироваться на основе согласованных, устойчивых изменений (трендов) указанных выше взаимосвязанных переменных.

Алгоритмы ситуационного многомерного анализа, как показывает анализ целого ряда работ, наиболее эффективно реализуются с использованием **детерминированных и нечетких задач** обработки и анализа данных.

Ниже приводится краткая характеристика принципов построения АСУ доменным процессом на основе экспертных систем с искусственным интеллектом. Системы управления доменным процессом рассматриваемого типа «делают выводы относительно непрерывных процессов: схода шихты, газодинамики печи, ее теплового состояния».

В системе выделяются два уровня (две подсистемы):

- подсистема оперативного контроля хода процесса и регулирования (нижний уровень);

- подсистема получения выводов, включающих специальный процессор искусственного интеллекта и базу знаний (верхний уровень).

Подсистема нижнего уровня формирует информацию для «верхней системы»; подсистема верхнего уровня сообщает «нижней системе» правила, на основе которых осуществляются текущий контроль и прогнозирование хода процесса и выработка воздействий на него.

Контроль и регулирование хода процесса осуществляется на основе сравнения сигналов от датчиков (и их расчетных признаков) с соответствующими критериями и пороговыми значениями (градиенты, уровни, интегральные величины, отклонения), в результате чего выделяются показатели датчиков, связанные с изменением хода печи.

Знания вводятся в виде правил, содержащих оптимальное действие, соответствующее результату вывода. База знаний имеет иерархическую структуру и делится на блоки по функциям и датчикам, с информацией которых связаны данные знания.

Правила в экспертной системе находятся в формализованном виде, то есть в виде предложений «если» (условие), «то» (вывод). Подобное представление называли «правилами выбора». Такая форма наиболее проста и обладает большим сходством с человеческим мышлением, а кроме того, имеется возможность блочного пополнения системы новыми знаниями, то есть ступенчатого наращивания системы.

В настоящей работе предлагается развитие подхода на основе нормативных моделей трендов ТП критериально-ограничительного типа.

Характеристика каждой технологической ситуации может быть формализована путем постепенно пополняемых частичных моделей желаемых свойств траекторий трендов и остатков по типу (1)–(3), на которые требуется разложить динамические ряды исходных данных.

$$Q_1 = \sum_i (x(i) - \hat{x}(i))^2 \xrightarrow{\hat{x} \cdot p \cdot U^{(2),(3)}} \min, \quad (1)$$

$$Q_2 = \sum_i (\hat{x}(i) - \hat{x}(i-1))^2 \xrightarrow{\text{по } \hat{x} \text{ при } (1),(3)} \min, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} |\hat{x}(i) - x^*| &\leq \beta_1, \\ |\hat{x}(i) - \hat{x}(i-1)| &\leq \beta_2, \\ \left| \sum_i \operatorname{sgn}(\hat{x}(i) - \hat{x}(i)) \right| &\leq \beta_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где $x(i)$, $\hat{x}(i)$ – исходные данные и оценки тенденции в i -е отсчеты времени;

Q_1 , Q_2 – критерий близости данных с оценками и критерий изменчивости последних, соответственно;

x^* – базовый уровень тенденций;

β_1 , β_2 , β_3 – желаемые значения интервалов;

sgn – релейная (знаковая) функция.

Аналогичным образом можно привлекать многие другие экстремальные и интервальные характеристики желаемых и фактических

свойств трендов и остатков как скалярных, так и векторных рядов данных.

Выбор (задание) желаемых характеристик (в зависимости от ситуации) осуществляется оператором-технологом.

Частичные модели критериально-ограничительного типа, отражающие свойства траекторий оценок трендов и остатков в виде экстремальных и интервальных характеристик их уровней и скоростей, порогов различимости, продолжительности знакопостоянных и монотонных участков, сложности аппроксимирующих полиномов являются достаточно содержательными, воспроизводимыми и доступными, чтобы их можно было бы использовать в экспертных системах. Главным источником информации при их реализации служат физические, технологические и управленческие принципы.

Ситуационный алгоритм управления технологическим процессом биохимической очистки предназначен для распознавания (анализа) ситуации на объекте и может быть использован, в частности, для корректировки технологических установок на параметры кислородного и илового режимов процессов биохимической очистки, связанных с принятием технологических решений.

В общем случае рассматриваемый алгоритм служит средством инженерной поддержки оператора-технолога и специалистов, занятых анализом и расчетом технологических режимов.

В основу ситуационного алгоритма управления любым технологическим процессом положены следующие логические предпосылки, вытекающие из свойств объекта управления и принятых правил управления объектом:

1) управляемый технологический процесс является сложным процессом, состояние которого в каждый текущий момент времени (или в период времени) может быть определено более или менее однозначно по комбинации нескольких показателей (определяющих факторов);

2) каждому выделенному состоянию может быть поставлено в соответствие совершенно определенное управляющее воздействие (группа управляющих воздействий).

Классическим примером ситуационного алгоритма могут служить технологические инструкции, в которых содержится перечень признаков какого-либо нарушения технологического режима и перечень действий по его устранению.

Определяющими признаками ситуации могут служить: диапазоны изменения контролируемых переменных, знаки (направление) и скорость их изменения. Обычно ситуационный алгоритм представляется в виде таблицы, вследствие чего его еще называют «табличным» алгоритмом.

По опыту применения ситуационных алгоритмов в различных областях технологии можно утверждать, что одновременный анализ изменений большой группы контролируемых переменных позволяет

с заданной надежностью устанавливать факты происходящих сдвигов в ходе технологического процесса. Дополнительным преимуществом такого подхода является возможность почти стопроцентного обнаружения недостоверных данных, обусловленных грубыми ошибками контроля или субъективным искажением информации, за счет совместного анализа данных в сопоставлении с заданным табличным алгоритмом ситуации.

Конкретные технологические ситуации и их признаки могут быть сформированы в течение относительно небольшого срока совместно со специалистами-технологами. Здесь же рассмотрим один из важнейших блоков ситуационного алгоритма, обеспечивающий надежное распознавание устойчивых изменений совокупности определенных факторов. Ниже такой блок будем называть алгоритмом динамического сигнатурного (знакового) анализа.

Алгоритм динамического сигнатурного анализа состоит из следующих математических и логических операций (рассматривается широко используемый на практике случай, когда определяющими признаками являются знаки изменения определяющих факторов):

1. «Двухтемповое» сглаживание контролируемого сигнала, в результате чего формируются оценки основного тренда и тренда отклонений, или «остатков»; сглаженная оценка тренда «остатков» является базой для расчета признака ситуации. Данная операция выполняется с использованием модифицированного (двухслойного) алгоритма «РЭС-П».

2. Определение знака приращения тренда остатков на интервале времени заданной длительности; последний характеризует направление изменения контролируемого параметра.

Первые две операции выполняются для всего списка сигналов, учитываемых при оценке ситуации.

3. Совместный анализ знаков приращений контролируемых переменных в сопоставлении с нормативными комбинациями определяющих факторов и распознавание (определение) номера технологической ситуации.

Разработаны и проверены алгоритмы автоматического выбора строки табличного алгоритма, т. е. автоматического распознавания ситуации, основанные на знаковом корреляционном анализе данных.

При оценке ситуации факторы учитываются с разным «весом», соответственно степени их важности. Выходом анализирующего блока является собственно номер определяемой им ситуации.

Табличный алгоритм эффективно реализуется на ПК и является мощным средством инженерной поддержки и развития технологической инструкции. Может быть использован для обучения персонала и проверки его квалификации (в качестве блока тренажера, например) или для формирования нормативных решений, в сопоставлении с которыми ведется оценка работы персонала.

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ТОНКОМ ОДНОРОДНОМ СТЕРЖНЕ

Т. В. Глухарева

Кемеровский государственный университет

В данной работе численно и аналитически решена задача о распределении температуры в тонком однородном стержне длиной l , боковая поверхность которого теплоизолирована, на концах его поддерживают постоянные температуры. Построены графики полученных решений и приведено сравнение полученных результатов.

Задача о распространении тепла в тонком однородном стержне длиной l , боковая поверхность которого теплоизолирована, а на его концах температуры постоянны, приводится к решению уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

при граничных условиях

$$u(0, t) = u_1 = \text{const}, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(l, t) = u_2 = \text{const}, \quad t > 0, \quad (3)$$

и начальном условии

$$u(x, 0) = u_0 = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4)$$

Для численного решения задачи (1)–(4) в прямоугольнике $D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ выберем равномерную сетку $x = x_m = m \cdot h, m = 0, \dots, M, h = l/M$ и $t = t_n = n \cdot \tau, n = 0, \dots, N, \tau = T/n$ [1].

Поставим в соответствие уравнению (1) неявную разностную схему

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a^2 \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}, \quad m = 1, \dots, M-1, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (1')$$

Аппроксимация граничных условий (2) и (3) дает

$$u_0^{n+1} = u_1 = \text{const}, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (2')$$

$$u_M^{n+1} = u_2 = \text{const}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (3')$$

Начальные условия приводим к условиям

$$u_m^0 = u_0 = \text{const}, \quad m = 0, \dots, M. \quad (4')$$

Разностную задачу (1')–(4') решаем методом прогонки. В качестве неизвестного в задаче (1')–(4') выступает решение на новом временном слое u_m^{n+1} , которое ищем по рекуррентной формуле

$$u_m^{n+1} = p_{m+1} u_{m+1}^{n+1} + q_{m+1}^{n+1}, \quad m = M-1, \dots, 0, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (5)$$

Зная первые прогоночные коэффициенты $p_1 = 0, q_1^{n+1} = u_1, n = 0, \dots, N-1$ из условия (2') и последнее значение температуры $u_M^{n+1} = u_2, n = 0, \dots, N-1$ из условия (3'), по формуле (5) находим значения температуры во всех узлах сетки.

Аналитическое решение задачи (1) – (4) будем искать в виде:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t). \quad (6)$$

Функцию $w(x, t)$ выбираем такой, чтобы она удовлетворяла неоднородным краевым условиям $w(0, t) = u_1, w(l, t) = u_2$ [2]. Можно взять

$$w(x, t) = \frac{u_2 - u_1}{l} x + u_1. \text{ Тогда для функции } v(x, t) \text{ получим задачу с однородными краевыми условиями}$$

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (7)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, t > 0, \quad (8)$$

$$v(x, 0) = \frac{u_1 - u_2}{l} x + u_0 - u_1, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (9)$$

Для решения задачи (7)–(9) применяем метод разделения переменных. Частные решения уравнения (7) ищем в виде произведения двух функций, одна из которых зависит от x , другая – от t , то есть

$$v(x, t) = X(x)T(t). \quad (10)$$

Подставляя $v(x, t)$ из (10) в уравнение (7), получаем два уравнения:

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (11)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (12)$$

Для нахождения нетривиальных решений уравнения (7) вида (10), удовлетворяющих граничным условиям (8), нужно найти нетривиальные решения уравнения (12), удовлетворяющие условиям $X(0) = 0, X(l) = 0$.

Только для значений $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$ существуют нетривиальные решения задачи (7)–(8)

$$v_k(x, t) = A_k \sin \frac{\pi k x}{l} \cdot e^{-\left(\frac{a \pi k}{l}\right)^2 t}.$$

Решение начально-краевой задачи (7)–(9) ищем в виде ряда

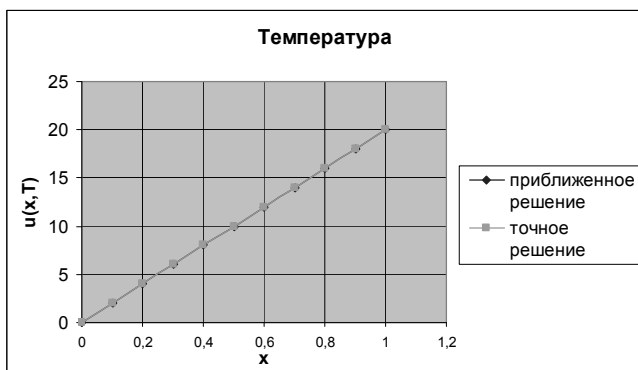
$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k T_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi k x}{l} e^{-a^2 \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t}. \quad (13)$$

Константы A_k определяем подстановкой ряда (13) в условие (9). Точное решение поставленной задачи (1)–(4) имеет вид

$$u(x, t) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} \left\{ (u_0 - u_1) (1 - (-1)^k) + (-1)^k (u_2 - u_1) \right\} e^{-\left(\frac{a \pi k}{l}\right)^2 t} \right] \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

Численный алгоритм решения задачи реализован в редакторе Visual Basic [3]. Были произведены расчеты, когда на концах стержня поддерживают разные температуры, найдены значения температуры во всех узлах сетки в виде таблицы. Полученные результаты позволяют сравнить численное решение с точным решением.

$X(m)/T(n)$	θ	$\theta,5$	$4,5$	5	<i>Точное решение</i>
0	0	0	0	0	0
0,1	5	1,848601	2	2	1,999486
0,2	5	3,634174	4	4	3,999022
0,3	5	5,39243	5,999999	6	5,998654
0,4	5	7,158535	7,999999	8	7,998418
0,5	5	8,967811	9,999999	10	9,998336
0,6	5	10,85644	12	12	11,99842
0,7	5	12,8622	14	14	13,99865
0,8	5	15,02521	16	16	15,99902
0,9	5	17,38872	18	18	17,99948
1	5	20	20	20	20



Графики решений при $t = T = 5$

Библиографический список

1. Годунов С. К., Рябенкий В. С. Разностные схемы. — Москва: Наука, 1973. — 400 с.
2. Владимиров В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Физматлит, 2001. — 288 с.
3. Гарнаев А. Самоучитель VBA. — СПб.: «БВХ-Петербург», 2003. — 504 с.

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАГРУЗОК МЕЖДУ АГРЕГАТАМИ ТЕПЛОВЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ

А. М. Гудов, В. В. Мешечкин, А. А. Голышева
Кемеровский государственный университет

Проблема математического моделирования и оптимизации энергетических установок возникла достаточно давно, однако поиск наиболее эффективных путей ее решения продолжается до настоящего времени [1].

Целью исследования является разработка модуля расчета оптимального распределения нагрузок между агрегатами ТЭС, а также интегрирование его в систему РЭХТЭС [2]. Полученные результаты должны стать основой для принятия управленческих решений по ведению оптимального режима работы станции.

Для определенного состава оборудования станции требуется построить зависимость:

$$B^{ст}(N) = B^{кц}(Q^{мз}(N) * K_{экспл}) \quad (1)$$

при $N_{j\min} \leq N_j < N_{j\max}$,

где $B^{ст}$ – полный часовой расход условного топлива на ТЭС, тут/ч;

N – электрическая нагрузка ТЭС, МВт;

$B^{кц}$ – полный часовой расход условного топлива котельным цехом ТЭС, тут/ч;

$Q^{мз}$ – расход тепла турбинами машинного зала, Гкал/ч;

$K_{экспл}$ – коэффициент потерь тепла (эксплуатационный коэффициент);

N_j – электрическая нагрузка турбины, МВт;

$N_{j\min}$ – минимальная электрическая нагрузка турбины, МВт;

$N_{j\max}$ – максимальная электрическая нагрузка турбины, МВт.

Искомую зависимость (1) называют расходной характеристикой станции.

При этом для $N_{j\min} \leq N_j \leq N_{j\max}$ должно выполняться:

$$B^{кц} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{Q_{cr}^{*} K(Q_i)} \rightarrow \min \quad (2)$$

$$Q_e = \frac{\sum_{j=1}^m Q_j^T}{\sum_{j=1}^m \left(\frac{(Q_j^T - Q_{j\min}^T)(N_{j\max} - N_{j\min})}{Q_{j\max}^T - Q_{j\min}^T} - N_{j\min} \right)} \rightarrow \min \quad (3)$$

при условиях:

$$Q_{i\min} \leq Q_i \leq Q_{i\max}, \quad (4)$$

$$Q_{j\min}^T \leq Q_j^T \leq Q_{j\max}^T. \quad (5)$$

(2) при условии баланса:

$$\sum_{i=1}^n Q_i - K_{экспл} * \sum_{j=1}^m Q_j^T = 0 \quad (6)$$

Условие (6) гарантирует равенство суммарной теплопроизводительности всех котлов котельного цеха и суммарного расхода тепла на все турбины машинного зала с учетом потерь тепла $K_{\text{экспл}}$ в диапазонах $Q_{i \min} \leq Q_i \leq Q_{i \max}$, $Q_{j \min}^T \leq Q_j^T \leq Q_{j \max}^T$.

(3) при условии баланса:

$$\sum_{j=1}^m N_j - N = 0 \quad (7)$$

Условие (7) гарантирует равенство суммарной нагрузки всех турбин ТЭС и нагрузки ТЭС в диапазоне $N_{j \min} \leq N_j \leq N_{j \max}$, где q_e – удельный расход тепла на группу турбин, q_j – относительный прирост расхода тепла на участке, $Q_{j \text{xx}}^T$ – условный расход тепла на холостой ход, Гкал/ч, Q_j^T – расход тепла j -й турбиной машинного зала, Гкал/ч, $Q_{j \min}^T$ – минимальный расход тепла j -й турбиной, Гкал/ч, $Q_{j \max}^T$ – максимальный расход тепла j -й турбиной, Гкал/ч, n – число котлов котельного цеха, B_i^k – расход топлива i -м котлом котельного цеха, т/ч, Q_i – теплопроизводительность i -го котла котельного цеха, Гкал/ч, $Q_{i \min}$ – минимальная теплопроизводительность котла, Гкал/ч, $Q_{i \max}$ – максимальная теплопроизводительность котла, Гкал/ч, m – число турбин машинного зала.

Задача оптимизации распределения нагрузок между агрегатами ТЭС решается путем проведения множества расчетов, отличающихся только некоторой частью задаваемых параметров. Так, из математической модели, построенной в данной работе, были выделены два частных случая, т. к. при практическом использовании частные случаи более применимы.

В первом частном случае количество топлива, которым может располагать ТЭС, заранее определено. Оптимизируется один критерий:

$$B^{\text{нч}} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{q_{\text{гр}} \cdot \eta^k(Q_i)} = \text{const} \quad (8)$$

$$q_n = \frac{1}{q_e(N)} = \frac{\sum_{j=1}^m \left(\frac{(Q_j^T - Q_{j \min}^T)(N_{j \max} - N_{j \min})}{Q_{j \max}^T - Q_{j \min}^T} - N_{j \min} \right)}{\sum_{j=1}^m Q_j^T} \rightarrow \max \quad (9)$$

при ограничениях:

$$N_{j \min} \leq \left(\frac{(Q_j^T - Q_{j \min}^T)(N_{j \max} - N_{j \min})}{Q_{j \max}^T - Q_{j \min}^T} - N_{j \min} \right) \leq N_{j \max},$$

$$Q_{j \min}^T \leq Q_j^T \leq Q_{j \max}^T, \quad Q_{i \min} \leq Q_i \leq Q_{i \max},$$

при условиях баланса:

$$\sum_{i=1}^n Q_i - K_{\text{экспл}} \cdot \sum_{j=1}^m Q_j^T = 0,$$

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{(Q_j^T - Q_{j \min}^T)(N_{j \max} - N_{j \min})}{Q_{j \max}^T - Q_{j \min}^T} - N_{j \min} \right) - N = 0$$

Во втором частном случае заранее известно необходимое количество электрической нагрузки на турбины машинного зала. Оптимизируется один критерий:

$$B_{\text{эл}} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{Q_{\text{сг}} * \eta^k(Q_i)} \rightarrow \min$$

$$Q_{\text{сг}} = \frac{\sum_{j=1}^J Q_j^T}{\text{const}} \rightarrow \min \quad (10)$$

при ограничениях:

$$Q_j^T \min \leq Q_j^T \leq Q_j^T \max,$$

$$Q_i \min \leq Q_i \leq Q_i \max,$$

$$N_j \min \leq \left(\frac{(Q_j^T - Q_j^T \min)(N_j \max - N_j \min)}{Q_j^T \max - Q_j^T \min} - N_j \min \right) \leq N_j \max,$$

при условиях баланса:

$$\sum_{i=1}^n Q_i - K_{\text{экспл}} * \sum_{j=1}^m Q_j^T = 0,$$

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{(Q_j^T - Q_j^T \min)(N_j \max - N_j \min)}{Q_j^T \max - Q_j^T \min} - N_j \min \right) - N = 0,$$

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{(Q_j^T - Q_j^T \min)(N_j \max - N_j \min)}{Q_j^T \max - Q_j^T \min} - N_j \min \right) = \text{const}$$

В качестве метода оптимизации был выбран метод проекции градиента [3], так как этот метод довольно прост в реализации и применим к данной задаче.

В качестве теста использовалась задача второго частного случая. Было взято 10 агрегатов: 5 котлов и 5 турбин. Минимальные и максимальные характеристики взяты из [4].

Первый столбец нижеприведенной таблицы указывает на номер агрегата, Q , N – найденные значения характеристик соответствующих агрегатов, остальные – минимальные (максимальные) характеристики соответствующих агрегатов. $K_{\text{экспл}}$ – эксплуатационный коэффициент, $Q_{\text{сг}}$ – теплота сгорания топлива, $\sum N$ – заданная суммарная электрическая нагрузка на турбины машинного зала.

По этим данным были построены диаграммы теплопроизводительности котлов, расхода тепла турбинами.

На диаграмме теплопроизводительности котлов (рис. 1) показана рассчитанная теплопроизводительность каждого котла по отношению к максимально и минимально возможной.

Исходные данные

Турбины	$Q_{\min},$ Гкал/ч	$Q_{\max},$ Гкал/ч	$N_{\min},$ МВт	$N_{\max},$ МВт	$N,$ МВт	$Q,$ Гкал/ч
$j = 1$	40,00	100,00	20,00	100,00	90	92,5
$j = 2$	40,00	100,00	20,00	100,00	90	92,5
$j = 3$	40,00	100,00	20,00	100,00	90	92,5
$j = 4$	40,00	100,00	20,00	100,00	90	92,5
$j = 5$	40,00	100,00	20,00	100,00	90	92,5
Σ	200,00	500,00			450	462,5
Котлы	$Q_{\min},$ Гкал/ч	$Q_{\max},$ Гкал/ч	$Q,$ Гкал/ч	$B_k,$ т/ч	$K_{\text{эспл}}$	0,95
$i = 1$	20	100	87,88	2,365	$Q_{\text{сг}}$	7
$i = 2$	20	100	87,88	2,365	ΣN	450
$i = 3$	20	100	87,88	2,365		
$i = 4$	20	100	87,87	2,365		
$i = 5$	20	100	87,87	2,365		
Σ	100	500	439,4	11,83		

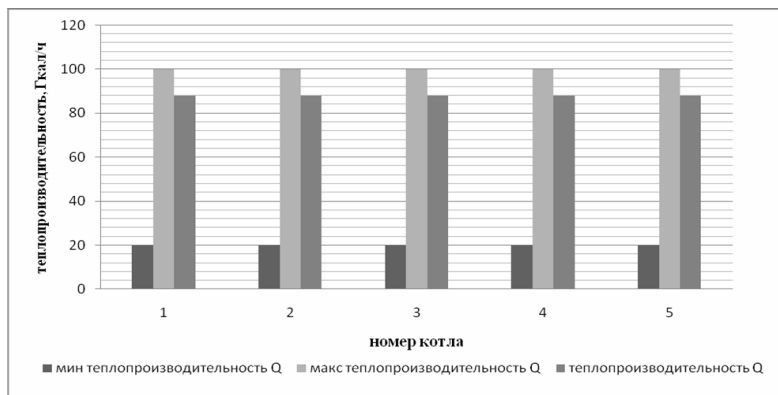


Рис. 1. Теплопроизводительность котлов

На диаграмме расхода тепла турбинами (рис. 2) показано рассчитанное количество расхода тепла каждой турбиной по отношению к максимально и минимально возможному.

Из представленных диаграмм видно, что задача имеет линейный характер. Нагрузки на агрегаты распределились равномерно.

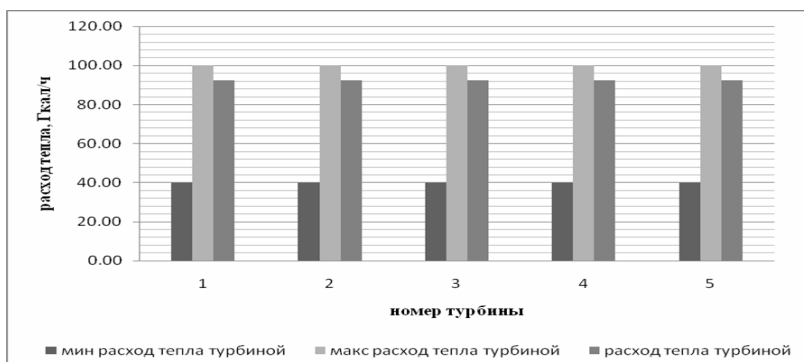


Рис. 2. Расход тепла турбинами

Разрабатываемый модуль должен интегрироваться в систему РЭХТЭС [1], оптимально распределять нагрузки между агрегатами ТЭС для заданного состава оборудования.

Разрабатываемый модуль позволяет проводить расчеты для оптимального распределения нагрузок между агрегатами, а также просматривать ранее проведенные расчеты.

В соответствии с требованиями модуль имеет клиент-серверную архитектуру. В качестве сервера БД используется СУБД Oracle, в качестве клиента – Java-приложение.

Дальнейшее развитие системы предполагает реализацию возможности проведения комплексной (не только по электрическим, но и по тепловым нагрузкам) оптимизации работы ТЭС для других типов составов оборудования (станции с оборудованием двух давлений, связанных через редукционно-охладительную установку (РОУ), станции с оборудованием двух давлений, имеющие в схеме предвключенные турбины, блочные станции – станции, состоящие из нескольких энергоблоков), а также добавление функций для формирования различных аналитических отчетов для нужд оперативно-диспетчерской службы.

Библиографические ссылки

1. Максимов А. С. Программно-вычислительный комплекс оптимизации режимов функционирования крупных промышленно-отопительных ТЭЦ: дис. ... канд. техн. наук. – Иркутск, 2006. – 106 с.
2. Гудов А. М., Завозкин С. Ю., Маренина Т. О., Миронова Т. О. Информационная система расчета энергетических характеристик тепловых электростанций // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2010): материалы IX Всерос. науч.-практ. конф. с международ. участием (19–20 нояб. 2010 г.). – Томск: Изд-во ТГУ, 2010. – Ч. 2. – С. 72–77.

3. Мицель А. А., Шелестов А. А. Методы оптимизации: учеб. пособие. – Томск: Томск. межвузов. центр дистанционного образования, 2002. – Ч. 1. – 192 с.
4. Горнштейн В. М. Методы оптимизации режимов энергосистем. – М.: Энергоатомиздат, 1981. – 336 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ, СОДЕРЖАЩЕМ НАНОРАЗМЕРНЫЕ ДОБАВКИ, С УЧЕТОМ ПРОЦЕССОВ ПЛАВЛЕНИЯ²

***И. Ю. Зыков, А. В. Каленский, А. А. Звеков,
А. П. Никитин, М. В. Ананьева
Кемеровский государственный университет***

Микроочаговая модель инициирования взрывного разложения энергетических материалов лазерным излучением [1] основывается на предположении, что в объеме вещества находятся включения, сильно поглощающие лазерное излучение, в результате разогрева которых может образоваться очаг теплового взрыва. Одно из упрощающих предположений модели [1] заключается в том, что материалы включения и матрицы не претерпевают фазовых переходов, хотя типичные температуры разогрева, необходимые для образования очага взрывного разложения, составляют более 1000 К, то есть выше характерных температур плавления взрывчатых веществ и многих металлов [2].

Ранее в [3] была разработана модель разогрева включений в инертной среде, учитывающая процессы плавления материалов включения и матрицы. В модели фазовый переход рассматривался как квазихимическая реакция перемещения атомов из одной фазы в другую. На том этапе расчеты проводились в инертной матрице и, следовательно, не учитывали химическую реакцию в энергетическом материале.

Целью нашей работы являлась разработка модели разогрева включений в энергетическом материале с учетом химической реакции, учитывающей процессы плавления материалов включения и матрицы.

В модели рассматривается металлическое включение радиусом R с объемной теплоемкостью c_m , окруженное реакционноспособным веществом. Теплоемкость единицы объема вещества обозначается c , тепловой эффект при разложении 1 см³ вещества – Q . Обозначим символом n долю

² Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-03-00897).

неразложенного вещества матрицы. Предполагается, что реакционноспособное вещество разлагается по реакции первого порядка с константой, обладающей аррениусовской температурной зависимостью: $k_0 \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$.

В качестве энергетического материала в расчетах использовался ТЭН, для которого $k_0 = 10^{16} \text{ с}^{-1}$ [4], энергия активации $E = 1.7 \text{ эВ}$ [4]. $Q = 9639 \cdot \text{Дж/см}^3$ [4]. Обозначим $\alpha = 1.1 \cdot 10^{-3}$ и $\alpha_M = 0.973 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ – коэффициенты температуропроводности материалов матрицы и включения.

Система уравнений для энергетического материала имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{Q}{c} k_0 \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) n, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -k_0 \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) n. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) описывают изменение температуры и концентрации энергетического вещества и соответствуют $r > R$.

Для изменения температуры внутри включения имеем кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_M \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad r < R. \quad (3)$$

На границе «включение–матрица» происходит поглощение излучения:

$$J - c_M \alpha_M \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow R-0} + c \alpha \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow R+0} = 0, \quad (4)$$

где $c = 2,22$ и $c_M = 2,0 \text{ Дж/см}^3$ – объемная теплоемкость материалов матрицы и включения;

$J = J_0 \cdot \exp(-k_i^2 t^2)$ – поглощаемая плотность мощности излучения.

k_i принималась равной $8,25 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$.

На границе рассматриваемой области ставилось условие первого рода $T = 300 \text{ К}$.

В уравнении (3) предполагается, что включение поглощает все падающее на ее поверхность излучение.

Начальные условия для системы (1)–(3) имели вид:

$$\begin{aligned} T(r) &= T_0; \\ n &= \begin{cases} 0, & r \leq R, \\ 1, & r > R. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Движение фазовой границы рассматривалось как квазихимическая реакция перемещения атомов из одной фазы в другую. Для скорости перемещения использовалось уравнение, подобное кинетическому уравнению для продукта обратимой реакции типа $A \leftrightarrow B$:

$$v = \gamma \frac{k_B T}{h L^{1/3}} \cdot \left\{ \exp \left(- \frac{\Delta H_m}{k_B} \cdot \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T_m} \right] \right) - 1 \right\}, \quad (6)$$

где k_B – постоянная Больцмана;

ΔH_m – энтальпия плавления;

T_m – температура плавления;

T – температура на границе твердой и жидкой фаз;

h – постоянная Планка;

L – число Лошмидта;

γ обозначает величину:

$$\gamma = \exp \left(\frac{\Delta S_{l \rightarrow s}^\#}{k_B} - \frac{\Delta H_{l \rightarrow s}^\#}{k_B T} \right), \quad (7)$$

где $\Delta S_{l \rightarrow s}^\#$ и $\Delta H_{l \rightarrow s}^\#$ – энтропия и энтальпия активации перехода молекулы из жидкой фазы в твердую.

В силу трудности оценки последних при расчетах полагали $\gamma = 0,1$, что соответствует отсутствию активационного барьера и отрицательной энтропии активации.

Для численного решения описанной выше системы уравнений расчетное пространство разбивалось на ячейки следующим образом. Первые 35 ячеек в энергетическом материале имели размер в 10 раз меньший, чем длина прогрева за время действия импульса $\sqrt{2\alpha/k_i}$. Затем размер ячеек – с 36-й по 70-ю – увеличивался по закону геометрической прогрессии с постоянным знаменателем. После этого следовали 30 ячеек постоянной ширины. Знаменатель прогрессии подбирался таким образом, чтобы рассматриваемая область имела размер $5R$. Размер ячейки во включении был постоянным и равным размеру первой ячейки в матрице, умноженной на $\sqrt{\alpha_M/\alpha}$. Для интегрирования использовали метод Рунге-Кутты 1–5-го порядка с переменным шагом по времени. Относительная погрешность на шаге не превышала 10^{-9} . Для оценки точности расчета вычисляли отклонение от закона сохранения энергии на каждом шаге. Показано, что разработанная программа расчета приводит к относительным отклонениям не более $2 \cdot 10^{-5}$.

Результаты моделирования процесса инициирования реакции приведены на рис. 1 и 2 – на примере инициирования лазерным излучением

с энергией, близкой к пороговой ($H = 0,1636 \text{ Дж/см}^2$), ТЭНа с нанодобавками алюминия (радиусом 300 нм).

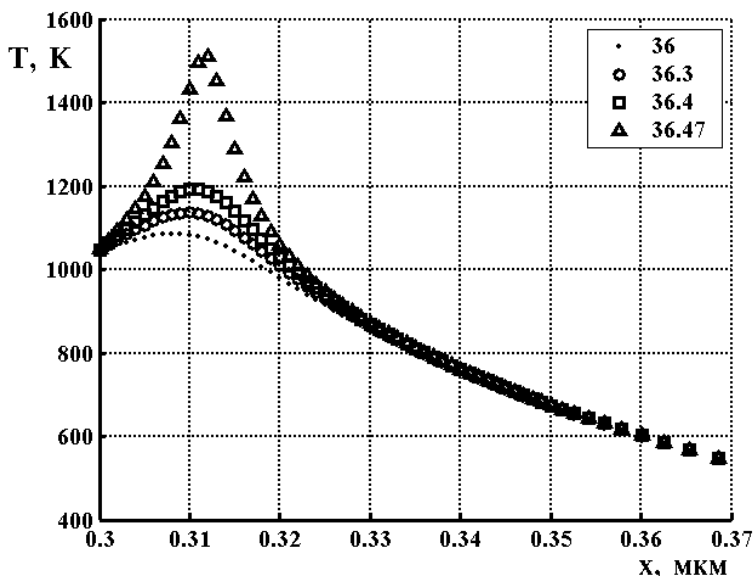


Рис. 1. Распределения температуры в различные моменты времени для ТЭНа с нанодобавками алюминия 300 нм. $H=0.1636 \text{ Дж/см}^2$
Моменты времени в нс указаны на легенде

На рис. 1 представлены распределения температуры в моменты времени, указанные на легенде, отражающие процесс формирования очага реакции. Как видно из рис. 1, вначале на расстоянии 10 нм от поверхности включения формируется максимум температуры, связанный с протеканием экзотермической реакции разложения энергетического материала. Данное положение очага реакции связано с высокой теплопроводностью включения, которое приводит к быстрым тепловым потерям из зоны химической реакции. Возникновение локального максимума температуры происходит за время, не превышающее 1 нс.

На рис. 2 приведено положение фазовой границы в материале включения и матрицы. Скачки на кривой 1 обусловлены началом и окончанием плавления включения, последний резкий изгиб связан с формированием очага химической реакции. Показано, что включение в данных условиях инициирования начинает плавиться только по окончании лазерного импульса и к началу взрывного разложения (быстрое движение фронта плавления в веществе) полностью расплавляется. Формирование очага реакции происходит с задержкой около 36 нс после окончания импульса.

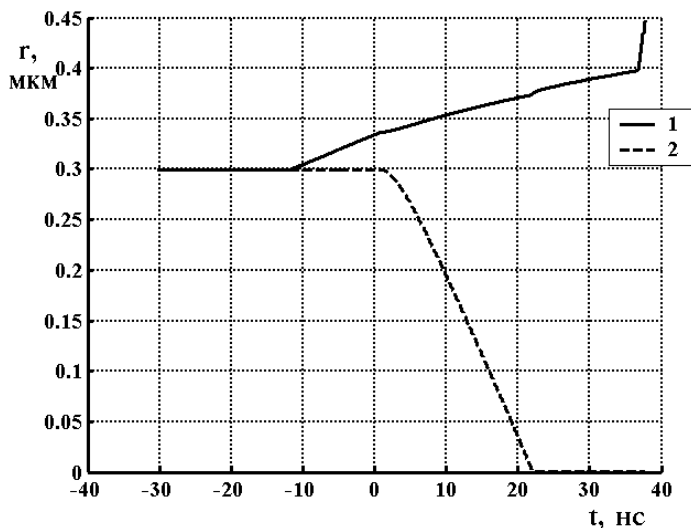


Рис. 2. Положение фазовых границ: 1 – в ЭМ, 2 – в металлическом включении

Итак, нами предложена модель разогрева лазерным импульсом включений в матрице энергетического материала, которая учитывает процессы плавления включения и матрицы, а также химическую реакцию, происходящую в энергетическом материале. Разработана и опробована компьютерная программа для расчета кинетических закономерностей реакции взрывного разложения энергетических материалов с учетом плавления вещества включения и матрицы.

Библиографические ссылки

1. Буркина Р. С., Морозова Е. Ю., Ципилев В. П. Инициирование реакционно-способного вещества потоком излучения при поглощении его неоднородностями вещества // Физика горения и взрыва. – 2011. – Т. 47. – № 5. – С. 95–105.
2. Рабинович В. А., Хавин З. Я. Краткий химический справочник. – Л.: Химия, 1991. – 432 с.
3. Кригер В. Г., Каленский А. В., Зыков И. Ю., Звеков А. А., Ананьева М. В. Моделирование разогрева включений в инертной матрице лазерным импульсом с учетом процессов плавления // Научное творчество молодежи : материалы XVI Всерос. науч.-практ. конф. (17–18 мая 2012 г.) [Электронный ресурс]. – Электрон. дан. (4,1 Мб). – Анжоро-Судженск, 2012. – Ч. 2. – 1 электрон. опт. диск (CD-R).
4. Денисов Е. Т. Константы скорости гомолитических жидкофазных реакций. – М.: Наука, 1971. – 712 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ДИНАМИКИ МЕЗОЧАСТИЦ ДЛЯ 3D-МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРУКТУР УПАКОВОК СФЕРОИДАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЯХ

В. И. Иордан, Т. А. Белов

*Алтайский государственный университет
г. Барнаул*

В различных отраслях промышленности (машиностроение, металлургия, электротехника и электроника, авиационно-космическая техника и др.) применяют сверхтвердые и тугоплавкие сплавы, такие как нитриды и дибориды титана, карбиды бора и титана, а также оксидные материалы (оксид циркония и др.) и высокотемпературные сверхпроводники. Такие сплавы получают в том числе и методом «самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС)», в котором используются реагенты в виде мелкодисперсных порошков, тонких пленок, жидкостей и газов. Взаимодействие реагентов в прессованном образце под воздействием теплового импульса протекает преимущественно в конденсированной фазе в тонком слое, разделяющем исходную смесь и конечный целевой продукт. После инициирования зона реакции в режиме горения (экзотермическая реакция) самопроизвольно распространяется по образцу путем теплопередачи от слоя к слою.

Продукты СВС характеризуются разнообразием микро-, мезо- и макроструктур. Это порошки разной дисперсности, слабо связанные конгломераты частиц, пеноматериалы, спеки и слитки разной прочности, пленки, волокна, кристаллы. Масса продуктов зависит от начальных условий и, в некоторой мере, от механизма процесса. Продукты СВС представляют собой обычно поликристаллическую структуру с размерами кристаллитов 1–5 мкм. Известны примеры получения наноразмерных (и аморфных), а также крупнокристаллических структур (с размерами кристаллов до 3 мм). Размеры кристаллитов зависят от темпа остывания образца после горения и кинетики кристаллизационных и рекристаллизационных процессов.

В последнее время у физиков вызывают интерес металлические стекла, то есть металлы и сплавы, находящиеся в твердом аморфном состоянии. Металлические стекла являются метастабильными системами, термодинамически неустойчивыми относительно процесса кристаллизации, их существование обусловлено только замедленностью кинетических процессов при низких температурах. Стабилизации аморфного металла способствует наличие так называемых аморфизирующих примесей. Основной метод получения аморфных металлов (металлических стекол) — сверхбыстрое охлаждение жидкого расплава: закалка из жидкого состояния или закалка из расплава (критическая скорость охлаждения находится в диапазоне 10^{10} – 10^{13} К/с.). Они обладают необычными свойствами: очень прочны и в то же время пла-

стичны (не так хрупки, как обычное стекло), имеют свойства магнитомягких материалов, коррозионно стойки, что обуславливает широкие перспективы их применения в промышленности. Микроструктура аморфных металлов представляет собой метастабильное неполикристаллическое состояние с ближним порядком (подтверждается рентгеноструктурными данными и данными компьютерных моделей). Активационный барьер, препятствующий кристаллизации стеклометаллов, преодолевается отжигом.

Существует несколько моделей структурной организации в аморфных металлах: кристаллическая, дислокационная, модель случайной плотной упаковки твердых сфер (СПУТС), кластерная. В рамках наиболее популярной кластерной модели необходимо выяснить размеры, стабильность и условия образования кластеров упорядоченной структуры (сопряженных тетраэдров или многогранников Франка-Каспера) в различных аморфных структурах, а также механизмов их трансформации при температурных и силовых воздействиях.

1. Использование метода частиц и метода молекулярной динамики в механике деформируемого твердого тела. Нарушение континуальности материалов при сильном деформировании и разрушении осложняет описание подобных процессов в рамках классической механики сплошной среды. С другой стороны, изучение микроструктуры играет чрезвычайно важную роль при исследовании этих процессов, и особую актуальность приобретает развитие аналитических и компьютерных моделей, адекватно описывающих свойства и структуру микро- и нанообъектов, дополняя компьютерным моделированием проблем, недоступных для аналитического решения.

Перспективным для исследований является метод частиц, который в последние десятилетия широко применялся в химии и физики, однако мало использовался для моделирования механического поведения твердых тел (как совокупности взаимодействующих частиц, описываемых законами классической механики). Как принципиально дискретный метод, он не имеет недостатков континуальных моделей, проявляющихся при нарушении сплошности вещества или в результате дискретности его внутренней структуры, но требует значительных компьютерных ресурсов.

В качестве стратегии распараллеливания вычислительных процессов в программной реализации метода частиц была выбрана декомпозиция координатного пространства на блоки (параллелепипеды). Метод частиц, используя ограниченность радиуса взаимодействия между частицами, допускает почти полное распараллеливание процессов, происходящих в смежных блоках пространства.

Одной из разновидностей метода частиц является метод молекулярной динамики, интенсивно использующийся для исследования физико-химических свойств материалов (в качестве частиц выступают атомы и молекулы). Потенциалы межатомного взаимодействия уже хорошо известны: приближения Борна-Майера, Леннард-Джонса, Морза, Ми-

Грюнайзена, различные степенные функции с набором справочных параметров, либо комбинация первопринципного (ab initio) и потенциального подходов (метод функционала электронной плотности), либо многочастичные потенциалы типа Финниса-Синклера и потенциалы, полученные методом погруженного атома (embedded atom method – EAM). Метод молекулярной динамики позволяет рассматривать объемы размером до кубического микрометра, что соответствует примерно миллиарду частиц (куб $1000 \times 1000 \times 1000$ частиц). Таким образом, практически любые наноструктуры могут быть смоделированы с очень высокой степенью точности на многопроцессорных вычислительных системах.

Для описания больших объемов материала молекулярная концепция уже не подходит, и частицы должны представлять собой элементы более крупного масштабного уровня (мезоуровня). Подобный метод часто, по традиции, называют молекулярной динамикой, хотя более правильно говорить о «динамике мезочастиц».

Преимущество метода динамики мезочастиц по сравнению с методами, основанными на концепции сплошной среды, заключается в значительно меньшем перечне априорных предположений о свойствах материала. Например, потенциал Леннарда-Джонса позволяет моделировать сложнейшие эффекты (пластичность, разрушение, температурное изменение свойств материала, фазовые переходы), для описания которых в рамках сплошной среды требуются отдельные теории.

Метод молекулярной динамики, в отличие от стохастического метода Монте-Карло и метода вариационной квазистатики, позволяет определять структурно-энергетические трансформации как в кристаллических, так и в некристаллических материалах, деформации и аморфизации атомных систем в условиях температурно-силовых воздействий, изучать структуры на атомном уровне с помощью наглядных визуализаторов, изучать в динамике быстропотекающие процессы с выделением большого количества энергии (начальные стадии радиационного воздействия, СВС, взрывы и т. д.) и длительные по времени процессы (упорядочение сплавов, диффузия и т. д.).

2. Краткое описание методов частиц и молекулярной динамики.

Метод молекулярной динамики заключается в расчете траекторий движения системы атомов с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений движения Ньютона (возможно комбинирование с решением уравнений квантовой механики Шредингера). Для замкнутой системы сила, действующая на i -й атом:

$$\vec{F}_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{d\varphi_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{d(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}, \quad (1)$$

где $\varphi_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ – потенциальная функция взаимодействия i -го и j -го атомов;

$\vec{r}_i, \vec{r}_j$ – радиус-векторы атомов.

Уравнения движений имеют вид:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i, \quad m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i, \quad (2)$$

где m_i и $\vec{v}_i$ – масса и вектор скорости i -го атома;

t – время.

Позиции и скорости всех N атомов расчетной ячейки характеризуются $2JN$ координатами (J – мерность расчетной ячейки): $x_{j,i}(t)$ описывают позиции в пространстве, $v_{j,i}(t) = \dot{x}_{j,i}(t)$ – скорости (j – индекс координатной оси). Для решения системы уравнений (2) применяют численный метод интегрирования дифференциальных уравнений, например метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности или широко известный метод Эйлера с полшагом в конечных разностях:

$$v_{n,i}(t + \Delta t / 2) = v_{n,i}(t - \Delta t / 2) + \Delta t \cdot F_{n,i}(t) / m_i, \\ x_{n,i}(t + \Delta t) = x_{n,i}(t) + \Delta t \cdot v_{n,i}(t + \Delta t / 2), \quad (3)$$

где Δt – шаг интегрирования выбирается по критерию: флуктуации полной энергии системы не должны превышать флуктуации потенциальной энергии. Шаг должен быть меньше $1/4$ наименьшего периода атомных колебаний (порядка 10^{-13} – 10^{-15} с), иначе колебания атомов становятся аperiодическими (увеличивается энергия системы). Температура расчетного кластера атомов задается через начальные скорости атомов согласно распределению Максвелла (одинаковые по модулю со случайными направлениями). Суммарная кинетическая энергия должна соответствовать заданной температуре, а суммарный импульс – нулю [1]:

$$|\vec{v}_i| = \sqrt{2}v_{\text{кв}} = \sqrt{2JkT/m_i}, \quad \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = 0, \quad T = 2E/(J \cdot N \cdot k), \quad (4)$$

где k – константа Больцмана;

T – температура кластера на каждой итерации численного эксперимента;

$v_{\text{кв}}$ – среднеквадратичная скорость атома;

E – кинетическая энергия расчетного кластера (порядка 100 атомов).

В компьютерном эксперименте проводится слежение за температурой, свободным объемом, давлением и т. д., исследуется динамика атомной структуры кластера с ее программной визуализацией.

На рис. 1 отображен внешний вид пользовательского интерфейса программного комплекса, в котором реализованы метод динамики мезо-частиц и техника OpenGL для визуализации модельных структур.

Задание параметров A , B , C и смещения D позволяют произвести плоский срез (шлиф) модельной структуры для анализа пористости (рис. 2).

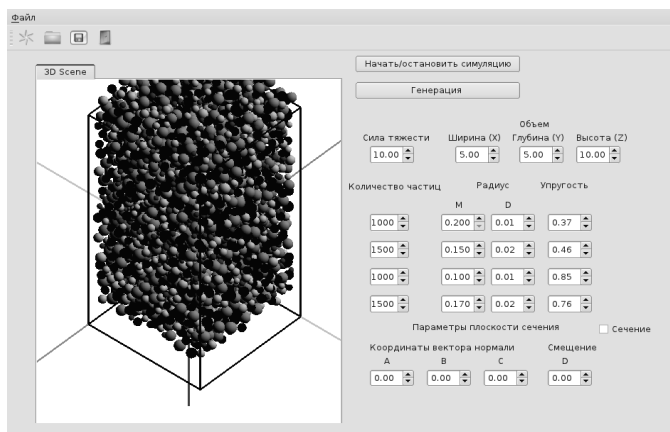


Рис. 1. Внешний вид пользовательского интерфейса с 3D отображением модельных структур кластера 5000 частиц

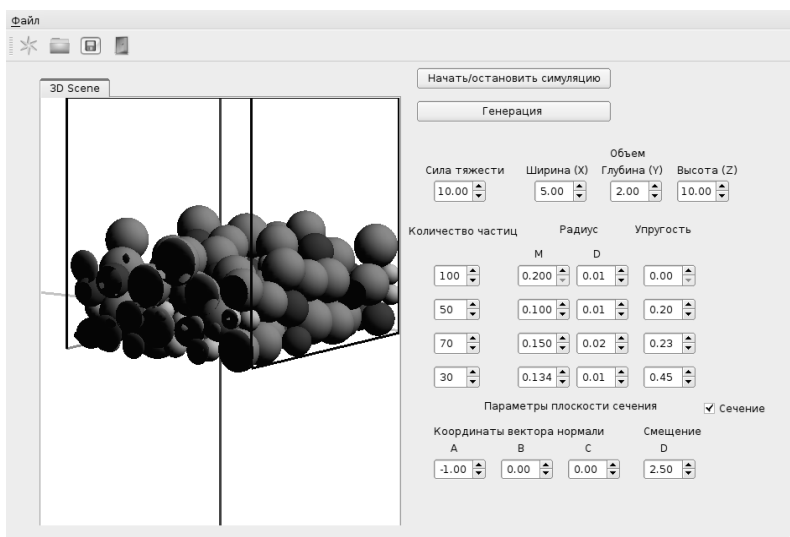


Рис. 2. Внешний вид пользовательского интерфейса с 3D отображением модельных структур вертикального шифа

Вывод. Симбиоз методов мезочастиц и молекулярной динамики позволяет учитывать многомасштабный подход в процессе предсказательного моделирования структурно-энергетических трансформаций, происходящих на нано-, микро- и мезоуровнях. Программный комплекс дает возможность моделировать структуры упаковок сфероидальных частиц (аг-

ломератов частиц) с возможностью их 3D-визуализации (для изучения волновой динамики горения в процессе СВ-синтеза порошковых материалов), рассчитывать структуры атомных кластеров, исследовать динамику кристаллизации аморфных металлов.

Библиографические ссылки

1. Валуев А. А., Норманн Г. Э., Подлипчук В. Ю. Метод молекулярной динамики: теория и приложения // Математическое моделирование: физико-химические свойства вещества. – М.: Наука, 1989. – С. 5–40.

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МНОГОМАСШТАБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ ГОРЕНИЯ И СТРУКТУРООБРАЗОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ СВ-СИНТЕЗА ИНТЕРМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ФАЗ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМАХ

В. И. Иордан, Е. С. Соснина

Алтайский государственный университет

г. Барнаул

Подход многомасштабного предсказательного моделирования подразумевает концепцию «сквозного» описания и классификации структур. Этот подход заключается в реализации иерархического рассмотрения взаимосвязей «структура – свойства» на различных уровнях структурной и функциональной иерархии систем. Использование многомасштабного подхода в процессе моделирования позволяет корректно учитывать влияние явлений и элементарных процессов, происходящих на нано-, микро- и мезоуровнях структурной и функциональной иерархии гетерогенных систем, на явления и процессы, происходящие на ее макроуровне, и тем самым достовернее и количественно точнее определять (предсказывать) структуру и свойства целевых продуктов «самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС)», сопровождающегося процессом горения в гетерогенной порошковой смеси различных компонентов (металлов и/или неметаллов).

Необходимо отметить, что реализация многомасштабного предсказательного моделирования со всей очевидностью немыслима без применения математических моделей со сложной функциональностью и высокопроизводительных суперкомпьютерных вычислительных технологий на этапе моделирования структурно-фазовых превращений для определения (предсказания) свойств целевых продуктов СВ-синтеза.

Для анализа влияния различных факторов на динамику физико-химического неизотермического превращения в процессе СВ-синтеза, а также и для построения математической модели, учитывающей наиболее полно весь комплекс многофазности СВ-синтеза и неоднородности струк-

туры упаковки реагирующей смеси компонентов, необходимо учитывать различные уровни масштаба гетерогенности: макроскопический, мезоскопический и микроскопический. Первый служит для описания динамики процесса во всем объеме порошковой смеси, второй – для рассмотрения физико-химических явлений на отдельных частицах и агломератах, третий – на «контактных пятнах», т. е. на участках поверхностей частиц (в большей степени – на «наноразмерных» участках), на которых инициируется «топохимическая» реакция СВ-синтеза.

Учет макроскопического и мезоскопического масштабов при построении математической модели волновой динамики горения хотя и представляет собой некоторые трудности, но вполне реализуем. Практическое большинство моделей, опубликованных в различных источниках, в процессе численных экспериментов используют подход «сплошной» среды с осредненными параметрами, хотя на самом деле порошковая смесь представляет собой пористую пространственно неоднородную среду с определенной структурой упаковки частиц-реактивов в смесях. Эти модели, используя лишь основные осредненные параметры, сопоставляемые с опытными данными, такие как средняя глубина превращения, средняя температура, средний размер частиц, средняя величина избыточной энергии и другие, тем самым достигают достоверности модельных представлений лишь в макроскопическом приближении.

Перед СВ-синтезом предварительно может использоваться «механоактивация» порошковой смеси, которая осуществляет «накачку» избыточной энергией реагирующих частиц, накапливаемой в образующихся структурных дефектах, в результате чего за счет уменьшения эффективной энергии активации происходит ускорение химической реакции (кинетический фактор ускорения реакции). Механическое воздействие вызывает непрерывное измельчение таких слоистых образований и формирование из них новых образований с более сложной внутренней структурой («микрорекомпозигов»).

Развитие этого процесса уменьшает размер отдельных слоев реагентов – масштаб гетерогенности, определяющий характерное время массопереноса реагентов друг к другу. В предельном случае масштаб гетерогенности становится настолько мал, что наиболее медленная (лимитирующая) стадия химического превращения переходит от массопереноса к собственно химической реакции (проявление структурного фактора ускорения реакции).

Кроме структурных изменений, интенсивное механическое воздействие на материал приводит к разогреву измельчаемого материала. Тепловыделение от химического превращения и диссипативное тепловыделение определяют температурный фактор ускорения химического превращения. Некоторые модели учитывают мезоскопический масштаб гетерогенности

лишь косвенным путем – в виде «подгоночного» параметра, усредненного по всему объему.

Прямой учет мезоскопического масштаба при построении математической модели волновой динамики горения должен опираться на различие теплофизических свойств отдельных частиц (или агломератов частиц) в каждой пространственно-временной точке волны горения с учетом структурных и фазовых превращений.

В предлагаемом подходе для численных расчетов по традиционной модели горения в виде уравнений теплопроводности и кинетики химического взаимодействия отдельных частиц и агломератов с учетом их гистограмм распределения по размерам предварительно генерируется и сохраняется в памяти «псевдослучайная» реализация пространственно-распределенной структуры упаковки этих частиц. Информация о сгенерированной в процессе компьютерного моделирования структуре сохраняется в справочной базе данных программы, и она позволяет корректно учитывать значения теплоемкости, плотности, теплопроводности и других параметров компонентов смеси в текущей пространственно-временной точке расчетной области.

Уравнения теплопроводности (1) и кинетики химического взаимодействия реагентов (3) с учетом внутренних источников тепловыделения в химической реакции СВ-синтеза, теплообмена с внешней средой можно записать следующим образом [1]

$$\frac{\partial}{\partial t}(c \cdot \rho \cdot T) = \text{div}(\lambda \cdot \text{grad}(T)) + f(T, \eta), \quad (1)$$

$$f(T, \eta) = Q \cdot \rho \cdot k(T) \cdot \varphi(\eta) \cdot f(S) + \alpha \cdot (T - T_0), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = k(T) \cdot \varphi(\eta) \cdot f(S), \quad (3)$$

где $T = T(x, y, z, t)$ – температура в текущей расчетной пространственной точке порошковой смеси в момент времени t ;

$c = c(x, y, z, T(x, y, z, t))$ и $\rho = \rho(x, y, z, T(x, y, z, t))$ – соответственно, удельная теплоемкость и плотность порошковой смеси, пространственное распределение компонентов которой смоделировано с учетом их гистограмм распределения по размерам;

$Q = Q(x, y, z, T(x, y, z, t))$ – тепловой эффект реакции на единицу массы продукта, зависящий от стехиометрического состава компонентов в окрестности расчетной точки (от энергии тепловыделения той схемы реакции, в которой образуется соответствующее данной стехиометрии и температуре определенное интерметаллическое соединение согласно диаграмме состояния системы компонентов);

$\lambda = \lambda(x, y, z, T(x, y, z, t))$ – теплопроводность материала частицы (компонента смеси), покрывающей текущую расчетную точку;

T_0 – температура внешней среды;

$\eta = \eta(x, y, z, t)$ – глубина химического превращения (массовая доля продукта по отношению к массе реакционной смеси и продукта);
 $S(x, y, z, T(x, y, z, t))$ – площадь реакционной контактной межфазной поверхности частиц (агломератов) в окрестности расчетной точки;
 α – коэффициент, учитывающий теплопотери во внешнюю среду.

Первое слагаемое в правой части уравнения (2) представляет собой функцию источника тепловыделения в ходе химической реакции СВ-синтеза, в которой константа химической реакции (температурно-активационная функция) определяется выражением

$$k(T) = k_0 \exp(-E/(RT)), \quad (4)$$

где k_0 – предэкспонент;

E – энергия активации реакции, определяемая законом Аррениуса.

Аналогично тепловому эффекту $Q = Q(x, y, z, T(x, y, z, t))$ энергия активации $E = E(x, y, z, T(x, y, z, t))$ соответствует определенной фазе продукта (разновидности интерметаллидов) согласно диаграмме состояния системы с учетом процентного соотношения массовых долей компонентов смеси и температуры в расчетной точке. Кинетическую функцию $\varphi(\eta)$ можно представить известным классом функций

$$\varphi(\eta) = \frac{\exp(-m \cdot \eta)}{\eta^\beta} \cdot (1 - \eta)^n \quad (5)$$

для трех случаев: 1) $\beta \neq 0, m = n = 0$ (степенной закон); 2) $m \neq 0, \beta = n = 0$ (экспоненциальный закон); 3) $n \neq 0, \beta = m = 0$ (гомогенная кинетика).

В первых двух случаях (когда масштаб гетерогенности превышает молекулярно-кинетический размер порядка 1 нм) кинетическая функция определяется диффузионным торможением через слой продуктов, в последнем случае (с уменьшением масштаба гетерогенности) обуславливается гомогенной кинетикой реакции (скорость реакции контролируется собственно химической реакцией).

Для реализации соответствующих уравнению (1) сеточных вычислений используются «экономичные» неявные схемы двуциклического расщепления на основе схемы Кранка-Николсона (6), которые, являясь схемами суммарной аппроксимации, все-таки имеют второй порядок точности по времени.

Схема (6) абсолютно устойчива, экономична, реализуется с помощью метода прогонки. Ускорение вычислений достигается использованием МВС с распределенной памятью в сочетании с принципом «геометрического параллелизма», который предполагает проведение декомпозиции расчетной области на равные (по числу узлов сетки) подобласти соответственно числу процессоров.

Верхние «дробные» индексы соответствуют промежуточным слоям по времени: $t_{j+i/8} = t_j + i \cdot \tau/8, I = 1, 2, \dots, 7$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T_h^{j+\frac{1}{8}} - T_h^j}{\tau} = \frac{1}{4} \Lambda_{h,1}^{j+\frac{1}{2}} \left(T_h^{j+\frac{1}{8}} + T_h^j \right), \quad \frac{U_h^{j+\frac{3}{8}} - U_h^{j+\frac{1}{8}}}{\tau} = \frac{1}{4} \Lambda_{h,2}^{j+\frac{1}{2}} \left(T_h^{j+\frac{3}{8}} + T_h^{j+\frac{1}{8}} \right), \\ \frac{T_h^{j+\frac{5}{8}} - T_h^{j+\frac{3}{8}}}{\tau} = \frac{1}{4} \Lambda_{h,3}^{j+\frac{1}{2}} \left(T_h^{j+\frac{5}{8}} + T_h^{j+\frac{3}{8}} \right), \quad \frac{T_h^{j+\frac{7}{8}} - T_h^{j+\frac{5}{8}}}{\tau} = f_h^{j+\frac{1}{2}}, \\ \frac{T_h^{j+\frac{9}{8}} - T_h^{j+\frac{7}{8}}}{\tau} = \frac{1}{4} \Lambda_{h,2}^{j+\frac{1}{2}} \left(T_h^{j+\frac{9}{8}} + T_h^{j+\frac{7}{8}} \right), \quad \frac{T_h^{j+\frac{7}{8}} - T_h^{j+\frac{5}{8}}}{\tau} = \frac{1}{4} \Lambda_{h,2}^{j+\frac{1}{2}} \left(T_h^{j+\frac{7}{8}} + T_h^{j+\frac{5}{8}} \right), \\ \frac{T_h^{j+1} - T_h^{j+\frac{7}{8}}}{\tau} = \frac{1}{4} \Lambda_{h,1}^{j+\frac{1}{2}} \left(T_h^{j+1} + T_h^{j+\frac{7}{8}} \right). \end{array} \right. \quad (6)$$

До сих пор не существует удовлетворительных подходов для определения безразмерной функции $f(S)$, характеризующей влияние на интенсивность химического превращения площади реакционной межфазной поверхности контактирующих частиц в окрестности расчетной точки. Для определения площади S межфазной поверхности частиц и агломератов используется математический аппарат теории вероятности и математической статистики, который оперирует осредненными и максимальными оценками «эффективных» размеров частиц. Однако локальная структура упаковки частиц в окрестности расчетной точки (в агломератах) существенно влияет на изменение скорости реакции в данной локальной области. Например, в локальной области с высоким значением площади реакционной межфазной поверхности реакция может кратковременно протекать по механизму «теплового взрыва», и, как следствие, на термограмме может наблюдаться кратковременный резкий «пик» температуры – «сверхадиабатическая» температура реакции.

В предлагаемом подходе при оценивании площади S и функции $f(S)$ в расчетах используется «псевдослучайная» реализация пространственно-распределенной структуры упаковки частиц, позволяющая учесть мезоскопический и микроскопический масштабы гетерогенности.

В нашей модели учитываются схемы химических реакций, в соответствии с которыми в окрестности расчетной точки образуются и разлагаются интерметаллические соединения (металлические фазы), для которых известны экспериментальные данные по тепловому эффекту и энергиям активации реакций. Фазы определяются по диаграмме состояния системы компонентов смеси с учетом текущей температуры и относительных массовых долей компонент в окрестности расчетной точки.

Структура слоя продуктов взаимодействия подтверждает сложность и неоднозначность процессов, протекающих на границе раздела компонентов. Строгой теории диффузионного взаимодействия между твердым и жидким металлами в настоящее время не существует. В [2] предложен подход, имеющий хорошую перспективу. В этой работе дано описание кинетики роста интерметаллических фаз в пределах мезоэчейки. Подход

применим к системам в предположении о послойном образовании интерметаллидов на контактных поверхностях, при условии малости линейных размеров или полного отсутствия двухфазных промежуточных прослоек между гомогенными областями. Математическая модель состоит из уравнений диффузии типа с радиальной симметрией

$$\frac{1}{D_i} \frac{\partial C_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 C_i}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial C_i}{\partial r}, \quad r_i(t) \leq r \leq r_{i+1}(t), \quad i = 1 \div 5 \quad (7)$$

и системы балансовых соотношений на подвижных межфазных границах (конкретные соотношения приведены в [2]), решения которых также реализуются устойчивыми сеточными схемами. Через C_i обозначена концентрация твердого металла в i -й фазе, а его коэффициент диффузии в этих фазах $D_i(T) = D_{i0} \exp(-E_i / RT)$, где E_i – энергии активации фаз.

Библиографические ссылки

1. Иордан В. И. Концептуальный подход и комбинированная модель волновой динамики горения с учетом комплекса структурных и многофазных превращений при СВ-синтезе интерметаллических фаз в гетерогенных системах // Известия Алтайского гос. ун-та. Сер. «Физика». – 2011. – № 1/2(69). – С. 154–158.
2. Ковалев О. Б., Неронов В. А. Металлохимический анализ реакционного взаимодействия в смеси порошков никеля и алюминия // Физика горения и взрыва. – 2004. – Т. 40. – № 2. – С. 52–60.

РАЗРАБОТКА ПАКЕТА ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ РАСЧЕТА ИНДУКЦИОННОГО ПЕРИОДА ВЗРЫВНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ³

А. В. Каленский, Е. А. Гришаева, А. А. Звеков, М. В. Ананьева
Кемеровский государственный университет

Цели работы: разработка пакета прикладных программ для расчета индукционного периода реакции разложения неорганических веществ на примере азидо серебра (АС); определение эффективных энергий активации стадий разложения.

Оценка длительности индукционного периода была проведена с использованием двух подходов.

Первый подход состоит в следующем. Расчет зависимости длительности индукционного периода от температуры проводился в режиме мгновенного нагрева образца от начальной температуры. Температура «стенки» в слагаемом ньютоновского теплоотвода задавалась равной начальной температуре образца.

³ Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 11-03-00897).

Результаты получены при повышении температуры. В интервале температур от 500 до 600°K эффективная энергия активации составила $1,27 \pm 0,01$ эВ. В этом температурном диапазоне концентрация реагентов на стадии индукционного периода находится в термическом равновесии с решеткой, что свидетельствует о тепловом характере взрыва. При дальнейшем увеличении температуры зависимость длительности индукционного периода проявляет меньшую энергию активации – $0,23 \pm 0,01$ эВ. В таких условиях концентрация реагентов не является равновесной, что свидетельствует о преимущественно цепном характере взрыва.

Второй подход заключается в том, что расчет был сделан в реальных условиях эксперимента, по определению температурной зависимости индукционного периода. Проводился он следующим образом. Образец в металлическом держателе помещался в сплав Вуда, обеспечивающий достаточно быстрый и всесторонний нагрев до необходимой температуры. Поэтому для приближения к условиям эксперимента в следующем расчете начальная температура образца задавалась равной комнатной, а температура «стенки» варьировалась. В этом случае в длительность индукционного периода входит время нагревания до заданной температуры, поэтому длительности индукционного периода, полученные по двум методикам, различаются.

Полученные значения индукционного периода представлены в табл. 1. Учет времени прогрева приводит к возрастанию индукционного периода на порядок величины и более. Отклонение одной зависимости от другой увеличивается при росте температуры. Так, при $T = 500^\circ\text{K}$ отличие выросло в 24,4 раза, тогда как при $T = 700^\circ\text{K}$ – уже в 4135 раз. Экспериментальная величина индукционного периода при температуре 600°K составляет 11,5 с. По данным расчета, индукционный период в случае мгновенного нагрева равен 0,1165 с, а при нагреве от термостата – 152,9 с. Поэтому количественное согласие с экспериментом может быть достигнуто при помощи варьирования коэффициента теплоотдачи. Последняя величина, в рамках классической теории теплового взрыва, пропорциональна квадрату размера образца. Однако если реакция взрывного разложения начинается в приповерхностной области и лишь после охватывает весь образец, ее величина может быть меньше оцениваемой. Возможно, это объясняет слабую зависимость индукционного периода от навески взрывчатого вещества [1].

Из данных нижеприведенной таблицы можно сделать вывод, что при увеличении температуры промежутки времени до взрыва, рассчитанные в условиях постоянного нагрева и с этапом охлаждения, стремятся к одинаковому значению, что на качественном уровне соответствует эксперименту.

В первом столбце таблицы приведена температура образца, во втором – длительность индукционного периода до взрыва при данной температуре, в третьем – длительность первого нагревания и охлаждения

до комнатной температуры, в четвертом – общее время до взрыва, складываемое из длительностей всех трех этапов процесса, в пятом – общее время до взрыва без учета времени охлаждения до комнатной температуры и в шестом – коэффициент отношения времени взрыва с охлаждением от длительности индукционного периода до взрыва при данной температуре.

Индукционный период при охлаждении системы

$T_{\text{сн}}$ К	t_1 , сек	$t_1/2$, сек	t_2 , сек	t_3 , сек	t_3/t_1
500	259,7	130	475,0	345	0,24
600	152,9	76,5	261,9	185,4	0,17
700	110,4	55,24	180,6	125,4	0,11
800	87,2	43,6	143,6	100	0,12
900	72,4	36,2	118,0	81,8	0,11
1000	62,1	31,1	99,3	68,1	0,08

Заключение. Был разработан пакет прикладных программ для расчета индукционного периода реакции разложения неорганических веществ на примере азида серебра (АС). Впервые проведены расчеты индукционного периода взрыва АТМ в случае поэтапного нагрева с периодами охлаждения. Показано, что этап охлаждения приводит к небольшому увеличению индукционного периода (8–24 %), рассчитанного как сумма длительностей этапов прогрева до взрыва, что согласуется с экспериментом.

Библиографические ссылки

1. Гришаева Е. А., Звекон А. А., Кригер В. Г., Каленский А. В. Моделирование взрывного разложения азидов серебра // Научное творчество молодежи: материалы XV Всерос. науч.-практ. конф. (27–28 апр. 2011 г.). – 2011. – Ч. 1. – С. 278–280.

ГЕНЕЗИС КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СПЕКТРОВ КРИСТАЛЛОВ XSiSb_2 СО СТРУКТУРОЙ ХАЛЬКОПИРИТА В БАЗИСЕ ВЕКТОРОВ ПОЛЯРИЗАЦИИ ИХ ПОДРЕШЕТОК

А. В. Копытов, М. К. Уфимцев

Кемеровский государственный университет

Динамика решетки тройных полупроводников типа A(II)B(IV)C(V)_2 со структурой халькопирита достаточно хорошо исследована как экспериментально, так и теоретически. Однако следует отметить, что соединения группы XSiSb_2 ($\text{X} = \text{Mg, Zn, Cd}$) исследовались довольно слабо, лишь в работе [1] были рассчитаны длинноволновые фононные час-

тоты для MgSiSb_2 с помощью метода функционала плотности и в работе [2] проведены оценки колебательных частот для ZnSiSb_2 и CdSiSb_2 .

Целью настоящей работы является исследование генезиса фоновых спектров XSiSb_2 в базе векторов поляризации их подрешеток и исследование парциальных вкладов частот. Для этого было проведено вычисление фоновых спектров в наиболее симметричных точках и направлениях зоны Бриллюэна (ЗБ), а также выполнен расчет плотности состояний для этих кристаллов.

Динамическая матрица может быть записана в виде блоков трехмерных матриц $\{\hat{D}_{il}\}_{\alpha\beta} = \hat{D}_{\alpha\beta}$ в следующей форме:

$$\hat{D}(\vec{k}) = \left\| \begin{array}{c|c|c} \hat{D}_{AA} & \hat{D}_{AB} & \hat{D}_{AC} \\ \hline \hat{D}_{BA} & \hat{D}_{BB} & \hat{D}_{BC} \\ \hline \hat{D}_{CA} & \hat{D}_{CB} & \hat{D}_{CC} \end{array} \right\|,$$

где $\hat{D}_{AA}$, $\hat{D}_{BB}$, $\hat{D}_{CC}$ – диагональные двумерные блоки, отвечающие за взаимодействие между одинаковыми атомами (X-X, Si-Si, Sb-Sb);

блоки $\hat{D}_{AB}$ и $\hat{D}_{BA}$ – недиагональные двумерные блоки, отвечающие за взаимодействие первого и второго атома (X-Si, Si-X);

аналогично блоки $\hat{D}_{BC}$ и $\hat{D}_{CB}$, $\hat{D}_{AC}$ и $\hat{D}_{CA}$ отвечают за взаимодействие (Si-Sb и X-Sb).

Расчеты проводились в модели Китинга, которая успешно используется для описания динамики решетки сложных полупроводниковых соединений с тетраэдрической координацией. Параметры модели определялись путем программной оптимизации параметров модели, сопоставляющей экспериментальные и теоретические частоты. Общее число параметров в модели – шесть: две центральные константы взаимодействия α_1 и α_2 , две угловые константы β_1 и β_2 , два эффективных заряда q_1 и q_2 в единицах заряда электрона. Используемые параметры представлены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры модели

	MgSiSb₂	ZnSiSb₂	CdSiSb₂
$\alpha_1, (103 \text{ дин/см})$	21,2	17,0	20,0
$\alpha_2, (103 \text{ дин/см})$	42,5	33,0	34,0
$\beta_1, (103 \text{ дин/см})$	1,0	1,5	1,6
$\beta_2, (103 \text{ дин/см})$	1,3	1,5	1,6
$q_1(e_0)$	0,50	0,80	0,70
$q_2(e_0)$	0,50	0,40	0,45

Результаты нашего расчета достаточно хорошо согласуются с данными из теоретических работ [1, 2].

Таблица 2

**Значения частот и вкладов колебаний подрешеток
для MgSiSb_2 , ZnSiSb_2 и CdSiSb_2**

Сим- метрия	MgSiSb_2				ZnSiSb_2				CdSiSb_2			
	Частота, см-1	Вклады, %			Частота, см-1	Вклады, %			Частота, см-1	Вклады, %		
		Mg	Si	Sb		Zn	Si	Sb		Cd	Si	Sb
Γ_1	138	0	0	100	125	0	0	100	129	0	0	100
Γ_2	154	0	0	100	143	0	0	100	141	0	0	100
	112	0	0	100	102	0	0	100	108	0	0	100
Γ_3	329	1	90	9	293	0	91	9	282	0	89	11
	261	92	0	8	147	87	1	12	116	69	4	27
	105	7	10	83	77	13	8	79	68	31	7	62
Γ_4 (LO/TO)	332/356	0	75	25	309/302	0	91	9	297/290	0	81	19
	249/268	81	1	18	166/149	68	1	31	136/125	52	0	48
	105/105	7	10	83	77/76	13	7	80	71/70	19	11	70
Γ_5 (LO/TO)	351/371	2	77	21	317/311	0	84	16	316/310	0	84	16
	344/346	0	88	12	305/304	0	91	9	304/303	0	90	10
	272/288	85	5	10	169/153	75	2	23	138/129	60	2	38
	263/264	91	0	9	147/147	84	1	15	121/122	70	3	27
	98/98	2	15	83	74/74	4	10	86	70/70	19	6	75
	97/97	8	2	90	70/70	17	5	78	62/62	21	8	71

На рис. 1 приведены вычисленные фоновые спектры и плотности состояний MgSiSb_2 (внизу), ZnSiSb_2 (слева) и CdSiSb_2 (справа). Для этой группы соединений интересен характер поведения фоновых спектров при изменении массы катионов II группы в достаточно большом интервале ($M_{\text{Mg}} = 24,31$ а.е.м., $M_{\text{Zn}} = 65,39$ а.е.м., $M_{\text{Cd}} = 112,41$ а.е.м.), в то время как масса катиона Si ($M_{\text{Si}} = 28,09$ а.е.м.) и масса аниона Sb ($M_{\text{Sb}} = 112,76$ а.е.м.) сильно отличаются друг от друга.

Анализ этого рисунка и таблицы вкладов (табл. 2) показывает, что колебательные спектры кристаллов ZnSiSb_2 и CdSiSb_2 обнаруживают значительное топологическое сходство, за исключением нижних оптических ветвей, которым соответствует большой вклад подрешеток Sb, достигающий 86 % в ZnSiSb_2 , который сопровождается увеличением смешивания с колебаниями катионов II группы, вклад которых возрастает с ростом массы и достигает 31 % для самой низкой частоты симметрии Γ_3 в CdSiSb_2 . Такое поведение частот этой группы объясняется чисто массовым эффектом.

Кроме того, с использованием методики, изложенной в [3], были получены фоновые спектры подрешеток этих соединений.

На рис. 2 представлена эволюция фонового спектра подрешеток к фоновым спектрам кристаллов с учетом подключения двух подрешеток одновременно. При последовательном включении двух взаимодействий происходит восстановление фонового спектра. На последнем этапе при отключенном взаимодействии X-Si фоновый спектр практически восстанавливается, за исключением акустических ветвей вблизи центра ЗБ.

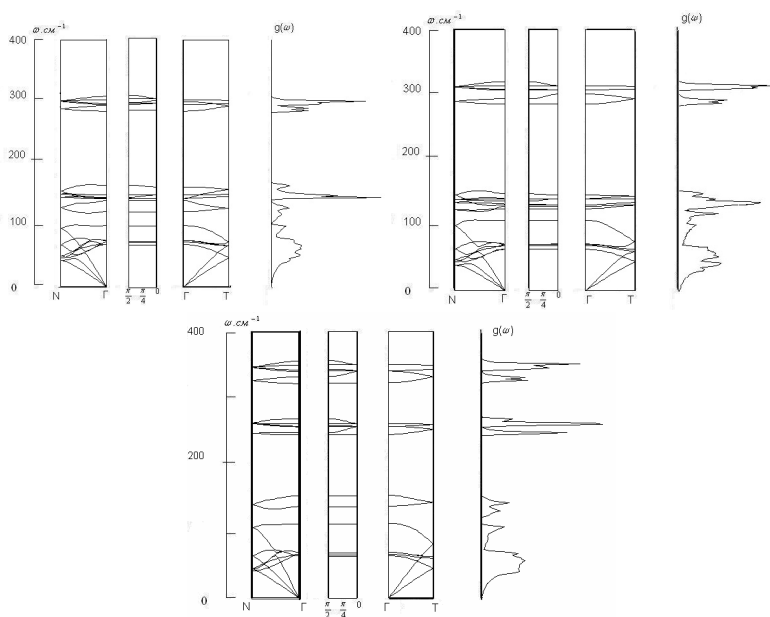


Рис. 1. Фононные спектры и плотности состояний кристаллов ZnSiSb_2 (слева), CdSiSb_2 (справа) и MgSiSb_2 (внизу)

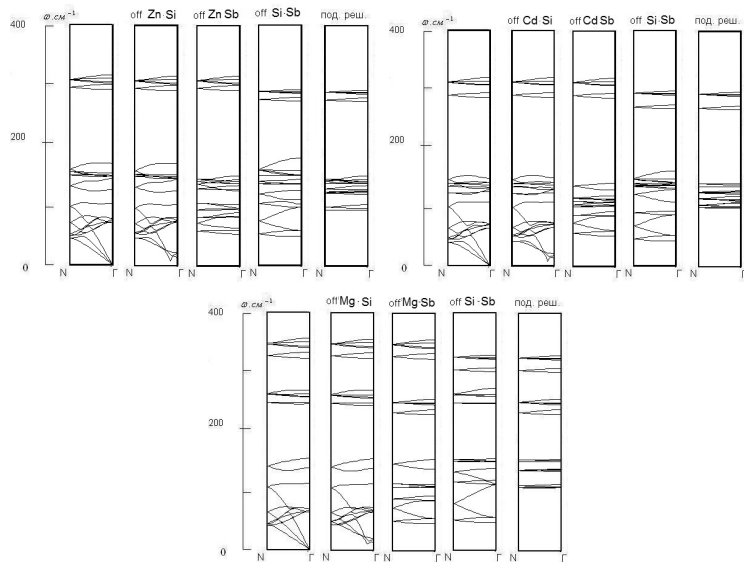


Рис. 2. Фононные спектры кристаллов MgSiSb_2 (внизу), ZnSiSb_2 (слева) и CdSiSb_2 (справа) с одним выключенным недиагональным блоком взаимодействия

Изложенная выше оригинальная методика восстановления фононных спектров из спектров подрешеток может использоваться и для других сложных кристаллов.

Библиографические ссылки

1. Басалаев Ю. М., Демушин П. В., Николаева Е. В., Поплавной А. С., Силинин А. В. Влияние симметрии подрешеток на зонную структуру кристалла MgSiN_2 // Известия вузов. Физика. – 2010. – Т. 53. – № 10. – С. 108.
2. Ohrendorf F. W., Heusaler H. Lattice dynamics of chalcopyrite type compounds. Part I. Vibrational frequencies // Cryst. Res. Technol. – 1999. – Vol. 34. – P. 339–349.
3. Кириенко Т. П., Копытов А. В., Поплавной А. С. Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2006. – Т. 3. – Вып. 2. – С. 39–40.

О ДАЛЬНЕЙШЕМ ИЗМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В СИСТЕМЕ НОРМАЛИЗАЦИИ МАССЫ ТЕЛА ЧЕЛОВЕКА «МИНУС ФУНТ»

В. В. Кромер

*Русско-немецкий университет
г. Новосибирск*

Ранее [1] нами изменялась глубина обратной связи в системе нормализации массы тела (МТ) человека «Минус фунт», что выразилось в изменении калорийности рациона питания худеющего человека не на 100 ккал на 100 г сигнала ошибки, то есть отклонения фактического недельного изменения МТ от запланированного, а на 50 ккал (величина 100 ккал / 100 г является общепринятой в диетологии, поскольку это значение вытекает из энергетической ценности депонированного в организме человека жира: 7 ккал/г). Далее величина коррекции обрезалась на уровне 100 ккал, т. е. зависимость $y = f(x)$ аппроксимировалась линейным порогом.

Необходимость в ограничении величины коррекции возникает вследствие длиннохвостовости распределения недельных изменений МТ, при этом хвосты распределения тяжелеют не за счет физиологического изменения запасов депонированного жира, а за счет «сбоев» в работе желудочно-кишечного тракта и нарушений водно-солевого обмена. Нами была поставлена задача дальнейшей оптимизации зависимости коррекции от изменения МТ.

Известно, что по эмпирическим графикам, описывающим распределение двух случайных переменных, связанных монотонной зависимостью, можно найти функциональную зависимость между переменными путем установления связи между абсциссами, соответствующими одной ординате. Распределение изменений жировой ткани можно оценить как нормаль-

ное $p = N(0; 0,14 \text{ кг})$ исходя из физиологических колебаний уровня основного обмена в пределах ± 150 ккал и физической активности ± 200 ккал. Фактические же изменения МТ дают распределение, близкое к нормальному $p = N(0; 0,28 \text{ кг})$, но с утяжеленными хвостами, где эпизодически могут наблюдаться значения, лежащие далеко за пределами, определяемыми известным правилом «трех сигм».

Нормальность первого распределения и положительный эксцесс второго позволяют отказаться от функции линейного порога для описания искомой зависимости и высказаться в пользу одной из сигмоидальных функций. На данном этапе исследования в сетевой калькулятор расчета рекомендуемой калорийности рациона питания для пользователей системы «Минус фунт» зашивается рациональная сигмоида $y = 150x / (200 + |x|)$.

Библиографические ссылки

1. Кромер В. В. Об изменении глубины обратной связи в системе нормализации веса «Минус фунт» на основе экспериментальных данных // Социология, политика и финансы: матер. Рос. науч.-техн. конф. СибГУТИ (26–27 апр. 2012 г.) – Новосибирск, 2012.

МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ МНОГОШАГОВОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

В. Н. Крутиков, Я. Н. Вершинин

Кемеровский государственный университет

Нередко в задачах математического моделирования различных явлений действительности возникает необходимость многократного нахождения экстремума гладких и негладких функций высокой размерности, что требует наличия быстросходящихся релаксационных алгоритмов оптимизации. В этой работе для построения эффективных алгоритмов минимизации негладких функций высокой размерности предлагается и изучается многошаговый метод решения множества неравенств, в котором для ускорения сходимости используется идея ортогонализации последовательных пар направлений процесса обучения. Показано, что использование принципа ортогонализации последовательных пар направлений приводит к ускорению сходимости многошагового алгоритма по сравнению с классическим методом Качмажа. На основе предлагаемого многошагового метода обучения формулируется, теоретически и численно исследуется релаксационный субградиентный алгоритм минимизации.

1. Постановка задачи. Для решения задачи безусловной минимизации

ции $f(x) \rightarrow \min_{x \in R^n}$ в релаксационных процессах ε -субградиентного типа $x_{k+1} = x_k - \gamma_k \cdot s_{k+1}$, $\gamma_k = \arg \min_{\gamma \in R^1} f(x_k - \gamma \cdot s_{k+1})$, направление спуска s_{k+1} выбирается из множества $S(\partial_\varepsilon f(x_k))$ [1, с. 259], где $\partial_\varepsilon f(x_k)$ – ε -субградиентное множество в точке x_k , а $S(G) = \{s \in R^n \mid \min_{g \in G} (s, g) > 0\}$, где G выпуклое множество. Обозначим η_G – ближайший к началу координат вектор множества G , $\rho_G = \|\eta_G\|$, $\mu_G = \eta(G) / \|\eta(G)\|$, $s^* = \eta_G / \rho_G^2$, $R_G = \max_{g \in G} \|g\|$.

Задача 1. Необходимо найти вектор неизвестных параметров $s^* \in R^n$, удовлетворяющий следующей системе неравенств: $(s^*, g) > 0, \forall g \in G \subset R^n$.

Здесь и далее n – размерность пространства, $(\cdot, \cdot)$ – оператор скалярного произведения и $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора. Обозначим $S(G)$ множество решения задачи 1.

Методы решения задачи 1 и построение на этой основе эффективных методов минимизации впервые получены в работах [2–4]. В следующем разделе совершенствуется алгоритм решения неравенств на основе алгоритма Качмажа [3, 4] посредством введения ортогонализации последовательных пар векторов процесса обучения [5].

2. Многошаговый алгоритм решения множества неравенств. В работе сформулирован алгоритм А1 для получения вектора $s_k \in S(G)$, т. е. решения задачи 1. Итерация получения приближения s^* в алгоритме А1 имеет вид:

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1 - (s_k, g_k)}{(p_k, g_k)} p_k, p_k = \begin{cases} g_k, & \text{если } (g_k, p_{k-1}) \geq 0, \\ g_k - \frac{(g_k, p_{k-1})}{\|p_{k-1}\|^2} p_{k-1}, & \text{если } (g_k, p_{k-1}) < 0. \end{cases}$$

Свойства сходимости алгоритма А1 сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть множество G выпуклое, замкнутое, ограниченное ($R_G < \infty$) и удовлетворяет условию отделимости, то есть $\rho_G > 0$. Тогда для оценки скорости сходимости к точке s^* последовательности $\{s_k\}$, генерируемой алгоритмом А1 до момента останова, справедливо соотношение:

$$\|s_k - s^*\|^2 \leq (\|s_0\| + \rho_G^{-1})^2 - k / R_G^2,$$

а при некотором значении k , удовлетворяющем неравенству

$$k \leq k^* \equiv R_G^2 (\|s_0\| + \rho_G^{-1})^2 + 1,$$

будет получен вектор $s_k \in S(G)$, то есть решение задачи 1.

3. Алгоритм минимизации на основе многошагового метода

для решения множества неравенств. В работе, на основе многошагового алгоритм А1, строится релаксационный субградиентный метод минимизации М1. Метод М1 для нахождения точек $x^* \in R^n$ задачи $f(x) \rightarrow \min_{x \in R^n}$ имеет следующий вид.

Алгоритм М1

1. Задать начальное приближение $x_0 \in R^n$ и $s_0 \in R^n$, целые $k = i = 0$.
2. Положить $k = k + 1, q_k = i, s_i = 0, \sigma_i = 0$.
3. Задать ε_k, m_k .
4. Вычислить субградиент $g_i \in \partial f(x_i)$, удовлетворяющий условию $(s_i, g_i) \leq 0$, если $g_i = 0$, то закончить работу алгоритма.
5. Получить новое приближение s_{k+1} с учетом $y_k \equiv 1$:
$$s_{k+1} = s_k + \frac{1 - (s_k, g_k)}{(p_k, g_k)} p_k,$$

$$p_k = \begin{cases} g_k, & \text{если } (g_k, p_{k-1}) \geq 0, \\ g_k - \frac{(g_k, p_{k-1})}{\|p_{k-1}\|^2} p_{k-1}, & \text{если } (g_k, p_{k-1}) < 0. \end{cases}$$
6. Вычислить новое приближение критерия $\sigma_{i+1} = \sigma_i + (g_i, g_i)^{-1}$.
7. Вычислить новое приближение точки минимума:
$$x_{i+1} = x_i - \gamma_i s_{i+1}, \gamma_i = \arg \min_{\gamma \in R} f(x_i - \gamma_i s_{i+1}).$$
8. Положить $i = i + 1$.
9. Если $1/\sqrt{\sigma_i} < \varepsilon_k$ или $i - q_k > m_k$, то перейти на пункт 2, если иначе – перейти на пункт 4.

В следующей теореме определяются условия, при которых алгоритм М1 генерирует последовательность $\{x_i\}$, сходящуюся к точке минимума $x^* \in R^n$.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ строго выпукла, множество $D(x_0) = \{x \in R^n | f(x) \leq f(x_0)\}$ ограничено и

$$\varepsilon_k \rightarrow 0, m_k \rightarrow \infty$$

Тогда любая предельная точка последовательности $\{x_{q_k}\}$, генерируемая алгоритмом М1, является точкой минимума функции $f(x)$ на R^n .

4. Численный эксперимент. Приведем некоторые численные результаты исследования алгоритма минимизации М1. Главным признаком останова исследуемого алгоритма являлась точность решения задачи по функции. Для тестовой группы задач безусловной минимизации взяты следующие функции [4] с различными требованиями к точности решения, видами и степенями сложности:

1. Точность по функции 10^{-4} :

$$a) f_1 = \max(x_k | \cdot k), f_1^* = 0.0, x^* = (0, 0, \dots, 0), x_0 = \left(10, \frac{10}{2}, \frac{10}{3}, \dots, \frac{10}{n}\right).$$

2. Точность по функции 10^{-8} :

$$a) f_1 = \sum_{k=1}^n [1000 \cdot (x_k - x_{k-1})^2 + (1 - x_k)^2],$$

$$f_1^* = 0.0, x^* = (1, 1, \dots, 1), x_0 = (0, 0, \dots, 0).$$

$$f_2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot k^2, f_2^* = 0.0, x^* = (0, 0, \dots, 0), x_0 = \left(10, \frac{10}{2}, \frac{10}{3}, \dots, \frac{10}{n}\right).$$

Для сравнения алгоритмов минимизации на основе метода Качмажа [3, 4] и многошагового метода использовался критерий суммарного числа вычислений функции и субградиента по всей группе задач. Значение функции и ее субградиент всегда вычислялись одновременно. Результаты тестирования сведены в следующую таблицу.

Результаты численного эксперимента

Размерность задачи/ количество задач в группе	Суммарное количество вычислений функции и субградиента / количество решенных задач в группе	
	На основе алгоритма Качмажа [3, 4]	Многошаговый алгоритм
50/3	2130/3	1980/3
150/3	3961/3	3297/3
300/3	6629/3	5243/3
500/3	9873/3	7474/3
700/3	13132/3	9839/3
1000/3	17975/3	13280/3
$\Sigma/18$	53700/18	41113/18

По результатам тестирования можно заключить, что использование ортогонализации последовательных направлений для решения множества неравенств приводит к ускорению сходимости алгоритма минимизации на основе многошагового метода по сравнению с методом Качмажа.

5. Заключение. В работе предложен и теоретически исследован многошаговый алгоритм для решения множества неравенств в условиях, аналогичных условиям работы алгоритмов для решения множества неравенств в субградиентных методах минимизации. Ускоряющие свойства предлагаемого метода определяются использованием идеи ортогонализации последовательных направлений процесса обучения. Теоретически показано, что свойства сходимости подобного алгоритма не хуже, чем у алгоритма Качмажа. На основе многошагового алгоритма предлагается и исследуется релаксационный субградиентный алгоритм минимизации негладких функций большой размерности. Рассматриваемый субградиент-

ный алгоритм минимизации может быть использован в схемах структурно-параметрического синтеза математических моделей.

Библиографические ссылки

1. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
2. Крутиков В.Н., Петрова Т.В. Релаксационный метод минимизации с растяжением пространства в направлении субградиента // Экономика и мат. методы. – 2003. – Т. 39. – Вып. 1. – С. 33–49.
3. Крутиков В.Н., Горская Т.А. Семейство релаксационных субградиентных методов с двухранговой коррекцией матриц метрики // Экономика и мат. методы. – 2009. – Т. 45. – № 4. – С. 37–80.
4. Крутиков В.Н. Обучающие методы безусловной оптимизации и их применение. – Томск: Изд-во Том. гос. пед. ун-та, 2008. – 264 с.
5. Крутиков В.Н., Вершинин Я.Н. Алгоритмы обучения на основе ортогонализации последовательных векторов // Вестник КемГУ. – 2011. – Вып. 2 (50). – С. 37–42.

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Н. А. Кучер^{**}, А. Е. Мамонтов^{*}, Д. А. Прокудин^{**}

^{*}Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

^{**}Кемеровский государственный университет

Математическая модель бинарной смеси вязких теплопроводных сжимаемых жидкостей (газов), рассмотренная в данной работе, основана на подходе, предложенном в [1], и в некотором роде является обобщением модели Навье-Стокса. Нелокальные результаты для многомерных уравнений смесей с учетом сжимаемости и вязкости составляющих на сегодняшний день получены для стационарных баротропных течений [2]. Более простые модели (в приближении Стокса и квазистационарные модели) с позиции существования решений в целом изучены в более ранних работах [3–5]. Что касается исследований движений смесей вязких сжимаемых жидкостей с учетом температурных эффектов, то в отличие от сжимаемого теплопроводного газа (см. работы [6–8] и указанную там библиографию) на данный момент имеются лишь результаты в случае одномерного движения [9, 10]. Методология, применяемая в данной работе, основана на опыте исследований уравнений Навье-Стокса применительно к сжимаемым вязким жидкостям [11–14]. В частности, существенное значение имеет использование аналогов так называемого эффективного вязкого давления [12, 15], для которых также удастся доказать коммуникативные соотношения для слабых пределов.

Предполагается, что бинарная смесь вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей (газов) заполняет ограниченную область $\Omega \subset R^3$ евклидова пространства точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ с границей $\partial\Omega \in C^2$ и состояние смеси характеризуется распределением плотностей $\rho_i(\mathbf{x})$, давлений $p_i(\mathbf{x})$, температур $\theta_i(\mathbf{x})$ и полями скоростей $\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x})$ ее составляющих ($i=1,2$). Перечисленные величины удовлетворяют следующим уравнениям [1, 6, 16, 17]:

$$\operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}^{(i)}) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad i=1,2, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}^{(i)} \otimes \mathbf{u}^{(i)}) + \nabla p_i = \operatorname{div} \sigma^{(i)} + \mathbf{J}^{(i)} + \rho_i \mathbf{f}^{(i)} \quad \text{в } \Omega, \quad i=1,2, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\rho_i \theta_i \mathbf{u}^{(i)}) = \operatorname{div}(k(\theta_i) \nabla \theta_i) - \rho_i \theta_i \operatorname{div} \mathbf{u}^{(i)} + \Gamma_i \quad \text{в } \Omega, \quad i=1,2. \quad (3)$$

Первые два уравнения (1) выражают законы сохранения массы компонент смеси, уравнения (2) – законы сохранения импульсов, а (3) – законы сохранения энергий составляющих смеси в предположении, что работа внутренних сил пренебрежимо мала по сравнению с эффектом теплопроводности. Тензоры вязких напряжений $\sigma^{(i)}$, $i=1,2$ определяются равенствами [1]

$$\sigma^{(i)}(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}) = \sum_{j=1}^2 (2\mu_{ij} D(\mathbf{u}^{(j)}) + \lambda_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u}^{(j)} \mathbf{I}), \quad i=1,2, \quad (4)$$

$$D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} ((\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T),$$

в которых коэффициенты вязкости μ_{ij} , λ_{ij} , $i, j=1,2$ удовлетворяют

$$\begin{aligned} \mu_{11} > 0, \quad 4\mu_{11}\mu_{22} - (\mu_{12} + \mu_{21})^2 > 0, \\ v_{11} > 0, \quad v_{12} = 0, \quad 4v_{11}v_{22} - (v_{12} + v_{21})^2 > 0, \\ v_{ij} = \lambda_{ij} + 2\mu_{ij}, \quad i, j=1,2. \end{aligned} \quad (5)$$

Предполагается, что давление p_i i -й составляющей смеси, векторы $\mathbf{J}^{(i)}$, $i=1,2$, отражающие интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси, и Γ_i , отвечающие за интенсивность обмена энергией, выражаются посредством формул [16, 7, 8]

$$\begin{aligned} p_i &= \rho_i^\gamma + \rho_i \theta_i, \quad \gamma > 1, \quad i=1,2, \\ \mathbf{J}^{(i)} &= (-1)^{i+1} a(\mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)}), \quad a > 0, \quad i=1,2, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Gamma_i = (-1)^{i+1} b(\theta_2 - \theta_1) + \frac{a}{2} |\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}|^2, \quad b > 0, \quad i=1,2.$$

Массовые силы $\mathbf{f}^{(i)}$, $i=1,2$ считаются заданными векторными полями, а величины λ_{ij} , μ_{ij} , γ , a , b – заданными константами. Уравнения (1), (2), (3) мы дополним краевыми условиями:

$$\mathbf{u}^{(i)} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad i=1,2, \quad (7)$$

$$k(\theta_i) \nabla \theta_i \cdot \mathbf{n} + L(\theta_i)(\theta_i - \hat{\theta}) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad i=1,2, \quad (8)$$

которые означают, что граница области течения является неподвижной твердой стенкой, на которой поддерживается заданный режим теплообмена с окружающей средой [8]. Следуя [8], мы предполагаем, что

$$\begin{aligned} k(\theta) &= 1 + \theta^m, \quad m = \text{const} > 1, \\ L(\theta) &= 1 + \theta^{m-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

а $\hat{\theta}$ – заданная положительная функция; $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. К уравнениям и граничным условиям необходимо добавить условия для плотностей, в качестве которых мы примем

$$\int_{\Omega} \rho_i d\mathbf{x} = M_i, \quad (10)$$

где M_i – заданные постоянные. Отметим, что из (5) следует неравенство (для любых векторных полей $\mathbf{u}^{(i)}$, исчезающих на $\partial\Omega$)

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} L_{ij}(\mathbf{u}^{(j)}) \cdot \mathbf{u}^{(i)} d\mathbf{x} \geq C_0 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{(i)}|^2 d\mathbf{x}, \quad (11)$$

$$\text{div } \sigma^{(i)} = - \sum_{j=1}^2 L_{ij}(\mathbf{u}^{(j)}), \quad L_{ij} = -\mu_{ij} \Delta - (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \nabla \text{div},$$

где $C_0 > 0$ – постоянная (зависящая от λ_{ij} и μ_{ij}).

В работе используются общепринятые (см., например, [18], [19]) обозначения функциональных пространств: $L_p(\Omega)$ ($W_p^l(\Omega)$) — пространство функций, интегрируемых со степенью $p \geq 1$ (вместе с обобщенными производными до порядка $l \geq 0$ включительно). $C^l(\bar{\Omega})$ ($C_0^l(\Omega)$) — банахово пространство функций, обладающих непрерывными частными производными до порядка $l \geq 0$ включительно в $\bar{\Omega}$ (с компактными носителями, лежащими в Ω). Мы не различаем обозначения пространств вектор-функций и скалярных функций.

Определение. Обобщенным решением краевой задачи (1)–(10) называются неотрицательные функции $\rho_i \in L_1(\Omega)$, $i=1,2$, положительные функции $\theta_i \in W_{\frac{3}{2}}^1(\Omega)$, $i=1,2$ и векторные поля $\mathbf{u}^{(i)} \in W_1^{0,2}(\Omega)$, $i=1,2$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_{\Omega} \rho_i d\mathbf{x} = M_i, \quad \rho_i \theta_i \in L_2(\Omega), \quad \rho_i \mathbf{u}^{(i)} \in L_1(\Omega), \quad \theta_i^m \nabla \theta_i \in L_1(\Omega), \\ & \rho_i^\gamma \in L_{1,\text{loc}}(\Omega), \quad \rho_i |\mathbf{u}^{(i)}|^2 \in L_{1,\text{loc}}(\Omega), \quad i=1,2; \end{aligned}$$

2) для любых дифференцируемых функций G_i с ограниченными производными $G_i \in C(R)$, $i=1,2$ и произвольных функций $\psi_i \in C^1(\bar{\Omega})$, $i=1,2$ выполняются интегральные тождества

$$\int_{\Omega} \left(G_i(\rho_i) \mathbf{u}^{(i)} \cdot \nabla \psi_i + (G_i(\rho_i) - G'_i(\rho_i) \rho_i) \psi_i \text{div } \mathbf{u}^{(i)} \right) d\mathbf{x} = 0, \quad i=1,2;$$

3) для любых векторных полей $\varphi^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega)$, $i=1,2$ выполняются интегральные тождества

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \left(\mu_{ij} \int_{\Omega} (\nabla \otimes \mathbf{u}^{(j)}) : (\nabla \otimes \varphi^{(i)}) d\mathbf{x} + (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^{(j)} \operatorname{div} \varphi^{(i)} d\mathbf{x} \right) - \\ - \int_{\Omega} (\rho_i \mathbf{u}^{(i)} \otimes \mathbf{u}^{(i)}) : (\nabla \otimes \varphi^{(i)}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho_i^\gamma \operatorname{div} \varphi^{(i)} d\mathbf{x} + \\ + \int_{\Omega} \rho_i \theta_i \operatorname{div} \varphi^{(i)} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{(i)} + \rho_i \mathbf{f}^{(i)}) \cdot \varphi^{(i)} d\mathbf{x}, i=1,2; \end{aligned}$$

4) для любых $\eta_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $i=1,2$ верны интегральные тождества

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \rho_i \theta_i \mathbf{u}^{(i)} \cdot \nabla \eta_i d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} L(\theta_i)(\theta_i - \hat{\theta}) \eta_i d\sigma + \int_{\Omega} k(\theta_i) \nabla \theta_i \cdot \nabla \eta_i d\mathbf{x} = \\ = - \int_{\Omega} \rho_i \theta_i \operatorname{div} \mathbf{u}^{(i)} \eta_i d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \Gamma_i \eta_i d\mathbf{x}, \quad i=1,2. \end{aligned}$$

Основной результат работы формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема. Для любых $\mathbf{f}^{(i)} \in C(\overline{\Omega})$, $i=1,2$, $\hat{\theta} \in C^1(\partial\Omega)$, $\hat{\theta} > 0$, $\gamma > 3$, $m > m_0(\gamma)$, $m_0(\gamma) = 6(\gamma-1)(2\gamma-1)/((\gamma-3)(6\gamma-1))$ краевая задача (1)–(10) имеет по крайней мере одно обобщенное решение.

Библиографические ссылки

1. Rajagopal K. R., Tao L. Mechanics of mixtures. – Singapore: World Scientific, 1995.
2. Кучер Н. А., Прокудин Д. А. Стационарные решения уравнений смеси вязких сжимаемых жидкостей // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Т. 12, 3 (39). – С. 52–65.
3. Frehse J., Goj S., Malek J. On a Stokes-like system for mixtures of fluids // SIAM J. Math. Anal. – 2005. – Vol. 36, 4. – P. 1259–1281.
4. Goj S. Analysis for mixtures of fluids // Dissertation. Universitat Bonn. Math. Inst. – 2005. <http://bib.math.uni-bonn.de/downloads/bms/BMS-375.pdf>.
5. Frehse J., Weigant W. On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids // Appl. Math. – 2008. – Vol. 53, 4. – P. 319–345.
6. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983.
7. Mucha P., Pokorný M. Weak solutions to equations of steady compressible heat conducting fluids // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2010. – Vol. 20, 5. – P. 785–813.
8. Mucha P., Pokorný M. On the steady compressible Navier–Stokes–Fourier system // Commun. in Math. Phys. – 2007. – Vol. 288, N 1. – P. 349–377.
9. Петров А. Н. Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов // Динамика сплошной среды. – 1982. – Вып. 56. – С. 105–121.
10. Папин А. А. Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений движения двухфазной смеси. – Барнаул: Изд. АлтГУ, 2007.
11. Lions P.-L. Existence globale des solutions pour les équations de Navier–Stokes compressible isentropiques // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1993. – Ser. 1, 316. – P. 1335–1340.

12. Lions P.-L. Bornes sur la densité pour les équations de Navier–Stokes compressible isentropiques avec conditions aux limites de Dirichlet // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1999. – Ser. 1, 328. – P. 659–662.
13. Feireisl E., Novotny A., Petzeltova H. On the existence of globally defined weak solutions to the Navier–Stokes equations // J. of Math. Fluid Mech. – 2001. – 3. – P. 358–392.
14. Плотников П. И., Соколовски Ж. Стационарные решения уравнений Навье–Стокса для двухатомных газов // Успехи математических наук. – 2007. – Т. 62. – Вып. 3 (375). – С. 117–148.
15. Lions P.-L. Compacité des solutions des équations de Navier–Stokes compressible isentropiques // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1993. – Ser. 1, 317. – P. 115–120.
16. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. – М.: Наука, 1987.
17. Седов Л. И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1970.
18. Мазья В. Г. Пространства С. Л. – Л.: Изд. ЛГУ, 1985.
19. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СМЕТАНЫ

И. А. Литвинова

Кемеровский технологический институт пищевой промышленности

Структурно-механические свойства пищевых продуктов могут изменяться под воздействием не одного, а целого ряда технологических факторов [1]. Поэтому при проведении реологических исследований пищевых продуктов возникает необходимость применения многофакторных корреляционных моделей.

Цель работы – исследование влияния различных параметров на реологические показатели сметаны.

Исследовали образцы сметаны ОАО «Сибирское молоко» (г. Новосибирск) (жирность 10, 15 и 20 %) на ротационном вискозиметре «Rheotest-2» с использованием цилиндрической измерительной системы S/S2. Скорость сдвига изменяли в диапазоне от 1 до 437,4 с⁻¹. Диапазон изменения температуры составил (6 ÷ 31)°C. Все измерения были выполнены в трех повторностях.

С целью выявления влияния каждого из исследованных параметров (содержание жира, механическое воздействие, температура) и их взаимного влияния на реологические свойства сметаны было выполнено математическое моделирование с использованием матрицы полнофакторного эксперимента ПФЭ2³ [2]. В ходе исследований изменяли следующие параметры: жирность образцов Ж (X_1); температуру образцов Т (X_2); скорость сдвига $\dot{\gamma}$ (X_3). За выходной параметр Y были приняты значения напряжения сдвига τ .

План ПФЭ2³ дает возможность рассчитать 8 коэффициентов ($N = 8$):

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3 \quad (1)$$

По результатам проведенных исследований было получено корреляционное уравнение регрессии, показывающее влияние вышеперечисленных факторов в отдельности и совместно на конечный результат исследований. После выявления незначимых коэффициентов по критерию Стьюдента (b_{123} – незначим, так как $t_{123} = 2,23$; $t_{кр} = 2,77$; ($|t_{123}| < t_{кр}$)) и проверки уравнения на адекватность по критерию Фишера ($F = 4,97$; $F_{кр} = 5,41$; ($F < F_{кр}$)) уравнение приняло следующий вид:

$$Y = 89,61 + 24,96 X_1 - 37,638 X_2 + 73,125 X_3 - 3,24 X_1 X_2 - 30,6 X_2 X_3 + 17,775 X_1 X_3. \quad (2)$$

С учетом принятых обозначений и найденных значений центра эксперимента и интервала варьирования для исследуемых параметров была получена искомая зависимость:

$$\tau = -9,32 + 2,378 Ж + 0,226 T + 0,298 \dot{\gamma} - 0,052 Ж T + 0,016 Ж \dot{\gamma} - 0,011 T \dot{\gamma} \quad (3)$$

Из анализа уравнения (3) следует, что увеличение скорости сдвига (X_3) от центра эксперимента на 1 интервал варьирования и неизменных значениях жирности (X_1) и температуры (X_2) продукта вызывает увеличение напряжения сдвига τ на 0,289 ед.; увеличение температуры (X_2) от центра эксперимента на 1 интервал варьирования и неизменных значениях жирности (X_1) и скорости сдвига (X_3) также вызывает увеличение напряжения сдвига τ , хотя и в несколько меньшей степени – на 0,226 ед. Наибольшее увеличение напряжения сдвига τ – на 2,378 ед. – происходит при увеличении жирности (X_1) от центра эксперимента на один интервал варьирования и неизменных значениях температуры (X_2) и скорости сдвига (X_3).

Имеем следующие частные случаи:

- 1) при $Ж = 10 \%$ и $T = 15,5^\circ\text{C}$, $\tau = 9,9216 + 0,287 \cdot \dot{\gamma}$;
- 2) при $Ж = 10 \%$ и $\dot{\gamma} = 218,7$, $\tau = 115,296 - 2,74661 \cdot T$;
- 3) при $T = 15,5^\circ\text{C}$ и $\dot{\gamma} = 218,7$, $\tau = 21,33059 + 5,13929 \cdot Ж$.

Таким образом, повышение скорости сдвига и жирности увеличивает напряжение сдвига, а повышение температуры наоборот снижает напряжение сдвига.

По результатам регрессионного анализа построены поверхности, отражающие влияние факторов на напряжение сдвига (рис. 1–3).

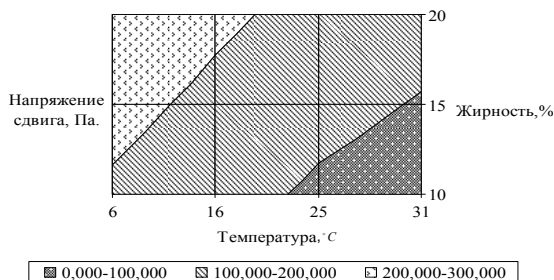


Рис. 1. Зависимость напряжения сдвига τ от жирности $Ж$ и температуры T при фиксированной скорости сдвига $\dot{\gamma} = 437,4 \text{ c}^{-1}$



Рис. 2. Зависимость напряжения сдвига τ от жирности $Ж$ и скорости сдвига $\dot{\gamma}$ при фиксированной температуре $T = 31^\circ\text{C}$

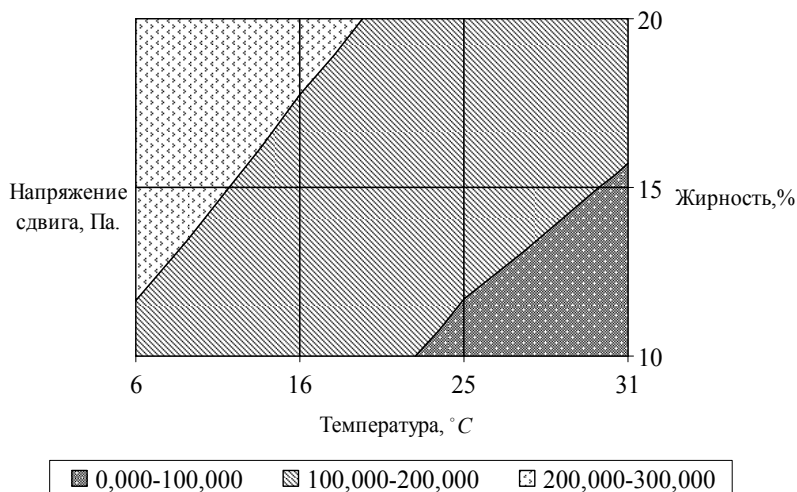


Рис. 3. Зависимость напряжения сдвига τ от температуры T и скорости сдвига $\dot{\gamma}$ при фиксированной жирности $Ж = 15\%$

Из анализа поверхностей следует, что в большей степени вязкость сметаны зависит от содержания в ней жира. С увеличением массовой доли жира в продукте повышаются вязкость и скорость сдвига. При производстве сметаны в процессе низкотемпературной обработки сливок молочный жир частично переходит в твердое состояние. При низких температурах происходит массовая кристаллизация молочного жира в виде мелких кристаллов с развитой поверхностью и большой смачиваемостью жидким жиром, что способствует формированию более пластичной консистенции сметаны.

При повышении температуры происходит незначительное расплавление молочного жира, отвердевшего в процессе созревания сливок, вследствие чего вязкость продукта снижается, соответственно снижается и напряжение сдвига. При увеличении скорости сдвига возрастает сопротив-

ление структуры внешнему воздействию рабочего органа реометра, а значит, возрастает и напряжение сдвига.

Все вышесказанное может быть использовано при математическом моделировании режимов течения исследованного продукта в технологических трубопроводах и каналах дозирующих машин, а также при проектировании и производстве новых видов продуктов.

Библиографические ссылки

1. Манцев А. Н., Берман Ю. К., Калошин Ю. А. Изучение структурно-механических характеристик сливок // Хранение и переработка сельхозсырья. – 1998. – № 9.
2. Грачев Ю. П. Математические методы планирования экспериментов. – М.: Пищевая пром-сть, 1979. – 200 с.

ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНЫЕ СЛЕДЯЩИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ С ОШИБКАМИ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ПО СОСТОЯНИЮ

О. О. Мухина, В. И. Смагин

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Рассматривается задача локально-оптимального управления по наблюдаемому выходу для дискретных объектов с запаздыванием по состоянию. Подобная задача для объекта без запаздывания исследована в работе [1]. В статье [2] рассмотрена близкая задача для управления объектом с запаздыванием по состоянию при точном измерении компонент вектора состояния.

Пусть управляемый объект с запаздыванием по состоянию описывается разностным уравнением:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + A_1x(k-h) + Bu(k) + q(k); \\ x(\tau) &= \varphi(\tau), \tau = -h, 1-h, 2-h, \dots, 0; k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Модель канала измерений имеет вид:

$$y(k) = Sx(k) + v(k), \quad (2)$$

где $x(k) \in R^n$ – вектор состояний;

$h > 0$ – величина временного запаздывания (целое число);

$u(k) \in R^m$ – управление;

$y(k) \in R^l$ – вектор измерений;

A, A_1, B, S – матрицы соответствующих размерностей.

Оптимизируемый локальный критерий представлен следующим образом:

$$I(k) = M \left\{ (x(k+1) - z(k))^T C (x(k+1) - z(k)) + u^T(k) D u(k) \right\}, \quad (3)$$

где $C = C^T \geq 0, D = D^T \geq 0$ – весовые матрицы;

$z(k) \in R^n$ – отслеживаемый вектор, удовлетворяющий уравнению:

$$z(k+1) = Fz(k) + q_z(k), \quad z(0) = z_0, k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

В (1), (2) и (4) $q(k)$, $v(k)$, $q_z(k)$ – гауссовские случайные последовательности входных возмущений и ошибок измерений, соответственно, с заданными характеристиками

$$(M\{q(k)q^T(j)\} = Q(k)\delta_{kj}; \quad M\{v(k)v^T(j)\} = V(k)\delta_{kj}).$$

Управление объектом (1) при измерениях (2) определим в следующей параметрической форме:

$$\begin{aligned} u(k) &= K_1(k)y(k) + K_2(k)y(k-h) + K_3(k)z(k) = \\ &= K_1(k)Sx(k) + K_1(k)v(k) + K_2(k)Sx(k-h) + K_2(k)v(k-h) + K_3(k)z(k). \end{aligned} \quad (5)$$

Решение задачи локально-оптимального слежения сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение. Если для объекта (1), канала измерений (2) и локального критерия (3) матрицы:

$$\begin{aligned} \bar{C} &= (B^T C B + D) > 0, \\ \bar{P}(k) &= \begin{bmatrix} V(k) + SP_x(k)S^T & -SP_x(k-h,k) & -P_{zx}(k)S^T \\ -SP_x(k,k-h)S^T & SP_x(k-h)S^T + V(k-h) & -P_{zx}(k,k-h)S^T \\ -SP_{xz}(k) & -SP_{xz}(k-h,k) & P_z^T(k) \end{bmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (6)$$

положительно определены для всех $k = 1, 2, \dots$, тогда оптимальные в смысле минимума критерия (3) коэффициенты передачи для управления (5) определяются по формулам:

$$\begin{aligned} K_1^*(k) &= [E - (E - \gamma F)^{-1}(E - \hat{C}G)^{-1}(L + \hat{C}F)(\beta + \gamma G)] \times \\ &\quad \times [(\alpha + \gamma \hat{D}) + (E - \hat{C}G)^{-1}(N + \hat{C}\hat{D})], \\ K_2^*(k) &= (E - \hat{C}G)^{-1}[N + \hat{C}\hat{D} + (L + \hat{C}H)K_1^*(k)], \\ K_3^*(k) &= \hat{D} + SK_1^*(k) + GK_2^*(k). \end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned} \alpha &= B^T C A_1 P_x(k-h,k)S^T + B^T C A P_x(k)S^T - B^T C P_{zx}(k)S^T; \\ \beta &= \bar{C} S P_x(k-h,k)S^T; \quad \gamma = \bar{C} P_{zx}(k)S^T; \\ N &= B^T C A_1 P_x(k-h)S^T + B^T C A P_x(k,k-h)S^T - B^T C P_{zx}(k,k-h)S^T; \\ \hat{C} &= \bar{C} P_{zx}(k,k-h)S^T; \quad L = \bar{C} S P_x(k,k-h)S^T; \\ \hat{D} &= B^T C A P_{xz}(k) + B^T C A_1 P_{xz}(k-h,k) - B^T C P_z(k); \quad H = \bar{C} S P_{xz}(k); \\ G &= \bar{C} S P_{xz}(k-h,k), \quad E - \text{единичная матрица.} \end{aligned}$$

В (6) матрицы $P_z(t) = M\{z(t)z^T(t)\}$, $P_x(t) = M\{x(t)x^T(t)\}$, $P_x(t,r) = M\{x(t)x^T(r)\}$, $P_{xz}(t,r) = P_{xz}^T(r,t) = M\{z(t)x^T(r)\}$, $P_{zx}(t) = P_{zx}^T(t) = M\{x(t)z^T(t)\}$, $P_{xz}(t,r) = P_{zx}^T(r,t) = M\{x(t)z^T(r)\}$, $P_{zx}(t) = P_{xz}^T(t) = M\{z(t)x^T(t)\}$ определяются системой разностных матричных уравнений с запаздываниями.

Асимптотическую точность слежения определим, вычислив оценку критерия:

$$J = \lim_{k \rightarrow \infty} M\{\|x(k) - z\|^2\}, \quad (7)$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора; z – постоянный отслеживаемый вектор. Построим сначала оценку для критерия $J(k) = M\{\|x(k) - z\|^2\}$. Задавая условие, что $k \rightarrow \infty$, найдем оценку для (7). При этом $\|\bar{A}\|_s = \alpha_1$, $\|\bar{A}_1\|_s = \alpha_2$ (здесь $\|\cdot\|_s$ – спектральная норма матрицы, $\bar{A} = A + BK_1^*S$, $\bar{A}_1 = A_1 + BK_2^*S$, $K_1^* = \lim_{k \rightarrow \infty} K_1^*(k)$, $K_2^* = \lim_{k \rightarrow \infty} K_2^*(k)$). Введем условие, что $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$. Отметим, что выполнение этого условия обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы с запаздываниями по состоянию [3]. Учитывая (1), (2), (5) при коэффициентах передачи $K_1^*, K_2^*, K_3^* = \lim_{k \rightarrow \infty} K_3^*(k)$, вычислим значение критерия для $k+1$ такта, из которого, в силу неравенства Коши-Буняковского, получим оценку:

$$J(k+1) \leq \alpha_1^2 J_1(k) + \alpha_2^2 J_1(k-h) + \alpha_1 \alpha_2 J_2(k, k-h) + \alpha_1 \alpha_2 J_2(k-h, k) + 2\alpha_2 r_1 J_3(k-h) + 2\alpha_1 r_1 J_3(k) + r_1^2 + tr \bar{Q}_1, \quad (8)$$

где: $r_1 = \|\bar{B}z\|$; $\bar{B} = BK_3^* - E$; $\bar{Q}_1 = Q + BK_1^*VK_1^{*T}B^T + BK_2^*VK_2^{*T}B^T$; $Q = \lim_{k \rightarrow \infty} Q(k)$; $V = \lim_{k \rightarrow \infty} V(k)$; $J_1(k) = M\{\|x(k)\|^2\}$; $J_2(k, k-h) = M\{\|x(k)\|\|x(k-h)\|\}$; $J_3(k) = M\{\|x(k)\|\}$;

Тогда, учитывая, что траектория замкнутой системы описывается уравнением:

$$x(k) = \bar{A}x(k-1) + \bar{A}_1x(k-h-1) + BK_1^*Sx(k-1) + BK_1^*v(k-1) + BK_2^*Sx(k-h-1) + BK_2^*v(k-h-1) + BK_3^*z + q(k-1), \quad (9)$$

вычислим рекуррентные соотношения для $J_3(k)$, $J_2(k, k-h)$ и $J_1(k)$:

$$J_3(k) \leq \alpha_1^k J_3(0) + \sum_{j=1}^k \alpha_1^{k-j} \alpha_2 J_3(j-h-1) + \frac{1-\alpha_1^{k-1}}{1-\alpha_1} r_2; \quad (10)$$

$$J_2(k, k-h) \leq \alpha_1^{2k} J_2(0, -h) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} \alpha_2^2 J_2(j-h, j-2h) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} \alpha_2 J_2(j, j-2h) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} \alpha_2 J_2(j-h, j-h) + r_2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} J_3(j) + r_2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} J_3(j-h) + r_2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} \alpha_2 J_3(j-2h) + r_2 \alpha_2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} J_3(j-h) + \frac{1-\alpha_1^{2(k-1)}}{1-\alpha_1^2} r_2^2 + \frac{1-\alpha_1^{2(k-1)}}{1-\alpha_1^2} tr \bar{Q}_3; \quad (11)$$

$$J_1(k) \leq \alpha_1^{2k} J_1(0) + \alpha_2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} J_2(j, j-h) + \alpha_2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} J_2(j-h, j) + 2r_1 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} J_3(j) + \alpha_2^2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-2} J_1(j-h) + 2r_1 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_1^{2k-2j-1} J_3(j-h) + \frac{1-\alpha_1^{2(k-1)}}{1-\alpha_1^2} r_2^2 + \frac{1-\alpha_1^{2(k-1)}}{1-\alpha_1^2} tr \bar{Q}_2, \quad (12)$$

где: $r_2 = \|\overline{BK}_3^* z\|$; $\overline{Q}_2 = Q + BK_1^* VK_1^{*T} B^T + BK_2^* VK_2^{*T} B^T$; $\overline{Q}_3 = BK_1^* VK_2^{*T} B^T$.

Оценку критерия (7) построим, учитывая неравенства (10)–(12). Тогда при $k \rightarrow \infty$ из (8) получим:

$$J \leq \alpha_1^2 \left[\frac{1}{1-\alpha_1^2} r_2^2 + \frac{1}{1-\alpha_1^2} \text{tr} \overline{Q}_2 \right] + 2 \frac{\alpha_1 r_1 r_2}{1-\alpha_1} + \alpha_2^2 \left[\frac{1}{1-\alpha_1^2} r_2^2 + \frac{1}{1-\alpha_1^2} \text{tr} \overline{Q}_2 \right] + \\ + 2 \frac{\alpha_2 r_1 r_2}{1-\alpha_1} + 2 \alpha_1 \alpha_2 \left[\frac{1}{1-\alpha_1^2} r_2^2 + \frac{1}{1-\alpha_1^2} \text{tr} \overline{Q}_3 \right] + r_1^1 + \text{tr} \overline{Q}_1. \quad (13)$$

Из оценки (13) видно, что при практически естественных ограничениях на класс динамических систем метод локально-оптимального слежения при косвенных измерениях с ошибками обеспечивает асимптотическое слежение с точностью, определяемой интенсивностью аддитивных возмущений и ошибок в канале измерений, динамическими характеристиками замкнутой системы, значениями параметров объекта и коэффициентов передачи следящей системы управления.

Библиографические ссылки

1. Смагин В. И., Параев Ю. И. Синтез следящих систем управления по квадратичным критериям. – Томск: Изд-во ТГУ, 1996. – 171с.
2. Gong-You Tang, Hui-Ying Sun, Yi-Min Liu. Optimal tracking control for discrete time-delay systems with persistent disturbances // Asian Journal of Control. – 2006. – Vol. 8. – № 8. – P. 135–140.
3. Sreten B. Stojanovic, Dragutin Lj. Debeljkovic. On the asymptotic stability of linear discrete time delay systems // Mechanical Engineering. – 2004. – Vol. 2. – № 1. – P. 35 – 48.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН С ПОГРУЖЕННЫМИ В ИДЕАЛЬНУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ ТЕЛАМИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ КРАТНЫХ УЗЛОВ

А. А. Наруджимова

Кемеровский государственный университет

В работе рассматривается взаимодействие линейных волн с заглубленными телами в идеальной несжимаемой жидкости. Численный расчет выполняется методом граничных элементов. Расчетная область имеет негладкую поверхность, в связи с чем присутствуют ошибки численной методики в точках, лежащих на ребрах и в углах рассматриваемой области. Для снижения данной погрешности применяются кратные узлы.

Рассматривается движение идеальной несжимаемой жидкости в области $\Omega(t)$, ограниченной сверху свободной поверхностью Γ_1 , снизу – твердой стенкой Γ_2 . Под свободной поверхностью Γ_1 расположе-

но твердое тело с поверхностью S (рис. 1). На боковых границах Γ_3 , Γ_4 , Γ_5 и Γ_6 области $\Omega(t)$ заданы неотражающие условия, на нижней границе и поверхности погруженного тела – условие непротекания. На свободной поверхности – динамическое и кинематическое условия. Положение свободной поверхности описывается функцией подъема. В рассматриваемой области происходит безвихревое потенциальное движение однородной несжимаемой жидкости.

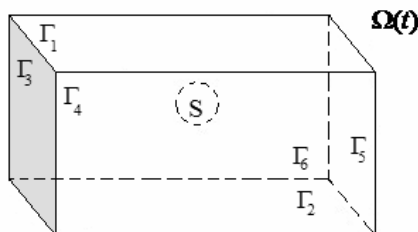


Рис. 1. Расчетная область $\Omega(t)$

Постановка задачи записана в безразмерных переменных. Потенциал поля скоростей $\varphi = \varphi(t, \vec{x})$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad \vec{x} \in \Omega(t).$$

В данной работе рассматриваются линейные волны. Потенциал поля скоростей можно представить в виде суммы $\varphi = \varphi_i + \varphi_s$ волнового потенциала φ_i , где φ_i – известная функция, и потенциала φ_s , учитывающего распространение возмущений, генерируемых погруженным телом. На свободной поверхности выполняются кинематическое и динамическое условия:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + g\eta = 0. \quad (2)$$

На твердой стенке Γ_2 и поверхности погруженного тела S задано условие непротекания

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0,$$

где $\vec{n}$ – внешняя по отношению к жидкости нормаль.

На боковых гранях расчетной области задано неотражающие условия, учитывающее, что возмущения, порождаемые погруженным телом, не доходят до свободной границы $\varphi = \varphi_i$.

В качестве начальных условий задано положение свободной поверхности $\Gamma_1|_{t=0} = \Gamma_0$ и распределение потенциала на ней в начальный момент времени $t = 0$:

$$\phi|_{t=0} = \phi(0, \vec{x})$$

Задача заключается в определении формы свободной поверхности и распределении потенциала на ней во все последующие за начальным моменты времени.

Представив потенциал в виде суммы волнового потенциала и потенциала, учитывающего возмущения, генерируемые погруженным телом, можно рассматривать два упрощения, что дает большие преимущества при отладке методики численного счета. В случае линейных волновых течений, когда присутствует только волновой потенциал ϕ_i , рассматривается задача о распространении линейных волн в прямоугольном бассейне. Задача о колебании твердой сферы под свободной поверхностью рассматривается для случая, когда присутствует только потенциал возмущений ϕ_s , генерируемых погруженным телом.

В задаче о распространении волн в прямоугольном бассейне отсутствует погруженное тело. Таким образом, отсутствует потенциал ϕ_s , учитывающий возмущения свободной поверхности, связанные с колебаниями тела. Движение жидкости обусловлено волновым потенциалом

$$\phi_i = \frac{H}{2} \frac{g}{z} \frac{ch[k(h+z)]}{ch(kh)} \sin(kx - \sigma t) \quad (3)$$

и известной функцией подъема свободной поверхности

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t), \quad (4)$$

где H – высота волны;

h – уровень спокойной свободной поверхности;

$k = \frac{2\pi}{L}$ – волновое число;

L – длина волны;

$\sigma = gk \cdot th(kh)$ – радиальная частота.

В этом случае линейные волны распространяются вдоль оси абсцисс, сохраняя свою форму при выходе за пределы расчетной области. При такой постановке задачи значительно упрощается отладка неотражающих граничных условий.

Для задачи о колебании твердой сферы под свободной поверхностью выбрана цилиндрическая, симметричная относительно центральной оси область (рис. 2). Под свободной поверхностью на центральной оси расположена твердая сфера, совершающая колебательные движения вдоль оси Oz , направленной вертикально вверх.

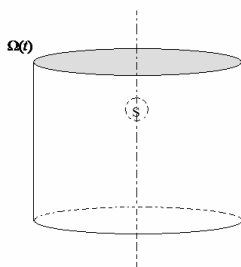


Рис. 2. Симметричная область для задачи о колебании твердой сферы под свободной поверхностью

В результате колебаний сферы на свободной поверхности формируются концентрические возмущения, распространяющиеся от центра к краям свободной поверхности, сохраняя осевую симметрию течения. Решение данной задачи дает возможность проверить верность алгоритма временного шага. От правильности вычисления шага по времени зависит, насколько точно будут посчитаны динамическое и кинематическое условия на каждом последующем шаге.

Решение описанных выше тестовых задач позволяет отладить численную методику (реализацию неотражающих граничных условий и алгоритма шага по времени), прежде чем приступить к решению задач о взаимодействии волновых линейных течений с заглубленными телами.

Библиографический список

1. Hou T. Y., Zhang P. Convergence of a boundary integral method for 3-d water waves // DCDS-B. – 2002. – Vol. 2. – № 1. – P. 1–34.
2. Vimal V. Boundary-Integral Analysis of Nonlinear Diffraction Forces on a Submerged Body. – Florida: Atlantic University, 2003. – 118 p.
3. Бенерджи П., Батерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках: пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
4. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. – М.: Наука, 1977. – 816 с.

ОСОБЕННОСТИ ВИБРОНАГРУЖЕННОСТИ ГРУЗОВОГО АВТОМОБИЛЯ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОДВЕСКАМИ

Ю. А. Поляков

*Национальный исследовательский
технологический университет «МИСиС»
г. Москва*

С помощью пространственной динамической грузовой автомобиля с независимыми подвесками осуществлена оценка его вибронагруженности.

Разработанная на базе программной системы ФРУНД [1] математическая модель грузового автомобиля с независимыми подвесками [2] позволяет определять показатели вибронагруженности при движении по случайному микропрофилю дороги.

Все расчеты для рассматриваемого автомобиля были выполнены при его движении с постоянной скоростью по разбитому булыжнику, соответствующему по своим спектральным характеристикам булыжнику автополигона НАМИ. Исследовалось прямолинейное движение с различными скоростями и с закрепленным рулем. По реализациям ускорений продолжительностью 15 с строились спектры вертикальных ускорений в характерных точках автомобиля.

На рис. 1 показана кинограмма перемещений элементов конструкции автомобиля при движении по разбитому булыжнику со скоростью 100 км/ч. Перемещения представлены в системе координат рамы.

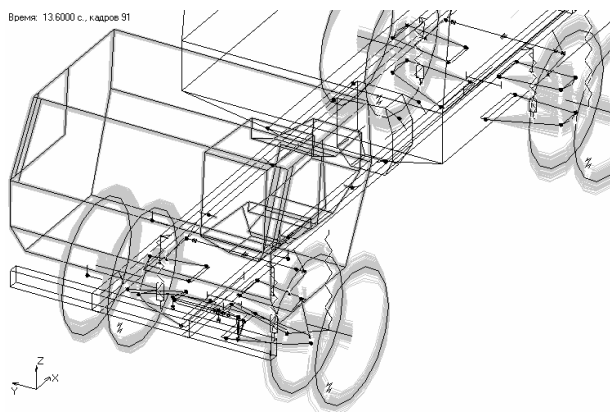


Рис. 1. Кинограмма перемещений элементов конструкции автомобиля (разбитый булыжник, 100 км/ч)

На рис. 2 приведены сравнительные экспериментальный и расчетный спектры вертикальных ускорений в точке, взятой на полу кабины, под сиденьем водителя. Экспериментальный спектр получен при испытаниях спортивного грузового автомобиля [2] на автополигоне НАМИ при движении по профилю, идентичному использовавшемуся в расчете.

Сравнение показывает качественное соответствие расчетного и экспериментального спектров. Для графиков спектральных плотностей вертикальных ускорений характерно наличие двух основных резонансов – низкочастотного и высокочастотного. Низкочастотный резонанс соответствует колебаниям поддрессоренной части автомобиля как твердого тела, а высокочастотный резонанс – взаимодействию колебаний рамы, кабины, кузова и соответствующих колебаний неподдрессоренных масс.

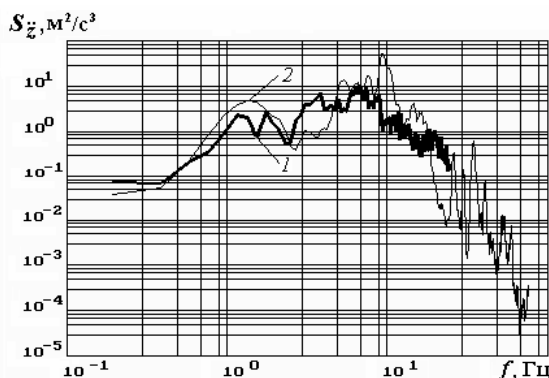


Рис. 2. Спектры вертикальных ускорений на полу кабины под сиденьем водителя (разбитый булыжник, 100 км/ч): 1 – эксперимент; 2 – расчет

Созданная математическая модель позволяет анализировать вибронагруженность конструкции автомобиля в характерных точках и определять влияние различных конструктивных параметров на показатели вибронагруженности.

На рис. 3 представлены спектры вертикальных ускорений в трех различных точках автомобиля – на сиденье водителя, в передней и задней частях грузовой платформы. С точки зрения плавности хода эти места представляют интерес, как места расположения водителя и груза. Из графиков спектров следует, что в задней части автомобиля имеют место максимальные низкочастотные колебания, соответствующие частоте подвески, однако вибрации на частоте мостов (10 Гц) здесь меньше, чем на полу кабины водителя.

Спектральный анализ вертикальных ускорений этих точек (см. рис. 3) показывает, что вид спектра может заметно отличаться в зависимости от выбранной точки измерения. Таким образом, зона, где наблюдаются наименьшие вертикальные ускорения, расположена внутри колесной базы автомобиля (между подвесками) и смещена в сторону более мягкой (передней) подвески.

Математическая модель указанного автомобиля позволяет оценивать влияние различных конструктивных параметров на вибронагруженность конструкции, например коэффициентов сопротивления амортизатора на дроссельном режиме.

Как показано на рис. 4, с увеличением коэффициентов сопротивления амортизатора задней подвески дисперсия вертикальных ускорений в зоне первого низкочастотного максимума уменьшается, а в межрезонансной зоне (между основными низкочастотным и высокочастотным максимумами) – увеличивается.

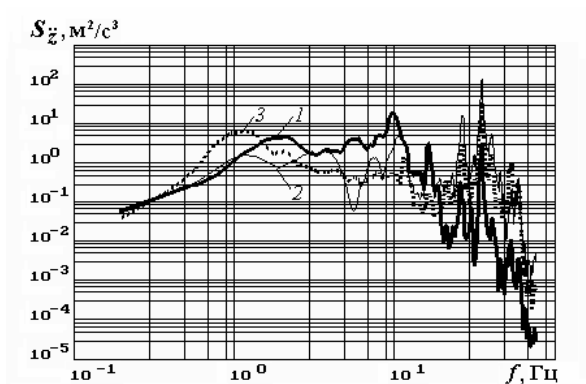


Рис. 3. Изменение спектров вертикальных ускорений по длине автомобиля (разбитый бульжник, 60 км/ч): 1 – на полу кабины под сиденьем водителя; 2 – в передней части грузовой платформы; 3 – в задней части грузовой платформы

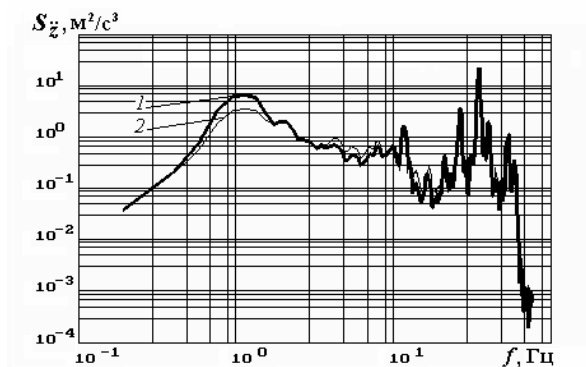


Рис. 4. Влияние коэффициентов сопротивления амортизатора подвески на колебания в задней части грузовой платформы. Спектры вертикальных ускорений (разбитый бульжник, 60 км/ч): 1 – исходный амортизатор; 2 – коэффициенты сопротивления амортизатора увеличены в два раза

Следовательно, при возрастании усилий сопротивления амортизатора наибольший эффект по снижению вибронагруженности наблюдается в частотном диапазоне $0,62 \div 1,98$ Гц. При увеличении коэффициентов сопротивления в два раза среднее квадратичное отклонение (СКО) вертикальных ускорений в указанном частотном диапазоне уменьшается с 2,219 до 1,738 м/с², т. е. на 21,7 %.

Увеличение ординат спектра в межрезонансной зоне происходит на значительно меньшую величину, чем в зоне низкочастотного максимума, однако наблюдается в более широком диапазоне частот ($3 \div 9$ Гц).

Уменьшение площади под графиком спектральной плотности в области низкочастотного резонанса может оказаться меньше, чем увеличение площади в межрезонансной области. Такое обстоятельство вызовет рост суммарной площади и, следовательно, дисперсии вертикальных ускорений и их СКО в диапазоне $0,3 \div 70$ Гц.

Выводы

1. Сопоставление спектров вертикальных ускорений, полученных расчетным и экспериментальным путем, показывает их качественное соответствие для рассмотренного режима движения.

2. Вид спектра вертикальных ускорений зависит от выбранной точки измерения. Зона, где наблюдаются наименьшие вертикальные ускорения, расположена внутри колесной базы автомобиля (между подвесками) и смещена в сторону более мягкой (передней) подвески.

3. С увеличением коэффициентов сопротивления амортизатора задней подвески дисперсия вертикальных ускорений в зоне первого низкочастотного максимума уменьшается, а в межрезонансной зоне (между основными низкочастотным и высокочастотным максимумами) – увеличивается.

Библиографические ссылки

1. Горобцов А. С. Программный комплекс расчета динамики и кинематики машин как систем твердых и упругих тел // Справочник: инженерный журн. – 2004. – № 9. – С. 40 – 43.

2. Горобцов А. С., Карцов С. К., Плетнев А. Е., Поляков Ю. А. Компьютерные методы построения и исследования математических моделей динамики конструкций автомобилей: монография. – М.: Машиностроение, 2011. – 463 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВРЕДНЫХ ВЕЩЕСТВ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

Н. Равшанов, Д. К. Шарипов, Н. Тоштемурова

*Центр разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при Ташкентском университете информационных технологий
г. Ташкент, Узбекистан*

Начало XXI века характеризуется бурным развитием информационных технологий и вычислительной техники и их программного и технического обеспечения. Этот процесс совпал с появлением большого количества проблем, связанных с защитой окружающей среды и экологией в целом.

Информационные технологии с математическим обеспечением, т. е. информационная и математическая модели, их методы реализации и программные средства для проведения вычислительных экспериментов на ЭВМ в экологии, как и в любой другой отрасли знаний, служат прежде

всего цели экономии ресурсов путем поиска и последующего использования информации для повышения эффективности человеческой деятельности.

Тем не менее необходимо отметить, что задачи охраны окружающей среды и сохранения экологического баланса не могут идти вразрез с процессом развития производств, так как без этого невозможно развитие экономики. Современные темпы развития, экономический потенциал любого государства требуют строительства все более мощных промышленных объектов, в результате чего увеличивается выброс в атмосферу вредных веществ и аэрозолей примесей в окружающую среду, что прямым образом воздействует на экологическое состояние индустриальных регионов.

Математическое сопровождение технологических процессов служит для исследователей и проектировщиков средством для выработки компромиссных решений – средством оптимизации процессов проектирования, строительства и запуска промышленных объектов с учетом санитарных норм, предупреждения изменений погодно-климатических факторов рассматриваемых регионов и т. д., что позволяет избегать экологического дисбаланса территорий (или минимизировать его) вследствие загазованности атмосферы, выпадения вредных аэрозольных примесей.

Теоретические и прикладные вопросы экологических проблем основываются на эффективном инструменте – математическом моделировании и вычислительном эксперименте, являющемся синтезом достижений традиционных научных методов и новых информационных технологий по переработке и представлению информации в удобной форме. Математическое и информационное обеспечение интеллектуальной автоматизированной системы базируется на «Информационной и математической модели объекта – числительного алгоритма решения задач – программных средств для проведения вычислительного эксперимента на ЭВМ – принятие решений по установленному факту».

Для прогнозирования процесса распространения солепылевых и аэрозольных частиц в атмосфере и принятия решений разработана модель, описываемая уравнением переноса и диффузии [1–2]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial t} + u \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial x} + v \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial y} + \\ & + (w - w_g) \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} + \sigma \theta(x, y, z, t) = \\ & = k_d \left(\frac{\partial^2 \theta(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, z, t)}{\partial y^2} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_z \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} \right) + Q(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными и краевыми условиями:

$$\theta(x, y, z, 0) = \theta_0(x, y, z), \quad (2)$$

$$\theta(x, y, z, t) \Big|_{x=0, x=a} = \theta(x, y, z, t) \Big|_{y=0, y=b} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial n} = -w_g \sin \alpha \theta(x, y, z, t) + \beta \theta(x, y, z, t) - f_0(x, y, z) \text{ на } G_{pz}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} = 0 \text{ на } G_H, \quad (5)$$

которые решаются в области $D = (0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < H, t > 0)$.

Здесь $\theta(x, y, z, t)$ – количество распространяющегося вещества; t – время; x, y, z – координаты; u, v, w – составляющие скорости ветра по направлениям x, y, z (соответственно); w_g – скорость осаждения частиц; γ_z – коэффициент турбулентного перемешивания; k_d – коэффициент диффузии; σ – коэффициент поглощения; α – угол наклона поверхности; β – коэффициент взаимодействия с подстилающей поверхностью; $Q(x, y, z, t)$ – мощность источников; $f_0(x, y, z)$ – количество аэрозольных частиц, попадающих от шероховатой поверхности земли в приземном слое атмосферы.

Переменные u, v, w вычислялись в ходе интегрирования уравнения гидродинамики процесса с учетом градиента давления по вертикали и горизонтали, силы Кориолиса, лучистого потока тепла и потока тепла за счет фазовых превращений водяного пара, с учетом притока влажного воздуха в атмосферу и т. д.

Основными факторами и параметрами, которые существенно воздействуют на ход процесса распространения вредных веществ в окружающую среду, являются коэффициенты диффузии, поглощения и взаимодействия с подстилающей земной поверхностью. Надо отметить, что указанные факторы зависят от погодных-климатических условий, от времени суток и времени года.

С учетом сказанного выше для определения коэффициента поглощения вредных веществ в атмосфере на основе статистической обработки многолетних данных получена синусоидальная зависимость в виде следующего соотношения:

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \Delta\sigma \sin \omega t, \quad (6)$$

где σ_0 – среднесуточное изменение коэффициента поглощения аэрозольных выбросов в атмосферу;

$\Delta\sigma$ – амплитуда изменения коэффициента поглощения за сутки;

ω – циклическая частота суточного изменения.

Для решения поставленной задачи, с использованием монотонной полунявной схемы, был разработан численный алгоритм, основанный на методе прямых, и проведены вычислительные эксперименты на ЭВМ (рис. 1, 2) [3].

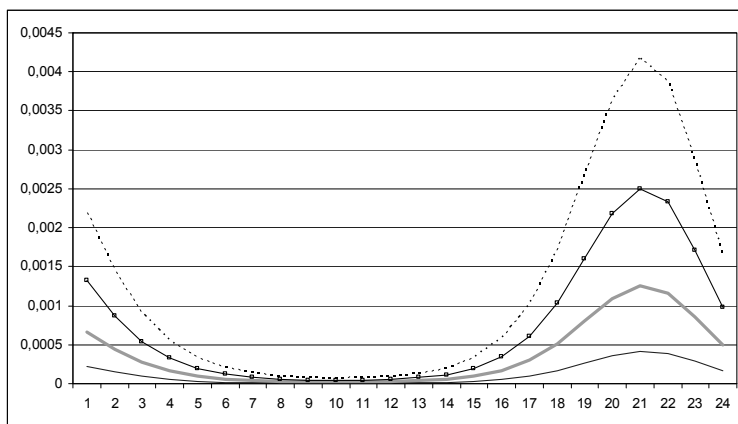


Рис. 1. Изменение концентрации аэрозольных выбросов в атмосферу по времени в зависимости от их первоначального распределения:
 — при нач. концентр., равной 0,0016 г/м куб.; —○— — при нач. концентр., равной 0,0012 г/м куб.; — — — — при нач. концентр., равной 0,0008 г/м куб.; —×— — при нач. концентр., равной 0,0004 г/м куб.

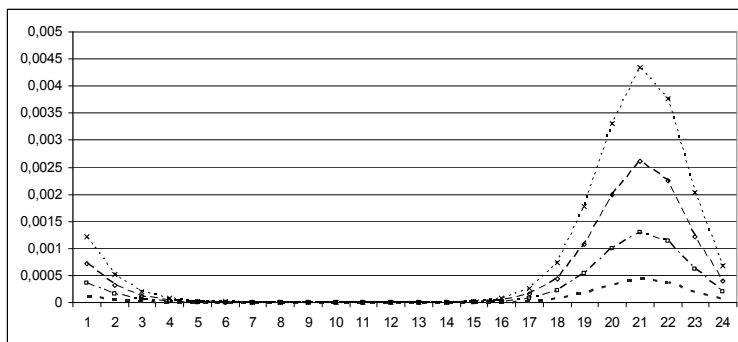


Рис. 2. Изменение концентрации аэрозольных выбросов в атмосферу по времени в зависимости от времени года (зимнее время года): - - -×- - при нач. концентр., равной 0,0004 г/м куб.; —○— — при нач. концентр., равной 0,0008 г/м куб.; — — — — при нач. концентр., равной 0,0012 г/м куб.; - - -·- - при нач. концентр., равной 0,0016 г/м куб.

Из проведенных численных расчетов следует, что одним из существенных факторов, воздействующих на процесс переноса и диффузии аэрозоля в атмосфере, является мощность аэрозольных генераторов выбрасываемых вредных частиц в местности. С увеличением мощности аэрозольных генераторов растет площадь области, на которой концентрация предельно допустимых веществ превышает допустимую санитарную норму.

При неустойчивой стратификации ветра область распространения вредных веществ имеет пикообразный характер, максимально увеличивается со временем и за короткий промежуток времени.

При прогнозировании загрязнения атмосферы особую роль играет учет коэффициента взаимодействия β с подстилающей поверхностью.

Из результатов проведенных численных расчетов следует, что изменение концентрации аэрозолей в атмосфере обусловлено, в основном, коэффициентом поглощения частиц, который изменяется в зависимости от метеорологических показателей погоды, от местности, времени года и суток. Максимальное поглощение вредных аэрозольных частиц в атмосфере наблюдается в утреннее и вечернее время суток.

Численные расчеты также показали, что концентрация аэрозольных выбросов в атмосфере зависит от направления и скорости воздушного потока в атмосфере, от массы выбросов и места нахождения аэрозольных генераторов в рассматриваемом регионе и от числа источников.

Библиографические ссылки

1. Равшанов Н., Шарипов Д. К. Модель и численный алгоритм для прогнозирования процесса распространения вредных веществ в атмосфере // Проблемы информатики и энергетики (Ташкент). – 2011. – № 4. – С. 18–25.
2. Равшанов Н., Шарипов Д. К., Тоштемирова Н. Н. Математическая модель для контролирования санитарной нормы региона и оптимального размещения новых промышленных объектов // Отраслевые аспекты технических наук. – 2012. – № 6 (18). – С. 5–9.
3. Sharipov D. K. Model and Computing Experiment for Research and Aerosols Usage Management // Jurnal European Researcher (Sochi). – 2012. – № 9-1 (28). – P. 1360–1367.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СУБГРАДИЕНТНОГО И КОМБИНАТОРНО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ МАКСИМИННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАБОРА ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЙ

О. В. Романович, В. В. Поддубный

Национальный исследовательский Томский государственный университет

1. Введение. В работах [1, 2] предложен комбинаторно-аналитический подход к решению непрерывно-дискретных максиминных задач, особенностью которых является кусочная дифференцируемость подлежащей максимизации целевой функции, нижней границей имеющей вид набора гладких вогнутых (или квазивогнутых) функций. Максимум здесь ищется по непрерывной переменной, а минимум – по дискретной. Если целевая функция максимизации является минимумом по набору непрерывных вогнутых гладких функций, она является непрерывной и вогнутой [3], но не гладкой, а кусочно-гладкой функцией. Такие задачи воз-

никают при изучении как статических, так и динамических систем, функционирующих по непрерывно-дискретному максиминному критерию. Это, например, задачи исследования нижних границ некоторых видов игр с Природой и дифференциальных игр [4], исследования осторожных стратегий принятия решений в организационных системах и в экономике [5], исследования некоторых математических моделей рынка [2, 6] и др.

В настоящее время для численного решения задачи выпуклой негладкой (недифференцируемой) оптимизации разработаны эффективные субградиентные методы и итерационные алгоритмы, работающие на их основе [7–11]. Эти алгоритмы применимы к решению задач максимизации любых вогнутых непрерывных кусочно-дифференцируемых функций, в том числе и непрерывно-дискретных максиминных задач, рассмотренных в работах [1, 2]. Однако они не учитывают структурные особенности непрерывно-дискретных максиминных задач оптимизации, на использование которых ориентированы комбинаторно-аналитические методы, предложенные в работах [1, 2]. Данная работа посвящена сравнению трудоемкости субградиентного и комбинаторно-аналитического методов решения непрерывно-дискретной максиминной задачи оптимизации на примере простейшей задачи максимизации нижней границы двух непрерывных вогнутых (именно квадратичных) функций.

2. Постановка задачи. Пусть требуется решить задачу максимизации вещественной скалярной функции $f(x, u)$ по скалярной переменной x при фиксированном значении скалярного параметра u :

$$J(u) = \sup_{x \in X} f(x, u), \quad (1)$$

причем

$$f(x, u) = \inf_i \{f_i(x, u), i = \overline{1, m}\}, \quad (2)$$

где вещественные скалярные функции $f_i(u, x)$, $i = \overline{1, m}$, непрерывны, дифференцируемы и вогнуты по $x \in X = [x_{\min}, x_{\max}]$ и непрерывны и монотонны по скалярному аргументу $u \in U = [u_{\min}, u_{\max}]$. Решение задачи (1) можно записать в виде:

$$x^* = \arg \sup_{x \in X} \inf_i \{f_i(x, u), i = \overline{1, m}\}. \quad (3)$$

Таким образом, задача (1) представляется как непрерывно-дискретная максиминная задача, причем максимум ищется по непрерывной переменной, а минимум – по дискретной. Можно показать, что функция $f(x, u)$ непрерывна, вогнута и имеет не более $m(m-1)$ точек разрыва производной первого рода при любом конечном значении параметра u , то есть является непрерывной кусочно-дифференцируемой (кусочно-гладкой) функцией аргумента x [1, 3].

3. Субградиентный метод. Для решения задач оптимизации негладких выпуклых функций разработаны, как уже говорилось выше, субградиентные методы оптимизации, которые применимы и для решения задачи (1).

Рассмотрим алгоритм решения задачи негладкой оптимизации, основанный на алгоритме, предложенном в [7]:

1. Выбираем последовательность чисел λ_k такую, чтобы выполнялось условие:

$$\lambda_k \rightarrow +0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty.$$

2. Выбираем произвольную начальную точку $x_0 \in X = [x_{\min}, x_{\max}]$.

3. Пусть уже найдено k -е приближение x_k . Тогда приближение x_{k+1} находим следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k V_k \|V_k\|^{-1},$$

где V_k – произвольный субградиент из множества субдифференциалов в точке x_k . Субградиент V_k выбирается следующим образом: если $f'_x(x_k, u)f'_x(x_{k-1}, u) > 0$, то $V_k = f'_x(x_k, u)$, если $f'_x(x_k, u)f'_x(x_{k-1}, u) < 0$, то V_k случайным образом выбирается из интервала $[f'_x(x_{k-1}, u), f'_x(x_k, u)]$:

$$V_k = \begin{cases} f'_x(x_k, u), & f'_x(x_k, u)f'_x(x_{k-1}, u) > 0, \\ \text{rand} \in [f'_x(x_k, u), f'_x(x_{k-1}, u)], & f'_x(x_k, u)f'_x(x_{k-1}, u) < 0. \end{cases}$$

4. Если $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, то решение $x^* = x_k$ найдено. Иначе переходим к шагу 3.

4. Комбинаторно-аналитический метод. Рассмотрим комбинаторно-аналитический алгоритм решения задачи (1), предложенный в работе [1]. Идея метода состоит в приведении исходной негладкой максиминной задачи к эквивалентному набору задач гладкой максимизации, обеспечивающих получение множества X_1^* точек максимумов всех функций набора, и задач отыскания множества X_2^* всех точек пересечений этих гладких функций с последующим сравнением значений функций в точках максимумов X_1^* , в точках пересечений X_2^* и в граничных точках X_3^* , то есть на множестве $X^* = X_1^* \cup X_2^* \cup X_3^*$ точек возможного решения задачи, с окончательным комбинаторным отбором точного решения. В ряде случаев (например, при параболических функциях) эти задачи допускают точное аналитическое решение.

В качестве примера решения задачи максимизации точной нижней границы набора вогнутых гладких функций рассмотрим максиминную задачу для двух вогнутых квадратичных функций, зависящих от параметра u :

$$f_1(x, u) = -a_1(x - x_1)^2 - u, \quad f_2(x, u) = -a_2(x - x_2)^2 + u \quad (4)$$

Эти функции непрерывны и дифференцируемы по своим аргументам, вогнуты (выпуклы вверх) по x и монотонны по u . В работе [1] задача (1) решена аналитически для функций (2) и получено множество точек X^* , являющихся потенциально возможными максимумами функции $f(x, u)$. Множество X^* состоит из множества $X_1^* \subset X$ максимумов функций $f_i(x, u)$:

$$X_1^* \subseteq \{x_i^*(u), i = 1, 2\} = \{x_1, x_2\},$$

множества $X_2^* \subset X$ точек пересечения функций $f_1(x, u)$ и $f_2(x, u)$:

$$X_2^* \subseteq \{x_{12}^{*(1,2)}(u)\} = \left\{ \frac{a_1 x_1 - a_2 x_2 - \sqrt{\Delta(u)}}{a_1 - a_2}, \frac{a_1 x_1 - a_2 x_2 + \sqrt{\Delta(u)}}{a_1 - a_2} \right\},$$

где

$$\Delta(u) = a_1 a_2 (x_1 - x_2)^2 - 2(a_1 - a_2)u,$$

и множества X_3^* двух граничных точек:

$$X_3^* \subseteq \{x_{\min}, x_{\max}\}.$$

Далее, согласно алгоритму, описанному в работе [1], получаем табл. 1 результатов численных расчетов для $u = 50$, $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_{\min} = -20$, $x_{\max} = 50$.

Таблица 1

	x_1^*	x_2^*	$x_{12}^{*(1)}$	$x_{12}^{*(2)}$	$x_{\min}$	$x_{\max}$	J^*	x^*
X^*	5	10	21.15	5.51597373	-20	50	-50.53	5.515973734
$f_1(X^*, u)$	-50	-100	-572	-50.532457	-1300	-4100		
$f_2(X^*, u)$	-75	50	-572	-50.532457	-4450	-7950		
$f(X^*, u)$	-75	-100	-572	-50.532457	-4450	-7950		

Таким образом, решением задачи (1) при заданных параметрах является точка $x^* = 5.515973734$.

Приведем результаты компьютерного моделирования задачи (1), протабулировав функцию $f(x, u) = \inf_i \{f_i(x, u), i = \overline{1, m}\}$ на интервале $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ при заданных значениях параметров (см. рис.). Как видно, максимум этой функции достигается в точке (x^*, J^*) (см. табл. 1).

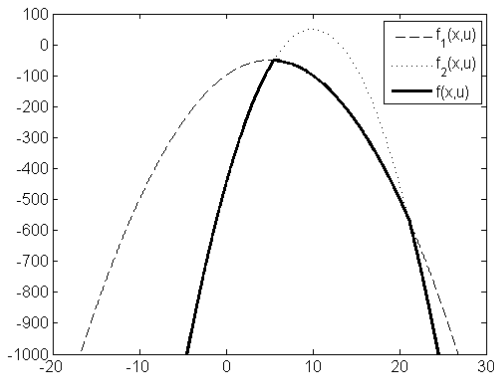


График функции $f(x, u)$

5. Сравнение трудоемкости субградиентного и комбинаторно-аналитического методов решения непрерывно-дискретной максиминной задачи. Сравним трудоемкость рассмотренных алгоритмов на приведенном выше примере. Для реализации комбинаторно-аналитического алгоритма необходимо вычислить значения функций множества X^* , состоящего из m точек множества X_1^* , $m(m-1)$ точек множества X_2^* изломов функции $f(x, u)$ и множества X_3^* двух граничных точек. Для реализации метода в каждой из точек множества X^* вычисляется функция f , и число вычислений (трудоемкость алгоритма) равно $m^3 + 2m$.

Трудоемкость субградиентного метода оценим экспериментально с учетом того, что на каждой итерации функция f вычисляется дважды (для оценки градиента или субградиента). Результаты приведены в табл. 2 для разных точностей вычисления решения, требующих разного числа итераций работы алгоритма. Там же приведена и трудоемкость комбинаторно-аналитического метода.

Таблица 2

Точность	Субградиентный метод		Комбинаторно-аналитический метод	
	Количество вычислений функции	x^*	Количество вычислений функции	x^*
10^{-1}	22	4.92896825396825	12	5.515973734
10^{-2}	200	5.51731882395930		
10^{-3}	2000	5.51664140137463		
10^{-4}	20000	5.51626364007606		
10^{-5}	200000	5.51597624200993		

Из приведенной табл. 2 видно, что только при точности 10^{-5} достигается совпадение 5 знаков с точным решением, полученным при помощи комбинаторно-аналитического метода. Таким образом, использование комбинаторно-аналитического метода предпочтительно при построении и исследовании алгоритмов решения непрерывно-дискретных максиминных задач, зависящих от параметров, если, конечно, задача допускает аналитическое исследование.

Библиографические ссылки

1. Поддубный В. В., Романович О. В. Комбинаторно-аналитический метод максимизации негладкой точной нижней границы множества вогнутых гладких функций, зависящих от параметра // Вестник Том. гос. ун-та. Сер. «Управление, вычислительная техника и информатика». – 2012. – № 2 (20). – С. 96–107.

2. Поддубный В. В., Романович О. В. Математическое моделирование оптимального рынка конкурирующих товаров в условиях лага поставок // Компьютерные исследования и моделирование. – 2012. – Т. 4. – № 2. – С. 431–450.
3. Бусыгин В. П., Желободько В. Е., Цыплаков А. А. Микроэкономика – третий уровень: учебник. – Новосибирск: НГУ, 2003. – 702 с.
4. Ахметжанов А. Р. Динамические игры преследования на поверхностях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / МФТИ (ГУ). – М., 2009. – 28 с.
5. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985. – 200 с.
6. Черемных Ю. Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень: учебник. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 844 с.
7. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 384 с.
8. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 280 с.
9. Шор Н. З. Методы оптимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наукова Думка, 1979. – 200 с.
10. Шор Н. З., Стеценко С. И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. – Киев: Наукова Думка, 1989. – 208 с.
11. Нестеров Ю. Е. Методы выпуклой оптимизации. – М.: МЦНМО, 2010. – 281 с.

ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

А. М. Семахин

Курганский государственный университет

Метод ветвей и границ применяется для решения полностью или частично целочисленных задач линейного программирования. Предложен в 1960 г. А. Лэндом и Дж. Дойгом [1].

В начале S итерации метода ветвей и границ необходимо иметь:

1. Список задач линейного программирования, каждая из которых должна быть решена в последующих итерациях.

2. Нижнюю границу оптимального значения линейной формы задачи $Z_0^{(S)}$. На первой итерации в качестве $Z_0^{(1)}$ берется значение целевой функции $f(\bar{x})$ в любой целочисленной точке $\bar{x}$. Если точку указать невозможно, то принимают $Z_0^{(1)} = -\infty$.

Пусть в результате S итераций метода получили список из Z задач: $1, 2, \dots, Z$ и существует $Z_0^{(S)}$. Алгоритм метода ветвей и границ содержит этапы:

1-й этап. Выбирается из списка задач линейного программирования задача R для решения, $1 \leq R \leq Z$. Задача R решается.

2-й этап. Если задача R имеет решение $\bar{x}_R^{(S)}$, то переходим к этапу 3. Иначе – исключаем задачу R из списка, $Z_0^{(S+1)} = Z_0^{(S)}$. Переход к этапу 1.

При $S = 0$ делаем вывод, что исходная задача не имеет решения, и процесс решения заканчивается.

3-й этап. Если $f(\bar{x}_R^{(S)}) > Z_0^{(S)}$, то переходим к этапу 4. В противном случае задача R исключается из списка. Переход к этапу 1.

4-й этап. Если все компоненты вектора $\bar{x}_R^{(S)}$ удовлетворяют условию целочисленности, то переходим к этапу 5. В противном случае задача R из списка исключается. План $\bar{x}_R^{(S)}$ запоминается, $Z_0^{(S+1)} = f(\bar{x}_R^{(S)})$. Переход к этапу 1. При $S = 0$ вектор $\bar{x}^{(1)}$ является решением исходной задачи, и процесс решения заканчивается.

5-й этап. Задача R из списка исключается. В список включаются две новые задачи линейного программирования – задача $Z + 1$ и задача $Z + 2$, $Z_0^{(S+1)} = Z_0^{(S)}$. Переход к этапу 1. Процесс разбиения задачи R на две новые задачи линейного программирования осуществляется следующим образом. Пусть $\bar{x}_j^{(S)}$ – дробная компонента в полученном оптимальном плане $\bar{x}_R^{(S)}$ и $\left[\bar{x}_j^{(S)} \right]$ целая часть. Тогда задача $Z + 1$ имеет вид:

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, i = \overline{1, m}, \\ \dots \\ V_j \leq x_j \leq \left[\bar{x}_j^{(S)} \right] \\ \dots \\ x_1, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Тогда задача $Z + 2$ имеет вид:

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, i = \overline{1, m}, \\ \dots \\ \left[\bar{x}_j^{(S)} \right] + 1 \leq x_j \leq W_j, \\ \dots \\ x_1, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Процесс решения продолжается, пока не будут решены все задачи линейного программирования из списка. Решение задачи будет $Z_0^{(S)}$ на последней итерации [2].

Разработаем целочисленную математическую модель информационной системы и определим оптимальное решение методом ветвей и границ.

Математическая модель формулируется следующим образом: из числа фирм, предоставляющих услуги спутникового Internet на территории Российской Федерации, требуется выбрать провайдера спутникового Internet с максимальной величиной чистого приведенного эффекта (NPV) и удовлетворяющих финансовым ограничениям.

Пусть X_1 – доля финансирования проекта «НТВ-Плюс», X_2 – доля финансирования проекта Europe On Line, X_3 – доля финансирования проекта Astra Network, X_4 – доля финансирования проекта Satpro, X_5 – доля финансирования проекта Network Service. X_i – бинарные переменные.

Целочисленная математическая модель имеет вид

$$\max \leftarrow Z = 1.527270 \cdot X_1 + 0.741239 \cdot X_2 + 1.374394 \cdot X_3 + 0.145110 \cdot X_4 + 0.530312 \cdot X_5$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5,4 \cdot X_1 + 3,2 \cdot X_2 + 2,931 \cdot X_3 + 6,286 \cdot X_4 + 5,9 \cdot X_5 \leq 6,5, \\ 2,006437 \cdot X_1 + 1,5 \cdot X_2 + 3,000547 \cdot X_3 + 3,000575 \cdot X_4 + 3,2 \cdot X_5 \leq 3,0, \\ 2,5 \cdot X_2 + 2,0 \cdot X_3 + 1,6 \cdot X_5 \leq 3,0, \\ 0,881832 \cdot X_2 + 1,186 \cdot X_5 \leq 1,5, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 - \text{целые числа.} \end{cases} \quad (3)$$

Решим непрерывную задачу. Приведем к стандартной форме и составим исходную Жорданову таблицу (табл. 1).

$$\max \leftarrow Z = 1.527270 \cdot X_1 + 0.741239 \cdot X_2 + 1.374394 \cdot X_3 + 0.145110 \cdot X_4 + 0.530312 \cdot X_5.$$

при ограничениях

$$\begin{cases} X_6 = 6,5 - 5,4 \cdot X_1 - 3,2 \cdot X_2 - 2,931 \cdot X_3 - 6,286 \cdot X_4 - 5,9 \cdot X_5, \\ X_7 = 3,0 - 2,006437 \cdot X_1 - 1,5 \cdot X_2 - 3,000547 \cdot X_3 - 3,000575 \cdot X_4 - 3,2 \cdot X_5, \\ X_8 = 3,0 - 2,5 \cdot X_2 - 2,0 \cdot X_3 - 1,6 \cdot X_5, \\ X_9 = 1,5 - 0,881832 \cdot X_2 + 1,186 \cdot X_5, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 - \text{целые числа.} \end{cases} \quad (4)$$

Итерация 1. Предварительные условия: 1. Задача 1. 2. Нижняя граница $Z_0^{(1)} = 0$.

Этап 1. Выбираем задачу 1 и решаем ее. Получаем оптимальный план $\bar{x}^{(1)} = (1,037635, 0, 0, 0, 0, 0)$, $f(\bar{x}^{(1)}) = 2,00526$.

Этап 2. Задача 1 имеет решение. Переход на 3-й этап.

Этап 3. $f(\bar{x}^{(1)}) = 2,00526 > Z_0^{(1)} = 0$. Переход на 4-й этап.

Этап 4. Переменные имеют дробные значения. Переход на 5-й этап.

Этап 5. Задача 1 исключается из списка. В список включаются две новые задачи: 2 и 3.

Таблица 1

Начальная Жорданова таблица

БП	1	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$	$-X_4$	$-X_5$
$X_6 =$	6.5	5.4	3.2	2.931	6.286	5.9
$X_7 =$	3.0	2.006437	1.5	3.000547	3.000575	3.2
$X_8 =$	3.0	0.0	2.5	2.0	0.0	1.6
$X_9 =$	1.5	0.0	0.881832	0.0	0.0	1.186
Z=	0	-1.52727	-0.741239	-1.374394	-0.14511	-0.530312

В табл. 2 приведено допустимое решение.

Таблица 2

Допустимое решение

БП	1	$-X_6$	$-X_2$	$-X_3$	$-X_4$	$-X_5$
$X_1 =$	6.5 / 5.4	1 / 5.4	3.2 / 5.4	2.931 / 5.4	6.286 / 5.4	5.9 / 5.4
$X_7 =$	0,58484	-0,371563	0,311	1,911498	0,664934	1,007782
$X_8 =$	3,0	0	2,5	2,0	0	1,6
$X_9 =$	1,5	0	0,881832	0	0	1,186
Z=	1,83838	0,282827	0,16381	-0,545426	1,632745	1,138371

В табл.3 приведено оптимальное решение непрерывной задачи.

Таблица 3

Оптимальное решение непрерывной задачи

БП	1	$-X_6$	$-X_2$	$-X_7$	$-X_4$	$-X_5$
$X_1 =$	1,037635	0,290692	0,504283	-0,283954	0,975263	0,806429
$X_3 =$	0,305961	-0,194383	0,1627	0,52315	0,34786	0,527221
$X_8 =$	2,388078	0,388766	2,174601	-1,0463	-0,69572	0,545558
$X_9 =$	1,5	0	0,881832	0	0	1,186
Z=	2,00526	0,176807	0,252551	0,28534	1,822477	1,425931

Задача 2.

$$\max \leftarrow Z = 1.527270 \cdot X_1 + 0.741239 \cdot X_2 + 1.374394 \cdot X_3 + \\ 0.145110 \cdot X_4 + 0.530312 \cdot X_5$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5,4 \cdot X_1 + 3,2 \cdot X_2 + 2,931 \cdot X_3 + 6,286 \cdot X_4 + 5,9 \cdot X_5 \leq 6,5, \\ 2,006437 \cdot X_1 + 1,5 \cdot X_2 + 3,000547 \cdot X_3 + 3,000575 \cdot X_4 + 3,2 \cdot X_5 \leq 3,0, \\ 2,5 \cdot X_2 + 2,0 \cdot X_3 + 1,6 \cdot X_5 \leq 3,0, \\ 0,881832 \cdot X_2 + 1,186 \cdot X_5 \leq 1,5, \\ X_1 \leq 1, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 - \text{целые числа.} \end{cases} \quad (5)$$

Задача 3.

$$\max \leftarrow Z = 1.527270 \cdot X_1 + 0.741239 \cdot X_2 + 1.374394 \cdot X_3 + \\ + 0.145110 \cdot X_4 + 0.530312 \cdot X_5$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5,4 \cdot X_1 + 3,2 \cdot X_2 + 2,931 \cdot X_3 + 6,286 \cdot X_4 + 5,9 \cdot X_5 \leq 6,5, \\ 2,006437 \cdot X_1 + 1,5 \cdot X_2 + 3,000547 \cdot X_3 + 3,000575 \cdot X_4 + 3,2 \cdot X_5 \leq 3,0, \\ 2,5 \cdot X_2 + 2,0 \cdot X_3 + 1,6 \cdot X_5 \leq 3,0, \\ 0,881832 \cdot X_2 + 1,186 \cdot X_5 \leq 1,5, \\ X_1 \geq 2, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 - \text{целые числа.} \end{cases} \quad (6)$$

Оптимальное решение $x^{-(17)} = (1, 0, 0, 0, 0)$, $f(x^{-(17)}) = 1,527270$.

Результаты проведенных исследований позволили сделать следующие выводы:

1. Разработана целочисленная математическая модель оптимизации информационной системы, позволяющая сократить затраты и сроки проектирования информационных систем и повысить обоснованность принимаемых решений.

2. Найдено оптимальное решение целочисленной задачи оптимизации информационной системы методом ветвей и границ

Библиографические ссылки

1. Таха Х. А. Введение в исследование операций: пер. с англ. – 7-е изд. М.: Изд. «Вильямс», 2005. – 912 с.
2. Мастяева И. Н., Горбовцов Г. Я., Семенихина О. Н. Исследование операций в экономике: учеб. пособие. – М.: МЭСИ, 2003. – 119 с.

МЕТОД ГОМОРИ В РЕШЕНИИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

А. М. Семахин

Курганский государственный университет

Целочисленное линейное программирование ориентировано на решение задач линейного программирования, в которых все или некоторые переменные принимают целочисленные значения [1].

Для решения целочисленной задачи линейного программирования Р. Гомори в 1958 г. предложил метод отсечения плоскостей [2].

Алгоритм Гомори содержит этапы:

Этап 1. Целочисленность игнорируется, симплекс-методом отыскивается оптимальный план. Если решение дробное – переход на 2-й этап.

Этап 2. Решение расширенной задачи [2].

Разработаем целочисленную математическую модель информационной системы и определим оптимальное решение методом Гомори.

Математическая модель формулируется следующим образом: из числа фирм, предоставляющих услуги спутникового Internet на территории Российской Федерации, требуется выбрать провайдера спутникового Internet с максимальной величиной чистого приведенного эффекта (NPV) и удовлетворяющего финансовым ограничениям [3].

Пусть X_1 – доля финансирования проекта «НТВ-Плюс», X_2 – доля финансирования проекта Europe On Line, X_3 – доля финансирования проекта Astra Network, X_4 – доля финансирования проекта Satpro, X_5 – доля финансирования проекта Network Service. X_i – бинарные переменные.

Целочисленная математическая модель имеет вид

$$\begin{aligned} \max \leftarrow Z = & 1.527270 \cdot X_1 + 0.741239 \cdot X_2 + 1.374394 \cdot X_3 + \\ & + 0.145110 \cdot X_4 + 0.530312 \cdot X_5 \end{aligned}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5,4 \cdot X_1 + 3,2 \cdot X_2 + 2,931 \cdot X_3 + 6,286 \cdot X_4 + 5,9 \cdot X_5 \leq 6,5, \\ 2,006437 \cdot X_1 + 1,5 \cdot X_2 + 3,000547 \cdot X_3 + 3,000575 \cdot X_4 + 3,2 \cdot X_5 \leq 3,0, \\ 2,5 \cdot X_2 + 2,0 \cdot X_3 + 1,6 \cdot X_5 \leq 3,0, \\ 0,881832 \cdot X_2 + 1,186 \cdot X_5 \leq 1,5, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 - \text{целые числа.} \end{cases}$$

Решим непрерывную задачу. Приведем к стандартной форме и составим исходную Жорданову таблицу (табл. 1).

Таблица 1

Начальная Жорданова таблица

БП	1	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$	$-X_4$	$-X_5$
$X_6 =$	6.5	5.4	3.2	2.931	6.286	5.9
$X_7 =$	3.0	2.006437	1.5	3.000547	3.000575	3.2
$X_8 =$	3.0	0.0	2.5	2.0	0.0	1.6
$X_9 =$	1.5	0.0	0.881832	0.0	0.0	1.186
$Z =$	0	-1.52727	-0.741239	-1.374394	-0.14511	-0.530312

В табл. 2 приведена первая итерация.

Таблица 2

Первая итерация

БП	1	$-X_6$	$-X_2$	$-X_3$	$-X_4$	$-X_5$
$X_1 =$	6.5 / 5.4	1 / 5.4	3.2 / 5.4	2.931 / 5.4	6.286 / 5.4	5.9 / 5.4
$X_7 =$	0,58484	-0,371563	0,311	1,911498	0,664934	1,007782
$X_8 =$	3,0	0	2,5	2,0	0	1,6
$X_9 =$	1,5	0	0,881832	0	0	1,186
$Z =$	1,83838	0,282827	0,16381	-0,545426	1,632745	1,138371

В табл. 3 приведено оптимальное решение непрерывной задачи.

Таблица 3

Оптимальное решение непрерывной задачи. Вторая итерация

БП	1	$-X_6$	$-X_2$	$-X_7$	$-X_4$	$-X_5$
$X_1 =$	1,037635	0,290692	0,504283	-0,283954	0,975263	0,806429
$X_3 =$	0,305961	-0,194383	0,1627	0,52315	0,34786	0,527221
$X_8 =$	2,388078	0,388766	2,174601	-1,0463	-0,69572	0,545558
$X_9 =$	1,5	0	0,881832	0	0	1,186
$Z =$	2,00526	0,176807	0,252551	0,28534	1,822477	1,425931

Переход ко 2-му этапу алгоритма Гомори.

Выбирается базисная переменная X_3 с наибольшей дробной частью: $\{X_3\} > \{X_1\}$, $\{0.305961\} > \{1.037635\}$, $0.305961 > 0.037635$. Для переменной X_3 составляется уравнение. В табл. 4 и 5 представлены расширенная задача и третья итерация.

Таблица 4

Расширенная задача с первым дополнительным ограничением

БП	1	$-X_6$	$-X_2$	$-X_7$	$-X_4$	$-X_5$
$X_1 =$	1,037635	0,290692	0,504283	-0,283954	0,975263	0,806429
$X_3 =$	0,305961	-0,194383	0,1627	0,52315	0,34786	0,527221
$X_8 =$	2,388078	0,388766	2,174601	-1,0463	-0,69572	0,545558
$X_9 =$	1,5	0	0,881832	0	0	1,186
$X_{10} =$	-0,305961	0,194383	-0,1627	-0,52315	-0,34786	-0,527221
$Z =$	2,00526	0,176807	0,252551	0,28534	1,822477	1,425931

Таблица 5

Третья итерация

БП	1	$-X_6$	$-X_2$	$-X_7$	$-X_4$	$-X_{10}$
$X_1 =$	0,569642	0,588017	0,25542	-1,084156	0,443182	1,529584
$X_3 =$	0	0	0	0	0	1
$X_8 =$	2,071475	0,58991	2,006242	-1,587645	-1,055679	1,034781
$X_9 =$	0,811731	0,437271	0,515833	-1,176842	-0,782522	2,249531
$X_5 =$	0,580328	-0,368694	0,308599	0,992278	0,659799	-1,896738
$Z =$	1,177753	0,702539	-0,18749	-1,129581	0,881649	2,704617

В табл. 6 приведено оптимальное нецелочисленное решение. В табл. 7 представлена расширенная задача со вторым дополнительным ограничением. В табл. 8 приведена пятая итерация.

Таблица 6

Оптимальное нецелочисленное решение. Четвертая итерация

БП	1	$-X_6$	$-X_2$	$-X_5$	$-X_4$	$-X_{10}$
$X_1 =$	1,203704	0,185185	0,592593	1,09259	1,164074	-0,542779
$X_3 =$	0	0	0	0	0	1
$X_8 =$	3	0	2,5	1,6	0	-2
$X_9 =$	1,5	0	0,881832	1,186	0	0
$X_7 =$	0,584844	-0,371563	0,311001	1,007782	0,664934	-1,911499
$Z =$	1,838386	0,282829	0,16381	1,13837	1,632745	0,545424

Таблица 7

Расширенная задача со вторым дополнительным ограничением

БП	1	$-X_6$	$-X_2$	$-X_5$	$-X_4$	$-X_{10}$
$X_1 =$	1,203704	0,185185	0,592593	1,09259	1,164074	-0,542779
$X_3 =$	0	0	0	0	0	1
$X_8 =$	3	0	2,5	1,6	0	-2
$X_9 =$	1,5	0	0,881832	1,186	0	0
$X_7 =$	0,584844	-0,371563	0,311001	1,007782	0,664934	-1,911499
$X_{11} =$	-0,203704	-0,185185	-0,592593	-0,09259	-0,164074	0,542779
$Z =$	1,838386	0,282829	0,16381	1,13837	1,632745	0,545424

Таблица 8

Отсечение дробной части переменной X_1 . Пятая итерация

БП	1	$-X_6$	$-X_{11}$	$-X_5$	$-X_4$	$-X_{10}$
$X_1 =$	1	0	1	1	1	0
$X_3 =$	0	0	0	0	0	1
$X_8 =$	2,14062	-0,781249	4,21875	1,20939	-0,692187	0,289847
$X_9 =$	1,19687	-0,275572	1,48809	1,04822	-0,244157	0,807704
$X_7 =$	0,477937	-0,468751	0,524814	0,959189	0,578826	-1,62664
$X_2 =$	0,34375	0,312499	-1,6875	0,156246	0,276875	-0,915939
$Z =$	1,78208	0,231638	0,276429	1,11278	1,58739	0,695464

В табл. 9 и 10 представлены расширенная задача и оптимальное целочисленное решение. Оптимальный целочисленный план $\bar{X}^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*\} = \{1, 0, 0, 0, 0\}$ (табл. 10). Значение целевой функции $Z=1.52727$.

Таблица 9

Расширенная задача с третьим дополнительным ограничением

БП	1	$-X_6$	$-X_{11}$	$-X_5$	$-X_4$	$-X_{10}$
$X_1 =$	1	0	1	1	1	0
$X_3 =$	0	0	0	0	0	1
$X_8 =$	2,14062	-0,781249	4,21875	1,20939	-0,692187	0,289847
$X_9 =$	1,19687	-0,275572	1,48809	1,04822	-0,244157	0,807704
$X_7 =$	0,477937	-0,468751	0,524814	0,959189	0,578826	-1,62664
$X_2 =$	0,34375	0,312499	-1,6875	0,156246	0,276875	-0,915939
$X_{12} =$	-0,34375	-0,312499	0,68785	-0,156246	-0,276875	0,915939
$Z =$	1,78208	0,231638	0,276429	1,11278	1,58739	0,695464

Таблица 10

Оптимальное целочисленное решение. Шестая итерация

БП	1	$-X_{12}$	$-X_{11}$	$-X_5$	$-X_4$	$-X_{10}$
$X_1 =$	1	0	1	1	1	0
$X_3 =$	0	0	0	0	0	1
$X_8 =$	3	-2,5	2,5	1,60001	0	-2
$X_9 =$	1,5	-0,881833	0,88183	1,186	0	0
$X_7 =$	0,993565	-1,50001	-0,506442	1,19356	0,994141	-3,00056
$X_2 =$	0	1	-1	0	0	0
$X_6 =$	1,1	-3,20001	-2,20001	0,499989	0,886003	-2,93101
$Z =$	1,52727	0,741244	0,786034	0,996964	1,38216	1,3744

Результаты проведенных исследований позволили сделать следующие выводы.

1. Разработана целочисленная математическая модель оптимизации информационной системы, позволяющая сократить затраты и сроки проектирования информационных систем и повысить обоснованность принимаемых решений.

2. Найдено оптимальное решение целочисленной задачи оптимизации информационной системы методом Гомори. Для нахождения целочисленного оптимального плана выполнены шесть итераций и введены три дополнительных ограничения.

Библиографические ссылки

1. Таха Х. А. Введение в исследование операций: пер. с англ. – 7-е изд. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
2. Колюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб.: Изд-во «Питер», 2000. – 208 с.
3. Семахин А. М. Анализ математической модели информационной системы // Информационные технологии и математическое моделирование: материалы X Всерос. науч.-практ. конф. с международ. участием (25–26 нояб. 2011 г.). – Томск: Изд-во ТГУ, 2011. – Ч. 2. – 206 с.

УСРЕДНЯЮЩИЙ СГЛАЖИВАЮЩИЙ ФИЛЬТР С ГАУССОВСКИМИ ВЕСАМИ

В. С. Сусликов, В. А. Толстунев

Кемеровский государственный университет

Рассмотрим задачу восстановления полезных сигналов [1, 2], искаженных аддитивным шумом, с помощью усредняющего цифрового фильтра длиной апертуры $n + 1$.

Пусть на вход фильтра поступают дискретные сигналы $x_i = n_i + s_i$, $i=1,2,\dots$, где $s_i = s(t_i)$ – отсчеты полезного детерминированного сигнала, $n_i = n(t_i)$ – отсчеты мешающего шума. Будем полагать, что в пределах апертуры фильтра отсчеты полезного сигнала практически одинаковы. Тогда $x_i = s_k + n_i$, $i=(k-n/2, \dots, k, \dots, k+n/2)$. По значениям входного сигнала из апертуры $(x_{k-n/2}, \dots, x_k, \dots, x_{k+n/2})$ будем определять значение выхода фильтра y_k , соответствующего отсчету x_k .

Классический фильтр скользящего выборочного усреднения

$$y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} x_k \quad (1)$$

хорошо убирает только слабый аддитивный гауссовский шум. Появление в мешающем шуме, например, импульсной компоненты существенно ухудшает сглаживающие свойства этого фильтра.

В случае произвольного шума в качестве выхода фильтра возьмем среднее взвешенное отсчетов x_i с весовыми множителями $f(x_i)$, которые зависят от значений входного сигнала, то есть

$$y_k = \frac{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} x_i \cdot f(x_i)}{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} f(x_i)}. \quad (2)$$

Веса $f(x_i)$ будем выбирать таким образом, чтобы слагаемые в числителе соотношения (2) имели значения из небольшого по длине интервала.

Пусть $f(x_i) = \exp(-\alpha \cdot x_i^2)$, $\forall i \in [k-n/2, k+n/2]$, $\alpha = \text{const}$. Тогда из (2)

$$y_k = \frac{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} x_i \cdot e^{(-\alpha x_i^2)}}{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} e^{(-\alpha x_i^2)}}. \quad (3)$$

Для оценки погрешности воспользуемся формулой среднеквадратической погрешности

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - s_i}{s_i} \right). \quad (4)$$

Рассмотрим аналитическое обоснование формулы (3). Выпишем закон распределения случайной величины x_i

$$P_{x_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[p e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-s_k)^2} + q e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-s_k-A)^2} \right], \quad (5)$$

$$P(\eta=0)=p, \quad P(\eta=A)=q=1-p, \quad x \in (-\infty; \infty), \quad (6)$$

$$y_k = \frac{\frac{1}{n+1} \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} x_i e^{-\alpha x_i^2}}{\frac{1}{n+1} \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} e^{-\alpha x_i^2}}. \quad (7)$$

Закон распределения для y_k сложный, и вычислять математическое ожидание $M(y_k)$ непосредственно по определению практически невозможно. Можно оценить y_k , используя закон больших чисел.

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} x_i e^{-\alpha x_i^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.г.} M \{x_i e^{-\alpha x_i^2}\} = M_1, \quad (8)$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} e^{-\alpha x_i^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.г.} M \{e^{-\alpha x_i^2}\} = M_2. \quad (9)$$

Из (8), (9) следует

$$y_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.г.} \frac{M_1}{M_2}. \quad (10)$$

Необходимо проверить утверждение, что $y_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.г.} s_k$. В (7)

$$x_i = s_k + \xi_i + \eta_i,$$

где ξ_i – отсчеты гауссовского шума $(N(0, \sigma^2))$,

η_i – отсчеты импульсного шума $(0, A \geq 0)$.

Если шумов нет, то есть $x_i = s_k, \forall i$, то из (7) следует

$$y_k = \frac{(n+1)s_k e^{-\alpha s_k^2}}{(n+1)e^{-\alpha s_k^2}} = s_k,$$

что и должно быть при отсутствии шумов.

Найдя M_1 и M_2 , получим

$$y_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.г.} \frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{2\alpha\sigma^2 + 1} \frac{pe^{-\frac{\alpha s_k^2}{2\sigma^2\alpha+1}} \cdot s_k + qe^{-\frac{\alpha(s_k+A)^2}{2\sigma^2\alpha+1}} \cdot (s_k + A)}{pe^{-\frac{\alpha s_k^2}{2\sigma^2\alpha+1}} + qe^{-\frac{\alpha(s_k+A)^2}{2\sigma^2\alpha+1}}} \quad (11)$$

Если $A \equiv 0$ (нет импульсного шума), то из (11) получим

$$y_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.г.} \frac{1}{2\alpha\sigma^2 + 1} \frac{e^{-\frac{\alpha s_k^2}{2\sigma^2\alpha+1}} \cdot s_k}{e^{-\frac{\alpha s_k^2}{2\sigma^2\alpha+1}}} = \frac{s_k}{2\alpha\sigma^2 + 1} \quad (12)$$

Если еще $\sigma \equiv 0$ (вообще нет шумов), то из (12) получим

$$y_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.г.} s_k \quad (13)$$

Если $\sigma \neq 0$ (только импульсный шум), то из (11) получим

$$y_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.г.} \frac{pe^{-\alpha s_k^2} \cdot s_k + qe^{-\alpha(s_k+A)^2} \cdot (s_k + A)}{pe^{-\alpha s_k^2} + qe^{-\alpha(s_k+A)^2}}. \quad (14)$$

Чтобы компенсировать влияние гауссовского шума, введем в (11) коэффициент γ

$$\gamma = 2\alpha\sigma^2 + 1. \quad (15)$$

$$\text{Тогда } \tilde{y}_k = y_k(2\alpha\sigma^2 + 1) = (2\alpha\sigma^2 + 1) \frac{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} x_i e^{-\alpha x_i^2}}{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} e^{-\alpha x_i^2}}. \quad (16)$$

Коэффициент в (16) связан с выбором шума. Если сменить шум, то изменится и коэффициент γ . При $\alpha \equiv 0$ получаем выборочное среднее.

Преобразуем (11) к более удобному виду:

$$y_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.в.} \frac{1}{2\alpha\sigma^2 + 1} \left[s_k + \frac{A}{1 + \frac{p}{q} \exp\left\{\frac{\alpha}{2\sigma^2\alpha + 1}(2As_k + A^2)\right\}} \right]. \quad (17)$$

Частные случаи:

1) $\sigma^2 = 0, A = 0 \quad y_k \longrightarrow s_k$;

2) $\sigma^2 = 0, A \neq 0 \quad y_k \longrightarrow s_k + \frac{A}{1 + \frac{p}{q} \exp\{\alpha(2As_k + A^2)\}}$;

$q = 0 (p = 1)$ (нет импульсного шума) $y_k \longrightarrow s_k$;

$q = 1 (p = 0)$ (зашумлен каждый отсчет) $y_k \longrightarrow s_k + A$;

3) $\sigma^2 \neq 0, A = 0 \quad y_k \longrightarrow \frac{s_k}{2\alpha\sigma^2 + 1}$.

Обобщим формулу (3) для обработки изображений

$$y_{kl} = \frac{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} \sum_{j=l-n/2}^{l+n/2} x_{ij} e^{-\alpha x_{ij}^2}}{\sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} \sum_{j=l-n/2}^{l+n/2} e^{-\alpha x_{ij}^2}}. \quad (18)$$

На рис. 1, 2 показаны зависимости погрешности фильтрации от параметров фильтра.

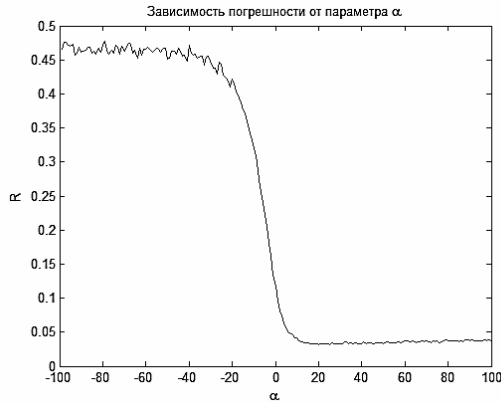


Рис. 1. Зависимость погрешности фильтрации от параметра α
($\sigma = 2, t = 0, p = 0.3, q = 0, A = 10$)

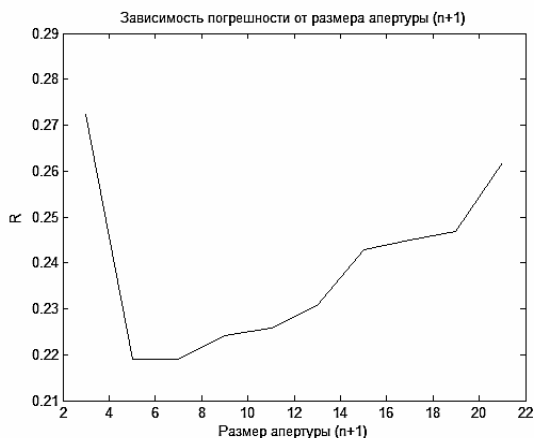


Рис. 2. Зависимость погрешности от размера апертуры (n+1)
($\sigma = 10$, $m=0$, $p=0.3$, $q=0$, $A=10$)

В таблице представлена погрешность фильтрации в зависимости от вероятности появления импульсного шума (p – вероятность появления импульсного шума, R_1 – погрешность медианного фильтра, R_2 – погрешность линейного фильтра с гауссовской маской, R_3 погрешность без фильтрации, R_4 – погрешность исследуемого фильтра):

P	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
R_1	0,0024	0,0055	0,0157	0,0360	0,0640	0,0927	0,1149	0,1277	0,1336
R_2	0,0048	0,0105	0,0185	0,0286	0,0410	0,0556	0,0724	0,0913	0,1124
R_3	0,0135	0,0270	0,0406	0,0541	0,0677	0,0812	0,0947	0,1082	0,1218
R_4	0,0115	0,0113	0,0111	0,0109	0,0109	0,0115	0,0147	0,0248	0,0529

На рис. 3 представлено исходное и зашумленное изображение.



Рис. 3. Полезное изображение и изображение с наложенным импульсным шумом

На рис. 4 представлены результаты фильтрации зашумленного сигнала исследуемым.



Рис. 4. Результат фильтрации исследуемым фильтром

Как следует из приведенных результатов моделирования, усредняющий фильтр с гауссовскими весами существенно лучше, чем фильтры, рассмотренные для сравнения, удаляет импульсный шум высокой интенсивности.

Библиографические ссылки

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М: Техносфера, 2005. – 1072 с.
2. Хуанг Т. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений. – М.: Радио и связь, 1984. – 224 с.

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В РАЗВЕТВЛЕННОМ КАНАЛЕ

Е. С. Фролов

Кемеровский государственный университет

В работе исследовано течение вязкой однородной несжимаемой жидкости в односвязном разветвленном канале. Течение вызвано перепадом давления на границах протекания. Была исследована взаимосвязь параметров давления, скорости, вязкости жидкости, конфигурации канала, а также рассчитано движение жидкости по каналу. Результаты исследования могут быть использованы при проектировании различных систем вентиляции или водоочистных сооружений.

При решении задачи в подобной постановке основной проблемой является отсутствие краевых условий на скорость на участках протекания [1]. Кроме того, необходимо эффективно решать систему нелинейных

уравнений, полученных в результате аппроксимации исходной дифференциальной задачи – системы Навье-Стокса [2]:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \Delta u = 0, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \Delta v = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

где u, v – компоненты скорости, p – давление, ν – коэффициент кинематической вязкости, Δ – оператор Лапласа.

Область течения показана на рис. 1, где Γ – граница области, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6$. В соответствии с работой [3] поставлены следующие краевые условия: давление задано на участках протекания, $p|_{\Gamma_i} = p_i$, $i = 1..6$; скорости на твердых стенках равны нулю $u|_{\Gamma_0} = 0$, $v|_{\Gamma_0} = 0$; касательные составляющие вектора скорости на участках протекания равны нулю: $(\vec{u} \cdot \vec{\tau})|_{\Gamma_i} = 0$.

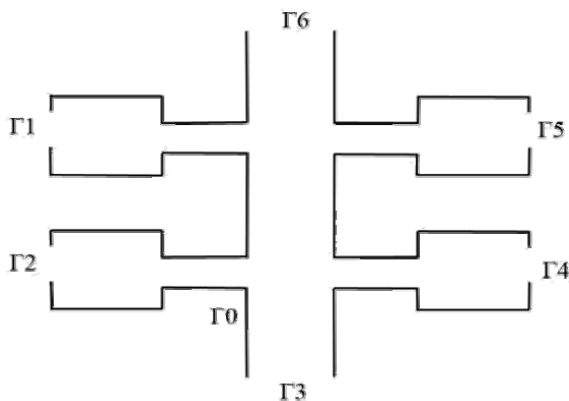


Рис. 1. Расчетная область

Для решения поставленной задачи была введена разнесенная сетка [4]: узлы расчета компонент скорости u и v сдвинуты на полшага по оси Ox и Oy соответственно относительно узлов расчета давления p . В результате аппроксимации исходной задачи получаем систему нелинейных уравнений $A(u, u) = f$, которая решается методом неполной аппроксимации.

$$\begin{aligned} u^{n+\frac{1}{2}} &= u^n - \tau_n r^n, \\ u^{n+1} &= u^{n+\frac{1}{2}} - \alpha_1 z_1 - \dots - \alpha_m z_m, \end{aligned}$$

где z_i – вектор $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, единица на i – ом месте; τ, α – параметры метода. Подробнее о методе см.: [5].

Были проведены расчеты при различных значениях параметра вязкости жидкости, а также давления на границах участков протекания.

На рис. 2 показаны линии тока при значениях давления 0,1 на границах Г1, Г2, Г3, Г4, Г5 и 0 на Г6. Из-за симметричных краевых условий картина течения также сохраняет симметрию. При уменьшении вязкости количество вихрей увеличивалось. Значение функции скорости внутри вихрей значительно меньше скорости остального потока.

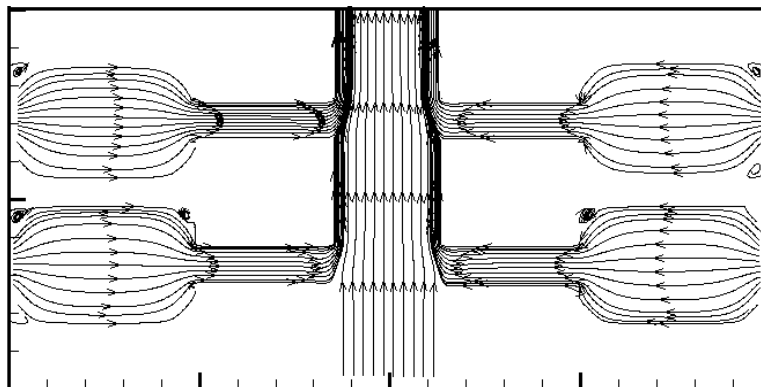


Рис. 3. Кинематическая вязкость $\nu = 0,01$

На рис. 3 давление на нижней левой границе Г2 равно 0,1, на границах Г1, Г3, Г4, Г5 0,5, на верхней границе Г6 равно 0. На рис. 3 видно, что при данных параметрах задачи поток уходит в левую нижнюю комнату, и надо быть особенно осторожным при проектировании систем вентиляции с возможностью возникновения подобной ситуации.

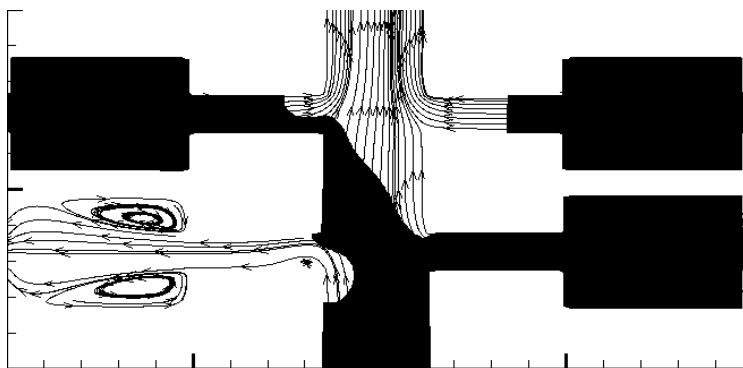


Рис. 3. Давление в нижней левой комнате 0,1

На рис. 4 давление на нижних границах Г2, Г4 равно 0,6, на границах Г1, Г3, Г5 0,5, на верхней границе Г6 равно 0. Картина течения симметрична, при увеличении давления размер вихрей возрастает. Вихри в нижней комнате больше, по сравнению с верхними.

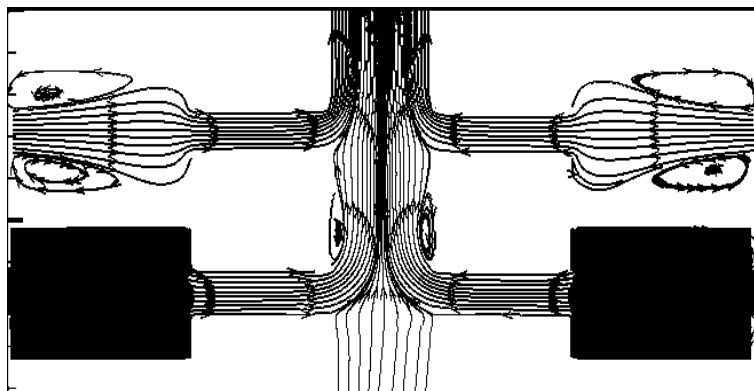


Рис. 4. Давление в нижних комнатах 0,8

В результате проведенных расчетов было выяснено, что вихревые зоны возрастают с увеличением вязкости и давления, при симметричном задании давления на участках протекания границы линии тока также направлены симметрично, при уменьшении вязкости характерная скорость пропорционально увеличивается.

Библиографические ссылки

1. Geidarov N. A., Zakharov Yu. N., Shokin Yu. I. Solution of the problem of a viscous fluid flow with a given pressure differential // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2011. – Vol. 26. – № 1. – P. 39–48.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1970.
3. Рагулин В. В. К задаче о протекании вязкой жидкости сквозь ограниченную область при заданном перепаде давления или напора // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. – Новосибирск. 1976. – Вып. 27. – С. 78–92.
4. Патанкар С. В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984.
5. Захаров Ю. Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики. – Новосибирск: Наука, 2004. – 239 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ТЕЛА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НЕСКОЛЬКИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕМПЕРАТУРЫ

А. Б. Цветков, Б. Г. Цветков

*Сибирский государственный индустриальный университет
г. Новокузнецк*

В публикации показано распространение метода конечных элементов на решение краевых задач термоупругости. На основе этой методики авторами составлены компьютерные программы для решения численными методами смешанных краевых задач термоупругости в прямоугольнике G : $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, где a, b, c, d – заданные постоянные (рис. 1а). Пусть в области G заданы кусочно-непрерывные функции: $\lambda = \lambda(x, y)$, $\mu = \mu(x, y)$, $\alpha = \alpha(x, y)$, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$. Значения параметров в задаче 1: $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$, $\mu = 1$, $\lambda = 1$, $\alpha = 1$, $\gamma = 5$.

Задача 1. Найти температуру $T = T(x, y)$ пластины и вектор перемещений $U = (u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, удовлетворяющих в области G системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} T''_{xx} + T''_{yy} &= 0, \\ \mu(u''_{xx} + u''_{yy}) + (\lambda + \mu)(u''_{xx} + v''_{yy}) - \gamma T_x &= 0, \\ \mu(v''_{xx} + v''_{yy}) + (\lambda + \mu)(u''_{xy} + v''_{yy}) - \gamma T_y &= 0. \end{aligned}$$

и граничным условиям: на сторонах прямоугольника $x = a$, $x = b$, $y = d$ и $y = c$, заданы нулевые горизонтальные перемещения $u(x, y) = 0$ и нулевые вертикальные перемещения $v(x, y) = 0$. На сторонах $x = a$ и $x = b$ температура равна нулю. На стороне $y = d$ температура равна нулю $T(x, d) = 0$, кроме точки $C((a + b)/2, d)$, в которой температура равна 1. На стороне $y = c$ температура равна единице $T(x, c) = 1$. На отрезке $0,5 \leq x \leq 0,75$, $y = 0,5$ температура равна единице.

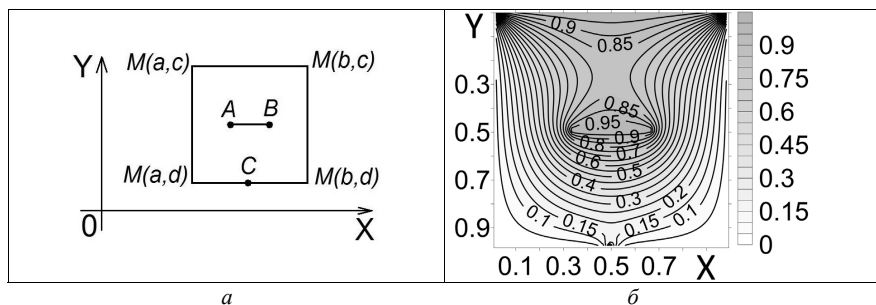


Рис. 1. Параметры модели: а – расчетная область; б – результаты математического моделирования температур T в расчетной области G

Для получения численного решения по программе расчетная область G разбивалась на 3600 конечных элементов – прямоугольников. Значения температуры, напряжений и перемещений вычислялись в центрах конечных элементов.

На рис. 1б приведена картина распределения температуры, полученная в результате проведения вычислительного эксперимента. Тонкие линии – это линии уровня, построенные по численным значениям температуры.

Из рис. 1б видно, что угловые точки $M(a,c)$ и $M(b,c)$ верхнего источника являются особыми точками: в них начинаются и заканчиваются линии уровня температуры; они определяют распределение поля температуры в расчетной области. Центральный источник АВ оказывает локальное воздействие. Влияние источника С не оказывает значимого воздействия на распределение температуры.

На рис. 2а приведены картины распределения горизонтальных перемещений u , 2б – распределения напряжений $\sigma_x = 2\mu u'_x + \lambda(u'_x + u'_y) - \alpha T$, полученных в результате проведения вычислительного эксперимента.

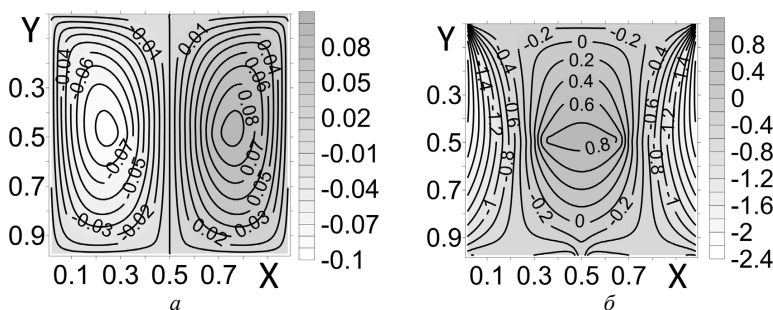


Рис. 2. Результаты математического моделирования: а – перемещения u ; б – компонента σ_x

Из рис. 2а видно, что у границ $x = a$, $x = b$, $y = c$ и $y = d$, с заданными нулевыми перемещениями u , соответствующая компонента перемещений равна нулю. Относительно линии $x = 0,5$ абсолютные значения перемещений одинаковы, а по знаку противоположны. Наибольшие по модулю горизонтальные перемещения соответствуют боковым границам центрального источника температуры.

Из рис. 2б видно, что напряжения σ_x , наблюдаемые в окрестности центрального источника, меняют свой знак при приближении к границам расчетной области. Наибольшие по модулю значения напряжений σ_x наблюдаются в окрестности угловых точек $M(a,c)$ и $M(b,c)$. Источник АВ определяет распределение напряжений σ_x в центре расчетной области.

На рис. 3а приведено распределение вертикальных перемещений v , 3б – распределение напряжений $\sigma_y = 2\mu v'_y + \lambda(u'_x + u'_y) - \alpha T$.

Из рис. 3а видно, что у границ $x = a$, $x = b$, $y = c$ и $y = d$ с заданными нулевыми перемещениями v соответствующая компонента перемещений равна нулю. Вертикальные перемещения достигают наибольших значений под центральным источником температуры в окрестности точки $M(0,5; 0,6)$.

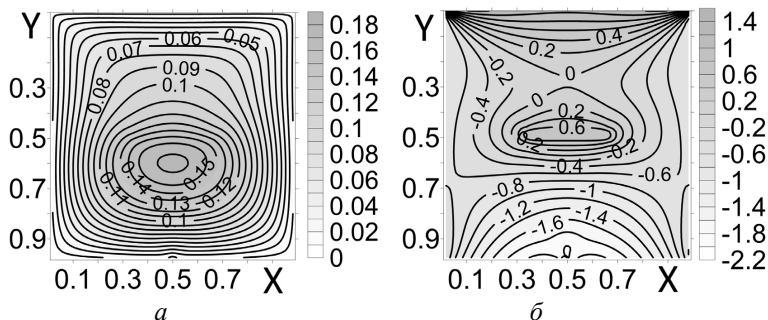


Рис. 3. Результаты математического моделирования: а – перемещения v ; б – компонента σ_y

Из рис. 3б видно, что при переходе вдоль оси OY через центральный источник напряжения σ_y меняют свой знак на противоположный.

Рассмотренный пример иллюстрирует применение разработанной программы для моделирования напряженно-деформированного состояния упругого тела под воздействием протяженных и точечных источников температуры.

Задача 2. Найти температуру $T = T(x, y)$ и вектор перемещений $U = (u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, удовлетворяющих в области $G: 0 < x < 2,4$, $0 < y < 0,6$ системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} T''_{xx} + T''_{yy} &= 0, \\ \mu(u''_{xx} + u''_{yy}) + (\lambda + \mu)(u''_{xx} + v''_{xy}) - \gamma T'_x &= 0, \\ \mu(v''_{xx} + v''_{yy}) + (\lambda + \mu)(u''_{xy} + v''_{yy}) - \gamma T'_y &= 0 \end{aligned}$$

и граничным условиям: на сторонах прямоугольника (в метрах) $x = 0$, $x = 2,4$, $y = 0$ и $y = 0,6$, заданы нулевые горизонтальные перемещения $u(x, y) = 0$ и нулевые вертикальные перемещения $v(x, y) = 0$. На стороне $x = 0$ температура (в градусах С) $T = 100$. На стороне $x = 2,4$ температура определяется уравнением $T(y) = 2000 - 1300 \cdot y / 0,6$. На отрезках $y = 0$, $0 < x < 0,96$ и $y = 0,6$, $0 < x < 0,96$ температура $T = 100$. На отрезке $y = 0$, $0,96 < x < 2,4$ температура $T = 700$. На отрезке $y = 0,6$, $0,96 < x < 2,4$ температура $T = 2000$. На отрезке CD : $x = 1,92$, $0,3 < y < 0,6$ температура $T = 2000$.

Рассмотренная расчетная область моделирует электрод с трещиной CD (рис. 4а, 5а), опущенный в жидкий металл электросталеплавильной печи. В жидкий металл погружена та часть электрода, координаты x которой превышают значение $0,96$. Температура в трещине составляет 2000°C .

Под воздействием высоких температур в электроде возникают напряжения, которые приводят к его механическому разрушению.

На рис. 5а приведена фотография электрода, подвергнувшегося воздействию больших температур в электросталеплавильной печи. На фотографии видны трещины и изменения в той части границы электрода, которая была подвергнута высоким температурам.

Для получения численного решения по программе расчетная область G разбивалась на 2500 конечных элементов – прямоугольников. Значения температуры, напряжений и перемещений вычислялись в центрах конечных элементов. Ниже приведены картины распределения линий уровня температуры и касательных напряжений (рис. 4б, 5б).

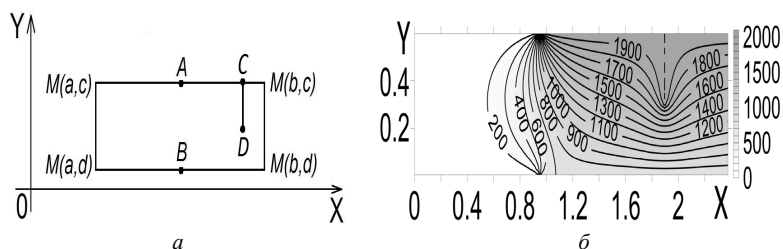


Рис. 4. Параметры модели: а – расчетная область;
б – результаты математического моделирования температур T в расчетной области G

На рис. 4б приведена картина распределения температуры, полученная в результате проведения вычислительного эксперимента. Тонкие линии – это линии уровня, построенные по численным значениям температуры. Из рис. 4б видно, что трещина способствует распространению высоких температур внутрь электрода.

На рис. 5б приведена картина распределения касательных напряжений τ_{xy} , полученных в результате проведения вычислительного эксперимента. Из рис. 5б видно, что в окрестности трещины касательные напряжения меняют свой знак на противоположный.

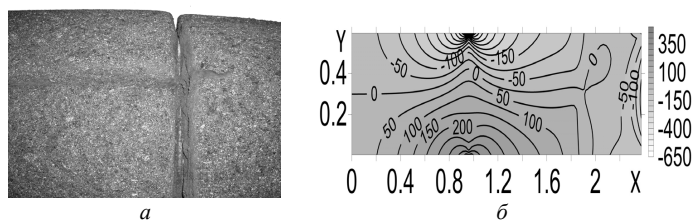


Рис. 5. Электрод: а – фотография;
б – результаты математического моделирования напряжений τ_{xy}

Таким образом, в результате математического моделирования выявлено, что при равномерно распределенном вдоль границы расчетной области источнике температуры угловые точки являются особыми точками.

Применение разработанного пакета программ к моделированию термоупругого напряженно-деформированного состояния электрода с трещиной позволило выявить, что трещина является особой зоной для касательных напряжений.

Рассмотренные примеры иллюстрирует применение разработанной программы для моделирования напряженно-деформированного состояния под воздействием температуры.

Библиографический список

1. Цветков А. Б. О методе глобальной аппроксимации // Материалы четырнадцатой международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС-2005; г. Алуста) – М.: Вузов. книга, 2005. – С. 439–440.
2. Цветков Б. Г., Цветков А. Б. Восстановление значений функции внутри пространственной области по заданным ее значениям на границе // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2005): IV Всерос. науч.-практ. конф. – Томск: Изд-во ТГУ, 2005. – С. 81–83.
3. Цветков А. Б., Цветков Б. Г. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния под воздействием источников температуры // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2011): X Всерос. науч.-практ. конф. с международ. участием (25–26 нояб. 2011 г.). – Томск: Изд-во ТГУ, 2011. – С. 156–160.

НОВЫЙ МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ НА ДВЕ КОМПОНЕНТЫ

Н. Н. Щелканов

*Институт оптики атмосферы им. В. Е. Зуева СО РАН
г. Томск*

Введение. Обычно для разделения физической величины Z на две компоненты (X и Y) используется статистический метод, основанный на линейном множественном регрессионном анализе массива экспериментальных данных [1]. В этом случае уравнение регрессии для величины Z записывается в виде

$$Z = K_0 + K_1X + K_2Y, \quad (1)$$

где K_0 , K_1 , K_2 – эмпирические коэффициенты, определяемые по статистическим характеристикам массивов Z , X , и Y .

Однако статистический метод, основанный на линейном множественном регрессионном анализе, имеет существенные недостатки. Во-первых, даже при отсутствии случайных погрешностей во входных вели-

чинах X и Y коэффициенты регрессии зависят от их диапазона изменчивости. Во-вторых, наличие случайных погрешностей во входных величинах X и Y приводит к занижению коэффициентов регрессии K_1 , K_2 и завышению K_0 , причем чем больше эти величины случайных погрешностей, тем меньше K_1 , K_2 и больше K_0 .

В [2–5] представлена обобщенная формула, позволяющая находить коэффициенты регрессии линейного уравнения $Y = K_0 + K_1 X$ для общего случая, когда разброс точек в корреляционной связи величин X и Y обусловлен как их случайными погрешностями измерений, так и неконтролируемыми физическими факторами. Формула имеет вид

$$K_1 = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{B}{A} \cdot \frac{1}{2 \cdot \rho_{XY}} \cdot \left\{ \left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) + \sqrt{\left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right)^2 + 4 \cdot \rho_{XY}^2} \right\}, \quad (2)$$

где

$$A = \sqrt{1 - |\rho_{XY}|} \cdot \sqrt{\frac{1 - \delta_X^2 / \sigma_X^2}{1 - \delta_Y^2 / \sigma_Y^2}}, \quad B = \sqrt{1 - |\rho_{XY}|} \cdot \sqrt{\frac{1 - \delta_Y^2 / \sigma_Y^2}{1 - \delta_X^2 / \sigma_X^2}}, \quad (3)$$

σ_X и σ_Y – среднеквадратические отклонения величин X и Y ;

ρ_{XY} – коэффициент корреляции между X и Y ;

δ_X и δ_Y – случайные среднеквадратические погрешности измерения X и Y для рассматриваемого массива данных.

При этом методы вычисления случайных погрешностей можно найти в работах [6, 7].

Постановка задачи. Решается задача нахождения коэффициентов K_0 , K_1 , K_2 уравнения (1), в котором $Z = Z_0 + z$, $X = X_0 + x$, $Y = Y_0 + y$, где Z_0 , X_0 и Y_0 – случайные величины, не подверженные случайным погрешностям, z , y и x – случайные погрешности, Z , X и Y – случайные величины, подверженные случайным погрешностям. Разброс точек в корреляционной связи величин Z , X и Y обусловлен как случайными погрешностями, так и неконтролируемыми параметрами. Случайные погрешности z , y и x имеют СКО, равные δ_Z , δ_Y и δ_X , которые представляют собой случайные среднеквадратические погрешности величин Z , Y и X . Предполагается, что величины Z , Y и X не коррелируют с погрешностями z , y и x ; погрешности z , y и x не коррелируют между собой.

Новый метод разделения на компоненты. В предлагаемом методе разделения на компоненты используется обобщенная формула линейной регрессии (2). Для нахождения коэффициентов регрессии уравнения (1) применяется численный итерационный метод [8, 9]. Процедура вычисления коэффициентов регрессии заключается в следующем.

Задается один из коэффициентов регрессии уравнения (1), например K_1 , и находится среднеквадратическое отклонение разницы

$$\begin{aligned} \beta &= Z - K_1 X - K_0 \\ \sigma_\beta &= \sqrt{\sigma_Z^2 + K_1^2 \sigma_X^2 - 2 K_1 \sigma_Z \sigma_X \rho_{ZX}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где σ_Z и σ_X – среднеквадратические отклонения величин Z и X ;
 ρ_{ZX} – нормированный коэффициент корреляции между Z и X .

Далее находится нормированный коэффициент корреляции β с Y

$$\rho_{\beta Y} = \frac{\rho_{ZY}\sigma_Z - K_1\rho_{XY}\sigma_X}{\sigma_\beta}, \quad (5)$$

где ρ_{ZY} и ρ_{XY} – нормированные коэффициенты корреляции между ZY и XY .

Затем вычисляется случайная среднеквадратическая погрешность величины β

$$\delta_\beta = \sqrt{\delta_Z^2 + K_1^2 \delta_X^2}, \quad (6)$$

и коэффициент регрессии K_2

$$K_2 = \frac{\sigma_\beta}{\sigma_Y} \cdot \frac{B_1}{A_1} \cdot \frac{1}{2 \cdot \rho_{\beta Y}} \cdot \left\{ \left(\frac{A_1}{B_1} - \frac{B_1}{A_1} \right) + \sqrt{\left(\frac{A_1}{B_1} - \frac{B_1}{A_1} \right)^2 + 4 \cdot \rho_{\beta Y}^2} \right\}, \quad (7)$$

где

$$A_1 = \sqrt{1 - |\rho_{\beta Y}|} \cdot \sqrt{\frac{1 - \delta_Y^2 / \sigma_Y^2}{1 - \delta_\beta^2 / \sigma_\beta^2}}, \quad B_1 = \sqrt{1 - |\rho_{\beta Y}|} \cdot \sqrt{\frac{1 - \delta_\beta^2 / \sigma_\beta^2}{1 - \delta_Y^2 / \sigma_Y^2}}, \quad (8)$$

δ_Y – случайная среднеквадратическая погрешность измерения величины Y ;

σ_Y – среднеквадратическое отклонение величины Y .

Полученное значение коэффициента регрессии K_2 используется для нахождения среднеквадратического отклонения разницы $\mu = Z - K_2 Y - K_0$

$$\sigma_\mu = \sqrt{\sigma_Z^2 + K_2^2 \sigma_Y^2 - 2K_2 \sigma_Z \sigma_Y \rho_{ZY}}, \quad (9)$$

коэффициента корреляции μ с X

$$\rho_{\mu X} = \frac{\rho_{ZX}\sigma_Z - K_2\rho_{YX}\sigma_Y}{\sigma_\mu}, \quad (10)$$

случайной среднеквадратической погрешности величины μ

$$\delta_\mu = \sqrt{\delta_Z^2 + K_2^2 \delta_Y^2}, \quad (11)$$

и коэффициента регрессии K_1

$$K_1 = \frac{\sigma_\mu}{\sigma_X} \cdot \frac{B_2}{A_2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \rho_{\mu X}} \cdot \left\{ \left(\frac{A_2}{B_2} - \frac{B_2}{A_2} \right) + \sqrt{\left(\frac{A_2}{B_2} - \frac{B_2}{A_2} \right)^2 + 4 \cdot \rho_{\mu X}^2} \right\}, \quad (12)$$

где

$$A_2 = \sqrt{1 - |\rho_{\mu X}|} \cdot \sqrt{\frac{1 - \delta_X^2 / \sigma_X^2}{1 - \delta_\mu^2 / \sigma_\mu^2}}, \quad B_2 = \sqrt{1 - |\rho_{\mu X}|} \cdot \sqrt{\frac{1 - \delta_\mu^2 / \sigma_\mu^2}{1 - \delta_X^2 / \sigma_X^2}}, \quad (13)$$

δ_X – случайная среднеквадратическая погрешность измерения величины X .

Затем полученное значение коэффициента регрессии K_1 подставляется в (4), и процедура нахождения коэффициентов K_1 и K_2 продолжается до выполнения условий:

$$\left| K_{1,m-1} - K_{1,m} \right| \leq \theta_1, \left| K_{2,m-1} - K_{2,m} \right| \leq \theta_2, \quad (14)$$

где θ_1 и θ_2 – некоторые наперед заданные числа, определяющие погрешность вычисления коэффициентов K_1 и K_2 ;

m – количество итераций.

Далее находится коэффициент регрессии K_0 по известной формуле

$$K_0 = \bar{Z} - K_1 \bar{X} - K_2 \bar{Y}, \quad (15)$$

где $\bar{Z}, \bar{X}, \bar{Y}$ – средние значения физических величин Z, X и Y .

Заключение. Предложен новый метод вычисления коэффициентов регрессии K_0, K_1 , и K_2 линейного уравнения $Z = K_0 + K_1 X + K_2 Y$ с учетом случайных погрешностей измеряемых величин X, Y , и Z , который позволяет получать устойчивые и физически корректные коэффициенты регрессии, не зависящие от используемого массива данных.

Метод представляет интерес для специалистов любой области знания, занимающихся интерпретацией экспериментальных данных, и студентов высших учебных заведений.

Библиографические ссылки

1. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
2. Щелканов Н. Н. Построение регрессионной зависимости между аэрозольными оптическими толщами атмосферы с учетом их случайных погрешностей // II Заседание рабочей группы проекта «Аэрозоли Сибири»: тез. докл. – Томск: ИОА СО РАН, 1995. – С. 16.
3. Щелканов Н. Н. Обобщенный метод построения линейной регрессии и его применение для построения однопараметрических моделей аэрозольного ослабления // Оптика атмосферы и океана. – 2005. – Т. 18. – № 1–2. – С. 86–90.
4. Щелканов Н. Н. Обобщенный метод построения линейной регрессии между двумя физическими величинами с учетом их случайных погрешностей // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2007): материалы VI Междунаро. науч.-практ. конф. (г. Анжеро-Судженск, 9–10 нояб. 2007 г.). – Томск: Изд-во ТГУ, 2007. – Ч. II. – С. 5.
5. Щелканов Н. Н. Новый метод нахождения коэффициентов линейной регрессии между двумя физическими величинами // Вестник ТГУ. Сер. «Управление, вычислительная техника и информатика». – 2010. – №4 (13). – С. 91–96.
6. Щелканов Н. Н. Методы вычисления случайных погрешностей физических величин непосредственно из экспериментальных данных // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2008): материалы VII Всерос. науч.-практ. конф. с междунаро. участием (14–15 нояб. 2008 г.). – Томск: Изд-во ТГУ, 2008. – Ч. II. – С. 66–69.
7. Щелканов Н. Н. Методы вычисления случайных погрешностей параметров окружающей среды из экспериментальных данных // Оптика атмосферы и океана. – 2012. – Т. 25. – № 9. – С. 815–821.
8. Щелканов Н. Н. Итерационный метод разделения коэффициентов ослабления на две компоненты // Аэрозоли Сибири. XIII Рабочая группа: тез. докл. – Томск: Изд-во ИОА СО РАН, 2006. – С. 58.
9. Shchelkanov N. N. Iterative method of separation of the extinction coefficients into two components // Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering. – 2006. – Vol. 6522. 65221O. – P. 5.

Раздел 2. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЙ НА ДИНАМИКУ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ ЗДОРОВЬЯ

Н. И. Богатырева

Кемеровский государственный университет

В данной работе проведено исследование динамики показателей состояния здоровья. Рассмотрены различные регрессионные зависимости показателей здоровья от долевого распределения инвестиций в основной капитал по различным видам экономической деятельности Кемеровской области; для каждого показателя выбрана лучшая модель.

Здравоохранение является важнейшей составляющей социальной сферы, одним из определяющих условий жизнедеятельности человеческого общества. Здравоохранение – это такая отрасль, которая требует масштабных средств, это сфера, на которую финансовые средства должны выделяться в первую очередь, так как именно здравоохранение обеспечивает качество жизни населения.

Одной из характеристик эффективности этой составляющей социальной сферы региона является уровень здоровья населения. Для измерения данного уровня часто используется единый критерий – интегральный показатель (ИП), одновременно учитывающий комплексное влияние разных факторов и обобщающий информацию о различных аспектах состояния здоровья населения. Существует большое число моделей ИП здоровья, например модель, предложенная Б. Ф. Кирьяновым [1]:

$$\begin{aligned} ИП = & K_{ОРЖ} \cdot ОРЖ + K_{СППЖ} \cdot СППЖ - \\ & - K_{ОЗО} \cdot ОЗО - K_{ОСМ} \cdot ОСМ - K_{ПИНВ} \cdot ПИНВ + C. \end{aligned} \quad (1)$$

В вычислении ИП учитываются пять показателей здоровья: ОРЖ характеризует воспроизводство населения, СППЖ – расчетный показатель, аккумулирующий повозрастные показатели смертности, ОЗО – общая заболеваемость, ПИНВ – первичная инвалидность, ОСМ – общая смертность. K_i – весовые коэффициенты показателей здоровья, C – константа. Эти данные ежегодно публикуются в соответствующих статистических сборниках (напр., [2]).

По формуле (1) на основе статистических данных (см. табл. 1) была построена модель ИП здоровья населения для Кемеровской области [3]:

$$\begin{aligned} ИП_t = & 0,02405 y_t^{ОРЖ} + 0,00198 y_t^{СППЖ} - \\ & - 0,00034 y_t^{ОЗО} - 0,0075 y_t^{ОСМ} - 0,02765 y_t^{ПИНВ} + 0,75. \end{aligned} \quad (2)$$

**Значения показателей здоровья
населения Кемеровской области за 1995–2010 гг.**

Год	ОРЖ	СПЖ	ОЗО	ПИН В	ОСМ
1995	8,9	61,61	681,8	7,45	16,7
1996	8,5	62,03	619,2	6,63	16,1
1997	8,4	63,37	612	5,56	15,3
1998	8,7	64,61	597,6	5,8	14,3
1999	8,3	63,15	672	5,7	15,8
2000	9,0	62,69	739,3	6,17	16,7
2001	9,5	62,77	708,3	6,95	16,9
2002	10,1	62,41	781,9	7,25	17,7
2003	10,5	61,86	734,7	6,87	18,3
2004	10,7	62,23	741,7	8,07	17,9
2005	10,8	61,56	725,3	13,1	18,7
2006	11,3	63,04	816,9	14,6	17,3
2007	12,1	64,01	828,6	15,01	16,6
2008	13,0	64,64	793,8	13,95	16,3
2009	13,3	65,37	835,9	11,97	15,9
2010	13,2	65,24	796,9	9,6	16,1

Целью данной работы является моделирование влияния инвестиций в разные сферы деятельности в регионе на показатели здоровья населения.

В качестве видов инвестиций возьмем: x_1 – инвестиции в образование, x_2 – инвестиции в здравоохранение, x_3 – инвестиции в предоставление социальных, коммунальных и персональных услуг, x_4 – инвестиции в промышленность, x_5 – инвестиции в сельское хозяйство. Для указания номера года введем соответствующий индекс времени t : x_{it} , $i = 1, \dots, 5$.

Так как в дальнейшем будет моделироваться влияние инвестиций на динамику показателей здоровья, а все показатели здоровья и сам ИП суть относительные величины, то было бы целесообразно перевести абсолютные значения инвестиций в относительные величины, то есть найти долю каждого вида инвестиций от общего объема инвестиций (табл. 2).

Для моделирования влияния инвестиций для каждого из показателей здоровья построим регрессионные уравнения зависимости значений этих показателей для каждого года от долевого распределения инвестиций в основной капитал по различным видам экономической деятельности Кемеровской области. Кроме того, в правую часть регрессионных уравнений включим значения соответствующих показателей состояния здоровья предшествующего года, чтобы учесть динамику.

**Долевое распределение инвестиций в основной капитал
по различным видам экономической деятельности
Кемеровской области от общего объема инвестиций
(относительные величины)**

Год	x_{1t}	x_{2t}	x_{3t}	x_{4t}	x_{5t}
2001	0,018685	0,038088	0,033058	0,877614	0,032555
2002	0,022944	0,060055	0,040807	0,831537	0,044657
2003	0,024596	0,066872	0,053651	0,805919	0,048962
2004	0,035	0,075469	0,054922	0,778203	0,056406
2005	0,040886	0,101249	0,053322	0,741397	0,063146
2006	0,085047	0,119273	0,081264	0,587274	0,127143
2007	0,089464	0,096587	0,07761	0,597331	0,139007
2008	0,145882	0,166058	0,086809	0,472491	0,128761
2009	0,135905	0,182579	0,095406	0,497079	0,089032
2010	0,110797	0,130982	0,088914	0,563541	0,105766

В работе будем рассматривать регрессионные зависимости следующих видов:

$$y_{t+1}^j = a_j x_{1t}^{\alpha_{1j}} x_{2t}^{\alpha_{2j}} x_{3t}^{\alpha_{3j}} x_{4t}^{\alpha_{4j}} x_{5t}^{\alpha_{5j}} (y_t^j)^{\beta_j}, \quad (3)$$

$$y_{t+1}^j = a_j + x_{1t}^{\alpha_{1j}} + x_{2t}^{\alpha_{2j}} + x_{3t}^{\alpha_{3j}} + x_{4t}^{\alpha_{4j}} + x_{5t}^{\alpha_{5j}} + (y_t^j)^{\beta_j}, \quad (4)$$

$$y_{t+1}^j = a_j + \alpha_{1j} x_{1t} + \alpha_{2j} x_{2t} + \alpha_{3j} x_{3t} + \alpha_{4j} x_{4t} + \alpha_{5j} x_{5t} + \beta_j y_t^j. \quad (5)$$

Оценку коэффициентов этих моделей будем проводить методом наименьших квадратов (МНК).

В результате получаем следующие регрессионные уравнения:

$$y_{t+1}^{ОРЖ} = 18.04 x_{1t}^{0.135} x_{2t}^{0.001} x_{3t}^{0.001} x_{4t}^{0.664} x_{5t}^{0.023} (y_t^{ОРЖ})^{0.021}, \quad (6)$$

$$y_{t+1}^{ОСМ} = 24.25 x_{1t}^{0.001} x_{2t}^{0.001} x_{3t}^{0.074} x_{4t}^{0.352} x_{5t}^{0.001} (y_t^{ОСМ})^{0.001}, \quad (7)$$

$$y_{t+1}^{ПИНВ} = 2.65 x_{1t}^{0.001} x_{2t}^{0.001} x_{3t}^{0.001} x_{4t}^{0.263} x_{5t}^{0.036} (y_t^{ПИНВ})^{0.699}, \quad (8)$$

$$y_{t+1}^{СППЖ} = 89.33 x_{1t}^{0.009} x_{2t}^{0.001} x_{3t}^{0.102} x_{4t}^{0.076} x_{5t}^{0.01} (y_t^{СППЖ})^{0.001}, \quad (9)$$

$$y_{t+1}^{ОЗО} = 975.8 x_{1t}^{0.001} x_{2t}^{0.048} x_{3t}^{0.036} x_{4t}^{0.002} x_{5t}^{0.001} (y_t^{ОЗО})^{0.001}, \quad (10)$$

$$y_{t+1}^{ОРЖ} = -0.676 + x_{1t}^{0.259} + x_{2t}^{-0.142} + x_{3t}^{0.322} + x_{4t}^{-0.853} + x_{5t}^{0.417} + (y_t^{ОРЖ})^{0.874}, \quad (11)$$

$$y_{t+1}^{СППЖ} = 29.288 + x_{1t}^{-0.049} + x_{2t}^{-0.014} + x_{3t}^{-0.167} + x_{4t}^{-1.888} + x_{5t}^{0.095} + (y_t^{СППЖ})^{0.798}, \quad (12)$$

$$y_{t+1}^{ПИНВ} = -5.279 + x_{1t}^{-0.353} + x_{2t}^{0.029} + x_{3t}^{0.061} + x_{4t}^{1.38} + x_{5t}^{0.152} + (y_t^{ПИНВ})^{0.983}, \quad (13)$$

$$y_{t+1}^{ОСМ} = 3.81 + x_{1t}^{-0.224} + x_{2t}^{-0.014} + x_{3t}^{-0.064} + x_{4t}^{2.307} + x_{5t}^{-0.163} + (y_t^{ОСМ})^{0.692}, \quad (14)$$

$$y_{t+1}^{ОРЖ} = 3.66 + 3.35x_{1t} - 1.99x_{2t} - 7.56x_{3t} - 0.45x_{4t} + 10.37x_{5t} + 0.71y_t^{ОРЖ}, \quad (15)$$

$$y_{t+1}^{ПИНВ} = 4 - 0.06x_{1t} - 0.06x_{2t} + 0.03x_{3t} + 0.13x_{4t} + 0.01x_{5t} + 0.67y_t^{ПИНВ}, \quad (16)$$

$$y_{t+1}^{СППЖ} = 27.18 - 6.71x_{1t} + 15.75x_{2t} + 0.2x_{3t} + 1.14x_{4t} + 16.82x_{5t} + 0.52y_t^{СППЖ}, \quad (17)$$

$$y_{t+1}^{ПИНВ} = 4 - 0.06x_{1t} - 0.06x_{2t} + 0.03x_{3t} + 0.13x_{4t} + -4947x_{3t} - 2547.5x_{4t} - 709.97x_{5t} - 0.07y_t^{ОЗО}. \quad (18)$$

Для выбора лучшей модели для каждой из них было рассчитано среднеквадратическое отклонение расчетных данных от фактических (табл. 3).

Таблица 3

Среднеквадратическое отклонение расчетных данных от фактических для каждой модели

Год	$\sigma^{ОРЖ}$	$\sigma^{СППЖ}$	$\sigma^{ОЗО}$	$\sigma^{ПИНВ}$	$\sigma^{ОСМ}$
1-я модель	0,044	1,129	955,85	2,897	0,144
2-я модель	0,048	0,295	2077,8	3,179	0,169
3-я модель	0,013	0,163	53,1	3,38	0,373

Из табл. 3 видно, что для показателей воспроизводства населения (ОРЖ), общей заболеваемости (ОЗО) и расчетного показателя, аккумулирующего повозрастные показатели смертности (СППЖ), лучшей оказалась третья (линейная) модель. Для показателей первичной инвалидности (ПИНВ) и общей смертности (ОСМ) предпочтительней первая модель.

Построенные модели можно использовать в дальнейшем в качестве уравнений движения в задаче оптимального распределения инвестиций в регионе для улучшения состояния общественного здоровья.

Библиографические ссылки

1. Кирьянов Б. Ф. Математические модели интегрального показателя здоровья населения // Фундаментальные исследования. – 2008. – № 9. – С. 99–100.
2. Кузбасс, 2010: стат. сб. / Кемеровостат. – Кемерово, 2010. – 285 с.
3. Мешечкин В. В., Богатырева Н. И. Математическое моделирование задачи повышения уровня здоровья населения Кемеровской области с применением интегрального показателя // Вестник КемГУ. – 2011. – Вып. 3 (47). – С. 76–85.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ КОНКУРЕНТОСПОСОБНОСТИ ТОРГОВОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

А. Ю. Капишников, О. Н. Чащин

*Новосибирский государственный аграрный университет
Сибирский университет потребительской кооперации
г. Новосибирск*

В настоящей работе исследуется деятельность предприятия розничной торговли, имеющего доход за счет разности закупочных и розничных цен по всему спектру предлагаемых товарных позиций. Покупатели, приобретающие товары в розницу, фактически оплачивают услуги по экспертизе качества продукции, выгодному выбору поставщиков и производителей, доставке и хранению реализуемых товаров. Предполагается, что аналогичные услуги оказывают и конкурирующие торговые предприятия. В выигрыше оказывается то предприятие, которое сможет минимизировать издержки, правильно учесть конъюнктуру рынка и покупательский спрос, предложить покупателю товар по наиболее приемлемой цене.

Необходимость формирования эффективного механизма ценообразования обусловлена тем, что современная деятельность торговых предприятий осуществляется, как правило, в условиях совершенной конкуренции.

В основе практики **ценообразования в торговле** лежат принципы и методы формирования цены, которые определяют ценовую политику предприятия. Политика цен обретает свое выражение в управлении процессом ценообразования, что влияет на обоснованность уровня цен. Правильно выбранная ценовая политика, грамотная тактика формирования цен, экономически выверенные методы ценообразования составляют основу успешной деятельности любого торгового предприятия, независимо от формы собственности.

Ценовая политика торгового предприятия ориентирована на покупательский спрос, поэтому методологические основания системы ценообразования согласуются с методами изучения покупательского спроса [1].

Научная обоснованность устанавливаемых цен может быть достигнута с применением эффективных способов сбора и анализа информации о действующих ценах. Для этого авторами на платформе «ГАЛАКТИКА ЕВР 8.0» создана информационно-аналитическая система, имитирующая работу менеджера по ценообразованию. Использование системы позволяет своевременно принимать эффективные ценовые решения с ориентацией на конъюнктуру рынка.

В результате детального мониторинга анализируются цены всех уровней (от производителя, оптовые, розничные) по тем товарным группам, которые пользуются спросом и присутствуют в ассортименте розничной торговли предприятия. Мониторинг включает изучение качества про-

дукции, анализ прайс-листов и ценовых каталогов поставщиков, ценовой политики конкурентов, опросы покупателей, данные торговой статистики.

Ценовые решения должны обосновываться следующими выводами для оценки рыночных позиций и корректировки закупочных цен:

- цены могут быть выше, чем у конкурентов, если производимый товар превосходит их по качественным характеристикам, и наоборот, если потребительские свойства товара уступают соответствующим характеристикам товаров конкурентов, то цены должны быть ниже;

- если предлагаемый предприятием товар аналогичен товарам основных конкурентов, то его цена будет близка к ценам товаров конкурентов.

Экономико-математическая модель. В основу модели положен метод имитационного моделирования с достаточным набором базисных функций и адекватным варьированием управляющих параметров системы.

Выбор метода ценообразования основан на затратном подходе расчета торговых надбавок розничных цен путем прибавления к издержкам обращения определенной величины прибыли. Расчет розничной цены производится по следующей формуле:

$$PC = 3Ц + (C (1 + R/100)), \quad (1)$$

где PC – розничная цена;

$3Ц$ – закупочная цена;

C – издержки;

R – ожидаемая (нормативная) рентабельность.

Исследование торговой практики (на примере Искитимского производственно-торгового потребительского общества, Новосибирская область) показывает, что для получения дополнительного дохода вследствие эффективного ценообразования целесообразно определить корректировки цен в будущем с учетом внедрения рыночных методов расчета цены с ориентацией на сложившийся уровень закупочных цен по следующим направлениям:

- следование закупочных цен за рыночными оптовыми ценами;
- следование закупочных цен за оптовыми ценами поставщика-лидера на рынке;
- определение закупочной цены на основе привычных, принятых в практике данного рынка оптовых цен.

Для определения качественных параметров используются устоявшиеся понятия и термины экономической теории и маркетинга. Разность между верхней границей закупочной цены и нижней границей, образуемой оптовыми ценами поставщиков, является доходом, анализ которого позволяет оценить эффективность ценообразования. Именно в этом интервале и устанавливается конкретная цена накупаемый товар. Дополнительными факторами, определяющими эффективность ценовых решений, следует

назвать вероятности возможных потерь как от затоваривания склада, так и от недопоставок востребованных позиций.

Формула расчета розничной цены с применением рыночных методов имеет следующий вид:

$$PC = 3Ц + \Delta + TH, \quad (2)$$

где PC — розничная цена;

$3Ц$ — закупочная цена;

TH — торговая надбавка;

Δ — разница между закупочной ценой и рыночными оптовыми ценами.

Закупочная цена вычисляется путем осреднения данных мониторинга по всему спектру поставщиков за весь предшествующий период. Значение Δ также можно считать известным. Обе эти величины являются интегральными характеристиками и, следовательно, малочувствительны к случайным флуктуациям рыночных данных. Торговая надбавка является управляющим параметром системы ценообразования.

Оптимизационная задача состоит в определении розничной цены, гарантирующей максимальный доход, при учете всех факторов, оказывающих влияние на эффективность торговой деятельности предприятия.

Так как часть данных имеет нечеткое представление (интервального типа или типа меток в порядковой шкале), а другие носят стохастический (вероятностный) характер неопределенности, то в вычислительный алгоритм заложен принцип адаптации. Естественным элементарным интервалом времени для торговой деятельности по реализации товаров повседневного спроса является неделя. По данным мониторинга за период до предпоследней недели производится серия имитационных вычислений с перебором базисных функций и оптимизацией по величине дохода. На основе оптимального набора базисных функций производится прямой расчет на следующую неделю, с использованием данных и за последнюю неделю.

В систему заложены алгоритмы, позволяющие отслеживать ценовую политику каждого поставщика торгового предприятия, вплоть до работы конкретных менеджеров. Кроме того, система имеет фильтры (определенные экспертным путем и уточняемые таким же образом количественные значения определенных параметров системы), позволяющие выявить и при необходимости игнорировать (или, наоборот, использовать с наибольшей пользой) неординарные ситуации или нестандартные решения игроков рынка.

Опыт практической работы менеджера торгового предприятия показывает, что имитация его деятельности с применением разработанной информационно-аналитической системы в основных чертах вполне адекватно отображает его действия. Однако методом опроса менеджеров установлено, что в условиях срочности принятия ценовых решений менеджеру удается удерживать в сфере своего внимания и, соответственно, реально держать под контролем только до полутора – двух сотен товарных позиций (это в лучшем случае). Для компьютерного комплекса, реализующего систему эффективного ценообразования, такого ограничения нет. Спектр

товарных позиций можно варьировать произвольным образом, что дает дополнительные возможности для исследования конъюнктуры рынка.

Система прошла опробование в торговой сети Искитимского производственно-торгового потребительского предприятия. В ходе пробной эксплуатации установлено, что автоматизация процессов ценообразования позволяет:

- повысить степень аналитичности и структурированности процессов управления ценообразованием;
- создать возможности по оперативной адаптации информации за счет понятной и логичной структуры данных;
- сократить время и повысить качество принятия управленческих, ценовых решений.

Ценовая политика предприятия торговли, построенная на исследованиях товарных рынков, внедрении новых методов сбора и обработки данных, систематизации и автоматизации процессов ценообразования, способствует повышению эффективности его финансово-хозяйственной деятельности.

Библиографические ссылки

1. Юкаева В. С. Организация эффективности спроса и оценка его эффективности. – М.: ЦБТЭИ; Центросоюз, 1977.

МОДЕЛЬ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С ВЫПЛАТАМИ, ИМЕЮЩИМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СО СДВИГОМ

Е. В. Капустин, В. В. Бреус

*Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске*

Рассмотрим следующую модель страховой компании: если нет ни страховых взносов, ни страховых выплат, то капитал компании не изменяется, поток страховых взносов имеет интенсивность λ_1 , поток страховых выплат – интенсивность λ_2 , величина страхового взноса – экспоненциальное распределение с плотностью

$$p(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{-\frac{y}{a}}, & \text{если } y > 0, \\ 0, & \text{если } y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

величина страховой выплаты имеет плотность распределения $\pi(x)$ и начальный момент 1-го порядка m_1 .

Наиболее простым и доступным для исследования является экспоненциальное распределение величины страховой выплаты. Недостатком такого распределения является то, что наибольшую вероятность имеют

выплаты, близкие к нулю, но это недостаточно корректно соответствует реальной ситуации.

Возьмем в качестве плотности распределения величины выплаты

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-x_0}{\theta}}, & \text{если } x > x_0, \\ 0, & \text{если } x < x_0, \end{cases} \quad (2)$$

где $x_0 > 0$. Распределение с этой плотностью будем называть экспоненциальным со сдвигом.

Найдем вероятность разорения страховой компании. Так как потоки взносов и выплат пуассоновские постоянной интенсивности, то вероятность разорения определяется лишь величиной капитала. Обозначим $P(S)$ вероятность разорения компании при уровне капитала S . Известно [1], что $P(S)$ удовлетворяет уравнению

$$(\lambda_1 + \lambda_2)P(S) = \lambda_1 \int_0^{\infty} P(S+y)p(y)dy + \lambda_2 \left[\int_0^S P(S-x)\pi(x)dx + \int_S^{\infty} \pi(x)dx \right] \quad (3)$$

и граничному условию

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(S) = 0. \quad (4)$$

Применяя операционный метод [2], можно показать, что если выполняется условие нормального функционирования компании

$$\lambda_1 a > \lambda_2 m_1, \quad (5)$$

то задача (3)–(4) имеет единственное решение, причем его изображение (преобразование Лапласа)

$$\tilde{P}(p) = \int_0^{\infty} P(S)e^{-pS} dS$$

имеет вид

$$\tilde{P}(p) = \frac{1}{p} - \frac{\lambda_1 a - \lambda_2 m_1}{\lambda_1 a p - \lambda_2 (1 - pa)(1 - \tilde{\pi}(p))}. \quad (6)$$

Чтобы найти вероятность разорения компании $P(S)$, нужно найти оригинал функции $\tilde{P}(p)$. Предположим, что страховые выплаты имеют экспоненциальное распределение со сдвигом (2). Тогда

$$m_1 = x_0 + \theta, \quad (7)$$

$$\tilde{\pi}(p) = \frac{e^{-px_0}}{1 + \theta p}, \quad (8)$$

поэтому (7) принимает вид

$$\tilde{P}(p) = \frac{1}{p} - \left(1 - \frac{\lambda_2(x_0 + \theta)}{\lambda_1 a} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) p - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 a} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 a} \frac{1 - pa}{1 + \theta p} e^{-px_0}}. \quad (9)$$

Раскладывая дробь, стоящую в правой части (9), в ряд по степеням e^{-px_0} , имеем

$$\tilde{P}(p) = \frac{1}{p} - \left(1 - \frac{\lambda_2(x_0 + \theta)}{\lambda_1 a}\right) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left\{ \frac{1}{p - \alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha \frac{a}{\theta} \right)^n \left[\frac{1}{(p - \alpha)^{n+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} B_n^{k+1} \frac{1}{(p - \alpha)^{n+1}} \frac{1}{(p + \beta)^{k+1}} \right] e^{-np x_0} \right\}, \quad (10)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{a} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (11)$$

$$\beta = \frac{1}{\theta}, \quad (12)$$

$$B_n^k = (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{a} \right)^k. \quad (13)$$

Вычисляя оригинал правой части (10), получаем вероятность разорения страховой компании

$$P(S) = 1 - \left(1 - \frac{\lambda_2(x_0 + \theta)}{\lambda_1 a}\right) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left\{ e^{\alpha S} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha \frac{a}{\theta} \right)^n \left[\frac{(S - nx_0)^n}{n!} e^{\alpha(S - nx_0)} + \sum_{k=0}^{n-1} B_n^{k+1} \left(\int_0^{S - nx_0} \frac{x^n}{n!} e^{\alpha x} \frac{(S - nx_0 - x)^k}{k!} e^{-\beta(S - nx_0 - x)} dx \right) \right] \mathbf{1}(S - nx_0) \right\}, \quad (14)$$

где $\mathbf{1}(x)$ – единичная функция [2],

$$\mathbf{1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Заметим, что при фиксированном S сумма в правой части (14) содержит лишь конечное число слагаемых. На приведенном рисунке представлен график функции (14) при $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 6$, $a = 6$, $\theta = 1$, $x_0 = 2$.

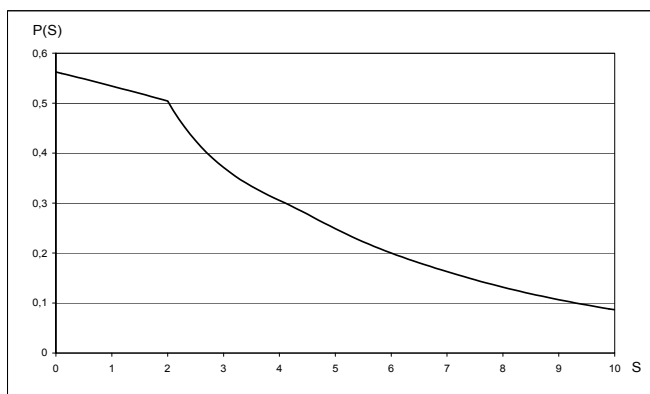


*График вероятности разорения страховой компании
в зависимости от величины капитала*

Библиографические ссылки

1. Глухова Е. В., Змеев О. А., Лившиц К. И. Математические модели страхования. – Томск: Изд-во ТГУ, 2004. – 180 с.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

ВЕРОЯТНОСТЬ ВЫЖИВАНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ

Е. В. Капустин, С. А. Колбанов

*Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске*

Рассмотрим следующую модель функционирования страховой компании:

1. При отсутствии страховых взносов и выплат капитал компании не изменяется;
2. Страховые взносы образуют простейший поток событий интенсивности λ_1 ;
3. Величины страховых взносов независимы и имеют экспоненциальное распределение с плотностью

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{a_1} e^{-\frac{x}{a_1}}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad (1)$$

4. Страховые выплаты образуют простейший поток событий интенсивности λ_2 ;

5. Величины страховых выплат независимы и имеют функцию распределения $F_2(x)$ и математическое ожидание a_2 .

Пусть $P(S)$ – вероятность выживания компании при уровне капитала S . Известно [1, 2], что вероятность выживания компании удовлетворяет интегральному уравнению

$$(\lambda_1 + \lambda_2)P(S) = \lambda_1 \int_0^\infty P(S+x) \frac{1}{a_1} e^{-\frac{x}{a_1}} dx + \lambda_2 \int_0^S P(S-x) dF_2(x). \quad (2)$$

и граничному условию

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(S) = 1. \quad (3)$$

Можно показать [3], что если выполняется условие нормального функционирования компании

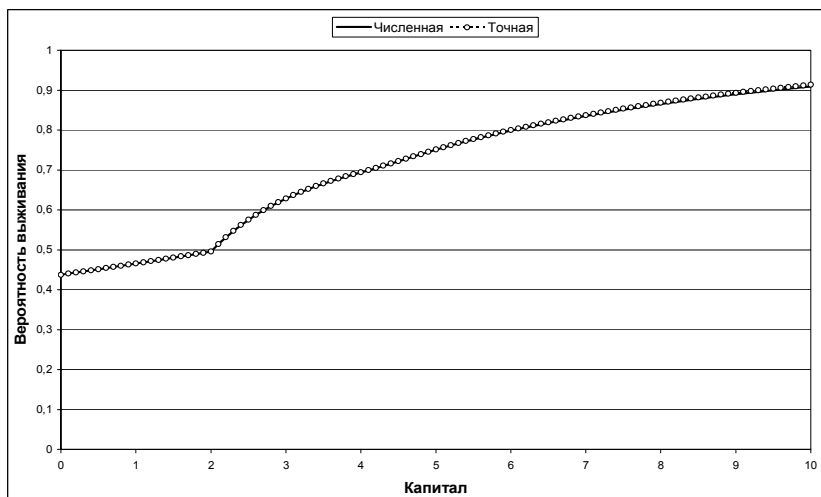
$$\lambda_1 a_1 > \lambda_2 a_2, \quad (4)$$

то решение задачи (1)–(2) удовлетворяет уравнению

$$P(S) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[e^{\frac{S}{a_1}} \left(1 - \frac{\lambda_2 a_2}{\lambda_1 a_1} \right) - \int_0^S P(S-x) \frac{1}{a_1} e^{\frac{x}{a_1}} dx \right] + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^S P(S-x) dF_2(x). \quad (5)$$

Методом последовательных приближений [4] уравнение (5) можно численно решить при любом распределении страховых выплат. Например, на рисунке представлены графики численной и точной [5] вероятности выживания компании в случае, если величина выплаты имеет экспоненциальное распределение со сдвигом,

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 2, \\ 1 - e^{-(x-2)}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$



Графики численной и точной вероятности выживания компании

Библиографические ссылки

1. Глухова Е. В., Змеев О. А., Лившиц К. И. Математические модели страхования. – Томск: Изд-во ТГУ, 2004. – 180 с.
2. Глухова Е. В., Капустин Е. В. Расчет вероятности разорения страховой компании с учетом перестраховки при пуассоновском потоке страховых взносов // Статистическая обработка данных и управление в сложных системах: сб ст. – Томск: Изд-во ТГУ, 2000. – Вып. 2. – С. 34–46.
3. Капустин Е. В., Колбанов С. А. О численном решении уравнения для вероятности выживания страховой компании // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2011): Материалы X Всерос. науч.-практ. конф. с междунаро. участием (25–26 нояб. 2011 г.). – Томск: Изд-во ТГУ, 2011. – Ч. 1. – С. 135–137.

4. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
5. Капустин Е. В., Бреус В. В. Вероятность разорения страховой компании в случае выплат, имеющих экспоненциальное распределение со сдвигом // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2011): Материалы X Всероссий. науч.-практ. конф. с междунаро. участием (25–26 нояб. 2011 г.). – Томск: Изд-во ТГУ, 2011. – Ч. 1. – С. 133–135.

КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С БИМОДАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЫПЛАТ

Е. В. Капустин, К. С. Сапунова

*Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске*

Рассмотрим следующую модель страховой компании: поступление капитала в компанию за счет страховых взносов детерминировано и имеет постоянную скорость c , страховые выплаты образуют пуассоновский поток постоянной интенсивности λ , размеры страховых выплат независимы и имеют одинаковое распределение с плотностью $\pi(x)$. Такая модель страховой компании называется классической [1].

Пусть $P(S)$ – вероятность разорения компании при уровне капитала S . Известно [1], что $P(S)$ удовлетворяет уравнению

$$cP'(S) - \lambda P(S) + \lambda \left[\int_0^S P(S-x)\pi(x)dx + \int_S^{+\infty} \pi(x)dx \right] = 0, \quad (1)$$

и граничному условию

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(S) = 0. \quad (2)$$

Найти точное решение задачи (1)–(2) можно только в редких, исключительных случаях, например, при экспоненциальном распределении страховых выплат [1, 2]. Однако плотность этого распределения монотонно убывает, то есть чем больше выплата, тем меньше ее вероятность. В то же время в реальности плотность распределения величины выплаты не является монотонной и имеет несколько точек максимума, то есть распределение величины выплаты является полимодальным.

Рассмотрим распределение с плотностью

$$\pi(x) = \pi_1(x) + \pi_2(x), \quad (3)$$

где

$$\pi_1(x) = \begin{cases} k_1 e^{-\frac{x}{\mu}}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\pi_2(x) = \begin{cases} k_2 e^{-\frac{x-x_0}{\theta}}, & \text{если } x > x_0, \\ 0, & \text{если } x < x_0. \end{cases} \quad (5)$$

Плотность (3) имеет две точки максимума (см. рис.), то есть это распределение является бимодальным.

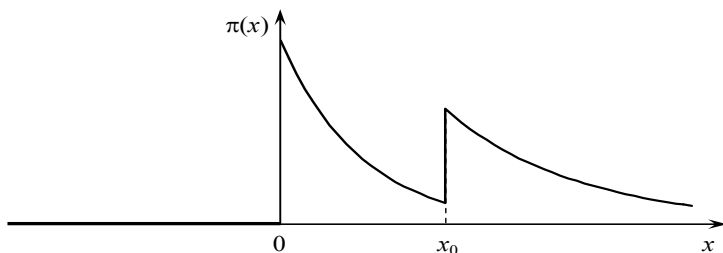


График плотности распределения

Параметры μ , θ , k_1 , k_2 и x_0 положительны. Кроме того, из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(x) dx = 1$$

имеем

$$k_1 \mu + k_2 \theta = 1. \quad (6)$$

Таким образом, один из параметров μ , θ , k_1 , k_2 можно выразить через остальные.

Распределение (3) имеет особенности, которые позволяют получить точное решение задачи (1)–(2).

Библиографические ссылки

1. Глухова Е. В., Змеев О. А., Лившиц К. И. Математические модели страхования. – Томск: Изд-во ТГУ, 2004. – 180 с.
2. Panjer H. H., Willmot G. E. Insurance Risk Models. – Schaumburg, Illinois: Society of Actuaries, 1992. – 442 p.

МОДЕЛЬ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С ПУАССОНОВСКИМ ПОТОКОМ ВЗНОСОВ И С БИМОДАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЫПЛАТ

Е. В. Капустин, К. Н. Яковлева

*Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске*

Рассмотрим следующую модель страховой компании: если нет ни страховых взносов, ни страховых выплат, то капитал компании не изменя-

ется, поток страховых взносов имеет интенсивность λ_1 , поток страховых выплат – интенсивность λ_2 , величина страхового взноса – экспоненциальное распределение с плотностью

$$p(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{-\frac{y}{a}}, & \text{если } y > 0, \\ 0, & \text{если } y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

а величина страховой выплаты имеет плотность распределения $\pi(x)$.

Наиболее простым и доступным для исследования является экспоненциальное распределение величины страховой выплаты [1, 2]. Недостатком этого распределения является то, что его плотность монотонно убывает, хотя в реальных страховых компаниях распределение величины выплаты является полимодальным, то есть плотность не является монотонной.

Рассмотрим распределение с плотностью

$$\pi(x) = \pi_1(x) + \pi_2(x), \quad (2)$$

где

$$\pi_1(x) = \begin{cases} k_1 e^{-\frac{x}{\mu}}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$\pi_2(x) = \begin{cases} k_2 e^{-\frac{x-x_0}{\theta}}, & \text{если } x > x_0, \\ 0, & \text{если } x < x_0. \end{cases} \quad (4)$$

Плотность (2) имеет две точки максимума (см. рис.), то есть это распределение является бимодальным.

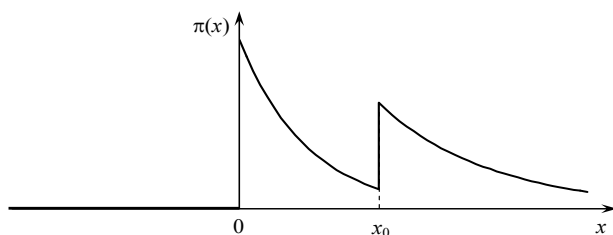


График плотности распределения

Из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(x) dx = 1$$

имеем условие связи между параметрами распределения (2),

$$k_1 \mu + k_2 \theta = 1. \quad (5)$$

Распределение (2) имеет особенности, которые позволяют получить точное выражение для вероятности разорения страховой компании [1, 2].

Библиографические ссылки

1. Глухова Е. В., Змеев О. А., Лившиц К. И. Математические модели страхования. – Томск: Изд-во ТГУ, 2004. – 180 с.
2. Panjer H. H., Willmot G. E. Insurance Risk Models. – Schaumburg, Illinois: Society of Actuaries, 1992. – 442 p.

ИЗБЫТОЧНА ЛИ ЧИСЛЕННОСТЬ РАБОТНИКОВ С ВЫСШИМ ОБРАЗОВАНИЕМ В ЭКОНОМИКЕ РОССИИ?

А. В. Корицкий

*Новосибирский государственный
архитектурно-строительный университет*

В последние годы экономисты активно обсуждают проблемы перехода к экономике нового типа – инновационной, или экономике знаний, в которой ведущим фактором производства является человеческий капитал. Примерами могут служить работы Л. Туроу (1996) [1], В. Л. Макарова (2003) [2], П. М. Ромера (1990) [3], А. де ла Фуэнте и А. Чикконе (2002) [4], Е. В. Сафоновой (2005) [5] и многих других авторов. При этом широко используются эмпирические оценки вклада человеческого капитала в производство и экономический рост [3, 4, 6].

Данное направление экономических исследований особенно актуально в России, где за годы «рыночных реформ» накопилось немало проблем, и особенно в развитии науки и образования: наблюдается регулярное «недофинансирование» этих важнейших отраслей народного хозяйства, продолжается «утечка мозгов» из России в развитые страны. Поэтому в российской научной литературе в последнее время возникают дискуссии, насколько эффективны расходы на образование, особенно высшее, и не является ли избыточной численность уже занятых в экономике России специалистов с высшим образованием?

Некоторые российские экономисты ставят под сомнение правомерность использования самого термина «человеческий капитал». Например, А. Бузгалин и А. Колганов пишут: «...очевидна, по меньшей мере, ограниченность подхода, фактически сводящего статус человека в современной экономике к «человеческому капиталу» [7].

Вообще говоря, любой экономический термин имеет «ограниченное» значение и применение. Экономический смысл термина «человеческий капитал» заключается в том, что способности человека, его знания, навыки и мотивации длительное время используются в общественном производстве; создание специалистов требует также значительных денежных средств, личного времени обучающихся и других ресурсов; специальные знания и навыки являются источником доходов как самих работников, так

и предпринимателей и общества в целом. Экономическое значение этих способностей, особенно творческих, в создании инновационных товаров и технологий критически важно в современных условиях. В макроэкономических исследованиях человеческий капитал представляют такие переменные, как «средний уровень образования» и «доля занятых с высшим образованием». Часто встречаются и такие переменные, как «численность занятых в экономике с разными уровнями образования». Как показывает эмпирический макроэкономический анализ, человеческий капитал оказывает значительное положительное влияние на дифференциацию доходов населения регионов России и темпов реального роста объемов производства и доходов, а также на использование новых технологий в экономике России [8].

Для иллюстрации данного положения оценим вклад в совокупные доходы регионов России работников с разным уровнем образования с помощью расчета параметров макроэкономической расширенной функции Кобба-Дугласа на основе региональных статистических данных.

$$I_i = AK_i^\alpha L_{1i}^{\beta_1} L_{2i}^{\beta_2} L_{3i}^{\beta_3}, \quad (1)$$

где I_i – доходы населения i -го региона;

K_i – основные фонды экономики i -го региона по полной балансовой стоимости;

L_1 – численность работников с высшим и незаконченным высшим образованием i -го региона;

L_2 – численность работников со средним профессиональным и средним специальным образованием i -го региона;

L_3 – численность работников со средним общим и незаконченным средним образованием i -го региона.

Соответствующее уравнение регрессии выглядит следующим образом:

$$\ln I_i = \ln A + \alpha \ln K_i + \beta_1 \ln L_{1i} + \beta_2 \ln L_{2i} + \beta_3 \ln L_{3i} + \varepsilon_i. \quad (2)$$

В помещенной ниже таблице приведены результаты расчета параметров регрессионных уравнений по формуле (2) с использованием в качестве зависимой переменной «доходов населения регионов» России в 1999–2010 гг.

В качестве независимых переменных взяты основные фонды регионов по балансовой стоимости и численности работников с разным уровнем образования, занятых в экономике регионов РФ. Выделены три группы работников: 1) работники с высшим и незаконченным высшим образованием; 2) работники со средним специальным, начальным профессиональным образованием; 3) работники со средним общим образованием и ниже.

Все статистические данные взяты из ежегодников «Регионы России: социально-экономические показатели» за соответствующие годы.

Коэффициенты детерминации всех уравнений довольно высоки, они варьируются от 96 до 97 %, то есть выбранные независимые переменные на 96–97 % объясняют вариацию данной зависимой переменной. Из общего числа субъектов РФ исключаются Чеченская Республика (из-за практически полного отсутствия статистических данных) и некоторые ав-

тономные округа, например, вошедший в последние годы в состав Пермского края Коми-Пермяцкий АО. Коэффициенты при независимых переменных «основные фонды регионов» и «численность занятых с высшим и незаконченным высшим образованием» положительны и статистически значимы на высоком уровне для всех лет рассматриваемого периода.

Можно отметить явную тенденцию к снижению коэффициентов при переменной «основные фонды» и относительную стабильность коэффициентов при переменной «численность занятых с высшим и незаконченным высшим образованием». То есть за время рассматриваемого периода влияние основных фондов на формирование доходов населения регионов России, коэффициент эластичности доходов населения регионов по основным фондам регионов, упало почти в три раза (с 0,7 % на один процент роста основных фондов в 1999 г. до 0,28 % в 2010 г.).

**Взаимосвязь доходов населения регионов России
с основными фондами и численностью занятых в экономике регионов
с разными уровнями образования в 1999–2010 гг.**

Показ. регр.	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Конст. А	4,61***	4,75***	6,51***	7,72***	6,59***	6,599***
Ст. ошибка	0,564	0,581	0,425	0,393	0,478	0,454
Т – стат.	8,165	8,179	15,29	19,638	13,777	14,551
Знач.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Коэф. α (В)	0,71***	0,738***	0,535***	0,393***	0,561***	0,575***
Ст. ош.	0,084	0,088	0,062	0,056	0,064	0,069
Коэф. α (Beta)	0,665***	0,722***	0,578***	0,437***	0,601***	0,609***
Т – стат.	8,479	8,428	8,632	7,021	8,787	9,719
Знач.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Коэф. β_1 (В)	0,446***	0,424***	0,327***	0,536***	0,333***	0,427***
Ст. ош.	0,090	0,107	0,101	0,108	0,103	0,108
Коэф. β_1 (Beta)	0,428***	0,429***	0,333***	0,546***	0,339***	0,428***
Т – стат.	4,938	3,952	3,255	4,980	3,235	3,958
Знач.	0,000	0,000	0,002	0,000	0,002	0,000
Коэф. β_2 (В)	0,328**	0,025	0,433***	0,365***	0,124	0,035
Ст. ошибка	0,126	0,161	0,141	0,132	0,140	0,145
Коэф. β_2 (Beta)	0,304**	0,023	0,425***	0,353***	0,119	0,034
Т – стат.	2,598	0,155	3,070	2,757	0,884	0,244
Знач.	0,011	0,877	0,003	0,007	0,379	0,808
Коэф. β_3 (В)	-0,463***	-0,206**	-0,375***	-0,36***	-0,068	-0,077
Ст. ош.	0,088	0,097	0,094	0,092	0,095	0,089
Коэф. β_3 (Beta)	-0,425***	-0,185**	-0,354***	-0,35***	-0,063	-0,072
Т – статист.	-5,253	-2,121	-4,008	-3,942	-0,717	-0,860
Знач.	0,000	0,037	0,000	0,000	0,475	0,392
Коэф. детер.	0,974	0,963	0,963	0,962	0,963	0,965
F	785,13	542,58	540,37	520,31	545,23	564,30
P – ур.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Кол. рег.	88	88	88	88	88	87

Показ. регр.	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Конст. А	7,69***	7,67***	7,806***	8,509***	5,581***	9,270***
Ст. ошибка	0,394	0,390	0,391	0,311	0,250	0,325
T – стат.	19,528	19,648	19,966	27,350	22,303	28,822
Знач.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Коэф. α (B)	0,451***	0,463***	0,425***	0,362***	0,345***	0,282***
Ст. ош.	0,051	0,049	0,049	0,037	0,039	0,039
Коэф. α (Beta)	0,482***	0,494***	0,450***	0,393***	0,388***	0,322***
T – стат.	8,927	9,403	8,745	9,902	8,898	7,304
Знач.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Коэф. β 1 (B)	0,626***	0,494***	0,565***	0,520***	0,572***	0,668***
Ст. ош.	0,094	0,093	0,088	0,077	0,077	0,093
Коэф. β 1 (Beta)	0,619***	0,497***	0,531***	0,508***	0,541***	0,643***
T – стат.	6,686	5,292	6,442	6,773	7,462	8,035
Знач.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Коэф. β 2 (B)	0,068	0,019	0,027	0,110	-0,026	0,005
Ст. ошибка	0,098	0,098	0,100	0,084	0,082	0,085
Коэф. β 2 (Beta)	0,068	0,018	0,026	0,106	-0,025	0,005
T – стат.	0,700	0,188	0,273	1,316	-0,321	0,062
Знач.	0,486	0,851	0,785	0,192	0,749	0,951
Коэф. β 3 (B)	-0,188**	0,000	0,007	0,021	0,135*	0,054
Ст. ош.	0,087	0,080	0,075	0,068	0,072	0,071
Коэф. β 3(Beta)	-0,168**	0,000	0,006	0,020	0,119*	0,047
T – статист.	-2,151	-0,006	0,094	0,304	1,889	0,760
Знач.	0,034	0,996	0,926	0,762	0,063	0,449
Коэф. детер.	0,970	0,971	0,968	0,971	0,969	0,968
F	658,99	681,26	601,02	635,45	587,93	581,29
P – ур.	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Кол. рег.	87	87	84	82	81	81

Коэффициент эластичности доходов населения регионов России по численности занятых с высшим и незаконченным высшим образованием положителен и статистически значим для всех лет рассматриваемого периода, при этом имел тенденцию к росту: он вырос с 0,46 в 1999 г. до 0,67 в 2010 г., то есть увеличение численности занятых с третичным образованием на 1 % способствовало росту доходов населения регионов на 0,4–0,6 %.

Эластичность доходов населения регионов по численности работников со средним специальным и начальным профессиональным образованием была положительной и статистически значимой лишь в первые несколько лет рассматриваемого периода, с 2003-го по 2010 г. она оказалась незначительной и статистически малозначимой. Очевидно, что рост численности этой категории работников не способствовал росту доходов населения регионов России в последние годы.

Эластичность же доходов населения регионов России по численности работников со средним общим образованием была отрицательна и ста-

статистически значима в первые четыре года рассматриваемого периода, затем стала статистически малозначимой в последующие годы, то есть рост численности данной категории трудящихся не оказывал положительного воздействия на доходы населения регионов России.

Очевиден вывод, что экономически эффективным, то есть увеличивающим суммарные доходы населения регионов России в данном периоде времени, был труд работников высшей квалификации, только он в полной мере обеспечивал рост доходов и заработной платы работающего населения регионов России.

По-видимому, данное явление наблюдается уже длительное время, так как анализ структуры рабочей силы, проведенный Р. Капелюшниковым, за период 1989–2002 гг. показал быстрый рост численности работников со средним профессиональным образованием и выше и значительное сокращение численности работников с полным средним и начальным профессиональным образованием и ниже [9, с. 28]. Р. Капелюшников приходит к выводу, что это «приведет к практически полному вымыванию с рынка труда лиц с невысокой образовательной подготовкой» [там же]. Детальный и очень интересный анализ состояния российского рынка труда он сопровождает следующим прогнозом: «В результате очень скоро российская экономика может столкнуться с острым дефицитом неквалифицированной рабочей силы: либо ее придется “импортировать” из-за рубежа, все активнее привлекая мигрантов, либо резко повышать оплату за подобный труд, делая его более привлекательным для лиц с достаточно высоким образованием» [там же].

Неужели явная избыточность уже имеющейся в России неквалифицированной рабочей силы делает необходимым ее импорт? Р. Капелюшников пишет (про советскую экономику): «Хотя экономика располагала многочисленным контингентом высокообразованной рабочей силы, система образования была ориентирована на выработку узкоспециализированных технических навыков в ущерб общим знаниям и умениям. Значительная часть накопленного человеческого капитала была отчетливо “нерыночной” и могла иметь экономическую ценность лишь в специфическом контексте плановой экономики» [там же, с. 19].

Можно сделать вывод, что проведенный макроэкономический анализ свидетельствует о значительном положительном вкладе наиболее образованной части трудоспособного населения России в величину валовых доходов населения регионов, их дифференциацию, в увеличение совокупных доходов населения регионов. Поэтому можно считать, что рост расходов на подготовку высококвалифицированных специалистов в вузах, повышение количества и качества подготовки специалистов с высшим образованием будет способствовать росту доходов населения России в ближайшей перспективе. В то же время численность остальных категорий трудоспособных граждан, занятых в экономике регионов, в последние восемь лет рассматриваемого периода не имела статистически значимого

влияния на совокупные доходы населения регионов России, что позволяет сделать однозначный вывод: «импорт» малоквалифицированной рабочей силы из ближнего и дальнего зарубежья не способствует росту доходов населения России.

Библиографические ссылки

1. Thurow L. C. Building Wealth. The New Rules for Individuals, Companies and Countries in Knowledge-Based Economy. – N.Y.: Harper Collins, 1996.
2. Макаров В. Л. Экономика знаний: уроки для России. Доклад на научной сессии Общего собрания РАН // Вестник РАН. – 2003. – Т. 73. – № 5.
3. Romer P. M. Endogenous Technological Change // The Journal of Political Economy. – 1990. – Vol. 98. – № 5. – P. 2.
4. Fuente de la A. and Ciccone A. Human capital in a global and knowledge-based economy // Report for European Commission. – 2002.
5. Сафонова Е. В. Фактор экономики знаний в социально-экономическом развитии и качестве жизни населения // ЭИММ. – 2005. – Т. 41. – № 4.
6. Barro R. J. Economic growth in cross-section of countries // Quarterly Journal of Economic. – 1991. – Vol. 106. – P. 407–43.
7. Бузгалин А., Колганов А. Человек, рынок и капитал в экономике XXI века // Вопр. экономики. – 2006. – № 3. – С. 127.
8. Корицкий А. В. Человеческий капитал как фактор экономического роста регионов России. – Новосибирск: СибУПК, 2010. – 368 с.
9. Капелюшников Р. Структура российской рабочей силы: особенности и динамика // Вопр. экономики. – 2006. – № 10.

ПРИМЕНЕНИЕ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ АДМИНИСТРАТИВНО- ТЕРРИТОРИАЛЬНОГО ДЕЛЕНИЯ РЕГИОНА

В. В. Мешечкин

Кемеровский государственный университет

Проблемы административно-территориального деления в разных аспектах и с разной степенью глубины достаточно часто рассматриваются в научной литературе. Применительно к Российской Федерации среди этих проблем можно отметить чрезмерную дробность административно-территориальных единиц, неравномерность параметров и уровня их социально-экономического развития, отсутствие в ряде из них демографического, хозяйственного или финансового потенциала, необходимого для реализации принципов самоуправления и самофинансирования, и пр. (см., напр., [1–3]).

Существенный вклад в решение задач административно-территориального деления регионов могут внести математические методы, с помощью которых, в частности, может быть предложено оптимальное деление региона на административно-территориальные единицы (АТЕ), а в каждой из них – выделен административно-территориальный центр (АТЦ). Как

один из подходов к решению перечисленных проблем может использоваться кластерный анализ – метод многомерного статистического анализа, выполняющий сбор данных, содержащих информацию о выборке объектов, и затем упорядочивающий объекты в сравнительно однородные группы [4].

Решением задачи кластерного анализа являются разбиения, удовлетворяющие некоторому критерию оптимальности. Этот критерий может представлять собой функционал, выражающий уровни желательности различных разбиений и группировок, который называют целевой функцией.

Данная работа основывается на предложенной в [5, 6] математической модели оптимизации административно-территориального деления. Рассматривается регион (территория), состоящий из населенных пунктов (НП), каждый из которых характеризуется численностью населения в нем и возможными расходами на передачу управлений от него другим НП. Задача заключается в том, чтобы из числа всех НП выбрать АТЦ и подчинить им оставшиеся пункты, образовав тем самым ряд административно-территориальных единиц, по сути являющихся кластерами. При этом оптимальность назначения центров и выделения отдельных единиц должна пониматься с точки зрения критерия минимизации суммарных административно-управленческих расходов, состоящих из затрат на содержание административного аппарата в центрах и на деятельность центров по управлению подчиненными им НП.

Передача управления от одного НП к другому оценивается через издержки на передачу управленческих решений населению подчиненного НП, транспортировку ресурсов и товаров и другие подобные нужды, причем при их определении должны учитываться степень удаленности НП друг от друга, численность населения, природные, политические, экономические, национальные и иные факторы. В проводимом исследовании эти издержки будут играть роль функции расстояния (метрики) кластерного анализа: чем они меньше, тем «ближе» НП друг к другу и тем проще и предпочтительнее объединить их отношением подчинения в составе одной АТЕ. В качестве алгоритма кластеризации предлагается использовать метод k -средних [4], который строит k кластеров, расположенных на возможно больших расстояниях друг от друга.

Для реализации этого подхода выбирается k объектов (НП), и на первом шаге эти объекты считаются «центрами» кластеров (т. е. АТЦ). Начальный выбор АТЦ может диктоваться различными условиями, например требованием максимальной удаленности их друг от друга. Каждому кластеру соответствует один центр. Остальные НП передаются в подчинение тому из АТЦ, «расстояние» до которого (т. е. стоимость передачи управления) меньше. В результате образуются АТЕ, внутри которых вычисляются новые центры кластеров (АТЦ) как НП, имеющие минимальную сумму «расстояний» до остальных НП соответствующей АТЕ. Затем определяются «расстояния» от каждого НП (не только в данном кластере) до новых центров, и объекты опять перераспределяются. Процесс вычисления центров и перераспределения объектов продолжается до тех пор, пока не выполнится одно из условий:

- кластерные центры (АТЦ) стабилизировались, т. е. все объекты (НП) принадлежат кластеру (АТЕ), которому принадлежали до текущей итерации;

- число итераций равно максимальному числу итераций.

Число кластеров k последовательно пробегает значения от 1 до n , где n – общее количество НП в регионе. Для каждого случая вычисляется суммарная стоимость передачи управления от всех АТЦ всем подчиненным им НП. Затем к этой сумме следует прибавить затраты на содержание самих центров, которые для простоты считаются постоянными и не зависящими от размера НП, выступающего в роли центра, от размера соответствующей АТЕ или каких-либо других факторов. Получившаяся величина составит суммарные административно-управленческие расходы для текущего разбиения региона при рассматриваемом числе АТЕ. Вариант разбиения с минимальными суммарными административно-управленческими расходами покажет, на сколько АТЕ нужно разбить исследуемую территорию, какие населенные пункты назначить центрами и как подчинить им остальные пункты, т. е., в конечном счете, определит оптимальное административно-территориальное деление региона.

Библиографические ссылки

1. Гранберг А. Г., Кистанов В. В., Адамеску А. А. [и др.]. Государственно-территориальное устройство России: Экономические и правовые основы / под ред. А. Г. Гранберга, В. В. Кистанова. – М.: ДеКА, 2003. – 448 с.
2. Бугаев В. К. Проблемы районирования для целей совершенствования территориального устройства Российской Федерации // География на рубеже тысячелетий: доклады XII съезда РГО. – СПб., 2005. – Т. 1. – С. 49–54.
3. Васильев В. И. Административно-территориальное устройство региона и территориальное устройство местного самоуправления // Журнал российского права. – 2006. – № 3. – С. 3–11.
4. Ким Дж.-О., Мюллер Ч. У., Клекка У. Р. [и др.]. Факторный, дискриминантный и кластерный анализ / под ред. И. С. Енюкова. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 215 с.
5. Мешечкин В. В., Павличук А. Н. Об оптимизации административно-территориального деления методами математического моделирования // Вестник КемГУ. – 2010. – № 4 (44). – С. 75–79.
6. Мешечкин В. В., Павличук А. Н. Построение модели оптимизации административно-территориального деления региона // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2010): Материалы IX Всерос. науч.-практ. конф. с междунаrod. участием. – Томск: Изд-во ТГУ, 2010. – Ч. 1. – С. 113–117.

МОДЕЛЬ ПЕНСИОННОГО ФОНДА В ВИДЕ ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

О. С. Найдин, И. А. Захорольная

Национальный исследовательский Томский государственный университет

В 2002 г. была произведена реформа пенсионной системы РФ. Суть пенсионной реформы состоит в постепенном переходе от чисто распреде-

лительной системы к распределительно-накопительной системе пенсионного обеспечения, основанной на страховых принципах.

Исходя из нового законодательства, работодатель ежемесячно обязан платить за каждого своего работника (далее застрахованного лица) ежемесячные страховые взносы от фонда заработной платы. После наступления страхового случая – инвалидности или достижения пенсионного возраста – застрахованное лицо получает ежемесячные выплаты в виде пенсии из Пенсионного фонда.

Основной целью реформы являлось достижение долгосрочной финансовой сбалансированности пенсионной системы. За прошедшие десять лет эта цель не была достигнута. В 2012 г. объем трансфертов из федерального бюджета на покрытие дефицита ПФР запланирован в объеме 1,075 трлн руб. Ожидается, что к 2014 г. дефицит ПФР возрастет до 1,3 трлн руб. [1]. Если рассматривать Томскую область, то сумма дотации из федерального бюджета в 2011 г. составила 7,07 млрд руб. при обеспеченности собственными средствами в 71,3 %. Причинами дефицита являются стабильные повышения размеров пенсии в течение последних лет и рост числа пенсионеров при снижении численности экономически активного населения, уплачивающего страховые взносы.

В рамках данного исследования ставится задача определения дефицита бюджета и суммы дотации на статистических данных ОПФР по Томской области. Будем говорить о доходе Пенсионного фонда. Если доход отрицателен, то он равен сумме дотации для покрытия недостающих средств.

Каждый трудоспособный человек, который впервые приступает к работе, становится клиентом Пенсионного фонда. Так как количество таких лиц достаточно велико и поступают на работу они независимо друг от друга, то момент появления новых клиентов Пенсионного фонда образует пуассоновский поток с параметром λ . Выплата страховых взносов и выплата пенсии происходит ежемесячно. Назовем эти периоды временем обслуживания на первой и второй фазе. Тогда соответствующие функции распределения примут следующий вид:

$$B_1(t) = B_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 1, \\ 1, & \text{если } t > 1. \end{cases}$$

По истечении месяца клиент совершает платеж и с вероятностью r_1 остается клиентом Пенсионного фонда, а с вероятностью $(1 - q)r_1$ повторяет обслуживание на первой фазе, либо, при наступлении страхового случая, он с вероятностью qr_1 переходит в разряд пенсионеров (то есть переходит на вторую фазу обслуживания) и с вероятностью r_2 ежемесячно получает пенсию.

Таким образом, модель изменения числа страховых взносов и пенсионных выплат пенсионерам можно представить в виде потоков в двухфазной системе массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом

линий, детерминированным временем обслуживания на фазах, с повторными обращениями (рис. 1).

Количество застрахованных лиц, обращающихся в Пенсионный фонд за время t , можно рассматривать как трехмерный случайный процесс $\{v(t), n_1(t), n_2(t)\}$, где $v(t)$ – число клиентов пенсионного фонда, впервые приступивших к работе за время t , $n_1(t)$ – число повторных обращений, совершенных за время t всеми работающими застрахованными лицами, $n_2(t)$ – число повторных обращений за выплатой пенсии.

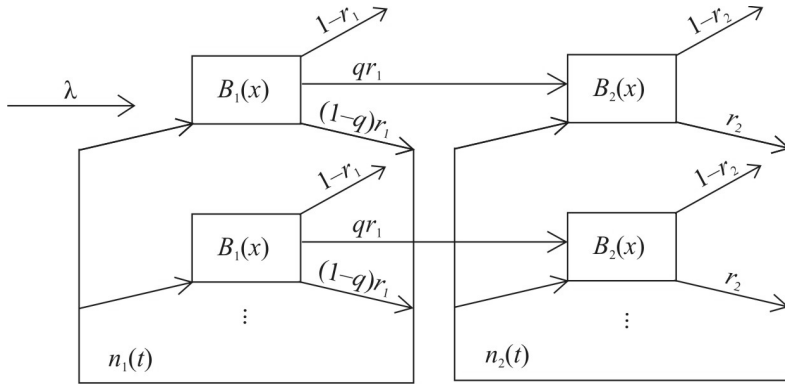


Рис. 1. Двухфазная СМО с неограниченным числом линий и повторными обращениями к фазам

Пусть, впервые приступив к работе, человек (застрахованное лицо) платит страховые взносы со своей первой зарплаты в размере случайной величины ξ с характеристической функцией $\psi(\alpha) = Me^{-\alpha\xi}$, $M\xi = a_1$, $M\xi^2 = a_2$. Продолжая работать, застрахованное лицо осуществляет ежемесячные платежи также в размере ξ до наступления страхового случая. После наступления страхового случая застрахованному лицу производятся выплаты в размере случайной величины η с характеристической функцией $\theta(\alpha) = Me^{-\alpha\eta}$, $M\eta = b_1$, $M\eta^2 = b_2$. Определим дефицит бюджета Пенсионного фонда и, соответственно, суммарного объема дотаций из федерального бюджета.

Пусть $S(t)$ – доход, полученный за время t , тогда

$$S(t) = \sum_{i=1}^{v(t)} \xi_i + \sum_{j=1}^{n_1(t)} \xi_j - \sum_{m=1}^{n_2(t)} \eta_m. \quad (1)$$

Найдем основные вероятностные характеристики суммы дотации за время t . Для этого рассмотрим характеристическую функцию величины $S(t)$ [2]:

$$H(\alpha, t) = Me^{-\alpha S(t)} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} (Me^{-\alpha\xi})^v (Me^{-\alpha\xi})^{n_1} (Me^{-\alpha\eta})^{n_2} P(n_1, n_2, v, t). \quad (2)$$

Следовательно, обозначив $\psi(\alpha) = Me^{-\alpha\xi}$ и $\theta(\alpha) = Me^{-\alpha\eta}$, имеем

$$\begin{aligned}
H(\alpha, t) &= G(\psi(\alpha), \psi(\alpha), \theta(-\alpha), t) = \\
&= \exp \left\{ \lambda t (\psi(\alpha) - 1) + r_1 (\psi(\alpha) (1 - q) + \theta(-\alpha) q - 1) \int_0^t f_1(\psi(\alpha), \psi(\alpha), \theta(-\alpha), s) ds + \right. \\
&\quad \left. + r_2 (\theta(-\alpha) - 1) \int_0^t f_2(\psi(\alpha), \psi(\alpha), \theta(-\alpha), u) du \right\}, \quad (3)
\end{aligned}$$

где $G(x, y_1, y_2, t)$ – совместная производящая функция числа клиентов пенсионного фонда, а функции $f_1(x, y_1, y_2, t)$ и $f_2(x, y_1, y_2, t)$ определяются обратным преобразованием Фурье – Стилтеса [3] от функций вида:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\alpha, x, y_1) &= \frac{\lambda}{1 - r_1(1 - q)} (x - 1 + r_1(1 - q)(y_1 - x)) \frac{B_1^*(\alpha)}{1 - y_1 r_1(1 - q) B_1^*(\alpha)}, \\
\varphi_2(\alpha, x, y_1, y_2) &= \left[\frac{\lambda r_1 q (y_2 - 1)}{(1 - r_2)(1 - r_1(1 - q))} + y_2 r_1 q \varphi_1(\alpha, x, y_1) \right] \frac{B_2^*(\alpha)}{1 - y_2 r_2 B_2^*(\alpha)}. \quad (4)
\end{aligned}$$

где $\int_0^\infty e^{j\alpha t} dB_k(t) = B_k^*(\alpha)$, $k = 1, 2$.

Так как f_1 не зависит от y_2 , а $y_1 = x$, то

$$\begin{aligned}
f_1(x, y_1, y_2, t) &= \frac{\lambda}{1 - r_1(1 - q)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-j\alpha t}}{j\alpha} \varphi_1(\alpha, x, y_1) d\alpha, \\
f_2(x, y_1, y_2, t) &= \frac{\lambda r_1 q}{(1 - r_1(1 - q))(1 - r_2)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-j\alpha t}}{j\alpha} \varphi_2(\alpha, x, y_1, y_2) d\alpha. \quad (5)
\end{aligned}$$

Определим первый момент величины дохода:

$$MS(t) = - \left. \frac{\partial H(\alpha, t)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad (6)$$

при этом

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= 1, \quad \psi'(0) = -a_1, \\
\theta(0) &= 1, \quad \theta'(0) = -b_1,
\end{aligned}$$

тогда средняя сумма дотации за время t определяется выражением:

$$MS(t) = \lambda t \left\{ a_1 r_1 \frac{1}{1 - r_1(1 - q)} - b_1 \frac{r_1 q}{(1 - r_1(1 - q))(1 - r_2)} \right\}. \quad (7)$$

Аналогично находим второй начальный момент:

$$\begin{aligned}
MS^2(t) &= \left. \frac{\partial^2 H(\alpha, t)}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=0} = \\
&= \{MS(t)\}^2 + \lambda t \left\{ \frac{a_2}{1 - r_1(1 - q)} - \frac{b_2 r_1 q}{(1 - r_1(1 - q))(1 - r_2)} \right\} - \\
&- \frac{r_1 (a_1 (1 - q) - b_1 q) \lambda}{\pi (1 - r_1(1 - q))} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\beta t} + j\beta t - 1}{(j\beta)^2} \frac{e^{j\beta}}{1 - r_1(1 - q) e^{j\beta}} d\beta + \\
&+ \frac{r_2 b_1^2 \lambda q r_1}{\pi (1 - r_2)(1 - r_1(1 - q))} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\beta t} + j\beta t - 1}{(j\beta)^2} \frac{e^{j\beta}}{1 - r_2(1 - q) e^{j\beta}} d\beta. \quad (8)
\end{aligned}$$

Тогда дисперсия суммы дотации за время t составит

$$\begin{aligned}
 DS(t) &= MS^2(t) - (MS(t))^2 = \\
 &= \lambda t \left\{ \frac{a_2}{1-r_1(1-q)} - \frac{b_2 r_1 q}{(1-r_1(1-q))(1-r_2)} \right\} - \\
 &- \frac{r_1(a_1(1-q) - b_1 q) \lambda}{\pi(1-r_1(1-q))} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\beta t} + j\beta t - 1}{(j\beta)^2} \frac{e^{j\beta}}{1-r_1(1-q)e^{j\beta}} d\beta + \\
 &+ \frac{r_2 b_1^2 \lambda q r_1}{\pi(1-r_2)(1-r_1(1-q))} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\beta t} + j\beta t - 1}{(j\beta)^2} \frac{e^{j\beta}}{1-r_2(1-q)e^{j\beta}} d\beta. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим графики (рис. 2, 3), показывающие средний размер дохода Пенсионного фонда за определенный период t . Будем использовать следующие параметры, полученные из статистических данных по отделению Пенсионного фонда Томской области:

$\lambda=1000$; $q=0,03$; $r_1=0,99$; $r_2=0,96$; $t=1..12$, $a=3500$; $b=9000$.

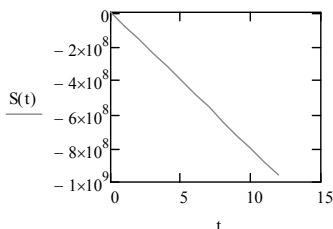


Рис. 2. Динамика средней суммы дотации

Как видно из графика (рис. 2), средняя сумма дотации с течением времени увеличивается. Это связано с тем, что средний платеж страховых взносов намного меньше, чем средняя выплачиваемая пенсия.

На следующем графике (рис. 3) подобрано такое значение платежа a , при котором может быть достигнута сбалансированность пенсионной системы при тех же показателях λ , q , r_1 и r_2 :

$\lambda=1000$; $q=0,03$; $r_1=0,99$; $r_2=0,96$; $t=1..12$, $a=6682,4999$; $b=9000$.

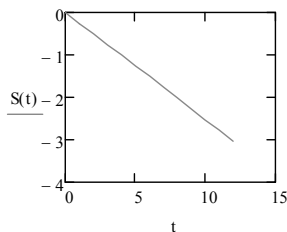


Рис. 3. Сбалансированность пенсионной системы при определенном значении платежа

Таким образом, было показано, что модель изменения числа страховых взносов и пенсионных выплат пенсионерам можно представить в виде потоков в двухфазной системе массового обслуживания. Данная модель может быть полезна при составлении финансовых прогнозов на долгосрочную перспективу.

Библиографические ссылки

1. Еремина Н. Непрожиточный минимум [Электронный ресурс]. URL: <http://www.profile.ru/node/69050> (дата обращения: 05.10.2012).
2. Ананина И. А. Исследование суммарного потока обращений в двухфазной бесконечнолинейной СМО с повторными обращениями // Научное творчество молодежи: материалы XIV Всерос. науч.-практ. конф. – Томск : Изд-во ТГУ, 2010. – Ч. 1. – С. 3.
3. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов: учеб. пособие. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ В ВИДЕ СМО СО СМЕШАННЫМ ПОТОКОМ ЗАЯВОК И ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

Е. В. Панкратова, Е. Л. Туренова

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Рассмотрим модель страховой компании, специализирующейся на двух видах страхования, например, на страховании имущества и на личном страховании. Тогда приходящих клиентов целесообразно разделить на две группы, каждая из которых обслуживается определенным образом. Поэтому в качестве математической модели предлагается следующая система массового обслуживания, содержащая два блока обработки заявок.

На вход системы поступает смешанный поток, состоящий из двух простейших потоков с определенными параметрами. Заявки первого типа поступают в первый блок обслуживания, второго типа – во второй блок и занимают любой из свободных приборов, на котором выполняется их обслуживание в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 , соответственно [1].

Обозначим $l_1(t)$ и $l_2(t)$ число входящих заявок первого и второго типа, соответственно, поступивших за время t , а i_1 , i_2 – число заявок в первом и во втором блоках, соответственно.

Рассмотрим четырехмерный марковский процесс $\{l_1(t), l_2(t), i_1(t), i_2(t)\}$. Для распределения вероятностей можно записать прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(l, k, i, j, t)}{\partial t} = & (-\lambda_1 - \lambda_2 - i\mu_1 - j\mu_2)P(l, k, i, j, t) + \\ & + \lambda_1 P(l-1, k, i-1, j, t) + \lambda_2 P(l-1, k, i, j-1, t) + \\ & + (i+1)\mu_1 P(l, k, i+1, j, t) + (j+1)\mu_2 P(l, k, i, j+1, t) \end{aligned} \quad (1)$$

Определив производящую функцию четырехмерного распределения $P(l, k, i, j, t)$ в виде

$$F(x, y, w, z, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x^l y^k w^i z^j P(l, k, i, j, t) \quad (2)$$

и учитывая (1), получим линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y, w, z, t)}{\partial t} + \mu_1(w-1) \frac{\partial F(x, y, w, z, t)}{\partial w} + \mu_2(z-1) \frac{\partial F(x, y, w, z, t)}{\partial z} = \\ = \lambda_1(xw-1)F(x, y, w, z, t) + \lambda_2(yz-1)F(x, y, w, z, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристик уравнения (3) имеет вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dw}{\mu_1(w-1)} = \frac{dz}{\mu_2(z-1)} = \frac{dF(x, y, w, z, t)}{(\lambda_1(xw-1) + \lambda_2(yz-1))F(x, y, w, z, t)},$$

общее решение которой

$$\begin{aligned} F(x, y, w, z, t) = \Phi\left((w-1)e^{-\mu_1 t}, (z-1)e^{-\mu_2 t}\right) \times \\ \times \exp\left\{\frac{\lambda_1}{\mu_1}(w-1)(x-1) + \lambda_1(x-1)t + \frac{\lambda_1}{\mu_1}(w-1) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_2}{\mu_2}(z-1)(y-1) + \lambda_2(y-1)t + \frac{\lambda_2}{\mu_2}(z-1)\right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Phi(w, z)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Для того чтобы найти $\Phi(w, z)$, воспользуемся дополнительными условиями: для системы, свободной в начальный момент времени, $t = 0$,

$$F(x, y, w, z, t) = 1.$$

Тогда из (4) имеем

$$\begin{aligned} F(x, y, w, z, t) = \exp\left\{\frac{\lambda_1}{\mu_1}(w-1)x(1 - e^{-\mu_1 t}) + \frac{\lambda_2}{\mu_2}(z-1)y(1 - e^{-\mu_2 t}) + \right. \\ \left. + \lambda_1(x-1)t + \lambda_2(y-1)t\right\} \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим $S(t)$ капитал компании и будем считать, что его составляют:

- 1) страховые премии клиентов, заключивших новые договоры;
- 2) страховые взносы, регулярно выплачиваемые клиентами по текущим договорам;
- 3) страховые возмещения по наступившим страховым случаям.

Введем следующие обозначения: ϕ_1, ϕ_2 – страховые премии для первого и второго типа страхования, соответственно, которые являются

случайными величинами с функциями распределения вероятностей $F_{\varphi_1}, F_{\varphi_2}$ и моментами $M(\varphi_1) = a_1, M(\varphi_1^2) = a_2, (\varphi_2) = A_1, M(\varphi_2^2) = A_2$; ξ_1, ξ_2 – страховые взносы, имеющие функции распределения F_{ξ_1}, F_{ξ_2} и моменты $M(\xi_1) = b_1, M(\xi_1^2) = b_2, (\xi_2) = B_1, M(\xi_2^2) = B_2$; η_1, η_2 – размер страхового возмещения в случае наступления страховых случаев первого и второго типа, соответственно. Они также являются случайными и характеризуются функциями распределения F_{η_1}, F_{η_2} и моментами; $\psi_{\eta_1}, \psi_{\eta_2}$ – интенсивности наступления страховых случаев. Тогда капитал страховой компании будет иметь вид

$$S(t) = \sum_{l=0}^{L(t)} \varphi_{1_l} + \sum_{k=0}^{K(t)} \varphi_{2_k} + \sum_{l=0}^{I(t)} (\xi_{1_l} - \eta_{1_l} \psi_{\eta_1}) + \sum_{j=0}^{J(t)} (\xi_{2_j} - \eta_{2_j} \psi_{\eta_2}) \quad (6)$$

Характеристическая функция величины капитала компании имеет вид

$$H(\alpha, t) = M(e^{\alpha S(t)}) =$$

$$= \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{I=0}^{\infty} \sum_{J=0}^{\infty} \varphi_1(\alpha)^L \varphi_2(\alpha)^K \psi_1(\alpha)^I \psi_2(\alpha)^J P(L, K, I, J), \quad (7)$$

где $\varphi_1(\alpha) = M(e^{\alpha \varphi_{1_l}})$, $\varphi_2(\alpha) = M(e^{\alpha \varphi_{2_k}})$, $\psi_1(\alpha) = M(e^{\alpha(\xi_{1_l} - \eta_{1_l} \psi_{\eta_1})})$, $\psi_2(\alpha) = M(e^{\alpha(\xi_{2_j} - \eta_{2_j} \psi_{\eta_2})})$ – характеристические функции величин $\varphi_{1_l}, \varphi_{2_k}, \xi_{1_l} - \eta_{1_l} \psi_{\eta_1}, \xi_{2_j} - \eta_{2_j} \psi_{\eta_2}$ соответственно.

Используя (2) и (5), можно записать

$$\begin{aligned} H(\alpha, t) &= M(e^{\alpha S(t)}) = F(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \psi_1(\alpha), \psi_2(\alpha), t) = \\ &= \exp \left\{ \frac{\lambda_1}{\mu_1} (\psi_1(\alpha) - 1) \varphi_1(\alpha) (1 - e^{-\mu_1 t}) + \frac{\lambda_2}{\mu_2} (\psi_2(\alpha) - 1) \varphi_2(\alpha) (1 - e^{-\mu_2 t}) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1 (\varphi_1(\alpha) - 1) t + \lambda_2 (\varphi_2(\alpha) - 1) t \right\}. \end{aligned}$$

Средняя величина капитала компании к моменту времени t есть

$$MS(t) = \frac{\partial H(\alpha, t)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha) \Big|_{\alpha=0} &= 1, \quad \varphi_1'(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = M(\varphi_1) = a_1, \quad \varphi_1''(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = M(\varphi_1^2) = a_2, \\ \varphi_2(\alpha) \Big|_{\alpha=0} &= 1, \quad \varphi_2'(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = M(\varphi_2) = A_1, \quad \varphi_2''(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = M(\varphi_2^2) = A_2, \\ \psi_1(\alpha) \Big|_{\alpha=0} &= 1, \quad \psi_1'(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = M(\xi_1 - \eta_1 \psi_{\eta_1}) = b_1 - \psi_{\eta_1} c_1, \\ \psi_1''(\alpha) \Big|_{\alpha=0} &= M(\xi_1^2) - M(\xi_1) M(\eta_1) \psi_{\eta_1} + M(\eta_1^2) = b_2 - 2\psi_{\eta_1} b_1 c_1 + c_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2(\alpha)|_{\alpha=0} &= 1, \quad \psi'_2(\alpha)|_{\alpha=0} = M(\xi_2 - \eta_2 \psi_{\eta_2}) = B_1 - \psi_{\eta_1} C_1, \\ \psi''_2(\alpha)|_{\alpha=0} &= M(\xi_2^2) - M(\xi_2)M(\eta_2) \psi_{\eta_2} + M(\eta_2^2) = B_2 - 2\psi_{\eta_1} B_1 C_1 + C_2,\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}MS(t) &= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 A_2)t + \frac{\lambda_1}{\mu_1}(1 - e^{-\mu_1 t})(b_1 - \psi_{\eta_1} c_1) + \frac{\lambda_2}{\mu_2}(1 - e^{-\mu_2 t})(B_1 - \psi_{\eta_2} C_1), \quad (8) \\ MS^2(t) &= \frac{\partial H^2(\alpha, t)}{\partial \alpha^2} \bigg|_{\alpha=0} = \\ &= \left[\frac{\lambda_1}{\mu_1}(1 - e^{-\mu_1 t})(b_1 - \psi_{\eta_1} c_1) + \frac{\lambda_2}{\mu_2}(1 - e^{-\mu_2 t})(B_1 - \psi_{\eta_2} C_1) + (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 A_2)t \right]^2 + \\ &\quad + \frac{\lambda_1}{\mu_1}(1 - e^{-\mu_1 t})(b_2 - 2\psi_{\eta_1} b_1 c_1 + \psi_{\eta_1}^2 c_2 + 2a_1 b_1 - 2a_1 \psi_{\eta_1} c_1) + \\ &\quad + \frac{\lambda_2}{\mu_2}(1 - e^{-\mu_2 t})(B_2 - 2\psi_{\eta_2} B_1 C_1 + \psi_{\eta_2}^2 C_2 + 2A_1 B_1 - 2A_1 \psi_{\eta_2} C_1). \quad (9)\end{aligned}$$

Из (8) и (9) нетрудно получить дисперсию величины капитала страховой компании.

Библиографические ссылки

1. Гарайшина И. Р., Моисеева С. П., Назаров А. А. Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1966. – 608 с.

ОБОБЩЕННАЯ ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ МАРКОВИЦА

Д. В. Семенова, Л. Ю. Шангареева

*Институт математики Сибирского федерального университета
г. Красноярск*

В середине XX в. Гарри Марковиц [1] предложил решать задачу распределения капитала на фондовом рынке методами портфельного анализа, которые учитывают две основные инвестиционные характеристики – доходность и риск. Идеи Марковица были положены в основу целого ряда современных работ по портфельному анализу различных рынков. Порт-

фельная теория Марковица как нельзя более подходит для разработки рекомендаций в задачах распределения ресурсов в рыночных системах, поскольку инвестиционное управление в условиях неопределенности основано на вероятностных оценках, а портфельный анализ строится на вероятностной модели рынка.

В работах [2, 3] был предложен перевод классической задачи Марковица на эвентологический язык⁴, в результате которого возникли сразу две задачи – прямая и обратная эвентологические задачи Марковица. Прямая эвентологическая задача Марковица является эвентологическим аналогом классической задачи Марковица в портфельном анализе.

Рассмотрим множество случайных событий

$$K: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (2^S, 2^{2^S})$$

под S , где $S \subseteq \mathcal{A}$ – выделенное конечное множество событий (состоящее из $N = |S|$ событий), 2^S – множество всех подмножеств S [2]. Распределением вероятностей случайного множества K называется набор из 2^N вероятностей:

- $p_I = \{p(X) = P(K = X), X \in 2^S\}$ – эвентологическое распределение I рода;
- $p_{II} = \{p_X = P(K \supseteq X), X \in 2^S\}$ – эвентологическое распределение II рода.

Эвентологические распределения I и II рода связаны между собой взаимно-обратными формулами обращения Мебиуса:

$$p_X = \sum_{X \subseteq Y} p(Y), \quad p(X) = \sum_{X \subseteq Y} (-1)^{|Y|-|X|} p_Y.$$

Заметим, что с каждым событием $x \in S$ взаимно-однозначно связан его индикатор

$$\mathbf{1}_x(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in x; \\ 0, & \omega \notin x. \end{cases}$$

который является его случайной величиной, причем $E\mathbf{1}_x = P(x) = p_x$.

Рассмотрим $(S, 2^S, a)$ – измеримое пространство с мерой a , определенной на множестве всех подмножеств S . На каждом подмножестве $X \in 2^S$ мера a определяется своими значениями на моноплетах $\{x\} \subseteq S$:

$$a_X = \sum_{x \in X} a(\{x\}) = \sum_{x \in X} a_x$$

и удовлетворяет нормировочному соотношению $a_S = \sum_{x \in S} a_x = 1$. Значения этой меры на моноплетах, образующие вектор $\{a_x, x \in S\}$, интерпретиру-

⁴ Эвентология – новое развивающееся научное направление теории вероятностей, основанное на колмогоровской аксиоматике [2].

ются как «неотрицательные доли единичного веса, распределенные между событиями $x \in \mathcal{S}$ » [3].

Введем на Ω случайную величину

$$\xi_X(\omega) = \sum_{x \in X} a_x \mathbf{1}_x(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Заметим, что значениями случайной величины ξ_X служат a_x – значения меры $\mathbf{a}$ на подмножествах $X \subseteq \mathcal{S}$, которые случайная величина ξ_X принимает с соответствующими вероятностями $\mathcal{E}$ -распределения I рода

$$P(\{\omega : \xi_X(\omega) = a_x\}) = p(X), \quad X \in 2^{\mathcal{S}}.$$

Тогда математическое ожидание и дисперсия случайной величины $\mathbf{1}_X$ вычисляются по следующим формулам:

$$\mathbf{E}(\xi_X) = \sum_{x \in X} a_x \mathbf{E}\xi_x = \sum_{x \in X} a_x P(x), \quad (1)$$

$$\mathbf{D}(\xi_X) = \mathbf{E}(\xi_X)^2 - (\mathbf{E}(\xi_X))^2 = \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} a_x a_y \text{Kov}_{xy}, \quad (2)$$

где $\text{Kov}_{xy} = P(x \cap y) - P(x)P(y)$ – парные ковариации событий $x, y \in \mathcal{S}$, которые при $x = y$ превращаются в дисперсию события x : $\text{Kov}_{xx} = \mathbf{D}(x) = P(x)(1 - P(x))$. Парные ковариации служат мерой зависимости двух событий [2]. Особенностью эвентологической задачи Марковица является то, что среднее значение и среднеквадратичное отклонение индикатора событий определяются только его вероятностью [2–5].

Прямая эвентологическая задача Марковица: для заданного эвентологического распределения $p_1 = \{p(X), X \in 2^{\mathcal{S}}\}$ при некотором $\lambda \geq 0$ найти меру $\mathbf{a}^*$, значения которой на моноплетах $\mathbf{a}^* = \{a_x^*, x \in \mathcal{S}\}$ минимизируют функцию

$$-\lambda \mathbf{E}(\xi_{\mathcal{S}}) + \mathbf{D}(\xi_{\mathcal{S}}) = -\lambda \sum_{x \in \mathcal{S}} a_x P(x) + \sum_{x \in \mathcal{S}} \sum_{y \in \mathcal{S}} a_x a_y \text{Kov}_{xy} \rightarrow \min_{\mathbf{a}} \quad (3)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} a_x &= 1, \\ a_x &\geq 0, \quad x \in \mathcal{S}, \end{aligned} \quad (4)$$

Итак, функция (3) минимизируется на множестве векторов N -мерного симплекса

$$\Delta^{\mathcal{S}} = \left\{ \mathbf{a} : \sum_{x \in \mathcal{S}} a_x = 1, \quad a_x \geq 0, \quad x \in \mathcal{S} \right\}.$$

Каждая из функций $a_x^*(\lambda)$, $x \in \mathcal{S}$, удовлетворяющая решению задачи (3)–(4), является непрерывной кусочно-линейной функцией. При изменении λ от 0 до ∞ можно описать всю эффективную границу. В работах [4, 5] предложено аналитическое (комбинация метода Марковица-Шарпа и метода Вольфа для решения задач квадратичной оптимизации) и численное

(метод Монте-Карло) решение данной задачи. Исследованы примеры решения задачи на реальных данных, а также построены модельные примеры, которые позволяют анализировать решение для различных структур зависимостей случайных событий. Изучены визуальные особенности пули Марковица.

Рассмотрим линейное обобщение [6] прямой эвентологической задачи Марковица, когда доходность события определяется как линейная функция его индикатора.

Пусть $(\mathbf{S}, \mathbf{a})$ – портфель событий, где $\mathbf{S}$ – множество портфельных событий с эвентологическим распределением I рода $p_1 = \{p(X), X \in 2^S\}$, а

$$\mathbf{a} = \left\{ a_x : a_x \geq 0, x \in \mathbf{S}, \sum_{x \in \mathbf{S}} a_x = 1 \right\}$$

– множество долей этих событий в портфеле. Предполагается, что доходность портфельных событий $x \in \mathbf{S}$ определяется линейными функциями их индикатора:

$$r_x = b_x \mathbf{1}_x + d_x.$$

Тогда средняя доходность каждого портфельного события $x \in \mathbf{S}$ является линейной функцией вероятности события:

$$\mathbf{E}r_x = b_x \mathbf{E} \mathbf{1}_x + d_x = b_x P(x) + d_x,$$

а дисперсия доходности портфельного события равна

$$\mathbf{D}r_x = b_x^2 \mathbf{D} \mathbf{1}_x = b_x^2 P(x)(1 - P(x)) = b_x^2 \sigma_x^2,$$

где $\sigma_x^2 = \mathbf{D} \mathbf{1}_x$ – дисперсия индикатора портфельного события $x \in \mathbf{S}$. Доходность всего портфеля событий полагается равной линейной комбинации доходностей его событий с долями из $\mathbf{a}$:

$$r_S = \sum_{x \in \mathbf{S}} a_x b_x \mathbf{1}_x + \sum_{x \in \mathbf{S}} a_x d_x.$$

Тогда средняя доходность портфеля событий определяется по формуле:

$$\mathbf{E}r_S = \sum_{x \in \mathbf{S}} a_x b_x P(x) + \sum_{x \in \mathbf{S}} a_x d_x,$$

а дисперсия — формулой:

$$\mathbf{D}r_S = \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} a_x b_x a_y b_y \text{Kov}_{xy},$$

где $\text{Kov}_{xy} = P(x \cap y) - P(x)P(y)$ – парная ковариация событий $x, y \in \mathbf{S}$.

Линейная обобщенная прямая эвентологическая задача Марковица: для заданного Э-распределения $p_1 = \{p(X), X \in 2^S\}$ при некотором $\lambda \geq 0$ найти меру $\mathbf{a}^*$, значения которой на моноплетах $\mathbf{a}^* = \{a_x^*, x \in \mathbf{S}\}$ минимизируют функцию

$$-\lambda \mathbf{E}(r_S) + \mathbf{D}(r_S) \rightarrow \min_{\mathbf{a}} \quad (4)$$

при ограничениях

$$\sum_{x \in X} a_x = 1, \\ a_x \geq 0, \quad x \in S. \quad (5)$$

В работе рассматривается решение обобщенной прямой эвентологической задачи Марковица как в параметрической, так и в обычной постановке, исследуются визуальные особенности портфельных эвентологических пуль.

Библиографические ссылки

1. Markowitz H. M. Portfolio Selection // The Journal of Finance. – 1952. – № 7 (1). – P. 77–91.
2. Воробьев О. Ю. Эвентология. – Красноярск: Сибир. федерал. ун-т, 2007. – 435 с.
3. Воробьев О. Ю., Ключков С. В. Эвентологический анализ задач распределения и заполнения ресурсов. – Красноярск: КГТЭИ, 2007.
4. Нартов Я. В., Семенова Д. В. О прямой задаче Марковица // Труды XIV международ. конф. по математике и смежным вопросам. – Красноярск: Сибир. федерал. ун-т, 2010. – С. 153–160.
5. Semenova D. V. Nartov Ya. V. Markowitz's Direct Eventological Problem // The Conference devoted to 20 anniversary of independence of the Republic Uzbekistan "Modern Mathematics' Problems" (MMP'2011). – Karshi, Uzbekistan, 2011. – P. 33–37.
6. Воробьев О. Ю. Обобщенные постановки задачи Марковица: частное сообщение // ЭМ-семинар по эвентологической математике. – Красноярск, 2012.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ УРОВНЯ ОБЩЕСТВЕННОГО ЗДОРОВЬЯ НАСЕЛЕНИЯ, РЕАЛИЗОВАННАЯ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ

К. А. Тарасова

Кемеровский государственный университет

Данная работа посвящена построению математической модели оптимизации уровня общественного здоровья населения. Объектом исследования выступает Российская Федерация, все расчеты проводятся на основе официальных статистических данных.

Целью данной работы является анализ интегрального показателя уровня общественного здоровья населения и построение на его основе оптимизационной модели максимизации уровня общественного здоровья населения.

В основе модели лежит интегральный показатель уровня общественного здоровья населения [1]. Для его расчета необходимы данные по различным видам болезней о количестве заболевших на 1000 человек. Основным источником информации служил справочник [2], данные брались за период с 2000-го по 2010 г. Расчет интегрального показателя основан на

методе вероятностной оценки показателей здоровья [1] и осуществляется следующим образом:

1) вычисляется фоновый показатель для каждого вида заболеваемости как минимальное значение за рассматриваемые периоды: $Y_{fi} = Y_{i \min}$;

2) производится расчет безразмерных показателей: $D_{ij} = \frac{Y_{ij} - Y_{fi}}{m_{ij}}$;

3) выполняется расчет ошибки показателя здоровья:

$$m_{ij} = \frac{(Y_{i \max} - Y_{i \min})}{5};$$

4) рассчитывается нормированный вероятностный эквивалент:

$$q_{ij} = \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{2}D_{ij}^2\right)};$$

5) находится значение интегрального показателя: $Q_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_{ij}$,

где Y_{fi} – величина i -го фонового показателя;

N – количество периодов наблюдения;

Y_{ij} – значение i -го показателя за j -й период;

$Y_{i \min}$ – минимальное значение показателя I ;

$Y_{i \max}$ – максимальное значение показателя I ;

D_{ij} – эквивалент показателя i за период j ;

m_{ij} – оценка ошибки показателя здоровья;

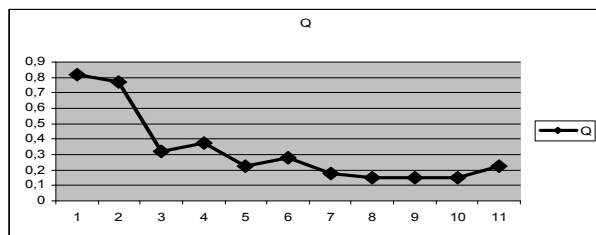
q_{ij} – нормированный вероятностный эквивалент показателя i за период j .

В результате получена последовательность значений интегрального показателя за каждый год (см. табл.).

Значение интегрального показателя

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Q_i	0,82	0,77	0,32	0,38	0,23	0,28	0,175	0,15	0,15	0,15	0,22

Данные из таблицы также изображены на графике (см. рис.):



Графическое представление значений интегрального показателя

Как видно из таблицы и графика, риск заболевания уменьшается, а значит, возрастает уровень здоровья населения.

Построенный интегральный показатель используем как целевую функцию в задаче оптимизации уровня общественного здоровья населения [3].

Для составления модели необходимо ввести величины, от уровня которых будет зависеть изменение интегрального показателя и которые будут служить переменными в задаче. В качестве таких величин предлагается использовать численность медицинского персонала разного профиля (например, терапевт, хирург, невролог). С помощью регрессионного анализа [4] строится уравнение зависимости показателя общественного здоровья от численности медицинских работников разных категорий:

$$Q_i(U_i) = a_0 + \sum_{i=1}^8 a_i U_i.$$

Переменные задачи должны удовлетворять ограничениям: $U_i \geq const$ определяет минимальный необходимый уровень численности медицинского персонала каждой категории; $\sum_i U_i \leq const$ определяет общую максимальную численность врачей.

Таким образом, задача будет заключаться в выборе оптимальной пропорции между медицинскими работниками разных категорий.

В результате для каждого года i получается математическая модель следующего вида [3]:

$$Q_i(X_1, \dots, X_8) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-\frac{12.5(a_0 + \sum_{k=1}^8 a_k X_k - Y_{j \min})^2}{(Y_{j \max} - Y_{j \min})}} \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} X_1 \geq 155, \\ X_2 \geq 60, \\ X_3 \geq 15, \\ X_4 \geq 23, \\ X_5 \geq 11, \\ X_6 \geq 12, \\ X_7 \geq 1010, \\ X_8 \geq 155, \\ \sum_{k=1}^6 X_k \leq 302, \\ X_7 + X_8 \leq 1221. \end{cases}$$

Данная модель является задачей нелинейного программирования с ограничениями-неравенствами.

Существование в данной задаче оптимального решения можно доказать с помощью теоремы Вейерштрасса.

Нахождение оптимального решения можно произвести методом множителей Лагранжа [5].

Построенная в работе модель отражает зависимость уровня общественного здоровья населения от численности медицинского персонала различного профиля. Она может быть использована для планирования оптимальных количеств медицинских работников разных категорий в учреждениях здравоохранения или для формирования заказа образовательным учреждениям на подготовку соответствующих специалистов.

Библиографические ссылки

1. Интегральная оценка состояния здоровья населения на территориях: метод. указания (утв. Госкомсанэпиднадзором РФ 25.09.1995) [Электронный ресурс]. URL: <http://lawru.info/base36/part7/d36ru7234.htm> (дата обращения: 01.03.2011).
2. Российский статистический ежегодник. 2011: стат. сб. / Росстат. – М., 2011. – 813 с.
3. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. – 2-е изд., стер. – М.: Наука: Физматлит, 1983. – 384 с.
4. Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрики: учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
5. Данилов Н. Н. Курс математической экономики : учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2006. – 407 с.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ РЯДОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ МЮРРЕЯ

Н. А. Федоров

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Анализ и исследование экономических процессов – задача на сегодня достаточно сложная.

На финансовых, валютных рынках есть множество подходов, которые анонсируются как дающие прогноз, хотя действительно дающих какие-то прогнозы методик к настоящему времени пока не существует. Этот факт доказывается тем, что глобальные и глубочайшие кризисы последних 15 лет никем с высокой точностью предсказаны не были.

Связано это с тем, что наряду с некоторыми процессами, которые подвергаются анализу, есть процессы, связанные с психологической дея-

тельностью людей, которая, в свою очередь, имеет уж если не совсем, то весьма слабопрогнозируемый характер.

Изложенное ставит вопрос о правомерности и точности существующих методик, про которые говорят как о наиболее точных, перспективных. Одной из хорошо зарекомендовавших себя методик, относящихся к классу предсказаний, является так называемая Математика Мюррея.

Основная идея метода заключается в том, что по предложенному Мюрреем алгоритму строятся некие базовые уровни, при подходе к которым, снизу или сверху, цена либо пробивает их, либо отражается (рис. 1).

При этом количество отражений или пробоев у характерных уровней, по заявлению Мюррея, весьма высоко. Это позволило ему сделать заключение о том, что данная методика является прогнозом.

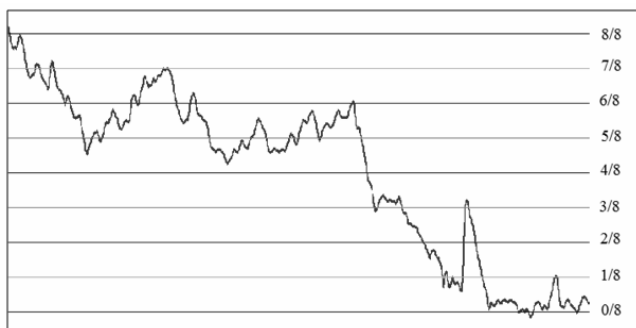


Рис. 1. Визуальное представление уровней Мюррея

Целью данной работы является модификация алгоритма построения уровней Мюррея, а также определение частоты появления событий, касающихся отражения или пробоя характерных уровней. Это нужно для того, чтобы определить, насколько целесообразно использование методов Мюррея, как дающих прогноз.

Для того чтобы достичь поставленной цели, в первую очередь необходимо программно реализовать расчетную методику построения мюрреевских уровней, с целью дальнейшей коррекции алгоритма. Затем нужно разработать метод определения и подсчета событий пробоя или отражения уровней Мюррея, составить алгоритм работы программы, отражающей работу данного метода, а также реализовать данную программу.

Для решения поставленной задачи используется терминал, работающий в среде MetaTrader, поскольку он снабжен модулем построения стратегий, имеющим встроенный язык программирования MQL. В резуль-

тате программные модули, созданные в этой среде, позволяют оперативно и наглядно проверить качество предлагаемых моделей.

Согласно Мюррею, в области значений каждого уровня преобладает свой, индивидуальный характер поведения цены. К примеру, цена от одного уровня «отразится» вероятнее, чем от другого, а другой уровень «пробьет» вероятнее, чем первый (рис. 2).

Для того чтобы проверить правомерность этих мюрреевских утверждений, в данной работе, помимо программной реализации методики построения уровней Мюррея, велась разработка и реализация алгоритма, занимающегося подсчетом количества пробоев и отражений от каждого из уровней.

Также был проведен предварительный анализ метода построения уровней Мюррея на примере работы соответствующего программного модуля на разных диапазонах ценовых значений, который показал, что ценовая кривая не всегда «ведет» себя так, как ей характерно «вести» себя на соответствующем мюрреевском уровне.



Рис. 2. Визуальное представление уровней Мюррея с описанием характера движения цены в области их значений

В связи с этим программный модуль определения количества событий пробоев или отражений для набора статистических данных пока использован не был, так как при неправильной работе метода построения уровней Мюррея статистические данные будут неверны.

На сегодняшний день поставленная задача частично решена. Ведется работа над модификацией алгоритма построения уровней Мюррея. В дальнейшем планируется проведение параметрических исследований на

различных финансовых рядах, а также разработка модуля прогнозирующего изменения финансового ряда. Исходя из работы этого модуля, можно будет уже судить о целесообразности использования методов Мюррея.

Библиографические ссылки

1. Свиридов А. А. Определение математического ритма рынка [Электронный ресурс] // URL: <http://www.theignatpost.ru/magazine/index.php?mlid=3747> (дата обращения: 13.07.2012).
2. Гневашева В. А. Прогнозирование экономики // Знание. Понимание. Умение: науч. журн. МосГУ. – 2005. – № 2. – 141 с.
3. Шумилов В. И. Математика Мюррея [Электронный ресурс] // URL: <http://www.ruforum.mt5.com/threads/949-murrey-math-urovni-myurreya/page4> (дата обращения: 28.08.2012).

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

<i>Афанасьев К. Е., Стуколов С. В.</i> Численное моделирование работы опытового генератора одиночных поверхностных волн.....	3
<i>Белинская Н. С., Францина Е. В.</i> Термодинамический анализ реакций процесса депарафинизации.....	7
<i>Богданов А. Л.</i> Построение адаптивного детектора моментов мгновенной смены сцен в видеопотоке.....	12
<i>Браславская О. Б., Гендрина И. Ю.</i> Расчет характеристик системы передачи оптического изображения в малоугловом приближении.....	17
<i>Булат А. Ф., Слащёв И. Н.</i> Особенности и практика использования методов математического моделирования для оценки геомеханических и газодинамических процессов.....	22
<i>Галицкая Л. В., Чащин О. Н.</i> Автоматизированная система управления технологическими процессами на основе имитационного моделирования с экспертной поддержкой принятия решения.....	27
<i>Глухарева Т. В.</i> Анализ математической модели распространения тепла в тонком однородном стержне.....	32
<i>Гудов А. М., Мешечкин В. В., Голышева А. А.</i> Оптимизация распределения нагрузок между агрегатами тепловых электростанций.....	35
<i>Зыков И. Ю., Каленский А. В., Звеков А. А., Никитин А. П., Ананьева М. В.</i> Моделирование химической реакции в энергетическом материале, содержащем наноразмерные добавки, с учетом процессов плавления.....	40
<i>Иордан В. И., Белов Т. А.</i> Использование метода динамики мезочастиц для 3D-моделирования структур упаковок сфероидальных частиц в многокомпонентных смесях.....	45
<i>Иордан В. И., Соснина Е. С.</i> Алгоритмические аспекты многомасштабного моделирования волновой динамики горения и структурообразования в процессе СВ-синтеза интерметаллических фаз в гетерогенных системах.....	50
<i>Каленский А. В., Гришаева Е. А., Звеков А. А., Ананьева М. В.</i> Разработка пакета прикладных программ для расчета индукционного периода взрывного разложения.....	55
<i>Копытов А. В., Уфимцев М. К.</i> Генезис колебательных спектров кристаллов XSiSb_2 со структурой халькопирита в базисе векторов поляризации и их подрешеток.....	57

Кромер В. В. О дальнейшем изменении параметров отрицательной обратной связи в системе нормализации массы тела человека «Минус фунт».....	61
Крутиков В. Н., Вершинин Я. Н. Метод минимизации на основе многошагового алгоритма для решения неравенств.....	62
Кучер Н. А., Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А. Стационарные решения уравнений движения смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей.....	66
Литвинова И. А. Методы математического моделирования в исследовании реологических свойств сметаны.....	70
Мухина О. О., Смагин В. И. Локально-оптимальные следящие системы управления при косвенных измерениях с ошибками для объектов с запаздываниями по состоянию.....	73
Наруджимова А. А. Математическое моделирование взаимодействия волн с погруженными в идеальную несжимаемую жидкость телами методом граничных элементов с применением кратных узлов.....	76
Поляков Ю. А. Особенности вибронагруженности грузового автомобиля с независимыми подвесками.....	79
Равианов Н., Шарипов Д. К., Тоштемирова Н. Математическое обеспечение для исследования и прогнозирования процесса распространения вредных веществ в приземном слое атмосферы.....	83
Романович О. В., Поддубный В. В. Сравнительный анализ субградиентного и комбинаторно-аналитического методов решения максиминной задачи для набора вогнутых функций.....	87
Семахин А. М. Оптимальное решение целочисленной модели информационной системы методом ветвей и границ.....	92
Семахин А. М. Метод Гомори в решении целочисленной задачи оптимизации информационной системы.....	97
Сусликов В. С., Толстунев В. А. Усредняющий сглаживающий фильтр с гауссовскими весами.....	101
Фролов Е. С. Течение вязкой жидкости в разветвленном канале.....	106
Цветков А. Б., Цветков Б. Г. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния упругого тела под воздействием нескольких источников температуры.....	110
Щелканов Н. Н. Новый метод разделения физической величины на две компоненты.....	114

Раздел 2. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Богатырева Н. И. Математическое моделирование влияния распределения инвестиций на динамику показателей состояния здоровья.....	118
Капишиников А. Ю., Чащин О. Н. Моделирование эффективного ценообразования для обеспечения конкурентоспособности торгового предприятия.....	122
Капустин Е. В., Бреус В. В. Модель страховой компании с выплатами, имеющими экспоненциальное распределение со сдвигом.....	125
Капустин Е. В., Колбанов С. А. Вероятность выживания страховой компании при произвольном распределении страховых выплат.....	128
Капустин Е. В., Сапунова К. С. Классическая модель страховой компании с бимодальным распределением выплат.....	130
Капустин Е. В., Яковлева К. Н. Модель страховой компании с пуассоновским потоком взносов и с бимодальным распределением выплат.....	131

Корицкий А. В. Избыточна ли численность работников с высшим образованием в экономике России?.....	133
Мешечкин В. В. Применение кластерного анализа для оптимизации административно-территориального деления региона.....	138
Найдин О. С., Захорольная И. А. Модель пенсионного фонда в виде двухфазной системы массового обслуживания.....	140
Панкратова Е. В., Туренова Е. Л. Математическая модель страховой компании в виде СМО со смешанным потоком заявок и параллельным обслуживанием	145
Семенова Д. В., Шангареева Л. Ю. Обобщенная постановка прямой эвентологической задачи Марковица.....	148
Тарасова К. А. Математическая модель оптимизации уровня общественного здоровья населения, реализованная на основе интегрального показателя	152
Фёдоров Н. А. Прогнозирование финансовых рядов с помощью методов Мюррея.....	155

Научное издание

**Информационные технологии
и математическое моделирование
(ИТММ-2012)**

Материалы XI Всероссийской
научно-практической конференции
с международным участием
23–24 ноября 2012 года
г. Анжеро-Судженск
Кемеровской области

Часть 1

Составитель М. С. Лобова

Корректор Г. А. Рудакова

Компьютерная верстка выполнена Н. В. Сидоркиным

Лицензия ИД 04617 от 24.04.2001 г.

Подписано в печать 14.12.2012 г.

Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная № 1.

Печать офсетная.

Печ. л. 9,6; усл. печ. л. 8,9; уч.-изд. л. 8,7.

Тираж 300 экз. Заказ № 26297

Издательство «Практика»:

650060, г. Кемерово, пр-т Ленинградский, 23а

Отпечатано в ООО «ИНТ»:

650003, г. Кемерово, пр-т Химиков, 43а

Тел. 8(384-2) 73-87-97