

Томский государственный университет
Кемеровский государственный университет
Кемеровский научный центр СО РАН
Институт вычислительных технологий СО РАН
Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
(ИТММ-2011)**

**Материалы X Всероссийской
научно-практической конференции
с международным участием
25–26 ноября 2011 г.
Часть 2**

Издательство Томского университета
2011

УДК 519

ББК 22.17

И74

Редакционная коллегия:

Р.Т. Якупов, д-р физ.-мат. наук, профессор;

А.А. Назаров, д-р техн. наук, профессор;

И.Р. Гарайшина, канд. физ.-мат. наук, доцент

И74 Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2011): Материалы X Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (25–26 ноября 2011 г.). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. – Ч. 2. – 206 с.

ISBN 978-5-7511-2034-4

В часть 2 вошли материалы секций «Экономико-математическое моделирование», «Математические методы и модели в науке и технике» и «Вычислительные технологии и программирование».

УДК 519

ББК 22.17

Конференция проводится при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-07-06076-г)

ISBN 978-5-7511-2034-4 © Томский государственный университет, 2011

© Кемеровский государственный университет, 2011

© Кемеровский научный центр СО РАН, 2011

© Институт вычислительных технологий СО РАН, 2011

© Филиал Кемеровского государственного университета в г. Анжеро-Судженске, 2011

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ КАДРОВОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ИННОВАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА ОРГАНИЗАЦИИ

А.А. Алетдинова

Сибирский университет потребительской кооперации, г. Новосибирск

Оценка инновационного потенциала организации позволит разрабатывать механизмы для наиболее эффективного управления инновационной деятельностью. Изменяются приоритеты в спросе на основные ресурсы экономики. На первый план выходит спрос на квалифицированный творческий труд и человеческий капитал. Прослеживается прямая зависимость между уровнем человеческого капитала в организации и уровнем инновационной активности.

Оценка возможности организации к инновационной деятельности включает оценки уровня человеческого капитала (интеллектуальной собственности), основного и оборотного капитала, то есть – это основа для оценки инновационного потенциала.

Разработка системы показателей инновационного потенциала организации неразрывно связана со структурой (рис. 1).

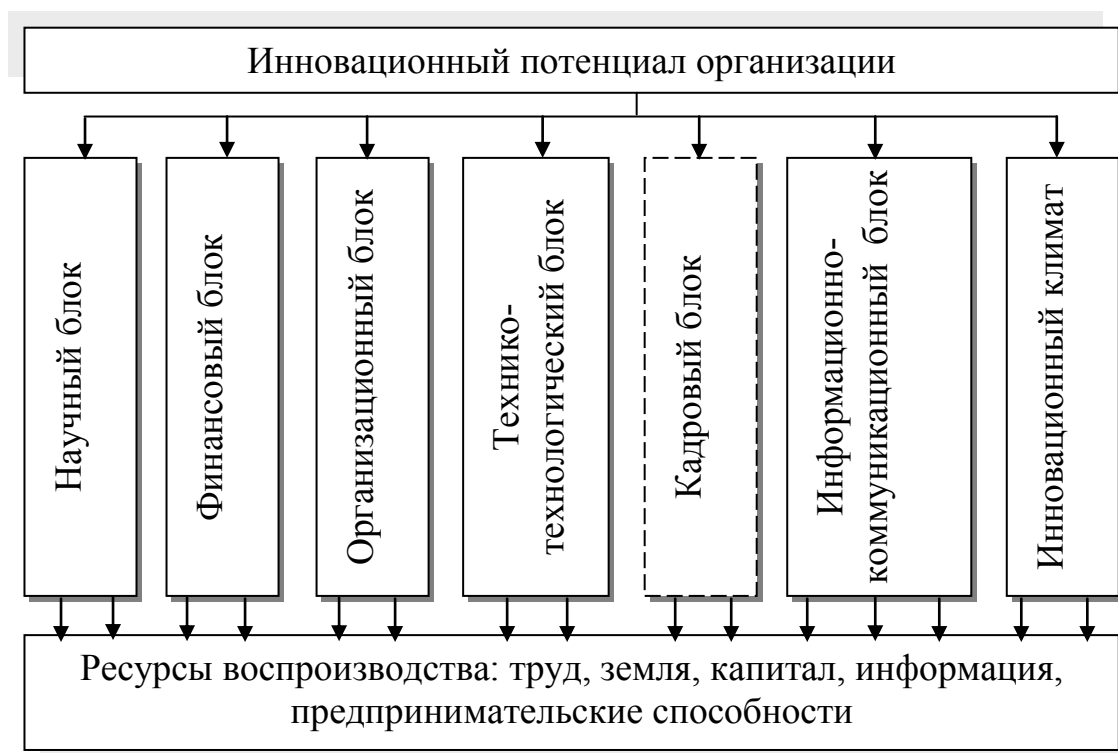


Рис. 1. Структура инновационного потенциала организации

Основные составляющие инновационного потенциала, на взгляд автора: финансовый, организационный, научный, технико-технологический, кадровый, информационно-коммуникационный блоки и инновационный климат.

В зависимости от составляющих инновационного потенциала будут выбираться те или иные показатели, входящие в состав его оценки.

Система статистических показателей формируется сначала для каждого блока инновационного потенциала организации в отдельности. При этом выполняется условие, что объединение статистических показателей блока 1, блока 2, ... и блока n формирует совокупность статистических показателей потенциала организации.

На основе системы статистических показателей инновационного потенциала согласно выбранной методике даются статистические оценки уровня отдельно каждого блока, которые, в свою очередь, сводятся в статистическую оценку уровня инновационного потенциала организации.

Методика оценки кадровой составляющей инновационного потенциала организации, по мнению автора, будет включать следующие этапы:

1. Формирование информационной базы.
2. Определение структуры кадрового блока инновационного потенциала организации.
3. Расчет комплексной оценки кадровой составляющей инновационного потенциала организации.

Рассмотрим методику более подробно.

Большинство исследователей в построении структуры потенциала организации используют ресурсный подход. Как отмечает Г. Калинич, «вид ресурсов не самостоятелен и сам по себе имеет лишь потенциальное значение, только объединившись с другими ресурсами – опытом, трудом, квалификацией, техникой, технологией, энергией, сырьем, он появляется в «кинетике» как движущая сила инновационного потенциала» [1].

Человеческий ресурс (капитал, фактор) не просто выполняет обеспечивающую функцию, а выступает главной креативной силой [2].

В «Рекомендациях Осло» приоритет при измерении инновационного потенциала предприятий в развивающихся странах отдается:

- человеческим ресурсам;
- связям;
- информационным и коммуникационным технологиям (ИКТ), их освоению и использованию [3].

Кадровая составляющая – одна из основ инновационного развития организаций.

Российская статистика инноваций включает следующую систему показателей:

1. Источники информации об инновациях.
2. Численность и состав персонала, занятого инновационной деятельностью.
3. Объем и структура производственных фондов, используемых в инновационной деятельности.
4. Затраты на инновации.
 - 4.1. Объем и структура затрат на инновации.
 - 4.2. Динамика затрат на инновации.

5. Технологический обмен.

5.1. Приобретение технологий.

5.2. Передача технологий.

6. Результаты инновационной деятельности.

6.1. Объем, структура и динамика производства и реализации инновационной продукции.

6.2. Влияние инноваций на результаты деятельности предприятия.

6.2.1. Экономия затрат производственных ресурсов в результате внедрения инноваций.

6.2.2. Прибыль от реализации инновационной продукции.

7. Инновационная активность предприятий.

Все эти показатели разрабатываются Росстатом в разрезе отдельных видов экономической деятельности.

Из этой системы к кадровым составляющим можно отнести только численность и состав персонала, занятого инновационной деятельностью. Этого явно недостаточно для оценки инновационного потенциала организации.

В настоящее время человеческий капитал рассматривается как результат целенаправленных вложений инвестиций в человека. Это часть личности человека, определяемая его природными и социальными свойствами и способностями.

По мнению автора, человеческий капитал – это совокупность накопленных знаний, способностей и навыков, запаса здоровья, системы мотивации индивидуума, которые могут оказывать влияние на эффективность деятельности организации и рост его дохода.

По мнению автора, к кадровым составляющим необходимо отнести следующие группы показателей, показанные на рис. 2. Остановимся подробно на них.

Существенные показатели состава персонала можно разделить по следующим признакам:

- демографическим;
- этническим;
- социально-экономическим.

Так, по демографическим признакам представляет интерес возрастной состав персонала. По этническим признакам может представлять интерес владение двумя или более языками. Более широкий перечень показателей по социально-экономическим признакам. Сюда нужно отнести образование, общий стаж работы и стаж в данной сфере деятельности. Это позволит оценить совокупность накопленных знаний, способностей и навыков.

Из показателей естественного движения населения важным следует считать показатель ожидаемой продолжительности жизни. Из показателей использования рабочего времени наиболее важна продолжительность времени по больничным листам. Эти два показателя можно использовать для оценки запаса здоровья работника.



Рис. 2. Составляющие кадрового блока инновационного потенциала организации

Показатели численности работников должны включать не только количество сотрудников, занятых инновационной деятельностью, наличие аналитиков, специалистов в сфере планирования, маркетинга и прогнозирования, но и число интрапренеров на предприятии. Важной составляющей инновационного потенциала организации можно считать коэффициент постоянства кадров.

Рассматривая производительность труда, интерес представляют её изменение за счет внедрения нововведений, выработка работника и количество рекламаций, полученных по разработкам, продукции и услугам организации.

Показатели развития персонала включают не только время, затраченное на профессиональное обучение и повышение квалификации, но и частоту, а также удельный вес работников, повысивших свою квалификацию.

Рассмотренные показатели позволяют дать целостное описание картины кадрового блока инновационного потенциала организации.

Пусть x_{jk}^0 – фактическое значение j -го показателя кадрового блока, а $\tilde{x}_{jk}$ – целевое (эталонное) значение j -го показателя.

Относительная мера достижения j -м показателем целевого значения в кадровом блоке определяется по формуле

$$\beta_{jk} = \frac{x_{jk}^0}{\tilde{x}_{jk}}.$$

Весомость (значимость) j -го показателя в количественной оценке кадрового блока рассчитывается как

$$\alpha_{jk} = \frac{\beta_{jk}}{\sum_{j=1}^n \beta_{jk}}.$$

В свою очередь, комплексная оценка кадрового блока может быть найдена по формуле

$$C_k^0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{x_{jk}^0}{\tilde{x}_{jk}}.$$

Предложенная методика оценки кадрового блока инновационного потенциала – составная часть методики оценки всего инновационного потенциала организации. Наибольшую трудность, по нашему мнению, представляет собой формирование информационной базы исследования.

Мониторинг инновационной деятельности организаций должен носить систематический характер. И в качестве ее индикатора может выступать инновационный потенциал, который в свою очередь является комплексной характеристикой.

Литература

1. *Калитич Г.* Функционально-информационный синтез НТИР // Экономика Украины. 1999. № 10. С. 36–45.
2. *Инновационный потенциал: современное состояние и перспективы развития* В. Г. Матвейкин, С. И. Дворецкий, Л. В. Минько и др. М.: Машиностроение-1, 2007. 284 с.
3. *Руководство Осло: рекомендации по сбору и анализу данных по инновациям.* М.: Государственное учреждение «Центр исследований и статистики науки» (ЦИСН), 2010. 167 с.

ТЕРРИТОРИАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ВЫБОРУ ПОСТАВЩИКОВ УСЛУГ И ОБОРУДОВАНИЯ ДЛЯ ИННОВАЦИОННЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ НА ПРИМЕРЕ ВУЗА

А.Н. Ваздаев¹, Ю.А. Самарова²

¹*Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского Томского политехнического университета*

²*Новый Институт социальных коммуникаций, г. Москва*

В период активации бизнеса в России в послекризисное время, многие организации стремятся к оптимизации прибыли не за счет дорогого ценообразования или некачественной ресурсной базы, а применяя все более грамотные автоматизированные стратегии поведения на рынке.

Как и любая организация, вуз также нуждается в принятии эффективных управленческих решений, в частности, в выборе поставщиков материалов и услуг. Вуз – слабо изученная с точки зрения стратегического менеджмента организация [1]. На сегодняшний момент отсутствуют единые научные стандарты и методы управления в

российских вузах в условиях развития рыночной экономики в России в послекризисный период. Кроме того, выступления первых лиц страны дает четкое понимание того, что государство намерено усиливать контроль за эффективным использованием бюджетных средств, выделяемых на различные социальные проекты, в том числе и в адрес вузов.

Территориальный подход

Описанные методики [1–5] можно применять и при выборе поставщиков вуза с той или иной мерой успеха. Но, по мнению авторов работы, ни в одной из изученных методик не был сделан акцент на территориальные особенности, с которыми сталкивается любая организация, в том числе и вузы.

В зависимости от формы собственности вуза и его ведомственной принадлежности он может обладать как общими характерными для вузов в целом особенностями управления экономическими процессами, так и своими уникальными, присущими только ему особенностями [1].

Применительно к внешним факторам, ключевым акцентом здесь является территориальный аспект нахождения вуза. Для России с ее гигантскими пространствами огромное значение имеет именно территориальный подход, применение которого позволяет регулировать территориально-экономические процессы. Суть этого подхода заключается в учете сложных взаимосвязей между различными объектами и явлениями, находящимися на одной территории, а также взаимодействием субъектов различных территорий. Необходимость применения территориального подхода вытекает также из наличия территориальной организации страны и существующего политико-административного устройства РФ.

Территориальный подход позволяет определять иерархию критериев выбора поставщиков услуг и материалов для вуза. Основываясь на данных критериях, вуз вправе уже выбрать того или иного поставщика материалов и услуг, исходя из собственных требований, желаний и возможностей.

Для вуза необходим простой и надежный инструмент оценки бизнеса. Он может существовать, основываясь лишь на данных открытой отчетности (и не только финансовой) участников рынка страны. Но возникает вопрос об интересах страны в данном концептуально новом направлении исследования рынка деятельности всех организаций. Именно территориальный подход к экономике регионов РФ позволит динамически выявить этапы, процессы и проблемы экономического развития страны путем анализа деятельности предприятий, в том числе и вузов.

Суть организации эффективного управления заключается в своевременном изменении критериев выбора того или иного партнера вуза, в особенности применительно к условиям внешней и социальной сред. Эффективность же следует оценивать по степени адаптации экономических субъектов к этим условиям [3].

Территориальный подход к экономике в целом отдельно взятого вуза в регионе даст возможность регулированию равновесия в социально-бытовой и производственной сферах жизнедеятельности населения этого субъекта РФ.

Особенности управления процессами в вузах

Если цель любой коммерческой организации – получение прибыли, то в вузах стратегии организации заключаются несколько в другом. В вузах принято считать, что любая их деятельность (в том числе и экономическая), любой проект или любое отдельное решение должны способствовать в конечном итоге достижению одной-единственной цели – повышению эффективности образования. Усилия всех служб вуза и его руководства должны быть ориентированы только на оптимизацию образовательных процессов и на рост качества образования в целом.

Возьмем в качестве примера закупку вузом тех самых материалов или услуг, которые обеспечивают его нормальное функционирование. Эффективность закупки зависит от правильности (грамотности) выбора поставщика. Но, отдавая отчет тому, что главная задача вуза определена улучшением качества образования, а фактор бюрократизма имеет место быть, то в данной проблеме нужно применять модели более легкие по своей структуре. Это означает, что невозможно применить стандартные методы логистики выбора поставщика услуг или оборудования в вузе. Это займет значительное количество времени и отвлечет ответственных сотрудников от главной их задачи.

Еще одной особенностью управления экономическими процессами в вузе является многоплановость задач, решаемых руководством вузов (административно-хозяйственное и финансовое управление, организация и совершенствование учебного процесса, проведение научных исследований и реализация международных контактов). Это показывают исследования, проведенные, к примеру, в Новосибирском государственном техническом университете [14].

Одним из следствий такой многоплановости может являться невозможность четкого разделения по узким не связанным между собой сферам деятельности как подразделений вузов, так и отдельных сотрудников. Как следствие, сложность постановки и реализации задачи управления в целом. Подразделение (сотрудник) вуза может заниматься и образовательной, и научной, и административной деятельностью одновременно, и это создает дополнительные сложности в организации процессов управления в вузе [14].

Рассмотренные выше основные особенности управления экономическими процессами в вузе позволяют сделать вывод, что вуз – сложно организованная система, в которой традиционные методы управления явно не справляются со всеми возникающими проблемами. Одним из путей решения этих проблем может быть разработка новых,

более простых методов в части экономических процессов и внедрение информационных технологий.

Но во всех этих характеристиках, на взгляд авторов, не хватает территориального подхода к выбору поставщиков для вуза.

Применение метода анализа иерархий

Основные положения метода анализа иерархий (МАИ) были разработаны известным американским математиком Т.Л. Саати и опубликованы в 1977 г. МАИ используется для решения слабо структуризованных и неструктуризованных проблем [10, 11].

Общая цель является фокусом иерархии и расположена во главе. Решением задачи для каждой иерархии является результирующий вектор приоритетов направлений. Построим иерархическую модель выбора поставщиков услуг и оборудования для вузов с использованием территориального подхода (рис. 1).

Целью модели иерархии является получение качественных услуг и оборудования вузом («just in time»). В модели на первом уровне расположены основные факторы, влияющие на выбор поставщиков услуг и оборудования; на втором – поставщики услуг и оборудования (их число может варьироваться); на третьем – альтернативы, из которых предстоит сделать выбор: A_1 – высокая скорость и невысокое качество предмета контракта, A_2 – невысокая скорость и невысокое качество предмета контракта; A_3 – невысокая скорость и высокое качество предмета контракта; A_4 – высокая скорость и высокое качество предмета контракта.



Рис. 1. Иерархическая модель выбора поставщиков услуг и оборудования для вузов с использованием территориального подхода

После построения иерархии строится множество матриц парных сравнений. Для этого в иерархии выделяют элементы двух типов: элементы-родители и элементы-потомки. Элементы-потомки воздействуют на соответствующие элементы вышестоящего уровня иерархии, являющиеся по отношению к первым элементами-родителями. Матрицы парных сравнений строятся для всех элементов-потомков относящихся к соответствующему элементу-родителю. Элементами-родителями могут являться элементы, принадлежащие любому иерархическому уровню, кроме последнего, на котором расположены, как правило, альтернативы [12]. Сравнения проводятся в терминах доминирования одного элемента над другим.

На основе созданной модели была разработана информационная система на платформе 1С:Предприятие 8.2. Созданный программный продукт предназначен для моделирования процесса выбора поставщика на основании различных критериев, в том числе и территориального подхода. На рис. 2 приведена форма одной из подсистем программы.

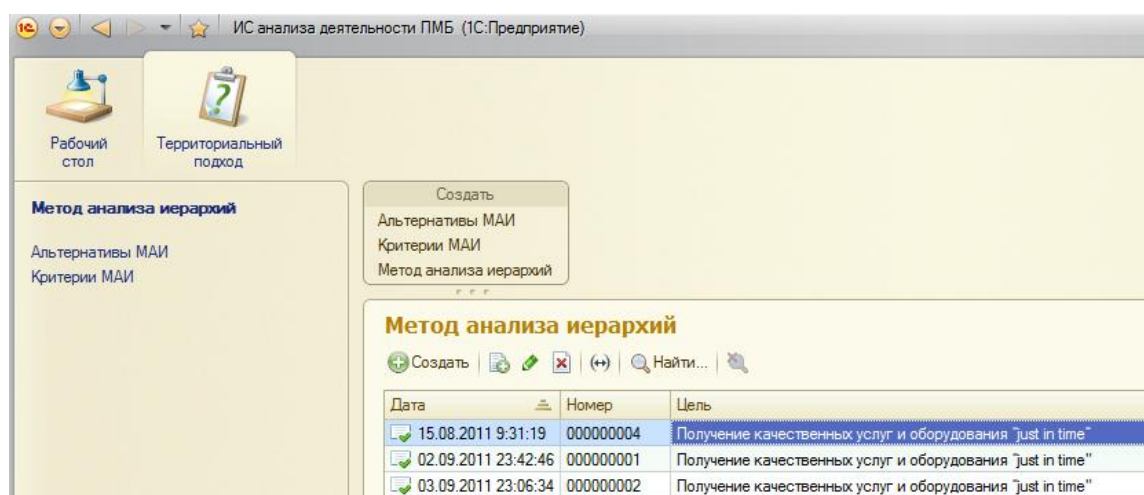


Рис. 2. Подсистема «Территориальный подход»

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы» по лоту шифр «2011-1.4-502-004» «Проведение поисковых научно-исследовательских работ в целях развития общероссийской мобильности в области информационно-телекоммуникационных технологий и вычислительных систем» по теме: «Разработка математических моделей, алгоритмов и Web-приложений для поддержки стратегического управления инновационной организацией» (государственный контракт № 14.740.11.0965 от 05.05.11).

Литература

1. Беляев Д.А. Особенности управления экономическими процессами в вузе [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.cfin.ru/management/practice/hs_process.shtml; <http://www.secreti.info/biz148-1.html>
2. Большой экономический словарь / Под ред. А. Н. Азрилияна. М.: Фонд «Правовая культура», 2002. С. 201.
3. Гаврилов А. Об управлении предприятием в трансформационном // Общество и экономика. 2006. № 7. С. 189.
4. Линдерс М.Р., Фирон Х.Е. Методы выбора поставщика, метод оценки затрат. Режим доступа: <http://www.secreti.info/biz148-1.html>

5. Методы выбора поставщика, справочные данные компании «Диадесол». Режим доступа: http://diadesol.ru/index.php?option=com_content&view=article&id=55:metodvibpost&catid=37:infozakupka&Itemid=62.
6. Румянцева З.П. и др. Общее управление организацией: принципы и процессы: 17-модульная программа для менеджеров. М.: ИНФРА-М, 2000.
7. Семкин Б.В. Матричная схема управления крупным вузом в условиях рынков труда и образовательных услуг // Информационно-коммуникационные технологии в управлении вузом: Материалы Всероссийской научно-практической конференции (25–28 февр. 2003 г.) ПетрГУ. Петрозаводск, 2003. 168 с.
8. Соломатина О.В. Анализ усовершенствования систем управления университетами в современных условиях // Материалы конференции «Информационно-коммуникационные технологии в управлении вузом» (февраль 2003 г.) Петрозаводский государственный университет. Петрозаводск, 2003. 168 с.
9. Андрейчиков А.В. Анализ, синтез, планирование решений в экономике/ А. В. Андрейчиков, О. Н. Андрейчикова. М.: Финансы и статистика, 2000. 368 с.
10. Саати Т. Аналитическое планирование. Организация систем / Т. Саати, К. Кернс.; пер. с англ. М.: Радио и связь, 1991. 224 с.
11. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1989. 316 с.
12. Чернышева Т.Ю. Модели аналитического планирования долга муниципалитета на основе анализа иерархий: Дис. ... к.т.н.: 05.13.18 / Чернышева. Т.Ю. Томск, 2009. 145 с.
13. Царев В.В. Выбор типичного предприятия – аналога [Электронный ресурс] / В.В. Царев, А. В. Новиков. Режим доступа: <http://www.cfin.ru/finanalysis/value/analog-mai.shtml>
14. Астанчук В.А., Гаврилов Е.Б. Административная система вуза. Проблемы и решения // Информационно-коммуникационные технологии в управлении вузом: Материалы Всероссийской научно-практической конференции (25–28 февр. 2003 г.) / ПетрГУ. Петрозаводск, 2003. 168 с.

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ИЗМЕНЕНИЙ СВОЙСТВ ГРУПП ЗАИНТЕРЕСОВАННЫХ СТОРОН НА ОЖИДАНИЯ ОРГАНИЗАЦИИ

А.А. Гресько, М.С. Рахманова

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса

Данная работа посвящена исследованию отношений между организацией и группами заинтересованных сторон (ГЗС) с целью выбора стратегий взаимодействия организации с каждой из групп. В работе Т.Ю. Плешковой (2009) были выделены следующие характеристики отношений: степень удовлетворенности, степень желанности изменений, степень влияния. Однако в данной работе не учитывались атрибуты самих ГЗС и организации – их свойства.

ГЗС поставляют организации необходимые для ее деятельности ресурсы, потому что ее деятельность позволяет удовлетворять их запросы и потребности. Таким образом, отношения между организацией и ГЗС выстраиваются вокруг ресурсного обмена, поскольку каждая сторона стремится создать собственную ресурсную базу, которая наилучшим образом способствовала достижению ее стратегических целей. Так как ресурсный

обмен, как правило, растянут во времени, это заставляет организацию и ГЗС ориентироваться на определенные свойства контрагента, которые напрямую влияют на то, какого качества и в каком количестве поступит в результате ресурс. Таким образом, ожидания организации к ГЗС будут определяться свойствами ГЗС. Изменение свойств ГЗС в свою очередь будет оказывать непосредственное влияние на изменение ожиданий организации к получаемым ресурсам. В силу того, что свойства ГЗС в различной степени влияют на количество и качество получаемых организацией ресурсов, им могут быть присвоены некоторые «веса» (Солодухин, 2009). Таким образом, необходимо исследовать, в какой степени будут меняться ожидания организации к получаемым ресурсам от ГЗС при изменении свойств данных ГЗС.

В работах (Плешкова, 2009; Солодухин, 2009) используется подход, в котором предлагается представлять характеристики отношений в виде лингвистических переменных и преобразовывать вербальные оценки характеристик в нечеткие множества. Аналогично можно представить изменения свойств ГЗС в виде лингвистических переменных: коренным образом ухудшится, значительно ухудшится, ухудшится, немного ухудшится, незначительно ухудшится, не изменится, незначительно улучшится, немного улучшится, улучшится, значительно улучшится, коренным образом улучшится.

Между организацией и ГЗС существует степень влияния (власть). Количественная оценка власти определяется в баллах от -5 до 5. При этом положительный балл означает, что организация имеет определенную власть над ГЗС, а отрицательный балл означает, что ГЗС имеет определенную власть над организацией.

Чтобы решить поставленную задачу, необходимо определить функцию принадлежности изменения ожиданий как функцию, зависящую от власти между организацией и ГЗС, изменения свойств ГЗС и их весов.

Будем исходить из предположения, что при равной власти между организацией и ГЗС функция принадлежности изменения ожиданий будет такая же, как функция принадлежности изменения свойств. То есть если свойство ГЗС улучшилось, то и ожидания организации к ГЗС улучшатся, или если свойство ГЗС значительно ухудшилось, то и ожидания организации к ГЗС значительно ухудшатся, и т.д. Исследуем, как будут меняться ожидания организации на концах данного интервала власти. Предположим, что свойство ГЗС коренным образом ухудшилось (при этом власть между организацией и ГЗС составляет «5»). В данном случае ожидания организации к ГЗС будут стремиться к состоянию «не изменятся». Отсюда также следует, что при власти между организацией и ГЗС, равной «4», ожидания организации к ГЗС незначительно ухудшатся, при власти, равной «3», ожидания организации к ГЗС немного ухудшатся, и т.д. Отметим также, что в данном случае при власти на интервале [-5;-1], также как и при равной власти между организацией и ГЗС, ожидания организации к ГЗС останутся в состоянии «коренным образом ухудшатся». В общем слу-

чае можно сказать, что при изменении свойства в худшую сторону, если оценка власти отрицательная, то лингвистическая переменная изменения ожиданий с заданной для нее функцией принадлежности из текущего состояния будет смещаться в сторону наихудшего своего значения и будет иметь уже другую (соответствующую этому значению) функцию принадлежности. Степень смещения будет зависеть от коэффициента власти. Если же оценка власти положительная, то лингвистическая переменная будет смещаться к нейтральному состоянию ожиданий «не изменятся». Абсолютно иная ситуация будет при изменении свойства в лучшую сторону. Если оценка власти положительная, то лингвистическая переменная будет смещаться в сторону наилучшего значения. Если же оценка власти отрицательная, то лингвистическая переменная будет смещаться к нейтральному состоянию ожиданий «не изменятся». В случае если свойство не изменится, ожидания также не изменятся, вне зависимости от оценки власти.

Итак, мы исследовали, как будет меняться лингвистическая переменная изменения ожиданий с учетом власти. Однако так она будет меняться в том случае, если только одно свойство будет влиять на изменение ожиданий. Рассмотрим случай, когда на ожидания организации к ГЗС влияет n свойств. Здесь сначала, необходимо установить какое значение примет лингвистическая переменная изменения ожиданий при заданной оценке власти для каждого отдельного свойства и какая у нее будет функция принадлежности. Важно отметить, что для каждого свойства оценка власти может быть различна. На следующем этапе вычисляется выпуклая комбинация n полученных нечетких множеств. Выпуклой комбинацией нечетких множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется нечеткое множество A с функцией принадлежности:

$$\mu_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = w_1 \cdot \mu_{A_1}(x_1) + w_2 \cdot \mu_{A_2}(x_2) + \dots + w_n \cdot \mu_{A_n}(x_n), \quad (1)$$

где $w_1, w_2, \dots, w_n$ – неотрицательные числа, сумма которых равна 1 (Пивкин и др., 1997). В нашем случае в качестве $w_1, w_2, \dots, w_n$ используются веса свойств.

Полученная функция принадлежности будет отражать изменение ожиданий организации к ГЗС в результате изменения свойств ГЗС с учетом весов свойств и заданных оценок взаимного влияния (власти) для каждого свойства.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы» по лоту шифр «2011-1.4-502-004» «Проведение поисковых научно-исследовательских работ в целях развития общероссийской мобильности в области информационно-телекоммуникационных технологий и вычислительных систем» по теме: «Разработка математических моделей, алгоритмов и Web-приложений для поддержки стратегического управления инновационной организацией (государственный контракт № 14.740.11.0965 от 05.05.11).

Литература

1. Плешкова Т.Ю. Управление отношениями с заинтересованными сторонами как фактор формирования инновационного климата вуза: Дис. ... канд. экон. наук: 08.00.05. Владивосток, 2009.
2. Солодухин К.С. Стратегическое управление вузом как стейкхолдер-компанией. СПб.: Изд-во Политех. ун-та, 2009.
3. Пивкин В.Я, Бакулин Е.П, Кореньков Д.И. Нечеткие множества в системах управления: Методическое пособие / Под ред. Ю. Н. Золотухина. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1997.

ВЛИЯНИЕ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО КАПИТАЛА НА ДИФФЕРЕНЦИАЦИЮ ДОХОДОВ В РОССИИ

А.В. Корицкий

Сибирский университет потребительской кооперации

В последние десятилетия экономисты уделяют всё большее внимания анализу влияния урбанизации и пространственных характеристик экономик на экономический рост, дифференциацию объёмов производства и доходов населения разных стран и регионов [1, 2]. Такие исследования проводятся преимущественно в развитых странах. В России они ещё очень редки, и в них не акцентируется внимание на факторах, вызывающих дифференциацию доходов, в частности, на человеческом капитале [3, 4]. Исключением являются работы В. Гимпельсона, А. Лукьяновой, Р. Капелюшникова и некоторых других авторов, исследующих частные нормы отдачи человеческого капитала [5, 6]. В этих работах показана зависимость заработной платы работников в России от уровня их образования.

В современных эндогенных теориях экономического роста особое значение придаётся влиянию человеческого капитала и его экстерналий на научно-технический прогресс и диффузию знаний. Данные факторы положительно влияют на экономический рост, и, как следствие, на дифференциацию доходов населения между странами и регионами. Отмечается существенное влияние пространственного фактора на диффузию знаний и технологий, так как большие расстояния мешают частым деловым и научным контактам, препятствуют быстрому распространению знаний, замедляя их диффузию и, соответственно, распространение научно-технических достижений в пространстве, от передовых в технологическом отношении стран и регионов менее развитым. Например, в работе А. де ла Фуэнте и А. Чикконе обсуждается влияние экстерналий человеческого капитала и диффузии технологий на дифференциацию доходов и экономический рост [7]. «Новая экономика роста» связывает темпы экономического роста с институциональными и климатическими факторами, а также со способностью стран и регионов генерировать и/или абсорбировать новые знания и технологии, с «переливом» или «диффузией» знаний и технологий от региона к региону [8]. Попытаемся проанализировать влияние человеческого капитала на дифференциацию доходов населения в России.

Рассмотрим простую линейную модель, описывающую предполагаемую зависимость дифференциацию доходов населения регионов, представленную переменной «коэффициент фондов», от фондовооружённости труда и человеческого капитала занятого в экономике регионов населения.

$$D_i = A + \alpha k_i + \gamma h_i + \varepsilon_i, \quad (1)$$

где D_i – значение коэффициента фондов для i -го региона; k_i – фондовооружённость труда в i -м регионе; h_i – средний уровень образования занятого в экономике i -го региона населения, характеризующий человеческий капитал одного работника.

Показатель «средний уровень образования», занятого в экономике региона населения, рассчитывается как средневзвешенная величина следующих продолжительностей обучения: 16 лет – для высшего образования, 14 лет – для незаконченного высшего, 13 лет – для среднего специального, 12 лет – для начального профессионального, 11 лет – для общего среднего, 9 лет – для неполного среднего общего образования. В качестве весов взяты доли занятых с соответствующим уровнем образования в i -м регионе в соответствующем году.

Используется «взвешенная» регрессия, в качестве «весов» взята переменная «численность занятого в экономике регионов населения». Такое «взвешивание» позволяет «усреднить» показатели регрессии в расчёте на одного занятого в экономике регионов, а не на регион в целом, что даёт более объективную картину статистических взаимосвязей. Результаты расчёта «взвешенной» регрессии (1) приведены в табл. 1. Почти все показатели при независимых переменных статистически значимы.

Следует сказать, что коэффициенты детерминации «взвешенных» регрессионных уравнений заметно выше, чем в «простой» регрессии, примерно в полтора-два раза. Они колеблются от 52 % в 2002 г. до 75 % в 2006–2007 гг. Повышаются в 3-4 раза и коэффициенты при независимой переменной «средний уровень образования».

Таблица 1

**Взаимосвязь коэффициента фондов, фондовооружённости и среднего уровня образования
занятого в экономике регионов населения в 2000–2007 гг.**

Показатели регрессии	2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.	2005 г.	2006 г.	2007 г.
Константа А	-169,3***	-217,2***	-171,2***	-252,5***	-245,1***	-171,8***	-199,8***	-207,7***
Ст. ошибка	18,60	20,59	20,14	25,66	19,83	16,18	13,94	15,44
Коэф. α (В)	13,65**	4,25*	1,170	1,976	2,21*	8,28***	1,19*	0,983*
Ст. ошибка	6,78	2,51	1,36	1,796	1,24	2,27	0,624	0,557
Коэф. α (Beta)	0,151**	0,116*	0,067	0,080	0,11*	0,234***	0,106*	0,102*
Коэф. γ (В)	14,27***	18,02***	14,44***	20,93***	20,28***	14,42***	16,69***	17,31***
Ст. ошибка	1,482	1,62	1,58	2,027	1,56	1,28	1,09	1,21
Коэф. γ (Beta)	0,722***	0,76***	0,714***	0,752***	0,830***	0,725***	0,843***	0,831***
Коэф. дет-ции	0,557	0,604	0,521	0,594	0,683	0,692	0,754	0,752
F	49,68	64,89	42,95	57,88	91,73	94,225	128,45	122,7
P – уровень	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Кол-во регионов	82	88	82	82	88	87	87	84

Можно сделать вывод, что в более крупных, хорошо населённых регионах сильнее проявляется зависимость дифференциации доходов населения от уровня образования работающего населения, то есть выше её зависимость от человеческого капитала.

Аналогичный вывод можно сделать на основе анализа данных табл. 2, рассчитанных с помощью того же уравнения регрессии, но с заменой зависимой переменной «коэффициент фондов» на «коэффициент Джини», и независимой переменной «средний уровень образования» на «долю занятых с высшим образованием» в общей численности занятого в экономике регионов населения.

Коэффициент γ повышается до уровня 0,6–0,7 процента на один процентный пункт роста доли занятых с высшим образованием (см. табл. 2). Данный факт свидетельствует, по-видимому, о том, что в более крупных и хорошо населённых регионах влияние человеческого капитала на дифференциацию доходов значительно сильнее, чем в относительно слабозаселённых и урбанизированных регионах России.

Можно предположить, что в относительно малонаселённых и слабо развитых регионах России более сильно проявляются тенденции к уравнительному распределению доходов, в меньшей степени проявляются экстерналии человеческого капитала, меньше возможностей для развития специализации и кооперации производства и соответствующей реализации технологического и научного потенциала.

Для выявления эффектов агломераций, которые выражаются в том, что в крупных городах возникает повышенная дифференциация доходов населения, введём две фиктивные переменные, характеризующие города-мегаполисы – Москву и Санкт-Петербург ($d1$) и регионы с городами-миллионерами ($d2$).

$$D_i = A + \alpha k_i + \gamma h_i + \alpha d1 + \beta d2 + \varepsilon_i, \quad (2)$$

где D_i – значение коэффициента Джини для i -го региона; k_i – фондовооружённость труда в i -м регионе; h_i – доля занятых с высшим образованием в общей численности занятого в экономике i -го региона населения; $d1$ – равна 1, для Москвы и Санкт-Петербурга и равна 0 для всех других регионов; $d2$ – равна 1 для Волгоградской, Самарской, Нижегородской, Ростовской, Пермской, Челябинской, Свердловской, Омской и Новосибирской областей, и республик Башкортостан и Татарстан и 0 для всех остальных регионов.

Результаты расчёта данного уравнения регрессии, «взвешенной» на численности занятого в экономике регионов населения, приведены в табл. 3.

Таблица 2

**Взаимосвязь коэффициента Джини, фондовооружённости и доли занятых с высшим образованием
в общей численности занятого в экономике регионов населения в 2000–2008 гг.**

Показатели регрессии	2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.	2005 г.	2006 г.	2007 г.	2008 г.
Константа А	0,164***	0,182***	0,215***	0,210***	0,200***	0,231***	0,241***	0,252***	0,297***
Ст. ошибка	0,021	0,018	0,020	0,017	0,015	0,012	0,011	0,011	0,010
Коэф. α (В)	0,226***	0,071***	0,028**	0,044***	0,042***	0,093***	0,018***	0,014***	0,010***
Ст. ошибка	0,048	0,018	0,011	0,011	0,008	0,016	0,004	0,004	0,003
Коэф. α (Beta)	0,338***	0,284***	0,203**	0,272***	0,301***	0,338***	0,237***	0,236***	0,252***
Коэф. γ (В)	0,007***	0,007***	0,007***	0,007***	0,007***	0,006***	0,006***	0,006***	0,004***
Ст. ошибка	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
Коэф. γ (Beta)	0,722***	0,739***	0,690***	0,897***	0,773***	0,705***	0,806***	0,780***	0,716***
Коэф. дет-ции	0,593	0,611	0,496	0,575	0,685	0,723	0,738	0,734	0,695
F	57,617	61,93	38,925	57,501	92,328	109,58	118,14	111,879	90,026
P-уровень	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Кол-во регионов	82	82	82	88	88	87	87	84	82

Таблица 3

**Взаимосвязь коэффициента Джини, фондовооружённости, доли занятых с высшим образованием
в общей численности занятого в экономике регионов населения и фиктивных переменных в 2000–2008 гг.**

Показатели регрессии	2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.	2005 г.	2006 г.	2007 г.	2008 г.
Константа А	0,229***	0,224***	0,283***	0,280***	0,265***	0,289***	0,271***	0,292***	0,330***
Ст. ошибка	0,035	0,031	0,031	0,031	0,026	0,022	0,018	0,019	0,018
Коэф. α (В)	0,240***	0,079***	0,031***	0,049***	0,045***	0,030***	0,022***	0,017***	0,013***
Ст. ошибка	0,046	0,017	0,010	0,010	0,007	0,005	0,004	0,003	0,002
Коэф. α (Beta)	0,360***	0,313***	0,228***	0,305***	0,321***	0,308***	0,277***	0,383***	0,312***
Коэф. γ (В)	0,003*	0,005***	0,003**	0,003**	0,003***	0,003***	0,004***	0,003***	0,002***
Ст. ошибка	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
Коэф. γ (Beta)	0,294*	0,481***	0,292**	0,268**	0,377***	0,322***	0,538***	0,472***	0,388***
Коэф. d1 (В)	0,117***	0,073**	0,110***	0,114***	0,098***	0,104***	0,064***	0,064***	0,055***
Ст. ошибка	0,041	0,032	0,031	0,032	0,024	0,022	0,021	0,018	0,019
Коэф. D1 Beta	0,497***	0,327**	0,507***	0,528***	0,495***	0,553***	0,358***	0,394***	0,397***
Коэф. d2 (В)	0,021	0,021*	0,021*	0,029***	0,030***	0,031***	0,032***	0,029***	0,024***
Ст. ошибка	0,012	0,012	0,012	0,011	0,008	0,008	0,007	0,006	0,006
Коэф. D2 Beta	0,117	0,127*	0,133*	0,183***	0,202***	0,218***	0,239***	0,232***	0,224***
Коэф. дет-ции	0,645	0,648	0,582	0,661	0,769	0,792	0,813	0,811	0,764
F	34,979	35,434	26,801	40,484	69,065	77,859	89,305	84,736	62,451
P-уровень	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Кол-во регионов	82	82	82	88	88	87	87	84	82

Коэффициенты детерминации довольно высоки, они колеблются от 64,5 % в 2000 г. до 81% в 2007.

Большинство коэффициентов при независимых переменных для всех лет рассматриваемого периода статистически значимы на 1% уровне. Исключение составляет только коэффициент d_2 для 2000 г., для которого данный коэффициент статистически незначим, и для 2001 и 2002 гг., для которых он статистически значим на 10% уровне. Можно отметить наличие агломерационных эффектов – коэффициенты при фиктивных переменных положительно и статистически значимы, то есть в крупных городах наблюдается повышенная дифференциация доходов населения.

Величина коэффициентов при переменной характеризующей человеческий капитал оказалась несколько ниже, чем в табл. 2, то есть введение фиктивных переменных привело к снижению влияния человеческого капитала на дифференциацию доходов населения. Тем не менее коэффициенты γ (Beta), характеризующие вклад человеческого капитала в вариацию коэффициента Джини по регионам России, остались заметно выше, чем соответствующие коэффициенты при фондовооружённости труда и при фиктивных переменных.

Можно предположить, что агломерационные эффекты только частично связаны с повышенным накоплением в городах человеческого капитала, они вызываются, по-видимому, также внешней и внутренней экономией на масштабах производства, степенью кооперации и специализации, которые успешнее развиваются в условиях городских агломераций. По-видимому, в условиях городских агломераций возникает повышенная дифференциация доходов населения, связанная с расширенными возможностями повышения квалификации наёмных работников, накоплением ими производственного опыта, а также более благоприятными условиями для получения доходов от предпринимательской деятельности и рентных доходов от собственности. Как следствие увеличивается и уровень дифференциации доходов населения в экономически развитых и урбанизированных регионах.

Литература

1. Абрё М., Де Гроот А. Л. Ф., Флора Р. Дж. Г. М. Пространство и экономический рост: обзор результатов исследований // Пространственная экономика. 2008. № 2.
2. Ласуэн Х.Р. Урбанизация и экономическое развитие: временное взаимодействие между географическими и отраслевыми кластерами // Пространственная экономика. 2009. № 4.
3. Глуценко К.Л. Методы анализа межрегионального неравенства по доходам. Новосибирск, НГУ, 2010. 66 с.
4. Коломак Е.А. Межрегиональные различия в России: экономический рост и фискальная политика. Новосибирск: НГУ, 2009. 88 с.
5. Гимпельсон В., Лукьянова А. «О бедном бюджетнике замолвите слово...»: межсекторные различия в заработной плате // Вопросы экономики. 2006. № 6.
6. Гимпельсон В.Е., Капелюшников Р.И. и др. Формирование заработной платы: взгляд сквозь призму профессий // Вопросы экономики. 2007. № 10. С. 52–74.

7. de la Fuente, A. and A. Ciccone “Human capital in a global and knowledge-based economy”, Report for European Comission, May 2002.

8. Корицкий А.В. «Переливы» знаний... Оценка влияния человеческого капитала на использование информационно-компьютерных технологий в регионах России // Креативная экономика. 2009. № 7.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ВИДЕ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

М.В. Косенкова

Кемеровский государственный университет

В работе исследуется модель социально-экономической системы, представленная в виде дискретной задачи оптимального управления.

Элементы социально-экономической системы крайне разнообразны, многочисленны и динамичны. Они варьируются от простейших единичных элементов до сложнейших групп, которые в структуре общественных отношений могут выступать как некий единый объект. Динамичность общества определяется изменчивостью его элементов во времени – переходом социальных субъектов из одного класса (статуса) в другой. Способы этих переходов могут быть различными. Каждый такой переход требует определенных затрат [1].

Структура социально-экономической системы определяется как совокупность классов, полученных в результате классификации объектов системы по заранее заданным признакам конкретной социально-экономической системы.

Рассматривается социально-экономическая система, структура которой остается неизменной на протяжении периода времени $[0, T]$. Через R_i , $i = 1, \dots, m$ обозначим классы системы.

Пусть в момент времени t объект осуществляет переход из класса R_i в класс R_j с вероятностью $p_{ij}(t)$.

Под динамикой социально-экономической системы будем понимать изменение численности объектов в классах R_i с течением времени [2]. Обозначим $x_i(t)$ – ожидаемая доля (от общего количества N) объектов в классе R_i в момент времени t . Тогда $x_i(t) \cdot p_{ij}$ – ожидаемая доля объектов, переходящих из класса R_i в класс R_j .

Будем предполагать, что система является замкнутой, т.е. она изолирована от внешних воздействий, ни один объект не покидает систему и никакой другой попасть в нее не может.

Тогда в момент времени $t = 1, \dots, T$ величина $x_i(t)$ определяется следующим образом:

$$x_i(t) = x_i(t-1) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m p_{ji}(t)x_j(t-1) - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m p_{ij}(t)x_i(t-1), \quad i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Соотношение (1) будем называть уравнением динамики социально-экономической системы.

В начальный момент $t = 0$:

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

где $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ – известное состояние.

Предполагается, что

$$\gamma_i^t / N \leq x_i(t) \leq \beta_i^t / N, \quad t = 1, \dots, T, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

где γ_i^t, β_i^t – фиксированные числа, выражающие ограничения на численность класса R_i .

Очевидно, что для переменных $p_{ij}(t)$ должны быть выполнены следующие ограничения:

$$0 \leq p_{ij}(t) \leq 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^m p_{ij}(t) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5)$$

При этом из класса i не должно выйти объектов больше, чем в этом классе находится:

$$\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m p_{ij}(t) x_i(t-1) \leq x_i(t-1), \quad t = 1, \dots, T, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

Будем предполагать, что переходы из класса в класс сопряжены с некоторыми (финансовыми или материальными) затратами. Пусть затраты на переход одного объекта из класса R_i в класс R_j составляют величину $c_{ij} > 0$, а затраты в момент времени t для класса R_i ограничены величиной C_i^t :

$$\sum_{j=1}^m c_{ij} p_{ij}(t) x_i(t-1) \leq C_i^t / N, \quad t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, m. \quad (7)$$

Соотношения (1) – (7) образуют стохастическую модель социально-экономической системы [3].

Переход объектов в другой класс зависит от того, насколько привлекательными становятся остальные классы по сравнению со своим собственным. Этим определяется желание объекта осуществлять переход из одного класса в другой. Будем считать, что на степень предпочтительности перехода можно влиять теми или иными действиями (мероприятиями). Все эти мероприятия зависят от затрат, относящихся к объекту исследования. Предположим, что эффективность этих мероприятий напрямую зависит от величины затрат, что, в свою очередь, сказывается на количестве объектов, осуществляющих переход. Тогда можно предположить, что доля объектов, переходящих из класса R_i в класс R_j : $p_{ij}(t)x_i(t-1)$, будет определяться влиянием факторов (затрат) $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$. Этот факт можно представить в виде функциональной зависимости:

$$p_{ij}(t)x_i(t-1) = f_{ij}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)), i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j, t = \overline{1, T}. \quad (8)$$

Выполняя замену $p_{ij}(t)x_i(t-1)$ в соответствии с (8), вместо стохастической модели получим детерминированный аналог, в котором $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$ можно будет использовать в качестве управлений.

Рассмотрим случай, когда $f(u(t))$ линейна, т. е. $f_{ij}(u(t)) = \sum_{l=1}^k \alpha_{ijl} u_l(t)$

и для любого $t = 1, \dots, T$ зависимость не меняется.

Тогда уравнением динамики (1) в момент времени $t = 1, \dots, T$ для каждого $i = 1, 2, \dots, m$ определяется как выражение:

$$x_i(t) = x_i(t-1) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m \sum_{l=1}^k \alpha_{jil} u_l(t) - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m \sum_{l=1}^k \alpha_{ijl} u_l(t). \quad (9)$$

Очевидно, что для переменных $u_l(t)$ должны быть выполнены следующие ограничения:

$$0 \leq u_l(t) \leq \mu_l, \quad l = 1, 2, \dots, k, \quad (10)$$

где $\mu_l, l = 1, 2, \dots, k$ – фиксированное неотрицательное число, выражающие ограничение на управляющие параметры.

Запишем математическую модель социально-экономической системы для каждого $i = 1, 2, \dots, m, l = 1, \dots, k$ и момента времени $t = 1, \dots, T$ в следующем виде:

$$x_i(t) = x_i(t-1) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m \sum_{l=1}^k \alpha_{jil} u_l(t) - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m \sum_{l=1}^k \alpha_{ijl} u_l(t), \quad (11)$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad (12)$$

$$\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m \sum_{l=1}^k \alpha_{jil} u_l(t) - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m \sum_{l=1}^k \alpha_{ijl} u_l(t) \leq \beta_i^t / N - x_i(t-1), \quad (13)$$

$$- \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m \sum_{l=1}^k \alpha_{jil} u_l(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m \sum_{l=1}^k \alpha_{ijl} u_l(t) \leq x_i(t-1) - \gamma_i^t / N, \quad (14)$$

$$\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m \sum_{l=1}^k \alpha_{ijl} u_l(t) \leq x_i(t-1), \quad (15)$$

$$- \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m \sum_{l=1}^k \alpha_{ijl} u_l(t) \leq 0, \quad (16)$$

$$\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m \sum_{l=1}^k \alpha_{ijl} u_l(t) \leq 1, \quad (17)$$

$$u_l(t) \leq \mu_l^t, \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^m c_{ij} \sum_{l=1}^k \alpha_{ijl} u_l(t) \leq C_i^t / N, \quad (19)$$

$$u_l(t) \geq 0. \quad (20)$$

Для оценки эффективности функционирования системы введем критерий оптимальности. В общем случае он имеет следующий вид:

$$J(x^0, u) = \sum_{t=1}^T g(x(t-1), u(t)) + F(x(T)) \rightarrow \max, \quad (21)$$

где вектор $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ определяет фазовое состояние социально-экономической системы в момент времени t . Примерами критерия оптимальности могут служить количество объектов в некоторых классах, общая полезность от перехода объектов из класса в класс, показатель стабильности системы и т.п.

Таким образом, в результате получена модель системы в виде задачи оптимального управления с дискретным временем с закрепленным левым концом траектории и свободным правым, с ограничениями на управления и фазовые переменные. Фазовыми переменными в этой задаче являются доли объектов в каждой группе, управляющими параметрами – факторы, оказывающие влияние на переход объектов из класса в класс.

Предложенная в работе стохастическая модель социально-экономической системы в виде дискретной задачи оптимального управления может быть использована как основа для исследования различных социально-экономических систем и построения их детализированных моделей. В частности, на базе модели (11) – (21) при исследовании проблем развития региона автором были построены математическая модель изменения структуры экономически активного населения и математическая модель системы образования. Первая модель может применяться для анализа структуры занятости населения и принятия относительно нее оптимальных решений, а вторая – для изучения взаимодействия различных институциональных структур системы образования и оценки эффективности их функционирования с учетом непрерывности процесса обучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы» по лоту шифр «2011-1.4-502-004» «Проведение поисковых научно-исследовательских работ в целях развития общероссийской мобильности в области информационно-телекоммуникационных технологий и вычислительных систем» по теме: «Разработка математических моделей, алгоритмов и Web-приложений для поддержки стратегического управления инновационной организацией» (государственный контракт № 14.740.11.0965 от 05.05.11).

Литература

1. Злобина С.Л. Исследование математических моделей равновесного и стабильного развития социальных систем: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Кемерово, 2003. 185 с.
2. Косенкова М.В. Построение математической модели социальной системы в виде дискретной задачи оптимального управления // Информационные технологии и

математическое моделирование (ИТТМ-2010): Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (19–20 ноября 2010 г.). Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. Ч. 1. С. 106–107.

3. Косенкова М.В., Мироедова К.М. Построение стохастической задачи оптимального управления социальной системой // Образование, наука, инновации – вклад молодых исследователей: материалы VI (XXXVIII) Международной научно-практической конференции / Кемеровский госуниверситет: В 2 т. Кемерово: ООО «ИНТ», 2011. Вып. 12. т. 2. 506 с.

ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОЦЕНКИ БАНКРОТСТВА ПРЕДПРИЯТИЙ

К.А. Мамбетова

Кемеровский государственный университет

В настоящее время актуален вопрос выбора методов и методик, позволяющих прогнозировать наступление банкротства предприятия в ближайшем будущем. Известны два основных подхода к предсказанию банкротства. Первый базируется на финансовых данных и включает оперирование некоторыми коэффициентами. Второй исходит из данных по обанкротившимся компаниям и сравнивает их с соответствующими данными исследуемой компании.

Широкое распространение в качестве инструментов прогнозирования банкротства отечественных промышленных предприятий получили зарубежные аналитические модели Э. Альтмана, У. Бивера, Г. Спрингейта, Ф. Лиса, Р. Тафлера. Менее известны модели Д. Фулмера, Коннана–Гольдера, П. Пратта, метод credit-men Ж. Деполяна и др. При этом наибольшее признание в российской практике оценки деятельности хозяйствующих субъектов, анализа и прогнозирования банкротства снискали модели Э. Альтмана (двухфакторная и пятифакторная). Все ранее названные модели носят имена авторов-разработчиков, относятся к количественным методам анализа, используются для оценки и прогнозирования. Количественные методы анализа – это такие методы, в основе которых лежат достаточно строгие формализованные зависимости, т.е. взаимосвязь анализируемых показателей и определяющих их факторов выражается с помощью формул.

Проведем краткую характеристику некоторых из перечисленных выше моделей. Одной из простейших моделей прогнозирования вероятности банкротства считается двухфакторная модель. Она основывается на двух ключевых показателях (например, показатель текущей ликвидности и показатель доли заемных средств), от которых зависит вероятность банкротства предприятия. Эти показатели умножаются на весовые значения коэффициентов, найденные эмпирическим путем, и результаты затем складываются с некой постоянной величиной (const), также полученной тем же (опытно-статистическим) способом. Если результат (C_1) оказывается отрицательным, вероятность банкротства невелика. Положительное значение C_1 указывает на высокую вероятность банкротства. Рассмотрен-

ная двухфакторная модель не обеспечивает всестороннюю оценку финансового состояния предприятия, а потому возможны слишком значительные отклонения прогноза от реальности. Для получения более точного прогноза американская практика рекомендует принимать во внимание уровень и тенденцию изменения рентабельности проданной продукции, так как данный показатель существенно влияет на финансовую устойчивость предприятия.

Коэффициент Альтмана (индекс кредитоспособности). Этот метод предложен в 1968 г. известным западным экономистом Альтманом. Индекс кредитоспособности построен с помощью аппарата мультипликативного дискриминантного анализа и позволяет в первом приближении разделить хозяйствующие субъекты на потенциальных банкротов и небанкротов. При построении индекса Альтман исследовал 22 аналитических коэффициента, которые могли быть полезны для прогнозирования возможного банкротства. Из этих показателей он отобрал пять наиболее значимых и построил многофакторное регрессионное уравнение. Таким образом, индекс Альтмана представляет собой функцию от некоторых показателей, характеризующих экономический потенциал предприятия и результаты его работы за истекший период. Обобщающий показатель Z (индекс кредитоспособности) может принимать значения в пределах $[-14, +22]$, при этом предприятия, для которых $Z > 2,99$, попадают в число финансово-устойчивых, предприятия, для которых $Z < 1,81$, являются безусловно-несостоятельными, а интервал $[1,81 - 2,99]$ составляет зону неопределенности. Z -коэффициент имеет общий серьезный недостаток – по существу его можно использовать лишь в отношении крупных компаний, котирующих свои акции на биржах.

Учеными Иркутской государственной экономической академии предложена своя четырехфакторная модель прогноза риска банкротства (модель R). Механизм разработки и все основные этапы расчетов этой модели подробно описаны, что облегчает практическое применение методики. Недостатком модели является то, что значение R -счета практически не коррелирует с результатами, получаемыми при помощи других методов и моделей. Получаемые прогнозы не соответствуют реальному финансовому состоянию предприятий, нет отраслевой дифференциации интегрального показателя.

Известны другие подобные критерии. Так, британский ученый Таффлер предложил в 1977 г. четырехфакторную прогнозную модель, при разработке которой использовал следующий подход: при использовании компьютерной техники на первой стадии вычисляются 80 отношений по данным обанкротившихся и платежеспособных компаний. Затем, используя статистический метод, известный как анализ многомерного дискриминанта, можно построить модель платежеспособности, определяя частные соотношения, которые наилучшим образом выделяют две группы компаний и их коэффициенты. Такой выборочный подсчет соотношений является типичным для определения некоторых ключевых измерений деятельно-

сти корпорации, таких, как прибыльность, соответствие оборотного капитала, финансовый риск и ликвидность. Объединяя эти показатели и сводя их соответствующим образом воедино, модель платежеспособности производит точную картину финансового состояния корпорации. Однако из всех обследованных должников большинство (87,5%) были признаны финансово-устойчивыми. Полученные прогнозы оказались неадекватными, поскольку достичь критического (отрицательного) уровня Z-счета практически невозможно.

Можно также использовать в качестве механизма предсказания банкротства цену предприятия. Цена предприятия (V) определяется капитализацией прибыли по формуле

$$V = \frac{P}{K},$$

где P – ожидаемая прибыль до выплаты налогов, а также процентов по займам и дивидендов; K – средневзвешенная стоимость пассивов (обязательств) фирмы. Снижение цены предприятия означает снижение его прибыльности либо увеличение средней стоимости обязательств.

Известный финансовый аналитик Уильям Бивер предложил свою систему показателей для оценки финансового состояния предприятия с целью определения вероятности банкротства – пятифакторную модель, содержащую следующие индикаторы:

- рентабельность активов;
- удельный вес заёмных средств в пассивах;
- коэффициент текущей ликвидности;
- доля чистого оборотного капитала в активах;
- коэффициент Бивера (отношение суммы чистой прибыли и амортизации к заёмным средствам).

Весовые коэффициенты для индикаторов в модели У. Бивера не предусмотрены, и итоговый коэффициент вероятности банкротства не рассчитывается. Полученные значения данных показателей сравниваются с их нормативными значениями для трёх состояний фирмы, рассчитанными У. Бивером для благополучных компаний, для компаний, обанкротившихся в течение года, и для фирм, ставших банкротами в течение пяти лет. У. Бивер пришел к выводу, что, к примеру, отношение чистых денежных потоков к общей сумме долга является наилучшим показателем предстоящего банкротства, который теперь носит название коэффициента У. Бивера. У. Бивер создал базу данных, которую использовал потом в своей модели для статистического тестирования надежности.

Модель прогнозирования платежеспособности предприятий была разработана канадским ученым Гордоном Спрингейтом в 1978 г. Это вторая модель прогнозирования банкротства после модели Альтмана. Для создания своей модели он поэтапно применял дискриминантный анализ, чтобы из 19 финансовых показателей выбрать 4, наиболее точно определяющих платежеспособность компании. Если результат меньше 0,862, то

предприятие классифицируется как банкрот. Спрингейт протестировал свою модель на 40 компаниях, точность прогнозирования платежеспособности модели – 92,5% за год до банкротства. Недостатком модели является отсутствие отраслевой и региональной дифференциации Z-счета, между переменными наблюдается достаточно высокая корреляция.

Перейдем к «качественным» кризис-прогнозным методикам. Ориентация на какой-то один критерий, даже весьма привлекательный с позиции теории, на практике не всегда оправдана. Безусловно, в этом есть и свои минусы: гораздо легче принять решение в условиях однокритериальной, чем многокритериальной задачи. Вместе с тем любое прогнозное решение подобного рода, независимо от числа критериев, является субъективным, а рассчитанные значения критериев носят скорее характер информации к размышлению, нежели побудительных стимулов для принятия немедленных решений. В качестве примера можно привести рекомендации Комитета по обобщению практики аудирования (Великобритания), содержащие перечень критических показателей для оценки возможного банкротства предприятия. В. В. Ковалев, основываясь на разработках западных аудиторских фирм и преломляя эти разработки к отечественной специфике бизнеса, предложил двухуровневую систему показателей. К первой группе относятся критерии и показатели, неблагоприятные текущие значения или складывающаяся динамика изменения которых свидетельствуют о возможных в обозримом будущем значительных финансовых затруднениях, в том числе и банкротстве. Во вторую группу входят критерии и показатели, неблагоприятные значения которых не дают основания рассматривать текущее финансовое состояние как критическое. Вместе с тем они указывают, что при определенных условиях или непринятии действенных мер ситуация может резко ухудшиться. Что касается критических значений этих критериев, то они должны быть детализированы по отраслям и подотраслям, а их разработка может быть выполнена после накопления определенных статистических данных.

В заключение хотелось бы отметить, что решению проблем банкротства организаций, с математической точки зрения, на практике уделяется недостаточно внимания, а ведь с помощью конкретных математических методов можно спасти множество предприятий, если начать их исследование заранее.

Литература

1. *Маркарьян Э.А., Герасименко Г.П.* Финансовый анализ. М.: Приор, 1997. 160 с.
2. *Ковалев В.В.* Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности. М.: Финансы и статистика, 1996. 432 с.
3. *Скоун Т.* Управленческий учет / Пер. с англ.; под ред. Н.Д. Эриашвили. М.: Аудит; ЮНИТИ, 1997. 179 с.
4. *Антикризисное управление: от банкротства – к финансовому оздоровлению* / Под ред. Г. П. Иванова. М.: Закон и право; ЮНИТИ, 1995. 130 с.
5. *Руководство по кредитному менеджменту*: Пер. с англ, под ред. Б. Эдвардса. М.: ИНФРА-М, 1996. 464 с.

6. Давыдова Г.В., Беликов А.Ю. Методика количественной оценки риска банкротства предприятий // Управление риском. 1999. № 3. С. 13–20.
7. Теория и практика антикризисного управления: учеб. для вузов / Г.З. Базаров, С.Г. Беляев, Л.П. Белых и др.; Под ред. С. Г. Беляева и В. И. Кошкина. М.: Закон и право; ЮНИТИ, 1996. С. 95–97.
8. Стрекалов О.Б., Зарипов Э.Р. Кризисы в организации и управление проектами: Учеб. пособие. Казань: Казан. гос. технол. ун-т, 1997. С. 36–40.
9. Черногорский С.А., Ли Вэй. Анализ бухгалтерской отчетности и принятие управленческих решений. 2-е изд. 2007. С. 7–54.
10. Чернышева Ю.Г., Чернышев Э.А. Анализ финансово-хозяйственной деятельности предприятия: учеб. пособие. М.: «МарТ» 2004. 293 с.;
11. Шеремет А.Д., Негашев Е.В. Методика финансового анализа: Учеб. пособие. М.: Филинь, 2003. 208 с.
12. Яшин С.Н., Яшина Н.И. Совершенствование теоретических и практических основ определения экономического состояния промышленных предприятий в целях управления их экономическими развитием // Финансы и кредиты. 2003. № 12.
13. Антикризисное управление: Учебник / Под ред. Э.М. Короткова. М.: ИНФРА-М, 2001. 432 с.
14. Антикризисное управление: от банкротства к финансовому оздоровлению / Под ред. Г.П. Иванова. М.: Закон и право; ЮНИТИ, 2005. № 44.
15. Баринов В.А. Антикризисное управление: Учеб. пособие. М.: ФБК-ПРЕСС, 2002. 520 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕНИЯ УРОВНЯ ЗДОРОВЬЯ НАСЕЛЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ КЕМЕРОВСКОЙ ОБЛАСТИ

В.В. Мешечкин, Н.И. Богатырева

Кемеровский государственный университет

Качество или эффективность многих систем различного назначения нередко характеризуют одним интегральным показателем (*ИП*). К таким показателям относятся характеристики надежности функционирования разных технических систем, показатели экономической эффективности и окупаемости, уровни социально-экономического развития регионов и др.

Часто *ИП* определяется взвешенной алгебраической суммой нескольких существенных, изменяющихся во времени параметров системы (*ПС*). Общая формула, задающая класс таких моделей, имеет вид [1]

$$ИП = \sum_{i=1}^n K_i \cdot ПС_i ,$$

где весовые коэффициенты K_i могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. При этом, как правило, выдвигается требование безразмерности и нормированности *ИП*, т.е. модель должна обеспечить изменение *ИП* в заданном интервале (чаще всего $[0, 1]$).

При изучении проблем здравоохранения было выявлено, что большинство показателей здоровья (*ПЗ*) населения в значительной степени зависит от качества окружающей среды в рассматриваемом регионе, от эффективности работы системы здравоохранения, образа жизни населения и социально-экономических условий жизни [2]. К основным статистическим

показателям, отражающим влияние указанных факторов, можно отнести общую рождаемость (*ОРЖ*), среднюю продолжительность предстоящей жизни при рождении (*СППЖ*), общую заболеваемость (*ОЗО*), первичную инвалидность (*ПИНВ*) и общую смертность (*ОСМ*).

Одна из линейных моделей *ИП* общественного здоровья, учитывающая эти показатели, задается следующей зависимостью [3]:

$$ИП = K_{ОРЖ} \cdot ОРЖ + K_{СППЖ} \cdot СППЖ - K_{ОЗО} \cdot ОЗО - K_{ОСМ} \cdot ОСМ - K_{ПИНВ} \cdot ПИНВ + C. \quad (1)$$

Здесь K_i – весовые коэффициенты *ПЗ*, C – константа, определяемая средним значением *ИП* для рассматриваемой модели.

Расчет коэффициентов K_i производится по формуле

$$K_i = BK_i / \overline{ПС_i},$$

где BK_i – вклад (доля) показателя $ПС_i$ в формирование *ИП* (оценивается экспертным путем); $\overline{ПС_i}$ – среднее значение этого показателя.

Число C определяется соотношением

$$C = 0,5 - A + B,$$

где A – сумма вкладов в (1), принимающих положительные значения; B – сумма модулей вкладов, принимающих отрицательные значения.

На основе формулы (1) построим модель интегрального показателя здоровья населения для Кемеровской области. При этом возьмем значения используемых в (1) пяти показателей за период 1995–2009 гг. (см. табл. 1), опубликованные в статистических сборниках (напр., [4]).

Таблица 1

**Значения показателей здоровья
населения Кемеровской области
за 1995–2009 гг.**

Год	<i>ОРЖ</i>	<i>СППЖ</i>	<i>ОЗО</i>	<i>ПИНВ</i>	<i>ОСМ</i>
1995	8,9	64,6	679,8	3,77	16,6
1996	8,5	65,9	619,2	4,46	16,1
1997	8,4	66,6	612,0	4,84	15,2
1998	8,7	64,1	597,6	5,13	14,3
1999	8,3	63,1	672,0	4,74	15,7
2000	8,9	62,8	734,6	4,91	16,5
2001	9,4	62,7	708,3	5,23	16,8
2002	9,9	62,0	781,9	5,46	17,5
2003	10,3	61,5	734,7	5,72	18,1
2004	10,5	62,2	741,7	5,95	17,7
2005	10,8	61,6	725,3	6,27	16,1
2006	11,3	63,0	816,9	7,12	17,3
2007	12,1	64,0	828,6	7,96	16,6
2008	13,0	62,4	793,8	8,54	16,3
2009	13,4	62,0	784,3	9,13	16,9

Примем, как и в [3], следующие величины вкладов:

$$BK_{ОРЖ} = BK_{ПИНВ} = BK_{ОЗО} = 0,25, BK_{ОСМ} = BK_{СППЖ} = 0,125.$$

Тогда модель (1) для ИП состояния здоровья населения Кемеровской области с числовыми оценками всех коэффициентов запишется в виде

$$ИП = 0,025126 \cdot ОРЖ + 0,001977 \cdot СППЖ - 0,000352 \cdot ОЗО - \\ - 0,007529 \cdot ОСМ - 0,043734 \cdot ПИНВ + 0,75.$$

По этой формуле были рассчитаны значения ИП для каждого года (табл. 2).

Таблица 2

**Ежегодные значения ИП здоровья
населения Кемеровской области
за 1995–2009 гг.**

Год	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
ИП	0,57	0,56	0,55	0,55	0,52	0,52	0,51	0,49
Год	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	
ИП	0,50	0,48	0,49	0,43	0,41	0,42	0,41	

Найденный интегральный показатель количественно оценивает состояние общественного здоровья в Кемеровской области. Поэтому он может быть использован как критерий качества в задаче оптимального управления для повышения уровня здоровья населения.

Для построения этой задачи будем рассматривать промежуток 2001–2009 гг., за который имеется более полная статистическая информация о развитии области. Пронумеруем годы индексами $t = 1, \dots, 9$ и запишем формулу интегрального показателя для произвольного t следующим образом:

$$ИП_t = 0,025126 \cdot y_t^{ОРЖ} + 0,001977 \cdot y_t^{СППЖ} - 0,000352 \cdot y_t^{ОЗО} \\ - 0,007529 \cdot y_t^{ОСМ} - 0,043734 \cdot y_t^{ПИНВ} + 0,75,$$

где $y_t^{ОРЖ}$ – общая рождаемость; $y_t^{СППЖ}$ – средняя продолжительность предстоящей жизни при рождении; $y_t^{ПИНВ}$ – первичная инвалидность; $y_t^{ОЗО}$ – заболеваемость; $y_t^{ОСМ}$ – общая смертность (за соответствующий год t).

Переменные, от которых зависит интегральный показатель $ИП_t$, будем рассматривать как фазовые переменные системы.

В качестве управлений возьмем инвестиции в основной капитал Кемеровской области по различным видам экономической деятельности: x_1 – инвестиции в образование, x_2 – в здравоохранение, x_3 – в предоставление социальных, коммунальных и персональных услуг, x_4 – в промышленность, x_5 – в сельское хозяйство. При этом будем считать, что инвестиции вносятся сразу в начале каждого года. Для указания номера года введем соответствующий индекс времени: x_{it} , $i = 1, \dots, 5$.

Фактические значения управляющих переменных на рассматриваемом промежутке времени приведены в табл. 3. В последнем столбце указаны суммарные величины инвестиций во все рассматриваемые виды экономической деятельности региона (X_t).

Таблица 3

**Инвестиции в основной капитал по различным видам
экономической деятельности
Кемеровской области (млн. руб.)**

Год	x_{1t}	x_{2t}	x_{3t}	x_{4t}	x_{5t}	X_t
2001	260	530	460	12212	453	13915
2002	298	780	530	10800	580	12988
2003	320	870	698	10485	637	13010
2004	448	966	703	9961	722	12800
2005	720	1783	939	13056	1112	17610
2006	1394	1955	1332	9626	2084	16391
2007	1683	1817	1460	11237	2615	18812
2008	2914	3317	1734	9438	2572	19975
2009	2047	2750	1437	7487	1341	15062

Для формулировки закона движения используем нелинейные уравнения вида

$$y_t^j = a_j x_{1t}^{\alpha_{1j}} x_{2t}^{\alpha_{2j}} x_{3t}^{\alpha_{3j}} x_{4t}^{\alpha_{4j}} x_{5t}^{\alpha_{5j}} (y_{t-1}^j)^{\beta_j},$$

где j принимает одно из значений *ОЗО*, *ПИНВ*, *ОСМ*, *ОРЖ*, *СППЖ*. Оценки параметров этих уравнений находятся с помощью МНК.

В силу рекуррентного характера полученных соотношений к ним необходимо добавить начальные условия вида

$$y_0^j = L_j,$$

где L_j – заданный исходный уровень соответствующего показателя здоровья. В рассматриваемой задаче в качестве уровней L_j выбираются фактические значения *ПЗ* начального (2000-го) года (см. табл. 1).

Сумма инвестиций, выделяемых в различные виды экономической деятельности региона в каждый год t , должна быть ограничена значением X_t (берется из табл. 3). Отсюда получаем условие следующего вида:

$$x_{1t} + x_{2t} + x_{3t} + x_{4t} + x_{5t} \leq X_t.$$

Кроме того, будем считать, что в связи с необходимостью осуществления всех форм экономической активности, инвестиции в каждый из видов деятельности не должны быть меньше некоторого минимального значения, определяемого исходя из установок социально-экономического развития региона:

$$x_{it} \geq x_{i\min}.$$

На роль критерия качества возьмем требование максимизации уровня здоровья населения области, оцениваемого через интегральный показатель, к концу планового периода (т.е. при $T = 9$):

$$ИП_T \rightarrow \max.$$

Объединяя все приведенные выше соотношения, окончательно получаем следующую математическую модель:

$$y_t^{OCM} = 0,967 x_{1t}^{0,002} x_{2t}^0 x_{3t}^{0,004} x_{4t}^0 x_{5t}^0 (y_{t-1}^{OCM})^{0,994}, \quad (2)$$

$$y_t^{СППЖ} = 0,959 x_{1t}^{0,003} x_{2t}^0 x_{3t}^0 x_{4t}^{0,07} x_{5t}^{0,001} (y_{t-1}^{СППЖ})^{0,989}, \quad (3)$$

$$y_t^{OZO} = 0,465 x_{1t}^0 x_{2t}^{0,067} x_{3t}^{0,119} x_{4t}^{0,165} x_{5t}^{0,018} (y_{t-1}^{OZO})^{0,631}, \quad (4)$$

$$y_t^{OPЖ} = 0,402 x_{1t}^0 x_{2t}^0 x_{3t}^{0,073} x_{4t}^{0,091} x_{5t}^{0,001} (y_{t-1}^{OPЖ})^{0,835}, \quad (5)$$

$$y_t^{ПИНВ} = 0,009 x_{1t}^0 x_{2t}^{0,226} x_{3t}^{0,143} x_{4t}^{0,381} x_{5t}^0 (y_{t-1}^{ПИНВ})^{0,25}, \quad (6)$$

$$y_0^{OCM} = 16,5, \quad y_0^{СППЖ} = 62,8, \quad y_0^{OZO} = 690,2, \quad y_0^{OPЖ} = 8,9, \quad y_0^{ПИНВ} = 4,91, \quad (7)$$

$$x_{1t} + x_{2t} + x_{3t} + x_{4t} + x_{5t} \leq X_t, \quad (8)$$

$$x_{it} \geq x_{i\min}, \quad i=1,...,5, \quad t=1,...,T, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} ИП_T = & 0,025126 \cdot y_T^{OPЖ} + 0,001977 \cdot y_T^{СППЖ} - 0,000352 \cdot y_T^{OZO} - \\ & - 0,007529 \cdot y_T^{OCM} - 0,043734 \cdot y_T^{ПИНВ} + 0,75 \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (10)$$

Эта задача является задачей оптимального управления с дискретным временем и терминальным критерием качества.

Для ее решения применим метод динамического программирования, опирающийся на принцип оптимальности Беллмана [5].

Предварительно определим минимальные значения инвестиций в (9) следующим образом: $x_{1\min} = 260$, $x_{2\min} = 530$, $x_{3\min} = 460$, $x_{4\min} = 6800$, $x_{5\min} = 453$. При этом выбор значений осуществляется так, чтобы

$$\sum_{i=1}^5 x_{i\min} \leq \min_t X_t.$$

Применение метода динамического программирования к задаче (2)–(10) дает оптимальное [в смысле критерия (10)] управление и оптимальную траекторию развития региона, а также определяет максимальное конечное значение $ИП$ здоровья населения Кемеровской области. Полученные результаты приведены в табл. 4.

Эта таблица показывает, каким образом должны быть распределены инвестиции в различные виды экономической деятельности области, чтобы улучшить состояние общественного здоровья.

Таблица 4

**Результаты вычислений для задачи повышения
уровня здоровья населения**

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Управляющие переменные										
x_{1t}	–	260	280	346	380	398	520	635	799	830
x_{2t}	–	660	623	624	616	3182	2648,6	3762	3995	2559
x_{3t}	–	2783	2577	2516	2440	3384	3018,2	3062	3995	2012
x_{4t}	–	7428	6909	6921	6804	7123	6926	7589	7191	6947
x_{5t}	–	2783	2597	2602	2560	3522	3278,2	3762	3995	2712
Фазовые переменные										
$y_t^{O_1}$	690,2	573,3	496,8	452,7	423,7	477,9	499,5	536	576,3	532,9
y_t^{II}	4,91	5,39	5,24	5,19	5,1	7,86	8,17	9,27	9,87	8,11
$y_t^{O_2}$	16,5	16,37	16,25	16,13	16	15,9	15,84	15,76	15,7	15,6
$y_t^{O_3}$	62,8	62,77	62,73	62,72	62,73	62,78	62,86	63	63,23	63,39
$y_t^{O_4}$	8,9	10	11	11,9	12,7	13,7	14,5	15,3	16,3	16,2
Значения интегрального показателя										
III	–	0,57	0,63	0,68	0,7	0,59	0,59	0,55	0,53	0,62

Можно увидеть, что значения интегрального показателя, полученные в результате решения задачи повышения уровня здоровья населения, больше фактических значений не только в конечный момент времени, но и на протяжении всего рассматриваемого промежутка.

Литература

1. Кирьянов Б.Ф. К проблеме определения весовых коэффициентов параметров линейных моделей интегральных показателей качества систем / Б. Ф. Кирьянов // Вестник НовГУ. 2007. № 44. С. 33–37.
2. Кирьянов Б.Ф. Математические модели интегрального показателя здоровья населения / Б. Ф. Кирьянов // Фундаментальные исследования. 2008. № 9. С. 99–100.
3. Кирьянов Б.Ф. Методика определения значений параметров моделей интегрального показателя общественного здоровья / Б. Ф. Кирьянов // Охрана здоровья населения – национальный приоритет государственной политики (Сб. научных трудов ННЦ Северо-Западного Отделения РАМН, Т. 5). М.: Медицина, 2006. С. 125–130.
4. Кузбасс, 2010: Стат. сб. / Кемеровостат. Кемерово, 2010.
5. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А.И. Пропой. М.: Наука, 1973.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ ГРУПП ЭКОНОМИЧЕСКИ АКТИВНОГО НАСЕЛЕНИЯ (НА ПРИМЕРЕ КЕМЕРОВСКОЙ ОБЛАСТИ)

К.М. Мироедова

Кемеровский государственный университет

Данная работа посвящена математическому моделированию проблемы рынка труда, занятости и безработицы. В настоящее время вопросы занятости и безработицы, миграции рабочей силы являются одними из самых актуальных в мире [1].

Безработица свидетельствует о том, что, во-первых, общественные ресурсы недоиспользуются и, во-вторых, часть населения имеет очень низкие денежные средства к существованию. Постоянное поддержание определенного уровня занятости населения – еще одна проблема для правительства любой страны. В странах рыночной ориентации проводится политика регулирования занятости на основе применения определенных мер воздействия, преимущественно постоянных и гибких по формам и средствам. Сегодня проблема безработицы рассматривается в государственных программах, например, программы по профессиональной переподготовке безработных облегчают возможность их будущего трудоустройства, а такие программы, как страхование по безработице, смягчают отдельные экономические трудности, с которыми сталкиваются безработные, финансирование поддержки малого бизнеса также приносит свои плоды в уменьшении процента незанятого населения.

Рассмотрим модель социальной системы региона на отрезке времени $[0, T]$, где экономически активное население состоит из 3 классов (рис. 1).

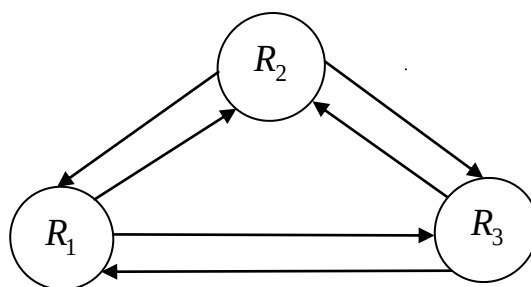


Рис. 1. Структура экономически активного населения

Под классом R_1 понимается класс безработных, класс R_2 – класс, состоящий из вольнонаемных и трудящихся на временных общественных работах, не имеющих постоянного места работы и стабильного заработка, класс R_3 – класс людей, имеющих постоянную работу.

Пусть система является замкнутой, т.е. она изолирована от внешних воздействий, ни один объект не покидает систему и никакой другой попасть в нее не может, переходы возможны из одного класса в другой. В

модели рассматривается только экономически активное население, численность которого не меняется со временем.

На переходы объектов из класса в класс влияет множество факторов, но наиболее значительное воздействие оказывает на них распределение денежных средств по четырем областям: поддержка малого бизнеса, образование, содействие занятости населения и организация временного трудоустройства безработных граждан, профессиональное переобучение безработных граждан и профессиональная ориентация [2]. В соответствии с этими областями вводятся управляющие переменные: $u_1(t)$ – финансирование поддержки малого бизнеса, $u_2(t)$ – финансирование образования, $u_3(t)$ – финансирование бирж труда в содействие занятости населения и организации временного трудоустройства безработных граждан, $u_4(t)$ – финансирование профессионального переобучения безработных граждан и профессиональной ориентации.

Запишем математическую модель социальной системы для каждого $i, j = 1, 2, 3$, $l = 1, \dots, 4$ и момента времени $t = 1, \dots, T$ в следующем виде:

$$x_i(t) = x_i(t-1) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^3 \sum_{l=1}^4 \alpha_{jil} u_l(t) - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^3 \sum_{l=1}^4 \alpha_{ijl} u_l(t), \quad (1)$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad (2)$$

$$\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^3 \sum_{l=1}^4 \alpha_{jil} u_l(t) - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^3 \sum_{l=1}^4 \alpha_{ijl} u_l(t) \leq \beta_i / N - x_i(t-1), \quad (3)$$

$$- \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^3 \sum_{l=1}^4 \alpha_{jil} u_l(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^3 \sum_{l=1}^4 \alpha_{ijl} u_l(t) \leq x_i(t-1) - \gamma_i / N, \quad (4)$$

$$\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^3 \sum_{l=1}^4 \alpha_{ijl} u_l(t) \leq x_i(t-1), \quad (5)$$

$$- \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^3 \sum_{l=1}^4 \alpha_{ijl} u_l(t) \leq 0, \quad (6)$$

$$\sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^3 \sum_{l=1}^4 \alpha_{ijl} u_l(t) \leq 1, \quad (7)$$

$$u_l(t) \leq \mu_l, \quad (8)$$

$$u_l(t) \geq 0. \quad (9)$$

Здесь $x_i(t)$ – доля объектов (от общего числа экономически активного населения N) в классе R_i в момент времени $t=1, \dots, T$; μ_l – фиксированное число, выражающее ограничение сверху на управляющий параметр $u_l(t)$; γ_i и β_i – нижняя и верхняя границы численности класса R_i ; α_{ijl} – доля объектов переходящих из класса R_i в класс R_j за единицу времени на каждую единицу денежных вложений в l -ю область.

К системе (1)–(9) добавляется критерий эффективности, который одновременно максимизирует число объектов в классе трудоустроенных граждан и минимизирует количество безработных:

$$J(x^0, u) = F(x(T)) = x_3(T) - x_1(T) \rightarrow \max. \quad (10)$$

С учетом уравнения движения (1) выражение (10) можно записать следующим образом:

$$J(x^0, u) = x_3^0 - x_1^0 + \sum_{t=1}^T \sum_{l=1}^4 u_l(t) \left(\sum_{j=1}^2 (\alpha_{j3l} - \alpha_{3jl}) - \sum_{j=2}^3 (\alpha_{j1l} - \alpha_{1jl}) \right) \rightarrow \max. \quad (11)$$

Таким образом, получена модель системы в виде задачи оптимального управления с дискретным временем с закрепленным левым концом траектории и свободным правым, с ограничениями на управления и фазовые переменные. Фазовыми переменными в этой задаче являются доли объектов в каждой группе, управляющими параметрами – финансирование, распределяемое по различным социальным программам.

Для оценки параметров модели использовались статистические данные по Кемеровской области за 2000–2010 гг. [3], после чего на основе построенной модели были рассчитаны оптимальные значения управляющих и фазовых переменных на последующие два года.

Для решения использовался метод динамического программирования [4]. В результате его применения были получены следующие значения:

Год	2010	2011	2012
Управляющие переменные			
u^1	–	7689,92	6393,519
u^2	–	25489,05	24699,98
u^3	–	164,2383	157,24
u^4		49	54
Фазовые переменные			
x_1	0,091	0,051	0,051
x_2	0,0147	0,03	0,021
x_3	0,8943	0,919	0,928

Математическая модель динамики экономически активного населения, построенная в работе, может применяться для анализа структуры занятости населения региона и принятия относительно нее оптимальных решений. Модель также может быть использована для проведения расчетов распределения денежных средств в различные сферы финансирования и определения численности классов на заданный период времени.

Литература

1. Курбатова М.В. Экономическая теория: электронное учебное пособие / М.В. Курбатова, Н.Ф. Апарина, Н.А. Русакова. Кемерово, 2001.
2. Комплексные программы социально-экономического развития муниципальных образований Кемеровской области // URL: <http://www.ako.ru/Ekonomik/program.asp?n=0&sn=1>.
3. Департамент труда и занятости населения Кемеровской области // URL: <http://www.work.kuzbass.net/monitoring.htm>

ОБЗОР КОЛИЧЕСТВЕННЫХ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТОВ БИЗНЕСА

А.В. Набережная

Астраханский государственный университет

Создание сети магазинов – перспективная тенденция современного торгового бизнеса. При этом огромную роль играет правильное размещение объектов сети, поскольку нерациональное размещение торговых точек может привести к большим финансовым потерям.

Сложность проблемы оптимального размещения, как правило, связана с нехваткой информации о рынке, кроме того, существует множество разнообразных факторов, влияющих на выбор местоположения. Обычно при разрешении подобных проблем современные бизнесмены опираются на свой опыт и интуицию, что далеко не всегда приводит к верным решениям.

Поэтому возникла необходимость формализации задачи размещения. Впервые формально представлена проблема размещения в начале прошлого столетия Альфредом Вебером, который сформулировал проблему размещения одного склада как математическую задачу с минимизацией общего пути между складом и группой пространственно распределенных потребителей. Его работа привлекла внимание научной общественности и породила целую плеяду различных подходов и теорий в разрешении проблемы размещения. Часть разработок метода размещения была направлена на адаптацию методов, заимствованных из других наук. В основе этих методов, как правило, лежит аксиоматика, которая не может в полной мере отразить экономические закономерности. Поэтому эти методы имеют очень узкую сферу применения в экономике. Другое направление в разработке методов решения задачи размещения основано на использовании современных математико-статистических методов: теории игр, географических информационных систем, системного анализа, картографирования, теории случайных полей и др. Применение этих методов осложняется необходимостью большого количества исходных статистических данных, что требует основательных капитальных вложений для их сбора и обработки. Особое внимание следует уделить количественным исследовательским приемам решения задачи размещения, основанным на разработках экономико-математических и экономико-статистических методов. Количественные методы позволяют свести к минимуму субъективность и повысить обоснованность и эффективность принятия решения о размещении объекта бизнеса.

Несмотря на большое количество работ, не существует единого подхода к классификации и формализации методов размещения бизнес-систем. Наиболее часто встречается классификация методов размещения

по объекту размещения, поскольку тип объекта является существенным фактором при решении поставленной проблемы. В зависимости от того, какое количество факторов учитывается, методы делятся на однофакторные и многофакторные. Также можно классифицировать методы размещения по критерию оптимизации, так как решение задачи оптимизации непосредственно зависит от выбора параметра, по которому проводится оптимизация. По типу решаемой задачи размещения различают методы, позволяющие решать непрерывную или дискретную задачи размещения. Методы решения непрерывной задачи размещения имеют общую особенность: их использование подразумевает возможность размещения объекта в любой координате рассматриваемой территории, что не всегда соответствует реальной действительности. Если после использования метода было определено место, в котором размещение бизнес-объекта невозможно, то необходимо дополнительное исследование близлежащих подходящих мест размещения. В основе методов решения дискретной задачи размещения лежит идея выбора места размещения из заранее установленных пунктов размещения.

В таблице приведены наиболее часто описываемые в литературе методы размещения бизнес-объекта, которые классифицированы по критерию оптимизации и по дискретному/непрерывному типу решаемой задачи размещения. В таблице также указаны тип размещаемого объекта бизнеса, факторы, учитывающиеся в каждом методе, и недостатки его применения.

Рассмотренными в данной таблице методами не ограничивается широкий спектр размещенческих моделей. Возможны другие подходы и схемы. Приведенные методы свидетельствуют о возможности математического описания и оптимизации проблемы размещения объекта бизнеса. Но ни один из указанных методов не является универсальным, отвечающим всем требованиям и запросам современного рынка. В зависимости от специфики задачи, от количества факторов, которые будут влиять на выбор местоположения, будет использоваться соответствующий метод размещения. Лучшим будет использование нескольких методов, сравнение и анализ полученных результатов по каждому методу.

Также следует отметить, что существующие сегодня методы и модели размещения объектов имеют ряд недостатков и предназначены для оптимизации размещения отдельных объектов бизнеса, а не применимы для оптимизации размещения сети объектов (т.е. они не учитывают взаимосвязи между размещаемыми объектами, их связь с распределительным центром и т.п.).

Таким образом, проблема размещения бизнес-объекта полностью не разрешена. Любой из рассмотренных методов требует уточнений и доработок. Также необходимо развитие комплексных подходов, новых методов и моделей, включающих в себя взаимосвязанные расчеты по нескольким методам.

Методы определения оптимального размещения

Метод	Критерий оптимизации	Тип размещаемого объекта	Факторы, учитываемые в методе	Недостатки
1. Непрерывные задачи размещения 1.1. Метод центра тяжести	Минимум транспортных расходов	Распределительный центр, склад	Объем поставок продукции	Предполагает, что все транспортные расходы в прямом и обратном направлении одинаковы и не учитывают потери при неполной загрузке транспорта. Не учитывает качественную составляющую объекта
1.2. Метод равновесной системы транспортных затрат			Объем поставок продукции, транспортный тариф	
1.3. Метод поиска минимума транспортной работы			Спрос	Не учитывает существующие склады в регионе, а также другие факторы, влияющие на выбор места размещения
2. Дискретные задачи размещения: 2.1. Метод минимума суммарных затрат	Минимум суммарных затрат		Виды затрат	Имеет ограничения на применение в практике и идет в дополнение к количественным методам
2.2. Фактор-рейтинговые системы	Максимум интегрального показателя	Сервисный объект, завод	Основные факторы, характеризующие места размещения	Субъективность при определении балльной шкалы для каждого фактора и места расположения
2.3. Метод взвешенных факторных нагрузок				
2.4. Множественная регрессионная модель	Максимум прибыли	Отель	Факторы, коррелирующие с доходом	Связь между любым параметром и доходом принимается линейная, что не всегда соответствует действительности
2.5. Методы определения зон влияния на потребителей: 1) Метод изохронных линий	Максимум потенциальных клиентов	Магазин	Информация о целевых потребителях, дистанционные и временные факторы	Не учитывает уже существующие в районе объекты бизнеса
2) Метод Тяпухина		Торговое или промышленное предприятие	Ценовые параметры, потребительские свойства, условия распределения	Неприемлем для определения размещения объектов в районе, в котором нет конкурентных объектов
3) Метод на основе теории нечетких множеств		Торговая фирма, распределительный центр	Основные факторы, характеризующие места размещения	Трудно применим в условиях быстро меняющегося рынка

Литература

1. Чейз Р. Производственный и операционный менеджмент / Пер. с англ.; Р. Чейз, Н. Дж. Эквилайн, Р.Ф. Якобс. М.: Вильямс, 2001. 704 с.
2. Гранберг А.Г. Основы региональной экономики / А.Г. Гранберг. М.: ГУ ВШЭ, 2000. 495 с.
3. Смехов А.А. Маркетинговые модели транспортного рынка / А.А. Смехов. М.: Транспорт, 1998. 120 с.
4. Гаджинский А.М. Основы логистики / А.М. Гаджинский. М.: ИВЦМК, 1996. 124 с.
5. Энджел Дж.Ф. Поведение потребителей / Дж. Ф. Энджел, Р.Д. Блэкуэлл, П.У. Миниард. СПб.: Питер Ком, 2000. 759 с.

ХЕДЖИРОВАНИЕ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ С ПОМОЩЬЮ ОПЦИОНОВ

Е.А. Николаева

Кемеровский государственный университет

Опционом называется контракт, заключенный между двумя лицами, в соответствии с которым одно лицо предоставляет другому лицу право купить определенный актив по определенной цене в рамках определенного периода времени или предоставляет право продать определенный актив по определенной цене в рамках определенного периода времени. Лицо, которое получило опцион и таким образом приняло решение, называется покупателем опциона, который должен платить за это право. Лицо, которое продало опцион и отвечающее на решение покупателя, называется продавцом опциона.

Операции с опционами осуществляются либо для страхования фондового портфеля (портфель – набор ценных бумаг), либо для получения прибыли на разнице в курсах, т.е. чисто в спекулятивных целях. Участники опционного контракта рассчитывают на противоположные тенденции в движении курсов фондовых ценностей. Понижение курса предполагают продавец опциона на покупку и покупатель опциона на продажу; на повышение курса рассчитывают держатель опциона на покупку и продавец опциона на продажу.

Наиболее распространенный опционный контракт – это опцион на акции.

Два основных вида опционов – это опционы «колл» и «пут». В настоящее время такие контракты представлены на многих биржах в мире. Кроме того, многие подобные контракты создаются индивидуально (т.е. «вне биржи», или «через прилавок») и обычно в них принимают участие финансовые институты или инвестиционные банки, а также их клиенты.

Наиболее известный опционный контракт – это опцион «колл» (call option) на акции. Он предоставляет покупателю право купить («отозвать») определенное число акций определенной компании у продавца опциона по определенной цене в любое время до определенной даты включительно. Условия контракта:

1. Компания, акции которой могут быть куплены.

2. Число приобретаемых акций.
3. Цена приобретения акций, именуемая ценой исполнения (exercise price), или цена «страйк».
4. Дата, когда право купить утрачивается, именуемая датой истечения (expiration date).

Второй вид опционного контракта – это опцион «пут» (put option). Он дает право покупателю продать определенное количество акций определенной компании продавцу опциона по определенной цене в любой момент времени до определенной даты включительно. Данный контракт имеет условия, аналогичные условиям опциона «колл»:

- 1) компания, чьи акции могут быть проданы;
- 2) число продаваемых акций;
- 3) цена продажи акций, именуемая ценой исполнения (или ценой «страйк»);
- 4) дата, когда покупатель опциона утрачивает право продать, именуемая датой истечения.

С точки зрения сроков исполнения опционы подразделяются на:

- 1) американский опцион, который может быть исполнен в любой день до истечения срока контракта или в этот день;
- 2) европейский опцион, который осуществляется только в день истечения контракта.

Цена опциона – премия, т.е. сумма, выплачиваемая при покупке опциона. Она состоит из двух компонентов – внутренней стоимости и временной стоимости.

Внутренняя стоимость – это разность между текущим курсом базисного актива (спот-ценой) и ценой исполнения опциона (ценой-страйк).

Временная стоимость – это разность между суммой премии и внутренней стоимостью. Если до истечения срока действия контракта остается много времени, то временная стоимость может оказаться существенной величиной.

Опционы, которые обращаются на бирже, называются «котируемыми опционами». Биржевая торговля опционами построена так, чтобы допускалась их многократная перепродажа. Условия опционов, обращающихся на биржевом рынке, стандартны, вследствие чего они высоколиквидны. При прочих равных условиях цена (премия) при перепродаже снижается по мере приближения опционного срока к дате истечения.

Торговля опционами – один из важных моментов формирования фондового рынка, повышения его ликвидности и надежности. Количество опционных стратегий – комбинаций покупок и продаж разных типов опционов с различными ценами исполнения, премиями и периодами действия в совокупности с вариантами арбитражных сделок – столь велика, что удовлетворит потребности как отчаянных спекулянтов, так и осторожных инвесторов.

Под опционной стратегией понимают операции с целым набором опционов, и, возможно, базовым активом в одном портфеле. Цели те же –

страхование риска и получение прибыли. Стратегия состоит из комбинации простейших операций. Определяют стратегию такие факторы, как направление движения цен на рынке базового актива, степень волатильности (изменчивости цен) рынка, время до истечения опциона.

Самыми простыми операциями с опционами являются:

- покупка опциона колл (Long Call.) Самая простая и наиболее популярная стратегия. Характеризуется неограниченной возможной прибылью при благоприятном развитии событий на рынке и ограниченным убытком, если базовый актив снижается или стоит на месте. Используется, если ожидается, что цена базового актива и его волатильность повысятся;

- покупка опциона пут (Long Put.) Самая простая и наиболее популярная стратегия. Характеризуется неограниченной возможной прибылью при благоприятном развитии событий на рынке и ограниченным убытком, если базовый актив растет или стоит на месте. Часто применяется в целях хеджирования. Используется, если ожидается, что цена базового актива понизится, а его волатильность повысится;

- подписка (продажа) опциона колл (Short Call) – одна из самых простых стратегий. Однако ее применение требует большой осторожности, так как в этом случае прибыль ограничена, а убыток ничем не ограничен. Часто применяется в сложных стратегиях с использованием страхующих составляющих, например, при продаже волатильности дополнительно открывается длинная позиция по базовому активу. Используется, если ожидается, что цена базового актива и его волатильность понизится;

- подписка (продажа) опциона пут (Short Put) – одна из самых простых стратегий. Однако ее применение требует большой осторожности, так как в этом случае прибыль ограничена, а убыток ничем не ограничен. Часто применяется в сложных стратегиях с использованием страхующих составляющих, например, при продаже волатильности дополнительно открывается короткая позиция по базовому активу. Используется, если ожидается, что цена базового актива повысится, а его волатильность понизится.

В зависимости от прогноза развития рынка можно выделить следующие виды опционных стратегий:

- стратегия «быка» – подразумевает повышение стоимости базового актива;

- стратегия «медведя» – предполагает понижение стоимости базового актива;

- нейтральные – ориентируются на колебание цены базового актива возле некоторой величины и отсутствие устойчивого тренда (изменения цены).

Количество стратегий может исчисляться десятками. В нашем же случае мы воспользуемся стратегией «быка», т.к. прогнозируем повышение стоимости активов, включенных в наш портфель.

Модель ценообразования опционов Блэка–Шоулза (Black-Scholes Option Pricing Model, OPM), которая оценивает call-опционы, была разработана в 1973 г., когда уже начался период быстрого роста опционной торговли. Данная модель получила широкое распространение на практике и, помимо всего прочего, может также использоваться для оценки всех производных бумаг, включая конвертируемые ценные бумаги и даже для оценки собственного капитала финансово-зависимых фирм.

Опцион рассматривается как функция следующих элементов:

1. Цена базового актива и цена страйк (цена исполнения). Наиболее важный фактор, влияющий на цену опциона, – соотношение между ценой лежащего в основе опциона актива и ценой страйк. Это соотношение определяет статус опциона («в деньгах» или «вне денег») и внутреннюю стоимость опциона (величина, на которую цена базового актива выше или ниже цены страйк для опционов колл и пут соответственно).

2. Уровень процентных ставок. Растущие процентные ставки увеличивают форвардную цену базовых акций, которая рассчитывается как цена акции плюс ставка по безрисковым активам на период действия опциона. Форвардная цена в модели понимается как стоимость акции на дату истечения опциона.

3. Степень колебаний (волатильность). Этот показатель отражает подверженность базового актива ценовым колебаниям. Величина премии по опционам в деньгах прямо пропорциональна ожидаемой ценовой неустойчивости базового актива.

4. Дивиденды. Повышенные дивиденды сокращают цену опционов колл и увеличивают цену опционов пут, потому что выплата дивидендов сокращает цену лежащих в основе опциона акций на сумму дивиденда. Дивиденды увеличивают привлекательность покупки и держания акций по сравнению с покупкой опционов колл и хранением резервов наличности. И наоборот, продавцы в короткую должны учитывать выплату дивидендов, поэтому покупка опционов пут выглядит более предпочтительной, чем короткая продажа акций.

5. Время, остающееся до даты истечения опциона. Время работает против покупателя опционов, так как цена опционов вне денег снижается ускоренными темпами с приближением даты их истечения. Этот эффект называется «разрушение временем» (time decay). Большой срок, остающийся до окончания срока действия опциона, означает большую неопределенность.

Концептуально модель Блэка–Шоулза – это формула, которая может быть объяснена следующим образом:

Цена опциона «колл» = [ожидаемая будущая цена за акцию] – [ожидаемая стоимость исполнения опциона].

Блэк и Шоулз добавляют следующее в это уравнение:

- поправка на вероятность разброса будущей цены акции,
- поправка на чистое значение стоимости исполнения,

– поправка на вероятность того, что цена исполнения может быть выше, чем цена базисного актива,

– поправка на тот факт, что часть любого полученного платежа может быть получена по безрисковой ставке.

Формула использует четыре переменные: срок действия опциона, цена, уровень процентных ставок, степень рыночных колебаний и позволяет получить справедливую величину премии, уплачиваемой за опцион.

$$P = SN(d_1) - Ke^{(-rt)}N(d_2),$$

где P – теоретическая премия по опциону колл; S – текущая цена базовых акций; t – время, остающееся до срока истечения опциона, выраженное как доля года (количество дней до даты истечения/365 дней); K – цена исполнения опциона (цена страйк); r – процентная ставка по безрисковым активам; $N(x)$ – кумулятивное стандартное нормальное распределение; e – экспонента (2,7183); s – годовое стандартное отклонение цены базовых акций (историческая волатильность).

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r + \frac{s^2}{2}\right)t}{s\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - s\sqrt{t}.$$

Для понимания сути модели ее можно разделить на две части. Первая часть, $SN(d_1)$, отражает ожидаемую прибыль от покупки самих базовых акций. Расчет производится через умножение цены лежащих в основе акций $[S]$ на изменение премии по опциону колл по отношению к изменению цены базового актива $[N(d_1)]$.

Вторая часть модели

$$Ke^{(-rt)}N(d_2)$$

дает приведенную стоимость цены исполнения (цены страйк) на дату истечения опциона. Объективная рыночная стоимость опциона колл рассчитывается путем вычитания второй части формулы из первой.

Вычислим премию по европейскому опциону «Call» акции Аэрофлота со сроком истечения 3 месяца. Исходные данные расчета таковы:

$$S = 73,16; K = 74,78; T = 0,25 \text{ года}; r = 6,45 \text{ в год}; s = 0,2170.$$

Тогда

$$d_1 = \frac{\ln \frac{73,16}{74,78} + \left(0,0645 + \frac{0,217^2}{2}\right) \cdot 0,25}{0,217\sqrt{0,25}} = 0,001009$$

$$d_2 = 0,001009 - 0,217\sqrt{0,25} = -0,10749;$$

$$N[d_1] = N(0,001009) = 0,500403,$$

$$N[d_2] = N(-0,10749) = 0,4572$$

и

$$P = 73,16 \cdot 0,500403 - 74,78 \cdot e^{-0,0645 \cdot 0,25} \cdot 0,4572 = 2,97.$$

Таким образом, с целью страхования фондового портфеля можно покупать не сами акции, а опционы на них. Если наши ожидания оправдываются, то мы реализуем наше право на покупку акций, если же нет, то наши потери ограничатся суммой уплаченной премии.

Литература

1. Шведов А.С. Теория эффективных портфелей ценных бумаг. М.: ГУ ВШЭ, 1999. 144 с.
2. Лякин А.Н., Лапинская А.А. Рынок ценных бумаг. СПб.: Поиск, 2001. 266 с.

ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА ОДНОГО ТОВАРА С ОПТИМАЛЬНОЙ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ СТРАТЕГИЕЙ ПОСТАВКИ ТОВАРА В УСЛОВИЯХ СТОХАСТИЧНОСТИ СПРОСА

В.В. Поддубный, О.В. Романович

Томский государственный университет

1. Постановка задачи

В работе [1] инерционный рынок одного товара рассматривался как самоуправляемая динамическая система при сбалансированной стратегии поставки товара на рынок. В работе [2] получено точное решение задачи оптимального управления поставкой товара на рынок одного товара при детерминированном спросе на товар в условиях запаздывания поставки. Было показано, что оптимальная стратегия поставки товара на рынок может быть реализована с помощью детерминированной математической модели, позволяющей точно прогнозировать состояние рынка вперёд на время запаздывания. В настоящей работе исследуется влияние флуктуаций покупательского спроса на переменные, описывающие функционирование рынка в условиях запаздывания поставки товара на рынок при той же детерминированной (но уже не оптимальной) стратегии поставки товара.

Рассмотрим модель рынка одного товара, функционирующую в дискретном времени $t \in N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Пусть $P(t)$ – цена товара в момент времени t ; $Q^O(t)$ – остаток товара на рынке; $Q^Z(t - \tau)$ – объём товара, заказываемого в момент времени $t - \tau$ для поставки на рынок в момент t (стратегия поставок). Пусть в момент t дискретного времени спрос $Q^D(t)$ на товар при цене $P(t)$ имеет вид простейшей линейной зависимости с аддитивным членом $\xi(t)$, характеризующим случайные флуктуации спроса:

$$Q^D(t) = Q_m - aP(t) + \xi(t), \quad (1)$$

где $Q_m > 0$ и $a > 0$ – заданные константы.

В простейшем случае $\xi(t)$ – стационарный некоррелированный случайный процесс с нулевым средним значением и стандартным отклонением σ . Распределение флуктуаций спроса $\xi(t)$ должно быть усечённым, чтобы обеспечивалась неотрицательность спроса. Неотрицательность спроса

обеспечивает также нелинейная рестриктивная зависимость спроса от цены при любом значении σ путём усечения спроса:

$$Q^D(t) = \begin{cases} Q_m - aP(t) + \xi(t), & \text{если } Q_m - aP(t) + \xi(t) > 0, \\ 0, & \text{если } Q_m - aP(t) + \xi(t) \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Ограничимся простейшим случаем, когда $\xi(t)$ – стационарный некоррелированный нормальный случайный процесс с нулевым средним значением и малым стандартным отклонением ($\sigma \ll Q_m$), обеспечивающим пренебрежимо малую вероятность отрицательных значений спроса.

Пусть $Q(t)$ – объём товара, предлагаемого к продаже в момент времени t . Представим $Q(t)$ в виде суммы остатка товара в объёме $Q^O(t)$ от продаж на предыдущем интервале дискретного времени (перешедшего на рынок в момент t) и товара в объёме $Q^Z(t - \tau)$, заказанного продавцом в момент времени $t - \tau$ (с учётом запаздывания поставки) для поставки его на рынок к моменту времени t :

$$Q(t) = Q^O(t) + Q^Z(t - \tau).$$

Объём продаж $Q^S(t)$ на интервале t дискретного времени равен, очевидно,

$$Q^S(t) = \min(Q^D(t), Q^O(t) + Q^Z(t - \tau)). \quad (3)$$

Остатки товара удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$Q^O(t + 1) = Q^O(t) + Q^Z(t - \tau) - Q^S(t). \quad (4)$$

Естественно считать целевой функцией $J(t)$ рынка в каждый момент (на каждом дискретном интервале) времени t прибыль продавца, равную разности между выручкой от продажи товара и затратами на его приобретение и хранение. Если P_1 – цена закупки товара (на оптовом рынке или у производителя), P_2 – цена хранения единицы товара, не проданного на предыдущем интервале дискретного времени, то прибыль продавца в момент времени t составит величину

$$J(t) = Q^S(t)P(t) - Q^Z(t)P_1 - Q^O(t)P_2 - \frac{R}{2}(P(t) - P(t-1))^2. \quad (5)$$

Последнее слагаемое (с коэффициентом $R > 0$) выражает «штрафные санкции» за изменение цены товара и определяет инерционность рынка – за резкое повышение цены могут последовать санкции законодательного характера, за резкое снижение цены – «санкции» конкурентов, выражающиеся в нанесении ущерба продавцу в размере, эквивалентном этой штрафной функции.

Возникают два вопроса:

1) какое значение примет цена товара $P(t)$ в момент времени t , если на предыдущем шаге $t - 1$ она равнялась $P(t - 1)$, и

2) какую величину $Q^Z(t - \tau)$ дополнительной поставки товара на рынок должен произвести продавец, чтобы прибыль продавца при заданной линии спроса на t -м интервале дискретного времени была максимальной:

$$J(t) \Rightarrow \sup_{P(t), Q^Z(t-\tau)}. \quad (6)$$

При решении этой задачи должны выполняться ограничения на величину возможной цены товара $P(t)$:

$$P_1 < P_{\min} < P(t) < P_{\max}(t) = (Q_m + \xi(t)) / a$$

и на величину дополнительного заказа товара $Q^Z(t - \tau) \geq 0$.

2. Стохастическая и детерминированная модели.

Оптимальная цена товара и «оптимальная» поставка товара

Поставленная задача (6) в отсутствие флуктуаций спроса $\xi(t)$ была решена в работе [2]. При наличии флуктуаций спроса $\xi(t)$ схема решения остаётся той же: сначала находится оптимальная (обеспечивающая максимум прибыли продавца (5)) цена $P(t)$ товара при фиксированном значении объёма предложения $Q(t)$ (следовательно, при фиксированном объёме заказа $Q^Z(t - \tau)$):

$$J(t) \Rightarrow \max_{P(t)|Q(t)},$$

а затем – оптимальное значение объёма товара на рынке $Q(t)$ и заказа $Q^Z(t - \tau)$ товара в зависимости от его остатка $Q^O(t)$ на рынке.

Здесь, однако, имеется важное различие между стохастической и детерминированной задачами оптимизации. В детерминированной задаче в каждый момент дискретного времени t на рынок поступает оптимальный объём $Q^Z(t - \tau)$ товара, заказанного за τ шагов до этого момента времени в условиях полной предсказуемости поведения рынка в течение этих шагов. В стохастической задаче рынок идёт по стохастической траектории, и предсказать точно будущий спрос на товар и найти точное значение оптимального объёма $Q^Z(t - \tau)$ поставки товара на рынок в момент $t - \tau$ невозможно (будущие значения флуктуаций спроса $\xi(t)$ ещё не известны). Поэтому решать стохастическую задачу приходится с использованием двух моделей. Одна модель (стохастическая) является имитационной. Она моделирует стохастическую динамику рынка при известном на каждом шаге t объёме поставки $Q^Z(t - \tau)$. Другая модель (детерминированная) запускается на каждом текущем шаге t на τ шагов вперёд с начальными условиями, выражающими состояние стохастической модели в этот момент времени, для предсказания оптимальной детерминированной поставки товара $Q^Z(t - \tau)$, которая и принимается к реализации в имитационной модели (или на настоящем рынке).

При решении как стохастической, так и детерминированной задачи (с учётом её рестриктивности в силу соотношения (3)) следует выделить области, соответствующие дефициту товара на рынке (область 1, в которой $Q(t) < Q^D(t)$), затовариванию рынка (область 2, в которой $Q(t) > Q^D(t)$) и балансу спроса и предложения (область 3, область динамического равновесия, в которой $Q(t) = Q^D(t)$). Рассмотрим соотношения для стохастической модели (в детерминированной модели во всех формулах следует положить $\xi(t) = 0$).

1) В области товарного дефицита $Q(t) < Q^D(t)$, и в соответствии с соотношением (3) имеем $Q^S(t) = Q(t)$, так что

$$J(t) = Q(t)P(t) - Q(t)P_1 + Q^O(t)(P_1 - P_2) - \frac{R}{2}(P(t) - P(t-1))^2 \Rightarrow \sup_{P(t)|Q(t)} . \quad (7)$$

Это вогнутая квадратичная функция переменной $P(t)$, достигающая условного максимума при

$$P(t) = P(t-1) + \frac{Q(t)}{R} = P^{(1)}(t). \quad (8)$$

Как видим, $P^{(1)}(t)$ растет с ростом $Q(t)$ по линейному закону. Выражение (8) справедливо не при любом $Q(t)$, а лишь при $Q(t)$, удовлетворяющем условию $Q(t) < Q^D(t)$ принадлежности к области 1. Это условие с учетом (1) и (8) имеет вид

$$Q(t) < Q_m + \xi(t) - aP^{(1)}(t) = Q_m + \xi(t) - aP(t-1) - \frac{a}{R}Q(t),$$

откуда

$$Q(t) < \frac{R(Q_m + \xi(t) - aP(t-1))}{a + R} = Q^{(1)}(t). \quad (9)$$

Таким образом, в области 1 $P(t)$ линейно растёт с ростом $Q(t)$ от значения $P^{(1)}(t)|_{Q(t)=0} = P(t-1)$

до значения

$$P^{(1)}(t)|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)} = \frac{Q_m + \xi(t) + RP(t-1)}{a + R} = P_{\max}^{(1)}(t),$$

причем условие принадлежности $Q(t)$ к области 1 выражается неравенством (9), то есть $0 < Q(t) < Q^{(1)}(t)$. После подстановки $P(t) = P^{(1)}(t)$ в выражение (7) для $J(t)$ имеем:

$$J(t) = \frac{Q(t)^2}{2R} + (P(t-1) - P_1)Q(t) + Q^O(t)(P_1 - P_2) = J^{(1)}(t).$$

Дальнейшая оптимизация $J^{(1)}(t)$ по $Q(t)$ производится только в детерминированной модели, не содержащей в течение τ предыдущих шагов флуктуации спроса $\xi(t)$, и нужна для определения оптимального объёма поставки $Q^Z(t - \tau)$.

Как видим, $J^{(1)}(t)$ монотонно растет с ростом $Q(t)$ по линейно-квадратичному закону, достигая максимального значения на границе области при $Q(t) = Q^{(1)}(t)$:

$$J_{\max}^{(1)}(t) = J^{(1)}(t)|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)}.$$

Если остаток товара $Q^O(t)$ от продаж предыдущего интервала дискретного времени не превышает величину $Q^{(1)}(t)$, то дополнительный заказ и поставка товара на рынок в объеме $Q^Z(t - \tau) = Q^{(1)}(t) - Q^O(t)$ (в частности, $Q^Z(t - \tau) = 0$ при $Q^O(t) = Q^{(1)}(t)$) обеспечивает максимум прибыли. Иначе, при $Q^O(t) > Q^{(1)}(t)$, следует искать решение задачи оптимизации прибыли в областях 2 или 3.

2) **В области затоваривания рынка** $Q(t) > Q^D(t)$, и в соответствии с выражением (3) имеем $Q^S(t) = Q^D(t)$, так что с учетом (1):

$$J(t) = (Q_m + \xi(t) - aP(t))P(t) - Q(t)P_1 + Q^O(t)(P_1 - P_2) -$$

$$-\frac{R}{2}(P(t)-P(t-1))^2 \Rightarrow \sup_{P(t)|Q(t)} . \quad (10)$$

Это вогнутая квадратичная функция переменной $P(t)$ с точкой максимума

$$P(t) = \frac{Q_m + \xi(t) + RP(t-1)}{2a + R} = P^{(2)}(t). \quad (11)$$

Как видим, $P^{(2)}(t)$ не зависит от $Q(t)$ (остаётся постоянной при любом $Q(t)$ в этой области). Выражение (11) справедливо лишь при условии, что $Q(t) > Q^D(t)$, то есть при условии

$$Q(t) > Q_m + \xi(t) - aP^{(2)}(t) = \frac{(a+R)(Q_m + \xi(t)) - aRP(t-1)}{2a + R},$$

откуда

$$Q(t) > \frac{R(Q_m + \xi(t) - aP(t-1)) + aQ_m + \xi(t)}{2a + R} = Q^{(2)}(t). \quad (12)$$

Последнее неравенство определяет условие принадлежности $Q(t)$ к области 2. Нетрудно показать, что $Q^{(2)}(t) > Q^{(1)}(t)$. В области 2 $Q(t) > Q^{(2)}(t)$. После подстановки в $J(t)$ $P(t) = P^{(2)}(t)$, не зависящего от $Q(t)$, имеем

$$J(t) = (Q_m + \xi(t) - aP^{(2)}(t))P^{(2)}(t) - Q(t)P_1 + Q^o(t)(P_1 - P_2) - \frac{R}{2}(P^{(2)}(t) - P(t-1))^2 = J^{(2)}(t).$$

Дальнейшая оптимизация $J^{(2)}(t)$ по $Q(t)$ производится только в детерминированной модели, не содержащей в течение τ предыдущих шагов флуктуации спроса $\xi(t)$, и нужна для определения оптимального объёма поставки $Q^Z(t - \tau)$.

Как видим, $J^{(2)}(t)$ монотонно убывает с ростом $Q(t)$ по линейному закону, так что достигает в этой области наибольшего значения при $Q(t) = Q^{(2)}(t)$:

$$J_{\max}^{(2)}(t) = J^{(2)}(t)|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)}.$$

Если $Q^o(t) < Q^{(2)}(t)$, то дополнительный заказ и поставка товара на рынок в объёме $Q^Z(t - \tau) = Q^{(2)}(t) - Q^o(t)$ обеспечивают получение этого максимума прибыли. Если же $Q^o(t) > Q^{(2)}(t)$, то $Q^Z(t - \tau) = 0$, и достигается лишь значение прибыли $J^{(2)}(t)|_{Q(t)=Q^o(t)} < J_{\max}^{(2)}(t)$.

3) В области баланса спроса и предложения (то есть в области динамического равновесия рынка) $Q(t) = Q^D(t)$, и в соответствии с выражением (3) имеем, как и в области 2, объём продаж, равный спросу, то есть $Q^S(t) = Q^D(t)$, и прибыль $J(t)$ в виде (10). Но $Q(t) = Q_m + \xi(t) - aP(t)$, откуда

$$P(t) = \frac{Q_m + \xi(t) - Q(t)}{a} = P^{(3)}(t). \quad (13)$$

Границами области 3 по $Q(t)$ являются точки $Q^{(1)}(t)$ и $Q^{(2)}(t)$:

$$Q^{(1)}(t) \leq Q(t) \leq Q^{(2)}(t).$$

Как видим из (13), в этой области $P^{(3)}(t)$ линейно убывает с ростом $Q(t)$ от

$$P^{(3)}(t)|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)} = \frac{Q_m + RP(t-1)}{a + R} = P_{\max}^{(1)}(t)$$

до

$$P^{(3)}(t)|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)} = \frac{Q_m + \xi(t) + RP(t-1)}{2a + R} = P^{(2)}(t).$$

После подстановки $P(t) = P^{(3)}(t)$ в $J(t)$ для этой области, имеем:

$$J(t) = Q(t) \frac{Q_m + \xi(t) - Q(t)}{a} - Q(t)P_1 + Q^o(t)(P_1 - P_2) - \frac{R}{2} \left(\frac{Q_m + \xi(t) - Q(t)}{a} - P(t-1) \right)^2 = J^{(3)}(t).$$

Дальнейшая оптимизация $J^{(3)}(t)$ по $Q(t)$ производится только в детерминированной модели, не содержащей в течение τ предыдущих шагов флуктуации спроса $\xi(t)$, и нужна для определения оптимального объёма поставки $Q^Z(t - \tau)$. $J^{(3)}(t)$ – вогнутая линейно-квадратичная функция переменной $Q(t)$. В точке

$$Q(t) = \frac{R(Q_m + \xi(t) - aP(t-1)) + a(Q_m + \xi(t) - aP_1)}{2a + R} = Q^{(3)}(t)$$

прибыль $J^{(3)}(t)$ достигает максимального значения. Нетрудно показать [2], что $Q^{(1)}(t) < Q^{(3)}(t) < Q^{(2)}(t)$, то есть точка максимума $Q^{(3)}(t)$ лежит в области 3. Максимальное значение прибыли в области 3 (при $Q^o(t) < Q^{(3)}(t)$) равно:

$$J_{\max}^{(3)}(t) = J^{(3)}(t)|_{Q(t)=Q^{(3)}(t)}.$$

Это значение является и глобально максимальным, потенциально возможным при $Q^o(t) \leq Q^{(3)}(t)$. Если же $Q^{(3)}(t) < Q^o(t) \leq Q^{(2)}(t)$, то глобально максимальное значение прибыли не может быть достигнуто, и достигается только условно-максимальное значение (при фиксированном $Q^o(t)$) внутри области 3, лежащее между $J_{\max}^{(3)}(t)$ и $J^{(2)}(t)$.

3. Пример моделирования стохастической динамики рынка

В качестве примера приведём результат моделирования ситуации, когда сначала рынок находится в состоянии равновесия, а в некоторый момент времени $t = 0$ выводится из равновесия (цена на товар резко увеличивается). Расчёты проводились при $R = 50$, $Q_m = 4$, $a = 0.4$, $T = 300$, $P_0 = 7$, $P_1 = 3$, $P_2 = 0.1$, $P_{\min} = P_1 + P_2$, $P_{\max} = Q_m / a$, $P^* = 6.5$, $Q_0 = 0$, $\tau = 10$, $\sigma = 0.01$. Стохастическая динамика цены и заказа изображена на рис. 1–2.

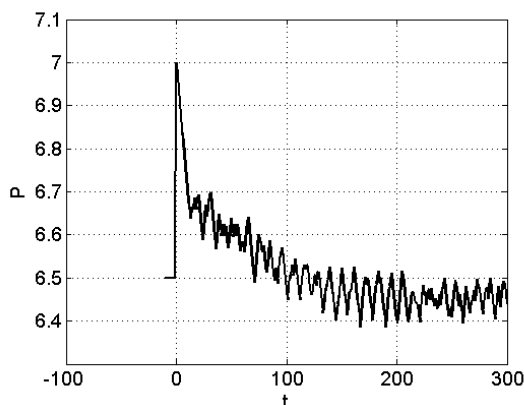


Рис. 1. Динамика цены товара

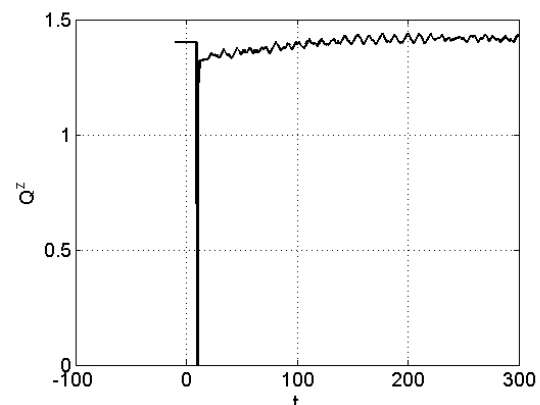


Рис. 2. Стратегия заказа товара

Литература

1. Поддубный В.В., Романович О.В. Рынок как самоуправляемая инерционная динамическая система с запаздыванием при сбалансированной стратегии поставок товара // Вестник ТГУ. УВТИ. 2009. № 4 (9). С. 5–16.
2. Поддубный В.В., Романович О.В. Рынок с фиксированной линией спроса как оптимальная система // Труды X Международной ФАМЭТ 2011 конференции / Под ред. О.Ю. Воробьева. Красноярск: КГТЭИ, СФУ, 2011. С. 318–323.

ДИСКРЕТНОЕ ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ И НЕИЗВЕСТНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

М. Ю. Приступа, В. И. Смагин

Томский государственный университет

Для решения задачи управления с запаздыванием по управлению используется метод, который позволяет осуществить синтез управлений без расширения пространства состояний [1]. В настоящей работе рассмотрен объект, в который включено аддитивное неизвестное возмущение с постоянной составляющей:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_{t-h} + Ir + w_t, \quad x_{t=0} = x_0, \quad (1)$$

$$\psi_t = Hx_t + v_t, \quad (2)$$

$$y_t = Gx_t, \quad (3)$$

где $x_t \in R^n$ – состояние объекта, $u_t \in R^m$ – управление, $y_t \in R^p$ – выход, $\psi_t \in R^l$ – наблюдения, $r \in R^s$ – неизвестная постоянная составляющая, h – величина запаздывания, A, B, I, H, D – матрицы соответствующих размерностей.

Предполагается, что случайные возмущения w_t и шумы измерения v_t не коррелированы между собой и подчиняются гауссовскому распределению с нулевым средним и с соответствующими ковариациями $M\{w_t w_k^T\} = W\delta_{t,k}$, $M\{v_t v_k^T\} = V\delta_{t,k}$ (здесь $\delta_{t,k}$ – символ Кронекера).

Считается, что объект функционирует в условиях ограничений на векторы состояния и управления, заданных в виде

$$a_1 \leq S_1 x_t \leq a_2, \quad \varphi_1(x_t) \leq S_2 u_t \leq \varphi_2(x_t), \quad (4)$$

где S_1 и S_2 – структурные матрицы, состоящие из нулей и единиц, определяющие компоненты векторов x_t и u_t , на которые накладываются ограничения; $a_1, a_2, \varphi_1(x_t)$ и $\varphi_2(x_t)$ – заданные постоянные векторы и вектор-функции.

Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям ψ_t определить стратегию управления, при которой вектор выхода системы y_t будет близок к заданному вектору $\bar{y}_t$ с учетом ограничений (4).

Оценки неизвестного вектора r определяются с помощью фильтра Калмана.

$$\begin{aligned}\hat{r}_{t+1} &= \hat{r}_t + \bar{K}_t(\psi_{t+1} - H A \hat{x}_{t|t} - H B u_{t-h} - H I \hat{r}_t), \quad \hat{r}_0 = \bar{r}_0, \\ \bar{K}_t &= \bar{P}_t H^T (H \bar{P}_t H^T + H W H^T + V)^{-1}, \\ \bar{P}_{t+1} &= (E_n - \bar{K}_t H) \bar{P}_t, \quad \bar{P}_0 = \bar{P}_{r_0},\end{aligned}\tag{5}$$

где E_n – единичная матрица размера $n \times n$, $\bar{P}_{r_0}$ – начальное значение ковариационной матрицы.

Прогнозирование поведения объекта и вектора выхода системы осуществляется с использованием экстраполятора Калмана. Пусть $\hat{x}_{i|j}$ и $\hat{y}_{i|j}$ – оценки состояния и вектора выхода в момент времени i , дающие информацию с j -го момента времени ($j \leq i$). Тогда

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t+1|t} &= A \hat{x}_{t|t-1} + B u_{t-h} + I \hat{r}_t + K_t(\psi_t - H \hat{x}_{t|t-1}), \quad \hat{x}_{1|0} = x_0, \\ \hat{y}_{t+1|t} &= G \hat{x}_{t+1|t}, \\ K_t &= A P_t H^T (H P_t H^T + V)^{-1}, \\ P_{t+1} &= W + A P_t A^T - A P_t H^T (H P_t H^T + V)^{-1} H P_t A^T, \quad P_0 = P_{x_0}.\end{aligned}\tag{6}$$

Модель прогнозирующего управления требует, чтобы оценки состояния были такими, чтобы можно было делать прогнозы на моменты времени $t+1, t+2, \dots, t+N$, основываясь на информации, имеющейся в момент времени t . Из уравнений (5)–(6) получим $\hat{x}_{t+1|t}$, а также оптимальные оценки для моментов $t+2, \dots, t+N$:

$$\hat{x}_{t+1|t}, \hat{x}_{t+i|t} = A^{i-1} \hat{x}_{t+1|t} + \sum_{k=1}^{i-1} A^{i-k-1} B u_{t-h+k|t} + \sum_{k=1}^{i-1} A^{i-k-1} I \hat{r}_t, \quad i = \overline{2, N}. \tag{7}$$

$$\hat{y}_{t+1|t}, \hat{y}_{t+i|t} = G A^{i-1} \hat{x}_{t+1|t} + G \sum_{k=1}^{i-1} A^{i-k-1} B u_{t-h+k|t} + G \sum_{k=1}^{i-1} A^{i-k-1} I \hat{r}_t, \quad i = \overline{2, N}. \tag{8}$$

В (7), (8) $u_{t+i|t}$ – управление, используемое для прогнозирования.

Уравнения для прогнозируемых векторов состояния и выхода представляются в векторно-матричной форме. Для этого вводятся следующие векторы и матрицы:

$$\begin{aligned}\hat{X}_t &= \begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1|t} \\ \vdots \\ \hat{x}_{t+N|t} \end{bmatrix}, \quad \hat{Y}_t = \begin{bmatrix} \hat{y}_{t+1|t} \\ \vdots \\ \hat{y}_{t+N|t} \end{bmatrix}, \quad U_{t-h} = \begin{bmatrix} u_{t-h+1|t} \\ \vdots \\ u_{t-h+N|t} \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} E_n \\ A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} G \\ GA \\ GA^2 \\ \vdots \\ GA^{N-1} \end{bmatrix}, \\ P &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A^{N-2}B & A^{N-3}B & \dots & B & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ GB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ GAB & GB & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ GA^{N-2}B & GA^{N-3}B & \dots & GB & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ AI \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N-1} A^{N-k-1} I \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 \\ GI \\ GAI \\ \vdots \\ G \sum_{k=1}^{N-1} A^{N-k-1} I \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Прогнозирующая модель (9)–(10) может быть представлена в виде следующей системы:

$$\begin{aligned} \hat{X}_t &= \Psi \hat{x}_{t+1|t} + P U_{t-h} + S \hat{r}_t, \\ \hat{Y}_t &= \Lambda \hat{x}_{t+1|t} + \Phi U_{t-h} + Q \hat{r}_t. \end{aligned} \quad (10)$$

Схема оптимизации на основе минимизации квадратичного критерия подробно изложена в [1]. В качестве целевой функции выбрана функция вида

$$J(t) = \frac{1}{2} U_{t-h}^T F U_{t-h} + U_{t-h}^T f + c, \quad (11)$$

где c – слагаемое, не зависящее от управления,

$$F = \Phi^T \bar{C} \Phi + \bar{D}, \quad f = \Gamma \begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1|t} \\ \hat{r}_t \\ \bar{Y}_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D u_{t-h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = [\Phi^T \bar{C} \Lambda \quad \Phi^T \bar{C} Q \quad -\Phi^T \bar{C}],$$

$\bar{C}$ и $\bar{D}$ – диагональные матрицы, составленные из весовых коэффициентов C и D :

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & C & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & C \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} 2D & -D & 0 & \vdots & 0 \\ -D & 2D & -D & \vdots & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & -D & 2D & -D \\ 0 & \dots & 0 & -D & 2D \end{bmatrix}.$$

Сформулированная задача квадратичного программирования с ограничениями (4) решается численно, например, используя для оптимизации целевой функции (11) процедуру quadprog системы Matlab.

Предложенный метод может быть также использован для задач, в которых неизвестная аддитивная составляющая является медленно меняющейся функцией.

В качестве примера рассмотрен вариант экономической системы, предназначенной для производства, хранения и поставок товаров потребителям [2]:

$$\begin{aligned} q_{t+1} &= \bar{A} q_t + b + \varphi_{t-h_1} + \xi_t, \quad q_0 = \bar{q}_0, \\ z_{t+1} &= z_t + \bar{B} \omega_{t-h_2} + d - \varphi_{t-h_1} + \zeta_t, \quad z_0 = \bar{z}_0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $q_t \in R^s$, $q_{i,t}$ – количество товара i -го типа у потребителя в момент времени t ($t = \overline{1, T}$, $i = \overline{1, s}$); $z_{i,t}$ – количество товаров i -го типа на складе производителя; $\omega_{i,t}$ – объем производства товаров i -го типа; $\varphi_{i,t}$ – объем поставок товаров i -го типа; b, d – неизвестные постоянные составляющие возмущений; ξ_t, ζ_t – векторные гауссовские случайные последовательности ($M\{\xi_t\} = 0$, $M\{\zeta_t\} = 0$, $M\{\xi_t \xi_k^T\} = \Sigma \delta_{t,k}$, $M\{\zeta_t \zeta_k^T\} = \Xi \delta_{t,k}$, $M\{\xi_t \zeta_k^T\} = 0$); $\bar{A}$ и $\bar{B}$ – матрицы, определяющие динамику производства и потребления.

В каждый момент времени t должны выполняться ограничения:

$$z_{\min} \leq z_t \leq z_{\max}, 0 \leq \omega_{t-h_2} \leq \omega_{\max}, 0 \leq \varphi_{t-h_1} \leq z_t.$$

Переменные ω_t и φ_t рассматриваются как управляющие воздействия. Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям определить стратегию управления производством, хранением и поставками товара, обеспечивающую количество товаров у потребителя q_t , близкое к заданному вектору $\bar{q}$, при этом должны учитываться ограничения.

Модель системы (12) преобразуется к виду модели (1). Оптимизационная задача решается на каждой итерации для спрогнозированных значений вектора состояния.

Моделирование проведено на следующих исходных данных:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0 \\ -0,25 & 0,9 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}, z_{\min} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}, z_{\max} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1,5 \end{bmatrix},$$

$$\omega_{\max} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,7 \end{bmatrix}, z_0 = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{bmatrix}, q_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \omega_0 = \omega_1 = \varphi_0 = \varphi_1 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix},$$

$$b = [0,05 \quad 0,03]^T, d = [0,04 \quad 0,02]^T, \hat{b}_0 = \hat{d}_0 = [0 \quad 0]^T, h_1 = h_2 = 1, N = 10,$$

$$P_{x_0} = \bar{P}_{r_0} = H = E_4, W = 0, V = \text{diag}\{0,0005; 0,0005; 0,0005; 0,0005\}.$$

Результаты численного моделирования приведены в виде графиков переходных процессов на рис. 1–4.

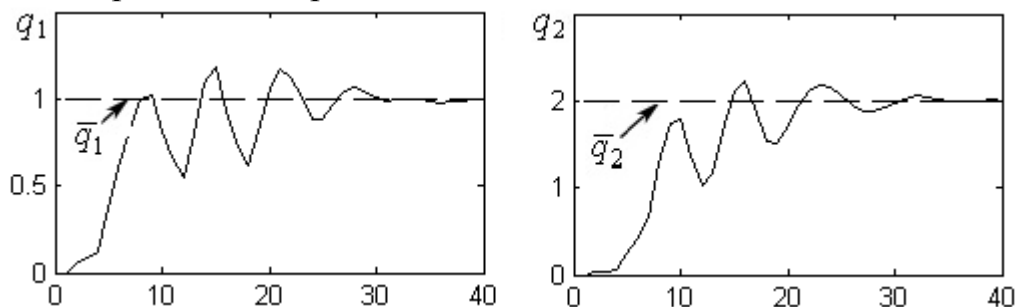


Рис. 1. Количество товара у потребителя

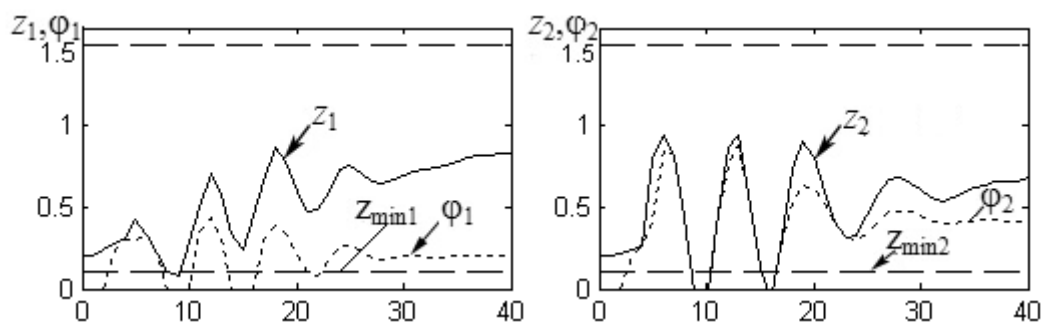


Рис. 2. Количество товара на складе производителя и объем поставок

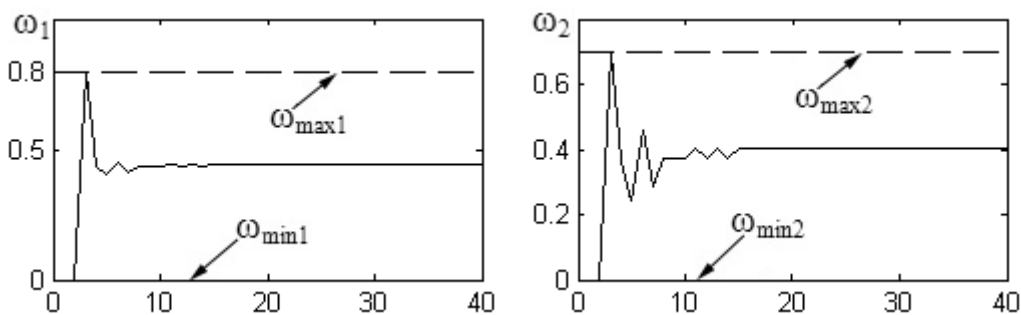


Рис. 3. Объем производства

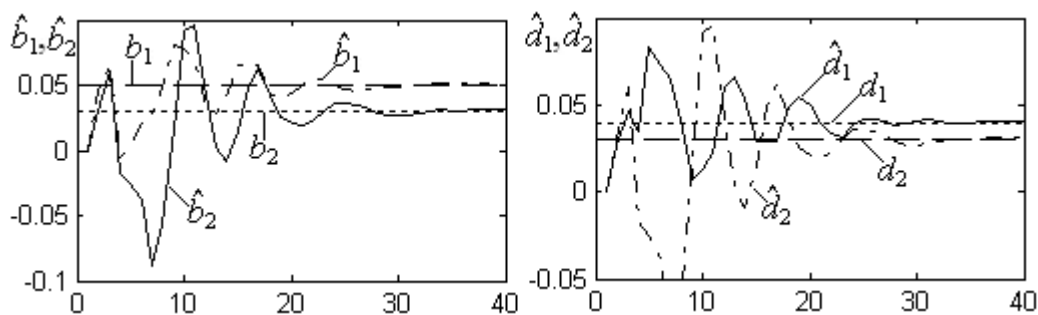


Рис. 4. Возмущения и их оценки

Литература

1. Киселева М. Ю., Смагин В. И. Управление с прогнозирующей моделью с учетом запаздывания по управлению // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. №2 (11). С. 5–12.
2. Перепелкин Е. А. Прогнозирующее управление экономической системой производства, хранения и поставок товаров потребителям // Экономика и математические методы. 2004. Т. 40. № 1. С. 125–128.

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

А.М. Семахин

Курганский государственный университет

Современная организация представляет собой сложную динамическую систему. Совершенствование информационной системы обеспечива-

ется использованием современных технических средств, программного обеспечения и математического моделирования [1].

Разработаем математическую модель информационной системы и проведем ее анализ.

Математическая модель формулируется следующим образом: из числа фирм, предоставляющих услуги спутникового Internet на территории Российской Федерации, требуется выбрать провайдера спутникового Internet с максимальной величиной чистого приведенного эффекта (NPV) и удовлетворяющего финансовым ограничениям.

Математическая модель включает два этапа:

1. Методом экспертных оценок выбираются фирмы, предоставляющие спутниковый Internet на территории Российской Федерации.

2. Методами математического программирования выбирается оптимальный вариант из числа спутниковых провайдеров, выбранных на первом этапе.

Пусть $i = \overline{1, n}$ – число вариантов проектов спутникового Internet; $q = \overline{1, t}$ – число экспертов, оценивающих варианты проектов спутникового Internet; $k = \overline{1, p}$ – число факторов; β_{qk} – вес, присвоенный q экспертом k фактору, Z_{qk}^i – оценка, данная q экспертом k фактору, тогда усредненная оценка i -го варианта проекта спутникового Internet определяется по формуле

$$\overline{Z}_i = \frac{1}{q} \sum_{q=1}^t \sum_{k=1}^p \beta_{qk} Z_{qk}^i. \quad (1)$$

На втором этапе выбирается оптимальный проект из числа проектов, определенных на первом этапе. Формулируется задача линейного программирования выбора оптимального проекта из инвестиционного портфеля.

Математическая модель выбора оптимального инвестиционного проекта спутникового Internet имеет вид

$$\overline{Z}_i = \frac{1}{q} \sum_{q=1}^t \sum_{k=1}^p \beta_{qk} Z_{qk}^i,$$

$$\max \leftarrow Z = \sum_{i=1}^n A_i X_i = A_1 X_1 + \dots + A_n X_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} B_1^0 X_1 + B_2^0 X_2 + \dots + B_n^0 X_n \leq I^0, \\ B_1^1 X_1 + B_2^1 X_2 + \dots + B_n^1 X_n \leq I^1, \\ \vdots \\ B_1^m X_1 + B_2^m X_2 + \dots + B_n^m X_n \leq I^m, \\ X \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

где A_i – целевой показатель, ед. изм.; B_i^j – инвестиционные затраты i -го проекта в j -м периоде времени, млн руб.; I_j – имеющиеся средства финансирования в j -м периоде времени, млн руб.; X_i – доля финансирования инвестиционного проекта; $i = \overline{1, n}$ – номер инвестиционного проекта; $j = \overline{1, m}$ – номер периода времени, год.

Осуществим выбор оптимального проекта спутникового Internet для территориального фонда обязательного медицинского страхования Курганской области (ТФ ОМС) и проведем её анализ.

В результате первого этапа в портфель инвестиций включены ЗАО «НТВ-Плюс» (199 баллов), Europe Online Networks (EOL) (177 баллов), Astra Networks (157 баллов), Satpro (152 балла) и Network Service (137 баллов).

Выполним второй этап математической модели.

Пусть X_1 – доля финансирования проекта «НТВ-Плюс»; X_2 – доля финансирования проекта Europe On Line; X_3 – доля финансирования проекта Astra Network; X_4 – доля финансирования проекта Satpro; X_5 – доля финансирования проекта Network Service.

Математическая модель имеет вид

$$\max \leftarrow Z = 1,527270X_1 + 0,741239X_2 + 1,374394X_3 + \\ + 0,145110X_4 + 0,530312X_5$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5,4X_1 + 3,2X_2 + 2,931X_3 + 6,286X_4 + 5,9X_5 \leq 6,5, \\ 2,006437X_1 + 1,5X_2 + 3,000547X_3 + 3,000575X_4 + 3,2X_5 \leq 3,0, \\ 2,5X_2 + 2,0X_3 + 1,6X_5 \leq 3,0, \\ 0,881832X_2 + 1,186X_5 \leq 1,5, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Задача линейного программирования решается методом Гаусса–Жордана [2]. Оптимальное решение задачи приведено в табл. 1.

Проведем анализ математической модели. Экономический смысл добавочных дополнительных переменных S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 – величина неиспользованных средств финансирования. Значения переменных $S_1 = 0$ и $S_2 = 0$, следовательно, полностью использованы средства финансирования в периоды $f = 0$ и $f = 1$. Значения переменных $S_3 = 2,3881$ и $S_4 = 1,5$, следовательно, средства финансирования в периоды $f = 3$ и $f = 4$ недоиспользованы на 2,3881 и 1,5 млн руб.

Таблица 1

Оптимальное решение оптимизационной задачи

Переменная	Величина переменных	Двойственная оценка	Экстремум целевой функции NPV, млн руб.
X_1	1,0376	0,0000	2,00526
X_2	0,0000	0,2526	
X_3	0,3060	0,0000	
X_4	0,0000	1,8225	
X_5	0,0000	1,4259	
S_1	0,0000	0,1768	
S_2	0,0000	0,2853	
S_3	2,3881	0,0000	
S_4	1,5000	0,0000	

Двойственная оценка искомым переменных $X_i, i = \overline{1, n}$ показывает наличие/отсутствие финансирования i проекта. Если двойственная оценка равна 0, то финансирование проекта производится. Если двойственная оценка переменной X_i строго положительна, то финансирование не осуществляется. Двойственные оценки X_1 и X_3 имеют нулевые значения, проекты НТВ-Плюс и Astra Network финансируются. Двойственные оценки X_2 , X_4 и X_5 равны 0,2526, 1,8225 и 1,4259. Проекты Europe On Line, Satpro и Network Service не финансируются.

Двойственная оценка переменной $S_j, j = \overline{1, m}$ определяет дефицитность ресурса. Она показывает насколько увеличится NPV при увеличении j ресурса на одну единицу. Двойственные оценки переменных S_1 и S_2 равны 0,1768 и 0,2853. Это означает что при увеличении выделенных средств финансирования на 1 млн руб. в периоды $f = 0$ и $f = 1$ NPV увеличится на 0,1768 и 0,2853 млн руб. В периоды $f = 2$ и $f = 3$ увеличение средств финансирования не рекомендуется (двойственные оценки переменных S_3 и S_4 имеют нулевые значения).

Анализ устойчивости оптимального решения к изменению коэффициентов целевой функции (табл. 2)

Нижняя граница интервала устойчивости, равная $-\infty$, соответствует нулевому значению искомой переменной. Если значение коэффициента целевой функции изменяется в пределах интервала устойчивости от нижней до верхней границы, то изменяется значение целевой функции. В случае выхода за границу интервала устойчивости меняются величина целевой функции и значения искомым переменных [3].

Таблица 2

Коэффициенты целевой функции математической модели

№ п/п	Переменная $X_i, i = \overline{1, n}$	Минимальное значение ко- эффициента	Исходное значение ко- эффициента	Максималь- ное значение коэффициен- та
1	X_1	1,0265	1,5273	2,5321
2	X_2	$-\infty$	0,7412	0,9938
3	X_3	0,8290	1,3744	2,2840
4	X_4	$-\infty$	0,1451	1,9676
5	X_5	$-\infty$	0,5303	1,9562

Если переменная $X_i, i = \overline{1, n}$ принимает ненулевое значение в оптимальном плане ($X_1 = 1,0376, X_2 = 0,3060$), то коэффициент при этой переменной (инвестиционные затраты i проекта, $i = \overline{1, n}, j$ периода времени $j = \overline{1, m}$), изменяющийся в пределах интервала устойчивости, приведет к изменению целевой функции, а распределение долей финансирования сохранится. Если величина коэффициента при переменной X_i выходит за верхнюю границу интервала устойчивости, то доля финансирования j проекта увеличится за счет долей финансирования других проектов. В противном случае доля финансирования j проекта сократится, а увеличатся доли финансирования других проектов.

Таблица 3

Значения правых частей системы ограничений

№ п/п	Период времени f	Минимальное значение пра- вой части ог- раничений	Исходное значение пра- вой части ог- раничений	Максималь- ное значение правой части ограничений
1	0	2,9305	6,5	8,0740
2	1	2,4152	3,0	5,2824
3	2	0,6119	3,0	$+\infty$
4	3	0,0	1,5	$+\infty$

Если переменная X_i принимает нулевое значение, то в случае изменения коэффициента переменной внутри интервала устойчивости в решении задачи ничего не изменится. Если величина коэффициента выйдет за верхнюю границу интервала устойчивости, то данный проект необходимо начать финансировать, сокращая финансирование остальных проектов [3]. Например, инвестиционные проекты Europe On Line, Satpro и Network Service в оптимальном решении имеют нулевые значения искомым переменных (нет финансирования). Если NPV проекта Satpro превысит 1,9676

млн руб., то проект начнет финансироваться. Аналогично для проектов Europe On Line и Network Service.

Анализ устойчивости оптимального решения к изменению правых частей ограничений (табл. 3)

В оптимальном плане средства финансирования недоиспользованы в периодах времени $f = 2$ и $f = 3$, т. к. верхняя граница интервала устойчивости $+\infty$. Если имеющиеся средства финансирования в избытке, то изменение в интервале устойчивости не меняет перечня финансируемых проектов, долей финансирования и величины NPV. При выходе за нижнюю границу интервала устойчивости меняются перечень финансируемых проектов, доли финансирования и величина NPV. Например, если средства финансирования проектов в периоде времени $f = 2$ будут меньше 0,6119 млн руб., то изменятся перечень финансируемых проектов, доли финансирования и величина NPV. Если средства финансирования израсходованы полностью, то его изменение в интервале устойчивости не меняет перечня финансируемых проектов, но меняет долю финансирования и величину NPV. При выходе за границу интервала устойчивости меняются перечень финансируемых проектов, доли финансирования и величины NPV. Например, если средства финансирования в периоде времени $f = 0$ будут изменяться от 2,9305 до 8,0740 млн руб., то финансирование проектов не изменится (НТВ Плюс и Astra Network со значениями $X_1 = 1,0376$ и $X_3 = 0,3060$), но изменятся доли финансирования и величина NPV. Если средства финансирования выходят за границы интервала, то изменятся перечень финансируемых проектов, доли финансирования и величина NPV.

Результаты проведенных исследований позволили сделать следующие выводы.

1. Разработана математическая модель оптимизации информационных систем, позволяющая сократить затраты и сроки проектирования информационных систем и повысить обоснованность принимаемых решений.

2. Проведен анализ переменных и математической модели на устойчивость коэффициентов целевой функции и значений правых частей ограничений.

Литература

1. Перегудов Ф.И. Информационные системы для руководителей. М.: Финансы и статистика, 1989. 176 с.
2. Таха Х.А. Введение в исследование операций. 7-е изд. / Пер. с англ. М.: Изд. дом «Вильямс», 2005. 912 с.
3. Кочкина Е.М., Радковская Е.В. Методы исследования и моделирования национальной экономики: учеб. пособие. Екатеринбург, Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2001. 93 с.

ДВОЙСТВЕННАЯ МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

А.М. Семахин

Курганский государственный университет

Теория двойственности задач линейного программирования имеет важное значение в теоретическом плане и представляет большой практический интерес. На основе теории двойственности разработан алгоритм решения задач линейного программирования – двойственный симплекс-метод и эффективные методы анализа моделей [1].

Разработаем математическую модель линейного программирования и осуществим симметричное структурное преобразование условий прямой (исходной) задачи в двойственную (обратную) задачу. Определим оптимальное решение и проведем анализ двойственной модели.

Прямая математическая модель формулируется следующим образом: из числа фирм, предоставляющих услуги спутникового Internet на территории Российской Федерации, предварительно отобранных по усредненным экспертным оценкам, требуется выбрать провайдера спутникового Internet с максимальной величиной чистого приведенного эффекта (NPV) и удовлетворяющего финансовым ограничениям.

Математическая модель выбора оптимального инвестиционного проекта спутникового Internet в общем виде представляется следующим образом:

$$\max \leftarrow Z = \sum_{i=1}^n A_i X_i = A_1 X_1 + \dots + A_n X_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} B_1^1 X_1 + B_2^1 X_2 + \dots + B_n^1 X_n \leq I^1, \\ B_1^2 X_1 + B_2^2 X_2 + \dots + B_n^2 X_n \leq I^2, \\ \vdots \\ B_1^m X_1 + B_2^m X_2 + \dots + B_n^m X_n \leq I^m, \\ X_i \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

где A_i – чистая текущая стоимость денежных потоков, млн руб.; B_i^j – инвестиционные затраты i -го проекта в j -м периоде времени, млн руб.; I^j – имеющиеся средства финансирования в j -м периоде времени, млн руб.; X_i – доля финансирования инвестиционного проекта; $i = \overline{1, n}$ – номер инвестиционного проекта; $j = \overline{1, m}$ – номер периода времени, год.

После расчета показателей математическая модель выбора оптимального инвестиционного проекта спутникового Internet имеет вид

$$\begin{aligned} \max \leftarrow Z = & 1,527270X_1 + 0,741239X_2 + 1,374394X_3 + \\ & + 0,145110X_4 + 0,530312X_5 \end{aligned}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5,4X_1 + 3,2X_2 + 2,931X_3 + 6,286X_4 + 5,9X_5 \leq 6,5, \\ 2,006437X_1 + 1,5X_2 + 3,000547X_3 + 3,000575X_4 + 3,2X_5 \leq 3,0, \\ 2,5X_2 + 2,0X_3 + 1,6X_5 \leq 3,0, \\ 0,881832X_2 + 1,186X_5 \leq 1,5, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Двойственная задача формулируется следующим образом: определить оценки средств финансирования проектов спутникового Internet по периодам времени финансирования, чтобы минимизировать оценку денежных средств финансирования по всем периодам времени финансирования с выполнением условия, заключающимся в том, что оценки инвестиционных затрат по каждому проекту спутникового Internet по всем периодам времени финансирования были бы не меньше величины чистой текущей стоимости денежных потоков.

Двойственная модель разрабатывается по правилам:

1. Каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи.
2. Каждой переменной прямой задачи соответствует ограничение двойственной задачи.
3. Матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы коэффициентов системы ограничений прямой задачи транспонированием.
4. Система ограничений двойственной задачи записывается в виде неравенств противоположного смысла неравенствам системы ограничений прямой задачи.
5. Свободными членами системы ограничений двойственной задачи являются коэффициенты функции цели прямой задачи.
6. Двойственная задача решается на минимум, если целевая функция прямой задачи задается на максимум, и наоборот.
7. Коэффициентами целевой функции двойственной задачи служат свободные члены системы ограничений прямой задачи.
8. Если переменная прямой задачи $X_i \geq 0$, то i условие системы ограничений двойственной задачи является неравенством, если X_i – любое число, то i условие двойственной задачи представляет собой уравнение.
9. Если j соотношение прямой задачи является неравенством, то соответствующая оценка j ресурса – переменная $Y_j \geq 0$, если j соотношение представляет собой уравнение, то переменная двойственной задачи Y_j – любое число [1].

Проведем симметричное структурное преобразование прямой задачи в обратную в соответствии с правилами. В общем виде двойственная модель запишется следующим образом:

$$\min \leftarrow W = \sum_{j=1}^m I^j Y_j = I^1 Y_1 + I^2 Y_2 + \dots + I^m Y_m$$

при ограничениях

$$\begin{cases} B_1^1 Y_1 + B_1^2 Y_2 + \dots + B_1^m Y_m \geq A_1, \\ B_2^1 Y_1 + B_2^2 Y_2 + \dots + B_2^m Y_m \geq A_2, \\ \dots \\ B_n^1 Y_1 + B_n^2 Y_2 + \dots + B_n^m Y_m \geq A_n, \\ Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, \dots, Y_m \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

где A_i – чистая текущая стоимость денежных потоков, млн руб.; B_i^j – инвестиционные затраты i -го проекта в j -м периоде времени, млн руб.; I^j – имеющиеся средства финансирования в j -м периоде времени, млн руб.; Y_j – оценка денежных средств финансирования в j период времени; $i = \overline{1, n}$ – номер инвестиционного проекта; $j = \overline{1, m}$ – номер периода времени, год.

Двойственная математическая модель с численными показателями коэффициентов имеет вид

$$\min \leftarrow W = 6,5Y_1 + 3,0Y_2 + 3,0Y_3 + 1,5Y_4$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5,4Y_1 + 2,006437Y_2 + 0,0Y_3 + 0,0Y_4 \geq 1,527270, \\ 3,2Y_1 + 1,5Y_2 + 2,5Y_3 + 0,881832Y_4 \geq 0,741239, \\ 2,931Y_1 + 3,000547Y_2 + 2,0Y_3 + 0,0Y_4 \geq 1,374394, \\ 6,286Y_1 + 3,000575Y_2 + 0,0Y_3 + 0,0Y_4 \geq 0,145110, \\ 5,9Y_1 + 3,2Y_2 + 1,6Y_3 + 1,186Y_4 \geq 0,53031, \\ Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, Y_3 \geq 0, Y_4 \geq 0, Y_5 \geq 0. \end{cases}$$

Оптимальное решение двойственной задачи представлено в табл. 1.

Таблица 1

Оптимальное решение двойственной задачи

Переменная	Величина переменных	Двойственная оценка	Экстремум целевой функции
Y_1	0,1768	6,0000	2,00526
Y_2	0,2853	0,0000	
Y_3	0,0000	2,3881	
Y_4	0,0000	1,5000	
S_1	0,0000	1,0376	
S_2	0,2526	0,0000	
S_3	0,0000	0,3060	
S_4	1,8225	0,0000	
S_5	1,4259	0,0000	

Таблица 2

Коэффициенты целевой функции двойственной модели

№ п/п	Переменная $Y_j, j = \overline{1, m}$	Минимальное значение коэффициента	Исходное значение коэффициента	Максимальное значение коэффициента
1	Y_1	2,9305	6,5000	8,0740
2	Y_2	2,4152	3,0000	5,2824
3	Y_3	0,6119	3,0000	$+\infty$
4	Y_4	0,0000	1,5000	$+\infty$

Таблица 3

Значения правых частей системы ограничений двойственной модели

№ п/п	Свободный член правой части ограничений	Минимальное значение правой части ограничений	Исходное значение правой части ограничений	Максимальное значение правой части ограничений
1	A_1	1,0265	1,5273	2,5321
2	A_2	$-\infty$	0,7412	0,9938
3	A_3	0,8290	1,3744	2,2840
4	A_4	$-\infty$	0,1451	1,9676
5	A_5	$-\infty$	0,5303	1,9562

В табл. 2 представлены нижние и верхние границы интервалов устойчивости оптимального решения к изменению коэффициентов целевой функции.

В табл. 3 приведены нижние и верхние границы интервалов устойчивости оптимального решения к изменению правых частей ограничений.

Результаты проведенных исследований позволили сделать следующие выводы:

1. Оптимальное решение прямой задачи выбора проекта спутникового Internet определяет перечень финансируемых проектов и доли финансирования.

2. Решение двойственной задачи определяет оптимальную систему оценок ресурсов, используемых для реализации проектов.

Литература

1. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учеб. М.: Финансы и статистика, 2001. 544 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ В КОМПЛЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ

А.М. Семахин

Курганский государственный университет

В случае дефицитности ресурсов математическая модель имеет недопустимое решение и система ограничений несовместна. Для устранения проблемы формулируют задачу в комплектной постановке. В математическую модель добавляют новую переменную [1].

Математическая модель выбора проекта спутникового Internet корпоративной информационной системы имеет вид

$$\max \leftarrow Z = \sum_{i=1}^n A_i X_i = A_1 X_1 + \dots + A_n X_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} B_1^0 X_1 + B_2^0 X_2 + \dots + B_n^0 X_n \leq I^0, \\ B_1^1 X_1 + B_2^1 X_2 + \dots + B_n^1 X_n \leq I^1, \\ \vdots \\ B_1^m X_1 + B_2^m X_2 + \dots + B_n^m X_n \leq I^m, \\ X_i \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

где A_i – целевой показатель, ед. изм.; B_i^j – инвестиционные затраты i -го проекта в j -м периоде времени, млн руб.; I_j – имеющиеся средства финансирования в j -м периоде времени, млн руб.; X_i – доля финансирования инвестиционного проекта; $i = \overline{1, n}$ – номер инвестиционного проекта; $j = \overline{1, m}$ – номер периода времени, год.

Предположим, что суммарная доля финансирования должна быть не меньше величины $C = 2$.

Математическая модель в этом случае имеет вид

$$\max \leftarrow Z = 1,527270X_1 + 0,741239X_2 + 1,374394X_3 + 0,145110X_4 + 0,530312X_5$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5,4X_1 + 3,2X_2 + 2,931X_3 + 6,286X_4 + 5,9X_5 \leq 6,5, \\ 2,006437X_1 + 1,5X_2 + 3,000547X_3 + 3,000575X_4 + 3,2X_5 \leq 3,0, \\ 2,5X_2 + 2,0X_3 + 1,6X_5 \leq 3,0, \\ 0,881832X_2 + 1,186X_5 \leq 1,5, \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 2, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Математическая модель имеет недопустимое решение, т. к. система ограничений несовместна. Переходят к математической модели в комплектной постановке. Вводят дополнительную переменную F , определяющую долю финансирования, которую можно выполнить при имеющихся средствах финансирования.

Таблица 1

**Оптимальное решение математической модели
в комплектной постановке задачи**

Переменная	Величина переменных	Двойственная оценка	Экстремум целевой функции
X_1	0,4838	0,0000	0,85
X_2	1,0982	0,0000	
X_3	0,1279	0,0000	
X_4	0,0000	0,1083	
X_5	0,0000	0,2086	
F	0,8547	0,0000	
S_1	0,0000	0,0779	
S_2	0,0000	0,0395	
S_3	0,0000	0,0766	
S_4	0,5316	0,0000	
S_5	0,0000	0,5000	
S_6			

Математическая модель в комплектной постановке задачи имеет вид

$$\max \leftarrow Z = 1,0F$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} 5,4X_1 + 3,2X_2 + 2,931X_3 + 6,286X_4 + 5,9X_5 \leq 6,5, \\ 2,006437X_1 + 1,5X_2 + 3,000547X_3 + 3,000575X_4 + 3,2X_5 \leq 3,0, \\ 2,5X_2 + 2,0X_3 + 1,6X_5 \leq 3,0, \\ 0,881832X_2 + 1,186X_5 \leq 1,5, \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 2F, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, F \geq 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Оптимальное решение математической модели в комплектной постановке задачи приведено в табл. 1.

Финансирование производится 1, 2, 3 проектов с долями равными 0,4838, 1,0982, 0,1279. Итоговая доля финансирования составляет 85 %. Умножим плановое значение суммарной доли финансирования $C = 2$ на 0,85 и подставим в комплектную модель $2 * 0,85 = 1,7$. Получим оптимальное решение (табл. 2).

Таблица 2

Оптимальное решение задачи

Переменная	Величина переменных	Двойственная оценка	Экстремум целевой функции
X_1	0,4838	0,0000	0,99
X_2	1,0982	0,0000	
X_3	0,1279	0,0000	
X_4	0,0000	0,1259	
X_5	0,0000	0,2426	
F	0,9938	0,0000	
S_1	0,0000	0,0906	
S_2	0,0000	0,0459	
S_3	0,0000	0,0890	
S_4	0,5316	0,0000	
S_5	0,0000	0,5814	
S_6	0,0000	-0,5814	

Переменная $F = 0,99$ приблизительно равна 1. Заменяем в математической модели (2) в пятом ограничении правую часть на 1,7 и найдем оптимальное решение (табл. 3). Финансируются 1, 2 и 3-й проекты с числовыми значениями долей финансирования, равными 0,4979, 1,0702 и 0,1318 соответственно. Проекты 4 и 5 не финансируются. Максимальное значение целевой функции (чистый приведенный эффект) равно 1,7349 млн руб.

Таблица 3

Оптимальное решение задачи

Переменная	Величина переменных	Двойственная оценка	Экстремум целевой функции NPV, млн руб.
X_1	0,4979	0,0000	1,7349
X_2	1,0702	0,0000	
X_3	0,1318	0,0000	
X_4	0,0000	2,0675	
X_5	0,0000	1,6790	
S_1	0,0000	0,2490	
S_2	0,0000	0,4667	
S_3	0,0608	0,0000	
S_4	0,5562	0,0000	
S_5	0,0000	0,7584	

Математическая модель в комплектной постановке задачи позволяет определить максимально возможный процент финансирования при имеющихся денежных средствах.

Литература

1. Кочкина Е.М., Радковская Е.В. Методы исследования и моделирования национальной экономики: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. Ун-та, 2001. 93 с.

РЕЗЕРВЫ ВРЕМЕНИ СЕТЕВОЙ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

А.М. Семахин

Курганский государственный университет

Создание корпоративной информационной системы требует выполнения больших объемов работ с высокой вероятностью соблюдения заданных сроков реализации и четкой координации взаимодействия исполнителей [1].

Эффективным способом представления и управления комплексом взаимосвязанных работ являются методы сетевого планирования [2].

Анализ сетевой модели осуществляется для выявления резервов времени. Резервы времени имеют не критические пути сетевого графика. Резерв времени показывает, насколько может быть увеличена продолжительность всех не критических работ [3].

Резервы времени подразделяются на следующие виды: полный резерв, частный резерв первого вида, свободный резерв, независимый резерв. Полный резерв показывает, насколько можно увеличить продолжительность не критической работы при условии, что срок выполнения всего проекта не изменится. Частный резерв первого вида – это часть полного резерва, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив позднего срока начального события. Свободный резерв – часть полного резерва, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив раннего срока конечного события. Независимый резерв времени – это часть полного резерва, которая остается, если все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а последующие работы начинаются в ранние сроки [3].

Разработана сетевая модель создания корпоративной информационной системы территориального фонда медицинского страхования по Курганской области. Определены сетевой график выполнения работ, длина критического пути и топология, рассчитаны коэффициенты напряженности и резервы времени. Проведены оптимизация сетевого графика и прогнозирование выполнения работ с высокой степенью вероятности. Сетевое моделирование позволило эффективно спланировать и выполнить комплекс работ по созданию корпоративной информационной системы с наименьшими затратами и в заданные сроки.

Наличие резервов времени позволяет осуществить оптимизацию сетевого графика, гибко управлять комплексом работ посредством перераспределения ресурсов.

Литература

1. Бройдо В.Л. Вычислительные системы, сети и телекоммуникации: учеб. для вузов. 2-е изд. СПб.: Питер, 2005. 703 с.
2. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учеб. М.: Финансы и статистика, 2001. 544 с.
3. Кочкина Е.М., Радковская Е.В. Методы исследования и моделирования национальной экономики: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2001. 93 с.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ РЕГИОНА В КОНТЕКСТЕ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ

Е.С. Чернова, М.В. Косенкова

Кемеровский государственный университет

За это десятилетие ожидается резкое, более чем на 40%, уменьшение числа выпускников школы и соответственно уменьшение приема во все учреждения профессионального образования. В связи с этим возникает необходимость в определении спроса на учебные места и расчета количества учебных мест для каждого региона, что в значительной мере и определяет уровень образования – один из главных индикаторов уровня жизни и устойчивого развития региона. В основу методологии исследования данной глобальной проблемы может быть положено математическое моделирование как способ научного познания, позволяющий охватить многие аспекты устойчивого развития.

В данной работе рассмотрим проблему устойчивого функционирования социальной системы образования, где устойчивость понимается через стабилизацию потоков учащихся и выпускников в институциональных структурах системы образования с учетом непрерывности обучения.

С целью моделирования системы образования разобьем население на следующие классы: R_1 – класс людей, получающих среднее образование, R_2 – начальное профессиональное, R_3 – среднее профессиональное, R_4 – высшее, R_5 – класс людей, не занятых в образовательном процессе.

Будем предполагать, что структура социальной системы остается неизменной на протяжении конечного периода времени $[0, T]$. Тогда её можно представить в виде ориентированного графа $G=(S, F)$ (рис. 1), где S – множество его вершин, соответствующих классам группировки, а F – множество дуг. Возможность перехода из класса R_i в класс R_j определяется наличием дуги $(i, j) \in F$.

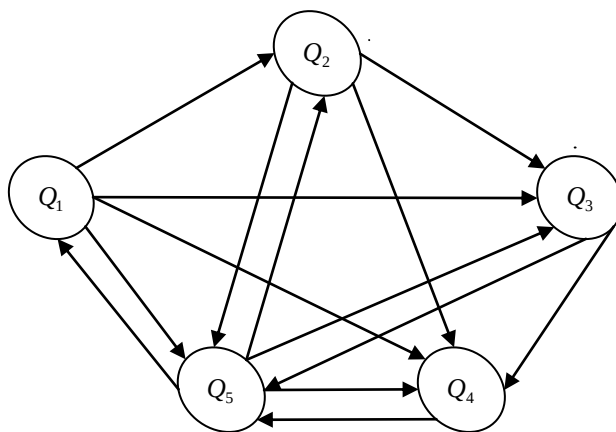


Рис. 1. Общая структура системы образования

Графу $G=(S,F)$ поставим в соответствие матрицу

$$A_G = \|a_{ij}\|_{5 \times 5}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \in F, \\ 0, & \text{если } (i, j) \notin F, \end{cases}$$

и назовем её матрицей смежности для G .

Под динамикой социальной системы будем понимать изменение численности объектов в классах R_i с течением времени (см. [2, 3]). Обозначим $x_i(t)$ – численность объектов в классе R_i в момент времени t .

Будем считать, что переход объекта из класса в класс зависит от распределения денежных средств по различным сферам финансирования, таким как образование, поддержка малого бизнеса, содействие занятости населения и т.д.

Тогда $f_{ij}(u(t))$ – численность объектов класса R_i , переходящих в момент времени t в класс R_j , где $u(t) = (u_1(t), \dots, u_l(t))$ – это вектор, координаты которого представляют собой инвестиции в соответствующую сферу финансирования.

Пусть в момент времени t в терминах матрицы смежности A_G величина $x_i(t)$, $t=1, \dots, T$, определяется следующим образом:

$$x_i(t) = x_i(t-1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^5 a_{ji} f_{ji}(u(t)) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^5 a_{ij} f_{ij}(u(t)) + \gamma_i y(t), \quad i=1, \dots, 5, \quad (1)$$

где $y(t) = B(t) - D(t)$, $B(t)$ – прирост населения (естественный и механический), а $D(t)$ – убыль населения (естественная и механическая) в году t , которые определяются путем прогнозирования с применением статистических данных региона:

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 5, \\ 0, & \text{если } i = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

Соотношение (1) будем называть уравнением динамики социальной системы, или социальным процессом. В начальный момент $t=0$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i=1, \dots, 5, \quad (2)$$

где $(x_1^0, \dots, x_5^0)$ – известное состояние системы.

Предполагается, что

$$\alpha_i^t \leq x_i(t) \leq \beta_i^t, \quad t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (3)$$

где α_i^t, β_i^t – фиксированные числа, выражающие ограничения на численность класса R_i .

Очевидно, что из класса R_i не должно выйти объектов больше, чем в этом классе находится. Тогда

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^5 f_{ij}(u(t)) \leq x_i(t-1); \quad t = 1, \dots, T, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (4)$$

Так как численность объектов, переходящих из класса R_i в класс R_j , не может быть отрицательной, то:

$$f_{ij}(u(t)) \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5, \quad j = 1, \dots, 5, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5)$$

Будем считать, что экспертным путем определено соотношение мест, выделяемых ежегодно на учреждения начального профессионального, среднего профессионального и высшего образования. Этот факт можно записать в виде следующих соотношений:

$$f_{12}(u(t)) = \lambda_1 f_{13}(u(t)), \quad f_{12}(u(t)) = \lambda_2 f_{14}(u(t)), \quad t = 1, \dots, T, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in R^1. \quad (6)$$

Общее количество выпускников учреждений начального профессионального, среднего профессионального и высшего образования должно быть равно количеству вакантных рабочих мест на момент времени t :

$$f_{25}(u(t)) + f_{35}(u(t)) + f_{45}(u(t)) = W(u(t)), \quad t = 1, \dots, T, \quad (7)$$

где $W(u(t))$ представляет собой зависимость количества вакантных рабочих мест от инвестиций в соответствующие сферы, которая при отсутствии финансирования будет принимать нулевое значение.

Кроме того, очевидно, можно предположить, что на момент времени t количество денежных средств, выделяемых на каждую из сфер финансирования, ограничено. Тогда:

$$0 \leq u_k(t) \leq \delta_k^t, \quad k = 1, \dots, l, \quad t = 1, \dots, T. \quad (8)$$

Из содержательной интерпретации устойчивого развития региона необходимо задать цель управления системой (1)–(8) на момент времени T , то есть прийти к заданному состоянию системы, которое можно определить при помощи теоретико-игрового подхода (подробнее см. [1, 4]):

$$x_i(T) = x_i^T, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (9)$$

В качестве критерия эффективности развития рассматриваемой социальной системы возьмем функционал, отражающий суммарную «полезность» региона от функционирования системы образования:

$$J(x^0, u) = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 w_{ij} f_{ij}(u(t)) \rightarrow \max, \quad (10)$$

где вектор $u(t)$ составлен из управляющих параметров в момент t , а w_{ij} ха-

рактизует положительный эффект от перехода одного объекта из класса R_i в класс R_j .

Соотношения (1)–(10) представляют собой математическую модель социальной системы образования в виде дискретной задачи оптимального управления с закрепленными концами, где (1) – уравнения движения, (2) – начальное состояние системы, (3) – (8) – ограничения на управления и фазовые переменные, (9) – планируемое конечное состояние системы, (10) – интегральный критерий качества.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы» по лоту шифр «2011-1.4-502-004» «Проведение поисковых научно-исследовательских работ в целях развития общероссийской мобильности в области информационно-телекоммуникационных технологий и вычислительных систем» по теме: «Разработка математических моделей, алгоритмов и Web-приложений для поддержки стратегического управления инновационной организацией» (государственный контракт № 14.740.11.0965 от 05.05.11).

Литература

1. Данилов Н.Н., Иноземцева Л.П. Применение математических моделей в исследовании вопросов устойчивого развития региона // Факторы устойчивого развития регионов России / О. О. Ардасова, С. К. Волков, Н. Н. Данилов и др. Новосибирск: Изд-во «СИБ-ПРИНТ», 2008. С. 11–56.
2. Злобина С.Л. Исследование математических моделей равновесного и стабильного развития социальных систем: Дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.18 : защищена 16.10.03 / Злобина Светлана Леонидовна. Кемерово, 2003. 185 с.
3. Косенкова М. В. Построение математической модели социальной системы в виде дискретной задачи оптимального управления // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТТМ-2010): Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (19–20 ноября 2010 г.). Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. Ч. 1. С. 106–107.
4. Чернова Е. С. Методика определения конечного состояния региона как целевой точки устойчивого развития с помощью теоретико-игрового подхода [Электронный ресурс] // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права). 2010. № 6. URL: <http://eizvestia.isea.ru/reader/article.aspx?id=7051> (дата обращения: 01.09.11).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

ДИЗАЙН И БЕЗОПАСНОСТЬ ПЕПТИДА-ИММУНОМИМЕТИКА БЕНЗО[А]ПИРЕНА

*С.В. Апалько^{1,2}, А.Ю. Бакулина¹, Е.В. Шерина¹,
М.Л. Филипенко³, А.Н. Глушков¹*

*¹Институт экологии человека Сибирского отделения РАН
Новосибирский государственный университет*

*³Институт химической биологии и фундаментальной медицины
Сибирского отделения РАН*

Разработка нового подхода к созданию антиканцерогенных вакцин основана на использовании в качестве гаптен-специфической компоненты пептидов-иммуномиметиков химических канцерогенов. Такие пептиды-иммуномиметики должны обладать иммунологическими свойствами химических канцерогенов, т.е. их введение в организм человека должно индуцировать синтез антител против химических канцерогенов.

При помощи технологии фагового дисплея определен пептид-иммуномиметик бензо[а]пирена LeuHisLeuProHisHisAspGlyValGlyTrpGly [1, 2].

Для изучения иммунохимических свойств пептида-иммуномиметика был осуществлен его синтез (условно последовательность пептида обозначена PiP). В связи с тем, что синтез данного пептида заключался в синтезе его половинок, LeuHisLeuProHisHis (LH-пептид) и AspGlyValGlyTrpGly (DG-пептид), с последующим их сшиванием, LH- и DG-пептиды также были исследованы на способность специфического взаимодействия с ранее полученными моноклональными антителами к бензо[а]пирену (мАТ В2) [3, 4].

Было установлено, что синтетические образцы пептидов конкурируют за связывание мАТ В2 с конъюгатом бензо[а]пирен-БСА [5]. Ранее было высказано предположение, что структурная мимикрия ПАУ происходит, предположительно, за счет наличия в составе пептида молекулы триптофана [5]. В таком случае остается загадкой природа связывания LH-пептида с мАТ В2. Можно предположить, что взаимодействие пептида с мАТ В2 носит комплексный характер и не объясняется структурной мимикрией бензо[а]пирена триптофаном или каким-то другим гидрофобным остатком.

Для определения дизайна пептида-иммуномиметика бензо[а]пирена был выполнен ряд математических задач.

По установленным первичным структурам тяжелой и легкой цепей методом моделирования по гомологии была построена модель Fab-фрагмента мАТ В2 [5].

Методом молекулярного докинга была определена возможность существования двух карманов в активном центре мАТ В2 для связывания ПАУ [5].

Для моделирования взаимодействия пептида LeuHisLeuProHisHisAspGlyValGlyTrpGly с мАТ В2 был сделан ряд молекулярных докингов Fab-фрагмента мАТ В2 с трипептидами. Ни один из трипептидов не связался с антителом в районе первого кармана связывания. Несколько трипептидов (HisLeuPro, LeuProHis, ProHisHis и GlyTrpGly) связались с антителом в районе второго кармана связывания (рис. 1). При этом три трипептида объединяет наличие незакрытого другими аминокислотами гистина. Это объясняет способность LH-пептида конкурировать за связывание мАТ В2 с конъюгатом бензо[а]пирен-БСА.

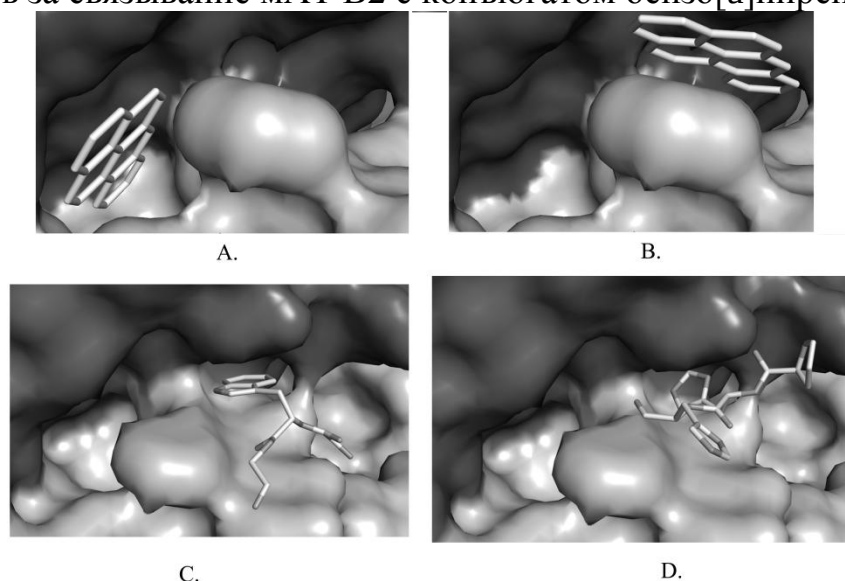


Рис. 1. Докинг связывания мАТ В2 с бензо[а]пиреном и последовательностями GlyTrpGly и ProHisHis (А – связывание бензо[а]пирена в первом кармане; В – связывание бензо[а]пирена во втором кармане; С – связывание GlyTrpGly во втором кармане; D – связывание ProHisHis во втором кармане)

В то же время очевидно, что триптофан, входящий в состав пептида-иммуномиметика, играет ключевую роль в связывании с мАТ В2 при условии его экспонирования на поверхности белка.

В некоторых работах по получению пептидов-иммуномиметиков низкомолекулярных соединений авторами было отмечено, что исходная конформация пептидов, презентруемых на поверхности несущего белка бактериофага, может быть изменена в свободном пептиде и при любой дополнительной модификации. Такие изменения являются критичными для распознавания пептида-иммуномиметика антителами [6].

В связи с этим в контексте данной работы необходимо было понять, имеет ли значение наличие рIII белка бактериофага для организации структуры пептида-иммуномиметика бензо[а]пирена.

Смоделированная структура пептида в составе рIII белка показывает, что триптофан в составе пептида может быть экспонированным на поверхности и доступным для антител (рис. 2). Такая структура оказалась

возможной за счет взаимодействия пептида с белком рIII, в частности, гидрофобных районов белка с гидрофобными остатками пептида.

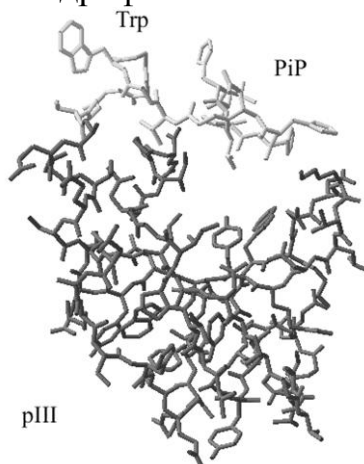


Рис. 2. Модель структуры пептида PiP в составе рIII белка бактериофага

Таким образом, стали более понятными структурные особенности пептида-иммуномиметика бензо[а]пирена, позволяющие имитировать иммунологические свойства этого низкомолекулярного гаптена. Полученные результаты моделирования могут быть использованы в дальнейших работах для оптимизации структуры пептида-иммуномиметика.

В настоящее время полученный пептид-иммуномиметик рассматривается как потенциальная гаптен-специфическая компонента антиканцерогенной вакцины. Проводятся работы по оптимизации его структуры для получения выраженного антиканцерогенного иммунного ответа. При этом необходимо исключить развитие аутоиммунных реакций. Для этого необходимы данные о гомологии полученных пептидов-иммуномиметиков с белковыми последовательностями протеома человека. Поиск таких последовательностей по заранее выработанным параметрам осуществляли с помощью алгоритма BLAST, реализованного в программе UGENE. Аминокислотных последовательностей, удовлетворяющих заданным параметрам поиска, ни в протеоме животных *Mus. Musculus*, ни в протеоме человека найдено не было. Теоретические прогнозы развития аутоиммунных реакций при введении в организм животных *Mus. Musculus* пептида-иммуномиметика бензо[а]пирена как специфического компонента антиканцерогенной вакцины были подтверждены в *in vivo* эксперименте.

Для изучения побочного действия пептида-иммуномиметика бензо[а]пирена трехмесячных самцов мышей линии Balb/c иммунизировали рекомбинантным химерным белком, содержащим пептид-иммуномиметик [7].

При введении препарата подопытным животным была продемонстрирована их 100%-ная выживаемость. Также не было обнаружено увеличения массы внутренних органов (тимуса, легкого, сердца, печени, почек и селезенки).

Таким образом, результаты по поиску последовательностей гомологичных пептиду-иммуномиметику бензо[а]пирена в протеоме животных *Mus. Musculus* и человека могут быть использованы в прогнозировании развития аутоиммунных реакций для других пептидов-иммуномиметиков, а также для модификации структуры известного пептида-иммуномиметика бензо[а]пирена.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (Госконтракт № 14.740.12.0819) в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Литература

1. Глушков А.Н., Апалько С.В., Филипенко М.Л. и др. Новый подход к получению пептида-иммуномиметика бензо(а)пирена // Молекулярная генетика, микробиология и вирусология. 2008. № 3. С. 32–36.
2. Глушков А.Н., Апалько С.В., Филипенко М.Л. Пептид-иммуномиметик химических канцерогенов, обладающий способностью специфически взаимодействовать с антителами против бензо[а]пирена и бенз[а]антрацена. Патент РФ № 2357975 от 10.06.2009.
3. Глушков А.Н., Апалько С.В., Матвеева В.А. и др. Моноклональные антитела к химическим канцерогенам группы полициклических ароматических углеводородов // Российский иммунологический журнал. 2009. № 3. С. 30–38.
4. Матвеев Л.Э., Матвеева В.А., Апалько С.В. и др. Штамм гибридных культивируемых клеток животных *Mus. Musculus*, продуцирующий моноклональные антитела, специфичные к benzo[а]pyrene и benz[а]anthracene. Патент РФ № 2423519 от 24.02.2010.
5. Глушков А.Н., Апалько С.В., Бакулина А.Ю. и др. Особенности взаимодействия моноклонального антитела В2 с полициклическими ароматическими углеводородами и пептидом-мимотопом бензо[а]пирена // Молекулярная биология. 2010. Т. 44, № 4. С. 699–707.
6. Böttger V., Peters L.-E., Micheel B. Identification of peptide mimotopes for the fluorescein hapten binding of monoclonal antibody B13-DE1. J. Mol. Recognit. 1999. № 12. P. 191–197.
7. Апалько С.В., Лунин В.Г., Филипенко М.Л. и др. Получение и характеристика рекомбинантного белка, содержащего пептид-иммуномиметик бензо[а]пирена // Молекулярная генетика, микробиология и вирусология. 2011. № 2. С. 24–30.

К ВОПРОСУ ОБ АКТИВНО-ПАССИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ В ДЕЙСТВУЮЩИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Л. В. Галицкая

Сибирский университет потребительской кооперации

Одной из основных проблем активной идентификации промышленных объектов в действующих системах управления является вмешательство в нормальный режим функционирования объектов, осуществляемое исследователями в ходе идентификации. Применение идей дуального управления А.А. Фельдбаума [1] позволяет совместить процесс идентификации и управления. Однако задачу снижения степени вмешательства исследователя в нормальный режим работы объекта они не решают.

Для снижения вмешательства исследователей в объект идентификации, а также предупреждения конфликтных ситуаций между исследователями и технологическим персоналом организационно-технологических объектов служат предложенные способы активно-пассивной идентификации [2–4].

Суть способов рассмотрим на примере объекта с непрерывным технологическим процессом (объекты с циклическими технологическими процессами идентифицируются аналогично). К некоторому стартовому моменту времени t_C человеком-оператором или автоматом прогнозируются траектория вектора рабочих управлений до конца интервала памяти объекта, а также соответствующая траектория вектора выходных величин. В момент времени t_C по команде вышестоящей управляющей системы изменяется задание, например марка стали и способ ее разлива. Далее эргодическая система управления функционирует в обычном режиме. В соответствии со сменой внешнего задания человек-оператор корректирует собственную цель – требуемое значение вектора выходных воздействий объекта (для циклических объектов – «точку прицеливания»). Он отказывается от первоначально намеченной траектории вектора рабочих управлений и изменяет ее для достижения новой цели. Сущность способа с изменением заданий состоит в следующем [2]: при связанном управлении, т.е. при вмешательстве вышестоящей системы управления в процесс принятия решений, а также в прогнозирование рабочих управлений и вектора выходных переменных объекта, меняются реализующие как алгоритмы прогнозирования, так и алгоритмы управления. Перед проведением эксперимента вводится дополнительная операция оценки степени тесноты связи вышестоящей и данной действующей систем управления. При изменении тесноты связи уточняются законы распределения вероятностей ошибок прогнозирования и регулирования и сами алгоритмы прогнозирования.

Рассмотрим способ идентификации действующих объектов в системах управления [3]. Применительно к реальным объектам

управления, примером которых является кислородно-конвертерный процесс, обладающим свойствами самоорганизации, реакция его на нанесенное управляющее воздействие будет существенно зависеть от состояния объекта, причем влияет существенная нелинейность его характеристик. Устойчивость процесса продувки стали кислородом зависит от большого числа факторов. Как правило, система управления приближается к границе устойчивости во втором периоде продувки. При этом небольшое управление, направленное на ухудшение состояния объекта, может приводить к появлению нецелевых, нештатных и даже аварийных ситуаций. Так, при интенсивном шлакообразовании во второй период продувки плавки на кислородном конвертере подъем фурмы приведет к неуправляемому лавинообразному увеличению объема шлако-металлической эмульсии. Это вынуждает оперативный персонал прекратить процесс для промежуточного скачивания лишнего объема шлако-металлической эмульсии.

Способ реализуется для реального объекта, например кислородно-конвертерного процесса, следующим образом [3]:

1. Для объектов с нелинейным изменением свойств исследуют динамические характеристики каналов регулирования для различных организационно-технологических ситуаций, в том числе и при малой устойчивости систем.

2. Для действующих нелинейных объектов, обладающих свойствами самоорганизации и систем управления с пониженной устойчивостью, исходя из ограничений на область допустимых значений управлений, связанных с невозможностью технической реализации управлений в сторону лавинообразного сваливания системы в неуправляемое неустойчивое состояние, допускают движение переменных состояния системы лишь в направлении, способствующем улучшению этого состояния.

Способ идентификации объектов в действующих системах [4] включает предварительную оценку статистических характеристик ошибок прогнозирования и регулирования, совместное прогнозирование рабочих управлений и вектора выходных величин объекта, фиксирование траекторий изменения входных и выходных переменных во времени и оценку динамических характеристик исследуемых каналов регулирования по разности траекторий изменения во времени спрогнозированных и фактически полученных временных зависимостей выходных величин объекта, по разности траектории изменения во времени спрогнозированных и фактически реализованных временных зависимостей управлений и по статистическим характеристикам ошибок регулирования и прогнозирования. Далее идентифицируют канал возмущения и оценивают статические характеристики ошибок прогнозирования внешнего воздействия, дополнительно прогнозируют поведение контролируемого внешнего воздействия объекта, и после фиксирования

качественного изменения траектории поведения внешнего воздействия наносят управление для компенсации эффекта действия этого возмущения и находят оценку коэффициента передачи по каналу регулирования.

В предлагаемом способе активное воздействие направлено в сторону, компенсирующую эффект действия по ранее идентифицированным каналам контролируемых возмущений, т.е. встречно эффекту возмущения. Зная эффект возмущения и управления, можно точно подать испытательное (управляющее) воздействие, не изменяя состояния объекта. Способ можно использовать для всех технологических объектов, а не только самоорганизующихся. Он пригоден для объектов, на которых большая часть возмущений контролируется. Например, в конвертере – зная изменение содержания кремния в чугуна и температуру чугуна, можно изменять интегральное количество кислорода и количество извести на плавку. Таким образом, формируется управление, при котором состояние объекта не ухудшается.

Предварительная идентификация каналов возмущения оказывается естественно необходимой, а не искусственно введенной операцией. В данном случае идентификация объективно необходима для правильного назначения управлений по всем каналам регулирования, включая и идентифицируемый канал.

Процесс идентификации органично связан с процессом управления. Формируемые исследовательские воздействия совпадают с управляющими и направлены для достижения как целей идентификации, так и управления.

В качестве примера изобретения рассмотрим идентификацию каналов регулирования кислородно-конвертерного процесса.

Увеличение температуры чугуна $\Delta T_{\text{ч}}$ при прочих равных условиях приводит к росту температуры стали на выпуске конвертера $\Delta T_{\text{с}}$. При шихтовке плавки учитывают этот эффект контролируемого возмущения (увеличение температуры чугуна $\Delta T_{\text{ч}}$). Предварительно идентифицировав канал этого возмущения, прогнозируют увеличение температуры стали на выпуске $\Delta T_{\text{с}}$ вследствие увеличения температуры чугуна $T_{\text{ч}}$. Далее наносят управляющее воздействие по идентифицируемому каналу регулирования – увеличение массы извести на плавку $\Delta G_{\text{и}}$. Это управление имеет дуальную направленность. Во-первых, компенсирует вредное влияние возмущения. И, во-вторых, несет исследовательские функции, являясь испытательным воздействием. Кроме того, для успешной реализации способа необходимо предварительное исследование гистограмм ошибок прогнозирования изменения температуры чугуна (в данном случае – просто ошибок измерения), прогнозирование, а также регулирование изменения температуры стали на выпуске.

Рассмотрим математическое описание предлагаемого способа [4].

При отсутствии испытательных воздействий по каналу регулирования и возмущений изменение выходной величины в конце i -го цикла функционирования объекта:

$$\Delta \hat{Y}(i) = \left[Y(i) - \hat{Y}(i) \right] = \xi(i) + a_1 * \delta_1(i), \quad (1)$$

где $a_1 * \delta_1(i)$ – эффект неправильного прогноза управлений (из-за того, что нельзя по факту состояния объекта реализовать прогнозируемую траекторию управления); $\delta_1(i)$ – ошибка прогнозирования управлений по идентифицируемому каналу регулирования; $\xi(i)$ – ошибка регулирования.

При наличии испытательного воздействия по каналу регулирования:

$$\Delta Y(i) = a_1 [P(i) + \delta_1(i)] + \xi(i), \quad (2)$$

где a_1 – коэффициент передачи; $P(i)$ – пробный сигнал.

С учетом действия неизменной тенденции (тренда) контролируемых возмущений:

$$\Delta \hat{Y}'(i) = a_2 * \left[\hat{W}_k(i) + \delta_2(i) \right] + \xi(i) + a_1 * \delta_1(i), \quad (3)$$

где $a_1 * \delta_1(i)$ – эффект, найденный и оцененный в условиях неизменности тенденции поведения контролируемых возмущений; $\hat{W}_k(i)$ – спрогнозированное значение контролируемых возмущений на конец цикла; $\delta_2(i)$ – ошибка прогнозирования контролируемых возмущений $\hat{W}_k(i)$.

С учетом действия изменений тенденции (тренда) контролируемых возмущений:

$$\Delta \hat{Y}''(i) = a_2 * \left[P_{w_k} + \hat{W}_k(i) + \delta_2(i) \right] + \xi(i) + a_1 * \delta_1(i), \quad (4)$$

где $P_{w_k}(i)$ – отклонение фактического значения контролируемых возмущений на конец цикла от прогнозируемого уровня этих возмущений $\hat{W}_k(i)$.

Окончательно при наличии компенсируемого управления по идентифицируемому каналу регулирования $K_U(i)$:

$$\Delta \hat{Y}'''(i) = a_2 * [W_\phi(i) + \delta_2(i)] + \xi(i) + a_1 * \delta_1(i) + a_1 * K_U(i), \quad (5)$$

где $W_\phi(i) = P_{w_k} + \hat{W}_k(i)$ – фактически реализованное значение контролируемого возмущения на конец цикла.

Откуда

$$a_1 = \frac{\Delta \hat{Y}(i) - a_2 * [W_\phi(i) + \delta_2(i)] - \xi(i)}{K_U(i) + \delta_1(i)}. \quad (6)$$

Приведенные формулы позволяют снизить влияние исследовательской системы на нормальный ход технологического

процесса, а также позволяют провести идентификацию и управление со сдерживанием скатывания системы в область неустойчивости. В условиях зашумленности объектов, снижения амплитуды пробных исследовательских воздействий не обеспечивается высокой точности идентификации при ограниченном числе опытов. Ряд действующих систем управления, имеющих склонность к выходу из устойчивого состояния при управлении, определяют использование сложных управляющих компонентов – фрагментов программ управлений. Это обстоятельство требует при идентификации такого рода объектов применения адекватных реальностей управляющих компонентов.

Решение отмеченных проблем позволяет сформировать аппарат активно-пассивной идентификации, способной описывать нестационарные, нелинейные процессы в промышленных системах управления, обладающих пониженной устойчивостью.

Литература

1. *Фельдбаум А.А.* Теория дуального управления. 1, 2, 3// Автоматика и телемеханика. 1960. № 9. С. 3–16.
2. Пат. 2 276 396 РФ, МПК G05B 23/00. Способ идентификации объектов с изменением заданий / В.И. Веревкин, С.Р. Зельцер, Л.В. Галицкая (РФ). № 2 004 108 619/ 09; заявл. 22.03.04; опубл. 10.05.06. Бюл. № 13. 7 с; 1 ил.
3. Пат. 2 277 259 РФ, МПК G05B 13/04. Способ идентификации действующих объектов в системах управления / В.И. Веревкин, С.Р. Зельцер, Л.В. Галицкая, П.П. Лизогуб (РФ). № 2 004 135 154/ 09; заявл. 01.12.04; опубл. 27.05.06. Бюл. № 15. 6 с.
4. Пат. 2 325 683 РФ, МПК G06G 7/66, G05B 13/04. Способ идентификации объектов в действующих системах / В. И. Веревкин, С. Р. Зельцер, Л. В. Галицкая и др. (РФ). № 2 006 126 283/ 09; заявл. 19.07.06; опубл. 27.05.08. Бюл. № 15. – 9 с.

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ПРОТЕКАНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ ПРИ ЗАДАННОМ ПЕРЕПАДЕ ДАВЛЕНИЯ

Е.Э. Гуммель

Кемеровский государственный университет

Целью настоящей работы является построение метода решения нестационарной задачи о движении в канале однородной вязкой несжимаемой жидкости при задании давления на входе и выходе канала.

Традиционно в задачах о течении в каналах однородной вязкой несжимаемой жидкости (система уравнений Навье–Стокса) рассматриваются две постановки задач: в первой, более популярной, на твердых стенках задается условие прилипания, а на участках втекания и вытекания – векторы скорости. Этому посвящено достаточно большое число работ (см., например, обзор в [4, 7]). Вторая постановка заключается в задании на участках втекания-вытекания давления, а не скоростей. То есть движение жидкости в области протекания осуществляется за счет разности давлений. Таким образом, эти задачи приходится решать в

формулировке «скорость–давление», а не в формулировке «функция тока–вихрь». В работе [6] показано, что для существования и единственности решения нестационарной задачи, кроме задания давления на участках втекания-вытекания, необходимо задать только одну из компонент скорости так, чтобы вектор скорости на границе втекания-вытекания был ей перпендикулярен. Однако в этом случае отсутствие значения второй компоненты вектора скорости не позволяет без дополнительных условий на нее построить процесс численного решения таких задач. Обычно численно решаются задачи протекания в каналах с параллельными осям координат прямыми границами и углами (см. [3,8]). В этом случае на входе и выходе задаются «естественные» краевые условия на скорости вида $v = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ($u = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$), которые позволяют построить алгоритмически замкнутый численный метод решения. В этом случае условие на производную для одной из компонент вектора решения является прямым следствием условия $v = 0$ ($u = 0$). Однако такое «простое» определение скоростей на границе не всегда возможно. Дело в том, что эти условия на вторую компоненту являются, вообще говоря, «лишними» и, для того чтобы краевая задача с ними имела решение, необходимо, чтобы они были естественным образом согласованы с решением задачи, сформулированной без таких дополнительных условий. Таким образом, задание давления на границах канала не определяет направления вектора скорости на этих границах.

Рассмотрим двумерную задачу о протекании вязкой однородной несжимаемой жидкости в канале с заданным перепадом давления на входе и выходе:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \nabla V + \nabla p = \nu \Delta V, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} V = 0$$

$$p|_{AB} = p_1(y), \quad p|_{CD} = p_2(y), \quad V|_{BC} = 0, \quad V|_{AD} = 0, \quad (2)$$

$$(V, n)|_{AB} = |V|, \quad (V, n)|_{CD} = |V|, \quad (3)$$

где $V = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ – вектор скорости; $p = p(x, y, t)$ – давление; $\nu > 0$ – коэффициент кинематической вязкости; Ω – область решения (см. рис. 1).



Рис. 1. Область решения

Равенства (3) означают, что вектор скорости V перпендикулярен границам AB и CD . Отметим, что на входных и выходных границах канала

не поставлены условия на горизонтальную компоненту вектора скорости, что является одной из основных трудностей при решении рассматриваемой задачи.

Для численного решения нестационарной системы уравнений (1) с краевыми условиями (2), (3) построим в области Ω разнесенную прямоугольную и в общем случае неравномерную сетку Ω_h , согласованную с границей $\Gamma = AB \cup BC \cup CD \cup AD$ [5]. Введем также равномерное разбиение по времени с шагом τ .

Будем решать задачу (1)–(3) с помощью трехэтапной схемы расщепления [1]:

$$\frac{\tilde{V} - V^n}{\tau} = -(\tilde{V}\nabla)\tilde{V} - \nu\nabla \times \tilde{\omega}; \quad (4)$$

$$-\Delta p = -\frac{\tilde{D}}{\tau}; \quad (5)$$

$$\frac{V^{n+1} - \tilde{V}}{\tau} = -\nabla p, \quad (6)$$

где $\omega = \nabla \times V$, $D = \nabla V$, $\tilde{D} = \nabla \tilde{V}$.

На первом этапе методом дробных шагов с использованием продольно-поперечной прогонки решается уравнение движения, из которого «вычеркнут» градиент давления. На втором – уравнение Пуассона на давление (5). И на третьем этапе для поправки скорости решается уравнение (6), начальными данными для которого служит решение уравнения (4).

На Ω_h методом контрольного объема аппроксимируем уравнение (4) разностной схемой 2-го порядка по пространству. Для решения необходимо задать скорость на входе и выходе. Поэтому для замыкания системы и реализации схемы продольно-поперечной прогонки аппроксимируем уравнение (4) на границах протекания внутрь области решения, заменяя производные односторонними разностями первого порядка аппроксимации. В итоге матрица коэффициентов системы для прогонки в горизонтальном направлении будет иметь следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & & & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & a_{43} & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & a_{N-3N-2} & \ddots & \vdots \\ & & & & & \ddots & a_{N-2N-3} & a_{N-2N-2} & a_{N-2N-1} & 0 \\ \vdots & & & & & & 0 & a_{N-1N-2} & a_{N-1N-1} & a_{N-1N} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & a_{NN-2} & a_{NN-1} & a_{NN} \end{pmatrix}$$

То есть, кроме трех диагоналей, в первой и последней строке матрицы есть по одному ненулевому элементу. Исключая их с помощью преобразований Гаусса, мы получим систему с трехдиагональной матрицей, которая решается обычной прогонкой.

Чтобы задать краевое условие на давление на твердых стенках, выразим из уравнений движения производную по нормали $\frac{\partial p}{\partial n}$. Таким образом, для уравнения Пуассона (5) получена смешанная краевая задача. Поскольку уравнение Пуассона приходится решать на каждом шаге по времени, то выгодно было бы использовать какой-либо неградиентный метод, например чебышевский. Но матрица системы в этой задаче является несамосопряженной и границы ее спектра неизвестны. Поэтому для решения была использована итерационная схема, которая в случае самосопряженной матрицы является чебышевской [2], а также может быть использована, когда оператор системы несамосопряжен. Она показывает достаточно хорошие результаты при несамосопряженном операторе и устойчива к неточному заданию входных параметров. Таким образом, очень выгодно в начале итерационного процесса, задав некоторым образом входные данные схемы, определить набор итерационных параметров и использовать его при каждом значении времени.

Для проверки работоспособности предлагаемого метода решения нестационарного уравнения Навье–Стокса была рассмотрена задача о течении в разветвляющемся канале (рис. 2).

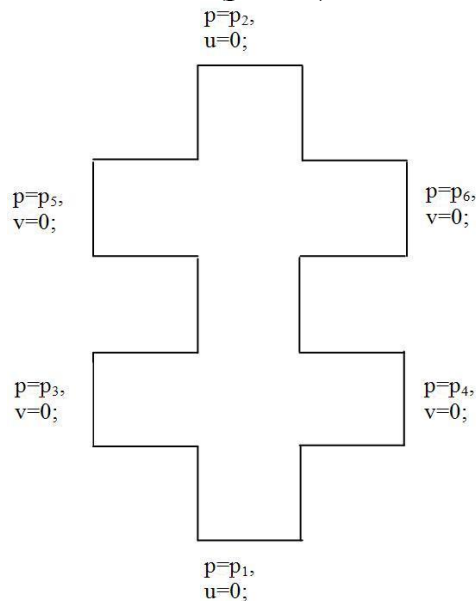


Рис. 2. Разветвляющийся канал

Как видно из рисунка, на входах в канал задано давление $p_i, i=1,6$ и нулевая касательная к границе составляющая скорости. На твердых стенках скорость задается равной нулю.

Была проведена серия расчетов на сетке с количеством узлов 150×250 ; на границах задано стационарное давление $p_1=0,1, p_2=0,1, p_4=0,1, p_5=0,1, p_6=0,1$. Давление p_3 последовательно уменьшалось.

Для значения $p_3=0,096$ при установлении течения вблизи верхней стенки ответвления возникает вихрь, увеличивающийся до определенного размера.

Для рис. 3 $p_3 = 0,0953$. При уменьшении давления вихрь увеличился. При выходе на стационарное течение он занимает почти весь проход, на границе протекания некоторые линии тока направлены внутрь канала, некоторые – наружу.

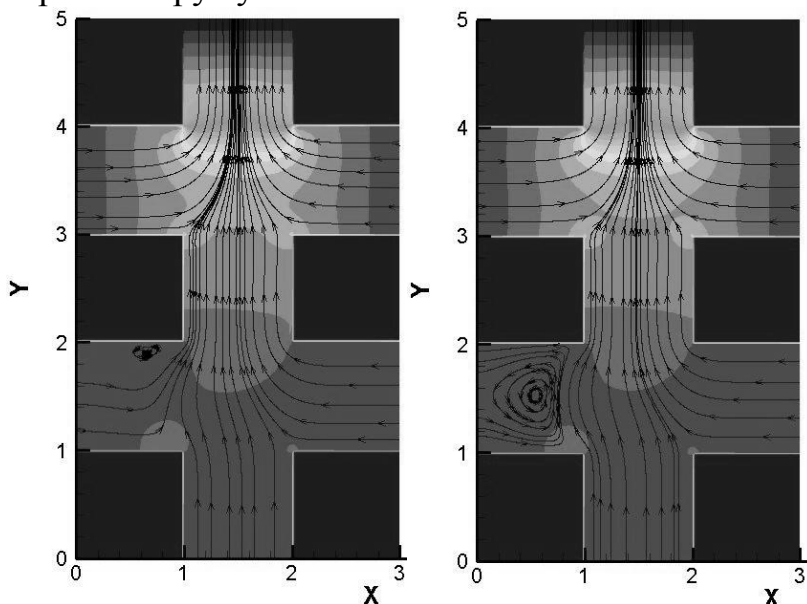


Рис. 3. Течение в канале, $p_3 = 0,0953$, моменты времени $t=12$; $19,68$ соответственно

При $p_3 = 0,0948$ жидкость сначала втекает в канал. Затем в процессе стационарирования у верхней стенки появляется вихрь, который сначала растет, при этом на одной части границы жидкость втекает в канал, а на другой – вытекает из него. Далее вихрь уменьшается и смещается к нижней стенке прохода, а линии тока полностью меняют направление: жидкость вытекает из канала.

Таким образом, показано, что незначительные изменения давления приводят к качественно различным картинам течений.

Литература

1. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О.М. Белоцерковский. М.: Наука, 1984. 520 с.
2. Захаров Ю.Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики / Ю. Н. Захаров. Новосибирск: Наука, 2005. 239 с.
3. Кузнецов Б.Г. Численное исследование течения вязкой несжимаемой жидкости в каналах при заданных перепадах давлений / Б. Г. Кузнецов, Н. П. Мошкин, Ш. Смагулов // Численные методы динамики вязкой жидкости: сб. ИТПМ СО АН СССР. Новосибирск, 1983. С. 203–207.
4. Пасконов В.М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В. М. Пасконов, В. И. Полежаев, Л.А. Чудов. М.: Наука, 1984. 288 с.
5. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. М.: Энергоатомиздат, 1984. 124 с.
6. Рагулин В.В. К задаче о протекании вязкой жидкости сквозь ограниченную область при заданном перепаде давления или напора / В. В. Рагулин // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. Новосибирск, 1976. Вып. 27. С.78–92.
7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. М.: Мир, 1980. 612 с.

8. Moshkin N. Steady viscous incompressible flow driven by a pressure difference in a planar T-junction channel / N. Moshkin, D. Yambangwi // Intern. J. of Comput. Fluid Dyn. 2009. Vol. 23, № 3. P. 259–270.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ВОЗВРАЩЕНИЯ ВОЛНЫ В НЕКОТОРЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Д.А. Долгов

Кемеровский государственный университет

Введение

В данной работе рассматривается один неожиданный эффект, возникший при проведении численных расчетов (методом неполной аппроксимации минимальных невязок) движения волн на поверхности безграничной идеальной несжимаемой жидкости в однородном поле сил тяжести. Он заключается в том, что после выхода волны из расчетной области в ней остаются некоторые ненулевые колебания, которые могут привести к «возвращению» ушедшей волны. В общем случае было обнаружено, что расчеты при установке начальных значений в виде небольших отклонений от нуля через некоторое время могут привести к появлению колебаний поверхности, амплитуда которых на несколько порядков больше исходных.

Цель данной работы – понять причины возникновения волн и попытаться научиться прогнозировать их появление.

Постановка задачи

Поставлена задача о движении волн на поверхности безграничной идеальной несжимаемой жидкости в однородном поле сил тяжести, которое описывается следующей системой квазилинейных уравнений гиперболического типа:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial((H-B)u)}{\partial x} + \frac{\partial((H-B)v)}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

$$u(x, y, t), v(x, y, t), \eta(x, y, t) \rightarrow 0, \text{ при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty.$$

Течение является потенциальным. Жидкость заполняет область Q , ограниченную сверху свободной поверхностью $z = z(t, x, y)$, снизу – дном $z = -H(x, y) + B(t, x, y)$ (рис.1).

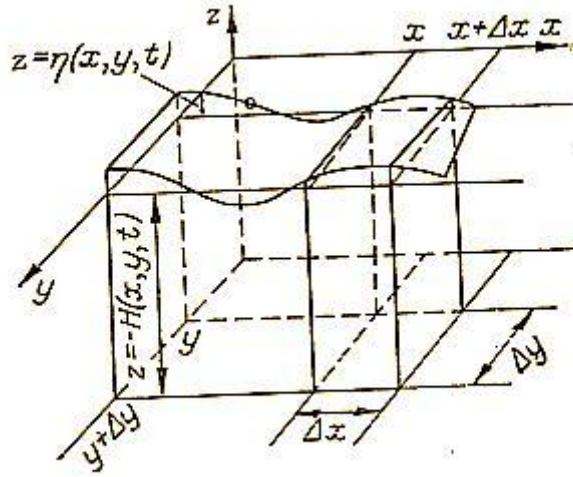


Рис. 1. Постановка задачи

Метод решения

В области Q вводится неравномерная по x, y сетка. Затем на этой сетке происходит аппроксимация системы уравнений неявной разностной схемой. Для замыкания схемы на границах и в углах сетки она аппроксимируется внутрь области Q . Полученная система уравнений решается методом неполной аппроксимации минимальных невязок:

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_{ij}^{n+1} - \eta_{ij}^n}{\tau} + \frac{(H_{i+1j} - B_{i+1j}^{n+1})u_{i+1j}^{n+1} - (H_{i-1j} - B_{i-1j}^{n+1})u_{i-1j}^{n+1}}{2h_x} + \\ & + \frac{(H_{ij+1} - B_{ij+1}^{n+1})v_{ij+1}^{n+1} - (H_{ij-1} - B_{ij-1}^{n+1})v_{ij-1}^{n+1}}{2h_y} = \frac{B_{ij}^{n+1} - B_{ij}^n}{\tau}, \\ & \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\tau} + g \frac{\eta_{i+1j}^{n+1} - \eta_{i-1j}^{n+1}}{2h_x} = 0, \\ & \frac{v_{ij}^{n+1} - v_{ij}^n}{\tau} + g \frac{\eta_{ij+1}^{n+1} - \eta_{ij-1}^{n+1}}{2h_y} = 0, \\ & i = 1, N_x - 1, \\ & j = 1, N_y - 1, \end{aligned}$$

Предмет исследования

В результате проведения серии расчетов обнаружился факт возвращения волны при различных параметрах расчетов (рис. 2,3).

Под возвращением понимается следующее – волна на поверхности жидкости начинает движение и за конечное время выходит из расчетной области под действием силы тяжести, но через некоторое время свободная поверхность вновь принимает начальное (или близкое к нему) значение.

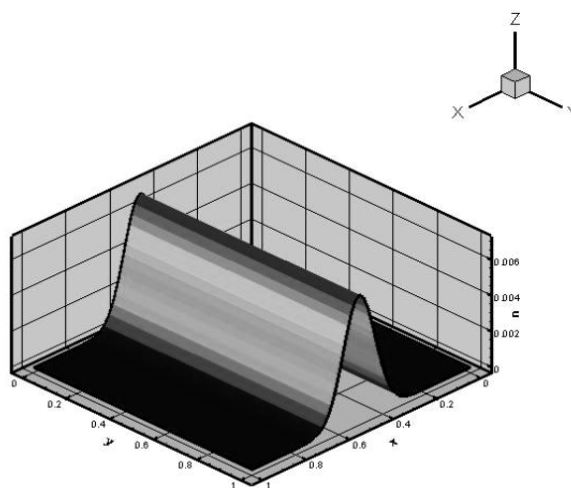


Рис. 2. Начальное положение волны

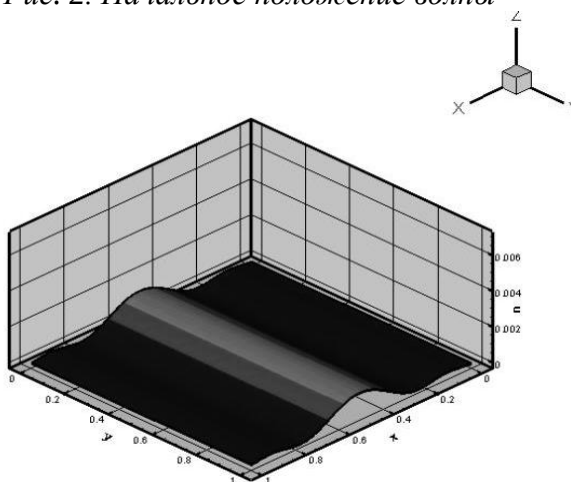


Рис. 3. Появление волны после ее выхода из расчетной области

После того как волна выходит за границы расчетной области, в ней остаются некоторые регулярные колебания, которые много меньше, чем исходная. Из-за этого происходит возвращение первоначальной волны. Возвращенная волна может быть в точности такой, как и изначальная, либо иметь меньшую/большую длину.

Была принята попытка обнаружить закономерность в таком поведении, с целью чего проведен ряд дополнительных расчетов. В результате была предложена гипотеза, указывающая на зависимость проявления факта возвращения от характеристик системы уравнений:

1. Если соотношение шага по пространству и шага по времени больше, чем верхняя характеристика (g), то волна всегда возвращается.
2. Если соотношение шага по пространству и шага по времени меньше, чем нижняя характеристика (H), то волна никогда не возвращается.
3. Если соотношение шага по пространству и шага по времени расположено между характеристиками, то возвращение зависит от остальных параметров.

Расчеты с заданных начальных данных

Дальнейшие расчеты были связаны с поиском таких начальных данных (некоторого «нулевого фона»), которые могли привести к сильным колебаниям поверхности и образовать движущуюся в области волну. Следующий расчет представляет движение волны в области с нулевого фона и нормальный выход из нее.

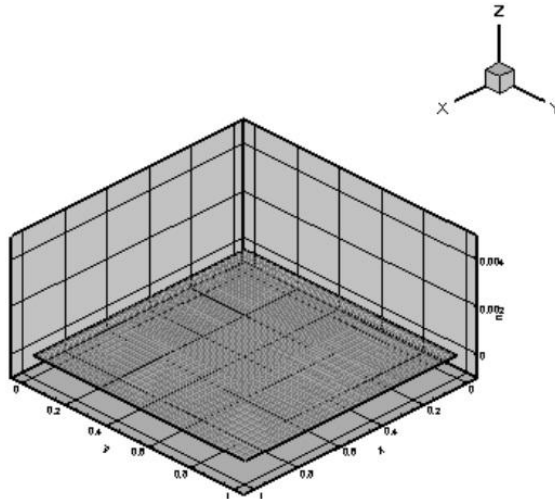


Рис. 2. Начало расчета

Задан «нулевой фон» (рис. 4)

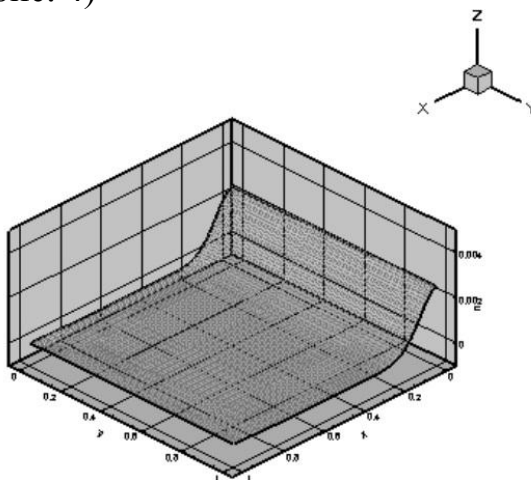


Рис. 5. Начало появления волны

На границе появляется волна (рис. 5).

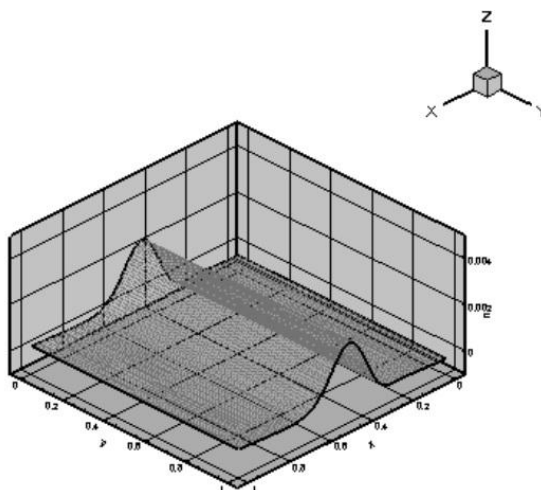


Рис. 6. Движение волны

Волна движется в области и нормально, без искажений выходит из нее, (рис. 6).

Таким образом, было показано, что с помощью данного метода с использованием специально заданных начальных данных можно получить движущуюся в области волну.

Литература

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. – 688 с.
2. Марчук Ан. Г., Чубаров Л.Б, Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами. М.: Наука, 1983. 168 с.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОТЕКАНИЯ НА АДАПТИВНОЙ СЕТКЕ

А.И. Зимин

Кемеровский государственный университет

Введение. Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса. Если рассматривать простую область, то для аппроксимации системы берется прямоугольная равномерная или неравномерная сетка. Если же область имеет сложную форму, то построение прямоугольной сетки затруднительно. В таком случае в области необходимо построить криволинейную пригодную для расчетов сетку. В данной работе решается задача протекания вязкой несжимаемой жидкости в канале заданной формы с предварительным построением криволинейной адаптивной сетки.

Построение сетки. Мы будем рассматривать задачу протекания в канале (рис. 1). Итак, прежде всего, необходимо построить криволинейную сетку в данной области.

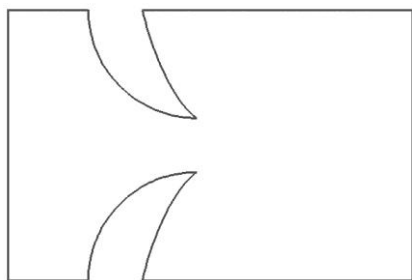


Рис. 3.

Построение сетки в двумерной области начинается с построения сетки на ее границе. Для расстановки узлов на плоских кривых, из

которых составлена граница, используем одномерный метод эквираспределения с заданной единичной управляющей функцией (см. [3]).

После того как построена сетка на границах, переходим к построению сетки в данной области. Для этого предполагаем, что «физическая» область Ω_1 , лежащая в плоскости декартовых координат $x^1 O x^2$, топологически эквивалентна «вычислительной» области Ω_2 – единичному квадрату $[0;1] \times [0;1]$ в плоскости $q^1 O q^2$ (рис. 2).

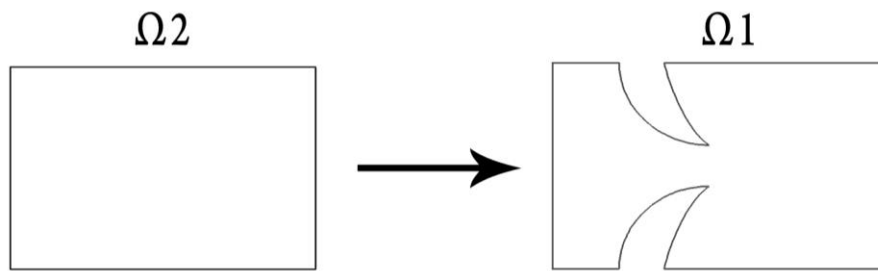


Рис. 4

Покроем вычислительную область Ω_2 равномерной прямоугольной сеткой Ω_{2h} с количеством узлов $(N_1 + 1)$, $(N_2 + 1)$ и шагами $h_1 = \frac{1}{N_1}$, $h_2 = \frac{1}{N_2}$ в направлениях осей Oq^1 и Oq^2 соответственно.

Тогда координаты узлов задаются формулами:

$$q_{j_1}^1 = j_1 h_1, \quad q_{j_2}^2 = j_2 h_2, \quad j_1 = \overline{0, N_1}, \quad j_2 = \overline{0, N_2}.$$

Криволинейной сеткой назовем совокупность узлов $\mathbf{x}_j = (x_{j_1, j_2}^1, x_{j_1, j_2}^2)$, являющихся образами узлов $\mathbf{q}_j$ при отображении $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q})$, т.е. координаты узлов вычисляются по формулам:

$$x_{j_1, j_2}^1 = x^1(q_{j_1}^1, q_{j_2}^2), \quad x_{j_1, j_2}^2 = x^2(q_{j_1}^1, q_{j_2}^2), \quad j_1 = \overline{0, N_1}, \quad j_2 = \overline{0, N_2}.$$

Для построения адаптивной сетки используем ED2-метод, основанный на решении дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Согласно [3] ED2-метод задается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \left(\omega g_{22} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(\omega g_{11} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^2} \right) = 0,$$

где ω – управляющая функция; $\mathbf{x} = (x^1, x^2)$, $g_{\alpha\beta}$ – компоненты метрического тензора.

Разностную задачу для нахождения координат $\mathbf{x}_j$ можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_j &= 0, \quad \mathbf{q}_j \in \Omega_{2h}, \\ \mathbf{x}_j &= \mathbf{x}(\mathbf{q}_j), \quad \mathbf{q}_j \in \partial\Omega_{2h}, \end{aligned}$$

где в качестве краевых условий берутся построенные нами сетки на границах, а в качестве начального приближения можно взять сетку,

полученную с помощью какого-либо алгебраического метода (например, метода трансфинитной интерполяции). Вид оператора Δ и метод решения разностной задачи приводится в [3].

Получив решение, можно сделать вывод, что результат получился неудовлетворительным, так как сетка имеет самопересекающиеся ячейки, а часть ее узлов оказалась за пределами области. Такая сетка является непригодной для проведения расчетов (рис. 3).

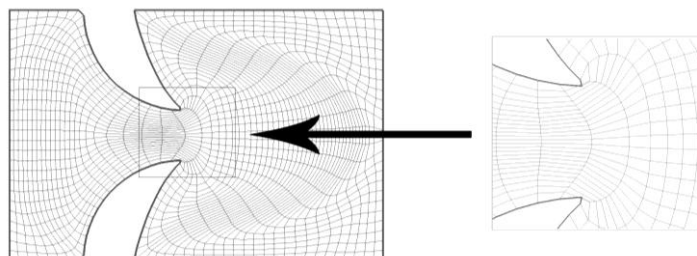


Рис. 5

Одним из возможных решений проблемы самопересекающихся ячеек является разделение области на подобласти. Например, в нашем случае можно разделить область на две подобласти (рис. 4) и в каждой из них построить адаптивную сетку (здесь граница между подобластями – кубический сплайн).

В итоге получаем криволинейную сетку без самопересекающихся и выходящих за границу области ячеек (рис. 5).

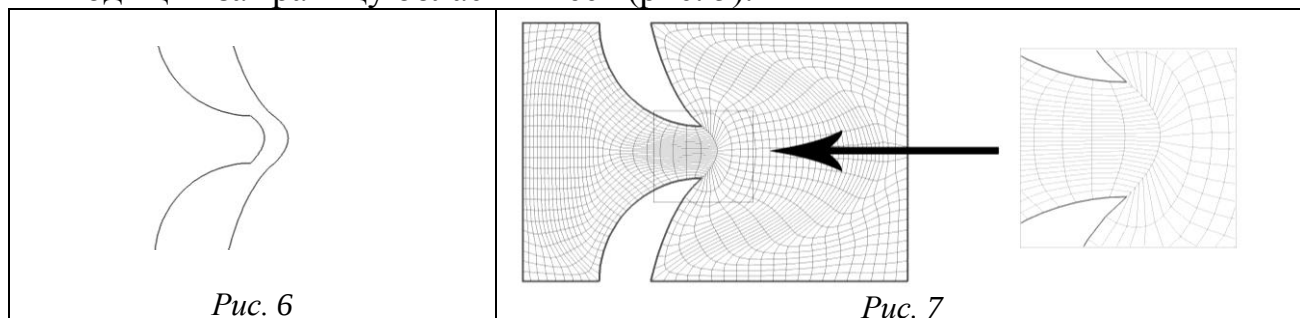


Рис. 6

Рис. 7

Решение задачи. Построив сетку, можно приступить к решению задачи. В двумерном стационарном случае система уравнений Навье–Стокса имеет следующий вид:

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} - \nu \Delta U = 0, \\ U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} - \nu \Delta V = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

где U , V – компоненты скорости; P – давление; ν – коэффициент вязкости; Δ – оператор Лапласа.

Рассмотрим задачу о протекании вязкой однородной несжимаемой жидкости в криволинейном канале с заданным перепадом давления на входе и выходе.

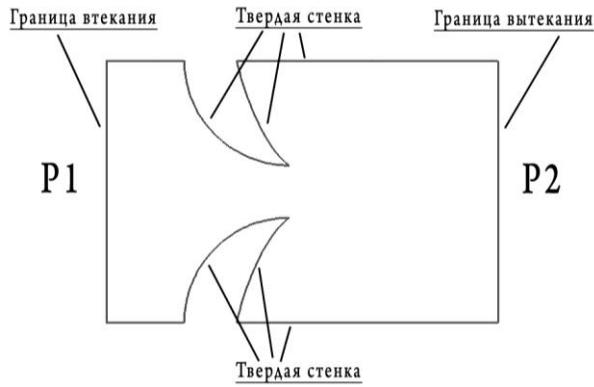


Рис. 8

В качестве краевых условий для твердой стенки будем использовать условие прилипания. На границах втекания и вытекания давление постоянно ($P1$ на входе и $P2$ на выходе), вертикальная компонента скорости V равна нулю. Для замыкания разностной задачи используем аппроксимацию системы уравнений внутри области, (рис. 6).

Чтобы решить задачу протекания на криволинейной сетке, необходимо записать систему уравнений Навье–Стокса в новых координатах q^1 и q^2 , а затем аппроксимировать полученную задачу на равномерной прямоугольной сетке.

Уравнения Навье–Стокса в независимых переменных имеют вид

$$\begin{cases} \frac{1}{I} (A(U)U + B(U)V + A(P)) - \nu \Delta_q U = 0, \\ \frac{1}{I} (A(V)U + B(V)V + B(P)) - \nu \Delta_q V = 0, \\ A(U) + B(V) = 0, \end{cases}$$

$$\text{где } A(U) = y_{q^2} \frac{\partial U}{\partial q^1} - y_{q^1} \frac{\partial U}{\partial q^2}, \quad B(U) = x_{q^1} \frac{\partial U}{\partial q^2} - x_{q^2} \frac{\partial U}{\partial q^1},$$

$$\begin{aligned} \Delta_q U = \frac{1}{I^2} & \left(a \frac{\partial^2 U}{(\partial q^1)^2} + b \frac{\partial^2 U}{(\partial q^2)^2} - c \frac{\partial^2 U}{\partial q^1 \partial q^2} - \frac{1}{I} \left((a(x_{q^1 q^1} y_{q^2} - y_{q^1 q^1} x_{q^2}) - \right. \right. \\ & - c(x_{q^1 q^2} y_{q^2} - y_{q^1 q^2} x_{q^2}) + b(x_{q^2 q^2} y_{q^2} - y_{q^2 q^2} x_{q^2})) \frac{\partial U}{\partial q^1} + (a(y_{q^1 q^1} x_{q^1} - x_{q^1 q^1} y_{q^1}) - \\ & - c(y_{q^1 q^2} x_{q^1} - x_{q^1 q^2} y_{q^1}) + b(y_{q^2 q^2} x_{q^1} - x_{q^2 q^2} y_{q^1})) \frac{\partial U}{\partial q^2} \Bigg), \\ a = (x_{q^2})^2 + (y_{q^2})^2, \quad b = (x_{q^1})^2 + (y_{q^1})^2, \\ c = 2(x_{q^1} x_{q^2} + y_{q^1} y_{q^2}), \quad I = x_{q^1} y_{q^2} - y_{q^1} x_{q^2}. \end{aligned}$$

Для решения поставленной задачи вводим разнесенную сетку на области $\Omega = \{(q^1, q^2) : 0 \leq q^1 \leq 1, 0 \leq q^2 \leq 1\}$ и аппроксимируем систему уравнений при помощи разностных производных первого и второго порядка.

Полученная разностная задача решается методом минимальных невязок:

$$\begin{cases} U^{n+1/2} = U^n - \tau_{n+1} B_n (A(U^n, U^n) - f), \\ U^{n+1} = U^{n+1/2} - \alpha_{n+1} x^n, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где B_n – матрица с элементами, зависящими от U^n ; x^n – некоторый вектор; U^0 – произвольное начальное приближение; τ_{n+1} – итерационный параметр, который выбирается из условия $\min \|r^{n+1/2}\|^2$; α_{n+1} – диагональная матрица размерности m , элементы которой выбираются согласно общей теории (см. [1]).

Результат. Для расчетов была взята тестовая задача $\nu = 0,01$, $P1 = 0,1$, $P2 = 0$. Результат продемонстрирован на рис. 7.

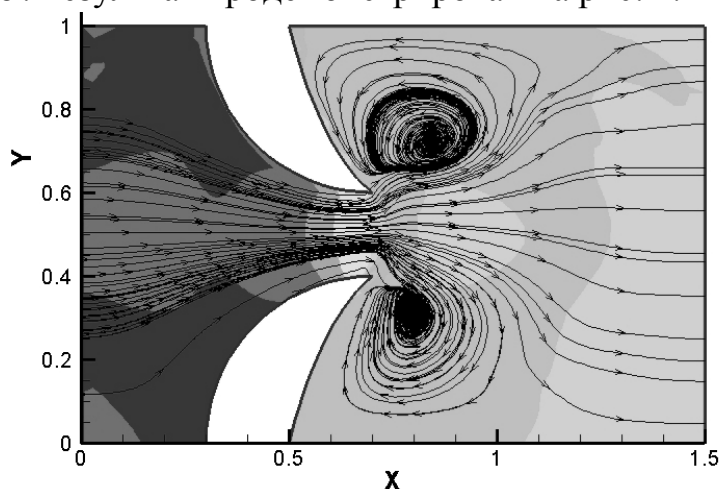


Рис. 9

Заключение. Для решения системы уравнений Навье–Стокса на данной области была построена адаптивная криволинейная сетка. На сетке была аппроксимирована и решена тестовая задача. При решении тестовой задачи были получены вихревые зоны, что является ожидаемым и согласуется с общей теорией.

Литература

1. Захаров Ю.Н., Егорова Е., Толстых М.А., Шокин Ю.И. Метод минимальных невязок решения одного класса нелинейных уравнений. Красноярск, 1991. 31 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М., 1980. 618 с.
3. Шокин Ю.И., Данаев Н.Т., Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Лекции по разностным схемам на подвижных сетках. Ч. 2. Алматы, 2008. 184 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ АНКЕРОВ В НЕУСТОЙЧИВЫХ ПОРОДАХ

Н.А. Иконникова, А.И. Слащев

Национальный горный университет, Украина, Днепрпетровск

На больших глубинах отработки угольных пластов подготовительные выработки, в основном, проводят в неустойчивых породах средней и слабой прочности. В сложных горно-геологических условиях возможности поддержания выработок арочными крепями

практически исчерпались, поэтому одним из основных направлений их сохранения в рабочем и безопасном состоянии является дополнительная установка анкерных систем с высокой несущей способностью. Тем не менее в неустойчивых породах часто происходит разрушение контакта в системе «анкер–смола–порода», анкерные штанги смещаются в шпурах, сохраняется не более 10 % первоначальной несущей способности.

В последние годы разработаны и активно внедряются в производство способы повышения прочности закрепления сталеполимерных анкеров в слабых породах и буровые ставы для их реализации [1–3], сущность которых заключается в придании шпурам различных форм. Оценка напряженно-деформированного состояния (НДС) кровли выработки при применении анкеров, устанавливаемых в шпурах с целенаправленно заданной формой стенок и обладающих повышенной несущей способностью в неустойчивых породах, представляет значительный научный и практический интерес, так как позволяет прогнозировать поведение породного массива и определять наиболее эффективные параметры технологии их установки.

Целью работы является создание компьютерной программы интерактивной визуализации интегральных характеристик геомеханических моделей и оценка НДС породного массива при применении новых типов анкерных систем в неустойчивых породах.

Для решения нелинейных геомеханических задач и оценки состояния породного массива применяют имитационные компьютерные модели, основанные на совмещении процедур метода конечных элементов (МКЭ) и метода начальных напряжений [4–6]. Комплекс имитационного моделирования «ГЕО-РС», разработанный ИГТМ НАН Украины, является апробированным расчетным программным обеспечением, которое реализует данные методы. Вместе с тем в программном комплексе недостаточно доработаны средства визуализации, что не позволяет интерактивно управлять заданием граничных условий и эффективно обрабатывать полученные в результате математического моделирования большие массивы данных (расчетная схема из 15 тысяч элементов содержит около 350 тысяч значений параметров).

Для седьмой версии вычислительного комплекса «ГЕО-РС» разработан графический редактор, который обеспечивает два основных режима: подготовку расчетной схемы и визуализацию результатов расчета. Графическая среда пользователя совместно с расчетным модулем МКЭ составляют единый комплекс, который позволяет сформировать расчетную модель породного массива с выработками произвольной конфигурации, выполнить ее расчет, провести анализ результатов расчета в графическом редакторе или внешнем приложении. Программа имеет следующие преимущества; она может:

- на базе треугольных элементов формировать расчетные схемы породного массива с учетом его структуры и конфигурации выработок;

- вводить исходные прочностные и деформационные характеристики пород послойно и для каждого элемента в отдельности;
- в интерактивном режиме выполнять предварительный просмотр подготовленной схемы;
- работать одновременно в нескольких окнах, что позволяет, используя визуальное представление результатов предыдущего решения, сопоставить результаты расчета и внести корректировку в исходные данные;
- организовать расчет путем вызова расчетного модуля МКЭ;
- управлять отображением расчетных схем и результатов расчета;
- производить экспорт числовых данных во внешние приложения.

Создание, перемещение, копирование, удаление, изменение свойств узлов и элементов выполняется интерактивно, что повышает скорость и удобство работы пользователя.

На основе вычислительного комплекса и разработанного графического редактора проведена оценка напряженно-деформированного состояния массива горных пород кровли подготовительной выработки при анкерном креплении с целенаправленно заданной формой стенок шпуров. Математическое моделирование выполнено для конкретных горно-геологических условий угольного пласта m_3 шахты им. А. Ф. Засядько. Расчетная схема содержит 3705 узлов и 7168 элементов, деформационная модель среды – упругопластическая с разупрочнением, глубина для сопоставительных исследований выбрана в пределах реально достигнутых глубин разработки (800–1300 м). Для описания физико-механических свойств использованы данные геологической разведки и результаты экспериментальных исследований исходных параметров: модуля упругости E , коэффициента Пуассона ν , объёмного веса γ , сцепления C и угла внутреннего трения ϕ для каждого типа элементов (табл.). Определение предельных состояний породного массива дает возможность максимально приблизить математическую модель разрушения неупругой среды к реальному поведению горных пород под действием нагрузки.

Физико-механические свойства моделируемых горных пород

Наименование	Мод. упруг., E , МПа	Кэф. Пуассона, μ	Объем. вес, МН/м ³	Сцепление C , МПа	Угол внутр. трени., град	Предел прочности, $\sigma_{сж}$, МПа	Кэф. креп., f	Предел прочности, σ_p , МПа
Песчаник крепкий	$1,81 \times 10^5$	0,28	0,027	27	45	130,0	13,0	5,4
Алеврит (мин.)	26000	0,27	0,022	10,64	20	30,4	3,0	2,1
Алеврит (средн.)	26000	0,27	0,022	15,2	20	43,4	4,3	3,0
Алеврит (макс.)	26000	0,27	0,022	19,76	20	56,40	5,6	4,0
Аргиллит неуст.	3500	0,29	0,024	7,4	41	32,5	3,3	1,5
Уголь трещинов.	2510	0,25	0,014	6	27	19,6	2,0	1,2
Анкер	2×10^6	0,28	0,078	800,0	40	420,0		160,0

При моделировании предельные напряжения в области сжатия автоматически ограничивались пределом прочности на сжатие по критерию Кулона. Предельные напряжения в области растяжения ограничивались пределом прочности на растяжение, равным $C/5$ для элементов, не выходящих в пластику, и равным нулю для элементов, выходящих в пластику на предыдущих циклах итераций. При проведении каждой последующей итерации программа автоматически отслеживала состояние каждого элемента и производила необходимые замены даже при разрыве одной связи между узлами. Это является существенным преимуществом, так как дает широкие возможности для определения наиболее вероятных областей зарождения и прогноза распространения зон разрушения в массиве, позволяет детально исследовать сложные геомеханические процессы. В зависимости от приложенной (заданной) нагрузки программный комплекс вычисляет основные информативные параметры для промежуточных или конечных состояний системы.

На рис. 1 представлены распределения максимальных сжимающих напряжений в породном массиве вокруг сталеполимерных анкеров, полученные для условий установки анкеров по трудоемкой технологии с нарезкой двух пазов [1, 2] и по технологии непрерывного бурения с нарезкой трехзаходного винтового паза, образующегося в результате динамического детерминированно-хаотического процесса [3, 7, 8]. Как видно из рисунка, при малых перемещениях анкерных штанг создаются локальные зоны сжатия, за счет чего повышается несущая способность анкерной системы и рамно-анкерной крепи в целом. Данный эффект связан с тем, что размер указанных зон значительно больше максимального диаметра анкера вместе с полимером, поэтому и разрушение породы от сдвига происходит на значительно большей поверхности, окружающей анкер, а следовательно, такая система обладает более высокой несущей способностью.

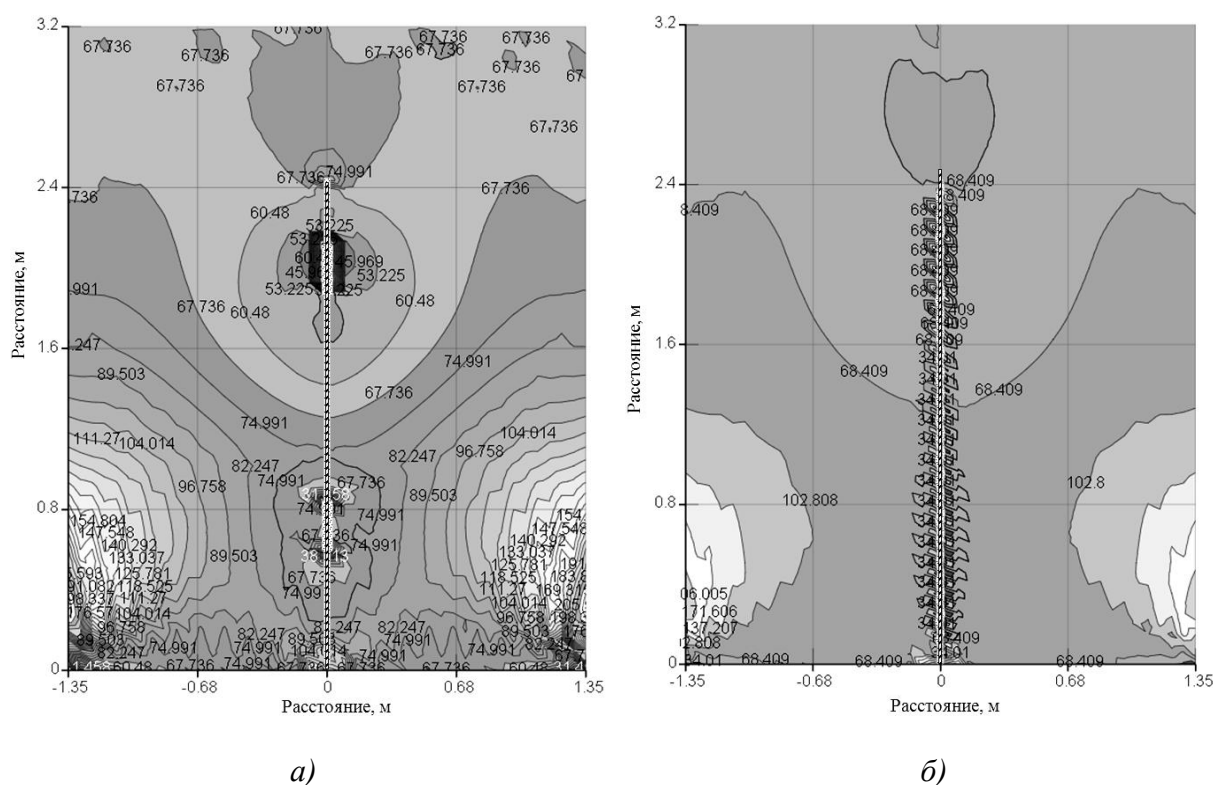


Рис. 1. Распределение главных сжимающих напряжений вокруг сталеполимерного анкера: а – с двумя полимерными выступами; б – с винтовым полимерным слоем (величины значений напряжений на карте представлены в МПа, например 67,736 МПа)

Сопоставление распределений напряжений (см. рис. 1) позволило выявить явные преимущества новой технологии, поскольку более равномерное поле напряжений снижает возможность возникновения разрушений. Наиболее убедительно преимущества новых способов установки сталеполимерных анкеров оценены по средним смещениям кровли подготовительной выработки, которые при малых смещениях стержня анкера снижаются до 40 %. Установлено, что высокая несущая способность анкера в режиме податливости поддерживается за счет сил трения по поверхностям среза.

Опытно-промышленная проверка подтвердила данные численных экспериментов. В результате применения данной технологии при креплении конвейерного штрека 2-й западной лавы опускание кровли выработки, подверженной влиянию проходческих и очистных работ, не превысило 300 мм, что находится в пределах податливости трехзвенной арочной крепи и является весьма удовлетворительным результатом промышленной проверки работы системы сталеполимерных анкеров. Установлено, что данная технология не только позволяет увеличить скорость проходки выработки, но и существенно повышает их устойчивость, что обеспечивает возможность их повторного использования.

Литература

1. Пат. № 39204 Украина, МПК (2009) E21D 20/00; E21B 19/00. Буровой став для нарізки шпура / Б. В. Бокий, А. А. Цикра, В. С. Возиянов и др.; заявитель и собственник патента ИГТМ НАН Украины; опубл. 10.02.2009.
2. Пат. № 41968 Украина, МПК (2009) E21D 20/00. Способ закрепления анкера в слабых породах / А. А. Цикра, В. С. Возиянов, В. Б. Колбасенко и др.; заявитель и собственник патента ИГТМ НАН Украины; опубл. 25.06.2009.
3. Пат. № 58761 Украина, МПК (2011.01) E21D 20/00 Способ закрепления анкера в породах горной выработки / А. А. Цикра, П. Е. Филимонов, В. С. Возиянов и др.; заявитель и собственник патента ИГТМ НАН Украины; опубл. 26.04.2011.
4. *Галагер Р.* Метод конечных элементов. Основы: пер. с англ. / Р. Галагер. М.: Мир, 1984. 428 с.
5. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. М.: Мир, 1975. 238 с.
6. *Фадеев А.Б.* Метод конечных элементов в геомеханике / А. Б. Фадеев. М.: Недра, 1987. 221 с.
7. *Корсун В.И.* Математическое моделирование динамики хаотических процессов в инженерно-экологических системах / В.И. Корсун, А.А. Яланский, Н.А. Иконникова, Т.А. Яровая // Математ. методы в технике и технологиях. Междунар. науч. конф. ММТТ-23. Саратов: Саратовский гос. техн. ун-т, 2010. Т. 5. С. 51–54.
8. *Оценка* хаотичности процессов, происходящих в горных технических системах, особенности управления и использования / А.А. Яланский (ст.), И.Н. Слащев, А.А. Яланский и др. // Геотехническая механика. Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2010. № 91. С. 159–172.

РАСЧЕТ ИНДУКТИВНОСТИ ИНДУКТОРА КОАКСИАЛЬНОГО МАГНИТОПЛАЗМЕННОГО УСКОРИТЕЛЯ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА ВКЛАД КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ИСХОДНУЮ ЭНЕРГИЮ СИСТЕМЫ

Ю.Н. Исаев, О.В. Васильева

Томский политехнический университет

Описывается влияние индуктивности индуктора коаксиального магнитоплазменного ускорителя на вклад кинетической энергии в исходную энергию системы для двух различных моделей ускорителя. Исследование осуществляется на примере модельных коаксиальных магнитоплазменных ускорителей соответствующих реально используемых на практике устройств [1–2].

Коаксиальный магнитоплазменный ускоритель является электроэрозийным ускорителем, так как рабочий материал нарабатывается электроэрозийным путем с поверхности ускорительного канала. На рис. 1, 2 представлены упрощенные модели коаксиальных магнитоплазменных ускорителей (КМПУ). Для описания процессов, происходящих в КМПУ, представим их как электромеханические устройства, считая, что масса и сопротивление плазмы R постоянны с емкостью C и напряжением U_0 . Сгусток представляется как недеформируемая проводящая перемычка, ускоряемая силами магнитного давления собственных токов, протекающих в ускорителях через перемычку. Будем считать, что плазменный сгусток

локализован и устойчив в процессе ускорения его как единого целого. Индуктивность индуктора L_0 рассчитана на основе расчета энергии магнитостатического поля [3–4]. Индуктивность плазменного жгута L' записана в виде линейной функции координаты распространения, где погонная индуктивность была рассчитана на основе [5–6].

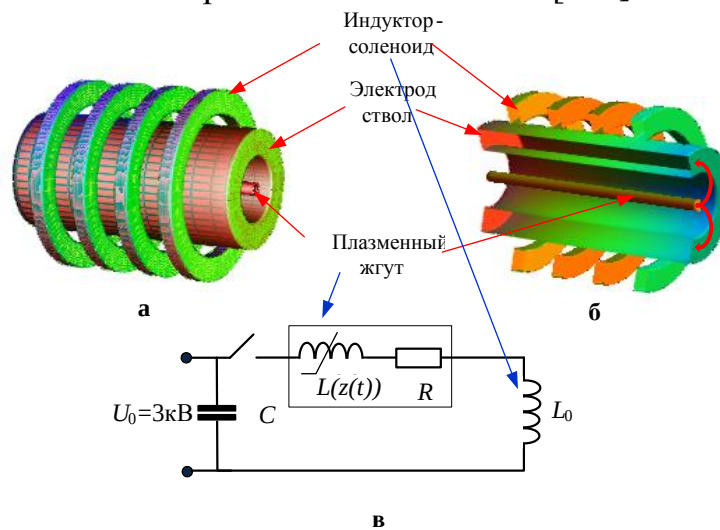


Рис. 1. Упрощенная модель №1

$$C = 30 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}, L_0 = 8,764 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}, L' = 4,6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}, U_0 = 3 \text{ кВ}$$

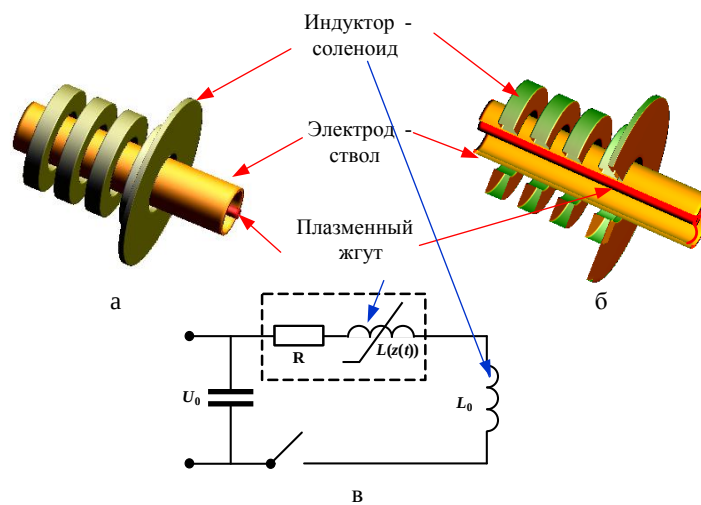


Рис. 2. Упрощенная модель №2

$$C = 12 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}, L_0 = 1,722 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}, L' = 4,6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}, U_0 = 3 \text{ кВ}$$

Для сравнения двух используемых моделей приведем значения вклада кинетических энергий $W_{\text{кин}}$ в исходную энергию системы W_0 (рис. 3).

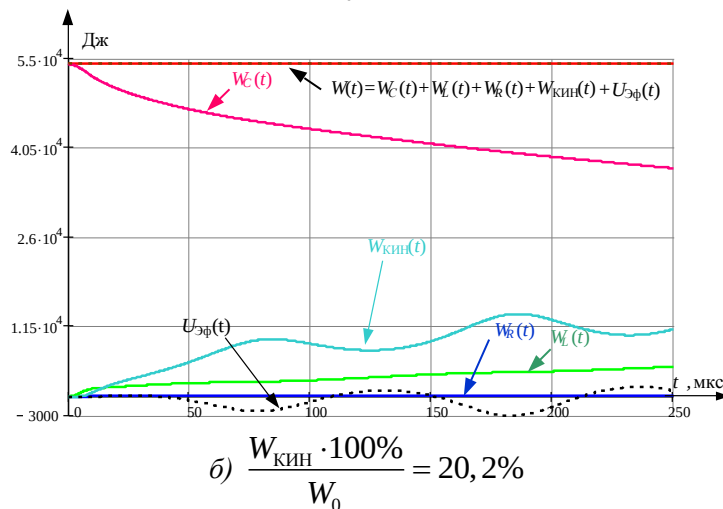
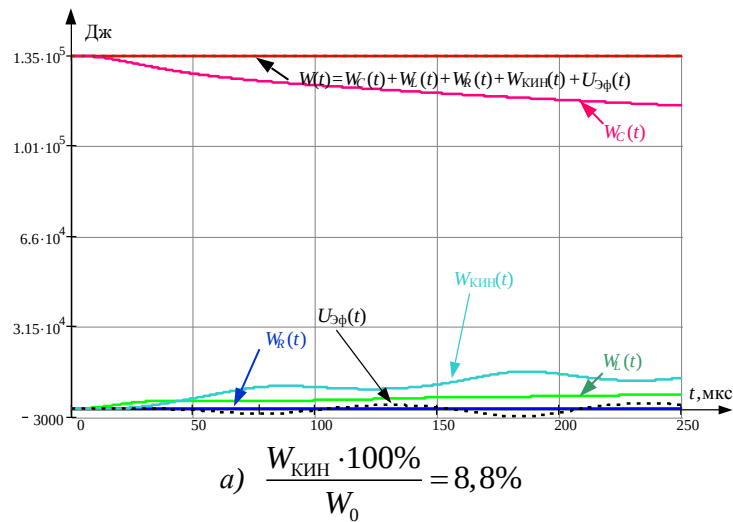
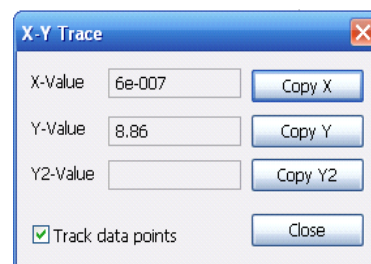
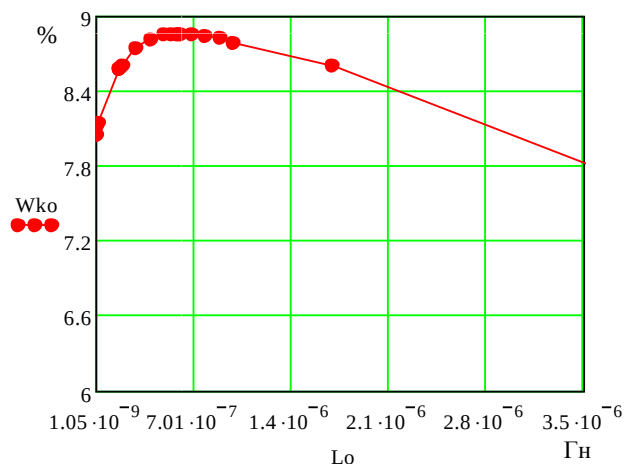


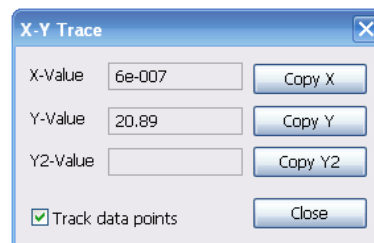
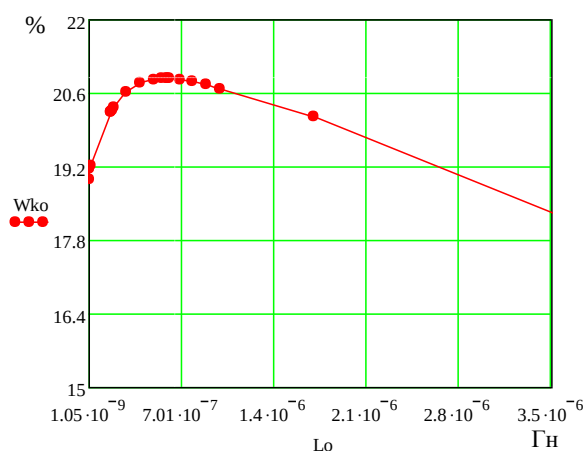
Рис. 3. Вклад кинетической энергии в исходную энергию системы в сравнении:
а – модель №1 $C = 30 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}$, $L_0 = 8,764 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$, $L' = 4,6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$, $U_0 = 3 \text{ кВ}$;
б – модель №2 $C = 12 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}$, $L_0 = 1,722 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$, $L' = 4,6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$, $U_0 = 3 \text{ кВ}$

Таким образом, из полученных графиков можно сделать следующий вывод. С увеличением индуктивности индуктора увеличивается поперечная составляющая скорости, что положительно влияет на эрозию металлов и получение ультрадисперсных порошков, уменьшается скорость изменения тока, стабилизируются ток и плазма в ускорительном канале. С уменьшением индуктивности индуктора увеличивается кинетическая энергия системы, тем самым увеличивая скорость плазменного сгустка.

На рис. 4 представлено влияние индуктивности индуктора КМПУ на вклад кинетической энергии в исходную энергию системы.



а) Модель №1



б) Модель №2

$$\text{где } W_{k0} = \frac{W_{\text{кин}} \cdot 100\%}{W_0}, \quad L_{0\min} = 1,05 \cdot 10^{-9} \text{ Гн}$$

Рис. 4. Влияние индуктивности индуктора КМПУ на вклад кинетической энергии в исходную энергию системы в сравнении

Из рисунка видно, что оптимальное значение индуктивности индуктора для двух моделей КМПУ равно $L_0 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$. При этом значении величина кинетической энергии для модели №1 КМПУ достигает максимального значения $W_{\text{кк}} = 8,86\%$, а для модели №2 $W_{\text{кк}} = 20,89\%$. Снижение кинетической энергии в диапазоне индуктивности $L_0 = 1,05 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$ обусловлена тем, что при значительном уменьшении индуктивности индуктора увеличивается скорость изменения, неустойчивость плазмы. Высокочастотные составляющие тока проявляются при величине индуктивности меньше минимально допустимого значения $L_{0\min} = 1,05 \cdot 10^{-9} \text{ Гн}$. Величина минимальной индуктивности определялась из условия отсутствия высокочастотных составляющих тока при расчете баланса энергии вариационным методом.

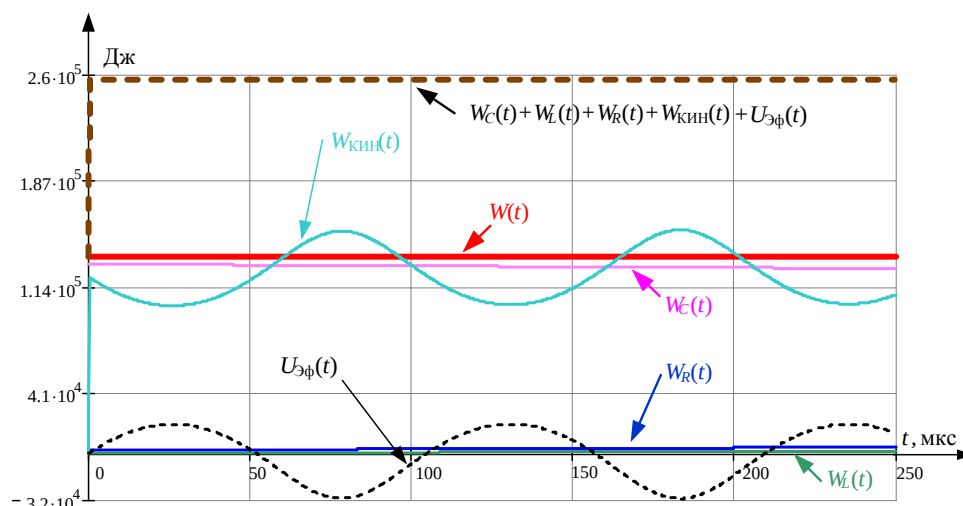


Рис. 5. Дисбаланс, при котором проявляются высокочастотные составляющие тока $W(t) \neq W_C(t) + W_L(t) + W_R(t) + W_{\text{кин}}(t) + U_{\text{эф}}(t)$

Ниже приводится таблица сравнения экспериментальных и расчетных данных.

Сравнение экспериментальных и расчетных данных

Величина	Эксперимент	Теория
Индуктивность L_0 , Гн	$(2 \div 6) \cdot 10^{-7}$	$1,72 \cdot 10^{-7}$
Скорость v , м/с	$4 \div 10$	6
Ток I , кА	$100 \div 150$	90
Пространственная длительность процесса x , мм	240	250
Ускорение a , км/с ²	$2 \cdot 10^5$	$1,8 \cdot 10^5$

Таким образом, модель правильно отражает тенденцию изменения процесса. Расхождение с экспериментальными данными составило около 20 %, что согласуется с расчетами экспериментаторов и говорит об адекватности разработанной модели.

Дано полное представление об относительных вкладах различных видов энергий в формирование процесса и влиянии различных типов диссипации энергии, процессов переноса и трансформаций одного вида энергии в другой.

Показано отрицательное влияние величины индуктивности индуктора КМПУ на скорость плазменного сгустка – при увеличении индуктивности увеличивается продольная составляющая магнитного поля, следовательно, поперечная составляющая скорости заряженных частиц в плазменном сгустке.

Показано положительное влияние величины индуктивности индуктора КМПУ – при увеличении индуктивности последовательного

электрического контура происходит стабилизация тока или увеличивается его сглаженность, стабилизируется неустойчивость плазмы, при этом усиливается трение частиц заряженных частиц об электрод-ствол, следовательно, увеличивается эрозия металла.

Показана минимально допустимая величина индуктивности индуктора КМПУ, ниже которой проявляются высокочастотные составляющие тока (рис. 5).

Литература

1. Сивков А.А., Герасимов Д.Ю., Цыбина А.С. Электроэрозийная наработка материала в коаксиальном магнитоплазменном ускорителе для нанесения покрытий // Электротехника. Томск, 2005. № 6. С. 25–33.
2. Сивков А.А., Корольков В.Л., Сайгаи А.С. Нанесение медного покрытия на алюминиевые контактные поверхности с помощью магнитоплазменного ускорителя // Электротехника. 2003. № 8. С. 41–46.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2: Теория поля. М.: Наука, 1992. 533 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1: Механика. М.: Наука, 1992. 222 с.
5. Сивков А.А., Исаев Ю.Н., Васильева О.В., Купцов А.М. Математическое моделирование коаксиального магнитоплазменного ускорителя // Известия Томского политехнического университета. 2010. Т. 317, № 4. С. 33–41.
6. Васильева О.В., Исаев Ю.Н., Колчанова В.А. Расчет индуктивности на основе расчета электромагнитного поля // Электромеханические преобразователи энергии: Материалы IV Международной научно-технической конференции. Томск, 13-16 октября 2009. Томск: ТПУ, 2009. С. 381–384.

АЛГОРИТМ ПОЛУЧЕНИЯ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ СЛОЖНЫХ ЯВЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ И ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Е.С. Казан, Е.С. Мурашкина

Кемеровский государственный университет

Управление сложными социально-экономическими процессами невозможно без получения достоверной информации об объекте управления. Поэтому задача измерения различных социально-экономических явлений и процессов является актуальной. Исследуемые социально-экономические явления, как правило, представляют собой сложную структуру, состоящую из ряда компонент, для измерения каждой из которых не существует единых методик получения количественных оценок.

Рассмотрим алгоритм получения количественной оценки таких явлений.

1. На первом этапе необходимо представить изучаемое явление в виде многоуровневой иерархической модели, фокусом иерархии которой является оцениваемое явление.

2. Мы предполагаем, что не все составляющие иерархической модели оказывают одинаковое воздействие на фокус иерархии. Так как

измеряются только компоненты нижнего уровня иерархии, то на втором этапе исследования необходимо определить степень влияния компоненты нижнего уровня иерархии на фокус иерархии. Данную степень влияния назовем важностью компоненты. Для оценки важности каждой компоненты предлагается использовать МАИ [1].

3. На третьем этапе исследования необходимо провести измерение составляющих нижнего уровня иерархической модели. То есть оценить степень выраженности каждой компоненты. Так как составляющие нижнего уровня иерархии могут иметь различные единицы (тонны, штуки, метры и т.д.) и диапазоны измерения, то для определения степени выраженности компоненты предлагается использовать лингвистический подход. Каждая составляющая представляется в виде лингвистической переменной с соответствующим терм-множеством.

Пусть для описания функции принадлежности соответствующих термов используется триангулярная [2] функция принадлежности (1).

$$\mu_{v_i}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \end{cases} \quad (1)$$

4. Пусть четкая оценка компоненты получена с помощью экспертного опроса либо представляет собой ответы респондентов на вопросы анкеты. Полученный результат с помощью процедуры фазификации необходимо перевести в величину $m_{ij}^{(k)}$, являющуюся значением функции принадлежности соответствующего терма (см. таблицу 3).

В результате проведения процедуры фазификации получают матрицу $M(X)$, элементами которой являются значения функций принадлежности соответствующих термов.

5. Пусть в результате изучения исследуемого явления была построена двухуровневая иерархическая модель. Нулевой уровень – это фокус иерархии, само изучаемое явление. Тогда алгоритм получения нечеткой оценки проводится в три этапа [3].

На первом этапе определяется вектор

$$(R(i,1), R(i,2), \dots, R(i,n)) = (W_2(i,1), W_2(i,2), \dots, W_2(i,n(i))) \times M(X_i), \quad (2)$$

то есть вектор значений весовых коэффициентов составляющих второго уровня умножается на матрицу значений функций принадлежности для каждой составляющей компоненты X_i .

На втором этапе оценки вектор приоритетов компонент первого уровня иерархии умножается на матрицу, полученную на первом этапе.

$$(R_2(1), R_2(2), \dots, R_2(n)) = (W_1(1), W_1(2), \dots, W_1(n)) \times \begin{pmatrix} R_1(1) \\ R_1(2) \\ \dots \\ R_1(n) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $R_2(i) = \sum_{k=1}^n W_1(k) \times R(k, i)$.

Третий этап оценки изучаемого явления заключается в процедуре дефазификации центроидным методом. Центр масс каждого терма $VG(i)$ определяется по формуле (4):

$$VG(i) = \frac{\int_{x_{i\min}}^{x_{i\max}} x\mu(x)dx}{\int_{x_{i\min}}^{x_{i\max}} \mu(x)} \quad (4)$$

Тогда четкая оценка явления y определяется по формуле (5):

$$y = \frac{\sum_{i=1}^4 VG(i) \cdot R_2(i)}{\sum_{i=1}^4 R_2(i)}. \quad (5)$$

Рассмотрим работу вышеизложенного алгоритма на примере получения количественной оценки социального капитала региона.

Социальный капитал региона был представлен в виде двухуровневой иерархической модели. С помощью метода анализа иерархий были вычислены весовые коэффициенты составляющих всех уровней иерархии. Каждая компонента нижнего уровня иерархии была представлена в виде лингвистической переменной с тремя термами: Т1 – «низкий» Т2 – «средний» Т3 – «высокий». С помощью анкетного опроса для каждого предпринимателя были получены четкие оценки составляющих нижнего уровня иерархии. В таблице представлены результаты проведения процедуры фазификации по данным опроса конкретного предпринимателя.

Таблица 1

Результаты проведения процедуры фазификации

Признак	Составляющая признака	Измеренное значение показателя	Вес 2 (первый уровень иерархии)	Вес 1 (второй уровень иерархии)	Лингвистические переменные		
					T1	T2	T3
X1			0,05				
	X11	5		0,54	0	1	0
	X12	7		0,16	0	0,6	0,4
	X13	4		0,3	0,2	0,8	0
X2			0,51				
	X21	6		0,45	0	0,8	0,2
	X22	5		0,1	0	1	0
	X23	3		0,45	0,4	0,6	0
X3			0,33				
	X31	3		0,35	0,4	0,6	0
	X32	4		0,07	0,8	0,2	0
	X33	6		0,58	0	0,8	0,2
X4			0,11				
	X41	2		0,07	0,6	0,4	0
	X42	6		0,58	0	0,8	0,2
	X43	4		0,35	0,2	0,8	0

Используя данные таблицы, определяем вектор $R_1(1)$, представляющий собой нечеткие значения переменной X1, полученные после фазификации с учетом весовых коэффициентов составляющих:

$$\begin{aligned}
 R_1(1) &= (R(1,1), R(1,2), R(1,3), R(1,4)) = \\
 &= (0,54 \ 0,16 \ 0,3) * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} = (0,06; 0,876; 0,064).
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются $R_1(2)$, $R_1(3)$, $R_1(4)$:

$$(R(1,1), R(1,2), R(1,3), R(1,4)) = (0,18; 0,73; 0,09) = R_1(2).$$

$$(R(1,1), R(1,2), R(1,3), R(1,4)) = (0,196; 0,688; 0,116) = R_1(3).$$

$$(R(1,1), R(1,2), R(1,3), R(1,4)) = (0,112; 0,772; 0,116) = R_1(4).$$

На втором этапе оценки вектор приоритетов компонент первого уровня иерархии умножается на матрицу, полученную на первом этапе. Так, например, оценка составляющей X1 вычисляется следующим образом:

$$R_2(1) = (0,05; 0,51; 0,33; 0,11) \times \begin{pmatrix} 0,06 \\ 0,18 \\ 0,196 \\ 0,112 \end{pmatrix} = 0,1718.$$

Аналогичным образом получаем: $R_2(2) = 0,72806$; $R_2(3) = 0,51324$; $R_2(4) = 0$.

Тогда, проводя процедуру дефазификации центроидным методом, четкая оценка социального капитала для данного предпринимателя вычисляется по формуле (5) и будет равна

$$y = \frac{0,1666 \cdot 0,15794 + 0,5 \cdot 0,74192 + 0,8333 \cdot 0,10014}{0,15794 + 0,74192 + 0,10014} \approx 0,480733.$$

Работа выполнена при поддержке гранта РГНФ №11-12-42002а/Т «Экономическая оценка социального капитала, сложившегося во взаимоотношениях власти и бизнеса (на примере Кемеровской области)».

Литература

1. Саати Т. Принятие решений. Метода анализа иерархий / Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1993. 320 с.
2. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. 736 с.
3. Lee H.M. Applying fuzzy set theory to evaluate the rate of aggregative risk in software development // Fuzzy Sets and Systems. 1996. Vol. 79. P. 323–336.

О НЕКОТОРЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Г.А. Киришина, А.Г. Ложкин

Ижевский государственный технический университет

Точность геометрического моделирования определяет эксплуатационные свойства проектируемого изделия. В свою очередь от данных характеристик зависят не только потребительские свойства объекта проектирования, но и, в конечном счете, человеческая жизнь. Именно поэтому был разработан метод, позволяющий увеличить точность вычислений. На основе метода выявлена цепочка линейных преобразований для нахождения точек пересечения эллипса и прямой, а также случай пересечения двух произвольно расположенных эллипсов.

Метод цепочек преобразований является основным отличием вычислительной геометрии от классической геометрии. Развиваемое направление геометрии [1] относится к информационно-лингвистической интерпретации, поэтому всегда проводятся вычислительные эксперименты для подтверждения полученных результатов.

Первый эксперимент был направлен на проверку того, как ведет себя цепочка преобразований на достаточно простом примере пересечения эллипса и прямой. Данный метод состоит из 2 частей: прямые и обратные преобразования. Для проверки данной теории составлена математическая модель и написана программа моделирования при различных параметрах эксперимента. В результате найденные точки пересечения данным способом верны при любых условиях. Такой простой пример был взят, так как точки пересечения эллипса и прямой можно легко проверить методами линейной алгебры [2] и аналитической геометрии [3]. Данный эксперимент

показал, что метод цепочек преобразований эффективен и точен при нахождении пересечения эллипса и прямой.

Для второго эксперимента был выбран более сложный случай — пересечение двух эллипсов. Также метод состоит из прямых и обратных преобразований, но этапов в данном случае больше. Если в первом эксперименте всего 4 прямых и 4 обратных, то во втором — 7 прямых и 7 обратных этапов.

Основная сложность возникла с преобразованием вида $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix}$, так как выявляется неоднородность пространства, и координаты точки центра второго эллипса не лежат на оси OX или OY . В ходе работы над экспериментом составлена математическая модель и реализована программа для моделирования при различных параметрах не только эллипсов, но и условий эксперимента. Это помогло выявить некоторые закономерности при эксперименте. Он не увенчался таким же успехом, но дал достаточно весомые результаты исследования. Выявлено следующее:

- 1) найден общий базис для двух эллипсов;
- 2) угол радиус вектора центра второго эллипса не зависит от других преобразований, кроме h или g ;
- 3) получили, что метод не работает из-за неоднородности пространства;
- 4) разброс точек центра второго эллипса при преобразовании h происходит относительно оси OX , а при преобразовании g относительно оси OY ;
- 5) выяснили, что в некоторых случаях получили близкие результаты при сжатии g , а в некоторых при сжатии h . Например, при $\Delta\varphi = 15, 30, 45, -45, -75$ получили, что сжатие эффективнее по g , а в остальных случаях по h .

Анализируя эти два эксперимента, можно утверждать, что данный метод имеет место на жизнь, но должен быть доработан для сложных фигур. Метод цепочек преобразований по сути дела является симметрией с ортогональными преобразованиями для случая пересечения эллипса с прямой и неортогональным для случая пересечения двух эллипсов [4].

Моделирование показало, что, несмотря на алгебраический вывод общего базиса [1], в результате эксперимента фактически всегда получается ошибка в повороте центра эллипса. Ошибка связана с появлением неоднородности пространства и не решается средствами поворотов в псевдоевклидовой или римановой плоскости. Метод цепочек преобразований основывается на двух младших автоморфизмах, поэтому было принято решение провести ряд исследований с использованием инвариантов Клейна.

Литература

1. *Ложкин А.Г.* Вычислительная планиметрия с вырожденными преобразованиями. Екатеринбург: Изд-во Института экономики Уро РАН, 2009. 158 с.
2. *Vince J.* Vector Analysis for Computer Graphics. New York: Springer-Verlag, New York, 2007. 260 p.
3. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры. М.: Наука, 1968. 912 с.
4. *Ложкин А.Г., Дюкина Н.Г.* Автоморфизмы: от зеркального к симметрии знаний. Глазов: ГИЭИ, 2011. 183 с.

АЛГОРИТМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПЕРЕНОСА И ДИФФУЗИИ

Н.В. Комиссарова, В.В. Комиссаров, О.Н. Чащин

Сибирская государственная геодезическая академия, г. Новосибирск

Новосибирский государственный технический университет

Сибирский университет потребительской кооперации, г. Новосибирск

В работе рассматривается численное решение обратных задач для параболического уравнения. Подобные задачи возникают при решении ряда научных, инженерных и технологических задач, связанных с переносом тепла и диффузией. Обратная коэффициентная задача для параболического уравнения является математической моделью задачи определения теплопроводящих характеристик неоднородной среды.

Представленный авторами алгоритм может служить базовым (блоком-решателем) при моделировании мониторинга тепловых процессов в строительстве, эксплуатации зданий и сооружений.

Аналогичные постановки использованы авторами при изучении тепловых процессов в глубинных слоях Земли, а также при предварительной проработке технологий горно-геологических и строительных работ в условиях вечной мерзлоты для моделирования и прогнозирования процессов промерзания и протаивания [1].

Рассматриваются следующие обратные задачи для линейного уравнения параболического типа:

$$u_t = a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u, \quad x > 0, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

с начальными данными:

$$u(0, t) = f(t), \quad u_x(0, t) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

и условием финального наблюдения:

$$u(x, T) = h(x). \quad (3)$$

Задача А: Определить пару функций $(a(x), u(x, t))$, удовлетворяющих условиям (1) – (3), при известных $b(x)$ и $c(x)$.

Задача В: Определить пару функций $(b(x), u(x, t))$, удовлетворяющих условиям (1) – (3), при известных $a(x)$ и $c(x)$.

Задача С: Определить пару функций $(c(x), u(x, t))$, удовлетворяющих условиям (1) – (3), при известных $a(x)$ и $b(x)$.

Для обратных задач А, В и С установлен следующий характер неоднозначности [1]: если известны два из трех коэффициентов уравнения

(1) и выполнены условия (2), (3), то третий коэффициент определяется единственным образом.

Физический смысл коэффициентов уравнения (1) таков: $a(x)$ – коэффициент внутренней теплопроводности, $b(x)$ – коэффициент, пропорциональный потоку тепла, коэффициент $c(x)$ пропорционален сносу тепла, которые предполагаются не зависящими от времени. Такое предположение обосновано в учебнике [2].

Решение прямой задачи (1) – (2) $u(x, t)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению 2-го рода [1]:

$$u(x, t) = \int_0^x (x - \xi) F(\xi, t) d\xi + f(t). \quad (4)$$

Функция $F(\xi, t)$ для задачи А имеет вид:

$$F(\xi, t) = (u_t(\xi, t) - b(\xi)u_\xi(\xi, t) - c(\xi)u(\xi, t)) \cdot \frac{h''(\xi)}{u_t(\xi, T) - b(\xi)h'(\xi) - c(\xi)h(\xi)}. \quad (5)$$

Функция $a(x)$, при найденной функции $u(x, t)$, определяется из соотношения:

$$a(x) = [u_t(x, T) - b(x)h'(x) - c(x)h(x)]/h''(x). \quad (6)$$

Решение задачи А находится путем конечно-разностной аппроксимации входящих в выражение ядра $F(\xi, t)$ производных разностными отношениями, а интегрирование аппроксимируется квадратурной формулой. В работе [3] проведено тестирование метода в классах функций, экспоненциально убывающих по обоим переменным, что соответствует физическим условиям протекания процессов диффузии и теплопереноса с прямым течением времени. Описанный выше регуляризирующий алгоритм показал хорошую устойчивость к случайным аддитивным помехам до уровня 10%.

В настоящей работе приводятся результаты тестирования метода в классе экспоненциально возрастающих функций для обратной задачи А как самой неустойчивой из указанных обратных задач. Такой выбор класса модельных функций соответствует обратному течению времени. При численном решении задачи А в этом случае необходимо сглаживание данных, возмущённых случайным образом. Задачи В и С тестируются аналогично и дают более устойчивые решения.

Для тестирования алгоритма выберем функции $u(x, t)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ в виде

$$u(x, t) = e^{\alpha t} e^{\beta x^2 + \delta}, \quad \alpha = 1, \beta = 0.1, \delta = 2,$$

$$a(x) = \frac{\alpha}{2\beta + 4\beta^2 x^2}, \quad a(x) > 0, \quad b(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda = -0.7, \quad c(x) = -2\beta x e^{\lambda x}.$$

Непосредственной подстановкой проверяется выполнимость соотношения (1) при заданных функциях.

Решение интегрального уравнения (4) находилось методом последовательных приближений:

$$u^{n+1}(x_i, t_j) = u_{i,j}^{n+1} = \int_0^{x_i} (x_i - \xi) F(\xi, t_j) d\xi + f(t_j),$$

здесь $F(\xi, t_j) = F(x_i, \xi, T, t_j)$.

Производные от функции $u(x, t)$, необходимые при вычислении подынтегральной функции, определялись через их разностные аналоги:

$$\begin{aligned} u_t(\xi, t_j) &= \frac{u(\xi, t_j) - u(\xi, t_{j-1})}{\tau} = \frac{u_{k,j} - u_{k,j-1}}{\tau}, \\ u_t(\xi, T) &= \frac{u(\xi, t_N) - u(\xi, t_{N-1})}{\tau} = \frac{u_{k,N} - u_{k,N-1}}{\tau}, \\ u_\xi(\xi_k, t_j) &= \frac{u(\xi_k, t_j) - u(\xi_{k-1}, t_j)}{\eta} = \frac{u_{k,j} - u_{k-1,j}}{\eta}. \end{aligned}$$

Начальное приближение $u^0(x, t)$ выбиралось в виде $u^0(x, t) = f(t)$. Интеграл вычислялся с помощью квадратурной формулы трапеций. Информация для решения, функции $f(t)$, $h(x)$ определялись с учётом выбранной модели:

$$f(t) = u(0, t) = e^{\alpha t + \delta}, \quad h(x) = u(x, T) = e^{\alpha T} e^{\beta x^2 + \delta}.$$

В информацию вводилась случайная аддитивная помеха с относительным уровнем до 5%. Количество итераций в методе последовательных приближений выбиралось опытным путём и бралось не более 10 (специальных исследований на скорость сходимости не проводилось).

В качестве отдельной рассматривалась задача нахождения производных от информации: $h'(x)$, $h''(x)$. Использование конечно-разностной аппроксимации для вычисления производных приводит к неустойчивости восстановления функции $a(x)$.

На рис. 1 и 2 приведены примеры восстановления функции $a(x)$ при относительном уровне аддитивной случайной помехи $\varepsilon\%$ с использованием конечно-разностной аппроксимации производных. Параметры модели: $\tau = 0.05$, $\eta = 0.05$, $X_0 = 5$, $T = 5$, $N = 100$. На графиках сплошной линией без маркеров показано точное значение функции $a(x)$, график с маркерами соответствует найденной в результате численного решения функции. Из рисунков видно, что добавление в исходную информацию случайной аддитивной помехи даже с небольшим уровнем приводит к неустойчивости решения.

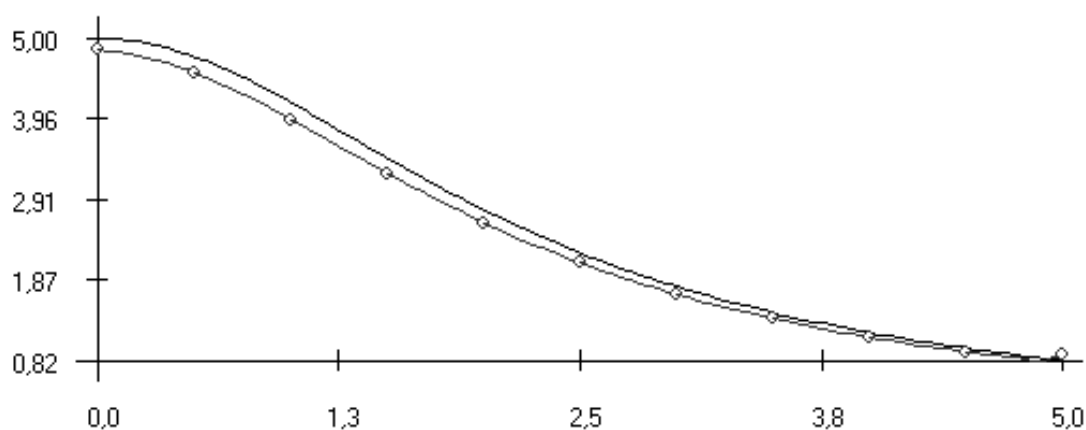


Рис. 1. Пример восстановления функции $a(x)$ без использования сглаживания по точным данным

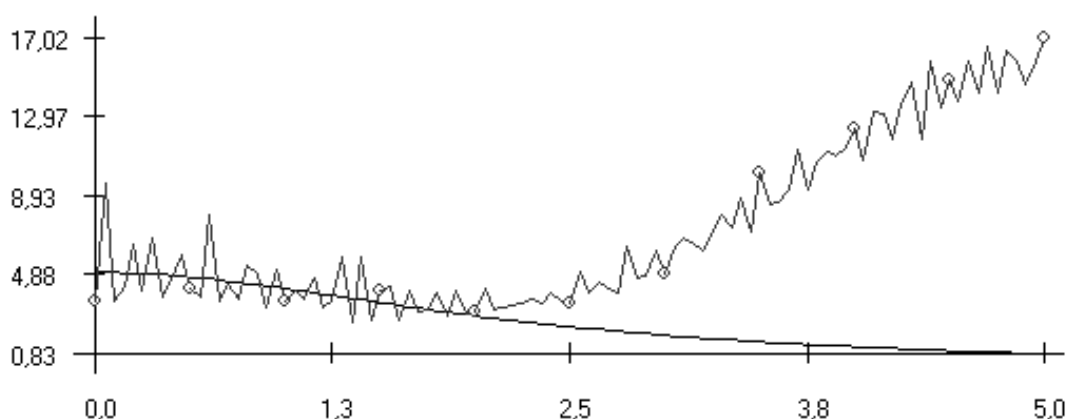


Рис. 2. Пример восстановления функции $a(x)$ без использования сглаживания при уровне относительной аддитивной помехи $\varepsilon = 0,01\%$

Применение сглаживающих фильтров с последующим нахождением производных через разности и полиномиальная аппроксимация МНК с вычислением производных от найденного полинома аналитически также к успеху не привели.

В результате использовалось сглаживание МНК с помощью нелинейных функций аналогично тому, как это делалось в работе [4]. Для $f(t)$ аппроксимационная функция выбиралась в виде $\varphi(t) = ae^{bt}$, для $h(x)$ функция выбиралась в виде $\psi(x) = ae^{bx^2}$. Фактически использовался вид функций $f(t)$ и $h(x)$ при выборе соответствующих функциональных шкал. Производные в этом случае можно вычислять аналитически.

На рис. 3, 4 приведены примеры восстановления функции $a(x)$ при относительном уровне аддитивной помехи $\varepsilon\%$ с использованием нелинейной аппроксимации МНК. Параметры модели: $\tau = 0.05$, $\eta = 0.05$, $X_0 = 5$, $T = 5$, $N = 100$.

В этом случае восстановление функции $a(x)$ происходит устойчиво даже при достаточно высоком уровне погрешности.

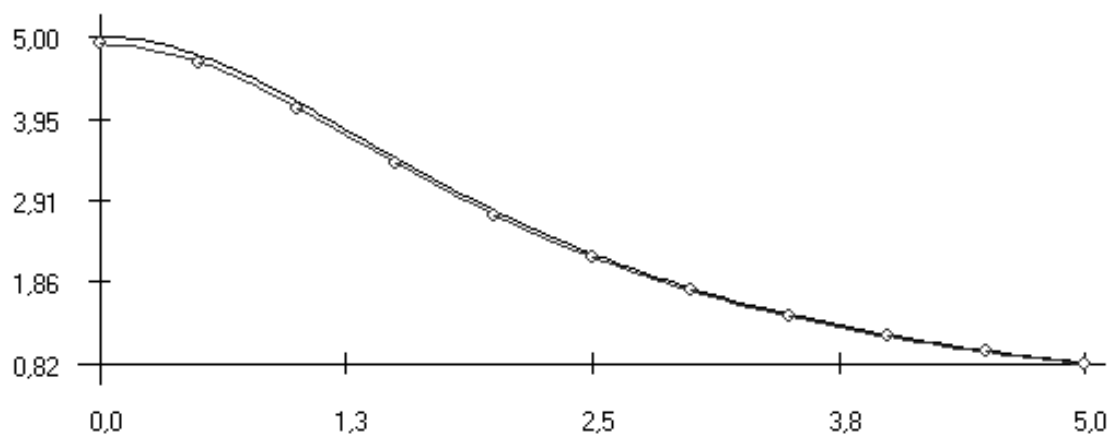


Рис. 3. Пример восстановления функции $a(x)$ с использованием сглаживания с помощью нелинейных функций при уровне относительной аддитивной помехи $\varepsilon = 5\%$

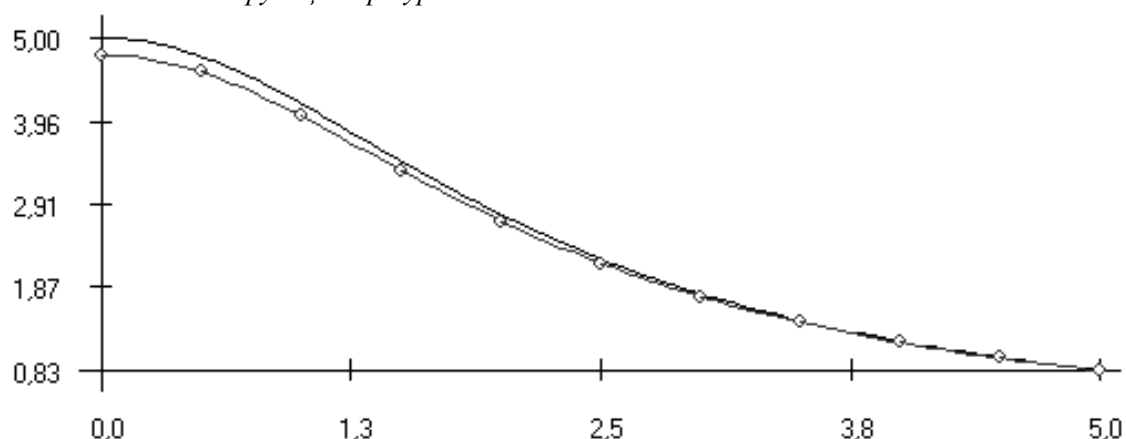


Рис. 4. Пример восстановления функции $a(x)$ с использованием сглаживания с помощью нелинейных функций при уровне относительной аддитивной помехи $\varepsilon = 10\%$

Литература

1. Бондаренко А.Ф., Чащин О.Н. Регуляризованные решения обратных задач для параболических уравнений: препринт № 139 / Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН. Новосибирск, 2004. 18 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 5-е изд., стер. М.: Наука, 1977. 736 с.
3. Комиссаров В.В., Комиссарова Н.В., Чащин О.Н. Численное решение регуляризованных обратных задач для параболических уравнений // Современные проблемы геодезии и оптики: Сб. научных статей. Новосибирск, СГГА, 2006. С. 63–67.
4. Komissarov V.V., Komissarova N.V. Numerical solution of the unidimensional inverse problem of variational calculation // KORUS-2002. NSTU, Russia. Vol. 2. P. 241–245.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ОДНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

М.В. Краюшкина

Кемеровский государственный университет

1. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарное одномерное движение двухкомпонентной смеси вязких сжимаемых жидкостей в следующей постановке.

При построении системы уравнений, описывающих движение двухкомпонентной смеси, занимающей объем $\Omega = [0, 1]$, используются уравнения неразрывности (баланса массы)

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i) = 0, i = 1, 2. \quad (1)$$

и уравнения сохранения импульса

$$\frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i^2) + \frac{\partial p_i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v_{i1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_{i2} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + I_i \quad (2)$$

для составляющих смеси.

Здесь x – точка пространства R ; $t \in [0, T]$ – промежуток времени, в течение которого происходит движение; $\rho_i = \rho_i(x, t), i = 1, 2$ – плотность; $u_i, i = 1, 2$ – скорость составляющей смеси; $p = a\rho^\gamma, p_i = \rho_i^{\gamma_i}, i = 1, 2$ – давление, где $\gamma_i > 1$, – показатель адиабаты; $I_i = (-1)^{i+1} a(u_2 - u_1), i = 1, 2$ – интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси, где $a > 0$ – заданная постоянная, $v_{ij} = \lambda_{ij} + 2\mu_{ij}, i = 1, 2$, где λ_{ij}, μ_{ij} – коэффициенты вязкости.

Уравнения (1), (2) дополним граничными условиями прилипания:

$$u_i|_{x=0,1} = 0, \quad (3)$$

которые означают, что граница $\partial\Omega$ области течения Ω является неподвижной твердой стенкой.

Начальные условия для системы (1), (2) выглядят следующим образом:

$$u_i|_{t=0} = u_i^0(x), \rho_i|_{t=0} = \rho_i^0(x), \rho_i^0(x) > 0. \quad (4)$$

Для данной начально-краевой задачи имеет место первое энергетическое тождество:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_i u_i^2 + \frac{1}{\gamma_i - 1} \rho_i^{\gamma_i} \right) dx + a \int_{\Omega} |u_2 - u_1|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 v_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Из равенства (5) следуют оценки полной энергии потока и скорости диссипации энергии: $E(t) \leq E(0)$, где $E(t) = K + \Pi$, а

$K = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_i u_i^2 dx, \Pi = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\gamma_i - 1} \rho_i^{\gamma_i} \right) dx$ – кинетическая и потенциальная

энергия соответственно, $E(0) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_i^0 (u_i^0)^2 + \frac{1}{\gamma_i - 1} (\rho_i^0)^{\gamma_i} \right) dx$. При этом

имеет место следующая оценка: $\int_0^t \tilde{D} dt \leq E(0)$, где $\tilde{D} = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 v_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} dx$ –

скорость диссипации.

2. Построение регуляризованной задачи

Обобщенное решение начально-краевой задачи (1) – (4) строится как предел следующей релаксированной краевой задачи:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i) = \varepsilon \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial x^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i^{\gamma_i}) + \frac{\partial}{\partial x}(\delta \rho_i^{\beta_i}) + \varepsilon \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial \rho_i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v_{i1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_{i2} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + I_i, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial x} = 0, u_i = 0 \text{ при } x = 0, 1, 0 < t < T, \quad (8)$$

$$\rho_i = \rho_i^0(x), u_i = u_i^0(x); i = 1, 2, 0 < x < 1. \quad (9)$$

Здесь $\varepsilon > 0, \delta > 0, \beta_i > 1$ – параметры.

Для релаксированной краевой задачи (6) – (9) имеет место энергетическое тождество, аналогичное (5):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_i u_i^2 + \frac{1}{\gamma_i - 1} \rho_i^{\gamma_i} + \delta \frac{1}{\beta_i - 1} \rho_i^{\beta_i} \right) dx + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \gamma_i \int_{\Omega} \rho_i^{\gamma_i - 2} \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right)^2 dx + \\ & + \delta \varepsilon \sum_{i=1}^2 \beta_i \int_{\Omega} \rho_i^{\beta_i - 2} \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right)^2 dx + a \int_{\Omega} |u_2 - u_1|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 v_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} dx = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

3. Галеркинские приближения

Для произвольно выбранного $T' \in (0, T]$ ищем функции $u_i \in C^0(\bar{I}', X_n), I' = (0, T'], i = 1, 2$, удовлетворяющие уравнениям:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_i u_i \varphi_k dx - \int_{\Omega} q_i \varphi_k dx - \\ & - \int_0^t \int_{\Omega} \left(\left(- \left(v_{i1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_{i2} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + (\rho_i^{\gamma_i}) + (\delta \rho_i^{\beta_i}) + (\rho_i u_i^2) \right) \right) \varphi_k' dx dt + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} \left(\varepsilon \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial \rho_i}{\partial x} - I_i \right) \varphi_k dx dt = 0, \\ & i = 1, 2, t \in I', \varphi \in X_n, k = 1..n, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\rho_i = S(u_i)$ – решение задачи Неймана:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i) = \varepsilon \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial x^2}, \\ & \frac{\partial \rho_i}{\partial x} \Big|_{x=0,1} = 0, \rho_i \Big|_{t=0} = \rho_i^0(x), i = 1, 2. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь φ – семейство ортогональных гладких функций, которые могут быть получены как решения следующей задачи:

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \lambda \varphi, \varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

Решение $u^n \in C([0, T], X_n)$ будем искать из интегрального уравнения (11) в виде

$$u^n(x, t) = \sum_{k=1}^n c_n^k(t) \varphi_k(x) \quad (13)$$

с неизвестными коэффициентами $c_n^k(t), k=1..n$.

Нетрудно заметить, что уравнения (11) после подстановки (13) и интегрирования по времени являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $c_n^k(t), k=1..n$.

Таким образом, задача отыскания решения свелась к решению следующих подзадач:

1. Решение задачи Неймана для $\rho_i(x, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i^{k-1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i^{k-1} u_i^{k-1}) &= \varepsilon \frac{\partial^2 \rho_i^{k-1}}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \rho_i^{k-1}}{\partial x} \Big|_{x=0,1} &= 0, \rho_i^{k-1} \Big|_{t=0} = \rho_i^0(x), i=1, 2, \end{aligned} \quad (14)$$

где k –номер итерации.

2. Находим решения u_i на k -й итерации:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_i^{k-1} u_i^k \varphi_j dx - \int_0^1 [\rho_i^{k-1} (u_i^k)^2 + (\rho_i^{k-1})^{\gamma_i} + \delta (\rho_i^{k-1})^{\beta_i} - \\ - (v_{i1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_{i2} \frac{\partial u_2}{\partial x})] \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} dx + \int_0^1 \varepsilon \frac{\partial u_i^k}{\partial x} \frac{\partial \rho_i^{k-1}}{\partial x} \varphi_j dx - \int_0^1 (-1)^{i+1} a(u_2^k - u_1^k) \varphi_j dx = 0, \\ i=1, 2, j=1..n. \end{aligned} \quad (15)$$

Начальные данные для уравнений (15) возьмем из разложения начальной скорости u_i^0 по базису φ_m .

3. Завершение итерационного процесса.

Итерационный процесс останавливается при постижении заданной точности ε_1 между последовательными приближениями, то есть когда

$$\max |u_i^{k+1} - u_i^k| < \varepsilon_1.$$

Одна из расчетных задач представлена ниже (рис. 1,2). В качестве входных данных были выбраны:

$$\begin{aligned} v_{11} = v_{22} > 0, v_{12} = v_{21} = 0, a \neq 0, \varepsilon = 0.1, \delta = 0, \gamma_i = 4, \rho_1(x, 0) = \cos(\pi x) + 3/2, \\ \rho_2(x, 0) = x + 1, u_0^1 = \sin(2\pi x), u_0^2 = \sin(5\pi x). \end{aligned}$$

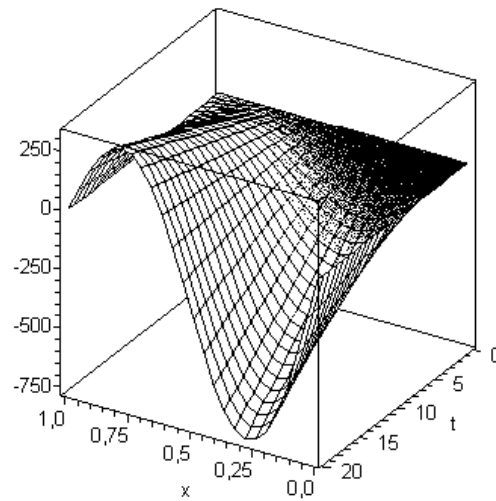


Рис. 10. Первая компонента вектора скорости

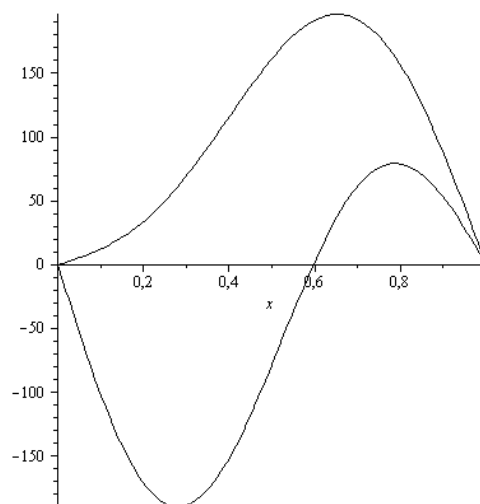


Рис. 11. Срез компонент вектора скорости при $t=5$

Литература

1. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
2. Novotny A., Straskraba I. Introduction to mathematical theory of compressible flow. New York: Oxford University Press, 2004.

РАСЧЕТ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ ЦЕПНОЙ РЕАКЦИИ В АТМ ПО ДИФфуЗИОННОМУ МЕХАНИЗМУ

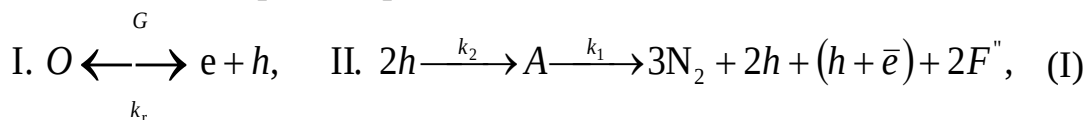
*В.Г. Кригер, А.В. Каленский, А.П. Боровикова,
А.А. Звеков, И.Ю. Зыков*

Кемеровский государственный университет

Одним из классических механизмов распространения волны химической реакции является диффузионный механизм. В работе [1] была предложена модель твердофазной цепной реакции, способной привести к взрывному разложению кристаллов азидов тяжелых металлов (АТМ) при лазерном иницировании. Рассмотрим на основе этой модели диффузионный механизм.

Целью работы является определение характеристик волны цепной реакции взрывного разложения АТМ по диффузионному механизму и сравнение результатов с экспериментальными данными.

Схема стадий рассматриваемой модели имеет вид



где G – темп генерации; A – промежуточный комплекс; $2F''$ – комплекс, состоящий из двух анионных вакансий, с локализованными на них электронами; k_r , k_2 и k_1 – константы рекомбинации, образования и распада комплекса A соответственно. Первая стадия – генерация электрон-дырочных ($e.h.$) пар внешним излучением (зарождение цепи). Обратная стадия – рекомбинация $e.h.$ -пар на объемных и поверхностных локальных центрах (обрыв цепи). Скорость рекомбинации носителей лимитируется захватом дырки на нейтральном центре: $V_r \approx k_r \cdot p$. Стадия развития цепи (вторая реакция) – взаимодействие двух радикалов N_3^0 , локализованных в соседних узлах кристаллической решетки, с образованием комплекса A . Константа скорости реакции образования комплекса A может быть оценена как константа рекомбинации на отталкивающем центре $k_2 \approx 10^{-11} \div 10^{-12} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ [1].

Далее комплекс A распадается на молекулярный азот (N_2) и два F -центра с выделением энергии, идущей на генерацию активных частиц – стадия разветвления цепи. Константа скорости этой реакции $k_1 \approx 10^7 \div 10^8 \text{ с}^{-1}$ была оценена в работе [1].

Из всех реагентов, рассматриваемых в модели (I), передвигаться по кристаллу (и диффундировать) за время развития взрывного разложения способны только электронные носители заряда. Коэффициент диффузии для дырок и электронов составляет величину $D_p \approx D_n \approx 0.2 \div 0.3 \text{ см}^2/\text{с}$ [2].

Математическая запись модели, отвечающей схеме реакций (I) с учетом диффузии дырок, имеет вид

$$\begin{cases} dp/dt = G(x,t) - 2k_3p^2 - k_r p + 3k_4\beta A + \text{div} j_p, \\ dA/dt = k_3p^2 - k_4A, \\ G(x,t) = \alpha\beta\xi H(x) \exp(-\xi^2 t^2 / \tau_p^2) / \sqrt{\pi} \tau_p E, \\ \beta = (L - p - 2[N_2]/3 - 2A)/L, \end{cases} \quad (1)$$

где j_p – поток дырок; τ_p – длительность инициирующего импульса на полувисоте; $\xi = \sqrt{\ln 2}$, E – энергия образования одной e.h. пары; α – коэффициент поглощения на длине волны излучения лазера, $L = 2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ – число Лошмидта; β – доля невозбужденных узлов кристаллической решетки.

Проведено моделирование распространения волны твердофазной цепной реакции взрывного разложения по модели (I) в нитевидных кристаллах азида серебра (АС). Показано, что во время индукционного периода происходит формирование очага цепной реакции, который в дальнейшем движется по кристаллу с постоянной скоростью (V).

Скорость распространения и ширина фронта волны цепной реакции рассчитывались при изменении коэффициента диффузии в интервале $D = 0.1 \div 1000 \text{ см}^2/\text{с}$. Зависимость рассчитанной скорости диффузионного распространения очага цепной реакции от коэффициента диффузии представлена на рис. 1 в спрямляющих координатах уравнения Зельдовича $V(\sqrt{D})$. Она удовлетворяет выражению для диффузионного механизма распространения фронта цепной реакции по кристаллу:

$$V = \sqrt{KDk_1}, \quad (2)$$

где k_1 – эффективная константа стадии развития цепи; K – коэффициент пропорциональности.

Размер очага реакции так же линейно зависит от $\sqrt{D}$ (рис. 2).

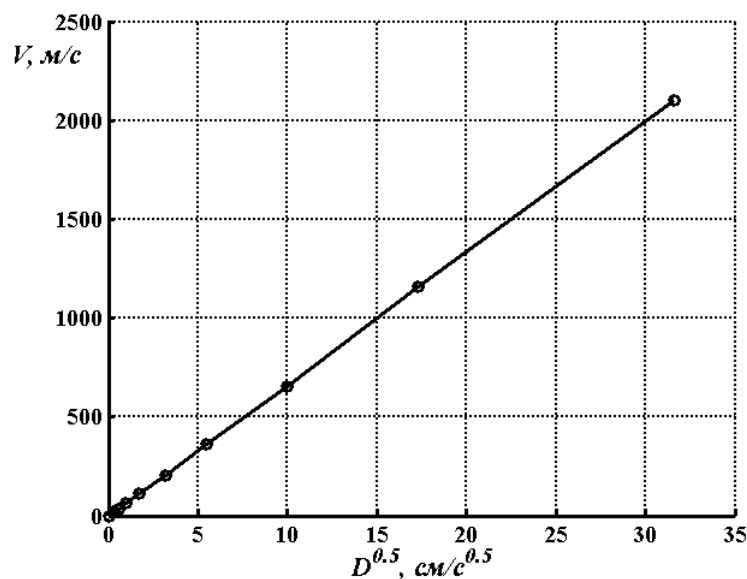


Рис. 1. Зависимость рассчитанной скорости диффузионного распространения очага цепной реакции от коэффициента диффузии в спрямляющих координатах

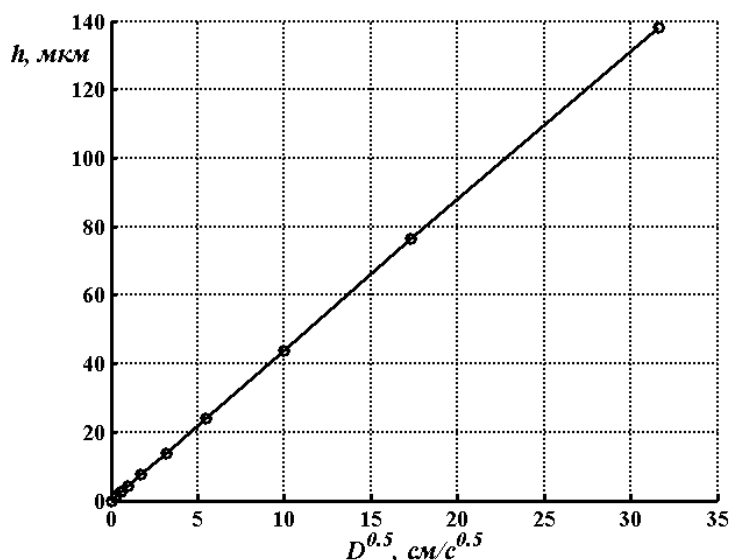


Рис. 2. Зависимость рассчитанной ширины фронта волны цепной реакции от коэффициента диффузии в спрямляющих координатах

Поскольку экспериментально ширину всего фронта реакции точно определить не удастся, а хорошо определяемой величиной является ширина переднего фронта волны реакции на полувывсоте, то также был проведен расчет этой характеристики (табл. 1).

Таблица 1

Расчет характеристики

$D, \text{см}^2/\text{с}$	$V, \text{м/с}$	$h, \text{мкм}$	$h_{0.5}, \text{мкм}$
0,1	20,89	1,42	0,48
0,3	36,33	2,41	0,82
1	65,99	4,33	1,47
3	113,68	7,62	2,59
10	206,62	13,82	4,69
30	359,81	24,01	8,16
100	656,27	43,93	14,93
300	1159,44	76,31	25,94
1000	2100,15	138,18	46,98

Экспериментальную величину скорости распространения реакции взрывного разложения в кристалле азида серебра $V \sim 1$ км/с обеспечивает значение коэффициента диффузии $D \sim 300 \text{ см}^2/\text{с}$. Однако при данном коэффициенте диффузии ещё не достигается экспериментальная ширина переднего фронта волны реакции на полувывсоте ($h_{0.5} = 110 \pm 10 \text{ мкм}$ [3]). Таким образом, видно, что в рассматриваемой модели ни при каком коэффициенте диффузии невозможно одновременно достичь двух экспериментально определенных параметров волны реакции: ширины и скорости фронта волны реакции.

Рассчитаны зависимости скорости распространения и ширины (ширины на полувысоте) волны реакции взрывного разложения в АТМ от константы рекомбинации по диффузионному механизму.

Графики, иллюстрирующие методику определения ширины переднего фронта реакции и ширины переднего фронта на полувысоте, приведены на рис. 3–4.

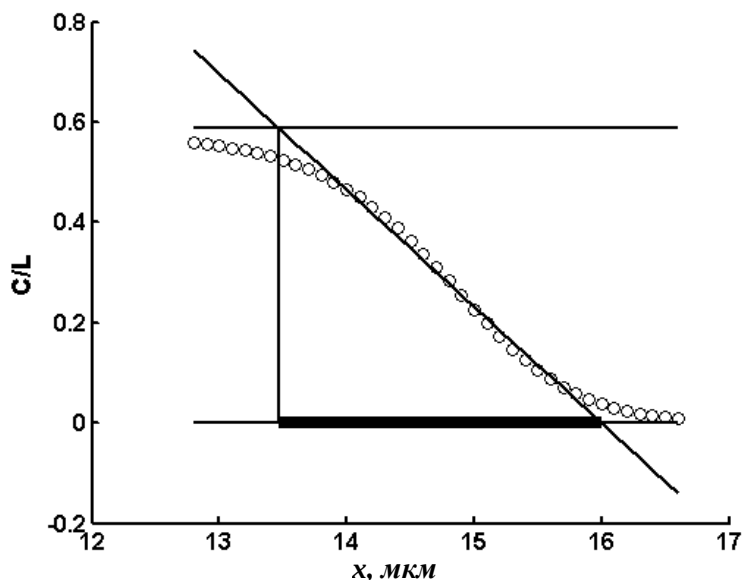


Рис. 3. Определение ширины переднего фронта реакции взрывного разложения АТМ при импульсном инициировании ($k_r = 5 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}$)

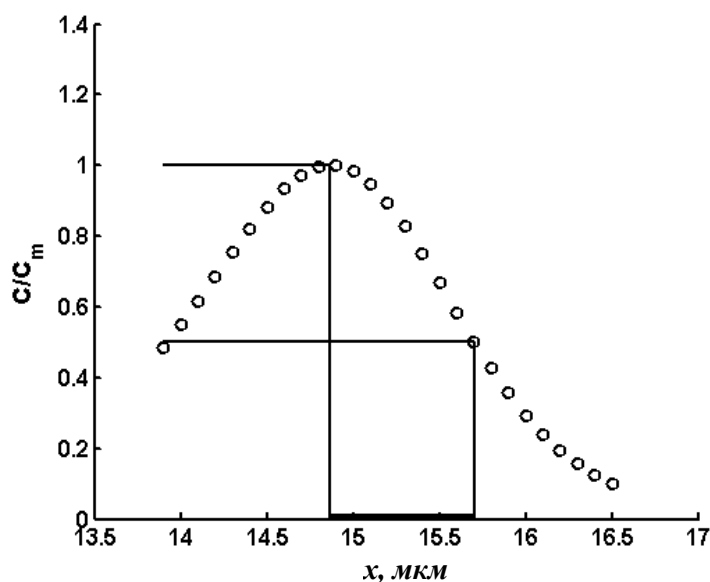


Рис. 4. Определение ширины переднего фронта реакции взрывного разложения АТМ при импульсном инициировании на полувысоте ($k_r = 5 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}$)

Рассчитанные величины скорости, ширины и ширины на полувысоте фронта волны реакции взрывного разложения АТМ по

диффузионному механизму при различных константах рекомбинации ($k_r = 0.02 \div 500 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$) сведены в табл. 2.

Из таблицы видно, что при росте концентрации центров рекомбинации значения скорости распространения реакции взрывного разложения, а так же геометрических параметров очага падают. Аналогичное поведение перечисленных характеристик наблюдается и экспериментально, однако отличия экспериментальной и оцененной при моделировании скорости распространения реакции, значений коэффициента диффузии дырок из реакционной зоны, а также значительное отличие ширины фронта реакции свидетельствуют о неприменимости диффузионной модели к моделированию процесса распространения волны твердофазной цепной реакции взрывного разложения по кристаллам АТМ.

Таблица 2

Константы рекомбинации

k_r	V , м/с	h , мкм	$h_{0,5}$, мкм
$2 \cdot 10^4$	38,17	2,527	0,8355
$5 \cdot 10^4$	38,15	2,522	0,8354
$2 \cdot 10^5$	38,09	2,520	0,8355
$5 \cdot 10^5$	37,97	2,534	0,8324
$2 \cdot 10^6$	37,35	2,459	0,8234
$5 \cdot 10^6$	36,19	2,470	0,8050
$2 \cdot 10^7$	31,32	2,261	0,7329
$5 \cdot 10^7$	24,32	2,434	0,6404

Литература

1. Кригер В.Г., Каленский А.В. Инициирование азидов тяжелых металлов импульсным излучением // Химическая физика, 1995. Т. 14. № 4. С. 152–160.
2. Захаров Ю.А., Сидорин Ю.Ю., Кучис Е.В. // Изв. АН СССР. Сер. Неорг. Материалы. 1979. Т. 15, № 8. С. 1397.
3. Звеков А.А., Каленский А.В., Боровикова А.П. Определение параметров движущейся волны взрывного разложения твердых взрывчатых веществ. // Сборник тезисов 15-й Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых ученых. Екатеринбург; Кемерово: Изд-во АСФ России, 2009. Т. 1. С. 483–484.
4. Каленский А.В., Кригер В.Г., Сечкарев Б.А. и др. Новый механизм распространения твердофазной цепной реакции // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 19. С. 87–90.

РАЗРАБОТКА ПАКЕТА ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНОЙ СКОРОСТИ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИИ

*В.Г. Кригер, А.В. Каленский, Е.А. Гришаева, А.А. Звекон,
О.Н. Колмогорова*

Кемеровский государственный университет

Цели работы: разработка пакета прикладных программ для расчета стационарной скорости реакции разложения неорганических веществ на примере азида серебра (АС); получение приближенного аналитического выражения для скорости стационарного разложения.

Рассматриваемая модель разложения была предложена в [1]. Условием стационарного разложения является равенство скоростей образования продуктов в катионной (образования металла Ag_2) и анионной подрешетках (образования N_2). Кроме того, производные концентраций всех промежуточных продуктов по времени должны быть равны нулю.

Полагая, что электронные носители заряда находятся в равновесии с центрами рекомбинации, получим

$$\begin{aligned} -k_3 R^0 p + k_7 R^+ &= 0 \\ k_9 R^0 - k_1 R^+ n &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Откуда следует термодинамический закон действующих масс для электронов и дырок:

$$p \cdot n = \frac{k_7 k_9}{k_1 k_3}. \quad (2)$$

Из уравнения (4) можно выразить n или p .

Кинетические уравнения для концентрации заряженных и нейтральных междоузельных катионов имели вид:

$$Ag^+ = G_F - k_{RF} Ag^+ V_k^- - k_1 n \cdot Ag^+ - k_8 Ag^+ Ag^0, \quad (3)$$

$$Ag^0 = k_1 n \cdot Ag^+ - k_6 Ag^0 - k_8 Ag^+ Ag^0 = 0, \quad (4)$$

$$k_8 Ag^+ Ag^0 = V_m.$$

Для Ag_2^+ можно записать уравнение, заменив член присоединения к металлическому центру (Ag^0) Ag^+ на скорость образования металла:

$$Ag_2^+ = V_m - k_1 n \cdot Ag_2^+ = 0. \quad (5)$$

Из уравнения (5) выражаем скорость образования металла и приравниваем к формуле (4). Для избавления от Ag^0 выразим ее через Ag^+ :

$$V_m = k_8 Ag^+ Ag^0 = k_1 n \cdot Ag_2^+, \quad (6)$$

$$k_6 Ag^0 = k_1 Ag^+ n, \quad (7)$$

$$Ag^0 = \frac{k_1 Ag^+ n}{k_6}. \quad (8)$$

После подстановки в формулу (4) нахождения скорости образования металла, в место Ag^0 , полученную выше формулу, формула скорости металлообразования будет иметь следующий вид:

$$V_m = k_8 Ag^0 Ag^+ = \frac{k_8 k_1 (Ag^+)^2 n}{k_6}. \quad (9)$$

Записав уравнение для скорости газообразования, исключим концентрацию вакансий, захвативших две дырки V_k^+ , считая ее квазиравновесной:

$$\begin{aligned} \dot{N}_2 &= 2k_5 V_k^+ = V_r, \\ V_r &= 2k_5 V_k^+, \\ V_k^+ &= \frac{k_3 p V_k^0}{(k_4 + k_5)}, \\ V_r &= 2k_5 \frac{k_3 p V_k^0}{(k_4 + k_5)}, \\ 2k_5 V^+ - k_{10} F^+ V_k^- &= 0, \\ k_{10} F^+ V_k^- &= V_r, \\ \dot{D} &= V_r, \\ V_k^0 &= k_1 p V_k^- - k_2 V_k^0 - k_3 p V_k^0 + k_4 V_k^+, \\ V_k^0 &= \frac{k_1 p V_k^-}{k_2}, \\ V_r &= 2k_5 \frac{k_1 k_3 p^2 V_k^-}{k_2 k_4}. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее приравниваем скорости металло- и газообразования друг к другу:

$$\frac{2k_1 k_3 k_5}{k_2 k_4} p^2 V_k^- = \frac{2k_8 k_1 (Ag^+)^2 n}{k_6}. \quad (11)$$

Концентрации V_k^- и Ag^+ можно оценить по соотношению

$$Ag^+ = V_k^- = \sqrt{\frac{G_F}{k_{RF}}} = \sqrt{K_F}. \quad (12)$$

Вместо концентрации V_k^- и Ag^+ можно вести $\sqrt{K_F}$:

$$\frac{k_3 k_5}{k_2 k_4} p^2 = \frac{k_8 n \sqrt{K_F}}{k_6}. \quad (13)$$

Из уравнения (4), связывающего электроны и дырки, выразим концентрацию электронов:

$$n = \frac{k_7 k_9}{k_1 k_3 p}. \quad (14)$$

Подставим вместо концентрации электронов в уравнение (13) полученное выше уравнение (14), получим:

$$\frac{k_3 k_5}{k_2 k_4} p^3 = \frac{k_8 \sqrt{K_F} k_7 k_9}{k_6 k_1 k_3}. \quad (15)$$

Выразив из уравнения (15) концентрацию дырок, получаем уравнение

$$p = \sqrt[3]{\frac{k_2 k_4 k_7 k_9 k_8 \sqrt{K_F}}{k_1 k_3^2 k_5 k_6}}. \quad (16)$$

При подстановке формулы (16) в формулу (14) получим формулу для нахождения концентрации электронов

$$n = \sqrt[3]{\frac{k_5 k_6 k_7^2 k_9^2}{k_1^2 k_3 k_2 k_4 k_8 \sqrt{K_F}}}. \quad (17)$$

Полученное выражение подставим в формулу для нахождения скорости газообразования

$$V_g = V_m = 2 \frac{k_1^{1/3} k_5^{1/3}}{k_2^{1/3} k_4^{1/3}} \frac{k_7^{4/3} k_8^{1/3} K_F^{5/6}}{k_6^{2/3}}. \quad (18)$$

Таблица 1

Константы модели

Константа скорости	Значение	Размерность	Процесс
k_1	10^{-6}	$\text{см}^3 \text{с}^{-1}$	Захват электронных носителей заряда на заряженных центрах
k_2	$2.32 \cdot 10^4$		Термический выброс дырки с уровня V_k^0
k_3	10^{-8}		Захват дырок на нейтральных центрах
k_4	$1.95 \cdot 10^9$		Термический выброс дырки с уровня V_k^+
k_5	$5.5 \cdot 10^5$		Распад комплекса N_6
k_6	$3.44 \cdot 10^3$		термический выброс электрона с уровня с Ag^0
k_7	8.37		Термический выброс дырки с центра рекомбинации
k_8	$2.78 \cdot 10^{-20}$		Константа диффузии Ag_i^+ к Ag^0
k_9	0.84		Термический выброс электрона с центра рекомбинации
k_{10}	$2.78 \cdot 10^{-18}$		Взаимодействие V_k^- с F^+ с образованием бивакансии
k_{RF}	$4.64 \cdot 10^{-18}$		Рекомбинация френкелевских дефектов
G_F	$5.32 \cdot 10^{15}$		Генерация френкелевских дефектов

Как видно из формул, для нахождения концентрации дырок и электронов и скоростей газо- и металлообразования, нужно знать константы реакции. Поэтому можно сделать предположение, что константы реакции влияют на скорость и концентрацию реагентов.

Константы, используемые в модели, представлены в табл. 1.

Для решения системы уравнения использовался метод Рунге–Кутты 2-го порядка с переменным шагом по времени с относительной погрешностью 10^{-11} . Для нахождения стационарных концентрации и скорости разложения применялся следующий прием. Вначале рассчитывалась кинетическая зависимость по полной системе уравнений на большом интервале времени. В ходе расчета накапливалась ошибка, приводящая к накоплению заряда в системе. После этого расчет повторяли на меньшем интервале времени, подставляя в качестве начальных условий результаты предыдущего расчета, скорректированные на величину накопленного заряда. Многократное использование такой процедуры с постепенным уменьшением или без временного интервала приводила к состоянию системы не только с постоянной скоростью разложения, но и с незначительной величиной накопленного заряда. Для сравнения, накопленный заряд обычно составлял $\sim 20 \text{ см}^{-3}$, тогда как концентрации дефектов по Френкелю составляли $\sim 8 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

В табл. 2 приведены значения стационарных концентрации и скорости реакции, полученные при численном моделировании и рассчитанные по приближенным формулам (16–18):

Таблица 2

Значения стационарных величин

	Расчет по формулам (16–18)	Численное моделирование	Относительное отклонение, %
p	$6,31 \cdot 10^9$	$6,37 \cdot 10^9$	0,94
n	$1,01 \cdot 10^{10}$	$1,02 \cdot 10^{10}$	0,98
V_g	$8,96 \cdot 10^{13}$	$8,91 \cdot 10^{13}$	0,56

Из данных таблицы следует, что приближенные выражения описывают стационарное состояние с хорошей точностью.

В результате моделирования получен график (рис. 1) изменения скоростей разложения металла, газа и дивакансии.

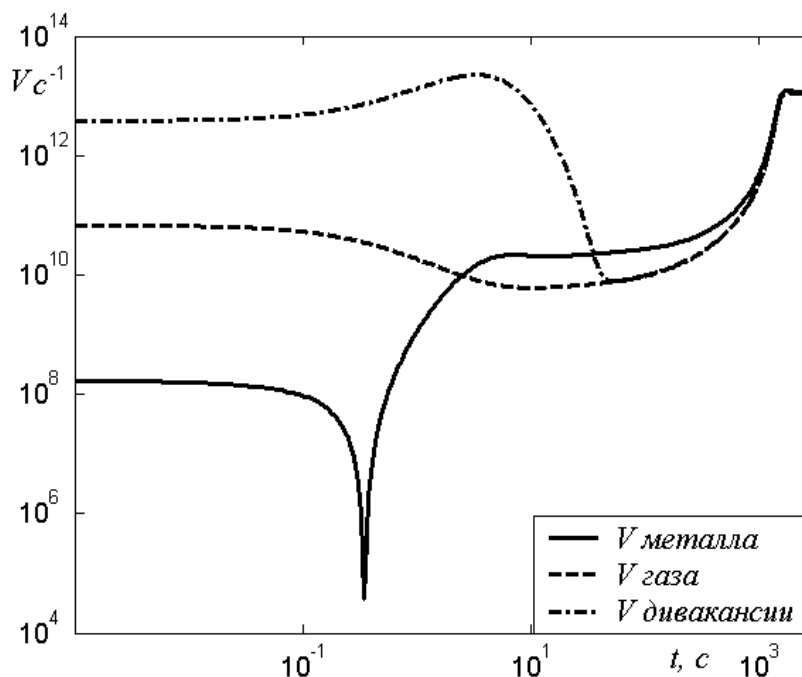


Рис. 1. Изменение скоростей разложения металла, газа и дивакансии при разложении АС

Из рис. 1 видно, что скорость образования металла запаздывает и только ближе к стационарному значению сравнивается со скоростями образований газа и дивакансии.

Заключение.

Разработан пакет прикладных программ для расчета стационара скорости реакции, разложения неорганических веществ. В результате исследования модели получены формулы для нахождения стационарных скоростей, дырок и электронов, включающие в себя константы реакции. В результате моделирования получены кинетические закономерности перехода реакции в режим стационарного разложения.

Литература

1. Кригер В.Г., Каленский А.В. Собственно-дефектная модель цепной реакции инициирования азидов тяжелых металлов // 6-я Междунар. конф. «Радиационные гетерогенные процессы»: Тез. докл. Ч. 1. Кемерово, 1995. С. 100–101.

ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ В ПРОЗРАЧНЫХ СРЕДАХ

В.Г. Кригер, А.В. Каленский, А.А. Звеков, И.Ю. Зыков, А.П. Никитин

Кемеровский государственный университет

Интерес к микроочаговой модели лазерного инициирования теплового взрыва [1–2], сформулированной более 20 лет назад, возник вновь после работ [3–5], в которых было показано, что добавки сильнопоглощающих включений сажи и наноразмерных карбида никеля и алюминия позволяют снизить критическую плотность энергии лазерного

инициирования вторичных взрывчатых веществ. В новых условиях инновационного развития от модели требуется не только описать кинетику образования очага реакции, но и теоретически обосновать природу и размеры добавок, позволяющих получить наименьшие значения критической плотности энергии лазерного инициирования.

Одним из основных постулатов модели является независимость эффективности поглощения света от размера включения. Более того, считается, что сечение поглощения излучения равно геометрическому сечению (πr^2 для сферы) включения [1]. То есть фактор эффективности поглощения Q_{abs} (отношение сечения поглощения света к геометрическому сечению) принимается равным единице. Данное предположение нуждается в дополнительном обосновании, так как размер включений сопоставим с длиной волны света, что должно приводить к сильным дифракционным эффектам. Теории рассеяния и поглощения электромагнитного излучения малыми частицами начали развиваться достаточно давно, в случае сферической частицы была разработана теория Ми [6].

Цели работы: оценить в рамках теории Ми коэффициенты эффективности поглощения лазерного излучения малыми металлическими включениями в объеме азида серебра, азида свинца и ТЭНа; построить зависимость температуры разогрева импульсным излучением от радиуса включений с учётом рассчитанных коэффициентов эффективности поглощения излучения материалом включения.

Методика расчета

Коэффициент эффективности поглощения (Q_{abs}) сферическим включением радиуса r в рамках теории Ми рассчитывается как разность коэффициентов эффективности экстинкции (Q) и рассеяния (Q_{sca}) [6]:

$$Q_{abs} = Q - Q_{sca}.$$

Последние рассчитываются как сумма бесконечного ряда от коэффициентов разложения электрического и магнитного поля рассеянной световой волны по специальным функциям Риккати–Бесселя:

$$Q_{sca} = \frac{2}{\rho^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \cdot (|c_l|^2 + |b_l|^2),$$

$$Q = \frac{2}{\rho^2} \operatorname{Im} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \cdot (c_l - b_l),$$

где $\rho = 2\pi r n / \lambda$, n – показатель преломления среды; $m = n_i / n$ – комплексный показатель преломления включения относительно среды. Коэффициенты c_l и b_l определяются из граничных условий на поверхности включения [6]:

$$c_l = i \frac{\psi_l(\rho) \psi_l'(\rho) - m \psi_l'(\rho) \psi_l(\rho)}{\zeta_l(\rho) \psi_l'(\rho) - m \zeta_l'(\rho) \psi_l(\rho)},$$

$$b_l = -i \frac{\psi'_l(\rho)\psi_l(m\rho) - m\psi_l(\rho)\psi'_l(m\rho)}{\zeta'_l(\rho)\psi_l(m\rho) - m\zeta_l(\rho)\psi'_l(m\rho)}.$$

Для вычисления специальных функций (ψ_l и ζ_l) и их производных использовались рекуррентные соотношения [6]:

$$\psi_{l+1}(z) = \frac{2l+1}{z} \psi_l(z) - \psi_{l-1}(z), \quad (1)$$

$$\psi'_l(z) = \psi_{l-1}(z) - \frac{l}{z} \psi_l(z). \quad (2)$$

Специальные функции при $l = 1; 2$ имеют вид [6]:

$$\psi_0(z) = \sin z,$$

$$\psi_1(z) = \frac{\sin z}{z} - \cos z,$$

$$\zeta_0(z) = ie^{-iz},$$

$$\zeta_1(z) = -e^{-iz}(1 - i/z).$$

Использование рекуррентных соотношений (1), (2) в написанной программе позволило достичь высокой скорости вычислений. Для участка малых радиусов проверялась справедливость закона Рэлея.

Результаты и обсуждение

На рис. 1 представлены типичные рассчитанные зависимости коэффициента эффективности поглощения излучения (Q_{abs}) с длиной волны 1064 нм (первая гармоника неодимового лазера) от радиуса включения: 1 – включение серебра ($0,15-6,0i$) в матрице азида серебра ($n = 2$); 2 – включение свинца ($n_i = 1,416 - 5,742i$) в матрице азида свинца ($n = 1,85$); 3 и 4 – включение свинца и алюминия ($n_i = 0,978 - 8,030i$) в матрице ТЭНа ($n = 1,55$). Значения коэффициентов преломления металлов взяты из [7].

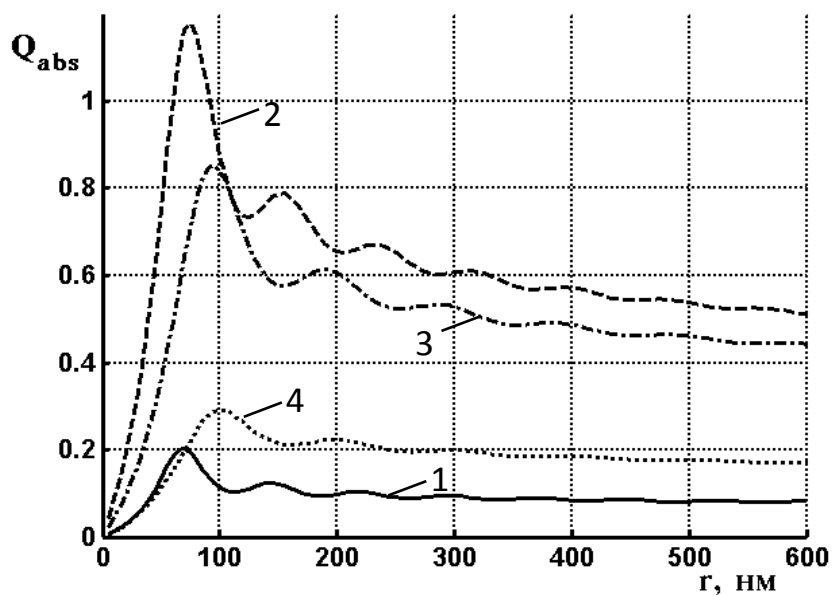


Рис. 1. Зависимость коэффициента эффективности поглощения света $\lambda = 1064\text{ нм}$ металлическими включениями в матрице энергетических материалов. Обозначения в тексте

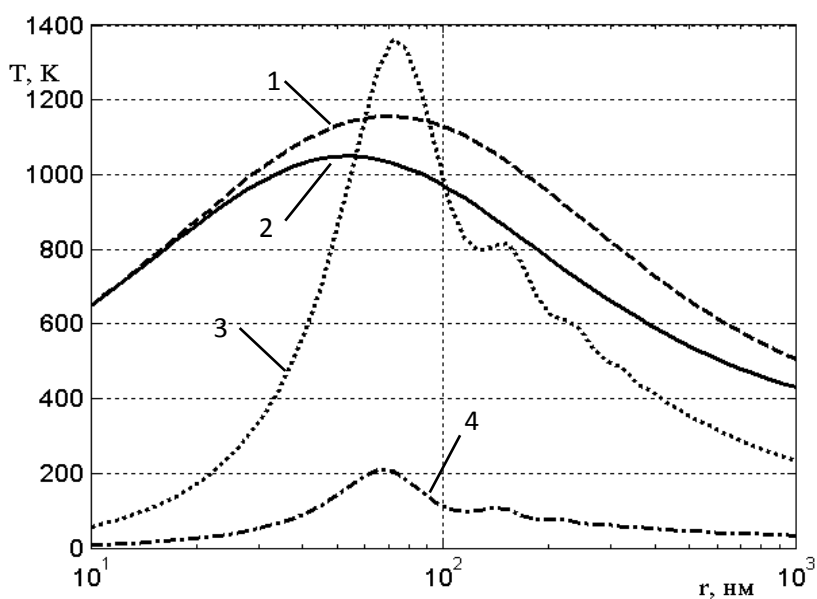


Рис. 2. Рассчитанные зависимости максимальной температуры разогрева включений серебра и свинца от их радиуса. Обозначения в тексте

Из рис. 1 следует, что включения серебра в матрице азиде серебра поглощают излучение малоэффективно. Максимальная эффективность поглощения ($Q_{abs} \approx 0,204$) наблюдается при радиусе включения $r = 68\text{ нм}$, что сопоставимо с радиусом наиболее прогретых включений при длительности импульса 30 нс [1]. При меньших значениях радиуса

включения Q_{abs} монотонно уменьшается и стремится к нулю (при $r \rightarrow 0$ по закону Рэлея), при больших – Q_{abs} уменьшается с затухающими осцилляциями, приближаясь к удвоенному коэффициенту поглощения массивного металла. Малые значения Q_{abs} серебряными включениями связаны с выраженными металлическими свойствами серебра, которые проявляются в малой величине действительной и большой величине мнимой части показателя преломления. В результате для включений Ag в матрице азида серебра фактор эффективности поглощения меньше единицы в 5 раз и более. В случае свинцового включения в матрице азид свинца максимальный коэффициент эффективности поглощения составляет 1, 18 при радиусе включения 74 нм. Большее значение Q_{abs} связано с менее выраженными металлическими свойствами свинца.

Рассмотрим влияние эффективности поглощения света включением на максимальную температуру разогрева. Согласно работе [2] максимальное изменение температуры δT в процессе разогрева лазерным импульсом с плотностью энергии H для включения радиуса r определяется выражением

$$\delta T = \frac{Hr/4c}{rh + h^2 + r^2/K^2}, \quad (3)$$

где $K = \sqrt{3c/c_1}$ – безразмерный коэффициент, который связан с отношением объемных теплоемкостей включения c_1 и матрицы c ; $h = \sqrt{\alpha t_i}$ – толщина слоя, прогретого за время, равное длительности импульса t_i ; α – температуропроводность матрицы. Радиус наиболее разогретого включения равен Kh , то есть уменьшается при уменьшении длительности импульса пропорционально $\sqrt{t_i}$. В случае ансамбля включений максимальная температура разогрева определяется соотношением

$$\delta T = \frac{H}{4ch} \cdot \frac{K}{K+2}. \quad (4)$$

Для большинства металлов объемная теплоемкость заключена в интервале 1,2–3,6 Дж/(К·см³). В случае азида серебра ($c_1 = 1,55$ Дж/(К·см³)) значение последнего множителя в формуле (4) приблизительно изменяется от 0,5 до 0,35, то есть на 30%.

Формула (3), скорректированная на эффективность поглощения света, примет вид

$$\delta T = Q_{abs}(r) \cdot \frac{Hr/4c}{rh + h^2 + r^2/K^2}.$$

Для иллюстрации изменений, вносимых эффективностью поглощения, на рис. 2 приведены рассчитанные при длительности лазерного импульса 30 нс и плотности энергии 50 мДж/см² значения максимальной температуры разогрева включений серебра и свинца в инертной матрице с теплофизическими параметрами азид свинца в

предположении $Q_{abs} = 1$ (1 и 2 соответственно) и с учетом рассчитанных зависимостей $Q_{abs}(r)$ (3 и 4 соответственно). Во-первых, из рис. 1 следует, что в рамках модели с учетом $Q_{abs}(r)$ критическая плотность энергии инициирования азида свинца должна быть значительно меньше, чем азида серебра, так как его температура разогрева выше почти в 7 раз. Во-вторых, зависимость оказывается более выраженной, так как максимумы кривых $Q_{abs}(r)$ и зависимостей 1 и 2 на рис. 2 почти совпадают.

Заключение

В рамках теории Ми рассчитаны значения коэффициентов эффективности поглощения света включениями различных металлов в матрице ТЭНа и азидов серебра и свинца. Показано, что в зависимости от природы металла и размера включения фактор эффективности поглощения может изменяться в пределах порядка величины, что оказывает решающее влияние на максимальную температуру разогрева включения лазерным импульсным излучением.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-03-00897).

Литература

1. Александров Е.И., Ципилев В.П. Исследование влияния длительности возбуждающего импульса на чувствительность азид свинца к действию лазерного излучения // Физика горения и взрыва. 1984. Т. 20, № 6. С. 104–108.
2. Кригер В.Г., Каленский А.В., Звеков А.А. Тепловая микроочаговая модель инициирования взрывчатых веществ импульсным излучением // Современные проблемы химической и радиационной физики. М.: ОИХФ РАН, 2009. С. 322–325.
3. Александров Е.И., Вознюк А.Г., Ципилев В.П. Влияние поглощающих примесей на зажигание ВВ лазерным излучением // Физика горения и взрыва. 1989. № 1. С. 3–9.
4. Адуев Б.П., Нурмухаметов Д.Р., Пузынин А.В. Влияние добавок частиц монокарбида никеля на чувствительность тетранитропентаэритрита к лазерному инициированию // Химическая физика. 2009. Т. 28, № 11. С. 50–53.
5. Yang Y., Sun Z., Wang S., and Dlott D. Fast Spectroscopy of Laser-Initiated Nanoenergetic Materials // J. Phys. Chem. B. 2003. Vol. 107, № 19. PP. 4485–4493.
6. Шифрин К.С. Рассеяние света в мутной среде. М.;Л.: Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1951.
7. Золотарев В.М., Морозов В.Н., Смирнова Е.В. Оптические постоянные природных и технических сред. Л.: Химия, 1984.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ СИСТЕМЫ НОРМАЛИЗАЦИИ И ПОДДЕРЖАНИЯ ВЕСА ПАЦИЕНТА С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ДИНАМИКЕ ВЕСА ПАЦИЕНТА

В.В. Кромер

Русско-немецкий университет, г. Новосибирск

1. Нами была предложена система нормализации и поддержания веса пациента с отрицательной обратной связью по динамике веса пациента [1]. В отличие от практикуемых большинством обладающих избыточным весом людей низкокалорийных диет, данный метод не приводит к

замедлению темпов похудения, а тем более к возникновению «диетического плато» с полной остановкой снижения веса.

В описываемой системе предполагается, что энергозатраты худеющего человека, в основном складывающиеся из уровня основного обмена (УОО) и физической активности, постоянны и равны своему максимальному значению при дисбалансе Δ (разности калорийности питания K_n и равновесной калорийности) более Δ_n , а при дисбалансе менее Δ_n экспоненциально стремятся к величине $(K_n - \Delta_n)$ с постоянной времени T . В [2] предложен метод определения данных характеристик путем проведения эксперимента, заключающегося в «пилообразном» изменении калорийности рациона питания от равновесной до некоторой минимальной (в частном случае нулевой), с последующим нарастанием калорийности до равновесной и возможно превышающей ее.

Эксперимент предполагает ежедневное взвешивание, непараметрическое сглаживание измеренных значений для исключения выпадающих значений и аппроксимацию ряда значений веса теоретической кривой согласно предложенной динамической модели. В результате решения составленной (переопределенной) системы уравнений получены значения параметров для рассматриваемого случая: $\Delta_n = -440$ ккал; $T = 25$ дней.

Данные значения подтверждаются всей практикой медицинской гипокалорийной диетотерапии, и в особенности практикой «вульгарной» диетологии, где желающие похудеть люди произвольно назначают себе режим питания, руководствуясь советами «женских» журналов и форумов с рецептами «диет», советами родственников и знакомых.

2. Из рассмотренной модели следует, что похудение с дисбалансом, по модулю превышающим 400 ккал, в долговременной перспективе бессмысленно, поскольку при возврате к «нормальному» питанию возврат веса неизбежен [3]. При постоянной времени системы $T = 25$ дней экспресс-диеты, позволяющие сбросить за короткое время часть избыточного веса, оказываются эффективными лишь в краткосрочной перспективе. За последующий неизбежный набор веса авторы анонимных, как правило, диет возлагают ответственность на пользователей, обвиняя их в мнимых отступлениях от предписанных правил соблюдения «диеты» или выхода из нее. Из нашей же модели следует, что ввиду наличия «порога» чувствительности человека к уменьшению калорийности ежедневного рациона питания, похудение целесообразно лишь при значениях дисбаланса, не превышающих (по модулю) 400 ккал. Данное значение дисбаланса обеспечивает похудение со скоростью 400 г в неделю, что позволило дать основанной на описываемой методике системе нормализации веса наименование «Минус фунт»¹.

¹ Электронный ресурс: <http://minusfunt.ru>

3. На рис. 1 представлен пример гистограммы временного ряда калорийности рациона питания, назначаемой системой «Минус фунт» в течение года. Поскольку система «Минус фунт» на основе отрицательной обратной связи гарантирует постоянство среднего дисбаланса в ходе похудения, калорийность питания отличается от энергозатрат на постоянную величину, что позволяет по гистограмме калорийности выявить характеристики энергозатрат. На основании анализа выявляются следующие тренды и циклы данного временного ряда: 1) линейный ниспадающий тренд; 2) окологодовой цикл; 3) околочвартальный цикл. Линейный тренд обязан своим происхождением самому процессу снижения веса в ходе похудения, что ведет к снижению как УОО, так и энергозатрат на физическую активность. На рис. 1 линия линейного тренда проведена исходя из минимизации суммы абсолютных значений отклонений значений временного ряда от тренда при равенстве площади гистограммы площади под линией тренда. Последнее условие определяется физическим смыслом переменной. Линия тренда описывается уравнением $K_T = 2014 - 5,84n$, где n – номер недели похудения.

После вычитания из значений переменной тренда, получаем представленные на рис. 2 полигоном (тонкая линия) данные. Анализ показывает, что в данных значимо представлен окологодовой и околочвартальный циклы. Окологодовой цикл имеет параметры: период = 37 недель, амплитуда = 29 ккал. Коэффициент корреляции значений окологодового цикла с исходными данными составляет 0,21. В тоже время коэффициент корреляции годового цикла с периодом 52 недели с исходными данными составляет 0,13. Ввиду незначимости разницы между двумя приведенными значениями коэффициентов корреляции впредь полагаем выявленный окологодовой цикл годовым, поскольку период цикла в один год отвечает нашим представлениям о влиянии природного, хозяйственного и рекреационного периода в один год на обменные процессы и физическую активность. Принимаются следующие параметры годового цикла по рассматриваемому примеру: период = 52 недели, амплитуда = 16 ккал.

Годовой и квартальный циклы предполагаются синусоидальными, поскольку прямоугольные, треугольные и пилообразные циклы дают меньшее согласование с данными.

После вычитания из данных рисунка 2 годового цикла определены параметры околочвартального цикла: период = 12 недель, амплитуда = 68 ккал. Коэффициент корреляции значений суммы годового и околочвартального цикла с исходными данными равен 0,62. Определенная продолжительность околочвартального цикла близка к 3 календарным месяцам, или хозяйственному кварталу. При постулировании длительности цикла в 3 синодических, сидерических или календарных месяца различия в коэффициенте корреляции незначимы и не позволяют сделать выбор в

пользу одного из возможных вариантов. Согласно [4] существование квартального цикла продолжительностью 65–90 суток определяется потребностью человека в ежеквартальной рекреации, что выражается либо в посещении привлекательных для отдыха мест, либо в пребывании на месте постоянного проживания со сменой стандарта поведения (пример – праздник с застольями). Сумма годового и околочвартального циклов отображена на рис. 2 жирной линией.

4. Для оценки значимости вычисленных коэффициентов корреляции (отклонения их от 0, чему соответствует отсутствие корреляции) применялось z-преобразование Фишера $Mz = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$;

$\sigma_z^2 = \frac{1}{n-3}$, где r – выборочный коэффициент корреляции, а $n = 52$ – объем выборки. Исходя из вычисленного значения $\sigma_z = 0,14$ оценивалась значимость коэффициентов корреляции и их взаимных отклонений.

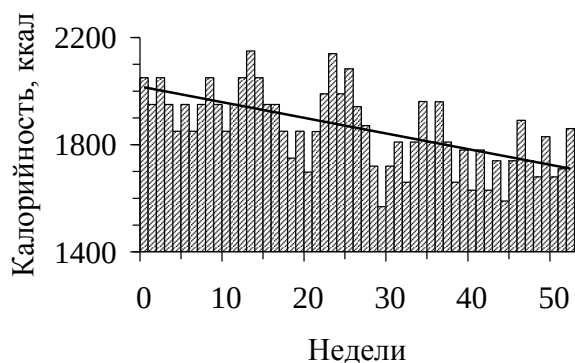


Рис. 1. Гистограмма калорийности рациона питания

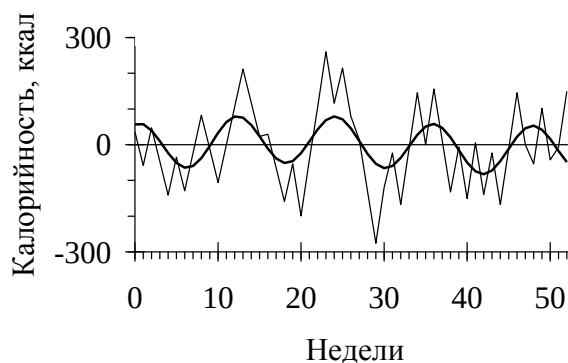


Рис. 2. Цикличность энергозатрат в ходе похудения

Литература

1. Кромер В.В. Система нормализации и поддержания веса с отрицательной обратной связью по весу пациента // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2010): Матер. IX Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием (19–20 ноября 2010 г.) / Филиал Кемеровского госуд. ун-та в г. Анжеро-Судженске. Томск: Изд-во ТГУ, 2010. Ч. 2. С. 91–95.

2. Кромер В.В. Об одном методе параметризации характеристик уровня энергообмена в динамике // Пятая Международная телеконференция / Сибирский государственный медицинский университет. 27 мая 2011 г. [Электронный ресурс] // URL: <http://tele-conf.ru/aktualnyie-problemyi-zdorovya-cheloveka/ob-odnom-metode-parametrizatsii-harakteristik-urovnya-energoobmena-v-dinamike.html>

3. Кромер В.В. Сколько существует способов нормализации избыточной массы тела? // Научный электронный архив [Электронный ресурс] // URL: <http://econf.rae.ru/article/6167>.

4. Николаенко Т.В. Процесс рекреационного освоения региона (на примере Крыма). Симферополь, 1998.

МНОГОШАГОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ЦЕЛЕЙ РЕАЛИЗАЦИИ СУБГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ МИНИМИЗАЦИИ

В.Н. Крутиков, Я.Н. Вершинин

Кемеровский государственный университет

Эффективные релаксационные субградиентные методы оптимизации негладких функций основываются на алгоритмах решения систем неравенств, целью которых является поиск направления спуска на очередной итерации основного алгоритма. Для нахождения решения указанных систем неравенств могут быть использованы итеративные алгоритмы, называемые алгоритмами обучения. В этой работе изучаются методы, основанные на идее ортогонализации последовательных направлений процесса обучения.

1. Постановка задачи

Пусть требуется решить задачу.

Задача 1. По данным наблюдения $g_k \in R^n$, $y_k \in R^1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, процесса

$$y_k = (s^*, g_k) + \xi_k, \quad (1)$$

где ξ_k – ошибка наблюдения, необходимо найти вектор неизвестных параметров $s^* \in R^n$.

Здесь и далее n – размерность пространства, а $(\cdot)$ – оператор скалярного произведения. Соотношение (1) будем называть обучающим соотношением. Можно сказать, что целью решения задачи 1 является нахождение $s^* \in R^n$, в определенной мере удовлетворяющего обучающим соотношениям.

Алгоритм Качмажа для оценки s^* в задаче 1 имеет вид [3]

$$s_{k+1} = s_k + \frac{y_k - (s_k, g_k)}{\|g_k\|^2} g_k, \quad (2)$$

где $\|\cdot\|$ – Евклидова норма вектора.

Сделаем следующее предположение о данных задачи 1.

Предположение 1. Пусть данные в задаче 1 удовлетворяют следующим условиям:

$$q_k^2 \geq q^2 > 0. \quad (3)$$

$$0 \leq -\lambda_k \leq \lambda < 1. \quad (4)$$

$$(g_k, \Delta_k) \geq 0. \quad (5)$$

Свойство (4) накладывает ограничение на λ_k , который обеспечивает гарантированную точность одномерного спуска алгоритма (2) вдоль g_k и соответствует неполной релаксации в градиентном методе.

Свойство (5) говорит о согласованности векторов невязки Δ_k и обучения g_k . Вектор g_k в алгоритме обучения (2) играет роль, аналогичную градиенту в градиентном методе.

2. Оценка скорости сходимости алгоритма Качмажа

На каждом шаге алгоритма Качмажа оценка новых параметров производится так, что выполняются обучающие соотношения (1).

Лемма 1. Пусть последовательность $\{s_k\}$ – результат процесса (2) решения задачи 1, $\|g_k\| \neq 0$ для $k = 0, 1, 2, \dots$, $s_0 \in R^n$. Тогда выполнены равенства

$$(s_{k+1}, g_k) = y_k.$$

Теорема 1. Пусть последовательность $\{s_k\}$ – результат процесса (2) решения задачи 1, $\|g_k\| \neq 0$ для $k = 0, 1, 2, \dots$, $s_0 \in R^n$. Тогда, если выполнено предположение 1, имеет место оценка:

$$(\Delta_k, \Delta_k) \leq (\Delta_0, \Delta_0) [1 - q^2 (1 - \lambda^2)]^k.$$

3. Алгоритм обучения на основе попарной ортогонализации последовательных векторов

Если в (2) используется система из n взаимно ортогональных векторов g_k , и отсутствует ошибка, т.е. $y_k = (s^*, g_k)$, тогда решение $s^* \in R^n$ будет получено за цикл итераций (2) вдоль этих векторов. Мы, используя ортогонализацию, построим алгоритм, который решает задачу точно в пространстве двух последовательных векторов.

Введем итерационный процесс с ортогонализацией последовательных векторов

$$s_{k+1} = s_k + \frac{y_k - (s_k, g_k)}{(p_k, g_k)} p_k, \quad (6)$$

где

$$p_k = \begin{cases} g_k, & \text{если } (g_k, g_{k-1}) \geq 0, \\ g_k - \frac{(g_k, g_{k-1})}{\|g_{k-1}\|^2} g_{k-1}, & \text{если } (g_k, g_{k-1}) < 0. \end{cases} \quad (7)$$

На каждом шаге алгоритма (6), (7) оценка новых параметров производится так, что выполняются обучающие соотношения (1).

Лемма 2. Пусть последовательность $\{s_k\}$ – результат процесса (6), (7) решения задачи 1, $\|g_k\| \neq 0$ для $k = 0, 1, 2, \dots$, $s_0 \in R^n$. Тогда выполнены равенства

$$(s_{k+1}, g_k) = y_k,$$

$$(s_{k+1}, g_{k-1}) = y_{k-1}, \text{ если } (g_k, g_{k-1}) < 0.$$

Теорема 2. Пусть последовательность $\{s_k\}$ – результат процесса (6), (7) решения задачи 1, $\|g_k\| \neq 0$ для $k = 0, 1, 2, \dots$, $s_0 \in R^n$. Тогда, если выполнено предположение 1, имеет место оценка

$$(\Delta_k, \Delta_k) \leq (\Delta_0, \Delta_0)[1 - q^2(1 - \lambda^2)]^k.$$

При этом на отдельной итерации оценка скорости сходимости процесса (6), (7) не хуже чем у алгоритма Качмажа.

4. Многошаговый алгоритм обучения

Введем итерационный процесс с ортогонализацией последовательных векторов

$$s_{k+1} = s_k + \frac{y_k - (s_k, g_k)}{(p_k, g_k)} p_k, \quad (8)$$

где

$$p_k = \begin{cases} g_k, & \text{если } (g_k, p_{k-1}) \geq 0, \\ g_k - \frac{(g_k, p_{k-1})}{\|p_{k-1}\|^2} p_{k-1}, & \text{если } (g_k, p_{k-1}) < 0. \end{cases} \quad (9)$$

На каждом шаге алгоритма оценка новых параметров производится так, что выполняются обучающие соотношения (1).

Лемма 3. Пусть последовательность $\{s_k\}$ – результат процесса (8), (9) решения задачи 1, $\|g_k\| \neq 0$ для $k = 0, 1, 2, \dots$, $s_0 \in R^n$. Тогда выполнены равенства

$$(s_{k+1}, g_k) = y_k.$$

Лемма 4. Пусть последовательность $\{s_k\}$ – результат процесса (8), (9) решения задачи 1, $\|g_k\| \neq 0$ для $k = 0, 1, 2, \dots$, $s_0 \in R^n$. Тогда, если выполнено предположение 1, то имеют место оценки

$$\begin{aligned} (p_k, \Delta_k) &\geq (g_k, \Delta_k), \\ (p_k, \Delta_{k+1}) &\geq 0. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть последовательность $\{s_k\}$ – результат процесса (8), (9) решения задачи 1, $\|g_k\| \neq 0$ для $k = 0, 1, 2, \dots$, $s_0 \in R^n$. Тогда, если выполнено предположение 1, имеет место оценка

$$(\Delta_k, \Delta_k) \leq (\Delta_0, \Delta_0)[1 - q^2(1 - \lambda^2)]^k.$$

При этом на отдельной итерации оценка скорости сходимости процесса (8), (9) не хуже чем у алгоритма Качмажа.

Заключение

Эффективность релаксационного субградиентного метода оптимизации негладких функций определяется скоростью сходимости положенного в его основу алгоритма обучения. Основываясь на том, что скорость сходимости процесса обучения определяется степенью ортогональности его векторов, в работе получены и теоретически обоснованы многошаговые алгоритмы обучения, использующие идею ортогонализации.

Литература

1. Крутиков В.Н., Петрова Т.В. Релаксационный метод минимизации с растяжением пространства в направлении субградиента // Экономика и мат. методы. 2003. Т. 39, вып. 1. С. 8–49.
2. Крутиков В.Н., Горская Т.А. Семейство релаксационных субградиентных методов с двухранговой коррекцией матриц метрики // Экономика и мат. методы. 2009. Т. 43, №4. С. 35–50.
3. Крутиков В.Н. Обучающиеся методы безусловной оптимизации и их применение. Томск: Изд-во Том. гос. пед. ун-та, 2005. 29 с.

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХСЛОЙНОГО ГИДРОЦИЛИНДРА

А. В. Михайлова, К. Г. Буялич

Кузбасский государственный технический университет

Динамические процессы, происходящие в очистном забое вблизи секции механизированной крепи, могут привести к резкому повышению давления в поршневой полости гидростойки. Это, в свою очередь, приводит к повышенным радиальным деформациям стенок гидроцилиндра и потере работоспособности гидростойки.

Для исследования радиальных деформаций уплотняемой поверхности рабочего цилиндра от его параметров на кафедре горных машин и комплексов разработана плоская конечно-элементная параметрическая модель двухслойного гидроцилиндра, которая представляет собой две трубы, одетые одна на другую с натягом Δ (рис. 1). Здесь $D_{в1}$ и $D_{н1}$ – внутренний и наружный диаметр внутренней трубы; $D_{в2}$ и $D_{н2}$ – внутренний и наружный диаметр наружной трубы; Δ – натяг.

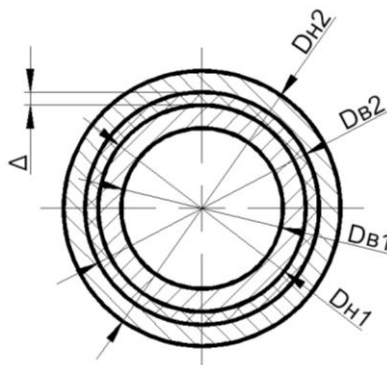


Рис. 1. Поперечное сечение двухслойного гидроцилиндра

Основными геометрическими параметрами модели являются (рис. 2): толщина стенки внутреннего цилиндра (S_1), толщина стенки наружного цилиндра (S_2), длина цилиндра (L), раздвижность (H), толщина днища (h). В качестве силового параметра задаётся давление в поршневой полости (P).

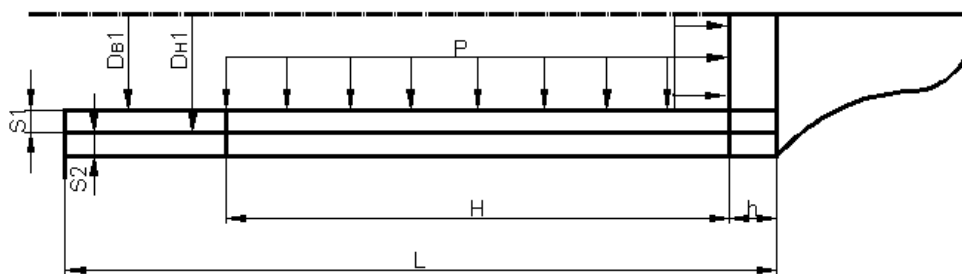


Рис. 2. Схема плоской параметрической модели двухслойного гидроцилиндра для крети М144

При описании поведения материала под нагрузкой используется линейная модель с основным модулем деформации и коэффициентом Пуассона.

При построении двумерной осесимметричной конечно-элементной модели двухслойного гидроцилиндра размер ребра конечного элемента выбирается из условия $1/3$ толщины стенки гидроцилиндра [1].

На сопряжении внутреннего и наружного цилиндра создана контактная пара, при этом контактной поверхностью является наружная поверхность внутреннего цилиндра, а ответной – внутренняя поверхность наружного цилиндра.

В качестве граничных условий задаются ограничения на перемещения опоры гидроцилиндра, а также внутреннего цилиндра относительно наружного в осевом направлении.

Давление рабочей жидкости в поршневой полости имитируется распределенной нагрузкой, которая прикладывается к внутренним поверхностям днища и стенок рабочего цилиндра на расстоянии H от дна соответствующей величине раздвижности.

Расчёт проводится в два этапа. Первоначально определяется контактное давление от действия натяга без приложения давления рабочей жидкости, а затем осуществляется расчёт цилиндра под нагрузкой.

Полученная модель даёт возможность определить напряжённо-деформированное состояние двухслойного гидроцилиндра в зависимости от заданных его геометрических и силовых параметров.

Литература

1. Воеводин В.В. Оценка параметров гидростоек механизированных крепей методом конечных элементов: Дис. ... канд. техн. наук. Кемерово, 2005. 169 с.

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

Д.А. Прокудин

Кемеровский государственный университет

Исследование уравнений механики сплошных сред является задачей, относящейся как к области механики и физики, так и математики. Ее актуальность обусловлена многочисленными приложениями, особенно ярко проявившимися в последнее столетие. Принятые в современной науке подходы требуют, чтобы формулировка и анализ физических моделей сопровождалась их математическим исследованием.

Все сказанное относится и к модели, описывающей движения двухкомпонентных смесей вязких жидкостей (газов). Эта модель в изотермическом случае описывается системой дифференциальных уравнений с частными производными, отражающих закон сохранения массы и закон сохранения импульса для каждой компоненты смеси [1–2]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_i \vec{u}^{(i)})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) = \operatorname{div} P^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где ρ_i и $\vec{u}^{(i)} = (u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)})$ соответственно плотность и вектор скорости i -й составляющей смеси, $P^{(i)}$ – тензор напряжений i -й компоненты смеси,

$$\operatorname{div} \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad \vec{v} \otimes \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3),$$

$$\operatorname{div} A = \left\{ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right\}_{i=1}^3, \quad A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^3.$$

Как видно, закон сохранения импульса формулируется для каждой составляющей смеси и связь между этими уравнениями обусловлена структурой выражений

$$\Pi^{(i)} = -\pi_i I + \sigma^{(i)}, \quad \sigma^{(i)} = \sum_{\varphi=1}^2 \left(2\mu_{i\varphi} \Delta(\vec{v}^{(\varphi)}) + \lambda_{i\varphi} \operatorname{div} \vec{v}^{(\varphi)} I \right), \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

и

$$\vec{J}^{(i)} = (-1)^{i+1} c (\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}), \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

где p_i – давление i -й компоненты смеси, $\sigma^{(i)}$ – вязкая часть тензора напряжений i -й составляющей, D – тензор скоростей деформаций

$$\left(D_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \right), \quad I - \text{единичный тензор, } \lambda_{ij} \text{ и } \mu_{ij} -$$

коэффициенты вязкости (будем считать их здесь известными постоянными), $c = \text{const} > 0$. Такие предположения можно использовать при описании гомогенных смесей типа растворов, смеси газов, когда составляющие компоненты можно рассматривать как отдельные континуумы, заполняющие один и тот же объем и имеющие свои параметры в каждой точке.

Данная работа посвящена аналитическому решению задачи об круговом движении двухкомпонентных смесей вязких жидкостей между двумя вращающимися цилиндрами.

Будем рассматриваемую среду считать несжимаемой, т.е. примем, что $\rho_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$ и движение предполагать установившимся

(стационарным), т.е. $\frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial t} = 0$, $i = 1, 2$. При этих предположениях уравнения (1)–(2) в цилиндрической системе координат² ($x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, $x_3 = z$) примут следующий вид:

$$\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(i)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & u_r^{(i)} \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} + \frac{u_\varphi^{(i)}}{r} \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial \varphi} + u_z^{(i)} \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial z} - \frac{(u_\varphi^{(i)})^2}{r} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial r} + \\ & + \frac{\mu_{i1}}{\rho_i} \left(\Delta u_r^{(1)} - \frac{u_r^{(1)}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\mu_{i2}}{\rho_i} \left(\Delta u_r^{(2)} - \frac{u_r^{(2)}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi^{(2)}}{\partial \varphi} \right) + \\ & + (-1)^{i+1} \frac{c}{\rho_i} (u_r^{(2)} - u_r^{(1)}), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & u_r^{(i)} \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial r} + \frac{u_\varphi^{(i)}}{r} \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial \varphi} + u_z^{(i)} \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial z} + \frac{u_\varphi^{(i)} u_r^{(i)}}{r} = -\frac{1}{\rho_i r} \frac{\partial p_i}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{\mu_{i1}}{\rho_i} \left(\Delta u_\varphi^{(1)} - \frac{u_\varphi^{(1)}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\mu_{i2}}{\rho_i} \left(\Delta u_\varphi^{(2)} - \frac{u_\varphi^{(2)}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial \varphi} \right) + \\ & + (-1)^{i+1} \frac{c}{\rho_i} (u_\varphi^{(2)} - u_\varphi^{(1)}), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & u_r^{(i)} \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial r} + \frac{u_\varphi^{(i)}}{r} \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial \varphi} + u_z^{(i)} \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial z} + \frac{\mu_{i1}}{\rho_i} \Delta u_z^{(1)} + \frac{\mu_{i2}}{\rho_i} \Delta u_z^{(2)} + \\ & + (-1)^{i+1} c (u_z^{(2)} - u_z^{(1)}), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

² В дальнейшем, поскольку будет рассматриваться круговое движение двухкомпонентных смесей вязких жидкостей между двумя вращающимися цилиндрами, нам будет удобно пользоваться уравнениями в цилиндрической системе координат.

Относительно коэффициентов вязкости μ_{ij} , $i, j = 1, 2$ будем предполагать, что

$$\mu_{11} > 0, \mu_{22} > 0, 4\mu_{11}\mu_{22} - (\mu_{12} + \mu_{21})^2 > 0. \quad (9)$$

Поскольку рассматривается круговое движение смеси между двумя вращающимися цилиндрами (рис. 1), то будем считать, что траектории всех частиц представляют собой дуги концентрических окружностей, т.е.

$$u_r^{(i)} = 0, \quad u_z^{(i)} = 0, \quad u_\varphi^{(i)} \neq 0, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

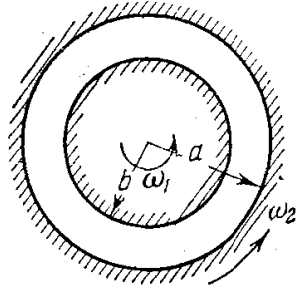


Рис. 1. К течению смесей вязких жидкостей между вращающимися цилиндрами

В этом случае уравнения (5) – (8) существенно упрощаются и принимают следующий вид:

$$\frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial \varphi} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{(u_\varphi^{(i)})^2}{r} = \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial r}, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial p_i}{\partial \varphi} = & \mu_{i1} \left(\Delta u_\varphi^{(1)} - \frac{u_\varphi^{(1)}}{r^2} \right) + \mu_{i2} \left(\Delta u_\varphi^{(2)} - \frac{u_\varphi^{(2)}}{r^2} \right) + \\ & + (-1)^{i+1} c (u_\varphi^{(2)} - u_\varphi^{(1)}), \quad i = 1, 2, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

Пусть внутренний цилиндр имеет радиус b и вращается с угловой скоростью ω_1 , а внешний имеет радиус a и вращается с угловой скоростью ω_2 (см. рис. 1). Граничные условия прилипания частиц жидкости к стенкам будут в этом случае иметь вид

$$u_\varphi^{(i)}|_{r=b} = \omega_1 b, \quad u_\varphi^{(i)}|_{r=a} = \omega_2 a, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

В данной работе получены аналитические решения задачи (11)–(15):

$$u_\varphi^{(i)}(r) = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[(\omega_2 a^2 - \omega_1 b^2) r + \frac{(\omega_1 - \omega_2) a^2 b^2}{r} \right], \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

$$p_i(r) = \frac{\rho_i}{(a^2 - b^2)^2} \left[(\omega_2 a^2 - \omega_1 b^2)^2 \frac{r^2}{2} + \right.$$

$$\left. + 2a^2b^2(\omega_1 - \omega_2)(\omega_2a^2 - \omega_1b^2)\ln r - \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2 a^4b^4}{2r^2} \right] + C_i, i=1,2, \quad (17)$$

где C_i – произвольные постоянные $i=1,2$.

Из соотношений (16) видно, что скорости движения обеих компонент смеси между двумя вращающимися цилиндрами одинаковы и зависят только от радиусов и угловых скоростей вращения цилиндров.

Выражение для касательного напряжения силы вязкости i -й компоненты смеси для рассматриваемого здесь кругового движения имеет вид

$$\sigma_{r\varphi}^{(i)} = -\frac{2}{r^2}(\mu_{i1} + \mu_{i2})\frac{a^2b^2(\omega_1 - \omega_2)}{a^2 - b^2}, \quad i=1,2, \quad (18)$$

а для смеси в целом

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}^{(1)} + \sigma_{r\varphi}^{(2)} = -\frac{2\delta a^2b^2(\omega_1 - \omega_2)}{r^2(a^2 - b^2)}, \quad (19)$$

где $\delta = \mu_{22} + \mu_{12} + \mu_{21} + \mu_{11} > 0$.

Формула для момента сил вязкости i -й компоненты смеси, распределённых по какой-либо окружности радиуса r , относительно оси симметрии будет иметь следующий вид:

$$L_i = -4\pi(\mu_{i1} + \mu_{i2})\frac{a^2b^2(\omega_1 - \omega_2)}{a^2 - b^2}, \quad i=1,2, \quad (20)$$

для всей смеси

$$L = L_1 + L_2 = -4\pi\delta\frac{a^2b^2(\omega_1 - \omega_2)}{a^2 - b^2}. \quad (21)$$

Таким образом, момент сил вязкости, распределённых по любой окружности, относительно оси симметрии не зависит от радиуса этой окружности. Это значит, что если мы возьмём слой, ограниченный двумя окружностями, то моменты сил вязкости, распределённых по этим окружностям, будут равны по величине, но обратны по знаку (в силу разных направлений нормали), т.е. для моментов сил вязкости будет выполняться условие равновесия.

Заметим также, что формула (16) для определения скорости i -й компоненты смеси, формула (17) для давления i -й составляющей (с $\rho_1 = \rho_2 = \rho$) и формулы (18), (20) для силы вязкости и момента сил вязкости i -й компоненты (с $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu$, $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$), которые описывают движение двухкомпонентных смесей вязких сжимаемых жидкостей между двумя вращающимися цилиндрами, когда обе компоненты физически неразличимы, полностью совпадают с формулами, описывающими аналогичное движение вязкой несжимаемой жидкости (см. [3, стр. 135]). Соответственно данной модели смеси в этом случае присущи все физические характеристики течения, имеющиеся у модели Навье–Стокса,

описывающей стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами.

Рассмотрим далее некоторые частные случаи. Уменьшая значение радиуса внутреннего цилиндра b до нуля, получим из (16), (17), (19) и (21):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\varphi}^{(i)}(r) = \omega_2 r, \\ p_i(r) = \frac{1}{2} \rho_i \omega_2^2 r^2 + C_i, \\ \sigma_{r\varphi} = 0, \\ L = 0. \end{array} \right. \quad (22)$$

Полученные формулы (22) представляют собой решение задачи о вращении кругового цилиндра, наполненного двухкомпонентной смесью вязких несжимаемых жидкостей. Таким образом, при установившемся движении смесь вязких несжимаемых жидкостей внутри цилиндра вращается как абсолютно твердое тело. Для поддержания равномерного вращения цилиндра со смесью вязких жидкостей не требуется момент внешних сил. Отметим еще, что если положить $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, то формулы (22) совпадают с формулами, описывающими аналогичное движение вязкой несжимаемой жидкости (см. [3, стр. 136]).

Чтобы получить решение задачи о вращении круглого цилиндра в безграничной смеси вязких жидкостей, необходимо в формулах (16), (17), (19) и (21) вначале положить $\omega_2 = 0$, а затем радиус внешнего цилиндра a увеличивать до бесконечности. В результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\varphi}^{(i)}(r) = \frac{\omega_1 b^2}{r}, \\ p_i(r) = C_i - \frac{\rho_i \omega_1^2 b^4}{2r^2}, \\ \sigma_{r\varphi} = -\frac{2\delta b^2 \omega_1}{r^2}, \\ L = -4\pi\delta\omega_1 b^2. \end{array} \right. \quad (23)$$

Для поддержания равномерного движения цилиндра в неограниченной смеси жидкостей необходимо приложить момент внешних сил, пропорциональный угловой скорости вращения цилиндра, коэффициенту вязкости δ смеси и квадрату радиуса цилиндра.

Литература

1. Нигматулин. Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
2. Rajagopal. K.R., Tao L. Mechanics of mixtures. London: World Scientific Publishing, 1995.
3. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОГО ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ РАСХОДА РАЗЛИЧНОГО ТИПА

Г.М. Садчикова

*Балаковский институт техники, технологии и управления (филиал)
Саратовского государственного технического университета*

Все требования, предъявляемые к преобразователям расхода, можно условно разделить на две группы. К первой группе относятся индивидуальные требования, предъявляемые к приборам для измерения расхода и количества: высокая точность, надежность, независимость результатов измерения от изменения плотности вещества, быстроедействие и достаточно большой диапазон измерения. Ко второй группе относятся требования, которые характеризуют всю группу расходомеров и счетчиков: необходимость измерения расхода и количества очень разнообразной номенклатуры вещества с отличающимися свойствами, различных значений расхода от очень малых до чрезвычайно больших и при различных значениях температуры и давления.

Требования, предъявляемые к характеристикам преобразователей расхода (ПР), зачастую противоречивы и поэтому не всегда могут быть исполнены в полном объеме [1]. Однако количественно взаимосвязь характеристик ПР на настоящий момент не исследована, хотя наличие или отсутствие взаимного влияния параметров ПР позволяют прогнозировать ряд эксплуатационных характеристик преобразователя уже на стадии разработки.

В данной работе представлены результаты статистических исследований преобразователей расхода различного типа, которые проведены с целью изучения влияния их параметров на показатель надежности ПР.

Установление связей между факторным признаком x и результативным признаком y является важнейшей задачей статистического учета. Можно утверждать, что признаки y и x функционально связаны, если изменение результативного признака y всецело обусловлено действием факторного признака x , то есть существует зависимость $y = f(x)$.

В качестве факторных признаков x выбраны диапазон измерений, погрешность, потеря давления и критерий A_1 , в качестве результативного признака – вероятность безотказной работы ПР. Так как в нашем случае изменение признака y зависит не от одного признака x , а одновременно от нескольких признаков, поэтому в данной ситуации удобнее пользоваться зависимостью $y = \psi(x) + \varepsilon$, которая отражает корреляционную связь между признаками.

Математической моделью, отражающей данную зависимость, является уравнение регрессии. При численности объектов анализа $n < 30$ для проверки типичности параметров уравнения регрессии используется t – критерий Стьюдента.

Полученные математические модели характеризуют среднюю величину результативного признака y_x в зависимости от вариаций признака-фактора x .

Проверка практической значимости синтезированных в корреляционно-регрессионном анализе математических моделей осуществляется посредством показателя тесноты связи между признаками y и x .

Для оценки значимости коэффициента корреляции r применяется t – критерий Стьюдента:

$$t_r = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}.$$

Если выполняется условие $t_r > t_k$, то величина коэффициента корреляции признается существенной. Произведем расчет коэффициентов корреляции для преобразователей расхода различного типа.

Произведем подробный расчет математических моделей, отражающих корреляционную зависимость надежности ротаметрических преобразователей расхода от диапазона измерений, погрешности, потерь давления и критерия $A1$ (табл. 1). Критерий $A1$ определяется по формуле [2]:

$$A1 = \frac{S_k}{S},$$

где S_k – площадь контролируемого датчиком сечения потока, m^2 ; S – общая площадь сечения потока, m^2 .

В качестве показателя надежности выбрана вероятность безотказной работы (y). Выбор данного параметра обусловлен тем, что это безразмерная величина, что удобно при проведении расчетов. Пример расчета корреляции между параметрами ПР приведен для группы ротаметров (табл. 1), результаты остальных расчетов сведены в табл. 3.

Таблица 1

Расчет показателей корреляции между вероятностью безотказной работы и диапазоном измерения для группы ротаметров

Наименование	Вероятность безотказной работы, y	Диапазон измерения, x
ВИР	0,92	16
ЭРНС	0,9	10
РС-3А	0,9	5
РЭД	0,9	6
РС-3	0,92	5
РЭВС	0,82	6
РС-7	0,94	10

Для определения корреляционных показателей будем использовать прямолинейную форму зависимости между признаками y и x .

$$y_x = a_0 + a_1x.$$

Для определения параметров этого уравнения на основе требования наименьших квадратов составим систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x = \sum y, \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 = \sum xy. \end{cases}$$

Для решения системы применяется способ определителей, позволяющий сводить к минимуму неточности округлений в расчетах параметров уравнения регрессии.

Вычисленные этим способом значения коэффициентов подставим в уравнение регрессии и получим:

$$y_x = 0,87 + 0,0035x.$$

Проверим параметры математической модели на типичность, для чего необходимо определить выровненные значения y_{xi} (табл. 2):

Таблица 2

Расчетные данные для определения коэффициента корреляции

y	x	y_x	$y - y_x$	$(y - y_x)^2$	$x - x_{cp}$	$(x - x_{cp})^2$	y^2
0,92	16	0,93	-0,01	0,0001	7,7	59,29	0,8464
0,9	10	0,91	-0,01	0,0001	1,7	2,89	0,81
0,9	5	0,88	0,02	0,0004	-3,3	10,89	0,81
0,9	16	0,89	0,09	0,0081	-2,3	5,29	0,81
0,92	5	0,88	0,04	0,0016	-3,3	10,89	0,8464
0,82	6	0,89	0,01	0,0001	-2,3	5,29	0,6724
0,94	10	0,91	0,03	0,0009	1,7	2,89	0,8836

Определим среднее квадратическое отклонение результативного признака y_i от выровненных значений y_{xi} .

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum (y_i - y_{xi})^2}{n}} = \frac{0,0113}{7} = 0,0016.$$

Определим фактическое значение t -критерия для параметра a_0 :

$$ta_0 = a_0 \frac{\sqrt{n-2}}{\sigma_e} = 0,87 \frac{\sqrt{7-2}}{0,0016} = 1218.$$

Определим среднее квадратическое отклонение факторного признака x_i от общей средней $\bar{X}$:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{97,4}{7}} = 3,7.$$

Определим фактическое значение t -критерия для параметра a_1 :

$$ta_1 = a_1 \frac{\sqrt{n-2} \cdot \sigma_x}{\sigma_e} = 0,0035 \frac{\sqrt{7-2} \cdot 3,7}{0,0016} = 18,1.$$

С учетом коэффициента значимости $\alpha = 0,05$ и числа степеней свободы $k = n - 2 = 7 - 2 = 5$ табличное значение $t_k = 2,3$.

Условие проверки на типичность: $ta_0 > t_k < ta_1$; $1218 > 2,3 < 18,1$.

Это позволяет признать вычисленные по уравнению регрессии параметры типичными. Далее произведем оценку практической

значимости синтезированной модели с помощью коэффициента корреляции r :

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \right] \left[\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} \right]}} = \frac{52,54 - \frac{58 \cdot 6,3}{7}}{\sqrt{\left[578 - \frac{58^2}{7} \right] \cdot \left[5,7 - \frac{6,3^2}{7} \right]}} = 0,33.$$

Полученная величина $r = 0,33$ означает, что в соответствии со шкалой Чеддока установленная по уравнению регрессии связь между вероятностью безотказной работы ротаметрических преобразователей расхода и диапазоном измерения невысокая.

Оценим значимость коэффициента корреляции с помощью t -критерия:

$$t_r = 0,33 \sqrt{\frac{7-2}{1-0,33 \cdot 0,33}} = 0,78.$$

Так как $t_k > t_r$ ($2,3 > 0,78$), то вычисленный коэффициент корреляции не может быть признан существенным. Из значения $r^2 = 0,108$ следует, что 10,8% общей вариации объясняется изменением факторного признака – диапазона измерения.

Аналогично проведен расчет для определения корреляции между вероятностью безотказной работы и такими характеристиками, как погрешность измерения, потеря давления, и критерий А1 для ультразвуковых, электромагнитных и турбинных ПР. Результаты расчетов сведены в табл. 3.

Таблица 3

Взаимосвязь между вероятностью безотказной работы и параметрами, влияющими на надежность ПР, %

ПР	Диапазон измерения	Погрешность измерения	Потери давления	Критерий А1
Ротаметры	10,8	0	1,69	20,6
Акустические	0	0	0	0
Турбинные	86	64	99,5	28
Электромагнитные	0,5	0,5	0	0,004

По результатам проведенных статистических исследований можно сделать следующие выводы:

1. Диапазон измерения и критерий А1 являются формообразующими признаками вариации показателя надежности в пределах данной группы ротаметров. Изменение значений этих параметров приведет к уменьшению или увеличению значения вариации показателя надежности.

2. Вероятность безотказной работы ультразвуковых преобразователей расхода, как видно из табл. 3, не зависит от рассматриваемых параметров.

3. Показатели надежности турбинных преобразователей расхода тесно связаны со всеми рассматриваемыми параметрами. Таким образом, изменение любого параметра ТПР приведет к изменению показателя надежности.

4. Связь между надежностью электромагнитных преобразователей расхода и их параметрами, как видно из обобщающей табл. 3, невысока. Всего 0,5 % вариации вероятности безотказной работы обуславливается вариацией диапазона измерения в пределах данной группы и на столько же объясняется вариацией погрешности измерения. Так как потерь давления в ЭМПР не существует, то и связи между надежностью преобразователя и потерей давления быть не может.

5. Связь вероятности безотказной работы и критерия А1 настолько мала, что ею можно пренебречь. Следовательно, качественные показатели ЭМПР зависят прежде всего от условий эксплуатации, от влияния поля скоростей, от изменения площади проходного сечения и наличия внешних помех.

Переход от интуитивного понимания взаимосвязи между различными показателями ПР к их количественной характеристике позволит учесть эту взаимосвязь на этапе разработки новых моделей.

Литература

1. *Кремлевский П.П.* Расходомеры и счетчики количества / П.П. Кремлевский. Л.: Машиностроение, 1989. 701с.
2. *Анализ* первичных измерителей гидроэлектрических преобразователей расхода в системах управления по первому векторно-рейтингову критерию Власова / В. В. Власов, Г. М Садчикова; СГТУ. Саратов., 1994. 48 с. Деп. в ВИНТИ 22. 02. 94, № 453 - В94.
3. *Лепявко А.П.* Расходомеры и счетчики жидкости и газа/ Поверка и калибровка: учебное пособие / А.П. Лепявко. М.: АСМС, 2005.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ϵ -СЛОЯ В СИСТЕМАХ ЭКСТРАПОЛИРУЮЩЕГО МОНИТОРИНГА

Л.И. Сучкова

*Алтайский государственный технический университет
им. И. И. Ползунова*

Современный термин «мониторинг» обозначает наблюдение, анализ и оценку состояния окружающей среды, её изменений под влиянием хозяйственной деятельности человека, а также прогнозирование этих изменений. Сбор данных в автоматизированных системах мониторинга осуществляется первичными измерительными преобразователями, чьи выходные сигналы поступают на дальнейшую компьютерную обработку. Для обеспечения оперативного анализа и

прогнозирования поведения сигнала предлагается использовать метод ε -слоя [1]. Так как в большинстве случаев сигналы, получаемые с преобразователей и датчиков, представляют собой сложные квазидетерминированные функции, то будем полагать, что сигнал Y может быть представлен в виде функции временной координаты, а в общем случае и пространственно-временных координат r, t и некоторого вектора параметров λ , часть компонент которого является контролируемыми (информационными или измеряемыми) параметрами, а часть - неконтролируемыми параметрами сопровождения или обстановки. Реальный сигнал может быть представлен в виде

$$Y(\mathbf{r}, t, \lambda) = Y_d \circ Y_{ш} \circ Y_{\phi}, \quad (1)$$

где $\mathbf{r}$ – вектор координат; t – время; λ – вектор параметров; Y_d – детерминированная компонента сигнала; $Y_{ш}$ – случайная шумовая составляющая; Y_{ϕ} – некоторая «фоновая» неоднородность или составляющая сигнала, отражающая неточность математической модели; а знак « $\circ$ » означает некоторую алгебраическую операцию. Под детерминированной компонентой в выражении (1) подразумеваются сигналы, допускающие достаточно точное описание конечным числом аналитических функций, каждая из которых содержит ограниченный набор параметров. Шумовая же составляющая сигнала с достаточной точностью может быть аппроксимирована белым шумом, аддитивным по отношению к детерминированной компоненте сигнала. Относительно фоновой компоненты, как правило, имеется минимум априорных сведений. Будем считать, что функция Y_{ϕ} аддитивна по отношению к идеализированному сигналу и представляет собой реализацию некоторого случайного процесса, характеристики которого соответствуют самым неблагоприятным условиям регистрации сигнала. Такое ее поведение лучше всего описывается с помощью модели ε -слоя. В соответствии с этой моделью предполагается, что каждая точка сигнала $Y(\mathbf{r}, t, \lambda)$ может быть определена с точностью до некоторого интервала $(Y(\mathbf{r}, t, \lambda_0) - \varepsilon^-(\mathbf{r}, t), Y(\mathbf{r}, t, \lambda_0) + \varepsilon^+(\mathbf{r}, t))$, то есть наблюдаемый сигнал имеет некоторый слой неопределенности, причем в общем случае толщина ε -слоя неодинакова для положительных и отрицательных отклонений и является функцией пространственно-временных координат. Можно считать, что $Y(\mathbf{r}, t, \lambda)$ – это модель сигнала, а ε -слой – погрешность этой модели. Действительно, любой сколь угодно сложный сигнал всегда можно представить в виде суммы $Y_m(\mathbf{r}, t, \lambda) + Y_n(\mathbf{r}, t)$, где относительно $Y_n(\mathbf{r}, t)$ можно достоверно утверждать, что ее значения лежат в пределах соответствующим образом выбранного ε -слоя, а $Y_m(\mathbf{r}, t, \lambda)$ – достаточно простая модель сигнала. Можно также полагать, что $Y_n(\mathbf{r}, t)$ – некоторая помеха, возможные значения которой ограничены ε -слоем.

Для нахождения погрешности измерения с применением модели ε -слоя представим сигнал в виде

$$Y(\mathbf{r}, t, \lambda) = Y(\mathbf{r}, t, \lambda_0) + \delta Y(\mathbf{r}, t, \lambda, \lambda_0), \quad (2)$$

где δY – вариация сигнала, обусловленная отклонением вектора параметров λ относительно его фиксированного значения λ_0 . Такие вариации будут неразличимы в пространстве наблюдений при выполнении условия

$$\varepsilon^-(\mathbf{r}, t) \leq \delta Y(\mathbf{r}, t, \lambda, \lambda_0) \leq \varepsilon^+(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

Предполагая, что толщина ε -слоя достаточно мала, для представления вариации сигнала можно воспользоваться линейным приближением вида

$$\delta Y(\mathbf{r}, t, \lambda, \lambda_0) = \left. \frac{dY(\mathbf{r}, t, \lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda = \lambda_0} \cdot (\lambda - \lambda_0). \quad (4)$$

В случае, когда наличие нештатной ситуации определяется по величине допустимого отклонения между наблюдаемым вектором $Y(\mathbf{r}, t, \lambda)$ и его требуемым значением $Y(\mathbf{r}, t, \lambda_0)$, которое полагается системе известным, разумно предположить, что область допустимых границ для $Y(\mathbf{r}, t, \lambda)$ является функцией $dY(\mathbf{r}, t, \lambda)/dt$ и $\delta Y(\mathbf{r}, t, \lambda, \lambda_0)$. Действительно, хорошо известно, что переходные процессы в системах управления тем больше, чем больше скорость изменения воздействия на систему, поэтому чем резче должна измениться целевая функция, тем сильнее могут быть отклонения от нее в реальной системе. Таким образом, в данном методе вокруг целевой функции $Y(\mathbf{r}, t, \lambda_0)$ создается два ε -слоя как в область больших, так и меньших значений с непостоянной толщиной. По экстраполирующим функциям границ $\varepsilon^-(\mathbf{r}, t), \varepsilon^+(\mathbf{r}, t)$ и функции $Y(\mathbf{r}, t, \lambda)$, построенных методом парабол и с применением линейных функций аппроксимации, находятся точки их пересечения, соответствующие прогнозируемым нештатным ситуациям в системе мониторинга.

Литература

1. Сучкова Л.И., Якунин А.Г., Тушев А.Н. Применение модели ε -слоя для повышения надежности синтеза и анализа контрольно-измерительных устройств // Надежность. 2003. № 2. С.41–47.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ИСТОЧНИКОВ ТЕМПЕРАТУРЫ

А.Б. Цветков¹, Б.Г. Цветков²

¹*Новокузнецкий филиал-институт Кемеровского государственного университета,*

²*Сибирский государственный индустриальный университет,
г. Новокузнецк*

В публикации показано распространение метода конечных элементов на решение краевых задач термоупругости. На основе этой методики авторами составлены компьютерные программы для решения численными методами смешанных краевых задач термоупругости в прямоугольнике $G: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, где a, b, c, d – заданные постоянные (рис. 1,а). Пусть в области G заданы кусочно-непрерывные функции: $\lambda = \lambda(x,y)$, $\mu = \mu(x,y)$, $\alpha = \alpha(x,y)$, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$. Значения параметров в задаче 1: $a = 0, b = 1, c = 1, d = 0, \mu = 1, \lambda = 1, \alpha = 1, \gamma = 5$.

Задача 1. Найти температуру $T = T(x,y)$ пластины и вектор перемещений $U = (u,v)$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, удовлетворяющих в области G системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} T''_{xx} + T''_{yy} = 0, \quad \mu(u''_{xx} + u''_{yy}) + (\lambda + \mu)(u''_{xx} + v''_{xy}) - \gamma T'_x &= 0, \\ \mu(v''_{xx} + v''_{yy}) + (\lambda + \mu)(u''_{xy} + v''_{yy}) - \gamma T'_y &= 0 \end{aligned}$$

и граничным условиям: на сторонах прямоугольника $x = a, x = b, y = d$ и $y = c$, заданы нулевые горизонтальные перемещения $u(x,y) = 0$ и нулевые вертикальные перемещения $v(x,y) = 0$. На сторонах $x = a$ и $x = b$ температура равна нулю. На сторонах $y = c$ и $y = d$ температура равна нулю $T(x,c) = 0$, кроме точек $A((a+b)/2, c)$ и $C((a+b)/2, d)$, в которых температура $T(A) = 1, T(C) = 1$. В центре области задана точка $B((a+b)/2, (c+d)/2)$, в которой температура равна $T(B) = 1$.

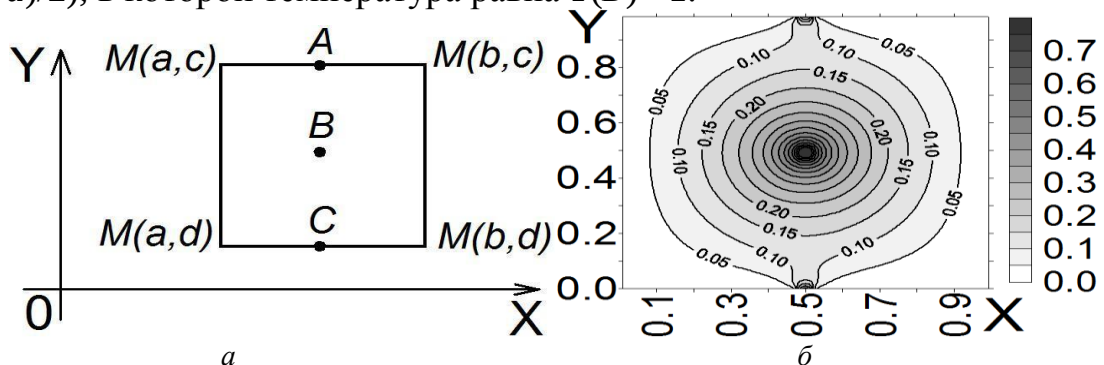


Рис. 1. Параметры модели: а – расчетная область; б – результаты математического моделирования температур T в расчетной области G

Для получения численного решения по программе расчетная область G разбивалась на 3600 конечных элементов – прямоугольников. Значения температуры, напряжений и перемещений вычислялись в центрах конечных элементов. На рис. 1,б приведены картины

распределения линий уровня температуры, перемещений и напряжений (рис. 2, 3).

На рисунке 1,б приведена картина распределения температуры, полученная в результате проведения вычислительного эксперимента. Тонкие линии – это линии уровня, построенные по численным значениям температуры.

Из рис. 1,б видно, что основной вклад на распределение температур в расчетной области оказывает центральный источник, расположенный в точке B . Влияние точечных источников температуры, расположенных на границах в точках, распространяется на ближайшую окрестность точек у границ. При удалении от граничных источников тепла A и B на расстояние, превышающее 20% от размера расчетной области, влияние граничных источников температуры на общее распределение температур в расчетной области существенно ослабевает и общая картина распределения определяется центральным источником. Скорость изменения температуры в окрестности точек A и B максимальна. При дальнейшем удалении от граничных точек A и B абсолютные значения температуры и скорость ее изменения уменьшаются.

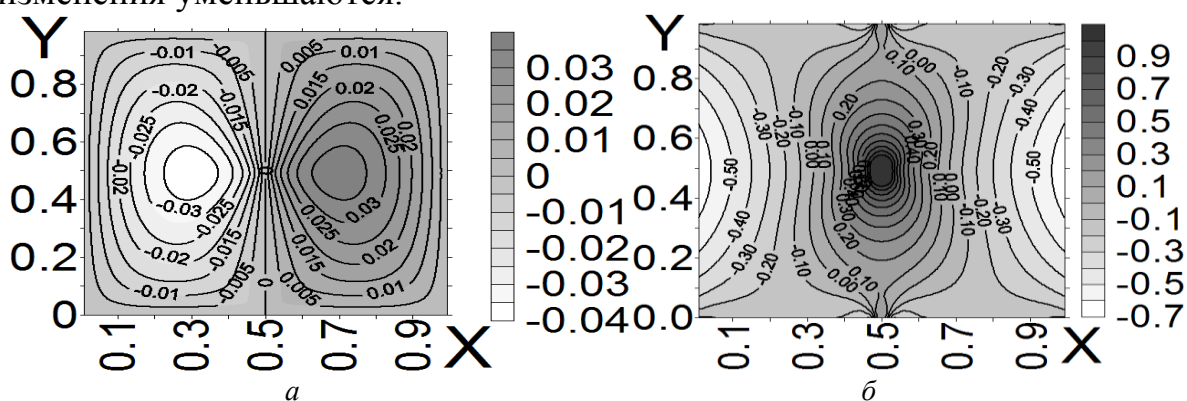


Рис. 2. Результаты математического моделирования:
а – перемещения u ; б – компонента σ_x

На рис. 2,а приведены картины распределения горизонтальных перемещений u ; 2,б – распределение напряжений $\sigma_x = 2\mu u'_x + \lambda(u'_x + u'_y) - \alpha T$, полученных в результате проведения вычислительного эксперимента.

Из рис. 2,а видно, что у границ $x=a$, $x=b$, $y=c$ и $y=d$ с заданными нулевыми перемещениями u соответствующая компонента перемещений равна нулю. Относительно линии $x=0,5$ абсолютные значения перемещений одинаковы, а по знаку противоположны. Перемещения в окрестности центрального источника температуры по модулю больше, чем у источников тепла, расположенных на границе. Причем температуры всех трех источников тепла заданы одинаковые.

Из рис. 2,б видно, что распределение напряжений σ_x симметрично относительно линии $x=0,5$. Напряжения σ_x , наблюдаемые в окрестности центрального источника, меняют свой знак при приближении к боковым границам вдоль оси $y=0,5$. Такого эффекта не наблюдается при удалении

от источников тепла, расположенных на верхней и нижней границах расчетной области в направлении боковых границ.

На рис. 3,а приведены картины распределения вертикальных перемещений v ; 3,б – распределение напряжений $\sigma_y = 2\mu v'_y + \lambda(u'_x + u'_y) - \alpha T$.

Из рис. 3,а видно, что у границ $x=a$, $x=b$, $y=c$ и $y=d$ с заданными нулевыми перемещениями v соответствующая компонента перемещений равна нулю. У верхней и нижней границ расчетной области выявлено локальное влияние на распределение перемещений источников тепла, расположенных в точках A и B . Причем при удалении от граничных источников на расстояние, превышающее 20% от размера расчетной области, их локальное влияние на перемещения v ослабевает. Распределение значений модулей перемещений симметрично относительно линии $y = 0,5$, причем значения противоположны по знаку.

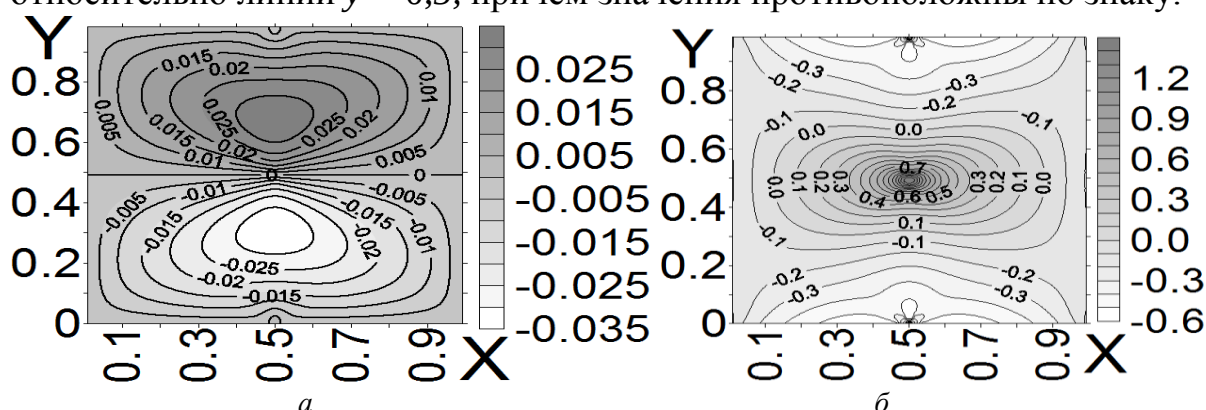


Рис. 3. Результаты математического моделирования:
а – перемещения v ; б – компонента σ_y

Из рис. 3,б видно, что в расчетной области наблюдается три области концентрации напряжений σ_y . Области концентрации σ_y расположены в окрестности точечных источников температуры, расположенных в точках A , B и C . Причем значения напряжений σ_y в окрестностях граничных источников и центрального противоположны по знаку. Абсолютные значения напряжений, сконцентрированных в окрестностях всех трех источников, уменьшаются в направлении боковых границ.

Рассмотренный пример иллюстрирует применение разработанной программы для моделирования напряженно-деформированного состояния упругой пластины под воздействием нескольких точечных источников температуры.

Задача 2. Найти температуру $T=T(x,y)$ и вектор перемещений $U=(u,v)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, удовлетворяющих в области $G: 0 < x < 2,4$, $0 < y < 0,6$ системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} T''_{xx} + T''_{yy} = 0, \quad \mu(u''_{xx} + u''_{yy}) + (\lambda + \mu)(u''_{xx} + v''_{xy}) - \gamma T'x = 0, \\ \mu(v''_{xx} + v''_{yy}) + (\lambda + \mu)(u''_{xy} + v''_{yy}) - \gamma T'y = 0 \end{aligned}$$

и граничным условиям: на сторонах прямоугольника (в метрах) $x=0$, $x=2,4$, $y=0$ и $y=0,6$, заданы нулевые горизонтальные перемещения $u(x,y)=0$ и нулевые вертикальные перемещения $v(x,y)=0$. На стороне $x=0$ температура

(в градусах С) $T=100$. На стороне $x=2,4$ температура $T=2000 - 1300 \cdot y/0,6$. На отрезках $y=0, 0 < x < 0,96$ и $y=0,6, 0 < x < 0,96$ температура $T=100$. На отрезке $y=0, 0,96 < x < 2,4$ температура $T=2000$. На отрезке $y=0,6, 0,96 < x < 2,4$ температура $T=700$. На рис. 5 точки $A(0,6;0,96)$ и $B(0;0,96)$.

Для получения численного решения по программе расчетная область G разбивалась на 2500 конечных элементов – прямоугольников. Значения температуры, напряжений и перемещений вычислялись в центрах конечных элементов. Ниже приведены картины распределения линий уровня температуры, перемещений и напряжений (рис. 4, 5).

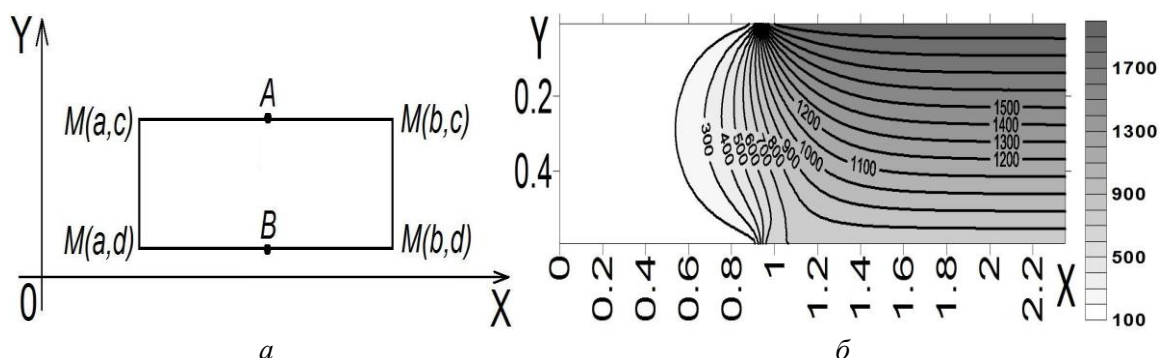


Рис. 4. Параметры модели: а – расчетная область; б – результаты математического моделирования температур T в расчетной области G

На рис. 4,б приведена картина распределения температуры, полученная в результате проведения вычислительного эксперимента. Тонкие линии – это линии уровня, построенные по численным значениям температуры.

Из рис. 4,б видно, что температура быстро уменьшается при удалении от источника температуры, который воздействует на границу области при значениях x , превышающих 0,96. При этом верхняя граница нагрета примерно в три раза больше, чем нижняя. Причем граница области $x=2,4$ неравномерно нагрета.

На рис. 5,б приведена картина распределения касательных напряжений τ_{xy} , полученных в результате проведения вычислительного эксперимента.

Из рис. 5,б видно, что значения напряжений τ_{xy} максимальны на границе $x=2,4$ и в окрестностях точек A и B . Значения касательных напряжений в окрестностях точек A и B противоположны по знаку.

Рассмотренная расчетная область моделирует электрод, опущенный в жидкий металл в электросталеплавильной печи. В жидкий металл погружена та часть электрода, координаты x которой превышают значение 0,96. Под воздействием высоких температур в электроде возникают напряжения, которые приводят к его механическому разрушению.

На рис. 5,а приведена фотография электрода, подвергнутого воздействию больших температур в электросталеплавильной печи. На фотографии видны трещины и изменения в той части границы электрода, которая была подвергнута высоким температурам.

При сравнении результатов математического моделирования рис. 5,б и фотографии 5,а видно, что высокие касательные напряжения концентрируются на границе $x=2,4$, которая подвергается высокому температурному воздействию. Причем моделируемые напряжения удовлетворительно соответствуют расположению трещин на фотографии в этой области электрода.

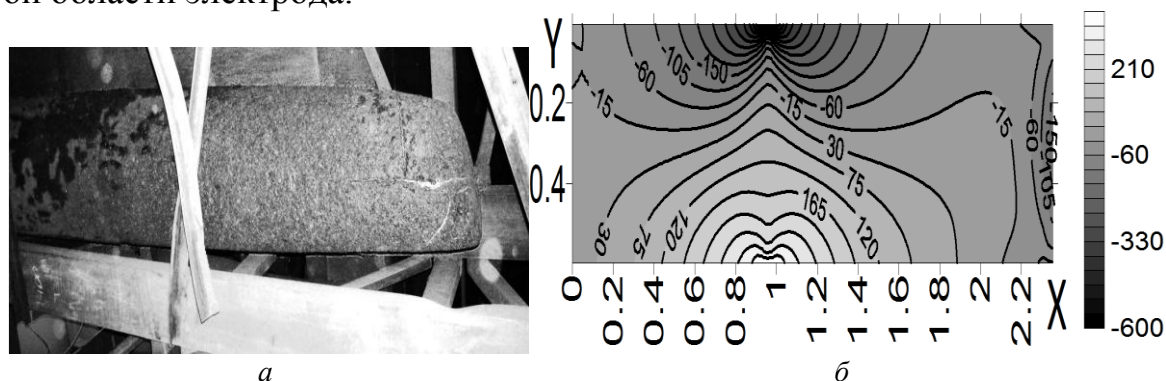


Рис. 5. Электрод: а – фото; б – результаты математического моделирования напряжений τ_{xy}

Таким образом, в результате математического моделирования выявлено, что из трех источников тепла наибольший вклад в напряженно-деформированное состояние будет вносить тот, который расположен в центре расчетной области.

Применение разработанного пакета программ к моделированию термоупругого напряженно-деформированного состояния электрода позволило получить удовлетворительные результаты по прогнозированию областей, наиболее подверженных разрушению в его нагреваемой части.

Рассмотренные примеры иллюстрирует применение разработанной программы для моделирования напряженно-деформированного состояния под воздействием температуры.

Литература

1. Цветков А.Б. О методе глобальной аппроксимации // Материалы XIV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС-2005). Алушта; Москва: Вузовская книга, 2005. С. 439–440.
2. Цветков Б.Г., Цветков А.Б. Восстановление значений функции внутри пространственной области по заданным ее значениям на границе // IV Всероссийская научно-практическая конференция «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ-2005). Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. С. 81–83.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОФАЗНОЙ ОДНОФРОНТОВОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Т.В. Глухарева

Кемеровский государственный университет

Рассмотрим фазовые превращения с участием твердой фазы – твердое тело – жидкость. Примером таких проблем являются процессы затвердевания и плавления в металлургии, замерзания и таяния льда. Соответствующие математические модели характеризуются наличием подвижных, заранее неизвестных границ фазового перехода. Основная предпосылка при моделировании фазовых превращений твердое тело – жидкость состоит в том, что фазовый переход происходит при постоянной температуре фазового перехода.

Смоделируем процесс плавления твердых тел. Пусть фазовый переход происходит на границе раздела фаз, которую обозначим η , причем $\eta = \eta(t)$. Эта граница разделяет расчетную область $\Omega = (0, l)$ на две подобласти: $\Omega^+(t) = \{x \mid 0 < x < \eta(t)\}$, $\Omega^-(t) = \{x \mid \eta(t) < x < l\}$. Будем считать температуру фазового перехода равной нулю ($u^* = 0$), поэтому в жидкой фазе, которая занимает область $\Omega^+(t)$, положим $u(x, t) > 0$, а в твердой фазе $\Omega^-(t)$ возьмем $u(x, t) = 0$.

Для определения температуры в жидкой фазе рассмотрим уравнение теплопроводности (однородная среда)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \Omega^+(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (1)$$

Дополним уравнение (1) начальным условием

$$u(x, t) = u_0(x) > 0, \quad x \in \Omega^+(t). \quad (2)$$

Пусть левый конец поддерживается при заданной температуре

$$u(0, t) = g(t) > 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (3)$$

На границе фазового перехода выполнены следующие условия: из предположения о непрерывности температуры на этой границе контакта двух сред

$$u(x, t) = 0, \quad x = \eta(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

и так как фазовый переход сопровождается поглощением (выделением) определенного количества тепла, то тепловой поток на границе фазового перехода разрывен и определяется величиной

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda \frac{d\eta}{dt}, \quad x = \eta(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (5)$$

Постоянная λ связана с энтальпией фазового перехода.

В силу сформулированных предположений о граничных и начальных условиях в однофазной задаче Стефана (1)–(5) скорость движения границы фазового перехода положительна, т.е. область жидкой фазы постепенно расширяется.

Для решения поставленной одномерной задачи (1)–(5) с учетом монотонного расширения области жидкой фазы рассматриваем метод с выделением границы фазового перехода, поэтому с неизвестной границей связывается узел расчетной сетки.

В области $\bar{\Omega}$ введем равномерную сетку с шагом h :

$$x = x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, K, K+1, \dots, K+N, \quad (K+N)h = l,$$

где при $i = 0, 1, \dots, K$ $x = x_i \in \Omega^+(0)$, а при $i = K+1, \dots, K+N$ $x = x_i \in \Omega^-(0)$, $x = x_K = \eta(0)$.

По времени будем использовать неравномерную сетку:

$$t = t_n = t_{n-1} + \tau_n, \quad t_0 = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad t_N = T,$$

с переменным шагом $\tau_n > 0$, который выбираем так, чтобы за временной промежуток от t_{n-1} до t_n граница фазового перехода сдвинулась ровно на один шаг пространственной сетки.

Поставим в соответствие уравнению (1) чисто неявную разностную схему

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau_{n+1}} = \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2}, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, K+n. \quad (6)$$

Аппроксимация начального условия (2) дает

$$u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, \dots, K. \quad (7)$$

Граничные условия (3), (4) приводят к условиям

$$u_0^{n+1} = g(t_{n+1}), \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (8)$$

$$u_i^{n+1} = 0, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad i = K+n+1. \quad (9)$$

При аппроксимации условия (5) примем во внимание предположение о сдвиге фронта на один узел, имеем

$$\frac{d\eta}{dt} \approx \frac{h}{\tau_{n+1}}.$$

Таким образом, аппроксимация условия Стефана дает соотношение

$$\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = -\lambda \frac{h}{\tau_{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = K+n. \quad (10)$$

Разностная задача (6)–(10) аппроксимирует дифференциальную задачу (1)–(5) с точностью $o(h + \tau)$, хотя во внутренних узлах сетки разностное уравнение (6) аппроксимирует дифференциальное уравнение (1) с точностью $o(h^2 + \tau)$.

В качестве неизвестных в задаче (6)–(10) выступают решение на новом временном слое u_i^{n+1} и шаг по времени τ_{n+1} . Из разностного соотношения (10) определяем шаг τ_{n+1} по формуле

$$\tau_{n+1} = \frac{-\lambda h^2}{u_i^n - u_{i-1}^n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = K + n,$$

полученное значение τ_{n+1} подставляем в уравнение (6). После этого для решения краевой задачи (6), (8), (9) применяем метод прогонки. Численная реализация была проведена в редакторе Visual Basic. Получены значения температуры во всех узлах сетки в виде таблицы, которая позволяет отследить изменения температуры в жидкой фазе и сделать вывод, что чем выше температура поддерживается на границе, тем меньше требуется времени для полного плавления твердого тела.

Литература

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиторал УРСС, 2002. 782 с.
2. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400с.
3. Гарнаев А. Самоучитель VBA. СПб.: БВХ-Петербург, 2003. 504 с.

МЕТОД ПРЯМОГО ГЕНЕТИЧЕСКОГО КОДИРОВАНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ С ЯВНЫМ ПАРАЛЛЕЛИЗМОМ

А.О. Касимов

Омский государственный технический университет

Отправной точкой любого алгоритма эволюционного построения искусственных нейронных сетей (ИНС) является выбор метода генетического кодирования, т.е. способа кодирования информации об архитектуре сети в генетической строке. Удачный выбор генетического представления во многом определяет эффективность эволюционного алгоритма и классы ИНС, которые могут быть построены с помощью данного представления.

В настоящее время можно выделить два подхода к генетическому кодированию ИНС: прямое кодирование (direct encoding) и косвенное (порождающее) кодирование (indirect encoding) [1]. Прямое кодирование подразумевает хранение полной информации о структуре ИНС в генетическом коде. В противоположность этому косвенное кодирование предполагает хранение правил порождения нейронной сети. Основным преимуществом метода прямого кодирования является взаимно-однозначное соответствие между архитектурой ИНС (фенотипом) и соответствующим ей генетическим кодом (генотипом), что позволяет более тонко настраивать архитектуру ИНС на уровне ее отдельных структурных элементов (т.е. весов, связей, нейронов и пр.). Поэтому прямое кодирование находит широкое применение в приложениях ИНС и лежит в основе большинства существующих нейроэволюционных алгоритмов.

На данный момент разработано достаточно много методов прямого генетического кодирования [2]. Однако большинство методов не

предполагают какого-либо определенного порядка перечисления генов в хромосоме, что затрудняет эффективное вычисление выходов ИНС и требует дополнительного (дублирующего) представления. Более того, существующие методы не учитывают возможность распараллеливания расчетов на уровне отдельных нейронов и связей. В свете интенсивного развития современных многоядерных процессоров и графических процессоров с массовым параллелизмом данная задача представляется весьма актуальной.

Целью данной работы является разработка метода прямого генетического кодирования, предназначенного для явного распараллеливания расчетов ИНС на уровне отдельных нейронов и ориентированного на вычислительные системы с массовым параллелизмом.

Существуют различные варианты представления ИНС в генотипе, из которых наиболее распространенными являются следующие:

- кодирование связей, использующее матрицы смежности нейронов, либо перечисление связей [2];

- кодирование нейронов, представляющее структуру ИНС в виде дерева [5];

- кодирование слоев [3]. В генотипе записываются данные о количестве слоев, числе нейронов в каждом из них и информация о типе межслойных связей;

- кодирование маршрутов [4]. В генотипе записывается информация о возможных маршрутах от входных нейронов к выходным.

В настоящей работе рассматривается первый вариант кодирования. При этом каждый ген содержит информацию об индексах начального и конечного нейрона связи, а также ее вес. Очевидно, что одной и той же ИНС можно поставить в соответствие множество генетических строк с различным порядком перечисления генов. Однако для задачи распараллеливания расчетов ИНС интерес будут представлять только те генетические строки, в которых в явном виде выделены группы генов, для которых выходные значения соответствующих нейронов могут быть рассчитаны параллельно и независимо друг от друга без дублирующих представлений ИНС и дополнительного переупорядочивания генов в хромосоме. Алгоритм прямого генетического кодирования ИНС, позволяющий формировать генетические строки, удовлетворяющие указанным требованиям, назовем методом прямого генетического кодирования с явным параллелизмом. Пример ИНС, закодированной методом прямого генетического кодирования с явным параллелизмом, изображен на рис. 1.

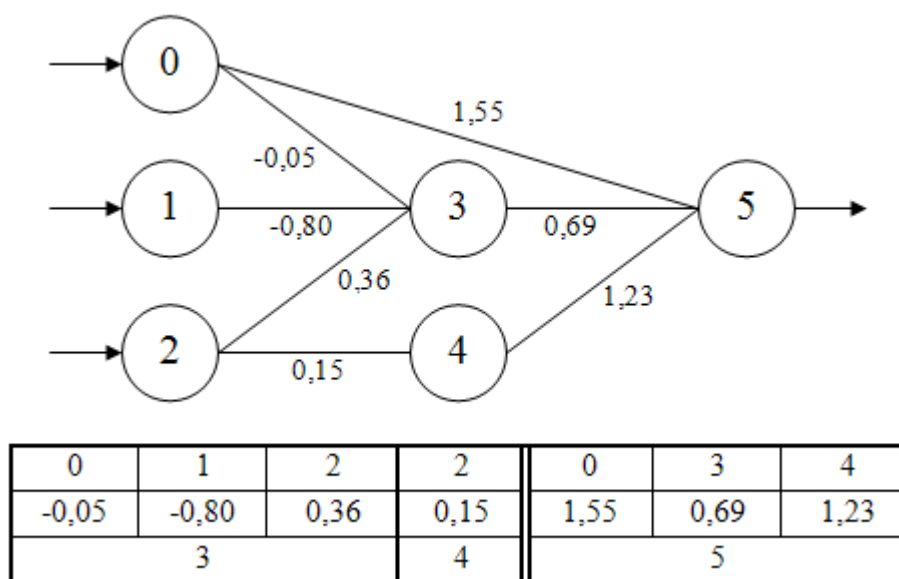


Рис. 1. Генетическое кодирование ИНС с явным параллелизмом

Для каждого гена в первой строке записывается индекс начального нейрона, во второй строке – вес связи, в третьей – общий индекс конечного нейрона. В данной ИНС можно выделить две группы нейронов: с индексами 3 и 4 и с индексом 5, разделенных двойной чертой в генетической строке. Каждая последующая группа нейронов требует завершения вычисления предыдущей, т.е. расчет групп происходит строго последовательно. Однако внутри каждой группы выходные значения нейронов могут быть рассчитаны параллельно и независимо друг от друга. Заметим, что данное представление ИНС позволяет в явном виде распараллелить вычисление ИНС на уровне отдельных нейронов, не прибегая к дополнительным представлениям и алгоритмам переупорядочивания генов в хромосоме.

Рассмотрим алгоритм кодирования ИНС прямого распространения в генетическую строку с явным параллелизмом. Пусть исходная ИНС задана матрицей весов W размерностью $n \times n$. Искомая генетическая строка G представляется упорядоченной последовательностью из троек вида $\{i, w, j\}$, где i – индекс начального нейрона, w – вес связи, j – индекс конечного нейрона. Введем вспомогательную булеву матрицу M размерностью $n \times n$, для каждого веса W_{ij} хранящую соответствующий флаг обработки M_{ij} , и множество s , состоящее из индексов нейронов в текущей группе. Изначально все элементы матрицы W устанавливаются в *false*, а множество s содержит индексы входных нейронов. Запишем на псевдокоде алгоритм, формирующий генетическую строку G на основе весовой матрицы W .

```

 $W := [false], s := \{\text{индексы\_входных\_нейронов}\}$ 
Пока  $s \neq \emptyset$ 
|   Для  $i$  от 0 до количество_элементов_в_ $s-1$ 
|   |   Для  $j$  от 0 до  $n-1$ 
|   |   |   Если  $W_{s[i]j} \neq 0$  то
|   |   |   |    $G := G + \{s[i], W_{s[i]j}, j\}$ 
|   |   |    $M_{s[i]j} := true$ 
|   |    $s := \emptyset$ 
|   |   Для  $i$  от 0 до  $n-1$ 
|   |   |   Если  $W_{ij} \neq 0$  и не  $M_{ij}$  для всех  $j$  от 0 до  $n-1$ 
|   |   |   |    $s := s + \{i\}$ 
|   перейти_к_следующей_группе_в_ $G$ 

```

Обратная операция, т.е. декодирование генетической строки в матрицу весов W осуществляется тривиальным образом путем установки всех элементов W_{ij} в значение весов w из соответствующих троек $\{i, w, j\}$ генетической строки G .

Таким образом, в настоящей работе был рассмотрен метод прямого кодирования ИНС в генетическую строку, позволяющий в явном виде задавать порядок расчетов и распараллеливать вычисление ИНС на уровне отдельных нейронов без каких-либо дополнительных представлений. Данный метод позволяет эффективно реализовать нейроэволюционные алгоритмы на высокопроизводительных вычислительных системах с массовым параллелизмом, таких как современные графические процессоры.

Литература

1. Аксенов С.В., Новосельцев В.Б. Организация и использование нейронных сетей (методы и технологии) / Под общ. ред. В. Б. Новосельцева. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 128 с.
2. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Пер. с польск. И. Д. Рудинского. М.: Горячая линия – Телеком, 2006. 452 с.
3. Harp S.A., Samad T., Guha A. Towards the genetic synthesis of neural networks. // Third international conference on genetic algorithms. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, 1989. P. 360–369.
4. Jacob C., Rehder J. Evolution of neural networks architectures by a hierarchical grammar based genetic system // International Joint Conference on Neural Networks and Genetic Algorithms. Innsbruck, 1993. P. 72–79.
5. Koza J. R., Rice J. P. Genetic generation of both the weight and architecture for a neural network // International Joint Conference on Neural Networks. 1991. Vol. 2. P. 397–404.

СТРУКТУРЫ И АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ В ГЕОИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ IndorGIS

А.Д. Кривопалов, А.В. Скворцов, М.С. Пожсидаев

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Для практического осуществления многих проектов в различных сферах деятельности требуется найти решение таких задач, как задача о нахождении кратчайших путей, задача поиска ближайших пунктов сервисного обслуживания, задача расчета зон сервисного обслуживания и другие. Поэтому многие современные геоинформационные системы включают в себя функции, необходимые для этих расчетов. Одна из таких систем — IndorGIS, содержащая модуль транспортных расчетов IndorTransport и модуль для расчета транспортных потоков IndorTraffic.

Среди прочих продуктов IndorGIS выгодно выделяют следующие особенности:

- структуры данных, оптимизированные для повышения производительности и удобства редактирования информации транспортного слоя;
- поддержка системы расчетов для общественного транспорта, позволяющая задавать типы транспорта, маршруты для них и другие показатели, необходимые для расчета дневных поездок населения;
- наличие системы расчетов пассажиропотоков с использованием матрицы корреспонденций и реализация различных алгоритмов распределения транспортных потоков на улично-дорожную сеть.

Данная статья описывает структуры данных и методы решения транспортных задач, использованные в модуле IndorTraffic геоинформационной системы IndorGIS.

Структуры данных

Все данные, необходимые для решения транспортных задач хранятся в специальном формате — слое транспортной сети. В программе получить доступ к этому слою можно, создав его при помощи команд главного меню или контекстного меню. После создания слоя необходимо заполнить его данными, либо при помощи имеющихся инструментов, позволяющих создавать любые объекты транспортного слоя, либо воспользовавшись функцией импорта из шейп-файла. При импорте линии из шейп-файла конвертируются в транспортный формат и соединяются в топологическую сеть, которую затем можно изменить, воспользовавшись инструментами редактирования транспортного слоя.

Следующие типы объектов определены на транспортном слое IndorGIS:

1. *Узел*. Это точечный объект, обозначающий некоторую важную точку на транспортной сети — начало или конец дороги, перекресток дорог, остановка общественного транспорта и т. д. Если проводить аналогию с теорией графов, то узлы транспортной сети — это вершины

графа. Но, в отличие от вершин графа для узлов транспортного слоя можно задать время проезда через этот узел, хотя по умолчанию оно считается равным нулю. Кроме того, когда узел является точкой пересечения нескольких дорог, мы можем разрешить или запретить для него некоторые повороты и задать время, необходимое для их выполнения.

2. *Автомобильная дорога.* Автомобильная дорога представляет автодорогу реального мира и обладает всеми её основными атрибутами, такими как количество полос, ограничение скорости, а также такими эксплуатационными характеристиками, как тип дорожного покрытия, тип разметки и др. Дорога всегда соединяет два узла сети и может быть как одно-, так и двусторонней.

3. *Дуга.* Дуга — это также линейный объект, и используется она, чтобы моделировать те части транспортной сети реального мира, которые используются при перевозках, но не являются дорогами. Например, дуга может обозначать паромную или ледовую переправу. Соответственно, набор атрибутов дуги по сравнению с дорогой намного проще. Это время проезда по дуге, пропускная способность и допустимое направление. В остальном дуга соответствует дороге.

4. *Транспортный район.* Транспортные районы — это площадные объекты, обычно описывающие городские микрорайоны или кварталы. Для транспортного района мы можем задать количество жителей, проживающих в нем, количество рабочих мест и объем культурно-бытовых услуг, обеспечиваемый транспортным районом. Транспортные районы являются основными исходными данными для расчета пассажиропотоков.

Расчет транспортных потоков

Задача расчета и прогнозирования транспортных потоков очень важна для разработки генеральных планов городов, комплексных транспортных схем, планирования сетей общественного транспорта. Модуль IndorTraffic для решения этой задачи использует широко используемую гравитационную модель корреспонденций, позволяющую оценить «притяжение» между различными транспортными районами (микрорайонами) города, основываясь на данных о населении этих районов, количестве рабочих мест в них и объеме предоставляемых культурно-бытовых услуг. Также гравитационная модель корреспонденций учитывает взаимную транспортную доступность районов [2].

Исходными данными для расчетов являются транспортные районы, которые следует задавать так, чтобы в городских условиях выполнялись следующие требования (вне городов требования могут быть иными):

1. Население каждого транспортного района должно составлять от 1 до 10 тыс. жителей.

2. Площадь транспортного района не должна превышать 1 км, при этом диаметр (расстояние между самыми удаленными точками района) должен быть не более 2 км.

3. Центром транспортного района следует указывать некоторую «точку интереса» – крупный магазин, деловой центр, перекресток больших дорог.

Гравитационная модель корреспонденций в расчетах оперирует такими понятиями, как «возможности» источника корреспонденций и «притягательность» источника корреспонденций. В разных случаях в качестве возможностей источника могут выступать такие характеристики транспортного района, как число жителей, число рабочих мест или иные, произвольные характеристики. В качестве притягательности – число рабочих мест, объём предоставляемых услуг или иные характеристики.

Для определения транспортной доступности района вычисляются средние значения для времён проезда до этого района на автомобиле, на общественном транспорте и времени пешего перехода. Чтобы определить эти значения, IndorGIS вычисляет все времена сообщения для каждой пары транспортных районов и затем, используя специальные экспертные алгоритмы, оценивает приемлемость передвижений.

IndorGIS поддерживает расчет для трёх наиболее распространенных видов перемещений:

1. **Трудовые передвижения.** Передвижение осуществляется из дома на работу. Возможности: количество жителей. Притягательность: количество рабочих мест.
2. **Культурно-бытовые передвижения из дома.** Возможности: количество жителей. Притягательность: объём предоставляемых услуг.
3. **Культурно-бытовые передвижения с работы.** Возможности: количество рабочих мест. Притягательность: объём предоставляемых услуг.

Для удобства восприятия можно использовать группировку районов по суперрайонам, чтобы вывести диаграмму в более общем виде (рис. 1).

После расчета транспортных потоков они распределяются на граф улично-дорожной сети для того, чтобы определить загрузку улиц и дорог транспортом.

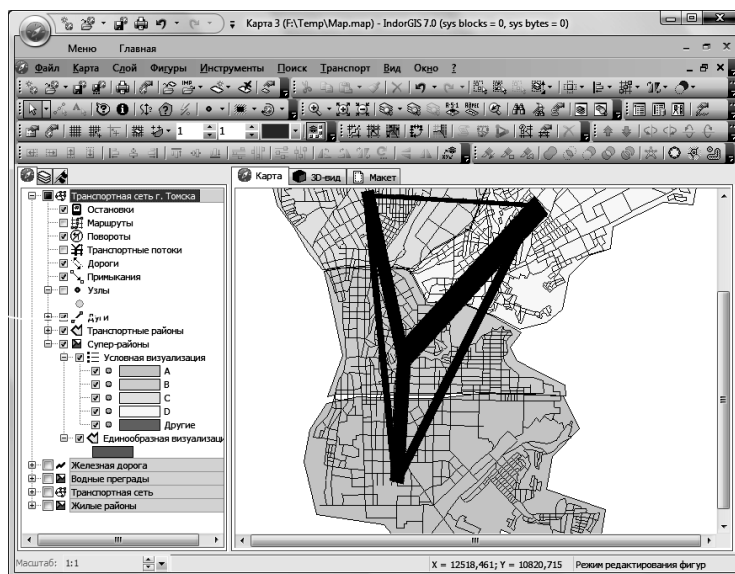


Рис. 1. Группированные трудовые корреспонденции

Распределение транспортных потоков

В IndorTraffic реализованы два алгоритма распределения потоков на граф дорожной сети:

- 1) алгоритм последовательного распределения [2],
- 2) алгоритм стохастического распределения [3].

Первый алгоритм работает следующим образом. Для каждой пары районов весь поток автомобилей делится на M частей, где M задается пользователем, исходя из требуемой точности вычислений. После этого поток итеративно распределяется на дорожную сеть:

1. Для каждой пары районов часть потока между ними размером $1/M$ распределяется на кратчайший путь между районами.
2. Время проезда по загруженным дорогам пересчитывается с учетом нагрузки, создаваемой только что распределённым потоком.

После M итераций алгоритма все потоки будут распределены.

Алгоритм стохастического распределения основывается на другом методе. При пересчете цены проезда по ребру он учитывает психологический фактор, то есть цена ребра представляет собой функцию нормального распределения со средним значением равным точной цене и стандартным отклонением, определяемым пользователем. Это позволяет смоделировать восприятие водителем ситуации на дорогах и времени проезда [3].

Кроме того, автором разработана и применена методика учёта таких субъективных факторов, как «привычность» дороги водителю, её удобство и др. Для водителя психологическое время проезда по дороге, и, как следствие, выбор пути до пункта назначения напрямую зависят от этих показателей.

Стохастический алгоритм также работает итеративно, выполняя на каждой итерации следующие шаги:

1. Для каждой пары районов весь поток «проталкивается» по кратчайшему пути между районами, вычисляемому по алгоритму Дейкстры [1].
2. Для каждого ребра, поток по которому изменился, относительное изменение нагрузки δ вычисляется по следующей формуле:

$$\delta = \frac{F_i - F_{i-1}}{F_i},$$

где i – номер текущей итерации алгоритма; F_i – поток по ребру на i -й итерации.

3. Если среди всех рёбер максимальное относительное изменение меньше точности, указанной пользователем, то работа алгоритма завершается, иначе шаг 4.

4. После этого время проезда по каждому ребру пересчитывается с учётом ошибки, причем поток по ребру на ребро принимается равным F_i / i .

Для городов с населением меньше миллиона жителей стохастический алгоритм достигает удовлетворительной точности всего после 20–30 итераций [3].

Рассчитанные потоки отображаются на транспортном слое IndorGIS в виде прямоугольников, расположенных вдоль дорог, причем ширина прямоугольника характеризует размер потока по дороге (рис. 2).

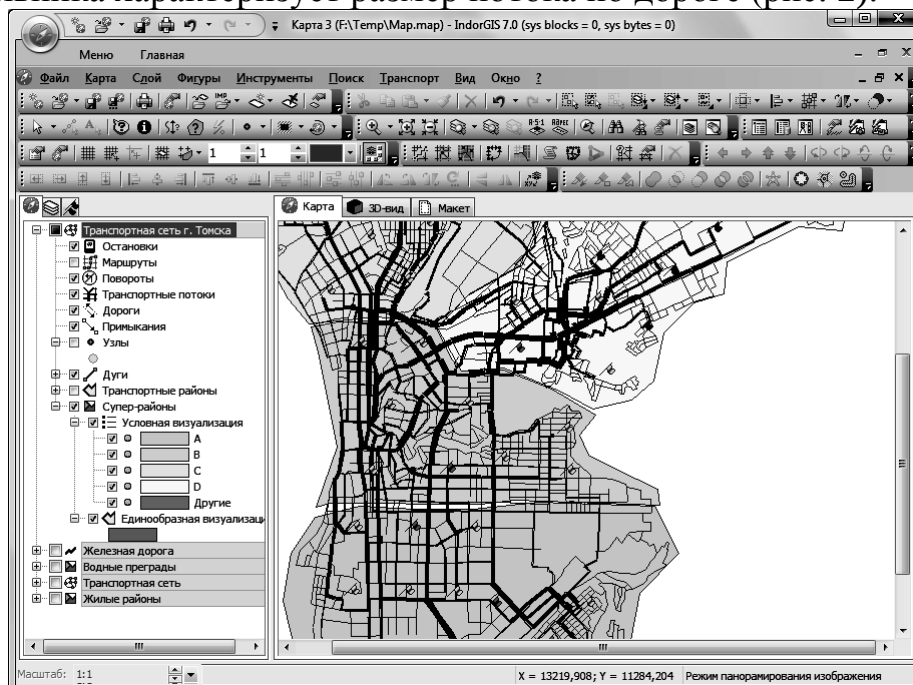


Рис. 2. Транспортные потоки, распределенные на дорожную сеть

Литература

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978 414 с.
2. Кривошеев Д.П. Методы распределения пассажиропотоков в транспортных расчетах. М.: ЦНТИ по гражданскому строительству и архитектуре, 1974 40 с.
3. Sheffi Y. Urban Transportation Networks / Yosef Sheffi. Englewood Cliffs. N J: Prentice-Hall, 1985.

ОЦЕНКА ПРИМЕНИМОСТИ И КАЧЕСТВА МЕТОДОВ РЕФАКТОРИНГА

Е.В. Попов

Омский государственный технический университет

Эволюция объектно-ориентированного программирования послужила причиной распространения метода рефакторинга программ [1], представляющего собой подход к улучшению структурной целостности и производительности существующих программ. При этом необходимость и качество проведения рефакторинга оценивались разработчиком по эмпирическим правилам. Таким образом, возникла необходимость получить критерий оценки необходимости и качества рефакторинга.

В представленной работе в качестве критерия оценки предложено использовать ранговое распределение.

Ранговые распределения независимо друг от друга исследовались в различных научных областях [2]. Удивительным оказалось то, что при общих ограничениях ранговые распределения подчинялись одному и тому же типу зависимостей, при этом Ципф был одним из первых, кто не только обнаружил выполнение на эмпирическом уровне этой закономерности, но и предложил объяснение механизма ее формирования. В наиболее простой форме эта зависимость может быть представлена гиперболой, и поэтому в математической статистике такие законы получили название гиперболических законов распределения, или гиперболических статистик. В математической форме эта зависимость наиболее просто может быть выражена в следующем виде:

$$n_i = C/i^\alpha,$$

где C – постоянная величина, обычно равная объему наибольшего (модального) класса ($C \approx n_1$); $i=1, 2, \dots, K$ – ранг (порядковый номер) класса; n_i – объем (численность, частость) класса i -ранга; α – некоторая постоянная положительная величина.

Предположение о возможности использования рангового распределения для оценки эффективности рефакторинга основывается на свойстве текста программы быть целостным. Это свойство впервые было отмечено автором работы [3] при анализе лингвистических текстов естественных языков. Он доказал, что качество выполнения закона Ципфа для данного текста определяется не его объёмом, но свойством быть целостным текстом, то есть образующим некоторую лексическую единицу, несущую смысловую нагрузку.

Учитывая вышесказанное можно предположить, что программный код, требующий рефакторинга, не является целостно завершенным, поэтому для оценки необходимости и качества проведения рефакторинга можно использовать ранговое распределение. Признаком необходимости рефакторинга будет являться несоответствие рангового распределения закону Ципфа. Качество рефакторинга определяется следующим образом:

1. Определяется ранговое распределение программы до реализации рефакторинга.
2. Осуществляется рефакторинг программы.
3. Определяется новое ранговое распределение.
4. Фиксируется схожесть расчетных распределений и ранговых распределений до и после рефакторинга.
5. По изменению степени схожести распределений делается заключение о качестве проведенного рефакторинга.

Для проверки выдвинутой гипотезы, был использован пример рефакторинга программы, опубликованный в работе [1]. Данная работа содержит текст программы с поэтапным показательным применением методов рефакторинга. Всего в работе рассмотрено 9 этапов применения, основанных на экспертной оценке.

Для сопоставления экспертной оценки с ранговым распределением решено было в качестве «слова» программы, то есть элементарной единицы для построения рангового распределения, использовать лексемы программного кода. В качестве критериев оценки соответствия практического распределения расчетному выбраны следующие:

- Критерий 1. Максимальное расхождение практического и расчетного распределений.
- Критерий 2. Суммарное расхождение практического и расчетного распределений (интеграл ошибки).
- Критерий 3. Приведенная сумма расхождений практического и расчетного распределений к количеству рангов.

В результате проведенного рефакторинга программы были получены количественные характеристики выбранных критериев сравнения практического и расчетного ранговых распределений (представлены в таблице). Для наглядности, изменение значений критериев представлены графически (рис. 1).

**Количественные показатели выбранных критериев
для рефакторинга программы**

№ п/п	Значение критерия 1	Значение критерия 2	Значение критерия 3
1	6,66	29,28	0,963
2	7,33	27,28	0,994
3	7,33	27,97	0,992
4	6	25,64	0,859
5	6,66	21,55	0,744
6	6	23,20	0,806
7	5,33	20,97	0,706
8	6	19,47	0,671
9	7	15,20	0,668

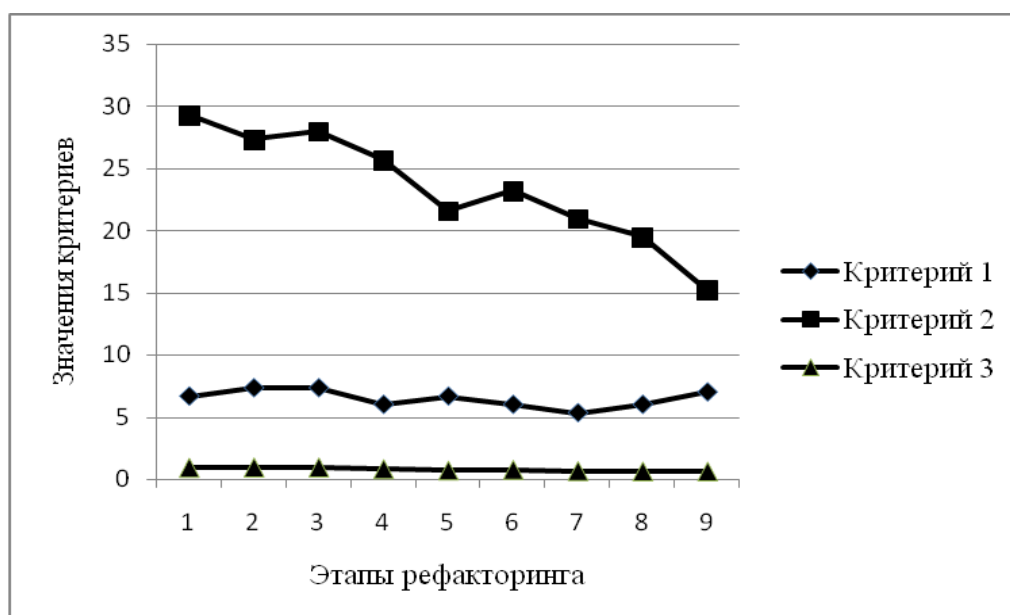


Рис. 1. Изменение значений критериев в ходе эксперимента

По графику видно, что в процессе рефакторинга программы значения критерия 2 уменьшаются через n шагов, это значит, что уменьшается расхождение практического и расчетного ранговых распределений, следовательно, закон Ципфа для программного текста после n этапов рефакторинга выполняется в большей мере. Изменение значений критерия 3 также имеет тенденцию снижения через n этапов (см. таблицу 1), что подтверждает выполнение закона Ципфа.

Таким образом, проведенный эксперимент дает основание полагать, что ранговое распределение лексем программного кода, полученное перед и после проведения рефакторинга, может служить критерием качества этого рефакторинга.

Литература

1. Фаулер М. Рефакторинг: улучшение существующего кода / Пер. с англ. СПб.: Символ-Плюс, 2003. 432 с.
2. Шрейдер Ю.А. Системы и модели. М.: Радио и связь, 1982. 152 с.
3. Орлов Ю.К. Частотные структуры конечных сообщений о некоторых естественных информационных системах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тбилиси, 1975.

ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ПРЯМОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ НА ГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРАХ

Д.В. Ременников, А.О. Касимов

Омский государственный технический университет

В настоящее время нейросетевые алгоритмы получили широкое распространение в вычислительной практике. Известные применения искусственных нейронных сетей (ИНС) включают в себя распознавание речи и образов, прогнозирование финансовых показателей, аппроксимацию функционалов, сжатие данных, молекулярное моделирование. Однако развитие нейросетевых алгоритмов значительно

ограничивается высокими вычислительными затратами на реализацию таких методов. Как правило, большинство ИНС моделируются на компьютерах с фон-неймановской архитектурой, не позволяющей эффективно реализовать высокую степень параллелизма, присущую внутренней структуре ИНС. Поэтому для решения данной проблемы традиционно используются специализированные программно-аппаратные комплексы, такие как распределенные кластерные системы, нейронные чипы, ПЛИС и т.д. [1].

Разработанный в 2008 г. открытый стандарт OpenCL [2] позволяет использовать графические процессоры (ГП) для высокопроизводительных научных и инженерных расчетов. Ключевой особенностью ГП является наличие большого количества (до нескольких тысяч) процессорных элементов (ПЭ), что позволяет проводить на них вычисления, по эффективности сравнимые с современными распределенными кластерными системами.

Целью данной работы является исследование алгоритмов распараллеливания вычисления ИНС прямого распространения на графических процессорах с применением языка OpenCL.

В работе [3] были рассмотрены следующие алгоритмы распараллеливания ИНС:

- распараллеливание «по группам нейронов»:
 - группы с одним нейроном;
 - группы с нейронами одного слоя;
 - группы с отдельными слоями;
 - группы с произвольным набором нейронов;
 - группы со всей сетью;
- распараллеливание «по сетям»;
- распараллеливание «по входному множеству».

В настоящей работе рассматривается алгоритм распараллеливания ИНС по группам с одним нейроном. В данном подходе каждый ПЭ рассчитывает один нейрон, что позволяет эффективно задействовать ГП при достаточном количестве нейронов в ИНС. Все остальные подходы предполагают расчет группы нейронов или даже нейронов всей ИНС на каждом ПЭ, что при небольшом количестве групп ведет к простоям части ПЭ и, следовательно, к снижению производительности расчетов.

Запишем алгоритм вычисления выхода ИНС [4] на псевдокоде:

Для n от 1 до количество_слоев_в_сети

 Для i от 0 до размер_ n -го_слоя

$net := 0$

 Для j от 0 до количество_связей_ i -го_нейрона

$k := \text{номер_нейрона_}(n-1)\text{-го_слоя_}j\text{-й_связи}$

$net := net + \text{выход_}k\text{-го_нейрона_}(n-1)\text{-го_слоя} * \text{вес_}j\text{-й_связи}$

 выход_ i -го_нейрона_ n -го_слоя $:= f(net)$

Как следует из алгоритма, все операции в цикле по переменной j могут быть выполнены параллельно для всех нейронов, находящихся в n -м слое. При достаточном количестве нейронов в n -м слое описанный алгоритм позволяет существенно ускорить вычисление ИНС на ГП по сравнению с традиционными алгоритмами распараллеливания «по сетям» и «по входному множеству», более подходящими для вычислений ИНС на центральном процессоре. Тем не менее в данном алгоритме одновременно смогут работать только ПЭ текущего слоя, т.к. для вычисления текущего слоя необходимы результаты предыдущего. Следовательно, для эффективной загрузки ГП каждый слой ИНС должен содержать количество нейронов, сравнимое с общим количеством ПЭ (порядка нескольких сотен), либо программа вычислений должна предусматривать параллельный расчет нескольких ИНС для максимального использования вычислительных ресурсов ГП.

Приблизительное время расчета ИНС при размерности множества входных векторов, равного 10000 для случая вычислений на центральном процессоре (ЦП) и ГП, приведено в таблице.

Время вычисления ИНС на ЦП и ГП

Топология ИНС				Время просчета, с		Коэффициент ускорения
Кол-во слоев	Кол-во ИН в каждом слое	Всего ИН	Всего связей	ЦП	ГП	
3	5	15	55	0,011	0,013	0,8
	10	30	210	0,024	0,014	1,7
	15	45	465	0,053	0,023	2,3
	30	90	1830	0,128	0,029	4,4
	60	180	7260	0,414	0,065	6,3
	170	510	57970	1,856	0,150	12,8
	230	690	106030	5,772	0,446	12,9
	330	990	218130	10,70	0,810	13,2
	650	1950	845650	41,44	3,139	13,2

Проанализировав данные таблицы, можно сделать заключение:

1. В случае небольшой размерности ИНС и небольшой размерности входного множества не наблюдается явного преимущества расчетов на ГП

перед расчетами на ЦП. Это обусловлено тем, что накладные расходы при вызове функций OpenCL превышают выигрыш от распараллеленных расчетов на ГП.

2. Линейная зависимость времени расчетов на ГП от размерности ИНС наблюдается только в случае, когда количество нейронов в одном слое превышает количество ПЭ у ГП. В противном случае у ГП наблюдается константное время расчетов из-за того, что незадействованные ПЭ ГП простаивают и скорость расчетов зависит только от скорости расчетов отдельно взятого ПЭ ГП и скорости обращения к функциям OpenCL.

3. Просчеты ИНС целесообразно переносить на ГП в случае большой размерности сети или в случае большого количества циклов просчета ИНС. Целесообразность перевода вычислений на ГП определяется соотношением производительности ГП и ЦП, и вычисляется для каждой отдельно взятой аппаратной конфигурации. В случае, когда перенос вычислений на ГП оказывается нецелесообразным, вычисления лучше проводить на ЦП с последующей оптимизацией алгоритма просчета ИНС, распараллеливанием его на нескольких вычислительных ядрах, задействованием расширений SSE, оптимизацией обращений к оперативной памяти, оптимизацией обращений к процессорному кэшу и т. д.

Литература

1. Аляутдинов М.А., Галушкин А.И., Назаров Л.Е. Методы распараллеливания и программно-аппаратной реализации нейросетевых алгоритмов обработки изображений // Нейрокомпьютеры. 2003. №2. С. 3–21.
2. OpenCL // URL <http://www.khronos.org/opencv/> (дата обращения: 10.10.2011).
3. Ременников Д.В. Распараллеливание алгоритма вычислений искусственной нейронной сети прямого распространения // В мире научных открытий: Материалы III Всероссийской научно-практической конференции «Научное творчество XXI века» с международным участием. Красноярск, 2010. №6.1 (12). С. 32–36.
4. Горбань А.П. Нейронные сети на персональном компьютере / А. П. Горбань, Д. А. Россиев. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1996. 275 с.

ЦИФРОВАЯ СТЕГАНОГРАФИЯ СОКРЫТИЯ ИНФОРМАЦИИ В ЗАГОЛОВКЕ ФАЙЛА PORTABLE EXECUTABLE

А. В. Скрипко

Омский государственный технический университет

В данной статье рассматривается метод сокрытия информации в файлах формата Portable Executable (PE), приводится краткое описание формата, описание предлагаемого алгоритма и его экспериментальный анализ.

1. Введение

На сегодняшний момент использование нелицензионного программного обеспечения является серьезной проблемой для различных компаний, его производящих. Для предотвращения такого использования

разработаны различные программные и аппаратные средства защиты, например водяные знаки или метод цифровых отпечатков пальцев, суть которого состоит в том, что в защищаемый файл вносятся такие изменения, которые могли бы однозначно идентифицировать каждую копию. Если злоумышленник попытается незаконно скопировать и распространять программу, то можно будет по отпечатку определить, какая именно копия незаконно распространяется. Естественно, необходимо позаботиться о том, чтобы знаки были такими, чтобы их не мог обнаружить владелец копии, как правило, для этого и прибегают к методам стеганографии.

2. Описание предлагаемого метода

Данный способ внедрения, на мой взгляд, является одним из наиболее безопасных. Он используется в основном в вирусологии, для передачи управления вредоносному коду, расположенному в другом месте, основным недостатком данного метода является ограниченный объём внедряемой информации, но для сокрытия сообщения подходит идеально, а главное, что такое внедрение очень сложно заметить, тем более что никакого вреда системе и файлу оно не несёт.

Используемые в данном методе механизмы не вызывают изменения адресации ни физического, ни виртуального образов. После внедрения в файл ни его длина, ни количество выделенной при загрузке памяти не изменяются.

Структура PE файла.

Формат PE-файлов организован в виде линейного потока данных, подробное описание в [1]. Он начинается с заголовка MS-DOS, программы реального режима и сигнатуры PE-файла. Далее следуют заголовок PE-файла и опциональный заголовок. После них идут заголовки всех сегментов, за которыми следуют тела этих сегментов. И ближе к концу файла расположены различные области данных, включая информацию о переадресации, таблицу символов, информацию о номерах строк и данные в таблице строк. Все их легче представить графически (рис. 1).

Как уже упоминалось выше, первый компонент в PE-файле – заголовок MS-DOS. Заголовок MS-DOS не нов для формата PE-файлов. Это тот же самый заголовок MS-DOS, который используется, начиная с MS-DOS версии 2. Главная причина сохранения его нетронутым в самом начале файла – это то, что когда вы попытаетесь загрузить PE-файл в старых операционных системах, или под MS DOS версии 2.0, или более поздней, операционная система может прочесть файл и понять, что он не совместим с имеющейся операционной системой. Заголовок MS-DOS занимает первые 64 байта PE-файла.

PE File Format

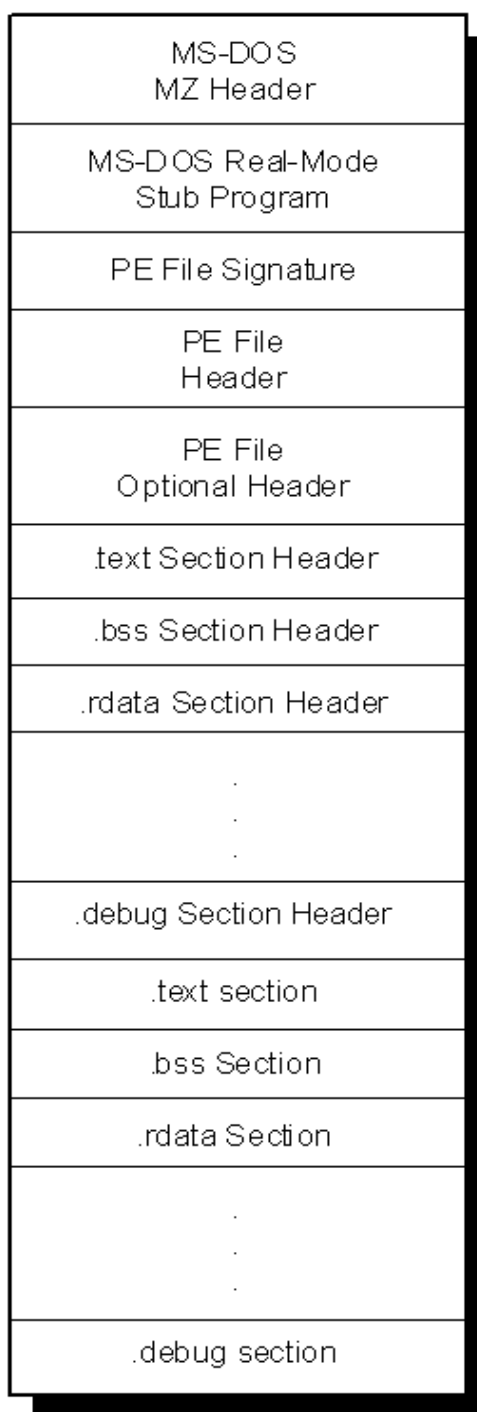


Рис. 1. Структура PE-файла

Типичный PE-заголовок вместе с MS-DOS заголовком и заглушкой занимает порядка 300h байт, а минимальная кратность выравнивания секций составляет 200h байт. Таким образом, между концом заголовка и началом первой секции практически всегда имеется ~100h свободных байт, которые можно использовать для «производственных целей», размещая здесь всю внедряемую информацию.

В общем случае внедрение в заголовок осуществляется так [2]:

- Считываем PE-заголовок и приступаем к его анализу;
- Если размер заголовка меньше размера секции и сумма объёмов заголовка и внедряемой информации меньше размера секции, то:

1) увеличиваем размер заголовка на размер внедряемой информации;

2) записываем сообщение побитно на образовавшееся место;

- Иначе:

1) Сканируем PE-заголовок на предмет поиска непрерывной цепочки нулей и, если таковая будет действительно найдена, внедряем информацию, начиная с 10h байта от ее начала.

Разработана схема алгоритма на языке Delphi 7 (рис. 2).

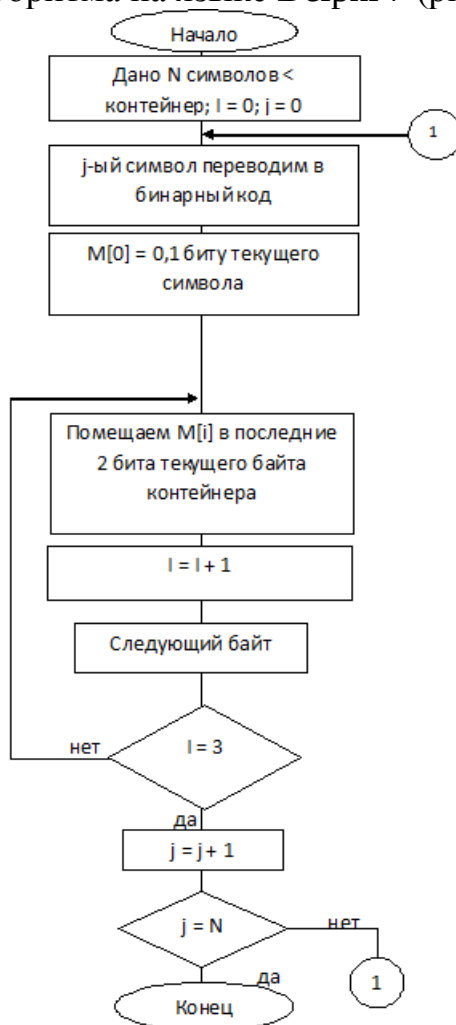


Рис. 2. Алгоритм помещения информации в файл:

N – количество символов; J – количество байт; I – количество парных бит в байте;
 M – массив битов байта

- 1) Дано N символов, переводим текущий символ в бинарный код.
- 2) Помещаем в массив M , так чтобы $M[0] = 0$ и 1 биту текущего байта $M[1] = 2,3$ $M[2] = 4,5$ $M[3] = 6,7$.
- 3) Помещаем $M[i]$ где $I = 0..3$, в последние два бита текущего байта контейнер.

- 4) Инкрементируем I .
- 5) Если $I = 3$, то берем следующий байт контейнера и проверяем, равно ли количество символов размеру контейнера.
- 6) Если да, то идем на конец.
- 7) Иначе берем следующий байт.

3. Анализ алгоритма

Проверка качества данного алгоритма достаточно проста, объём внедряемой информации в 1 файл составляет до 256 байт, если предполагается, что передаваемая информация графическая или звуковая, то данный способ, очевидно, не самый лучший. Однако если объём передаваемой информации не важен и передаётся текстовая информация, как это чаще всего бывает, то она очень хорошо сжимается (архивируется), таким образом, данным методом можно передать текстовое сообщение размером в несколько тысяч символов.

Был проведён экспериментальный анализ эффективности данного метода [3]. В качестве коэффициента надёжности было взято среднее отношение размера файла к максимально возможному объёму скрываемого сообщения. Для исследования вышеописанного метода было случайно отобрано и проанализировано несколько сотен файлов, средний размер файла составляет примерно 51256 байт. Проведённые исследования показали, что надёжность данного метода зависит от объёма скрываемой информации и варьируется от ~0,45 до ~78,04%.

4. Выводы

Описанный способ внедрения обеспечивает достаточно безопасно хранение и передачу преимущественно текстовой информации, как и любой другой способ внедрения, наиболее эффективен/безопасен при передаче меньшего объёма информации. Следует отметить тот факт, что любую передаваемую информацию можно также зашифровать и поставить пароль, это легко можно сделать, например, всем известной программой WinRar, что в значительной степени повысит её безопасность. Также данный способ позволяет без ущерба безопасности передаваемого сообщения внедрить в заголовок PE-файла активный X-код [2], для удаления встроенного сообщения при несанкционированном допуске или неправильном обращении с файлом, например, при его запуске или введении неверного пароля, но такие меры могут обратить на файл-контейнер внимание антивирусных программ, что является крайне нежелательным.

Литература

1. Micheal J. O'Leary. The portable executable format [Электронный ресурс] // URL: <http://www.nikse.dk/petxt.html> (дата обращения: 03.09.2011).
2. Касперский К. Техника внедрения и удаления кода из PE-файлов [Электронный ресурс] // URL: <http://www.insidepro.com/kk/018/018r.shtml> (дата обращения: 05.09.2011).
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 480 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ И АНАЛИЗ МЕТОДОВ СТЕГАНОГРАФИИ В ФАЙЛЫ ФОРМАТА PORTABLE EXECUTABLE

А.В. Скрипко

Омский государственный технический университет

В данной статье рассматриваются методы сокрытия информации в файлах формата Portable Executable (PE, «PE» — это основной формат исполняемых файлов приложений в 32- и 64-разрядных системах Microsoft Windows). Приведено описание методов сокрытия и их анализ.

1. Введение

Стеганография – это метод организации связи, который собственно скрывает само наличие связи. В отличие от криптографии, где неприятель точно может определить, является ли передаваемое сообщение зашифрованным текстом, методы стеганографии позволяют встраивать секретные сообщения в безобидные послания так, чтобы невозможно было заподозрить существование встроенного тайного послания.

Компьютерные технологии придали новый импульс развитию и совершенствованию стеганографии, появилось новое направление в области защиты информации: **компьютерная стеганография** [1].

Современный прогресс в области глобальных компьютерных сетей и средств мультимедиа привел к разработке новых методов, предназначенных для обеспечения безопасности передачи данных по каналам телекоммуникаций и использования их в необъявленных целях. Эти методы, учитывая естественные неточности устройств оцифровки и избыточность аналогового видео- или аудиосигнала, позволяют скрывать сообщения в компьютерных файлах (контейнерах).

2. Актуальность выбранного формата данных

В Интернете на данный момент времени можно найти множество программного обеспечения (ПО) для сокрытия информации в различных форматах данных, но подавляющее их большинство предназначено для внедрения информации в изображения, аудио или видео. Определяющим фактом здесь является то, что в такого рода данных, теоретически можно скрыть неограниченный объем данных, но, на мой взгляд, это является не только преимуществом, но и недостатком. Объясню, почему: для большинства современных методов, используемых для сокрытия сообщения в цифровых контейнерах, имеет место зависимость надежности системы от объема встраиваемых данных (рис. 1).



Рис. 1. Зависимость надежности от размера сообщения

Данная зависимость показывает, что при увеличении объема встраиваемых данных снижается надежность системы [2]. Таким образом, очевидным становится факт, что канал передачи должен быть, прежде всего, безопасным, а не нацеленным на передачу максимального объема информации за один раз.

Ещё одним недостатком современного ПО являются достаточно узкий круг широко известных форматов файлов-контейнеров и известные алгоритмы внедрения информации. Этот факт тоже очень влияет на надежность системы, так как именно самые известные форматы являются первыми кандидатами для проверки на наличие в них скрытого сообщения.

Итак, сокрытие информации в файлах формата Portable Executable, а именно в файлах со всем известным расширением *.exe, является, пусть и не новым, но хорошо забытым и используется в основном в вирусологии. Минусом данного формата является ограниченный объем внедряемой информации, но по остальным параметрам он подходит идеально, по каким именно, будет рассмотрено далее.

3. Описание существующих методов внедрения

Все существующие механизмы внедрения можно разбить на четыре условные категории, обозначенные латинскими буквами A, B, C и Z.

- К категории A относятся механизмы, не вызывающие изменения адресации ни физического, ни виртуального образов. После внедрения в файл ни его длина, ни количество выделенной при загрузке памяти не изменяются, и все базовые структуры остаются на своих прежних адресах. Этому условию удовлетворяет внедрение в пустое место файла.

- К категории B относятся механизмы, вызывающие изменения адресации только физического образа. После внедрения в файл его длина увеличивается, однако количество выделенной при загрузке памяти не изменяется, и все базовые структуры проецируются по тем же самым адресам. Однако их физические смещения изменяются, что требует полной или частичной перестройки структур, привязывающихся к своим физическим адресам, и если хотя бы одна из них останется не скорректированной (или будет скорректирована неправильно), файл-носитель с высокой степенью вероятности откажет в работе.

- К категории С относятся механизмы, вызывающие изменения адресации как физического, так и виртуального образов. Длина файла и выделяемая при загрузке память увеличиваются. Базовые структуры могут либо оставаться на своих местах, либо перемещаться по страничному имиджу произвольным образом, требуя обязательной коррекции.

- К «засекреченной» категории Z относятся механизмы, вообще не дотрагивающиеся до файла-носителя и внедряющиеся в его адресное пространство косвенным путем, например модификацией ключа реестра, ответственного за автоматическую загрузку динамических библиотек. Этой технологией интересуются в первую очередь сетевые черви и шпионы.

4. Анализ существующих методов внедрения

Подробное описание существующих алгоритмов сокрытия информации очень сложно и весьма объёмно, поэтому считаю целесообразным указывать лишь основные преимущества и недостатки различных методов, а подробное описание можно найти в [3].

К категории А относятся:

1. Сокрытие в заголовке PE-файла.

Преимущества: простота использования, неизменный размер файла-контейнера, высокая степень надёжности при неполном заполнении контейнера.

Недостатки: передача небольших ограниченных объемов информации.

2. Внедрение в хвост секции.

Преимущества: неизменный размер файла-контейнера, высокая степень надёжности, особенно если сообщение полностью помещается в первой кодовой секции файла.

Недостатки: передача небольших ограниченных объемов информации.

3. Внедрение в регулярную последовательность байт.

Преимущества: обнаруженное сообщение практически невозможно восстановить, не зная алгоритма внедрения.

Недостатки: сокрытое сообщение достаточно легко распознать, высокая сложность использования, высокая вероятность повреждения файла-контейнера, относительно небольшой объём для внедрения.

4. Внедрение путём сжатия части файла.

Преимущества: достаточно большой объём скрываемой информации, средняя степень надёжности.

Недостатки: вероятность повреждения файла-контейнера.

К категории В относятся:

1. Раздвижка заголовка PE-файла.

Преимущества: относительная простота реализации.

Недостатки: вероятность срабатывания антивируса на файл-контейнер, следствие – низкая степень надёжности, передача относительно небольших объемов информации.

2. Сброс части секции в оверлей.

Преимущества: простота реализации, высокая степень надёжности.

Недостатки: передача небольших ограниченных объемов информации.

3. Создание дополнительного оверлея.

Преимущества: простота реализации.

Недостатки: низкая степень надёжности, передача небольших ограниченных объемов информации.

К категории С относятся:

1. Расширение последней секции файла.

Преимущества: передача относительно большого объёма информации.

Недостатки: сложная реализация, низкая степень надёжности.

2. Создание дополнительной секции.

Преимущества: передача относительно большого объёма информации.

Недостатки: сложность реализации, низкая степень надёжности.

3. Расширение секций файла.

Преимущества: очень высокая степень надёжности, наличие разных вариантов внедрения, передача относительно большого объёма информации.

Недостатки: сложность реализации.

К категории Z относятся алгоритмы, напрямую граничащие с вирусологией, поэтому к данной работе имеют косвенное отношение.

5. Заключение

Следует отметить, что при написании программного обеспечения для сокрытия информации в PE-файлах очень важная часть отводится к анализу файла-контейнера, так как существует широкий ряд причин, по которым файл-контейнер, как минимум, является нежелательным для внедрения в него информации, однако данный анализ является практически универсальным для любого из перечисленных методов внедрения.

Из приведённого выше анализа можно сделать очевидный вывод, что файлы данного формата имеют широкий круг возможностей для сокрытия в них информации и достаточно высокий уровень надёжности. Единственным минусом, как уже упоминалось выше, является ограниченный объём внедряемой информации, но следует заметить, что для, например, видеофайла 100 Кб информации это очень мало, а для текстовой информации это, примерно, 100 тысяч символов.

Литература

1. Голубев В.С. Компьютерная стеганография – защита информации или инструмент преступления? [Электронный ресурс] // URL: <http://www.crime-research.ru/library/Steganos.htm> (дата обращения: 01.09.2011).

2. Непомнящий А. Стеганография в исполняемых файлах [Электронный ресурс] // URL: http://www.rol.ru/n-ews/it/soft/03/02/27_006.htm (дата обращения: 04.09.2011).

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ОПОЛЗНЯ НА СВОБОДНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ВОДОЁМА НА БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

А.В. Шестаков

Кемеровский государственный университет

Движение оползня является одним из механизмов образования волн на свободной поверхности водоёма. Двигаясь по дну акватории, он генерирует волновой процесс. Существует несколько подходов к моделированию движения оползня. Один из них – это представить оползень недеформируемым твёрдым телом и задать закон его движения по дну акватории. Другой подход – это представить оползень как жидкость, имеющую более высокую плотность по сравнению с жидкостью, окружающей оползень.

1. Постановка задачи.

Рассматриваются два слоя невязкой несжимаемой жидкости, лежащие один над другим. Предполагается, что жидкости не перемешиваются и отсутствует сила трения между слоями и о дно. Задача рассматривается в бесконечной области и одномерной постановке. В общем случае дно предполагается неровным.

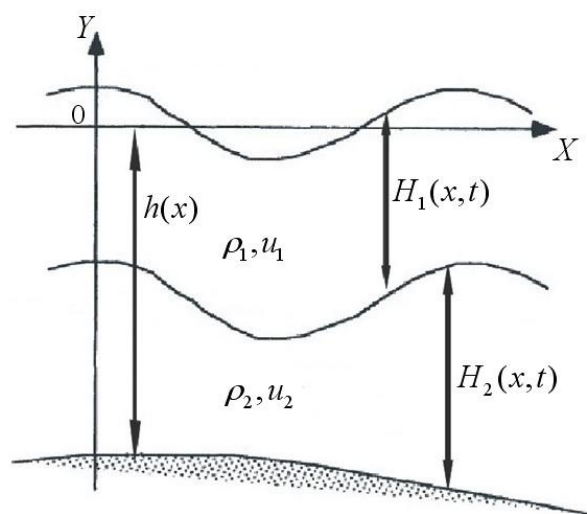


Рис. 1. Схема двухслойной жидкости

Индекс 1 соответствует верхнему слою, индекс 2 – нижнему; $H_1(x,t)$ и $H_2(x,t)$ – толщины слоёв; ρ_1 , ρ_2 – плотности; $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ – скорости в слоях; $h(x) > 0$ – глубина дна.

Задача заключается в исследовании влияния оползня на свободную поверхность водоёма. Для решения используется модель двухслойной мелкой воды [1]:

$$\begin{cases} H_{1t} + (H_1 u_1)_x = 0, \\ u_{1t} + u_1 u_{1x} + g(H_1 + H_2 - h)_x = 0, \\ H_{2t} + (H_2 u_2)_x = 0, \\ u_{2t} + u_2 u_{2x} + g(\lambda H_1 + H_2 - h)_x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$\begin{cases} H_1^0 = H_1(x, 0), \\ u_1^0 = u_1(x, 0), \\ H_2^0 = H_2(x, 0), \\ u_2^0 = u_2(x, 0), \end{cases} \quad (2)$$

здесь $\lambda = \rho_1 / \rho_2$ – отношение плотностей жидкости; g – ускорение свободного падения; H_1^0, u_1^0 – начальная толщина и скорость верхнего слоя; H_2^0, u_2^0 – начальная толщина и скорость нижнего слоя.

Первые два уравнения системы описывают поведение верхнего слоя, а вторые два – поведение нижнего. Систему нельзя расщепить, так как в уравнение для верхнего слоя входят неизвестные, соответствующие нижнему слою, и наоборот.

2. Метод решения.

Система уравнений мелкой воды решается методом сеток, т.е. в рассматриваемой области строится сетка с переменным шагом, и на этой сетке аппроксимируются уравнения (1) неявной разностной схемой:

$$\begin{cases} \frac{H_{1i}^{n+1} - H_{1i}^n}{\tau} + \frac{H_{1i+1}^{n+1} u_{1i+1}^{n+1} - H_{1i-1}^{n+1} u_{1i-1}^{n+1}}{h_{xi} + h_{xi-1}} = 0, \\ \frac{u_{1i}^{n+1} - u_{1i}^n}{\tau} + u_{1i}^{n+1} \left(\frac{u_{1i+1}^{n+1} - u_{1i-1}^{n+1}}{h_{xi} + h_{xi-1}} \right) + g \left(\frac{(H_{1i+1}^{n+1} + H_{2i+1}^{n+1} - h_{i+1}) - (H_{1i-1}^{n+1} + H_{2i-1}^{n+1} - h_{i-1})}{h_{xi} + h_{xi-1}} \right) = 0, \\ \frac{H_{2i}^{n+1} - H_{2i}^n}{\tau} + \frac{H_{2i+1}^{n+1} u_{2i+1}^{n+1} - H_{2i-1}^{n+1} u_{2i-1}^{n+1}}{h_{xi} + h_{xi-1}} = 0, \\ \frac{u_{2i}^{n+1} - u_{2i}^n}{\tau} + u_{2i}^{n+1} \left(\frac{u_{2i+1}^{n+1} - u_{2i-1}^{n+1}}{h_{xi} + h_{xi-1}} \right) + g \left(\frac{(\lambda H_{1i+1}^{n+1} + H_{2i+1}^{n+1} - h_{i+1}) - (\lambda H_{1i-1}^{n+1} + H_{2i-1}^{n+1} - h_{i-1})}{h_{xi} + h_{xi-1}} \right) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$i, j \in J, n = \overline{0, N},$$

где J – множество индексов, $H_{1i}^0 = H_1^0(x_i)$, $u_{1i}^0 = u_1^0(x_i)$, $H_{2i}^0 = H_2^0(x_i)$, $u_{2i}^0 = u_2^0(x_i)$ – начальные условия.

При численном решении область решения должна быть конечной и для этого нам необходимо замкнуть схему на границе. Так как граница решения принадлежит области и тем самым в ней выполняются уравнения, то мы замыкаем схему, аппроксимируя на границе внутрь области исходные уравнения.

На левой границе Γ_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{H_{1,0}^{n+1} - H_{1,0}^n}{\tau} + \frac{H_{1,1}^{n+1} u_{1,1}^{n+1} - H_{1,0}^{n+1} u_{1,0}^{n+1}}{h_{x,0}} = 0, \\ \frac{u_{1,0}^{n+1} - u_{1,0}^n}{\tau} + u_{1,0}^{n+1} \left(\frac{u_{1,1}^{n+1} - u_{1,0}^{n+1}}{h_{x,0}} \right) + g \left(\frac{(H_{1,1}^{n+1} + H_{2,1}^{n+1} - h_1) - (H_{1,0}^{n+1} + H_{2,0}^{n+1} - h_0)}{h_{x,0}} \right) = 0, \\ \frac{H_{2,0}^{n+1} - H_{2,0}^n}{\tau} + \frac{H_{2,1}^{n+1} u_{2,1}^{n+1} - H_{2,0}^{n+1} u_{2,0}^{n+1}}{h_{x,0}} = 0, \\ \frac{u_{2,0}^{n+1} - u_{2,0}^n}{\tau} + u_{2,0}^{n+1} \left(\frac{u_{2,1}^{n+1} - u_{2,0}^{n+1}}{h_{x,0}} \right) + g \left(\frac{(\lambda H_{1,1}^{n+1} + H_{2,1}^{n+1} - h_1) - (\lambda H_{1,0}^{n+1} + H_{2,0}^{n+1} - h_0)}{h_{x,0}} \right) = 0. \end{array} \right.$$

На правой границе Γ_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{H_{1,Nx}^{n+1} - H_{1,Nx}^n}{\tau} + \frac{H_{1,Nx}^{n+1} u_{1,Nx}^{n+1} - H_{1,Nx-1}^{n+1} u_{1,Nx-1}^{n+1}}{h_{x,Nx-1}} = 0, \\ \frac{u_{1,Nx}^{n+1} - u_{1,Nx}^n}{\tau} + u_{1,Nx}^{n+1} \left(\frac{u_{1,Nx}^{n+1} - u_{1,Nx-1}^{n+1}}{h_{x,Nx-1}} \right) + \\ + g \left(\frac{(H_{1,Nx}^{n+1} + H_{2,Nx}^{n+1} - h_{Nx}) - (H_{1,Nx-1}^{n+1} + H_{2,Nx-1}^{n+1} - h_{Nx-1})}{h_{x,Nx-1}} \right) = 0, \\ \frac{H_{2,Nx}^{n+1} - H_{2,Nx}^n}{\tau} + \frac{H_{2,Nx}^{n+1} u_{2,Nx}^{n+1} - H_{2,Nx-1}^{n+1} u_{2,Nx-1}^{n+1}}{h_{x,Nx-1}} = 0, \\ \frac{u_{2,Nx}^{n+1} - u_{2,Nx}^n}{\tau} + u_{2,Nx}^{n+1} \left(\frac{u_{2,Nx}^{n+1} - u_{2,Nx-1}^{n+1}}{h_{x,Nx-1}} \right) + \\ + g \left(\frac{(\lambda H_{1,Nx}^{n+1} + H_{2,Nx}^{n+1} - h_{Nx}) - (\lambda H_{1,Nx-1}^{n+1} + H_{2,Nx-1}^{n+1} - h_{Nx-1})}{h_{x,Nx-1}} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Получаем границу: $\Gamma_k = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_1 = \{x=0\}$, $\Gamma_2 = \{x=1\}$.

В итоге разностная задача представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений, которое удовлетворяет свойству билинейности:

$$A(u, u) = f. \quad (4)$$

Для решения (4) предполагается следующий алгоритм. По известному решению на каждом временном шаге итерационным методом находим приближенное решение (4) и принимаем его за решение на следующем шаге по времени.

Так как система (1) нелинейная, для её решения используем итерационную схему [2]:

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= u^n - \tau_{n+1} [A(u^n, u^n) - f], \\ u^{n+1} &= u^{n+1/2} + \alpha_{n+1} z^n, n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где $z^n \in H_m$ – некоторый вектор.

Первый шаг схемы – это какая-либо известная схема с некоторым итерационным параметром τ_{n+1} .

Во втором шаге схемы α_{n+1} является квадратной матрицей с m ненулевыми элементами $\alpha_{jk_i}^{(n+1)}$, $i, j=1,2,\dots,m$; k – произвольное целое число от 1 до m .

Перепишем второй шаг схемы в виде

$$u^{n+1} = y_{(p-1)}^{n+1/2} + \sum_{i=p}^m \alpha_{jk_i}^{(n+1)} e^{(k_i)}, \quad p, j=1,2,\dots,m,$$

где $y_{(p-1)}^{n+1/2} = u^{n+1/2} + \alpha_{jk_1}^{(n+1)} e^{(k_1)} + \dots + \alpha_{jk_{p-1}}^{(n+1)} e^{(k_{p-1})}$, $y_{(0)}^{n+1/2} = u^{n+1/2}$; e^{k_i} – вектор с одной ненулевой k_i -й компонентой.

Введём обозначение $r_{(i)}^{n+1/2} = r_{(i-1)}^{n+1/2} + \alpha_{jk_i}^{(n+1)} F_{1n}^{(k_i)} + (\alpha_{jk_i}^{(n+1)})^2 F_{2n}^{(k_i)}$, где $F_{1n}^{(k_i)}$ и $F_{2n}^{(k_i)}$ зависят от $y_{(i-1)}^{n+1/2}$ и $e^{(k_i)}$. График зависимости $\|r_{(i)}^{n+1/2}\|^2$ имеет такой вид, что у него один или два минимума. Выберем $\alpha_{jk_i}^{(n+1)}$ из условий минимума нормы вектора невязки $\|r_{(i)}^{n+1/2}\|^2$. Тогда $\alpha_{jk_i}^{(n+1)}$ находится как решение кубического уравнения по формулам Кардано.

Пусть $\alpha_{jk_i}^{*(n+1)}$ – решение, отвечающее глобальному минимуму $\|r_{(i)}^{n+1/2}\|^2$. Тогда справедливо $\|r_{(i)}^{n+1/2}\|^2 = \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|^2 - \Phi_{n+1}^{(i)} = \rho_{(i)}^2 \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|^2$, $\rho_{(i)}^2 = 1 - \Phi_{n+1}^{(i)} / \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|^2$, где $\Phi_{n+1}^{(i)} = \Phi_{n+1}(\alpha_{jk_i}^{*(n+1)}) \geq 0$. Таким образом, $\|r_{(i)}^{n+1/2}\| \leq \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|$, $i=1,2,\dots,m$, $n=0,1,2,\dots$.

3. Численные эксперименты.

Во всех приведённых ниже расчётах были взяты следующие параметры: $g=1$, $\rho_1=1$, $\rho_2=2,6$.

Эксперимент №1. Толщина невозмущённых слоёв равна 0,1, глубина 0,2. Начальные условия задаются таким образом, чтобы верхняя поверхность была ровной. На нижнем слое задаётся возмущение в виде «шапки» экспоненты. Скорости обеих жидкостей в начальный момент равны нулю.

Под действием силы тяжести возмущение на нижнем слое начинает оседать, тем самым формируя возмущения на верхней свободной поверхности.

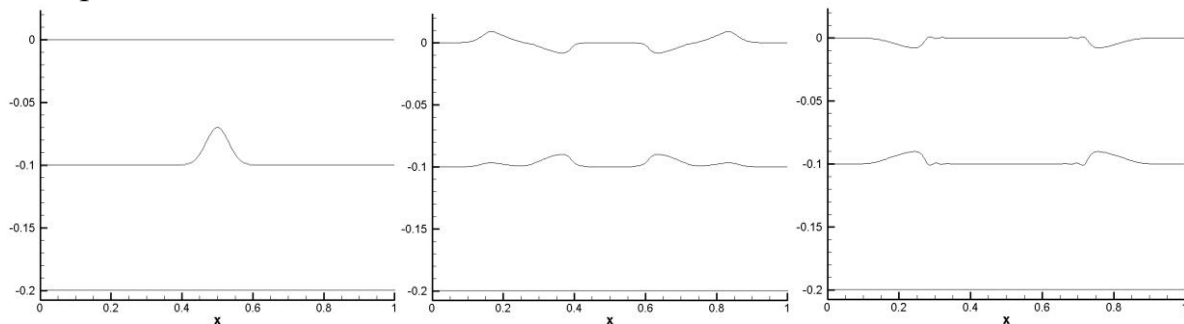


Рис. 2. Результаты эксперимента №1 на различных временных слоях, $T=0, 800, 1500$

На рисунках верхняя линия показывает поведение свободной поверхности, средняя линия – поведение раздела между жидкостями разной плотности, а нижняя линия является дном. Рисунок слева соответствует начальным данным $T=0$, посередине $T=800$ и справа $T=1500$.

Эксперимент №2. Толщина невозмущённых слоёв равна 0,1, глубина 0,2. Начальные условия задаются таким образом, чтобы нижний слой был ровным, а на верхнем слое задаётся возмущение в виде «шапки» экспоненты. Скорости обеих жидкостей в начальный момент равны нулю.

Под действием силы тяжести возмущение на верхнем слое начинает оседать, тем самым формируя возмущения на оползне.

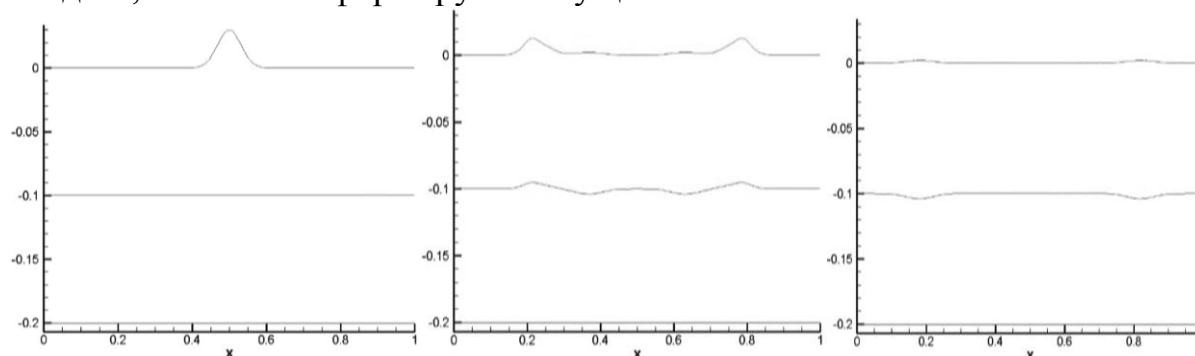


Рис. 3. Результаты эксперимента №2 на различных временных слоях, $T=0, 750, 1500$.

Эксперимент №3. Геометрия численного эксперимента показана на рис. 4. Форма дна была взята в виде арктангенса, который формирует береговой склон. На дне расположен слой с небольшой толщиной, который формирует оползень. Толщина верхнего слоя формируется из расчёта на то, чтобы свободная поверхность была в состоянии покоя.

Под силой тяжести оползень начинает двигаться вниз, формируя волновой режим на свободной поверхности. В то время, когда основная часть оползня спускается со склона, в низу склона начинает формироваться горочка.

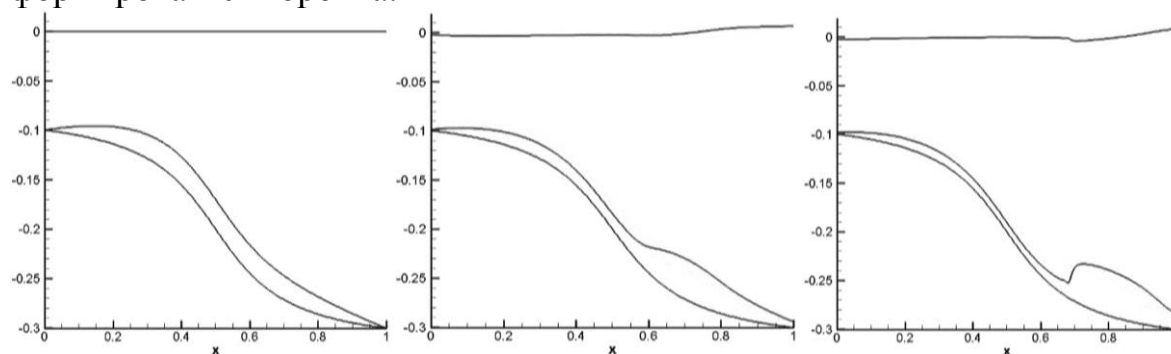


Рис. 4. Результаты эксперимента №3, на различных временных слоях, $T=0, 600, 1200$

Эксперимент №4. Геометрия данного численного эксперимента представлена на рис. 5. Форма дна была взята также в виде арктангенса, с тем отличием, что он сдвинут в правую сторону на 0,5 относительно предыдущего эксперимента. Таким образом, мы проверяем, влияют ли граничные условия на полученное решение.

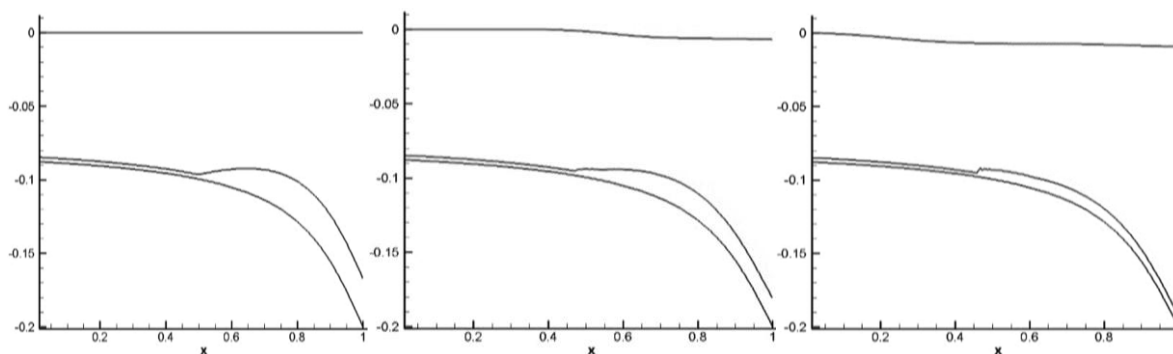


Рис. 5. Результаты эксперимента №4 на различных временных слоях, $T=0, 600, 1200$

Литература

1. Choi W. Modeling of strongly nonlinear internal waves in a multilayer system // Proc. 4th Intern. Conf. on Hydrodynamics (Y. Goda, M. Ikehata, K. Suzuki, Eds), 2000. PP. 453–458.
2. Захаров Ю.Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики // Итерационные схемы решения билинейных уравнений. Новосибирск: Наука, 2004. С. 108–111.

О РЕШЕНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

О.А. Штейнбрехер

Новокузнецкий институт (филиал)

Кемеровского государственного университета

При решении задач статики, динамики и устойчивости методом конечных элементов (МКЭ) на основе метода возможных перемещений [1, 2] возникает проблема решения системы линейных алгебраических уравнений больших размерностей (СЛАУ) вида

$$Ax = B, \quad (1)$$

где A – матрица коэффициентов; x – системный узловый вектор неизвестных; B – заданная матрица-столбец.

В силу особенности МКЭ матрица коэффициентов разрешающей системы уравнений для рассматриваемых задач имеет ленточную слобозаполненную структуру [3]. Для решения СЛАУ используются численные методы, основанные на предположении, что до начала вычислений или исключений переменных суммирование в матрице коэффициентов завершено, и она полностью собрана. Такие методы называются ленточными и подразделяются на прямые и итерационные [4].

Существуют также методы, основанные на обратном предположении, – исключения начинаются прежде, чем будет закончено суммирование. Такие методы называются фронтальными [5]. Фронтальный метод чередует накопление элементов коэффициентов и исключение неизвестным по формулам Гаусса. К достоинствам этого метода можно отнести его нечувствительность к ширине ленты СЛАУ и к порядку нумерации узлов. Этот метод мало зависит от дискретизации расчетной области, а также работает не только на положительно

определенных матрицах. Фронтальный алгоритм задействует меньше памяти и арифметических действий, чем ленточные.

Во фронтальном методе вычислительные затраты зависят от величины фронта. При расчете конструкций сложной геометрии и структура величина фронта возрастает, требуется модификация метода, позволяющая уменьшить фронт.

Рассмотрим в качестве модификации использование фронтального метода в итерационном решателе. В его основу положено предположение, что внедиагональные блоки матрицы имеют меньшую норму, чем диагональные. И для сокращения ширины фронта неизвестные разбиваются на группы так, чтобы каждая группа неизвестных содержала степени свободы узлов одного из направлений.

При ходе метода последовательно фиксируются все степени свободы узлов за исключением одной и рассматриваются уравнения с теми номерами, что и незафиксированные степени свободы. Так формируется глобальная матрица коэффициентов, в диагональных блоках которой расположены коэффициенты при групповых неизвестных. Внедиагональные блоки содержат коэффициенты при неизвестных, которые временно считаются постоянными.

Сформируем глобальные матрицы по направлению степеней свободы:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & & & & & \\ & \tilde{A}_{22} & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & \tilde{A}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \vdots \\ \tilde{U}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \vdots \\ \tilde{B}_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \dots & \\ \tilde{A}_{12}^T & 0 & \tilde{A}_{23} & \ddots & \\ \tilde{A}_{13}^T & \tilde{A}_{23}^T & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \vdots \\ \tilde{U}_6 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $\tilde{A}_{ii}$, $\tilde{A}_{ij}$ – разряженные матрицы; $\tilde{A}_{ii}$ – диагональные блоки глобальной матрицы; $\tilde{A}_{ij}$ – внедиагональные блоки, относящиеся к неизвестным i -й степени свободы; $\tilde{U}_i$ – неизвестные i -ой степени свободы; $\tilde{B}_i$ – правые части.

Произведем итерационный процесс последовательно друг за другом по шести направлениям. Процесс останавливается, когда решение на двух последовательных итерациях изменяется мало. Итерационный процесс запишем в виде системы шести уравнений:

$$\tilde{A}_{ii} \tilde{U}_i^{t+1} = \tilde{B}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{A}_{ji} \tilde{U}_j^{t+1} - \sum_{j=i+1}^6 \tilde{A}_{ji} \tilde{U}_j^t, \quad (3)$$

где $\tilde{U}_i^t$ – неизвестные i -й степени свободы на шаге t ; $\tilde{U}_i^{t+1}$ – неизвестные i -й степени свободы на шаге $t+1$.

Как известно, сходимость любого итерационного метода можно ускорить методом сопряженных градиентов [6]. Метод бисопряженных градиентов является обобщением метода сопряженных градиентов на несимметричный случай [6]. Путем алгебраических преобразований проведем итерационный процесс (3) к виду

$$\tilde{A}_{ii}^{-1} \tilde{A} U = \tilde{A}_{ii}^{-1} \tilde{B}, \quad (4)$$

где $\tilde{A}_{ii}$ – диагональные блоки глобальной матрицы; $\tilde{A}$ – блочная матрица коэффициентов; $\tilde{B}$ – преобразованный столбец правых частей.

Выражение (4) является предобусловленной системой (3), где $\tilde{A}_{ii}$ – матрица предобуславливания. Обозначим матрицу предобуславливания L . Тогда выражение (4) приобретет вид

$$L^{-1} \tilde{A} U = L^{-1} \tilde{B}. \quad (5)$$

Применив метод бисопряженных градиентов к предобусловленной системе (5), получим:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{(r^{(k-1)}, \tilde{r}^{(k-1)})}{(L^{-1} \tilde{A} p^{(k-1)}, \tilde{p}^{(k-1)})}, \\ u^{(k)} &= u^{(k-1)} + \alpha_k p^{(k-1)}, \\ r^{(k)} &= \begin{cases} L^{-1} \tilde{B} - L^{-1} \tilde{A} u^{(0)}, k=0, \\ r^{(k-1)} - \alpha_k L^{-1} \tilde{A} p^{(k-1)}, k=1,2,\dots \end{cases}, \\ \tilde{r}^{(0)} &\rightarrow (r^{(0)}, \tilde{r}^{(0)}) \neq 0, \\ \tilde{r}^{(k)} &= \tilde{r}^{(k-1)} - \alpha_k (L^{-1} \tilde{A})^T \tilde{p}^{(k-1)}, \\ \beta_k &= \frac{(r^{(k)}, \tilde{r}^{(k)})}{(r^{(k-1)}, \tilde{r}^{(k-1)})}, \\ p^{(k)} &= \begin{cases} r^{(0)}, k=0, \\ r^{(k)} + \beta_k p^{(k-1)}, k=1,2,\dots \end{cases}, \\ \tilde{p}^{(k)} &= \begin{cases} \tilde{r}^{(0)}, k=0, \\ \tilde{r}^{(k)} + \beta_k \tilde{p}^{(k-1)}, k=1,2,\dots \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Итерационный процесс (6) следует остановить, когда норма вектора r будет меньше заданной первоначально погрешности. Значение $L^{-1} \tilde{B}$ можно найти как решение СЛАУ:

$$L \xi = \tilde{B}, \quad (7)$$

где ξ – искомое значение; L – диагональные блоки преобразованной глобальной матрицы; $\tilde{B}$ – преобразованный столбец правых частей.

Найти значения $L^{-1} \tilde{A} u^{(0)}$ и $L^{-1} \tilde{A} p^{(k)}$ можно с помощью систем

$$L \zeta = \tilde{A} u^{(0)} \quad (8)$$

и

$$L\zeta = \tilde{A}p^{(k)}, \quad (9)$$

где ζ , ζ – искомые значения; $\tilde{A}$ – блочная матрица коэффициентов; $u^{(0)}$ – начальное приближение итерационного процесса; $p^{(k)}$ – направления градиентного метода на каждом шаге.

Решение системы (9) происходит на каждом шаге итерационного процесса, а решение систем (7–8) – один раз перед началом итерационного процесса. Для решения систем (7–9) можно использовать фронтальный метод. Таким образом, формулы (6–9) определяют итерационный процесс, ускоренный методом сопряженных градиентов.

Алгоритм ускоренного фронтального метода для пакета ПП «Композит-НК» разработан на кафедре математики и математического моделирования НФИ ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет». Пакет программ «Композит-НК» направлен на решение задач статики, устойчивости, динамики машиностроительных конструкций методом конечных элементов.

При решении задач статики в пакете программ «Композит-НК» методом конечных элементов производятся следующие шаги:

- 1) вычисление локальных матриц и векторов правых частей для каждого конечного элемента;
- 2) сборка глобальной матрицы;
- 3) факторизация, предварительная обработка матриц коэффициентов системы уравнения с целью оптимизации процесса решения;
- 4) решение СЛАУ;
- 5) после решения СЛАУ предусмотрен этап вычисления дополнительных данных. Так как решается задача в перемещениях, то дополнительным этапом является вычисление напряжений и деформаций.

При использовании для решения СЛАУ фронтального метода глобальная матрица не собирается, т.е. шаги решения для него будут совпадать только в первом и пятом пунктах.

Таким образом, метод конечных элементов с использованием фронтального алгоритма можно разбить на следующие шаги:

- 1) вычисление локальных матриц и векторов правых частей для каждого конечного элемента;
- 2) заполнение таблицы кратности, первоначальный проход метода;
- 3) прямой ход фронтального метода;
- 4) обратный ход фронтального метода;
- 5) этап вычисления дополнительных данных.

Для реализации возможности выбора фронтального алгоритма наряду с ленточными методами решения СЛАУ требуется ввести ветвление после выполнения первого шага метода конечных элементов «вычисления локальных матриц» (рис. 1).

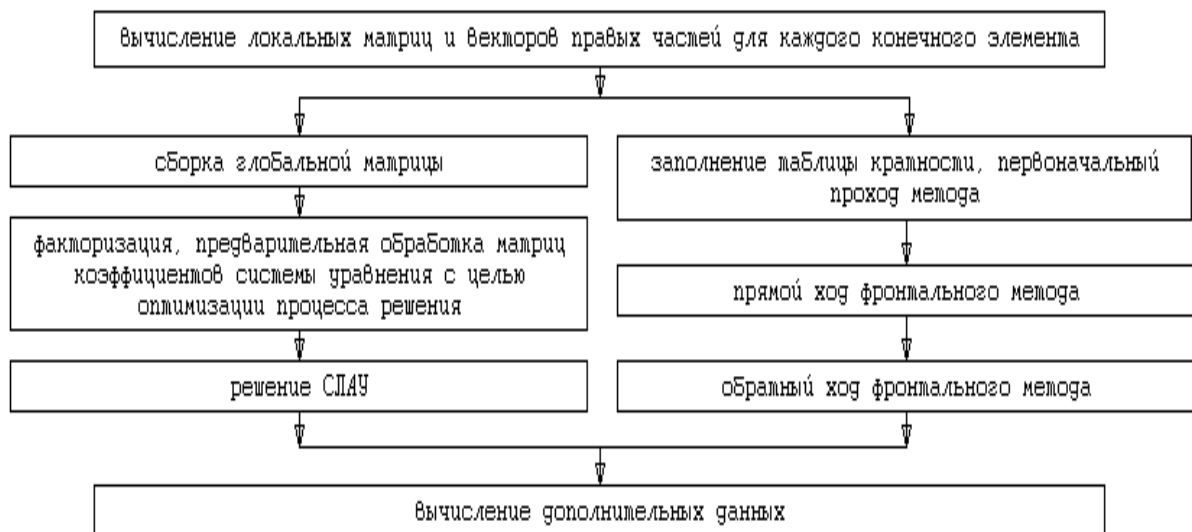


Рис. 1. Схема для решения задачи статики в ПП «Композит-НК» при использовании фронтального алгоритма решения СЛАУ

Модифицированный фронтальный метод (6)–(9) по основному ходу решения является ленточным, поэтому ход решения задачи статики должен идти по левой ветви схемы, изображенной на рисунке 2. Но для решения СЛАУ (7)–(9) фронтальным методом необходимо вызывать решения фронтального метода в шаге «решения СЛАУ» с различными правыми частями.

Можно построить алгоритм шага «решение СЛАУ» для модифицированного фронтального метода:

- 1) вычисление решений СЛАУ (7)–(8);
- 2) вычисление решения СЛАУ (9) с текущим значением направления градиентного метода p ;
- 3) вычисление шага итерационного процесса (6);
- 4) проверка условия остановки и соответственно переход на второй шаг алгоритма шага «решение СЛАУ» или его завершение.

Таким образом, вызов решения фронтального метода происходит два раза на шаге 1 и каждый раз на шаге 2. Для этого в пакете программ «Композит-НК» решение фронтального метода должно быть реализовано как подзадача с изменяемыми входными данными (рис. 2).

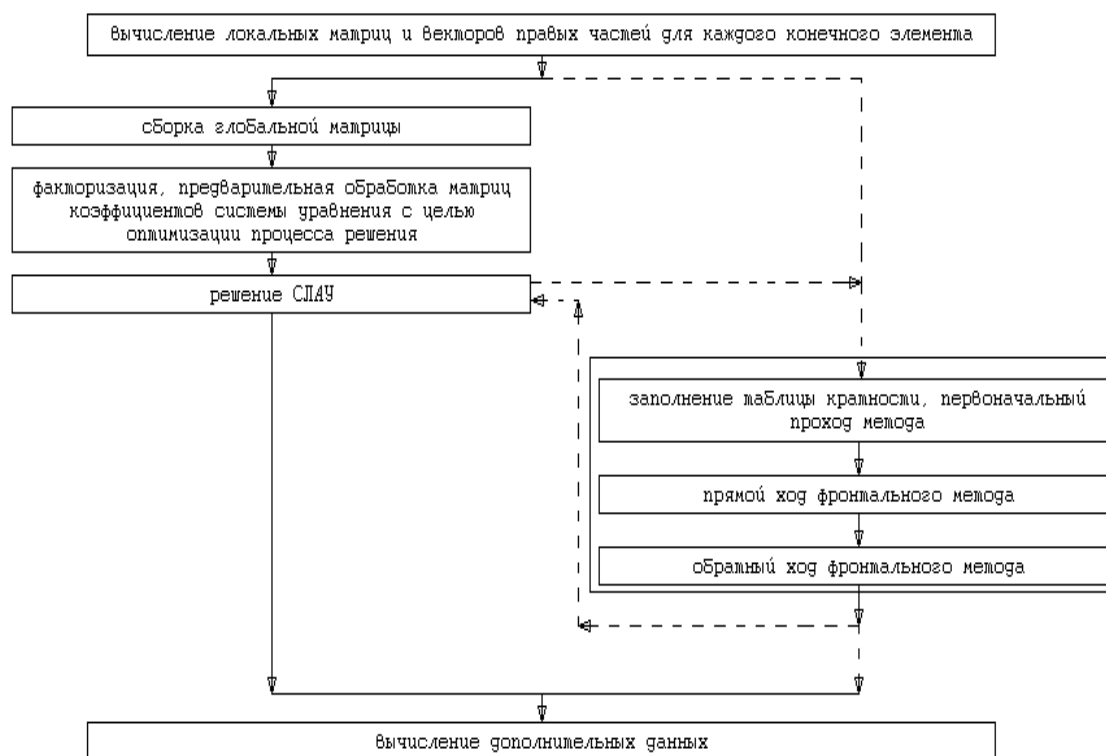


Рис. 2. Схема для решения задачи статики в ПП «Композит-НК» для использования модифицированного решателя СЛАУ

В этом случае возможно решение задачи статики при выборе любого из ленточных решателей, реализованных в ПП «Композит-НК», классического или же модернизированного фронтального решателя.

Литература

1. Каледин В.О. Численно-аналитические модели в прочностных расчетах пространственных конструкций / НФИ КемГУ. Новокузнецк, 2000. 204 с.
2. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 712 с.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. М.: Мир, 1979. 392 с.
4. Писсанецки С. Технология разреженных матриц / С. Писсанецки. М.: Мир, 1988. 410 с.
5. Irons B.M. A frontal solution program for finite element analysis / B. M. Irons // Internat. J. Numer. Methods Engrg. 1970. Vol. 2, № 1, 1970. P. 5–32
6. Баландин М.Ю. Методы решения СЛАУ большой размерности / М.Ю. Баландин, Э.П. Шурина. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. 70 с.

ДИСПЕТЧИРОВАНИЕ ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩИХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В МОБИЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

А.Н. Шутьгин

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,
г. Санкт-Петербург

В наши дни сфера высоко интегрированных приложений для мобильных вычислительных средств (ВС) претерпевает бурное развитие.

Производительность мобильных компьютеров стремительно растет. В таких условиях энергопотребление становится одним из ограничивающих факторов, сдерживающих дальнейшее развитие электронной техники, а требование к снижению энергопотребления вычислительных платформ становится все более актуальным для всех сегментов клиентских устройств и форм-факторов.

Проблема состоит еще и в том, что комплектующие ВС характеризуются одинаковым энергопотреблением при активной работе и в режиме простоя, а компонент ВС должен потреблять ровно столько энергии, сколько ему требуется для выполнения задачи. Поэтому разработчики находятся в постоянном поиске наиболее эффективных решений. Исторически в фокусе внимания исследователей находятся процессоры, поскольку именно они являются одними из наиболее мощных потребителей энергии, тем более, что в настоящее время это многоядерные модули, фактически представляющие собой параллельные вычислительные системы (ПВС).

Переход на 45-, 65-нм техпроцесс, а также внедрение новых микроархитектурных решений (использование выделенных ресурсов процессора на отдельных ядрах, совместно используемая кэш-память 2-го уровня, более логичная и эффективная конструкция системной шины между ядрами и т.п.) позволили значительно увеличить экономию энергии.

Конечно, у экономии тоже есть свои пределы, которые до недавнего времени в основном определялись используемой технологией. Однако в последние годы положение дел изменилось. Получили развитие такие пути решения этой проблемы:

совершенствование и развитие программно-аппаратной поддержки управления энергопотреблением как всей вычислительной системы (ВС), так и отдельных ее компонентов (технология *ACPI* и *Dynamic Energy Saver*), использующие большее количество состояний энергосбережения – C-состояний. Мобильные процессоры, например, обычно поддерживают больше высокоуровневых C-состояний [1] (от 8 до 10), а стационарные процессоры часто ограничены только немногими C-состояниями; поскольку незначительная экономия энергии не так актуальна для стационарных ВС, но весьма важна для мобильных, подобная дифференциация имеет значение;

интеллектуальное управление энергопитанием процессора (ядра) (технология *IMVP*), а также динамическое управление питанием и тактовой частотой процессора (ядра) (технология *Cool'n Quiet* и *EIST*);

сокращение энергозатрат за счет совершенствования управления параллельным вычислительным процессом (ПВП), включающее более эффективное планирование ПВП, с одной стороны, и гибкое диспетчирование ПВП – с другой стороны.

В данной работе диспетчер вычислительного процесса рассматривается в первую очередь как компонент ВС, обладающий достаточной функциональностью не только для решения отдельных задач

управления ПВП, но и использования технологических возможностей аппаратно-программных средств для управления энергопотреблением вычислительных модулей (ВМ) (ядер) на уровне макро- и микропрерываний. Именно это и лежит в основе идеи диспетчирования ПВП как способа энергосбережения в мобильных ВС.

Диспетчер вычислительного процесса представляет собой программу, на которую возложены функции реализации вычислений в вычислительной системе на основе плана (расписания) вычислительного процесса [2].

Известны различные подходы к построению и реализации диспетчеров ПВП, наиболее общая классификация которых представлена на рис. 1.

Ввиду своих явных преимуществ по гибкости реализации функций управления и низкому уровню аппаратных затрат наибольшее распространение имеет *программная* реализация диспетчеров.

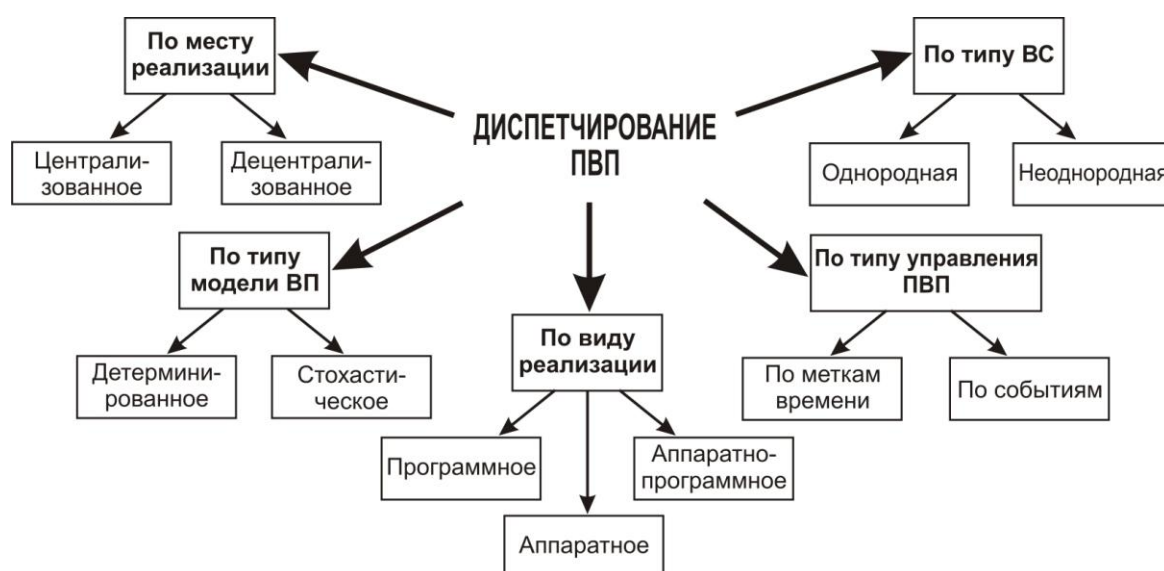


Рис. 1. Классификация методов диспетчирования ПВП

В контексте рассматриваемой проблемы наибольший интерес вызывает диспетчирование стохастических вычислительных процессов (ВП).

Это обусловлено тем, что в *стохастическом* ВП заранее неизвестны моменты времени завершения (начала) выполнения заданий. Известен лишь порядок следования заданий на каждом ВМ. В связи с этим при возникновении события, связанного с завершением задания, встает необходимость анализа готовности очередного задания к выполнению [2].

Актуальность диспетчирования ПВП с целью снижения энергоемкости функционирования вычислительной системы вызвана тем, что при наличии отношений частичного порядка между заданиями целевой задачи возникают вынужденные простои в работе ВМ, вызванные проблемой синхронизации заданий. При увеличении связности графа целевой задачи, т.е. количества связей между заданиями, время

вынужденного простоя ВМ весьма значительно. Переводя ВМ на это время в пассивное состояние, можно добиться снижения расхода энергоресурса [2].

Особенностью диспетчера *энергосберегающего* вычислительного процесса является решение дополнительных задач по управлению энергопотреблением вычислительной системы с целью повышения ее энергоэффективности. Для достижения этой цели в ВМ должна быть предусмотрена возможность перехода из активного режима, в котором ВМ потребляет номинальную мощность при выполнении вычислений, в пассивный, в котором ВМ не производит вычислений и потребляет минимальную мощность [2]. Такую возможность дает использование состояний пониженного энергопотребления процессора (ядра) (C-состояний).

При построении концептуальной модели диспетчера энергосберегающих ПВП учитывалось, что при наличии информационно-управляющих связей между программными элементами (заданиями) параллельного алгоритма целевой задачи, случайном характере времени завершения заданий-предшественников и времени начала заданий-последователей задача энергосбережения сводится к определению моментов начала и окончания вынужденного простоя ВМ или, другими словами, момента перевода ВМ из активного состояния в одно из энергосберегающих C-состояний и обратно с минимальными потерями в производительности.

В качестве исходных данных к решению этой задачи рассматриваются:

1) План (расписание) вычислительного процесса, определяющий последовательность выполнения заданий на каждом вычислительном модуле вычислительной системы, в виде прямоугольной матрицы $|\Psi|_{M,N}$, где $\Psi_{i,j}$, $i=1,...,M$, $j=1,...,N$ – задание, выполняемое j -м по счету на i -м ВМ; M – количество ВМ в ПВС; N – количество заданий.

2) Граф алгоритма целевой задачи $G(X, U, T)$, представленный в форме матрицы смежности заданий $\|H\|_{N,M}$.

3) Модель вычислительной системы $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ – множество вычислительных модулей (ВМ) (процессоров), входящих в вычислительную систему заданной архитектуры. Каждый ВМ y_i характеризуется:

- множеством энергосберегающих состояний $C_{\langle g \rangle} = \{C_1, C_2, ..., C_g\}$;
- вектором потребляемой мощности в каждом k -м энергосберегающем состоянии $P_{\langle g \rangle} = \{P_1, P_2, ..., P_g\}$;
- временными затратами на переход в энергосберегающее состояние и обратно:

$\xi^0 = \langle \xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_g^0 \rangle$ – вектором перехода из активного состояния (C0)

в одно из энергосберегающих состояний,

$\xi^1 = \langle \xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_g^1 \rangle$ – вектором перехода в активное состояние (C0).

3) Начальные моменты распределения времени τ окончания выполнения заданий $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2 \dots \hat{\tau}_n$:

$$\alpha_1 = \{\alpha_1(\hat{\tau}_1), \alpha_1(\hat{\tau}_2) \dots \alpha_1(\hat{\tau}_n),$$

$$\alpha_2 = \{\alpha_2(\hat{\tau}_1), \alpha_2(\hat{\tau}_2) \dots \alpha_2(\hat{\tau}_n),$$

⋮

$$\alpha_q = \{\alpha_q(\hat{\tau}_1), \alpha_q(\hat{\tau}_2) \dots \alpha_q(\hat{\tau}_n),$$

где $q=1,2,\dots$

Общий случай выполнения параллельной программы показан на рис. 2.

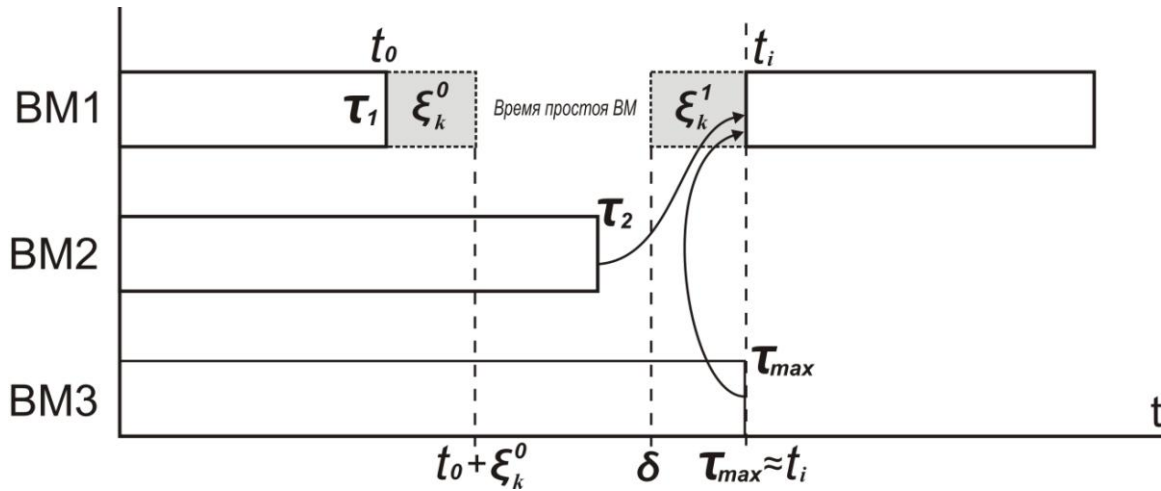


Рис. 2. Временная диаграмма выполнения параллельной программы

Очевидно, что момент времени $\hat{t}_i$ начала выполнения очередного задания совпадает с максимальным (наиболее поздним) моментом времени $\hat{\tau}_{\max}$ завершения заданий-предшественников, то есть:

$$\hat{t}_i = \hat{\tau}_{\max} = \max\{\hat{\tau}_1^{<i>}, \hat{\tau}_2^{<i>}, \dots\}, \quad (1)$$

где $\hat{\tau}_j^{<i>}$ – время завершения j -го задания – предшественника задания i .

Используя метод моментов точечной оценки параметров распределения [3], определяются функции распределения $F_j(t)$, а через них и $F_{i_{\max}}(t_i)$.

Вероятность момента начала выполнения очередного задания, представленного функцией распределения $F_{i_{\max}}(t_i)$, должна соответствовать некоторой заданной (директивной) вероятности ρ (вероятности того, что время начала выполнения очередного задания не превысит t_i), т.е.

$$\rho = F_{i_{\max}}(t_i), \quad (2)$$

где $F_{i_{\max}}$ – функция распределения времени $\hat{t}_i$ – начала выполнения очередного задания.

Отсюда момент времени начала выполнения очередного задания может быть вычислен как квантиль порядка ρ :

$$t_i = F_{\max}^{-1}(\rho). \quad (3)$$

Определив время t_i , можно вычислить время начала перевода ВМ в активное состояние:

$$\delta_k = t_i - \xi_k^1, \quad (4)$$

а также энергоемкость E_k ВМ в k -м состоянии:

$$E_k = (\delta_k - (t_0 + \xi_k^0))P_k. \quad (5)$$

Оценивая величину времени простоя ВМ, проверяется условие

$$\delta \leq t_0 + \xi_k^0. \quad (6)$$

Если оно выполняется, то перевод ВМ в состояние энергосбережения не целесообразен. Данное условие проверяется для всех C - состояний. Если решение о переводе ВМ в пассивное состояние принято, то посредством вычисления оптимальной энергоемкости

$$E^* = \min_{k=1, \dots, g} \{E_k\} \quad (7)$$

определяется оптимальное C^* -состояние:

$$C^* = \arg \min_{k=1, \dots, g} \{E_k\}. \quad (8)$$

В заключение стоит отметить, что описанный автором способ энергосбережения, основанный на диспетчировании стохастических ПВП, не требует дополнительных аппаратно-программных средств для своей реализации, так как в качестве инструмента сокращения расхода энергоресурса в процессе выполнения ПВП предполагается использование уже существующих возможностей современных технологий энергосбережения в мобильных ВС, а вероятностный подход к определению времени перехода в энергосберегающие состояния позволяет избежать потерь производительности ВС.

Литература

1. Чеканов Д. Экономия энергии и производительность: не мешает ли одно другому? [Электронный ресурс] // <http://www.thg.ru> (дата обращения: 15.11.2010).
2. Басыров А.Г. Диспетчер энергосберегающего параллельного вычислительного процесса / А. Г. Басыров, А. В. Данеев, А. Б. Мاستин // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2010. №3 (27). С. 157–162.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М: Высшая школа. 2004. 478 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Алетдинова А.А. Методика оценки кадровой составляющей инновационного потенциала организации	3
Важдаев А.Н., Самарова Ю.А. Территориальный подход к выбору поставщиков услуг и оборудования для инновационных организаций на примере вуза.....	7
Гресько А.А., Рахманова М.С. Анализ влияния изменений свойств групп заинтересованных сторон на ожидания организации	12
Корицкий А.В. Влияние человеческого капитала на дифференциацию доходов в России	15
Косенкова М.В. Стохастическая модель социально-экономической системы в виде дискретной задачи оптимального управления	22
Мамбетова К.А. Обзор математических моделей оценки банкротства предприятий	26
Мешечкин В.В., Богатырева Н.И. Использование интегрального показателя для решения задачи повышения уровня здоровья населения на примере Кемеровской области	30
Мироедова К.М. Математическая модель динамики численности групп экономически активного населения (на примере Кемеровской области)	36
Набережная А.В. Обзор количественных методов оптимизации размещения объектов бизнеса	39
Николаева Е.А. Хеджирование портфеля ценных бумаг с помощью опционов.....	42
Поддубный В.В., Романович О.В. Имитационная модель рынка одного товара с оптимальной детерминированной стратегией поставки товара в условиях стохастичности спроса.....	47
Приступа М.Ю., Смагин В.И. Дискретное прогнозирующее управление с запаздыванием по управлению и неизвестными возмущениями	53
Семахин А.М. Анализ математической модели информационной системы	57
Семахин А.М. Двойственная модель информационной системы	63
Семахин А.М. Математическая модель информационной системы в комплектной постановке задачи	67
Семахин А.М. Резервы времени сетевой модели информационной системы	70
Чернова Е.С., Косенкова М.В. Построение математической модели системы образования региона в контексте устойчивого развития	71

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

Апалько С.В., Бакулина А.Ю., Шерина Е.В., Филипенко М.Л., Глушков А.Н. Дизайн и безопасность пептида-иммуномиметика бензо[а]пирена	75
Галицкая Л.В. К вопросу об активно-пассивной идентификации промышленных объектов в действующих системах управления	79
Гуммель Е.Э. Решение нестационарной задачи протекания вязкой несжимаемой жидкости в каналах при заданном перепаде давления	83
Долгов Д.А. Исследование явления возвращения волны в некоторых вычислениях.....	88
Зимин А.И. Решение задачи протекания на адаптивной сетке.....	92
Иконникова Н.А., Слащёв А.И. Математическое моделирование работы анкерв в неустойчивых породах	96
Исаев Ю.Н., Васильева О.В. Расчет индуктивности индуктора коаксиального магнитоплазменного ускорителя и ее влияние на вклад кинетической энергии в исходную энергию системы	101

Каган Е.С., Мурашкина Е.С. Алгоритм получения количественной оценки сложных явлений с помощью метода анализа иерархий и теории нечетких множеств	106
Киришина Г.А., Ложкин А.Г. О некоторых экспериментах в задачах геометрического моделирования	110
Комиссарова Н.В., Комиссаров В.В., Чащин О.Н. Алгоритм регуляризации обратных задач теплопереноса и диффузии	112
Краюшкина М.В. Численное решение задачи о нестационарном одномерном движении смесей вязких сжимаемых жидкостей.....	116
Кригер В.Г., Каленский А.В., Боровикова А.П., Звеков А.А., Зыков И.Ю. Расчет закономерностей распространения волны цепной реакции в АТМ по диффузионному механизму	121
Кригер В.Г., Каленский А.В., Гришаева Е.А., Звеков А.А., Колмогорова О.Н. Разработка пакета прикладных программ для расчета стационарной скорости химических реакции	126
Кригер В.Г., Каленский А.В., Звеков А.А., Зыков И.Ю., Никитин А.П. Эффективности поглощения лазерного излучения металлическими включениями в прозрачных средах	130
Кромер В.В. О некоторых вопросах системы нормализации и поддержания веса пациента с отрицательной обратной связью по динамике веса пациента	135
Крутиков В.Н., Веришинин Я.Н. Многошаговые процессы обучения для целей реализации субградиентных методов минимизации	139
Михайлова А.В., Буялич К. Г. Параметрическая модель двухслойного гидроцилиндра	142
Прокудин Д.А. Анализ стационарных течений двухкомпонентных смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя вращающимися цилиндрами	144
Садчикова Г.М. Определение корреляционного отношения между характеристиками преобразователей расхода различного типа	149
Сучкова Л.И. Применение модели е-слоя в системах экстраполирующего мониторинга.....	153
Цветков А.Б., Цветков Б.Г. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния под воздействием источников температуры	156

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Глухарева Т.В. Численное исследование однофазной однофронтной задачи Стефана	161
Касимов А.О. Метод прямого генетического кодирования искусственных нейронных сетей с явным параллелизмом.....	163
Кривопалов А.Д., Скворцов А.В., Пожидаев М.С. Структуры и алгоритмы для решения транспортных задач в геоинформационной системе IndorGIS	167
Попов Е.В. Оценка применимости и качества методов рефакторинга.....	171
Ременников Д.В., Касимов А.О. Исследование и реализация алгоритма вычисления искусственных нейронных сетей прямого распространения на графических процессорах	174
Скрипко А.В. Цифровая стеганография сокрытия информации в заголовке файла Portable Executable.....	177
Скрипко А.В. Исследование и анализ методов стеганографии в файлы формата Portable Executable.....	182
Шестаков А.В. Исследование влияния оползня на свободную поверхность водоёма на бесконечной области	186

Штейнбрехер О.А. О решении систем линейных алгебраических уравнений большой размерности.....	191
Шульгин А.Н. Диспетчирование энергосберегающих параллельных вычислительных процессов в мобильных вычислительных системах	196

Научное издание

**Информационные технологии
и математическое моделирование
(ИТММ-2011)**

Материалы X Всероссийской
научно-практической конференции
с международным участием
25–26 ноября 2011 г.
Часть 2

Редактор *В.Г. Лихачева*
Компьютерная верстка *Т.В. Любина*

Подписано в печать 07.11.2011 г.
Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная №1.
Печать офсетная.
Печ. л. 12,8; усл. печ. л. 11; уч.-изд. л. 10,8.
Тираж 300 экз. Заказ

ООО «Издательство ТГУ», 634029, г. Томск, ул. Никитина, 4.
ООО «Интегральный переплет», 634024, г. Томск,
ул. Высоцкого, 28, стр. 1