



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО
НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ



Российская Академия Наук

НАУЧНЫЙ СОВЕТ РАН ПО ПРОБЛЕМАМ МАШИНОВЕДЕНИЯ И
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ



Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

XVIII Международный Симпозиум
«Динамика виброударных
(сильно нелинейных) систем»
DYVIS-2015

*посвященный 100-летию со дня рождения основателя
Симпозиумов по динамике виброударных систем
д.т.н., проф. А.Е. Кобринского*

Сборник трудов

Москва
2015

ББК 22.2, 22.213, 34.4, 34.41
УДК 531, 534.1, 621.01

XVIII Международный Симпозиум «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем» – DYVIS-2015, посвященный 100-летию со дня рождения д.т.н., проф. А.Е. Кобринского: Сборник трудов (Москва – Бекасово, 17 – 23 мая 2015 г. / Под ред. В.К. Асташева, В.Л. Крупенина, Г.Я. Пановко, К.Б. Саламандра / М.: ИМАШ РАН, 2015. – 332 с.

Сборник содержит рецензированные материалы докладов, представленные на XVIII Международном Симпозиуме «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем» – DYVIS-2015. Наиболее актуальными проблемами по научному направлению Симпозиума являются:

- Разработка моделей и методов расчета виброударных (сильно нелинейных) систем.
- Разработка методов синтеза динамических структур и оптимального проектирование машин виброударного действия.
- Построение результирующих характеристик действия высокочастотной вибрации на сильно нелинейные технические объекты и среды.
- Разработка методов возбуждения и стабилизации резонансных режимов сильно нелинейных систем.
- Разработка методов виброзащиты и виброизоляции технических и биологических объектов при виброударных и сильно нелинейных воздействиях.
- Разработка волновых и ультразвуковых технологических процессов и машин.
- Разработка методов анализа динамики вибрационных машин с нелинейной технологической нагрузкой.
- Разработка методов анализа виброударных процессов в кинематических парах механизмов и роторных системах.

ISBN 978-5-9042-8202-8

© ИМАШ РАН, 2015



ПРЕДИСЛОВИЕ

Симпозиумы по динамике виброударных (сильно нелинейных) систем проводятся уже более пятидесяти лет с периодичностью раз в три года. Пятидесятилетний юбилей Симпозиума мы отметили в 2013 г. Таким образом, наши симпозиумы оказались, по-видимому, одними из самых «долгоживущих» периодических научных мероприятий, проводимых Институтом машиноведения РАН.



Основателем и руководителем первых симпозиумов был Арон Ефимович Кобринский (1915 – 1992), замечательный ученый, который очень хорошо чувствовал новые перспективные научные направления и весьма быстро овладевал ими.

Созданная А.Е. Кобринским лаборатория «Теория управления машинами» проводила теоретические и экспериментальные исследования в области станков с числовым программным управлением; робототехнических систем и многих других разделов современного машиноведения. Арон Ефимович обладал удивительным даром создавать деловую и творческую атмосферу. Среди его сотрудников – семь докторов и более двадцати пяти кандидатов наук. А.Е. Кобринский участвовал в создании первого протеза предплечья с биоэлектрическим управлением, за что в 1967 г. получил Государственную премию СССР. Он с успехом

занимался и литературным творчеством, активно работая в жанрах научно-популярной и научно-фантастической литературы.

Особое место в научной деятельности Арона Ефимовича занимали исследования виброударных систем. Собственно говоря, именно Арон Ефимович и показал, что данная теория оказывается весьма перспективным и многообещающим направлением как прикладной, так теоретической механики. Под его руководством в Институте машиноведения была создана мощная научная школа по виброударным системам, которая успешно продолжает начатое им дело, а его ученики и сотрудники – среди лидеров этой области мировой науки.

Светлой памяти Арона Ефимовича Кобринского мы и посвящаем нынешний Восемнадцатый симпозиум.

Как всегда, среди лидирующих научных школ, представленных на симпозиуме – московская и петербургская, но мы с удовольствием отмечаем присутствие ученых из многих других регионов России и даже зарубежных стран. В силу понятных причин слегка уменьшилось количество поданных работ. Это неприятное обстоятельство, впрочем, наверняка не скажется на качестве обсуждаемых докладов. Достижения представленных здесь

научных школ в теории виброударных и сильно нелинейных систем давно признаны мировой наукой, а их уровень, судя по публикациям в отечественной и зарубежной печати, к нашему удивлению, по некоторым позициям все еще опережает мировой. Это касается, по крайней мере, степени понимания механики процессов.

Подобно предыдущим симпозиумам мы предполагаем «комбинированное» обсуждение теоретических вопросов и практических проблем вибротехники, вибротехнологии и других разделов механики. При этом рассмотрению подлежат как задачи эффективного полезного использования виброударных и нелинейных вибрационных процессов, так и проблем виброзащиты, в частности виброударозащиты.

Таким образом, мы традиционно и весьма условно делим представленные доклады на четыре группы. Первая группа – чисто теоретические проблемы динамики виброударных и сильно нелинейных систем: нелинейные волны, хаотические и другие сложные режимы движения в системах простой и сложной структуры, методы анализа соответствующих уравнений движений и многие другие. Во второй группе – численные, аналитические и экспериментальные методы анализа виброударных и сильно нелинейных механических систем. В третьей – задачи теории виброударных систем при использовании различных гипотез удара. И, наконец, четвертая группа представляет прикладные задачи, связанные с расчетами конкретных динамических объектов, элементы конструкций которых находятся в условиях систематических соударений или подвержены сильно нелинейным воздействиям.

Как обычно, мы представляем ряд докладов, прямо не связанных с виброударными системами, поскольку затронутые в этих работах проблемы, по сути, близки к нашей традиционной тематике. Кроме того, большинство авторов указанных работ, хорошо известны постоянным участникам симпозиума и эти работы, поэтому особенно интересны именно для нас.

Предыдущий XVII симпозиум по динамике виброударных (сильно нелинейных) систем в 2012 г. впервые проводился вместе с международной школой молодых ученых «Нелинейная динамика машин». Проведение школы вместе с симпозиумом мы решили сделать традиционным и в этом году пройдет уже вторая школа молодых ученых, которую поддержал Российский фонд фундаментальных исследований (проект № 15-38-10104).

В.К. Асташев, В.Л. Крупенин, Г.Я. Пановко, К.Б. Саламандра

Москва-Бекасово
май 2015 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Алешин А.К., Глазунов В.А., Рашоян Г.В., Скворцов С.А. Динамика движения пространственного механизма параллельной структуры с управлением по положению и скорости	8
2.	Асташев В.К., Корендяев Г.К. Термомеханическая модель возбуждения автоколебаний при резании. теория и эксперимент	14
3.	Бакланов В.С. Динамика, виброакустика и виброизоляция авиационных двигателей нового поколения	18
4.	Банах Л.Я. Колебания динамически - самоподобных структур	26
5.	Банах Л.Я. Проблемы колебаний и устойчивости роторных систем	34
6.	Бардин Б.С. О безударных прыжках тела, несущего подвижные массы	42
7.	Беличенко М.В. Об устойчивости относительных равновесий тяжёлого твердого тела с горизонтально вибрирующей точкой подвеса	50
8.	Beresnevich V.I., Yevstignejev V.Y., Dobelis J. Damage vibrodiagnostics using distortion of initial structural symmetry of testing object	57
9.	Блехман И.И., Блехман Л.И., Вайсберг Л.А. Вибрация преодолевает гравитацию – нелинейные эффекты, простые модели	64
10.	Брысин А.Н., Синев А.В., Соловьев В.С., Побегайло П.А., Шохин А.Е. Реализация комплексных исследований систем виброзащиты	73
11.	Брысин А.Н., Никифоров А.Н., Татусь Н.А. Собственные колебания вращающейся жидкости со свободной поверхностью, распространяющиеся не вдоль оси ротора с радиальными перегородками	77
12.	Бурд В.Ш., Крупенин В.Л. Субгармонические и комбинационные резонансные режимы движения ударного осциллятора при полигармоническом возмущении	82
13.	Вишенкова Е.А. Исследование влияния быстрых вибраций на устойчивость перманентных вращений твердого тела с центром масс на главной оси	84
14.	Вульфсон И.И. Критерии квазистационарности колебательных систем механизмов с нелинейной функцией положения	92
15.	Глазунов В.А., Хейло С.В. О точности модели алгоритма управления поступательным механизмом параллельной структуры	101
16.	Елисеев А.В. Особенности математического моделирования в задачах вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом неудерживающих связей	107
17.	Ерофеев В.И. Труды братьев Коссера и современная механика обобщенных континуумов	115

18. Ерофеев В.И., Лампси Б.Б. Крутильные колебания упругого тонкостенного стержня при наличии нелинейности и депланации	121
19. Зейтман М.Ф. Особенности неустойчивости гибких гироскопических роторов	128
20. Колесникова С.И. Управление многомерным нелинейным объектом с неопределенностью в описании при выводе на заданное многообразие	134
21. Крупенин В.Л. Прогнозирование режимов движения виброударных систем	140
22. Крупенин В.Л. Автоколебания распределенного ударного элемента	149
23. Landa P.S. Nonlinear random waves in fluid, and the main mechanism of their excitation	159
24. Маркеев А.П. О производящей функции сохраняющего площадь отображения в одной задаче о движении тяжелого шара над цилиндрической поверхностью	179
25. Маркеев А.П., Чуркина Т.Е. Линейная задача об устойчивости вращения эллипсоида вокруг горизонтальной оси при наличии соударений с горизонтальной плоскостью	185
26. Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Скубов Д.Ю., Штукин Л.В. Параметрический резонанс наноконденсатора дифференциального включения	192
27. Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Скубов Д.Ю., Штукин Л.В. Параметрический резонанс двойного наноконденсатора	199
28. Омаров Т.И., Абдирова Р.Д., Ибрагимов Р.Р. Составление обобщенной динамической модели рельсовой транспортной машины	205
29. Пановко Г.Я., Шохин А.Е. К вопросу о резонансной настройке транспортно-технологических вибромашин	213
30. Пановко М.Я. Упругогидродинамические задачи смазки роликов бочкообразной формы	218
31. Пась О. В., Серков Н. А. Влияние нелинейностей типа "зазор" и "трение" в приводах на точность воспроизведения траектории в многокоординатной машине с ЧПУ	226
32. Петрова И.М. Моделирование технического состояния механических систем и оценка вероятности их отказа	235
33. Побегайло П.А. Манипуляционные системы для открытых горных работ: исследование манипулятивности рабочего оборудования	240
34. Розенблюм М.Г., Фирсов Г.И. Методы взаимного анализа случайных колебаний в задачах исследования устойчивости вертикальной позы тела человека	248
35. Рыбак Л.А., Чичварин А.В. Синтез законов управления движением роботизированной платформы	255
36. Саламандра К.Б., Тывес Л.И. К динамическому анализу процесса переключений в коробках передач транспортных средств	263

37. Саттаров Р.Р., Алмаев М.А. К оценке эффективности электромеханических генераторов на основе виброударных колебательных систем	272
38. Статников И.Н., Фирсов Г.И. Статистическое оценивание влияния параметров на динамику двухмассовой виброударной системы с помощью планируемого вычислительного эксперимента	280
39. Тихонов В.А. Чистяков А.Г. Решение нелинейных задач устойчивости при разработке компенсационных патрубков с ТРМЭ	288
40. Холостова О.В. Исследование устойчивости частных режимов движения тяжелого твердого тела с вибрирующей вдоль вертикали точкой подвеса	295
41. Цыганов А.А., Шматов Д.П., Кружаев К.В., Иванов А.В. Экспериментальная установка для исследования динамических характеристик роторов	304
42. Шнеерсон Е.З. О стеснённых ударных взаимодействиях в существенно нелинейных динамических системах	311
43. Шульженко А.А., Модестов М.Б. Математическая модель нестационарных, нелинейных тепловых процессов в системе: человек – тканый электронагреватель – внешняя среда	316
44. Яруллин М.Г., Исянов И.Р. Безразмерная обработка деталей в барабанном галтователе на базе 5R механизма	322
45. Яруллин М.Г., Хабибуллин Ф.Ф. Дезинтегратор с нелинейной динамикой дробления	328

ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С УПРАВЛЕНИЕМ ПО ПОЛОЖЕНИЮ И СКОРОСТИ

Алешин А.К.¹, Глазунов В.А.², Рашоян Г.В.³, Скворцов С.А.⁴

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

¹ aleshin_ak@mail.ru, ² vaglznv@mail.ru, ³ gagik_r@bk.ru, ⁴ 1691skvorcov@mail.ru

Одной из главных задач при создании технологического оборудования на основе механизмов параллельной структуры является исследование динамики их движения. Характер динамических явлений в механизмах параллельной структуры обусловлен конструктивной особенностью механизмов, которая состоит в том, что движение исполнительного звена управляется одновременно несколькими кинематическими цепями, которые замыкаются на выходном звене, оказывая взаимное влияние друг на друга и искажают воздействие двигателей. В результате ухудшается динамическая точность требуемых движений выходного звена [1-2].

Вопрос состоит в том, насколько эффективно можно управлять подобного рода устройствами, имея обратные связи по положению и скорости. Например, в конструкции автотренажера, где моделируется независимое воздействие дорожного полотна на каждое колесо автомобиля (рис.1), возникает проблема взаимного влияния между собой кинематических цепей, задающих независимое воздействие на каждое колесо.



Рис.1

В результате искажается задаваемое тестовое воздействие на подвеску автомобиля.

В данной работе предлагается приём уменьшения указанного взаимного влияния и улучшения управляемости механизмом средствами системы управления, и в частности, изменением коэффициентов обратной связи по положению и скорости [4,5].

Рассмотрим механизм, имеющий кинематическую развязку и выходное звено которого управляется тремя соединительными кинематическими цепями (рис.2).

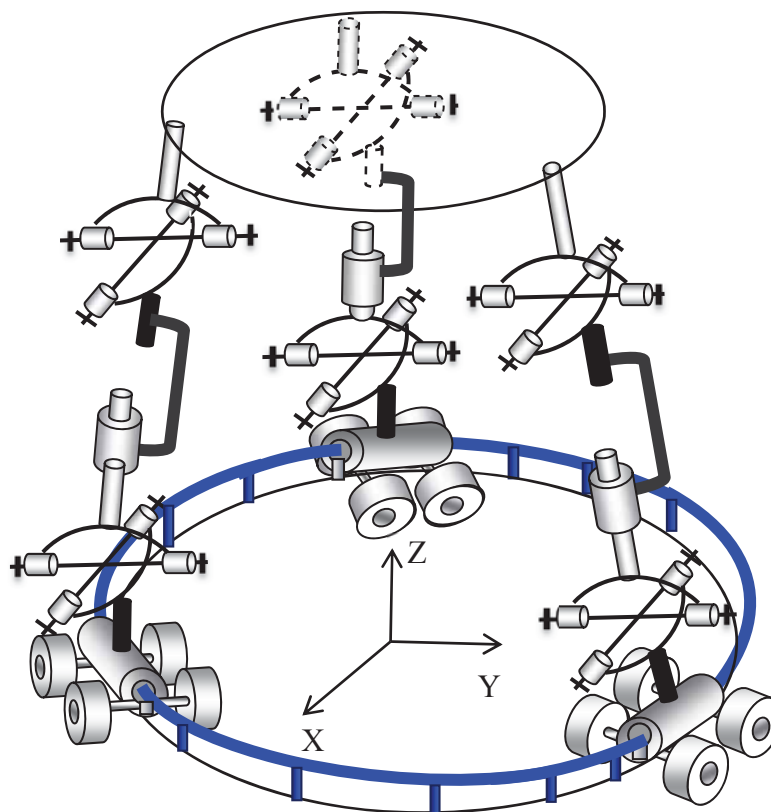


Рис.2

В каждой цепи расположен линейный двигатель и два карданных шарнира. Рассматриваем поступательные движения выходного звена [6]. В этом случае динамический анализ можно свести к системе, имеющей одно массивное тело, переносимое одновременно тремя двигателями поступательного движения.

В качестве приводов используем двигатели постоянного тока. Уравнение для электрической цепи двигателя:

$$U = i_a R + L \frac{di_a}{dt} + C_\omega \omega$$

Здесь U – напряжение на электродвигателе, i_a – ток в электродвигателе, R – сопротивление обмотки двигателя, L – индуктивность обмотки электродвигателя, C_ω – коэффициент электродвижущей силы, направленной против напряжения, подаваемого на обмотку якоря, ω – скорость вращения двигателя. Момент двигателя связан с электрическим током:

$M = K_M i$, где K_M – это коэффициент пропорциональности.

В системе управления предусматривается обратная связь по положению и по скорости. Обратная связь по положению имеет коэффициент K_ϕ , а обратная связь по скорости – K_ω . Выбирая эти коэффициенты, а также коэффициент усиления, можно добиться требуемой точности управления. Влиянием индуктивности обмотки якоря можно пренебречь.

Рассмотрим динамику поступательно-направляющего механизма, использующего обратные связи по положению и скорости. При этом все точки выходного звена движутся одинаково, и можно рассмотреть это звено таким образом, что вся масса сосредоточена в одной точке. Центры двуподвижных шарниров A_1, A_2, A_3 при этом могут рассматриваться как совпадающие, а центры шарниров B_1, B_2, B_3 при этом сдвинутся. В частности, в реальном тренажере диаметр окружности, на которой расположены точки B_1, B_2, B_3 , может составлять 6 м. В рассматриваемом случае этот диаметр может уменьшиться до 4 м.

Уравнение, описывающее движение механизма вдоль оси X , имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dV_x}{dt} = & [(\sqrt{(x_d - x_{B1})^2 + (y_d - y_{B1})^2 + (z_d - z_{B1})^2} - \\
& \sqrt{(x - x_{B1})^2 + (y - y_{B1})^2 + (z - z_{B1})^2}) \times \\
& \times \frac{(x - x_{B1})}{\sqrt{(x - x_{B1})^2 + (y - y_{B1})^2 + (z - z_{B1})^2}}] K_{\phi 1} / m + \\
& + [(\sqrt{(x_d - x_{B2})^2 + (y_d - y_{B2})^2 + (z_d - z_{B2})^2} - \\
& \sqrt{(x - x_{B2})^2 + (y - y_{B2})^2 + (z - z_{B2})^2}) \times \\
& \times \frac{(x - x_{B2})}{\sqrt{(x - x_{B2})^2 + (y - y_{B2})^2 + (z - z_{B2})^2}}] K_{\phi 2} / m + \\
& + [(\sqrt{(x_d - x_{B3})^2 + (y_d - y_{B3})^2 + (z_d - z_{B3})^2} - \\
& \sqrt{(x - x_{B3})^2 + (y - y_{B3})^2 + (z - z_{B3})^2}) \times \\
& \times \frac{(x - x_{B3})}{\sqrt{(x - x_{B3})^2 + (y - y_{B3})^2 + (z - z_{B3})^2}}] K_{\phi 3} / m + \\
& + \frac{[(\frac{dx_d}{dt} - \frac{dx}{dt})(x - x_{B1}) + (\frac{dy_d}{dt} - \frac{dy}{dt})(y - y_{B1}) + (\frac{dz_d}{dt} - \frac{dz}{dt})(z - z_{B1})]}{(x - x_{B2})^2 + (y - y_{B2})^2 + (z - z_{B2})^2} \times \\
& \times (x - x_{B1}) K_{\omega 1} / m + \\
& + \frac{[(\frac{dx_d}{dt} - \frac{dx}{dt})(x - x_{B1}) + (\frac{dy_d}{dt} - \frac{dy}{dt})(y - y_{B1}) + (\frac{dz_d}{dt} - \frac{dz}{dt})(z - z_{B1})]}{(x - x_{B2})^2 + (y - y_{B2})^2 + (z - z_{B2})^2} \times \\
& \times (x - x_{B2}) K_{\omega 2} / m + \\
& + \frac{[(\frac{dx_d}{dt} - \frac{dx}{dt})(x - x_{B1}) + (\frac{dy_d}{dt} - \frac{dy}{dt})(y - y_{B1}) + (\frac{dz_d}{dt} - \frac{dz}{dt})(z - z_{B1})]}{(x - x_{B2})^2 + (y - y_{B2})^2 + (z - z_{B2})^2} \times \\
& \times (x - x_{B3}) K_{\omega 3} / m
\end{aligned}$$

Подобный вид имеют уравнения по координатам Y и Z.

Здесь m – масса выходного звена, g – ускорение свободного падения, $K_{\phi 1}$, $K_{\phi 2}$, $K_{\phi 3}$ – коэффициенты обратных связей по положению, учитывающие общий коэффициент усиления, $K_{\omega 1}$, $K_{\omega 2}$, $K_{\omega 3}$ – коэффициенты, учитывающие противо – электродвижущую

силу двигателей, сопротивление обмотки якоря, коэффициент обратной связи по скорости, а также общий коэффициент усиления, x, y, z – координаты центра выходного звена, x_d, y_d, z_d – требуемые координаты выходного звена, $x_{B1}, y_{B1}, z_{B1}, x_{B2}, y_{B2}, z_{B2}, x_{B3}, y_{B3}, z_{B3}$ – координаты неподвижных точек B_1, B_2, B_3 .

В качестве тестового движения будем рассматривать прямолинейное колебательное движение по одной координате, например, по x . При этом можно будет определить точность движения по траектории с учетом динамики при различных коэффициентах усиления.

Примем массу тренажера $m = 1000\text{кг}$, $K_{\phi 1}, K_{\phi 2}, K_{\phi 3}$ – коэффициенты обратных связей по положению обобщенных координат $1000, K_{\omega 1}, K_{\omega 2}, K_{\omega 3}$ – коэффициенты, учитывающие противо – электродвижущую силу двигателей, сопротивление обмотки якоря, коэффициент обратной связи по скорости, а также общий коэффициент усиления, равны 10, координаты центра выходного звена вначале движения равны 0, также как и абсолютные скорости, $x_{B1}, y_{B1}, x_{B2}, y_{B2}$ – координаты неподвижных точек B_1, B_2 равны соответственно $(0, 2, -1), (-\sqrt{3}, -1, -1)$ и $(\sqrt{3}, -1, -1)$. Зададим x_d, y_d, z_d – координаты центра выходного звена в требуемом движении.

$x_d = A [1 - \cos(\omega t)], y_d = 0, z_d = 0$.

Остальные координаты должны быть нулевыми. Конечное время расчета 15с, траектория расположена вдоль оси x . Амплитуда колебаний равна 0,2 м, требуемая угловая частота равна 2π рад/сек.

В результате решения получаем следующие зависимости (рис.3).

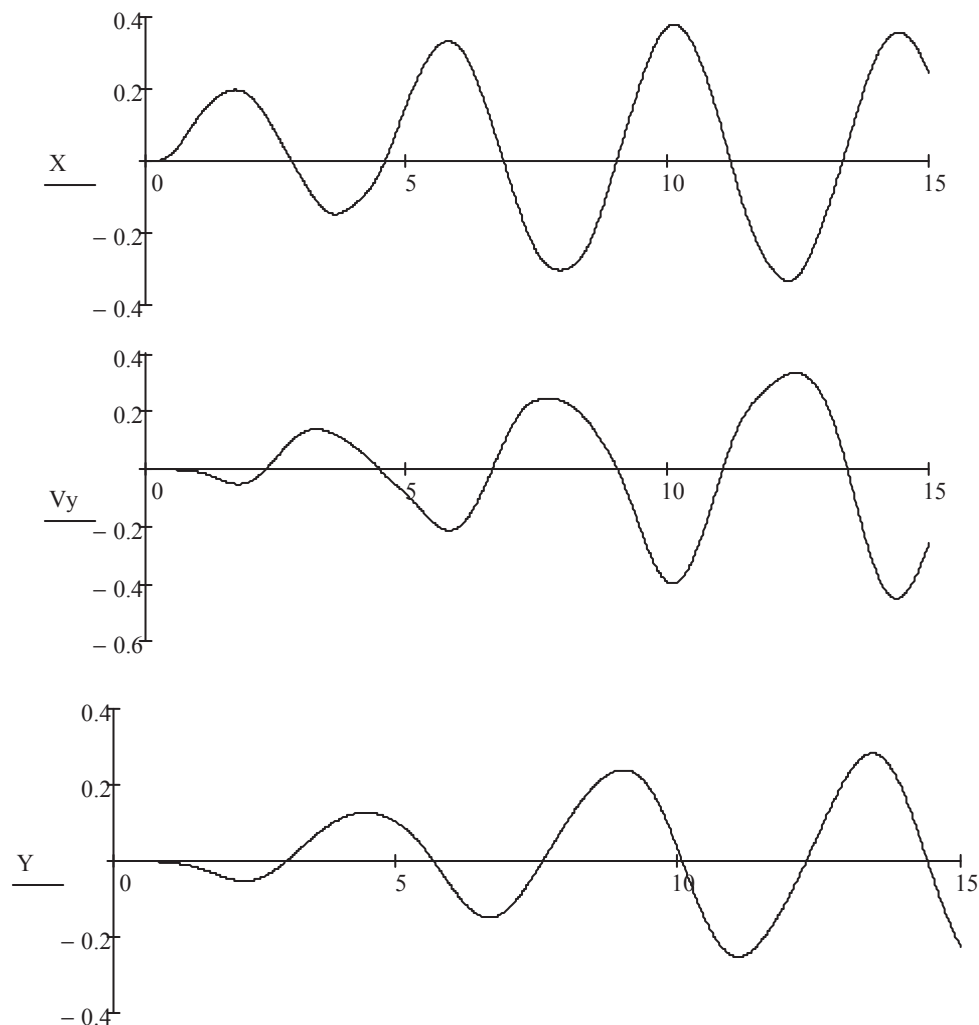


Рис. 3

Колебания должны происходить по одной координате x , однако возникают колебания и в других координатах – в силу наличия силы веса и взаимовлияния между приводами. Очевидно, что такие коэффициенты совершенно не приемлемы. Колебания происходят с другой частотой, нежели заданная, по координате z наблюдаются фактически свободные колебания, причем физически они не реализуемы, так как средняя точка расположена ниже основания.

Подбирая коэффициенты обратных связей соответствующим образом удаётся существенным образом повысить управляемость и динамическую точность движения механизма. Так, назначим коэффициенты обратной связи по скорости $K_{\varphi 1}$, $K_{\varphi 2}$, $K_{\varphi 3}$ – равными 1000000, а $K_{\omega 1}$, $K_{\omega 2}$, $K_{\omega 3}$ – примем равными 10000. Зададим x_d , y_d , z_d – координаты центра выходного звена в требуемом движении – в соответствии с предыдущими случаями, начальное значение координаты x равно 0,2м. Конечное время расчета 5с.

В результате решения получаем следующие зависимости (рис. 4.):

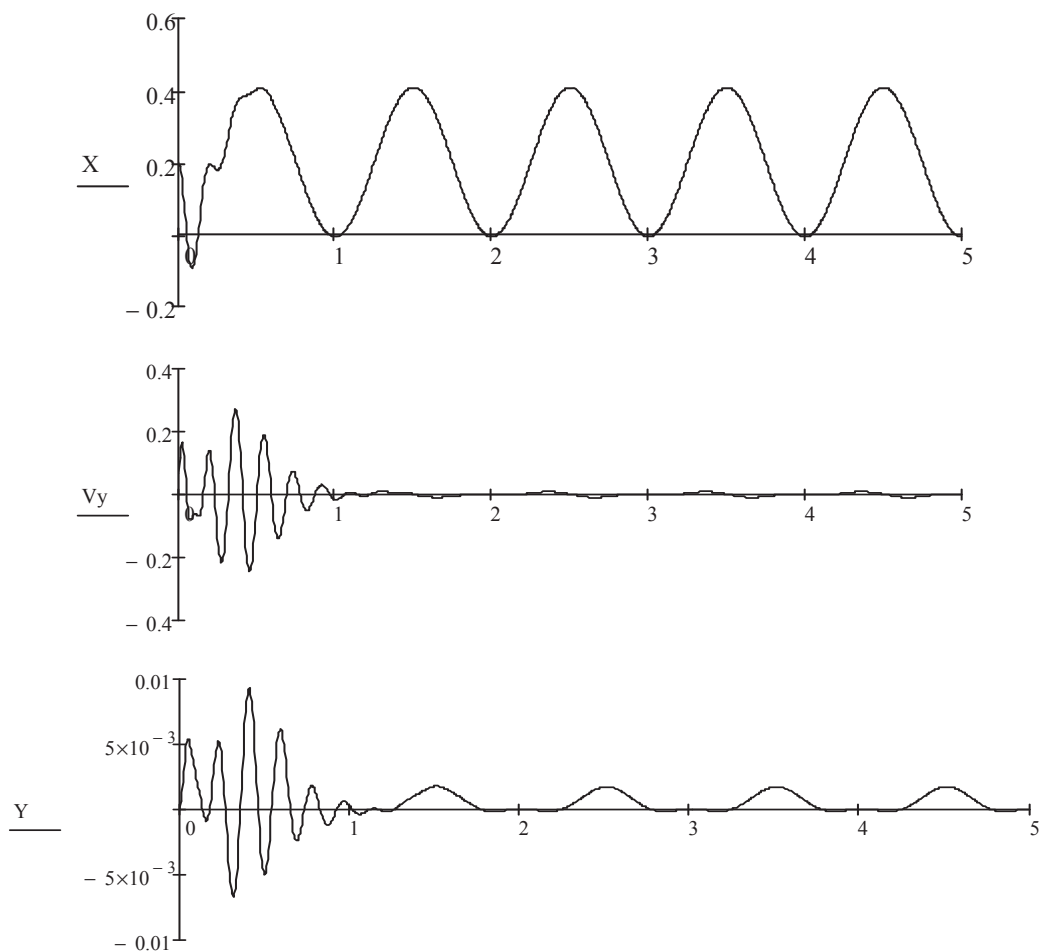


Рис. 4.

Из графиков можно видеть, что принятые коэффициенты обратных связей можно считать приемлемыми, амплитуда колебаний по координатам y и z затухает в течение одного периода (1 сек.), частота равна требуемой.

Для лучшего понимания происходящих процессов рассмотрим геометрические и фазовые траектории (рис. 5).

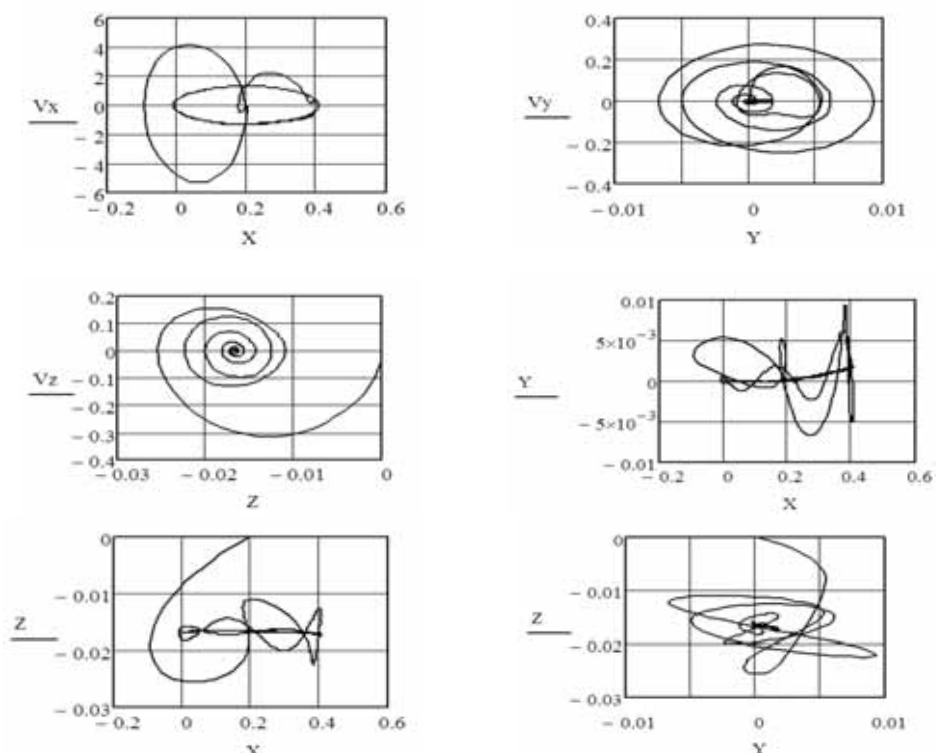


Рис.5.

Из приведенного исследования можно сделать вывод, что требуемой динамической точности можно добиться, меняя коэффициенты обратных связей. Если коэффициенты обратных связей имеют недостаточные значения, тогда система практически не реагирует на требования к законам управления, а ведет себя как колебательная система, совершающая свободные колебания. При этом, несмотря на то, что начальные условия, могут соответствовать лишь одной координате, колебания происходят по всем координатам – в силу наличия взаимного влияния между степенями свободы.

Литература

1. Sugimoto K. Kinematic and Dynamic Analysis of Parallel Manipulators by Means of Motor Algebra / K. Sugimoto // Trans. ASME: Jour. of Mechanisms, Transmission and Automation in Design. – 1987. – Vol. 109, N 1. – P. 3–7.
2. Merlet J. P. Parallel robots / J.P. Merlet –Kluwer Academic Publishers, 2000. –372p.
3. Laryushkin P. New 3-DOF Translational Parallel Manipulator: Kinematics, Dynamics and Workspace Analysis /P. Laryushkin, V. Glazunov // Romansy 19 – Robot Design, Dynamics and Control. Proceedings of the 19th CISM-IFTOMM Symposium. Paris, France. June, 12-15. –2012. – P. 11–18.
4. Stewart D. A platform with 6 degrees of freedom / D. Stewart // Proc. of the Institution of mechanical engineers. – 1965. – Vol. 180. – P.371–386.
5. Глазунов В.А., Хейло С.В. Решение задачи управления сферическим механизмом параллельной структуры. // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2014. № 2. С. 27-33.
6. Бюшгенс А.Г., Глазунов В.А., Зайчик Л.Е., Скворцов С.А. Структурный анализ механизмов параллельной структуры с круговой направляющей и шестью степенями свободы. // Справочник. Инженерный журнал. 2014. № 2. С. 13-19.

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЗБУЖДЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПРИ РЕЗАНИИ. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Асташев В.К., Корендясев Г.К.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

korenduba@gmail.com

Аннотация. В работе предложена гипотеза о термомеханической природе автоколебаний при обработке металлов резанием, позволяющая обобщить основные известные модели этого явления. На основе предложенной гипотезы разработаны аналитическая и численная модели возбуждения автоколебаний. Адекватность полученных результатов подтверждается результатами натурных экспериментов.

Повышение эксплуатационных свойств металлорежущих станков и качества обработки заготовок лезвийным инструментом немислимо без изучения динамических процессов, происходящих при металлообработке.

Существует множество теорий автоколебаний при обработке металлов резанием, однако, на сегодняшний день, нет единой точки зрения на природу этого явления. Сложность физических процессов, сопровождающих резание металлов, позволяет предположить, что возникновение и поддержание данных автоколебаний определяется не одним, а несколькими физическими явлениями, которые могут взаимодействовать между собой. В данной работе выдвинута гипотеза о термомеханической природе данных автоколебаний. Тепловые и механические процессы, протекающие при резании, неразрывно связаны друг с другом. Механические процессы, происходящие в зоне резания, приводят к интенсивному тепловыделению, что в свою очередь вызывает значительный рост температуры обрабатываемого изделия и инструмента. При колебаниях температуры, в зоне резания происходят структурные превращения, и как следствие, изменение механических свойств материала. Характер зависимости между механическими и тепловыми составляющими процесса резания позволяет предположить возможность появления в системе «резец-заготовка» термомеханических автоколебаний [1].

Для большинства металлов, обрабатываемых резанием, характерна падающая зависимость механических характеристик от температуры (рис.1). Сила резания непосредственно зависит от предела прочности обрабатываемого материала и в первом приближении оказывается пропорциональной ему [2]. Следовательно, зависимость «сила резания – температура» также имеет отрицательный угол наклона, что определяет потенциальную неустойчивость системы, и, как следствие, возможность возникновения в ней незатухающих автоколебаний.

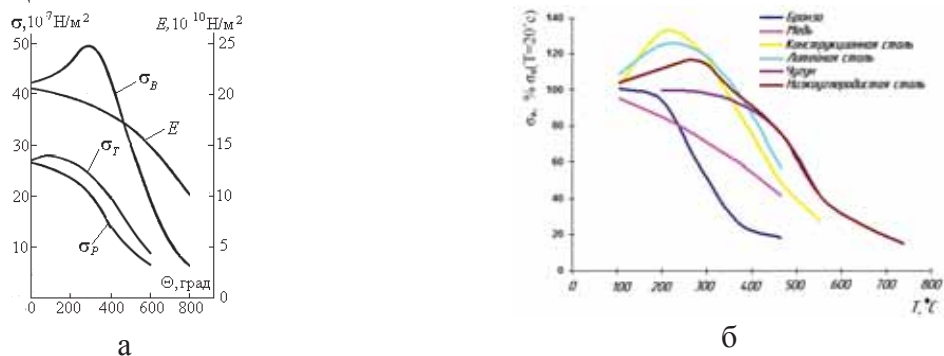


Рис.1. Зависимости механических характеристик металлов, обрабатываемых резанием от температуры: а – стали; б – предела прочности различных металлов.

На основании предложенной гипотезы была сформирована математическая модель процесса, имеющая вид системы дифференциальных уравнений, одно из которых является уравнением механических колебаний, а второе - уравнением теплового баланса.

$$m\ddot{u} + b\dot{u} + cu = F(\Theta); \quad (1)$$

$$CM\dot{\Theta} + H(\Theta - \Theta_0) = F(\Theta)(v - \dot{u}), \quad (2)$$

где m – колеблющаяся масса; b – коэффициент демпфирования; c – жесткость системы; $F=F(\theta)$ – известная монотонно убывающая функция зависимости силы резания от температуры θ в зоне резания; Θ_0 – температура окружающей среды; M – нагреваемая масса; C – удельная теплоемкость; H – коэффициент теплоотдачи; v – постоянная составляющая относительной скорости.

Исследование устойчивости частного решения данной системы уравнений, соответствующего установившемуся состоянию, показало возможность возбуждения незатухающих автоколебаний.

Необходимо отметить, что данная модель построена при определенных предположениях. Так предполагается, что нагрев при резании происходит равномерно в некотором объеме, обладающем определенной массой, а передача тепла в среду происходит через границу резкого перепада температур. Из исследований температурных процессов, сопровождающих резание металлов, известно, что зона наивысших температур действительно располагается в достаточно узкой окрестности контакта резца и заготовки, а изменение температур при отводе тепла в среду происходит с достаточно высоким градиентом [3]. Аналитическое решение уточненной модели этого процесса едва ли возможно. Поэтому дальнейшее изучение термомеханических автоколебаний производилось с помощью численных методов.

На 2 этапе была сформирована конечноэлементная модель процесса, позволяющая проверить справедливость предположения о термомеханической природе автоколебаний при резании, адекватность математической модели этого процесса, получить и исследовать режимы установившихся автоколебаний, провести анализ влияния свойств обрабатываемого материала, параметров технологической системы и режимов резания на характер и уровень вибрации при обработке металлов резанием.

Результаты моделирования подтвердили возможность возбуждения термомеханических автоколебаний. При определенных соотношениях механических и тепловых параметров обрабатываемого материала происходит самовозбуждение автоколебаний и их переход к установившимся периодическим режимам. На рис. 2а показан график изменения температуры на площадке контакта инструмента с деталью в процессе установления автоколебаний при врезании инструмента в материал. Видно, что в начале резания процесс сопровождается быстрым разогревом материала, и при температуре $\Theta=200^\circ\text{C}$ происходит самовозбуждение автоколебаний, а затем и дальнейший переход к установившемуся режиму автоколебаний.

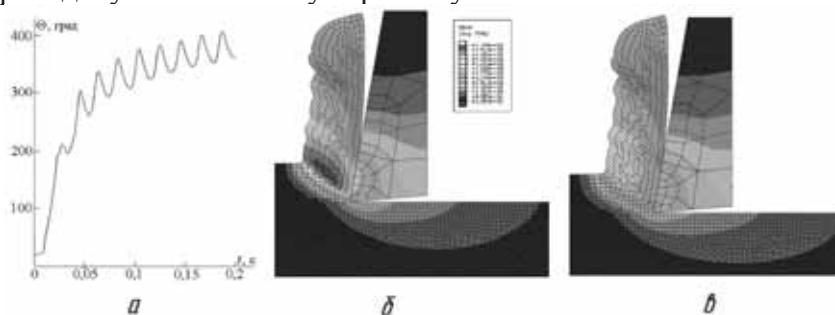


Рис.2. Распределение температур в зоне резания в противоположных фазах колебания.

Анализ зависимости контактной температуры от времени показывает, что изменение температуры на контактной площадке за один период установившихся колебаний составляет $50^\circ - 60^\circ\text{C}$, а в зоне сдвига до 100°C , что при средней температуре

в зоне резания равной примерно 500°C обеспечивает изменение предела текучести в области сдвига на 10-15 мПа. Эти данные дают представление о том, насколько мощным источником возбуждения автоколебаний является разупрочнение материала заготовки при повышении температуры в зоне резания.

Следует отметить, что столь значительные колебания температуры происходят в достаточно малом объеме. На рис. 2 приведены картины распределения температур в зоне резания в двух фазах колебаний резца в установившемся режиме в моменты достижения температурой максимального (рис. 2,б) и минимального (рис. 2,в) значений. На рис. 2,б отчетливо видна локальная область высокой температуры в первичной зоне сдвига при формировании стружки. Именно предположение о подобной локализации и наличии границы резкого перепада температур этой области с окружающей средой являлось одним из основных допущений, принятых при построении математической модели (1,2).

В ходе моделирования были получены кривые (рис.3), отражающие закон изменения основных параметров автоколебательного процесса от времени: 1 - смещение инструмента, 2 - относительная скорость резца и пластины, 3 - сила резания, 4 - средняя температура в зоне резания. На рисунке данные кривые для наглядности показаны в нормированном виде.

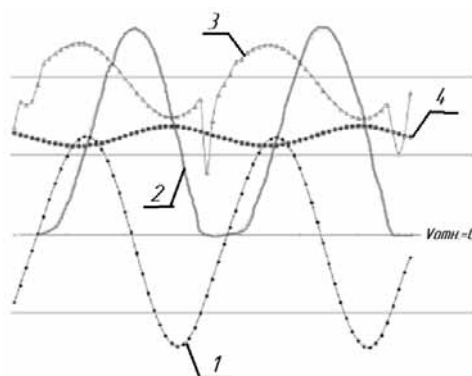


Рис.3. График установившихся автоколебаний.

Колебания резца происходят с частотой собственных колебаний упругой системы по закону, близкому к гармоническому (кривая 1). Однако относительная скорость резца (кривая 2) имеет участок, где эта скорость равна нулю, т.е. резец неподвижен относительно заготовки и его скорость в абсолютном движении равна скорости изделия. Во время совместного движения энергия от привода заготовки запасается упругой системой резца, а затем, когда сила пружины оказывается достаточной для преодоления сопротивления резания, начинается встречное движение резца. Из сопоставления графика относительной скорости с графиком изменения температуры (кривая 4) видно, что при попутном движении и относительном остояне температура в зоне резания уменьшается, при встречном движении возрастает. Именно такое изменение температур и создает условия возникновения и поддержания автоколебаний.

Найдены границы устойчивости, проведено исследование влияния автоколебаний на форму стружки, изучено влияние термомеханических свойств обрабатываемого материала на характер и интенсивность вибрации. Сформированные модели могут служить для нахождения режимов резания, обеспечивающих минимальный уровень вибрации, а также при проектировании металлорежущего инструмента и оснастки. Понимание физического механизма возбуждения автоколебаний как взаимосвязанного термомеханического процесса позволяет прояснить физический смысл явлений, лежащих в основе наиболее распространенных моделей автоколебаний при резании [4,5,6].

Характер полученных результатов не противоречит результатам натурных экспериментов, проведенных другими авторами, что косвенно подтверждает

адекватность полученных моделей. В настоящее время проводится экспериментальная работа по проверке адекватности термомеханической модели возбуждения автоколебаний при резании, заключающаяся в комплексном исследовании полей виброперемещений, температуры и деформаций, возникающих в процессе автоколебаний.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-08-01235А

Литература.

1. Асташев В.К., Корендясев Г.К. /// Термомеханическая модель возникновения автоколебаний при резании. М. Проблемы машиностроения и надежности машин №3, 2012.
2. Грановский Г.И., Грановский В.Г. /// Резание металлов. М.: Высшая школа. 1985. 304 с.
3. Розенберг А.М., Розенберг О.А. /// Механика пластического деформирования в процессах резания и деформирующего протягивания. Киев: Наук. думка, 1990. 320с.
4. Каширин А.И. /// Исследование вибраций при резании металлов. М.-Л.: АН СССР, 1944, 282 с.
5. Соколовский А.П. /// Вибрации при работе на металлорежущих станках. Сборник «Исследование колебаний металлорежущих станков при резании металлов». М. Машгиз, 1958.
6. Эльясберг М.Е. /// Автоколебания металлорежущих станков: Теория и практика. СПб.: ОКБ станкостроения. 1993. 180 с.

ДИНАМИКА, ВИБРОАКУСТИКА И ВИБРОИЗОЛЯЦИЯ АВИАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ НОВОГО ПОКОЛЕНИЯ

Бакланов В.С.

ОАО «Туполев», Москва, Россия

baklanov@tupolev.ru

Аннотация. Вибрационный спектр двигателей сверхбольшой степени двухконтурности, существенно расширяется со сдвигом в низкочастотную часть спектра, что и будет определять низкочастотную часть спектра шума и вибраций в гермокабине. Выбор силовой установки для самолётов нового поколения, кроме решения проблем внешнего шума, требует разработки высокоэффективной системы виброзащиты экипажа и пассажиров для обеспечения условий работы в кабине и поддержания комфортных условий в салонах самолёта. Основой системы виброзащиты должно стать низкочастотное виброизолирующее крепление двигателей, разработанное с учетом реальных динамических характеристик планера и корпусов двигателей самолетов нового поколения.

Стратегическое развитие самолетов нового поколения идет в направлении дальнейшего уменьшения шума на местности, снижения вредных выбросов и повышения топливной эффективности, где определяющая роль принадлежит двигателям.

За прошедшие годы четко обозначилась эволюция двигателей в сторону увеличения степени двухконтурности от двигателей большой степени двухконтурности (4,5...6,0) к двигателям сверхбольшой степени (8...12), [1].

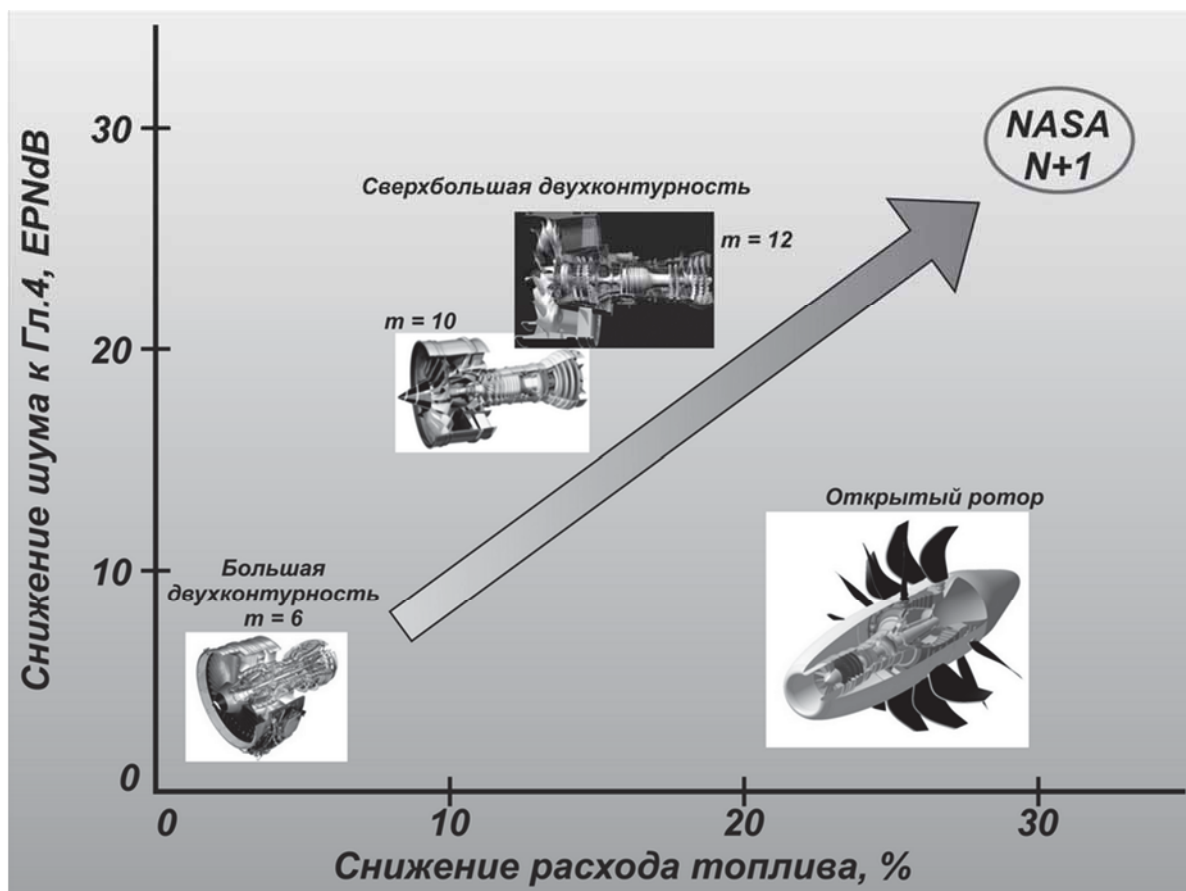


Рис. 1. Эволюция характеристик двигателей.

Применение двигателей повышенной степени двухконтурности обеспечит снижение шума на 10 - 15 EPNdB (см. вертикальную ось графика на рис.1), существенное снижение расхода топлива на 12 – 16% (см. горизонтальную ось графика на рис.1).

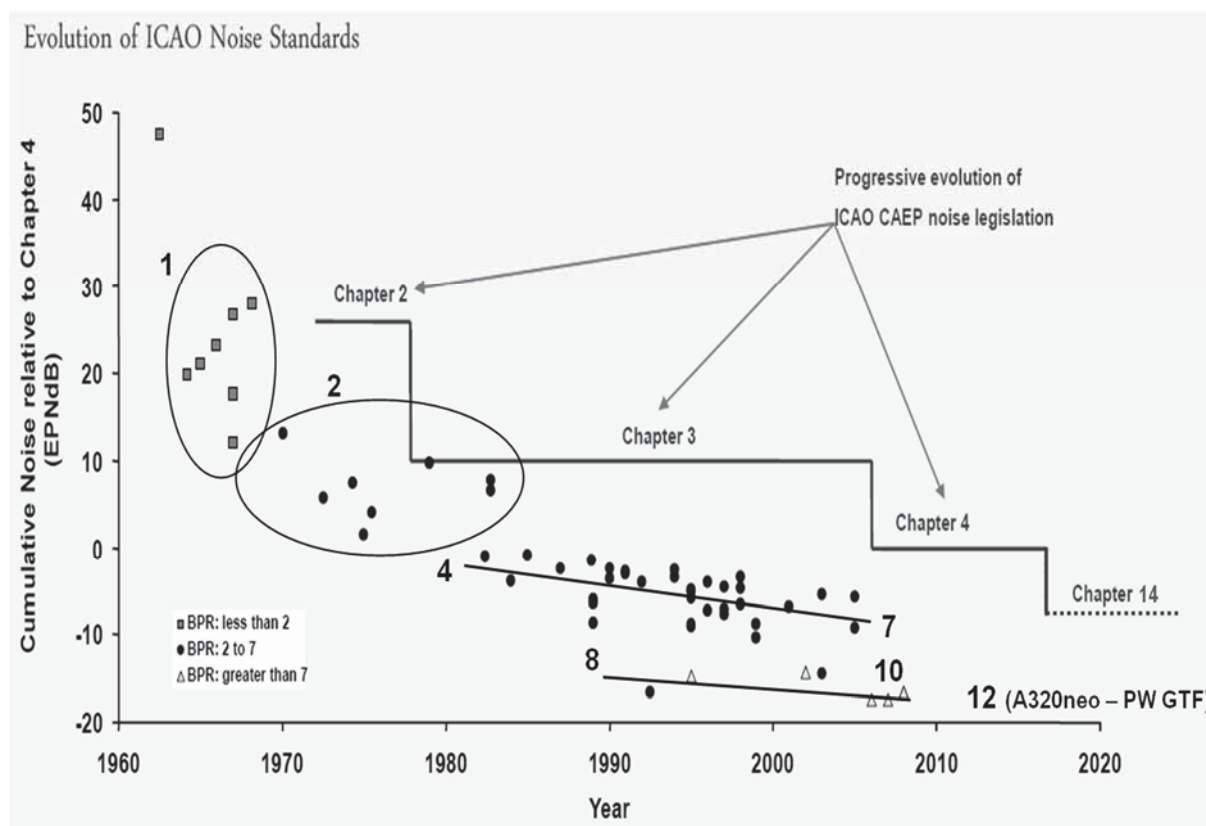


Рис. 2. Эволюция норм шума на местности.

Самолеты, оснащенные такими двигателями, имеющими степень двухконтурности 8 – 12, могут успешно выполнить будущие шумовые стандарты 2017 года (Chapter 14), (см. нижнюю линию графика на рис.2).

Повышение степени двухконтурности двигателей успешно решает все поставленные задачи, но при этом происходит существенное изменение виброакустических характеристик силовых установок.

Значительный рост степени двухконтурности двигателей ведет к увеличению диаметра вентилятора и соответственно диаметра корпуса двигателя. Это приводит как к изменению динамических характеристик конструкции двигателя, так и образованию ударных волн при сверхзвуковой скорости концов лопаток.

Одна из необходимых мер борьбы с ударными волнами – снижение частоты вращения вала вентилятора, в результате чего вибрационный спектр двигателей существенно расширяется со сдвигом в низкочастотную часть спектра вследствие пониженной **частоты вращения ротора вентилятора** (верхний график на рис.3). Некоторые гармоники газовоздушного тракта (например, **вращающегося вихря**, нижний график на рис.3), связанные определенным соотношением с частотой вращения вала вентилятора, уже оказываются в области инфразвука [2].

Этот спектр и будет определять характер вибрационного процесса на корпусе двигателя. Уровень низкочастотных составляющих спектра в большей степени определяется для двигателей сверхбольшой двухконтурности условиями на входе в вентилятор (возможностью генерирования аэродинамического дисбаланса).

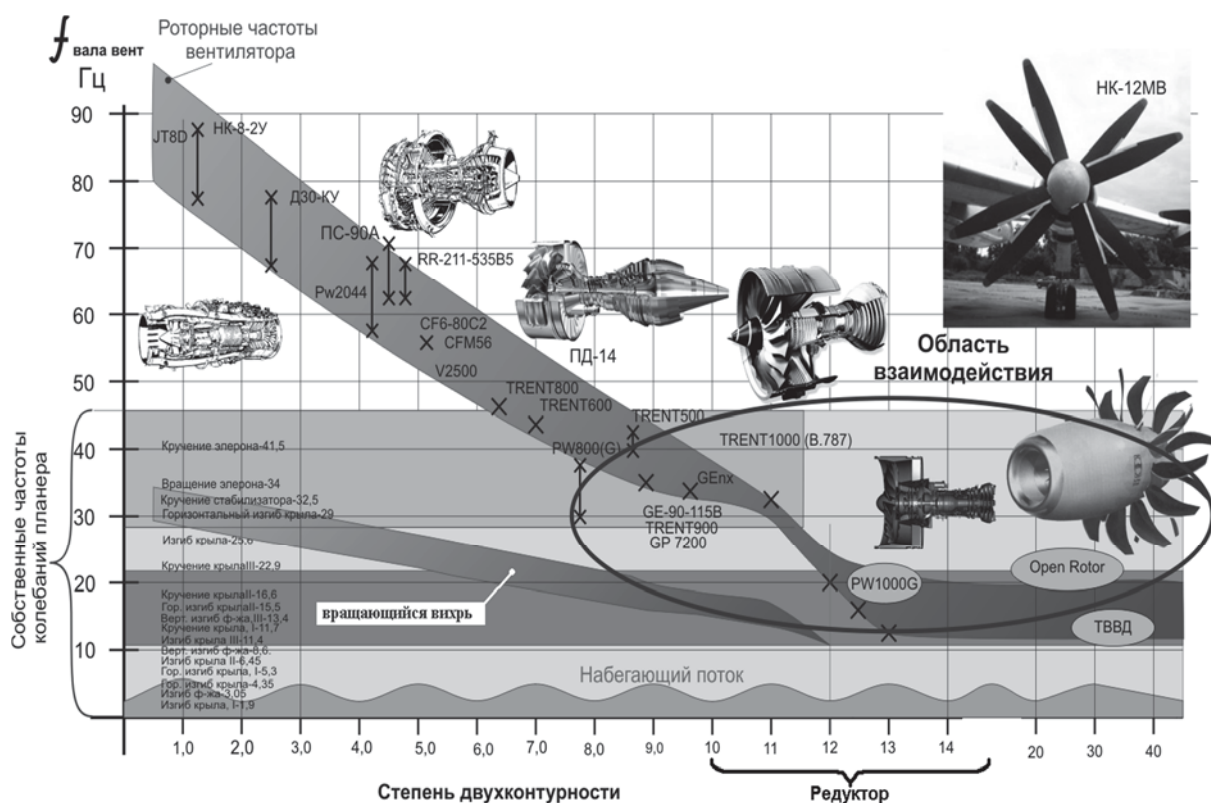


Рис.3. Частоты (вращения вала вентилятора и вращающегося вихря) двигателя и собственные частоты планера самолета в процессе эволюции двигателей.

Эти составляющие будут определять спектр динамического воздействия СУ, передаваемый через опорные связи (узлы крепления двигателя) на конструкцию планера и переизлучаемого в кабину в виде структурного шума.

Для планера современного самолета характерно наличие десятков собственных форм колебаний в низкочастотной части спектра (несколько форм изгибных и крутильных форм колебаний фюзеляжа, крыла, стабилизатора и других элементов конструкции, нижняя часть графика на рис.3).

Взаимодействие некоторых из этих форм колебаний с возмущающим воздействием силовой установки, передаваемым через узлы крепления двигателей, может привести к генерированию в гермокабине высокого уровня низкочастотных составляющих шума, включая инфразвук [3].

Низкочастотные акустические колебания инфразвукового диапазона по характеру своего действия сходны с воздействием вибрации, т.к. оказывают непосредственное воздействие на систему черепно-мозговых нервов, минуя слуховую систему [4].

Для обеспечения условий работы экипажа и безопасности полета, а также комфортных условий пассажирам, при выборе силовой установки для самолётов нового поколения, наряду с решением проблем снижения шума на местности, необходимо включать разработку высокоэффективной системы виброзащиты экипажа и пассажиров.

При выборе виброзащиты гермокабины самолета на первое место выходят средства снижения виброактивности двигателей и передачи вибраций по конструкции, где наиболее эффективным представляется встраивание блоков виброизоляции в узлы крепления двигателей.

Но какие бы средства виброзащиты (активные или пассивные) не применялись, для обоснованного выбора параметров блоков виброизоляции, необходима расчетная модель, учитывающая реальные динамические характеристики как двигателя, так и планера в местах опорных связей.

Увеличение степени двухконтурности существенно изменяет динамические характеристики корпусов двигателей. Применение современных технологий в

изготовлении планеров (многослойные конструкции, углепластики, крупногабаритные панели электрохимического травления) также влияет на их динамические характеристики [5].

В ОКБ А.Н.Туполева разработка СУ каждого нового поколения самолетов сопровождалась комплексными исследованиями по решению виброакустических проблем. Так, были определены динамические характеристики (такие как динамическая жесткость) корпусов ряда двухконтурных турбовентиляторных двигателей (НК-8-2У, НК-144, Д30-КУ, ПС-90А), существенно отличающихся степенью двухконтурности (от 0,5...1,1 до 2,5...5,0), а также планеров ряда магистральных самолетов ТУ-154, ТУ-154М, ТУ-204 [6].

Обобщение проведенных исследований показало, что в широком диапазоне частот вращения роторов двигателей динамическое поведение корпуса двигателя отвечает модели упруго-инерционной системы или упруго-диссипативного элемента с существенным отличием от идеализированной модели авиационного ГТД как твердого тела (рис.4).

При увеличении степени двухконтурности до 8 - 12 следует ожидать, что верхняя граница динамического поведения двигателя как твердого тела не будет превышать 10 Гц.

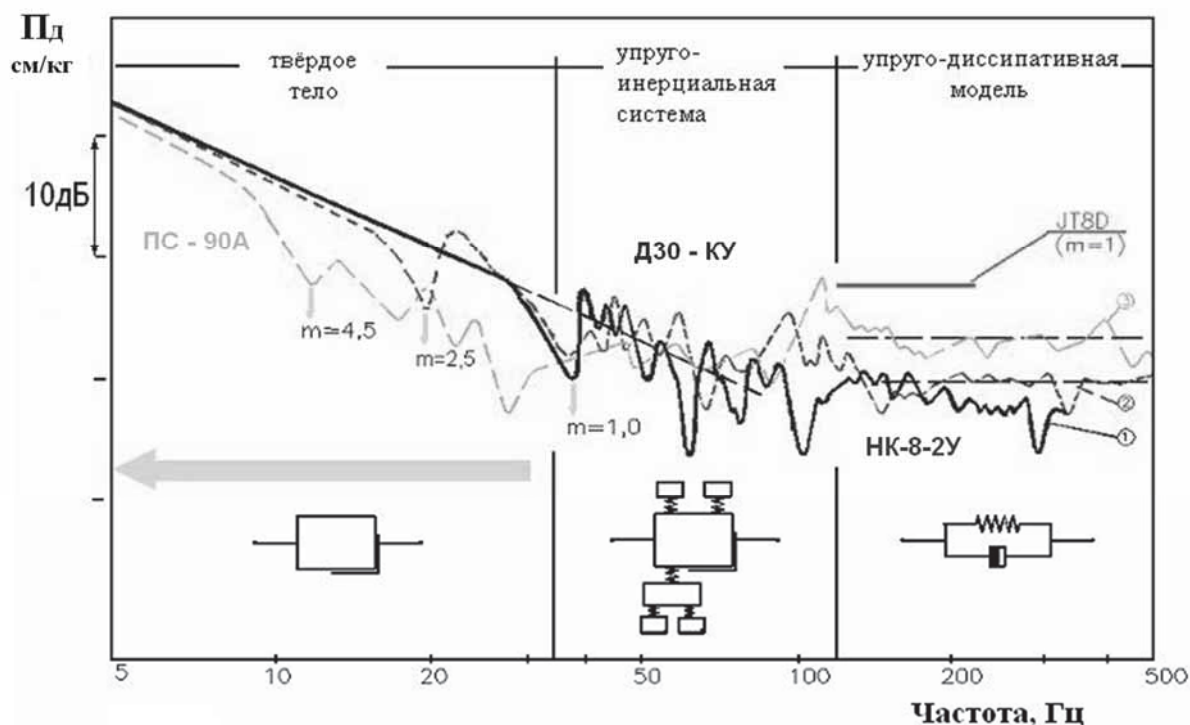


Рис.4. Динамическая податливость корпуса двигателя для передней пояса крепления (для двигателей разной степени двухконтурности – m)

Динамическое поведение планера (в местах установки кронштейнов крепления двигателей) в основном зависит от частотного диапазона. Принятое во многих расчетных моделях упругое поведение планера, характерно для довольно узкого диапазона частот (30...100Гц), не охватывающего диапазона роторных частот многовального двигателя.

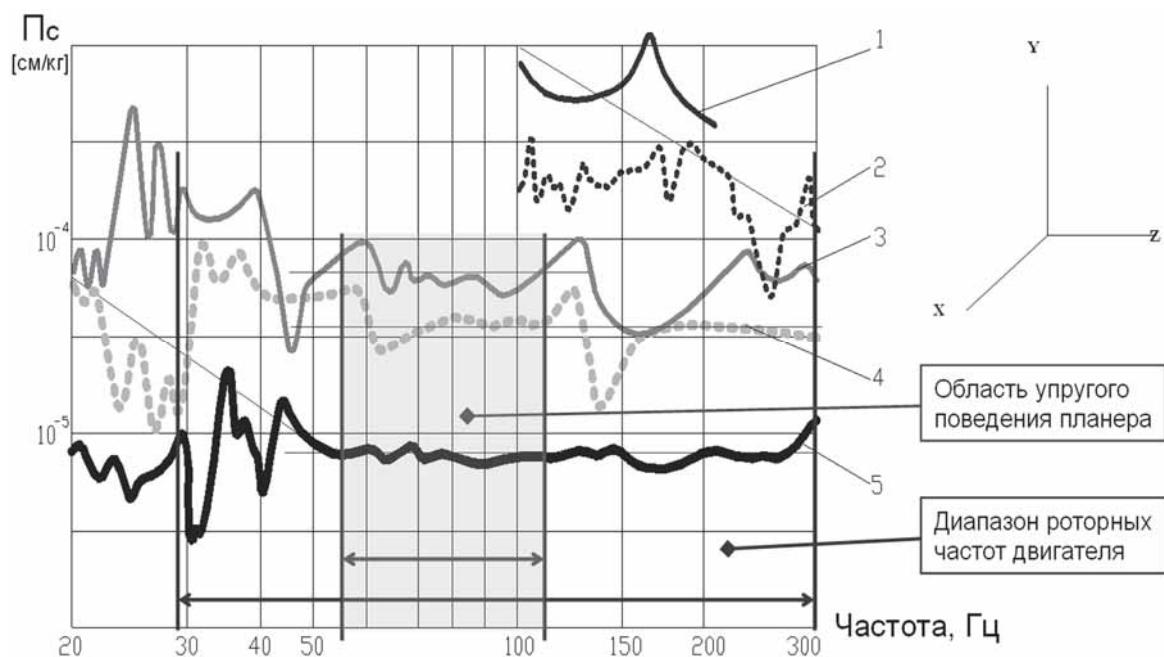


Рис. 5. Динамические податливости планера в местах крепления двигателя:
 1- кронштейн DC-9; 2- кронштейн Ту-154М;
 3- податливость планера в Z-направлении; 4- податливость планера в Y-направлении; 5- податливость планера в X-направлении.

На основе полученных динамических характеристик сделаны расчеты ожидаемого шума от вибрационного воздействия двигателя. Сравнение ожидаемого шума и экспериментальных данных показывает не только хорошую сходимость уровня роторной гармоники вентилятора (f_R) на разных режимах работы двигателя (графики 1,4), но и указывает на возможность генерирования низкочастотных составляющих высокого уровня (график 2) при эксплуатационном уровне вибрации двигателя (рис.6), [7].

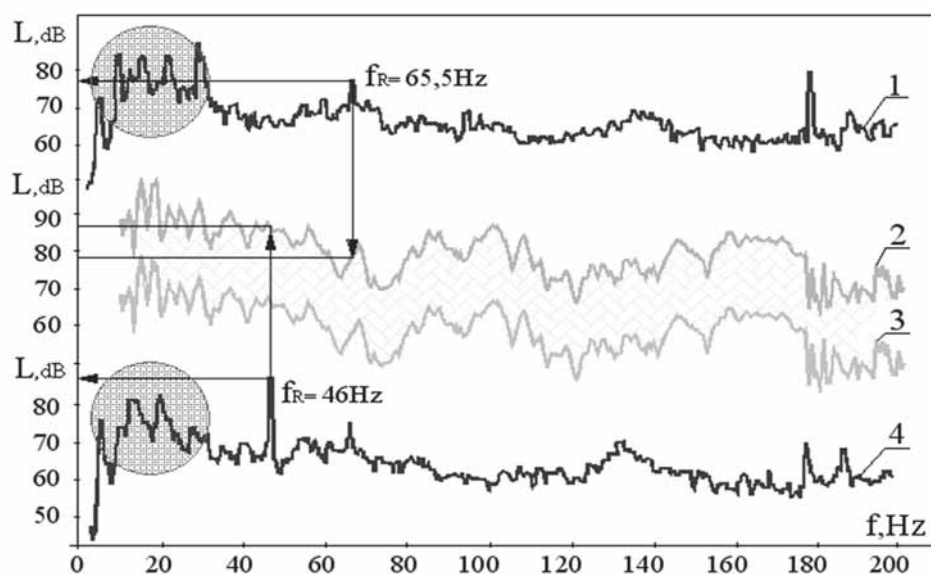


Рис. 6. Сравнение экспериментального и прогнозируемого (расчетного) структурного шума в кабине самолета:
 1, 4 – Экспериментальные данные, $V_E = 10$ мм/сек.
 2, 3 – Расчётные данные для уровня вибрации $V_E = 10$ мм/сек, $V_E = 1$ мм/сек соответственно.

Это подтверждено исследованиями на самолёте-демонстраторе QTD2 (B-777 с двигателями GE90-115B, степень двухконтурности которых равна 9), где низкочастотные составляющие возвышаются в общем спектре на 30-40 дБ [8].

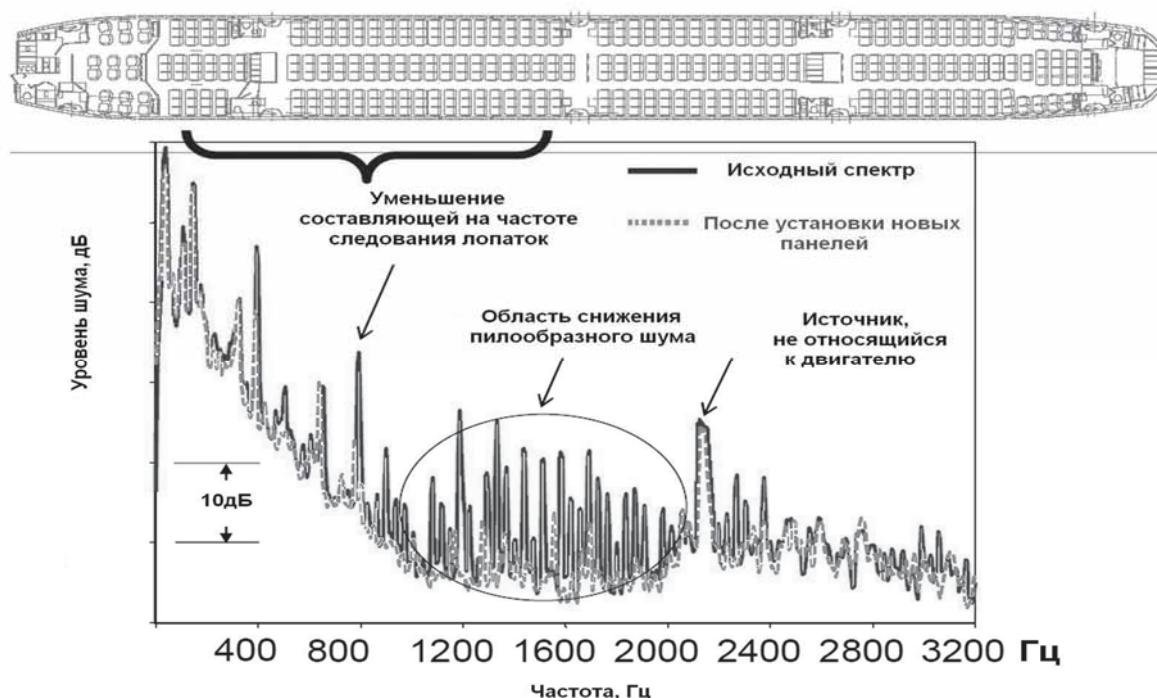


Рис.7. Спектр шума в передней части кабины самолета-демонстратора QTD2 - B777 300ER с двигателями GE90-115B, степень двухконтурности – 8,7 [8].

Акустическое поле гермокабины претерпевает существенное изменение с применением двигателей большой двухконтурности. Виброакустическая обстановка в гермокабине (кабине экипажа и пассажирских салонах) будет определяться: низкочастотными составляющими, соответствующими частоте вращения вала вентилятора и частотам газовоздушного тракта, так как структурный шум от низкочастотного вибрационного воздействия двигателей через опорные связи распространяется, практически без потерь, спектром ударных волн во всей передней части гермокабины,

Решение проблем структурного шума низкочастотной части спектра потребует создания нового поколения крепления двигателей (видимо, с встроенными низкочастотными блоками виброизоляции или пьезоэлектрическими актуаторами).

Исследования по определению динамических характеристик (частотных функций динамических податливостей и передаточных функций виброакустической проводимости) корпусов двигателей и конструкции планера самолетов позволили [6]:

- существенно уточнить расчетные модели современных авиационных конструкций,
- рассчитать ожидаемый шум в гермокабине самолетов с двигателями нового поколения,

-предложить концепцию нового виброизолирующего крепления двигателей сверхбольшой степени двухконтурности для снижения вибрационного воздействия этих двигателей.

Для обеспечения повышенной эффективности в низкочастотной области рассматривается концепция нового крепления, имеющего нелинейную характеристику на расчетной нагрузке, например, крейсерского режима полета [9,10,11].

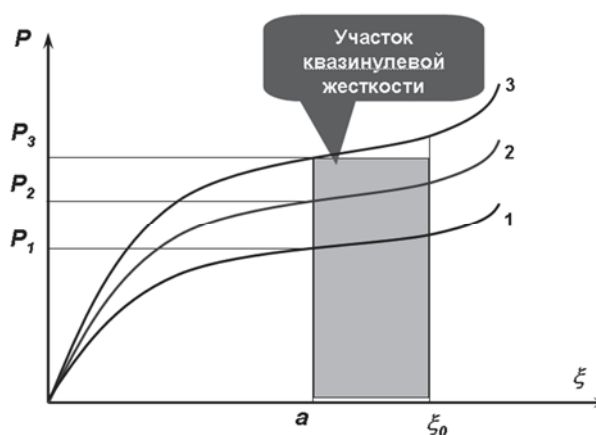
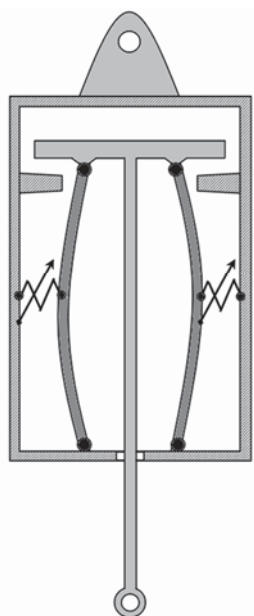
Это обусловлено потребностью обеспечения большой статической жёсткости виброизолирующей подвески наряду с требованиями обеспечения функционирования в

достаточно широком диапазоне динамических нагрузок и узком диапазоне перемещений.

Описанным выше требованиям соответствует низкочастотная подвеска, которая содержит встроенные в узлы крепления квазинеустойчивые элементы различной конфигурации. Принцип действия подвески основан на использовании малой жёсткости вблизи области потери устойчивости указанных элементов от статических нагрузок в узлах крепления на расчётных режимах.

В качестве блока виброизоляции предлагается упругий элемент с сильно нелинейной характеристикой, имеющей участок квазинулевой жесткости на расчетной нагрузке с возможностью его перенастройки на любой другой режим, что открывает путь к созданию адаптивной системы крепления двигателей (рис. 8).

Схема адаптивной подвески



Упругие характеристики подвески для разных режимов нагрузки

Рис. 8. Концепция адаптивной подвески.

Выводы

Вибрационный спектр двигателей сверхбольшой степени двухконтурности, существенно расширяется со сдвигом в низкочастотную часть спектра, что и будет определять низкочастотную часть спектра шума и вибраций в гермокабине.

Для обеспечения условий работы экипажа и безопасности полета, а также комфортных условий пассажирам, при выборе силовой установки для самолетов нового поколения, наряду с решением проблем снижения шума на местности, необходимо включать разработку высокоэффективной системы виброзащиты экипажа и пассажиров.

Основой системы виброзащиты должно стать низкочастотное виброизолирующее крепление двигателей, разработанное с учетом реальных динамических характеристик планера и корпусов двигателей самолетов нового поколения.

Литература

1. Бакланов В.С. Виброакустика самолетов нового поколения с двигателями большой и сверхбольшой двухконтурности. «Математическое моделирование», том 19, номер 7, 2007, с.27-38.
2. Бакланов В.С. Анализ виброакустических процессов в турбореактивном двигателе и других агрегатах силовой установки по результатам исследования частотных

- характеристик системы «двигатель-крепление-планер». «Ученые записки ЦАГИ», том XLI, 2010, №1, с.78-85.
3. Baklanov V.S. Interaction of power plant with airframe of new generation aircraft. EUCASS book series advances in aerospace sciences.2012.Volume 4.Progress in Propulsion Physics, p.395-416.
 4. Castelo Branco N. A. A., Alves-Pereira M. Vibroacoustic disease – current concepts. Proc. of 11th Int. Congress On Sound and Vibration, 5-8 July 2004, St.-Petersburg, Russia, p. 1775-1782
 5. Бакланов В.С., Вуль В.М., Пемов А.В. Проблемы виброакустики силовых установок с двигателями сверхбольшой двухконтурности. «Новые рубежи авиационной науки ASTEC'07», ЦАГИ, М., 2007.
 6. Агафонов В.К., Бакланов В.С., Вуль В.М., Попков В.И., Попов А.В. Исследование динамических и виброакустических характеристик самолета и двигателя методом тарированного тестирования. Доклады VIII конференции по аэроакустике, ЦАГИ, М., 1990, с.141-144.
 7. Бакланов В.С. Воздействие на систему «планер-кабина-оператор/пассажир» вибрационного спектра двигателей нового поколения. XVI Симпозиум «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем», ИМАШ РАН. Звенигород, 2009.
 8. Nesbitt E., Jia Yu and all, Quiet Technology Demonstrator 2 Intake Liner Design and Validation Proc. 12th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference, 8-10 May, 2006, Cambridge, Massachusetts.
 9. V.Baklanov, S.Postnov, A.Zayakin. The Computational Investigation of Low-Frequency Vibroisolation Mounting Dynamic Model. 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Cambridge Massachusetts, AIAA Paper 2006-2658, 2006.
 10. Baklanov V.S. Low-frequency vibroisolation mounting of power plants for new generation airplanes with engines of extra-high bypass ratio. J. of Sound and Vibration, 2007, V. 308, No. 3-5, p. 709-720.
 11. Бакланов В.С. Виброизолирующее крепление для авиационных двигателей нового поколения. Техника воздушного флота, т.LXXXVI, №2 (707), 2012, с.49-60.

КОЛЕБАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ - САМОПОДОБНЫХ СТРУКТУР

Банах Л.Я.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

ban1@inbox.ru

Аннотация. Рассматриваются колебания динамически - самоподобных структур, в которых каждая ячейка в определенном масштабе повторяет структуру предыдущей, а элементы имеют равные парциальные частоты. Рассмотрены два типа таких структур - однонаправленные и разветвленные (дихотомическая решетка). Показано, что такие структуры представляют собой механический полосовой фильтр, ширина которого обратно пропорциональна коэффициенту подобия, а амплитуды колебаний увеличиваются с уменьшением параметров ячейки.

Введение. Динамически - самоподобными структурами в [1] названы структуры, элементы которых имеют равные парциальные частоты, а некоторые их параметры меняются в определенном масштабе от предыдущей ячейки к последующей. К таким структурам относятся, например, вал со ступенчатым сечением, ротор с дисками, параметры которых меняются по участкам, и т.п. Это условие слабее, чем условие геометрического подобия (скейлинга) для фрактальных структур, требующего масштабирования всех геометрических параметров. Так, условиями геометрического самоподобия обладают, например, балки круглого сечения, в которых и радиус r и длина l меняются от элемента к элементу в одинаковом отношении γ . Однако, при динамическом самоподобии длина участка остается постоянной. В [1] показано, что:

- динамически-самоподобные структуры являются механическим полосовым фильтром, полоса пропускания которого обратно-пропорциональна коэффициенту подобия. Колебания с частотами, расположенными вне этой полосы, затухают (возрастают) экспоненциально по времени;

- частотные свойства динамически самоподобных структур эквивалентны частотным свойствам некоторой периодической структуры с дополнительным закреплением.

1. Колебания однонаправленных самоподобных структур. Рассмотрим в качестве примера крутильные колебания вала круглого сечения с закрепленными на нем дисками, когда r - радиус поперечного сечения вала и радиус дисков меняются по участкам с одинаковым масштабом γ (рис.1а), при этом длины участков не меняются. Тогда парциальные частоты для каждой массы одинаковы: $\nu_1^2 = \nu_2^2 = \dots \nu_n^2 = (k_{s-1} + k_s) / J_{ds} = (1 + \gamma) k_1 / J_{d1}$, $k_s = GJ_s / l$ - жесткость s -го участка вала, J_{ds} - полярный момент инерции s -го диска.

Используя замену переменных $\mathbf{X}^* = \mathbf{N}\mathbf{X}$, $\mathbf{N}^2 = \text{diag}[1, 1/\gamma, 1/\gamma^2 \dots]$ можно доказать [1], что частотные свойства систем, показанных на рис.1а и рис.1б совпадают. Как известно [2], система рис.1б - это механический полосовой фильтр.

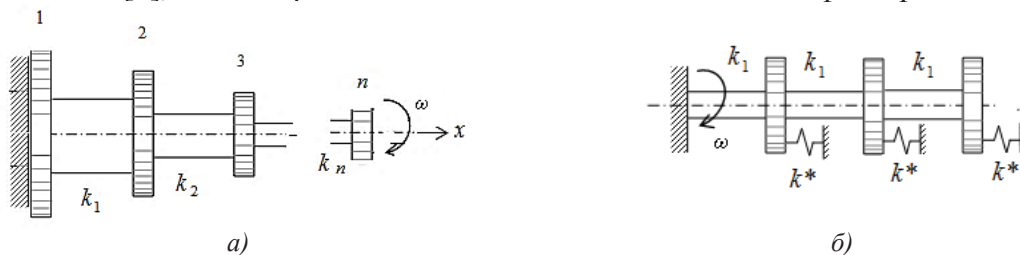


Рис. 1. а) Структура ротора с сосредоточенными массами, обладающая динамическим самоподобием; б) эквивалентная периодическая структура, имеющая такие же собственные частоты

Следовательно, динамически самоподобная система (рис.1а) также полосовой механический фильтр частот. Полоса пропускания гармонического сигнала $\Delta\omega^2 = \omega^{*2} - \omega_0^2 = 4k/m\gamma^{\frac{1}{2}}$ обратно пропорциональна параметру подобия γ (рис.2)

$$\omega_0^2 = k^*/m = k_1(1 - \sqrt{\gamma})^2/m\gamma \quad \text{при } \mu = 0,$$

$$\omega^{*2} = k_1(1 + \sqrt{\gamma})^2/m\gamma \quad \text{при } \mu = \pi. \quad (1)$$

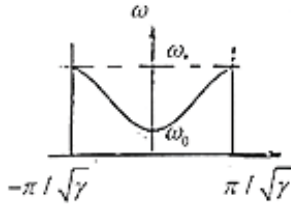


Рис.2. Полоса пропускания гармонического сигнала

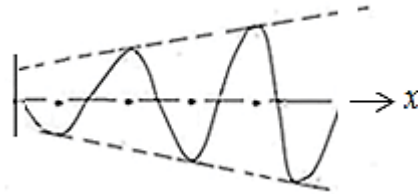


Рис.3 Высшая форма колебаний системы рис.1а

Вне полосы пропускания гармонический сигнал затухает (возрастает) экспоненциально по времени. Амплитуды колебаний увеличиваются с уменьшением параметров ячейки s (рис. 3).

Аналогичный характер имеют продольные колебания ротора ступенчатого сечения с насаженными на него дисками, если площадь поперечного сечения s -го участка меняется по степенному закону $F(s) = \gamma^s = e^{bs}$. Парциальные частоты ν_s для каждой массы одинаковы при $l = \text{const}$. Такой ротор, также представляет собой полосовой фильтр. Уравнение продольных колебаний такого стержня в пределе для непрерывной системы представляет собой волновое уравнение Клейна-Гордона.

$$F_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \alpha^2 \bar{u} \right) = m_0 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$$

Экспоненциальный закон изменения поперечного сечения имеет также брус равного сопротивления, который под действием собственного веса имеет в каждом сечении одинаковую статическую нагрузку. Это легко понять, если учесть, что изменение нагрузки (сила тяжести) по длине бруса также подчиняется экспоненциальному закону.

1.2. Самоподобные структуры в биомеханике. Тельца Пачини [3] - рецепторы подкожной ткани - детекторы вибрации (рис.4). Они состоят из замкнутых оболочек (мембран), пространство между которыми заполнено жидкостью, близкой по своим характеристикам к воде, число оболочек $N = 60$. Толщина мембран 1μ .

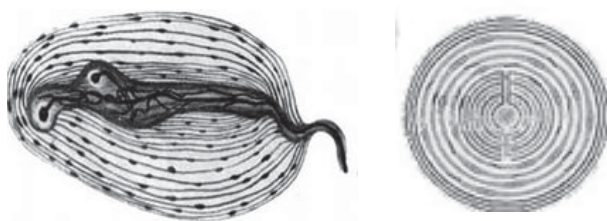


Рис. 4. Виброрецептор - тельцо Пачини

Внутренняя колба в тельцах Пачини образована тесно прилегающими друг к другу пластинами, которые разделены узкой щелью на две равные симметричные части, примыкающие к нервному волокну.

Динамическая модель может быть принята в виде цилиндрических оболочек (мембран), вложенных одна в другую, пространство между которыми заполнено вязкой несжимаемой жидкостью, концы оболочек шарнирно закреплены (рис.5).

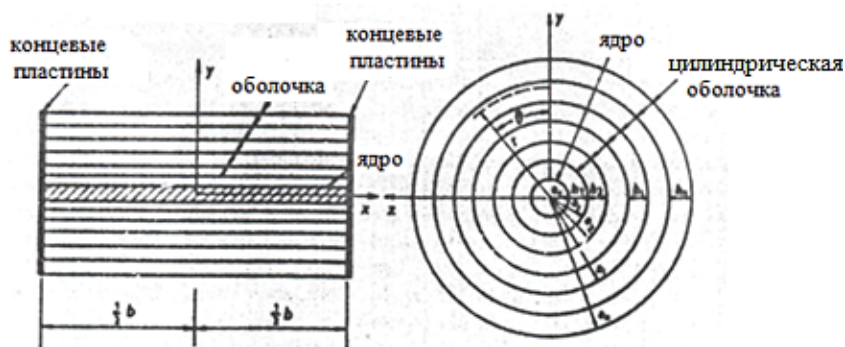
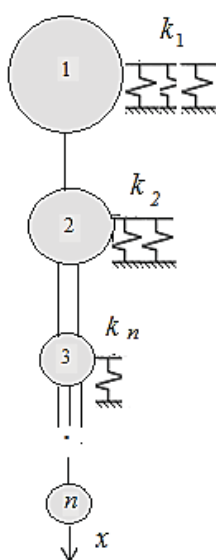


Рис.5. Динамическая модель тельца Пачини:
 $b = 850 \mu$, $r_{\max} = 500 \mu$

Податливость i -й мембраны [4]: $\Pi_i = \frac{r_i^2}{Ed_i} (1 + \frac{4b^2}{\pi^2 r_i^2})^2$, где r_i, d_i - радиус и толщина i -й мембраны соответственно, $b = 850 \mu$, $r_1 = 235 \mu$, $d_i = 1 \mu$, $a_{i+1} = \gamma a_i$, $\gamma \square 1,1$, E - модуль упругости для биологических тканей найден экспериментально $E = 5 \cdot 10^6 \text{ кг} / \text{см}^2$, податливость слоя жидкости [5] $p_i = h_i / E$.



Инерционными свойствами жидкости пренебрегаем, так как число Рейнольдса мало. Размеры мембран связаны соотношением: $a_{i+1} = \gamma a_i$, $\gamma \square 1,1$, толщина мембраны $\square 1 \mu$.

Учитывая параметры корпскулы, ее механическую модель можно представить в виде рис.6, откуда следует, что корпскула представляет собой динамически-самоподобную структуру.

Рис.6. Динамическая модель тельца Пачини как самоподобная структура

Дисперсионные уравнения для i -й мембраны с учетом того, что жидкость действует на всю поверхность мембраны

$$m_0 / \gamma^{s-i} \ddot{x}_s + [k_0 / \gamma^{s-1} + h_0 \gamma^{s-1} (1 + \gamma)] x_s - h_0 / \gamma^{s-1} x_{s-1} - h_0 / \gamma^s x_{s+1} = 0$$

Используя соотношения (1) для структуры рис.6, найдем границы полосы пропускания

$$\omega_0 = 3,4 \cdot 10^2 1/c, \nu_0 = 54,14 \text{ Гц} \quad \omega_* = 36 \cdot 10^2 1/c, \nu_* = 573,3 \text{ Гц}$$

что достаточно хорошо коррелируется с известными в литературе данными, согласно которым полоса пропускания находится в диапазоне (70 Гц-1000Гц).

2. Колебания разветвленных самоподобных структур. Дихотомическая решетка. Дихотомическая решетка (рис. 7а, б) также относится к классу самоподобных структур [6]. Такие разветвленные структуры широко распространены в технических и в природных системах. Они могут состоять из элементов различной физической природы: механических, электрических, гидравлических. Ветвящиеся технические структуры трубопроводов были исследованы в работах Ф.Л.Черноусько [7]. Эти структуры обладают определенными свойствами оптимальности. Так, полное гидравлическое сопротивление трубопровода минимально при заданном объеме, кроме того, он обеспечивает доставку транспортируемой жидкости в сколь угодно малую

окрестность точки ветвления. Кроме того, он обладает наименьшим объемом при заданном уровне максимальных напряжений. ВК таким структурам в природе относятся также дыхательные пути, кровеносная система человека, кроны деревьев, таблицы генетического кода [8].

2.1. Условия динамического самоподобия. Уравнения колебаний

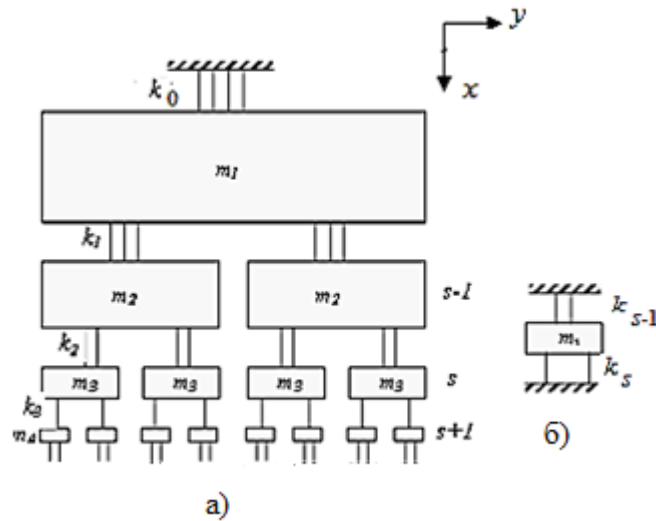


Рис. 7. Дихотомическая самоподобная решетка (а), образующая подсистема (б),

Условия динамического самоподобия решетки заключаются в том, что ее упругие и инерционные параметры меняются с одинаковым масштабом γ для каждого ряда (рис.7):

$$k_s = k_1 / \gamma^s, m_s = m_1 / \gamma^s,$$

При этом выполняется условие равенства парциальных частот образующих подсистем

$$\nu_1^2 = \nu_2^2 = \dots = \nu_n^2 = (k_{s-1} + 2k_s) / m_s = \frac{k_0}{m_0} (\gamma + 2)$$

Уравнение вертикальных колебаний решетки (силу тяжести не учитываем):

$$\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -m_1 \lambda^2 + k_0 + 2k_1 & -k_1 & -k_1 & & \\ & -m_2 \lambda^2 + k_1 + 2k_2 & & -k_2 & \\ \text{symmetric} & & -m_2 \lambda^2 + k_1 + 2k_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (2)$$

2.2. Статические свойства решетки. Пусть на верхнюю массу действует статическая нагрузка P . Суммарное усилие в каждом s -ом ряду будет одинаковым и равным P . В каждом s -ом ряду дихотомической решетки находится 2^{s-1} упругих элементов, жесткость каждого из них равна $k_s = k_0 / \gamma^s$, так что суммарная жесткость в s -ом ряду равна $\frac{k_0}{2} (2/\gamma)^s$ и изменение длины упругого элемента

$$\Delta_{scm} = \frac{2P}{k_0} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^s$$

Отсюда следует, что если $\gamma = 2$, то Δ_{scm} во всех рядах будет одинаковым, и таким образом, передача сигнала от верхнего тела происходит без искажения на все уровни, а расстояние между рядами решетки остается неизменным. Таким образом, при статическом нагружении решётка перемещается как твердое тело. Если же $\gamma < 2$, то Δ_{scm} в каждом ряду будет уменьшаться по степенному закону, и, наоборот, при $\gamma > 2$ - будет увеличиваться. Таким образом, $\gamma = 2$ является бифуркационным значением для дихотомической решетки. Для n -хотомической решетки таким значением будет $\gamma = n$. Здесь усматривается аналогия с цепной системой рис.1, которую можно рассматривать как одномерную решетку: для нее при $\gamma = 1$ получаем обычную регулярную структуру, а при $\gamma < 1 (\gamma > 1)$ получаем увеличение (уменьшение) амплитуд колебаний на каждой последующей массе.

Если упругие элементы в решетке рис. 1 представляют собой балки круглого сечения, то продольная жесткость такой балки в s -ом ряду равна $k_s = EF_s / l_s = E(\pi r_s^2 / l_s)$.

Заметим, что условие $\gamma = 2$ можно получить, используя различные варианты изменения параметров, как, например

$$l_s = l_0 = const, r_s = r_0 / (\sqrt{2})^s; \text{ (б) } r_s = r_0 = const, l_s = l_0 (2)^s; \text{ (в) } r_s = r_0 / (2)^s, l_s = l_0 / (2)^s$$

В последнем варианте радиус r и длина l меняются от элемента к элементу в одинаковом отношении γ ; то есть упругие элементы обладают *геометрическим самоподобием* (скейлингом). Отметим, что при заданном γ вариант геометрически самоподобной балки обладает наименьшим объемом.

Найдем теперь напряжение в упругих элементах

$$\sigma_s = P / F_s = \frac{P \gamma^{2s}}{\pi_0^2 2^{s-1}}, \text{ где } \sigma_s = E \varepsilon = E \frac{\Delta_{scs}}{l_s} = E \frac{\frac{2P}{k_0} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^s}{l_0 / \gamma^s}.$$

Следовательно, напряжение остается постоянным для каждой балки при $\gamma = \sqrt{2}$. При $\gamma = 2$ напряжение постоянно только в случае варианта (а) при $l_s = l_0 = const$. Это легко понять, так как изменение длины каждого упругого элемента при $\gamma = 2$, как показано выше, остается постоянным.

Используя электрогидравлическую систему аналогий, видим, что этот результат означает постоянство силы тока и объемного расхода жидкости при $\gamma = 2$.

2.3. Свободные колебания решетки. Дихотомическая структура имеет высокую степень внутренней симметрии, и может последовательно разделяться на подсистемы, соответствующие симметричным и кососимметричным формам колебаний. Тогда очевидно, что фаза q между элементами может быть равна либо 0, либо π .

Процесс разделения на подсистемы происходит путем введения новых переменных, равным (полу) сумме и (полу) разности левой и правой части структуры $x_{sym1} = x_r + x_l, x_{asym1} = x_r - x_l$. Собственные частоты при этом не меняются.

Преобразование координат для n -рядной решетки имеет вид матрицы

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{T} \mathbf{X}, \quad \mathbf{T} = \text{diag}[\mathbf{T}_s], \quad T_s = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ (s/2) & (s/2) \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} \\ (s/2) & (s/2) \end{bmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, получим окончательно

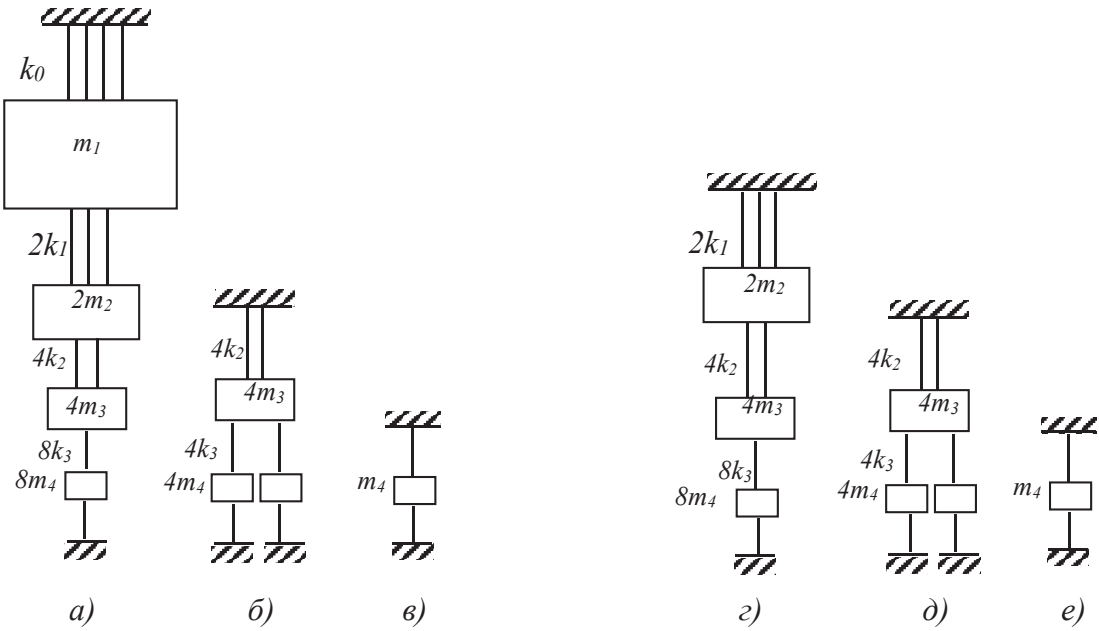


Рис.8. Окончательный этап разделения на симметричные и кососимметричные формы колебаний решетки

В результате получается:

- цепная 4-х массовая подсистема (рис.8а), упругие и инерционные элементы которой равны сумме соответствующих элементов каждого ряда. Эта подсистема описывает синфазные формы колебаний, при которых сдвиг фаз между элементами внутри ряда равен нулю. В дальнейшем для краткости будем называть эту подсистему синфазной. Суммарная масса каждого ряда равна $M_s = m_s 2^s = m_1 (2/\gamma)^s$;
- цепная 3-массовая подсистема (рис.8 г), которая получается из синфазной при жестком закреплении массы 1;
- две одинаковые трехмассовые подсистемы с равными частотами, но имеющие различные формы собственных колебаний (рис.8 б, д);
- две одномассовые подсистемы (рис.8 в, е).

Все подсистемы, за исключением 8а, получаются из исходной системы путем наложения дополнительных связей, и поэтому о расположении максимальных и минимальных частот всей решетки можно судить именно по синфазной подсистеме.

Собственные частоты одномассовых подсистем (рис. 8 в, е) равны ν – парциальным частотам образующих подсистем, все три трехмассовые подсистемы также содержат собственные частоты, равные ν . Таким образом, исходная 4-х рядная дихотомическая решетка имеет 5 кратных корней, равных ν . Кроме того, имеются еще кратные частоты, соответствующие подсистемам рис. 8б, д.

Все полученные результаты без труда обобщается на случай n-рядной решетки.

2.4. Полоса пропускания решетки. Образующая парциальная подсистема представлена на рис.1а. Она имеет двойную нумерацию (s, j) . Уравнение (sj) -й массы, как следует из (2), имеет вид

$$m_{sj} \ddot{x}_{sj} + k_{sj} x_{sj} - k_{s-1, j/2} (x_{s-1, j/2}) - k_{s+1, 2j-1} (x_{s+1, 2j-1} + x_{s+1, 2j}) = 0, \quad (3)$$

$$k_{sj} = k_{s-1, j/2} + 2k_{s+1, 2j-1},$$

(здесь берем четное значение из пары $(j, j+1)$; на дальнейшие результаты, как увидим ниже, этот выбор не влияет). Будем искать решение в виде произведения

$$x_{s+h, j+r} = X_t Y_j e^{i(\mu p + q r + \omega t)}. \quad (4)$$

Здесь q означает сдвиг фазы между соседними элементами в данном ряду, а p - сдвиг фазы между соседними рядами. Подставляя (4) в (3), найдем

$$m_{sj}\lambda^2 X_s Y_j + k_{s,j} X_s Y_j - k_{s,j/2} (X_{s-1} Y_{j/2}) - k_{s+1,2j-1} (X_{s+1} Y_{2j-1} + X_{s+1} Y_{2j}) = 0, k_{sj} = k_{s,j/2} + 2k_{s+1,2j-1}.$$

Тогда дисперсионное уравнение

$$(-m_{sj}\lambda^2 + k_{sj}) - k_{s,j/2}(e^{-\mu}e^{-qj/2}) - k_{s+1,2j-1}e^{\mu}(e^{q(j-1)} + e^{qj}) = 0.$$

Синфазные формы колебаний получатся, если сдвиг фазы между соседними элементами $q = 0$

$$(-m_{sj}\lambda^2 + k_{sj}) - k_{s,j/2}(e^{-\mu}) - 2k_{s+1,2j-1}e^{\mu} = 0, k_{sj} = k_{s,j/2} + 2k_{s+1,2j-1}.$$

Это уравнение описывает цепную систему вида рис. 8 а. Дисперсионная кривая имеет вид, аналогичный рис. 2.

Как и в случае статики, здесь имеются два различных случая: $\gamma \neq 2, \gamma = 2$. При $\gamma \neq 2$ получим динамически- самоподобную цепочку, в которой суммарная масса и жесткость каждого ряда меняются пропорционально коэффициенту $(\gamma/2) = \gamma'$, являющимся коэффициентом подобия для s -го ряда. Полосы пропускания этой цепочки из (1):

$$\lambda_a^2 = \frac{k^*}{m_1} = \frac{k_0}{m_1} (1 - \sqrt{\gamma'})^2 \quad \text{при} \quad \mu = 0,$$

$$\lambda^{*2} = \frac{k_0}{m_1} (1 + \sqrt{\gamma'})^2 \quad \text{при} \quad \mu = \pi,$$

Предельные частоты λ_0, λ^* являются, как указывалось выше, предельными частотами для всей дихотомической решетки. Ее полоса пропускания

$$\Delta\lambda = \lambda^{*2} - \lambda_0^2 = 4 \frac{k_0}{m_1} \sqrt{\gamma'}.$$

При $\gamma = 2$ суммарная масса и жесткость каждого ряда одинакова и равна m_1 и k_0 , синфазная цепочка становится периодической, $\gamma' = 1$, и нижняя граница полосы пропускания становится равной нулю:

$$\lambda_0^2 = 0, \lambda^{*2} = 4 \frac{k_0}{m_1}.$$

Таким образом, кратные частоты, равные парциальной частоте образующего элемента решетки, попадают в полосу пропускания решетки. Эти частоты являются опасными с точки зрения повышенной виброактивности системы, а также появления неустойчивости.

2.5. Нелинейная дихотомическая решетка. Если упругие элементы дихотомической решетки нелинейны, то вся процедура разделения на симметричные и кососимметричные типы колебаний остается в силе. Пусть упругие элементы описываются соотношением $k(x)=f(x)$. Тогда в качестве синхронной подсистемы (рис.8а) получим цепочку Паста-Улама-Ферми, для которой, как известно, существуют солитонные решения

Выводы

- Самоподобные структуры, как однонаправленные, так и разветвлённые являются полосовым фильтром вибраций, полоса пропускания которого обратно пропорционально масштабному фактору γ .
- При $\gamma < 1$ ($\gamma > 1$) в однонаправленной структуре происходит уменьшение (увеличение) амплитуды.
- В дихотомической решетке при $\gamma \neq 2$ полоса пропускания не зависит от количества рядов в решетке и равна $\Delta\lambda = v\sqrt{\gamma/2}$; при $\gamma = 2$ нижняя граница полосы пропускания исчезает;
- При коэффициенте подобия решетки $\gamma = 2$ статическое сжатие упругих элементов во всех рядах одинаково, и решетка перемещается как твердое тело.
- В решетке имеются кратные собственные частоты, равные парциальной частоте образующего элемента решетки; кратность этих частот зависит от числа рядов решетки; для 4-рядной решетки кратность корня равна 5.

Литература

1. Банах Л.Я., Бармина О.В. Колебания самоподобных структур в механике //Проблемы машиностроения и надёжность машин, 2013, №2, С.3-9.
2. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн, М: Наука, 1984, 432 с.
3. Мумин А.Н., Волотовская А.В.. Вибротерапия, Минск, БелМАПО, 2007.
4. Тимошенко С.П., Войнович-Кригер С. Пластины и оболочки, М.: Наука, 1966, С.635
5. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.6, Гидродинамика, М.: Наука, 1986, 736 с.
6. Банах Л.Я. Колебания разветвленных самоподобных структур.//Проблемы машиностроения и автоматизация, №1, 2014, С.110-115.
7. Черноусько Ф.Л. Оптимальная структура ветвящихся трубопроводов //Прикладная математика и механика, т.41, вып. 2, 1977, С.376-383.
8. Петухов С.В. Матричная генетика, алгебра генетического кода, помехоустойчивость, М., Регулярная и хаотическая динамика, 2008, 316 с.

ПРОБЛЕМЫ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ РОТОРНЫХ СИСТЕМ

Банах Л.Я.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

banl@inbox.ru

Аннотация. Рассматриваются контактные задачи при вращении ротора с задеваниями о статорные элементы: обкатка, виброударные режимы, колебания типа хула-хуп при контакте с уплотнительными кольцами, маятниковое качание горизонтального ротора по подшипнику. Найдено, что скорость установившейся обкатки близка к собственной частоте ротора. Для виброударных режимов при анизотропии опор доказано возникновение двух- ударного режима в плоскости наименьшей жесткости. Для горизонтального ротора установлено возникновение параметрического резонанса на скорости вращения, равной удвоенной критической. Приведены экспериментальные результаты.

Снижение уровня вибраций в роторных системах является ключевой проблемой машиностроения [1]. Наиболее опасными являются контактные режимы - колебания ротора с задеваниями о статорные элементы (уплотнения, подшипники, корпус), которые обычно предшествуют развитию аварии. К ним относятся такие режимы, как: постоянный контакт ротора с подшипником (прямая синхронная и обратная асинхронная прецессия (обкатка)), виброударные режимы и их различные комбинации.

1. Контактные режимы ротора внутри жесткого статора.

1.1. Прямая синхронная прецессия (лунное движение), при которой вал прижимается к подшипнику всегда одной стороной. При наличии масляного слоя возникают автоколебания [2].

1.2. Обкатка - асинхронная обратная прецессия возникает при постоянном контакте со статором в случае недостаточной смазки подшипника (отсутствие масляного слоя). *Кинематическая обкатка* происходит без проскальзывания

$$\dot{\varphi}_{кин} = \omega \frac{r}{\delta} [10 - 10^2 \omega], N = m \varepsilon \dot{\varphi}_{кин}^2, r - \text{радиус вала}, \delta - \text{величина зазора}, N - \text{нормальное давление в точке контакта.}$$

Но реально обкатка сопровождается проскальзыванием и интенсивным износом соприкасающихся поверхностей. Обкатка может возникать, например, при внезапной разбалансировке ротора (отрыв лопатки), внешнем импульсном воздействии. При этом появляются разрушающие силы контактного взаимодействия, превышающие вес ротора на два-три порядка. Например, на Новочеркасской ГРЭС вследствие обкатки валопровод турбины разрушился по восьми сечениям за счет скручивающего инерционного момента при торможении силой трения. Передняя часть корпуса ротора низкого давления была выброшена на 14-ти метровую отметку за счет *силы нормального давления со стороны ротора на корпус*. Предельная скорость прецессии составила 7470,7 рад /с, а предельная сила нормального давления на статор $-2,34 \cdot 10^9 \text{ Н} = 34000 \text{ G}$, где G – вес ротора). *Процесс обката до разрушения длился 0,2 секунды.*

Математическая модель процесса обкатки [3] (рис.1). В случае жесткого статора система имеет одну степень свободы – угол φ , P – точка контакта ротора со статором; O – ось подшипников O_1 – геометрический центр; G - центр масс; ω – угловая скорость ротора;

φ - угловая скорость прецессии; N – реакция статора; T – сила трения скольжения; ε - величина дисбаланса, f - коэффициент сухого трения (достаточно мал).

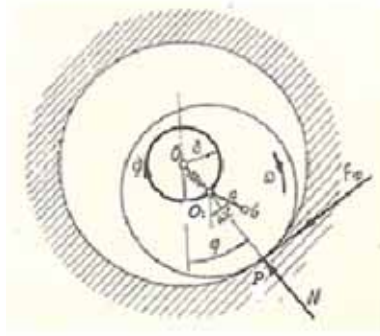


Рис.1

Уравнение движения ротора в случае обкатки с проскальзыванием

$$\ddot{\varphi} = f \left[\dot{\varphi}^2 - \frac{k}{m} \right] + \frac{\varepsilon \omega^2}{\delta} [-\sin(\omega t + \varphi) + f \cos(\omega t + \varphi)], \quad N = m \dot{\varphi}^2 \delta + m a \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - c \delta \quad (1)$$

f - коэффициент сухого трения, $N > 0$ -условие безотрывного движения.

Это автоколебательный режим за счет силы сухого трения $T = fN$. Уравнение (1) - существенно нелинейное, так как член ε / δ может быть не мал. Тем не менее, его удастся свести к уравнению с малым параметром f при нелинейных членах заменой

переменных: $\omega t = \tau$, $s = \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2$, $u = \tau + \varphi + \gamma$, $\gamma = \arctg \varphi$ - угол трения. Тогда

$$\frac{ds}{du} = -\frac{2\varepsilon}{\delta} \sin u + 2f \left[(\sqrt{s} - 1)^2 - \frac{k}{m\omega^2} \right]$$

Его решение - скорость обкатки- получена с помощью метода малого параметра:

$$\dot{\varphi} = \omega \left(\frac{1}{A} - 1 \right) - \frac{\varepsilon \omega}{A} \cos \frac{\omega t}{A}, \quad A = \frac{K + 3\varepsilon/\delta}{(K + 2\varepsilon/\delta)^{3/2}}, \quad K \equiv \left(1 + \sqrt{\frac{k}{m\omega^2}} \right)^2 \quad (2)$$

Следовательно, скорость обратной прецессии - периодическая функция .

При относительно небольшом дисбалансе $\varepsilon/\delta \cong 0$: $\dot{\varphi} \cong \frac{k}{m} - \frac{\varepsilon \omega}{A} \cos \frac{\omega t}{A}$,

Скорость обкатки находится в окрестности собственной частоты системы.

Решение (2) представляется в виде суммы быстрой и медленной составляющей, что достаточно типично для задач роторной и вибрационной механики [4].



а)



б)

Рис.2. Экспериментальная установка

Область устойчивости установившихся режимов обкатки определяется из уравнения Матье. Первая область неустойчивости обкатки $\omega > 1,16\sqrt{k/m}/(\sqrt{\varepsilon/\delta}-1)$

Экспериментальные исследования траекторий вала проводились уникальным оптическим методом», который был предложен и осуществлен Н.В. Звиногородским. В торец вала впаиваются две иглы: одна - в центре вала О, вторая О₁ - эксцентрично (рис.2а), и их траектории фотографируются. Для фиксации каждого оборота вала устроен прерыватель светового луча в виде узкой пластинки (рис. 2б) у края сечения вала. Пластика один раз за оборот пересекает световой луч и создает в записи траектории разрыв. По числу разрывов в траектории можно судить о том, за сколько оборотов описана та или иная траектория.

Траектория эксцентричной иглы является наложением двух движений: колебаний с частотой Ω и вращения с частотой вращения ω вокруг центра вала. Уравнение этой траектории

$$z = C_1 e^{i\Omega t} + C_1 e^{-i\Omega t} + a e^{i\omega t}, \quad z = x + iy \quad (3)$$

В случае прямой прецессии (3) описывает эпитрохоиду (петли направлены внутрь), а в случае обратной – гипотрохоиду (петли направлены наружу) (см. рис. 3). Число петель равно $n = \Omega/\omega$. Экспериментальные траектории эксцентричной иглы (гипотрохоиды) при обкатке представлены на рис. 3 а, б. (зазор $\delta = 0,25$ мм, радиус $r = 6$ мм). число петель из (1) зависит от скорости вращения

$$\frac{\Omega}{\omega} = n \cong \frac{1}{A} - 1$$

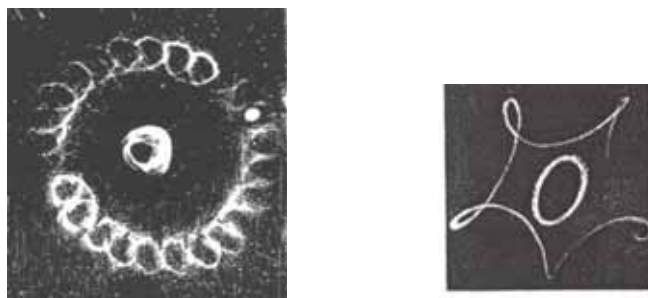


Рис.3. Траектории эксцентричной иглы при различных скоростях вращения

Процесс установления обкатки численно найден В.Ф. Шатохиным [5]. Переходные колебания начинаются с прямой прецессии (рис.4 а-в) и сопровождаются соударением с проскальзыванием (участок 1-2), затем отскок от статора, повторное касание, скольжение, повторный отскок. Движение до точки 5 - *прямая прецессия*. Затем начинается *обратная прецессия*.

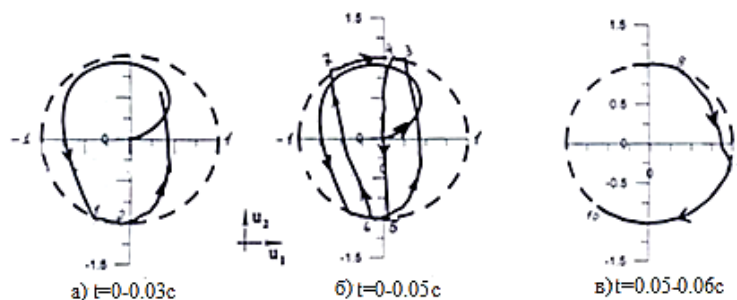
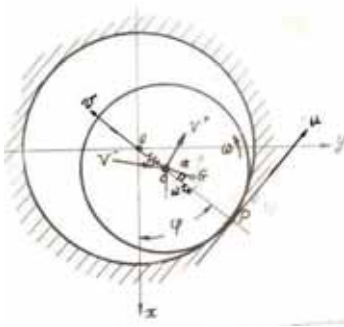


Рис.4. Траектории центра ротора при установлении обкатки после внезапной разбалансировки

При каждом касании скорость обратной прецессии возрастает, а прямой прецессии - уменьшается за счёт трения о статор. От точки 9 начинается непрерывный обкат ротора по статору, который развивается после **0.053 сек.**

1.3. Виброударные режимы. Математическая модель представлена на рис.5.



Теорема импульсов и количества движения $m(u_G^+ - u_G^-) = S_u$, $m(v_G^+ - v_G^-) = S_v$
 $I_{(G_z)}(\omega^+ - \omega^-) = -S_u \rho_1 - S_v \rho_2$

Проскальзывание в момент удара $S_u = -f S_v$

Рис.5. Виброударные режимы ротора с жестким статором

Условие соударения $\dot{v}_G^+ - \omega^+ a \sin \omega^+ t_0 = -e(\dot{v}_G^- - \omega^- a \sin \omega^- t_0)$

Имеем 5 уравнений для 5 неизвестных u_G^+ , v_G^+ , ω^+ , S_u , S_v . Уравнения решаются методом припасовывания [6]: стыкуются интервалы свободного движения ротора без контакта подшипником и моменты соударений. При абсолютно жестком подшипнике и уравновешенном роторе система а, следовательно, и траектории центра ротора симметричны относительно оси подшипников (рис.6а). Этот результат можно получить аналитически.

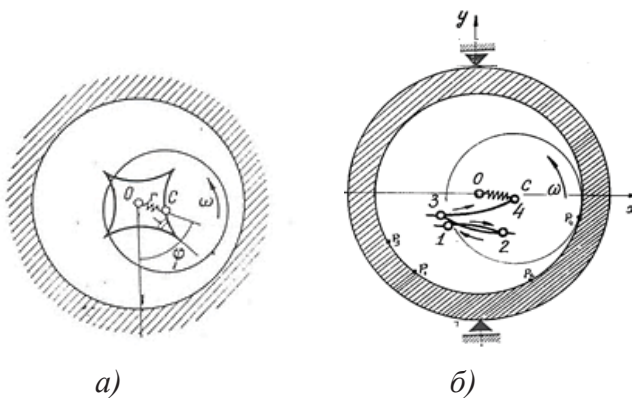


Рис.6. а) Сбалансированный ротор в жестком статоре- симметричные соударения, б) неуравновешенный ротор на анизотропных опорах

Рассмотрим виброударные режимы неуравновешенного ротора с анизотропной опорой [3]. Покажем, что при этом возникает двух ударный режим в плоскости наименьшей жесткости (Рис.6б). Для момента соударения используем гипотезу Ньютона. Пусть коэффициент восстановления равен e . Условия отскока вдоль осей x и y будут различными, так как после соударения вдоль оси x происходит еще и перемещение опоры:

$$\dot{x}_1^+ = \frac{\mu - e}{\mu + 1} \dot{x}_1^-, \quad y - \dot{y}_1^+ = -e \dot{y}_1^-.$$

При $\mu = \frac{m_1}{m_2} = 10 \gg 1$, $R = 0.55$ получим: $\dot{x}_1^+ \approx \dot{x}_1^-$, $\dot{y}_1^+ < \dot{y}_1^-$, i.e. $\dot{x}_1^+ > \dot{y}_1^+$. После удара

уравнения движения ротора $x_1(t) = x_1(0) \cos p_1 t + \frac{\dot{x}_1^+(0)}{p_1} \sin p_1 t$, $y_1(t) = y_1(0) \cos p_1 t + \frac{\dot{y}_1^+(0)}{p_1} \sin p_1 t$



Рис. 7. Экспериментальные траектории центра ротора при двухударном режиме.

Так как $\dot{x}_1^+ > \dot{y}_1^+$, то траектория центра ротора после каждого удара будет иметь касательную, параллельную к оси x (Рис.6б). После $n+1$ -го периода: $y_1(T_{n+1}) = y_1(T_n) \cos p_1 T_{n+1} < y_1(T_n) < y_1(T_{n-1})$ и т.д. Так как $y_1(T_1 + T_2 + \dots T_n) \rightarrow 0$, то устанавливается двухударный режим в свободном направлении. Практически он устанавливается после 3-4 соударений.

При дальнейшем увеличении скорости возникает обкатка с двумя соударениями за одно обегание вала: после первого удара вал движется с постоянным контактом с опорой как при «обкатке», пока не доходит до диаметрально противоположной точки, в которой происходит отрыв и затем последующее соударение в диаметрально противоположной точке и т.д. Экспериментальные траектории центра ротора при соударении с анизотропной опорой представлены на рис. 7.

2. Движения ротора внутри легкого уплотнительного кольца

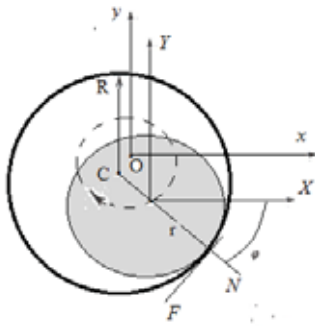


Рис.8.

2.1. Движение с постоянным контактом (типа хула-хуп) (рис.8).

Уравнения движения [4],

$$\ddot{\varphi} = f \left[\dot{\varphi}^2 - \frac{k}{m} \right] + \frac{\varepsilon \omega^2}{\delta} \left[-\sin(\omega t + \varphi) + f \cos(\omega t + \varphi) \right]$$

$$N = m\dot{\varphi}^2 \delta + m\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - k\delta$$

Условие безотрывности: $N > 0$. Считаем, что кольцо мало влияет на движение ротора:

$$x = \varepsilon \cos \omega t, y = \varepsilon \sin \omega t$$

Уравнение движения совпадает с уравнением обкатки (1). Но, в отличие от обкатки здесь направление вращения кольца совпадает с направлением вращения ротора и траектории каждой точки кольца - эпитрохоиды (петли направлены внутрь). Отличие от вибрационного поддержания вращения [4] в том, что разность радиусов $R - r$ мала, и, кроме того, имеется гидростатическая жесткость кольца.

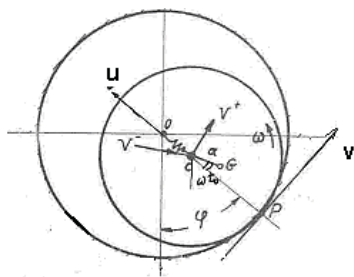
2.2. Виброударные режимы ротора с уплотнительным кольцом [7] отличаются тем, что кольцо, по которому наносится удар, значительно легче ударного тела (ротора) и после соударения отскок происходит именно у ударяемого тела (кольца) (рис.9).

Теорема
импульсов

$$m_1(\dot{u}_{1G}^+ - \dot{u}_{1G}^-) = S_u, \quad m_2(\dot{u}_2^+ - \dot{u}_2^-) = -S_u$$

$$m_1(\dot{v}_{1G}^+ - \dot{v}_{1G}^-) = S_v, \quad m_2(\dot{v}_2^+ - \dot{v}_2^-) = -S_v$$

$$I_0(\dot{\varphi}^+ - \dot{\varphi}^-) = S_u \times O_1G - S_v \times CG$$



Проскальзывание
в момент удара

$$S_u = -fS_v$$

Рис.9. Виброударные режимы ротора с уплотнительным кольцом

Коэффициент
восстановления e $\dot{u}_{2p}^+ - \dot{u}_{2p}^- = -e(\dot{u}_{2p}^- - \dot{u}_{2p}^-)$, $0 \leq e \leq 1$

Имеем 7 уравнений для 7 неизвестных: $\dot{u}_1^+$, $\dot{u}_2^+$, $\dot{v}_1^+$, $\dot{v}_2^+$, ω^+ , S_u , S_v

Изменение скорости ротора после удара и скорости вращения из-за проскальзывания

$$\begin{aligned} \dot{u}_1^+ &= \frac{(1-\mu e)\dot{u}_1^- + \mu(1+e)\dot{u}_2^-}{1+\mu}, & \dot{u}_2^+ &= \frac{(\mu-e)\dot{u}_2^- + (1+e)\dot{u}_1^-}{1+\mu} \\ \dot{v}_1^+ &= \dot{v}_1^- + f\mu \frac{(1+e)(\dot{u}_1^- - \dot{u}_2^-)}{1+\mu}, & \dot{v}_2^+ &= \dot{v}_2^- - f \frac{(1+e)(\dot{u}_1^- - \dot{u}_2^-)}{1+\mu} \\ \phi^+ &= \phi^- - \frac{m_1 m_2 (a + fr)(1+e)(\dot{u}_1^- - \dot{u}_2^-)}{J_0(m_1 + m_2)} \end{aligned}$$

Возникают синхронные и асинхронные виброударные режимы. При синхронном режиме (рис.10а) периоды колебаний ротора и кольца одинаковы, а при асинхронном (рис.10б) период колебаний кольца в 3 раза больше, чем у ротора (колебания ротора на рис.10 отмечены светлым тоном). При асинхронном режиме происходят двойные соударения за счет резкого отскока кольца и вторичным соударением ротора с его противоположной стороной. Такие режимы развиваются при снижении амплитуды ротора.

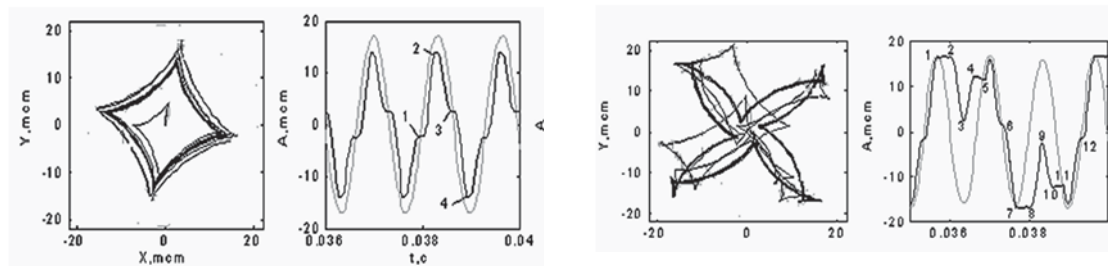
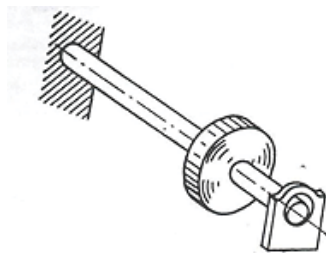


Рис.10. Виброударные колебания ротора и кольца: а) синхронные колебания, б) асинхронные колебания.

3. Маятниковое качание тяжелого горизонтального ротора в подшипнике.



Предполагается, что подшипник либо не имеет смазки совсем, либо слабо смазан. В таких условиях иногда работают валы судовых двигателей в случае разработки подшипника гребного винта. В этом случае возникает маятниковое движение ротора по нижней части подшипника (рис.11).

Рис.11. Горизонтальный ротор

Уравнения колебаний маятникового движения [8]

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\delta} (\sin \phi + f \cos \phi) + f \left[\dot{\phi}^2 - \frac{c}{m} \right] = \frac{m \varepsilon \omega^2}{\delta} [\sin(\omega t - \phi) - f \cos(\omega t - \phi)] = 0$$

Собственные колебания. При движении ротора вверх сначала происходит обкатка без проскальзывания $\dot{\phi} = \omega r / \delta$ до угла ϕ^* , определяемого из соотношения $\ddot{\phi} \geq 0$, а затем начинается движение с проскальзыванием сначала вверх, а затем вниз. Фазовые кривые представлены на рис.12.

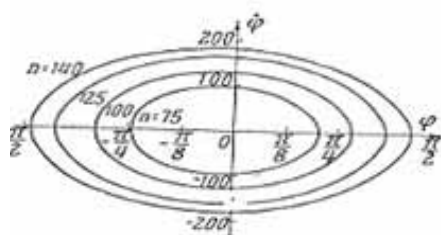


Рис.12. Фазовые траектории горизонтального ротора

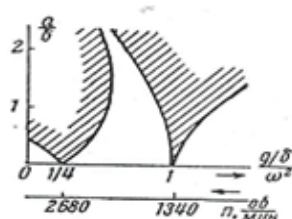


Рис.13 Область устойчивости маятниковых колебаний

При исследовании устойчивости **вынужденных колебаний** при малых углах качания и малых коэффициентах трения уравнение в вариациях является уравнением Матье с правой частью.

$$\ddot{\psi} = \left(\frac{\delta}{\delta'} + \frac{a\omega^2}{\delta'} \cos \omega t \right) \psi = \frac{a\omega^2}{\delta'} \sin \omega t, \quad \psi = \phi - \arctg f, \quad \delta' = \delta / \sqrt{1 + f^2}$$

Это уравнение, как известно, имеет зоны неустойчивости: возникает параметрический резонанс при скорости вращения, равной удвоенной критической (рис.14). На основном резонансе ($\omega_{кр} = 1400$ об/мин) происходит одно колебание за оборот (один разрыв на траектории). Затем амплитуда падает и при 2700-2930 об/мин $= 2 \omega_{кр}$ происходит существенное увеличение амплитуды при одном колебании за два оборота (два разрыва на траектории) (рис.14б). Это параметрический резонанс, спектр также имеет две гармоники. Затем амплитуды уменьшаются и происходят чисто вынужденные колебания с частотой вращения (рис.14в).

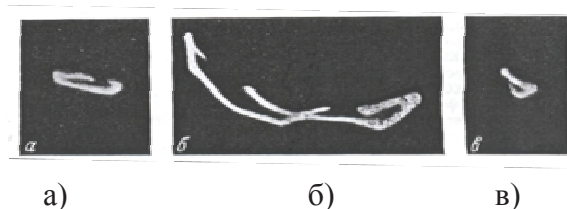


Рис.14. Экспериментальные траектории маятникового движения горизонтального вала.

4. Колебания ротора в податливом статоре рассматривались В.Ф. Шатохиным, А.Н. Никифоровым [5],[9].

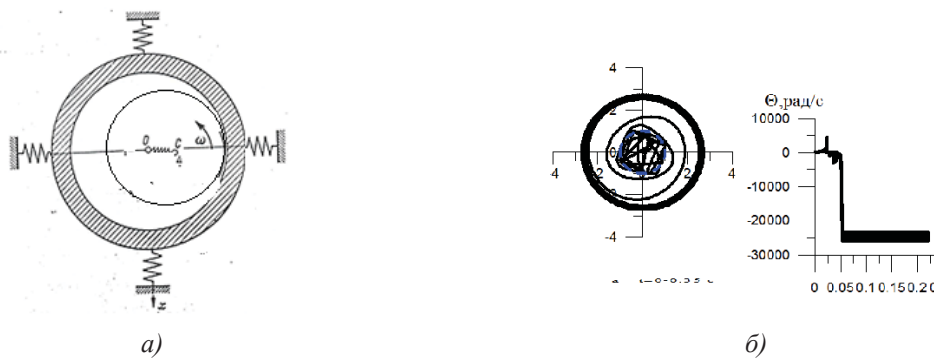


Рис.15. Ротор в податливом статоре: а) расчетная модель, б) предельная скорость обкатки

Уравнения движения [5]

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{10} + 2h\dot{u}_1 + p^2 u_1 + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{\delta}{u}\right) (u_1 - \chi u_2) &= e / m (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \\ \ddot{u}_{20} + 2h\dot{u}_2 + p^2 u_2 + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{\delta}{u}\right) (u_2 + \chi u_1) &= -e / m (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \\ \ddot{\varphi} &= F(u_1, u_2, t) \\ u_{10} &= u_1 + \varepsilon \cos \varphi, u_{20} = u_2 + \varepsilon \sin \varphi, u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \end{aligned}$$

u_1, u_2 – смещения геометрического центра ротора, u_{10}, u_{20} – смещения центра массы.

Предельная скорость обкатки колеблется около частоты p собственных колебаний системы «ротор-опоры-статор» [5] $p = \sqrt{(k + k_{ct}) / m}$, что согласуется с полученной выше в п.1.2 аналитической формулой. Уменьшение жёсткости статора, коэффициента трения скольжения между поверхностями ротора и статора, увеличение демпфирования при перемещениях ротора и статора, более устойчиво против возбуждения асинхронного обката.

Литература

1. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. Изд. АН СССР, 1959.
2. Позняк Э.Л. Нелинейные колебания ротора на подшипниках скольжения // М.-Наука, 1972, 26с.
3. Банах Л.Я. Некоторые явления, возникающие при движении вала в подшипнике с зазором // Машиноведение, №1. С.70- 79. 1965.
4. Блехман И.И. Вибрационная механика, М. Наука, 1994, 398 с.
5. Шатохин В.Ф., Циммерман СД. Влияние параметров в месте контакта ротора со статором на развитие обката после мгновенной разбалансировки. Харьков, ХАИ, 2010, С.87-96.
6. Кобринский А.Е., Кобринский А.А. Виброударные системы (динамика и устойчивость) -М. Наука, 1973.
7. Банах Л.Я., Морозова Г.Н., Никифоров А.Н. Особенности виброударных режимов в роторных системах, Труды VIII всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем», Т. 2, Нижний Новгород, 2008, с.34-38.
8. Банах Л.Я., Диментберг Ф.М., Звиногородский Н.В. О возникновении параметрического резонанса горизонтально расположенного вала с грузом, имеющего подшипник с радиальным зазором // Известия Академии наук СССР, Отделение технических наук, механика и машиностроение, 1961 г, с.159-162.
9. Никифоров А.Н. Обобщенная математическая модель ротора Джеффкотта-Лавалья с учетом проскальзывания при контактах и несоосности со статором // Вестник научно-технического развития, №5(57), 2012, С.41-56.

О БЕЗУДАРНЫХ ПРЫЖКАХ ТЕЛА, НЕСУЩЕГО ПОДВИЖНЫЕ МАССЫ

Бардин Б.С.

Московский авиационный институт, кафедра теоретической механики, Москва, Россия
bsbardin@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается плоское движение твердого тела, несущего две внутренние подвижные массы. Предполагается, что подвижные массы совершают относительно тела гармонические колебания с равными частотами, при этом движение масс происходит во взаимно перпендикулярных направлениях. В начальный момент времени тело находится на горизонтальной шероховатой плоскости. При перемещении внутренних масс тело может либо оставаться на горизонтальной плоскости, покоясь или двигаясь по ней прямолинейно, либо отрываться от плоскости, совершая свободное движение и возвращаясь на нее под действием силы тяжести. Показано, что при определенных значениях параметров задачи возможен периодический режим движения, состоящий из нескольких фаз: покой, скольжение по горизонтальной плоскости, отрыв и свободное движение над горизонтальной плоскостью, безударный контакт с плоскостью и скольжение по ней до остановки.

1. Введение. Анализ движения механических систем, перемещающихся посредством подвижных внутренних масс, посвящено много исследований. В работах [1,2] рассматриваются прямолинейные движения твердого тела, внутри которого имеется материальная точка, совершающая относительно тела прямолинейные колебательные движения параллельно движению самого тела. Движение такой системы обусловлено наличием внешнего сопротивления. Рассмотрены случаи прямолинейного движения под действием сил сухого кулоновского трения и сил вязкого трения, линейно или квадратично зависящих от скорости тела. Предполагалось, что силы сопротивления могут как зависеть от направления скорости (анизотропное сопротивление), так и не зависеть от него (изотропное сопротивление). В работе [3] анализировалось движение по горизонтальной шероховатой плоскости, несущего тела под действием внутренних масс совершающих вертикальные и горизонтальные перемещения, а в работе [4] исследовалась задача о построении оптимального управления такой системой.

Исследование характера движения тел, несущих внутренние массы, представляет не только теоретический интерес, но может иметь и прикладное значение для создания мобильных устройств (вибрационных роботов), движущихся посредством перемещения внутренних масс. Преимущество таких устройств состоит том, что они не требуют специальных движителей (колес, гусениц, ног и проч.) и могут быть выполнены в замкнутой оболочке. Последнее обстоятельство делает их устойчивыми к агрессивному воздействию внешней среды и позволяет применять, как на твердых поверхностях, так и в жидкостях. Такие устройства являются перспективными для современной космической отрасли. В частности, они могут найти применение при исследовании небесных тел: астероидов, планет солнечной системы и их спутников. Исследованию движения вибрационных мобильных роботов посвящен цикл работ [5,6,7,8], где предложены различные способы технической реализации таких систем, получены их уравнения движения и на основе численного моделирования проведен анализ их динамики.

2. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, состоящую из твердого тела массы m_0 (корпуса) и двух материальных точек P_1 и P_2 с массами m_1 и m_2 соответственно (внутренние массы), движущимися относительно корпуса по двум взаимно перпендикулярным направляющим, проходящим через центр масс корпуса. В начальный момент времени корпус находится на плоской абсолютно твердой

горизонтальной шероховатой поверхности. Далее будем рассматривать плоскопараллельное движение корпуса и внутренних масс. С этой целью в вертикальной плоскости введем абсолютную систему координат Oxy , ось Ox которой направлена вдоль горизонтальной поверхности. С корпусом жестко свяжем подвижную систему координат $C\xi\eta$, начало которой совпадает с центром масс корпуса, а оси $C\xi$ и $C\eta$ направлены по направляющим движения внутренних масс P_1 и P_2 соответственно (см. Рис.1). Законы движения внутренних масс относительно корпуса задаются известными функциями времени $\xi(t)$ и $\eta(t)$ соответственно.

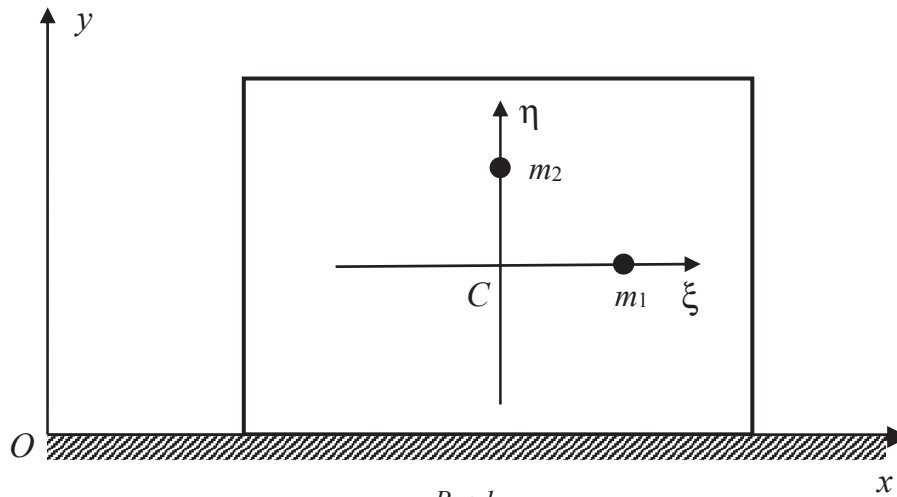


Рис.1

Между поверхностью и корпусом действуют силы сухого (кулонова) трения, f – коэффициент трения скольжения. Положение центра масс C корпуса определяется координатами x, y . Посредством перемещения внутренних масс корпус может совершать различные виды движения. В частности, он может скользить по горизонтальной плоскости, двигаясь поступательно и прямолинейно, он также может отрываться от горизонтальной плоскости, совершая в течении некоторого промежутка времени свободное движение. В общем случае свободное движение над горизонтальной плоскостью не является поступательным и для его описания помимо координат центра масс x, y введем еще угол φ , задающий ориентацию осей $C\xi\eta$ относительно осей Oxy .

Фаза свободного движения завершается падением корпуса на горизонтальную плоскость. При определенных условиях на значения параметров системы и законы движения внутренних масс такое падение может происходить безударным образом, когда возвращаясь под действием силы тяжести на горизонтальную плоскость корпус касается ее с нулевой скоростью. В данной работе исследуются безударные периодические режимы движения.

По-видимому, впервые безударные режимы движения изучались в работе [9]. Методы исследования безударных движений систем с неудерживающими связями были предложены в [10]. В ряде работ исследовались безударные движения различных механических систем: колесо со смещенным центром тяжести на гладкой [11] или шероховатой [12] плоскости, тело на упругой ноге [13], связка двух тел на круговой орбите [14]. Вопросы устойчивости безударных движений указанных систем рассматривались в работах [11,12,14].

3. Уравнения движения. Будем считать, что параметры задачи (геометрические размеры и форма корпуса, распределение массы, законы относительного движения внутренних масс) таковы, что область контакта корпуса с горизонтальной поверхностью имеет конечные размеры и не изменяется во все время движения корпуса по горизонтальной поверхности. В этом случае до тех пор пока выполняется неравенство

$mg \geq -m_2\ddot{\eta}$ корпус движется по горизонтальной поверхности поступательно и без отрыва, его движение описывается следующим уравнением

$$m\ddot{x} + m_1\ddot{\xi} = F_c \quad (1)$$

где $m = m_0 + m_1 + m_2$, а F_c – сила сухого трения

$$F_c = \begin{cases} -fN\text{sign}\dot{x}, & \text{если } \dot{x} \neq 0, \\ m_1\ddot{\xi}, & \text{если } \dot{x} = 0 \text{ и } |m_1\ddot{\xi}| \leq fN, \\ fN\text{sign}\ddot{\xi}, & \text{если } \dot{x} = 0 \text{ и } |m_1\ddot{\xi}| > fN \end{cases} \quad (2)$$

здесь $N = mg + m_2\ddot{\eta}$ – нормальная реакция, действующая на корпус со стороны горизонтальной поверхности.

При выполнении неравенства $mg < -m_2\ddot{\eta}$ происходит отрыв корпуса от горизонтальной поверхности и начинается фаза свободного движения. Уравнения движения корпуса в вертикальной плоскости имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^2}(mx + m_1\xi \cos \varphi - m_2\eta \sin \varphi) &= 0, \\ \frac{d}{dt^2}(mx + m_1\xi \sin \varphi + m_2\eta \cos \varphi) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\left[J + \frac{m_1}{m}(m_0 + m_2)\xi^2 + \frac{m_2}{m}(m_0 + m_1)\eta^2 \right] \dot{\varphi} + \frac{m_1m_2}{m^2}(m + m_0)[\eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta}] \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где J – момент инерции корпуса относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно вертикальной плоскости.

Из последнего уравнения (3) следует, что при выполнении условия

$$\eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta} = \text{const} \quad (4)$$

движение корпуса будет поступательным. Аналогичное условие было получено в [15] для поступательного движения твердого тела, несущего одну внутреннюю массу. Далее будем предполагать, что относительное движение внутренних масс удовлетворяет условию (4), т.е. после отрыва от горизонтальной поверхности корпус движется поступательно.

Будем считать, что функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$, описывающие относительное движение внутренних масс, являются T -периодическими и непрерывными вместе со своими производными до второго порядка включительно. Далее полагаем: $A_1 = \max|\xi(t)|$ и $A_2 = \max|\eta(t)|$. Введем новые безразмерные переменные и время по формулам

$$x = \frac{A_1m_1}{m}x', \quad y = \frac{A_2m_2}{m}y', \quad \xi = A_1\xi', \quad \eta = A_2\eta', \quad t = \omega t' \quad (5)$$

где $\omega = 2\pi/T$.

Везде далее для безразмерных величин, введенных по формулам (5), будем использовать старые обозначения, т.е. будем опускать в знак «'». С учетом сказанного

условие движения корпуса по горизонтальной плоскости без отрыва задается неравенством $\mu + \ddot{\eta} \geq 0$, а уравнение, описывающее это движение, принимает следующий вид

$$\ddot{x} + \ddot{\xi} = \Phi_c, \quad (6)$$

где

$$\Phi_c = \begin{cases} -k(\mu + \ddot{\eta})\text{sign}\dot{x}, & \text{если } \dot{x} \neq 0, \\ \ddot{\xi}, & \text{если } \dot{x} = 0 \text{ и } |\ddot{\xi}| \leq k(\mu + \ddot{\eta}), \\ k(\mu + \ddot{\eta})\text{sign}\ddot{\xi}, & \text{если } \dot{x} = 0 \text{ и } |\ddot{\xi}| > k(\mu + \ddot{\eta}) \end{cases} \quad (7)$$

здесь $k = f \frac{m_2 A_2}{m_1 A_1}$, $\mu = \frac{mg}{\omega^2 m_2 A_2}$, а $\xi(t)$ и $\eta(t)$ являются 2π -периодическими функциями безразмерного времени.

Будем считать, что условие (4) выполнено, тогда уравнения поступательного движения корпуса над горизонтальной плоскостью примут следующий вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \ddot{\xi} &= 0, \\ \ddot{y} + \ddot{\eta} &= -\mu. \end{aligned} \quad (8)$$

4. Вертикальные безударные прыжки. Рассмотрим сначала частный случай, когда $\xi=0$, т.е. корпус содержит только одну подвижную массу, перемещающуюся вдоль оси $C\eta$. Пусть в начальный момент времени скорость корпуса равна нулю и $\mu + \ddot{\eta} \geq 0$, т.е. корпус находится в состоянии покоя. Если закон относительного движения внутренней массы выбран так, что в некоторый момент времени t_1 последнее неравенство поменяет знак, то в этот момент времени корпус оторвется от горизонтальной плоскости и начнет совершать вертикальное движение, описываемое уравнением

$$\ddot{y} + \ddot{\eta} = -\mu. \quad (10)$$

Интегрируя уравнение (8) с начальными условиями $y(t_1) = \dot{y}(t_1) = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \dot{\eta}(t_1) - \dot{\eta}(t) - \mu(t - t_1), \\ y(t) &= \eta(t_1) - \eta(t) + \dot{\eta}(t_1)(t - t_1) - \frac{\mu}{2}(t - t_1)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая, что $\ddot{\eta}(t_1) = -\mu$ уравнения (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \dot{\eta}(t_1) - \dot{\eta}(t) + \ddot{\eta}(t_1)(t - t_1), \\ y(t) &= \eta(t_1) - \eta(t) + \dot{\eta}(t_1)(t - t_1) + \frac{1}{2}\ddot{\eta}(t_1)(t - t_1)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу ограниченности относительного движения условие $\mu + \ddot{\eta} < 0$ может выполняться только на конечном интервале времени поэтому под действием силы тяжести в некоторый момент времени t_2 корпус снова окажется на горизонтальной плоскости. Если при этом будут выполнены два условия: $y(t) > 0$ при $t \in [t_1; t_2]$ и $y(t_2) = \dot{y}(t_2) = 0$,

то вертикальное поступательное движение корпуса заканчивается безударным контактом с горизонтальной плоскостью. Учитывая (12), последние из двух условий безударного контакта можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(t_1) - \dot{\eta}(t) + \ddot{\eta}(t_1)(t - t_1) &= 0, \\ \eta(t_1) - \eta(t) + \dot{\eta}(t_1)(t - t_1) + \frac{1}{2}\ddot{\eta}(t_1)(t - t_1)^2 &= 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Пусть подвижная масса перемещается относительно корпуса по гармоническому закону $\eta(t) = \sin t$. В этом случае из уравнений (13) имеем

$$t_1 = -z_* + \frac{\pi}{2}(2m+1), \quad t_2 = z_* + \frac{\pi}{2}(2m+1), \quad m \in N, \quad (14)$$

где z_* – положительный корень уравнения $\operatorname{tg} z = z$. Последнее уравнение имеет счетное число положительных корней. Эти корни можно представить в виде

$$z_* = z_n + \pi n, \quad n \in N, \quad (15)$$

где z_n – корень уравнения $\operatorname{tg} z_n = z_n + \pi n$, принадлежащий интервалу $[0; \pi/2]$. Нетрудно показать, что такой корень всегда существует и является единственным. Пусть в качестве начального принят момент времени $t = 0$, тогда будет выполняться неравенство $t_1 < \pi/2$. Принимая это во внимание и используя равенство (15), выражения (14) можно переписать в так

$$t_1 = \frac{\pi}{2} - z_n, \quad t_2 = \frac{\pi}{2} + z_n + 2\pi n, \quad n \in N, \quad (16)$$

Заметим, что безударный возврат корпуса на плоскость возможен не при любых значениях параметра μ , а лишь при тех для которых выполняется условие $\ddot{\eta}(t_1) = -\mu$. Существует счетное множество таких значений

$$\mu = \mu_n = \cos z_n, \quad n \in N \quad (17)$$

Например, при $k=1$ безударные прыжки корпуса будут возможны при $\mu = \mu_1 = 0,21723363$. Отрыв корпуса от горизонтальной поверхности происходит при $t_1 = 0,2189795$, а его безударное возвращение на поверхность – при $t_2 = 9,2057985$.

После возвращения на поверхность корпус будет оставаться на ней в покое до момента времени $t = t_1 + 2\pi(n+1)$. Затем вновь произойдет отрыв корпуса и его движение в вертикальной плоскости повторится. Таким образом, корпус будет совершать периодические вертикальные безударные движения (прыжки), с периодом $2\pi(n+1)$.

5. Безударные прыжки при наличии горизонтальной составляющей движения. Рассмотрим теперь более общий случай, когда перемещение центра масс корпуса имеет как в горизонтальную, так и вертикальную составляющие. Предположим, что обе внутренние массы движутся относительно корпуса по гармоническому закону с одинаковыми частотами и фазами

$$\xi(t) = \eta(t) = \sin t, \quad (18)$$

Покажем, что при $\mu = \mu_n, n \in N$ уравнения движения допускают решение с начальными условиями $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$, отвечающие поступательному движению корпуса с периодически меняющейся скоростью. При этом один период изменения скорости корпус совершает следующие виды движения:

1. покой на горизонтальной поверхности,
2. скольжение по горизонтальной поверхности,
3. отрыв и свободный полет над горизонтальной поверхностью до безударного контакта с ней,
4. скольжения по горизонтальной поверхности до остановки.

В при заданном выше гармоническом законе движения в начальный момент времени $t = 0$ имеет место неравенство $|\ddot{\xi}| < k(\mu_n + \ddot{\eta})$. Поэтому при нулевых начальных условиях тело будет находится на выполняется горизонтальной поверхности в состоянии покоя до тех пор пока последнее неравенство выполняется. Пусть t_0 – момент времени, когда это неравенство нарушится и тело начнет движение по горизонтальной поверхности. Величина t_0 является корнем уравнения $|\ddot{\xi}| = k(\mu_n + \ddot{\eta})$, решая которое с учетом (18) имеем

$$t_0 = \arcsin \frac{k\mu_n}{1+k} \quad (19)$$

Пока выполнено условие $\mu_n + \ddot{\eta} \geq 0$ тело будет находиться на горизонтальной поверхности, двигаясь по ней в положительном направлении. Это движение описывается уравнением (6), вид которого в данном случае можно уточнить следующим образом

$$\ddot{x} = (1+k)\sin t - k\mu_n \quad (20)$$

Поскольку относительное движение внутренних масс удовлетворяет условию (4), то в случае отрыва корпуса от поверхности он продолжит поступательное движение. При этом горизонтальная составляющая движения корпуса не будет влиять на характер его движения по вертикали. Это означает, что вертикальная координата центра масс корпуса задается также как и в рассмотренном выше случае вертикальных прыжков. В частности, в момент времени t_1 произойдет отрыв корпуса от горизонтальной поверхности. В момент времени t_2 корпус вернется на горизонтальную поверхность с нулевой вертикальной составляющей скорости его центра масс.

Горизонтальная составляющая движения корпуса на интервале $[t_1; t_2]$ описывается уравнением

$$\ddot{x} = \sin t \quad (21)$$

Интегрируя уравнения (20) на интервале времени $[t_0; t_1]$ с начальным условием $\dot{x}(t_0) = 0$, имеем

$$\dot{x}(t_1) = (1+k)(\cos t_0 - \cos t_1) - k\mu_n(t_1 - t_0). \quad (22)$$

Отметим еще, что поскольку правая часть уравнения (20) на интервале $[t_0; t_1]$ положительна, то $\dot{x}(t_1) > 0$.

Интегрируя теперь уравнение (21) на интервале времени $[t_1; t_2]$ и учитывая, что при $\mu = \mu_k$ на основании формул (14) $t_2 = \pi(2n+1) - t_1$, получаем

$$\dot{x}(t_2) = \dot{x}(t_1) + 2\cos t_1 > 0. \quad (23)$$

Таким образом, в момент времени t_2 корпус вернется на поверхность и начнет движение по ней в положительном направлении до остановки в некоторый момент

времени t_3 . Движение на интервале времени $[t_2; t_3]$ описывается уравнением (20). Интегрируя это уравнение на указанном интервале времени, имеем

$$\dot{x}(t_3) - \dot{x}(t_2) = (1+k)(\cos t_2 - \cos t_3) - k\mu_n(t_3 - t_2) \quad (24)$$

Полагая в (24) $\dot{x}(t_3) = 0$ и упрощая полученное равенство с учетом выражений (16), (17), (20) и (21), получаем следующее уравнение для определения t_3

$$(1+k)(\cos t_3 - \cos t_0) + k\mu_n(t_3 - t_0) = 0 \quad (25)$$

Можно показать, что на интервале $[t_2; t_0 + 2\pi(n+1)]$ уравнение (25) всегда имеет единственный действительный корень. Поскольку на интервале времени $[t_3; t_0 + 2\pi(n+1)]$, будет выполнено условие $|\xi| < k(\mu_n + \ddot{\eta})$, то после остановки корпуса будет находиться в покое до момента времени $t_0 + 2\pi(n+1)$, а затем описанные выше этапы движения повторятся. Таким образом, скорость корпуса является $2\pi(n+1)$ -периодической функцией времени. За один период изменения скорости корпус переместиться в положительном направлении оси Ox .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00068).

Литература

1. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 915–941.
2. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 202–215.
3. Болотник Н.Н., Зейдис И.М., Циммерманн К., Яцун С.Ф. Динамика управляемых движений вибрационных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. Т. 70. № 5. С. 157–167.
4. Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю. Оптимальное управление прямолинейным движением твердого тела по шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 216–229.
5. Яцун С.Ф., Разинькова А.В., Гранкин А.Н. Исследование движения виброробота с электромагнитным приводом // Известия вузов. Машиностроение. 2007. № 5. С. 53–64.
6. Яцун С.Ф., Безмен П.А., Сапронов К.А., Рублев С.Б. Динамика мобильного вибрационного робота с внутренней подвижной массой // Известия Курского государственного технического университета. 2010. Т. 31. № 2. С. 21–31.
7. Яцун С.Ф., Лупехина И.В., Сапронов К.А. Моделирование движения прыгающего вибрационного микроробота // Известия Курского государственного технического университета. 2009. Т. 27. № 2. С. 25–31.
8. Яцун С.Ф., Мищенко В.Я., Сафаров Д.И. Исследование движения двухмассового вибрационного робота // Известия вузов. Машиностроение. 2006. № 5. С. 32–42.
9. Schiehlen W., Gao J. Simulation des Stossfreien H⁺upfens // Z. angew. Math. Mech. 1989. Vol. 69. no. 5. Pp. 302–303.
10. Иванов А.П. О безударных движениях в системах с неударживающими связями // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 1–15.
11. Иванов А.П. О безударных прыжках неоднородного колеса. 1. Случай гладкой опоры. // Изв. РАН МТТ. 1992. № 1. С. 25–31.
12. Иванов А.П. О безударных прыжках неоднородного колеса. 2. Случай шероховатой опоры. // Изв. РАН МТТ. 1993. № 1. С. 61–64.

13. Базиян А.Б. К динамике двухмассового прыгуна // Изв. РАН МТТ. 2000. № 1. С. 70–81.
14. Иванов А.П., Базиян А.Б. Исследование асимптотических движений связки двух тел на круговой орбите // Космич. исслед. 1995. Т. 33. № 5. С. 485–490.
15. Маркеев А.П. О периодическом движении твердого тела, несущего материальную точку, при наличии его соударений с горизонтальной плоскостью // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 1. С. 71 – 81.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЙ ТЯЖЁЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ГОРИЗОНТАЛЬНО ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Беличенко М.В.

Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия

tuzemec1@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматривается движение тяжелого твердого тела, точка подвеса которого совершает гармонические горизонтальные вибрации высокой частоты и малой амплитуды. В рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений движения найдены положения относительного равновесия тела, а также необходимые и достаточные условия их устойчивости. Рассмотрены основные частные случаи геометрии масс: тело с центром масс на главной оси инерции или в главной плоскости инерции и динамически симметричное тело.

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Рассмотрим движение твердого тела массы m в однородном поле тяжести. Пусть одна из точек тела O , называемая далее точкой подвеса, совершает горизонтальные гармонические колебания по закону $O'O = h \cos(\Omega t)$ относительно некоторой фиксированной точки O' .

Введем поступательно движущуюся систему координат $OXYZ$, ось OZ которой направлена вертикально вверх, а ось OY направлена вдоль колебаний, и связанную с телом систему координат $Oxyz$ с осями, направленными вдоль главных осей инерции тела для точки O . Соответствующие главные моменты инерции обозначим через A , B и C , а проекции радиус-вектора центра масс OG на оси Ox, Oy, Oz – через x_G, y_G и z_G . Предположим, что амплитуда колебаний h мала по сравнению с приведённой длиной тела $l = A/(mx_G)$, а частота колебаний Ω велика по отношению к характерной частоте $\omega = \sqrt{g/l}$. Введём малый параметр $\varepsilon = h/l$ и будем считать, что $h\Omega \ll 1$.

Ранее в работе [1] методами теории возмущений была получена приближенная автономная система дифференциальных уравнений Эйлера-Пуассона

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= mg(z_G\gamma_2 - y_G\gamma_3) + m_x, \quad \dot{\alpha}_1 = r\alpha_2 - q\alpha_3, \quad \dot{\alpha}_2 = p\alpha_3 - r\alpha_1, \quad \dot{\alpha}_3 = q\alpha_1 - p\alpha_2, \\ B\dot{q} + (A - C)pq &= mg(x_G\gamma_3 - z_G\gamma_1) + m_y, \quad \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \\ C\dot{r} + (B - A)rp &= mg(y_G\gamma_1 - x_G\gamma_2) + m_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, m_x, m_y$ и m_z – проекции вектора абсолютной угловой скорости тела, орта оси OZ , орта оси вибраций OY и вектора вибрационного момента [1] на оси системы координат $Oxyz$ соответственно, причём

$$\begin{aligned} m_x &= \sigma \left(\frac{x_G}{B} b\alpha_2 + \frac{x_G}{C} c\alpha_3 - \frac{y_G\alpha_2 + z_G\alpha_3}{A} a \right), \quad m_z = \sigma \left(\frac{z_G}{A} a\alpha_1 + \frac{z_G}{B} b\alpha_2 - \frac{x_G\alpha_1 + y_G\alpha_2}{C} c \right), \\ m_y &= \sigma \left(\frac{y_G}{A} a\alpha_1 + \frac{y_G}{C} c\alpha_3 - \frac{x_G\alpha_1 + z_G\alpha_3}{B} b \right), \quad \sigma = \frac{1}{2}(mh\Omega)^2, \\ a &= z_G\alpha_2 - y_G\alpha_3, \quad b = x_G\alpha_3 - z_G\alpha_1, \quad c = y_G\alpha_1 - x_G\alpha_2, \end{aligned}$$

где параметр σ характеризует интенсивность вибраций.

Движение тела может быть описано также с помощью приближенных канонических уравнений с гамильтонианом

$$H = \frac{(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi)(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{2AB \sin^2 \theta} + \frac{A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi}{2AB p_\theta^2} + \frac{p_\varphi^2}{2C} +$$

$$+ \frac{(B - A) \sin \varphi \cos \varphi (p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{AB \sin \theta} + mg((x_G \sin \varphi + y_G \cos \varphi) \sin \theta + z_G \cos \theta) + \Pi_\nu,$$

где ψ, φ и θ – углы Эйлера, определяющие ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно $OXYZ$, а Π_ν – вибрационный потенциал [1], соответствующий вибрационному моменту, имеющий вид

$$\Pi_\nu = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{(z_G (-\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta) + y_G \cos \psi \sin \theta)^2}{A} + \right.$$

$$+ \frac{(-x_G \cos \psi \sin \theta - z_G (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta))^2}{B} +$$

$$\left. + \frac{(y_G (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) - x_G (-\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta))^2}{C} \right). \quad (2)$$

При этом связь углов Эйлера ψ, φ и θ и компонентов α_i и γ_i описывается формулами

$$\alpha_1 = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, \quad \alpha_2 = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta, \quad \alpha_3 = -\cos \psi \sin \theta,$$

$$\gamma_1 = \sin \varphi \sin \theta, \quad \gamma_2 = \sin \varphi \cos \theta, \quad \gamma_3 = \cos \theta. \quad (3)$$

В докладе рассматривается вопрос о существовании положений относительного (в системе координат $OXYZ$) равновесия исследуемой механической системы, их бифуркации и устойчивости. Рассматриваются три случая геометрии масс тела: тело с центром масс на главной оси или плоскости инерции и динамически симметричное тело.

2. Положения равновесия. Вопрос о существовании относительных положений равновесия удобно рассматривать с помощью уравнений Эйлера-Пуассона. Эти равновесия соответствуют частным решениям, при которых $p = q = r \equiv 0, \alpha_i = \text{const}, \gamma_i = \text{const} (i = 1, 2, 3)$. В таком случае уравнения Пуассона в системе (1) удовлетворяются автоматически, а уравнения Эйлера принимают вид

$$0 = mg(z_G \gamma_2 - y_G \gamma_3) + m_x, \quad 0 = mg(x_G \gamma_3 - z_G \gamma_1) + m_y, \quad 0 = mg(y_G \gamma_1 - x_G \gamma_2) + m_z. \quad (4)$$

Были найдены два типа положений равновесия. Для первого типа равновесий центр масс тела находится на одной вертикали с точкой подвеса как выше, так и ниже её (верхние и нижние вертикальные положения равновесия). Для любого тела существуют по две группы и верхних, и нижних равновесий.

Наборы равновесных значений α_i и γ_i для тела с центром масс на главной оси ($y_G = 0, z_G = 0$) и динамически симметричного тела ($A = B, y_G = 0$) показаны в таблицах 1 и 2 соответственно. Вертикальные положения равновесия для тела с центром масс в главной плоскости инерции совпадают с равновесиями динамически симметричного тела.

Таблица 1. Вертикальные равновесия тела с центром масс на главной оси инерции.

Равновесие	α_1	α_2	α_3	γ_1	γ_2	γ_3
Рис. 1. а)	0	0	1	-1	0	0
Рис. 1. б)	0	1	0	-1	0	0
Рис. 1. в)	0	0	1	1	0	0
Рис. 1. г)	0	1	0	1	0	0

Таблица 2. Вертикальные равновесия динамически симметричного тела.

Равновесие	α_1	α_2	α_3	γ_1	γ_2	γ_3
Рис. 2. а)	$-z_G / r_G$	0	x_G / r_G	$-x_G / r_G$	0	$-z_G / r_G$
Рис. 2. б)	0	1	0	$-x_G / r_G$	0	$-z_G / r_G$
Рис. 2. в)	z_G / r_G	0	$-x_G / r_G$	x_G / r_G	0	z_G / r_G
Рис. 2. г)	0	1	0	x_G / r_G	0	z_G / r_G

Для тела с центром масс на главной оси инерции эти положения таковы, что вибрации происходят вдоль одной из двух осей инерции тела, не содержащих центр масс (Рис. 1). Для динамически симметричного тела в вертикальных равновесиях ось Oy либо сонаправлена с осью вибраций, либо перпендикулярна ей (Рис. 2).

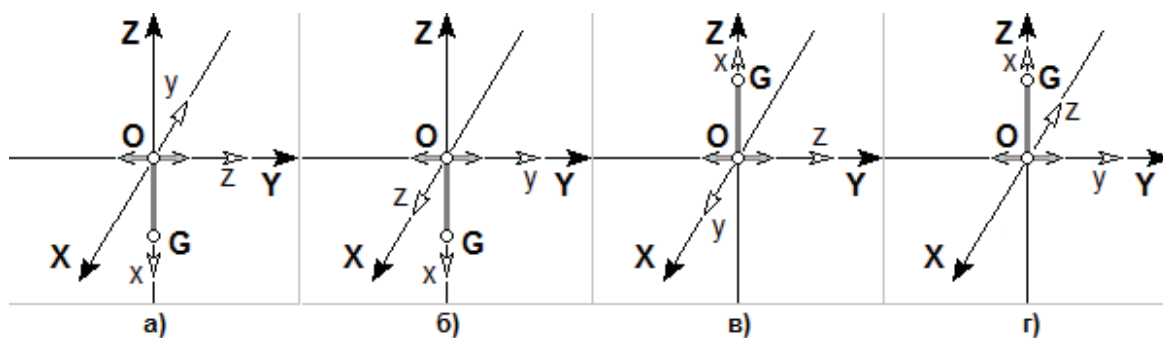


Рис. 1. Вертикальные равновесия тела с центром масс на главной оси инерции.

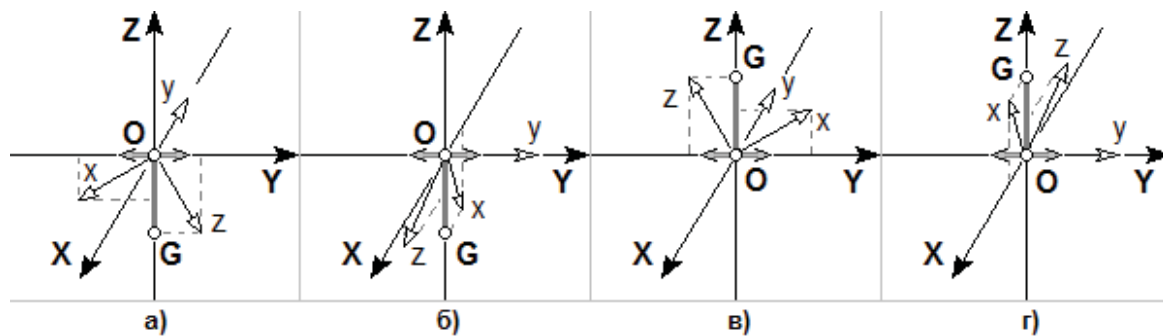


Рис. 2. Вертикальные равновесия динамически симметричного тела.

Для равновесий второго типа радиус-вектор центра масс лежит в плоскости, содержащей вертикаль и ось вибраций, и составляет с нижней вертикалью острый угол (боковые равновесия).

Равновесные значения α_i и γ_i для тела с центром масс на главной оси и тела с центром масс в главной плоскости представлены в таблицах 3 и 4 соответственно. Равновесные значения для динамически симметричного тела получаются из значений, представленных в таблице 4 при условии $A = B$.

Таблица 3. Боковые равновесия тела с центром масс на главной оси инерции.

Равновесие	α_1	α_2	α_3	γ_1	γ_2	γ_3
Рис. 3. а)	$\sqrt{1 - \left(\frac{mgB}{\sigma x_G}\right)^2}$	0	$\frac{mgB}{\sigma x_G}$	$-\frac{mgB}{\sigma x_G}$	0	$\sqrt{1 - \left(\frac{mgB}{\sigma x_G}\right)^2}$
Рис. 3. б)	$\sqrt{1 - \left(\frac{mgC}{\sigma x_G}\right)^2}$	$\frac{mgC}{\sigma x_G}$	0	$-\frac{mgC}{\sigma x_G}$	$\sqrt{1 - \left(\frac{mgC}{\sigma x_G}\right)^2}$	0

Таблица 4. Боковые равновесия тела с центром масс в главной плоскости инерции.

	Рис. 4. а)	Рис. 4. б)
α_1	$-\frac{mgBz_G + x_G \sqrt{\sigma^2 r_G^2 - (mgB)^2}}{\sigma r_G^2}$	$\frac{x_G}{r_G} \sqrt{1 - \left(\frac{CAmg}{\sigma(Ax_G^2 + Cz_G^2)}\right)^2} r_G^2$
α_2	0	$\frac{CAmgr_G}{\sigma(Ax_G^2 + Cz_G^2)}$
α_3	$\frac{mgBx_G + z_G \sqrt{\sigma^2 r_G^2 - (mgB)^2}}{\sigma r_G^2}$	$\frac{z_G}{r_G} \sqrt{1 - \left(\frac{CAmg}{\sigma(Ax_G^2 + Cz_G^2)}\right)^2} r_G^2$
γ_1	$-\frac{mgBx_G + z_G \sqrt{\sigma^2 r_G^2 - (mgB)^2}}{\sigma r_G^2}$	$-\frac{CAmgx_G}{\sigma(Ax_G^2 + Cz_G^2)}$
γ_2	0	$\sqrt{1 - \left(\frac{CAmg}{\sigma(Ax_G^2 + Cz_G^2)}\right)^2} r_G^2$
γ_3	$-\frac{mgBz_G + x_G \sqrt{\sigma^2 r_G^2 - (mgB)^2}}{\sigma r_G^2}$	$-\frac{CAmgz_G}{\sigma(Ax_G^2 + Cz_G^2)}$

Первая группа боковых положений равновесия тела с центром масс на главной оси существует при $\sigma \geq \sigma_1 = mgB/x_G$ и соответствует положению, при котором плоскости Oxz и OYZ совпадают, при этом вектор OG составляет с нижней вертикалью острый угол $\varphi = \varphi_1 = \arccos(mgB/\sigma x_G)$ (Рис. 3. а). Вторая группа равновесий существует при $\sigma \geq \sigma_2 = mgC/x_G$, при этом совпадают плоскости Oxy и OYZ , а вектор OG составляет с нижней вертикалью острый угол $\varphi = \varphi_2 = \arccos(mgC/\sigma x_G)$ (Рис. 3. б). Боковые равновесия одной группы для тела с центром масс в главной плоскости существуют при $\sigma \geq \sigma_1 = mgB/r_G$. В этом случае плоскости Oxz и OYZ совпадают, а вектор OG составляет с нижней вертикалью острый угол $\varphi = \varphi_1 = \arccos(mgB/\sigma r_G)$ (Рис. 4. а). Равновесия второй группы появляются при $\sigma \geq \sigma_2 = CAmgr_G / (Ax_G^2 + Cz_G^2)$. При этом ось OX лежит в плоскости Oxz , а вектор OG лежит в плоскости OYZ и составляет с нижней вертикалью угол $\varphi = \varphi_2 = \arccos(CAmgr_G / \sigma(Ax_G^2 + Cz_G^2))$ (Рис. 4. б).

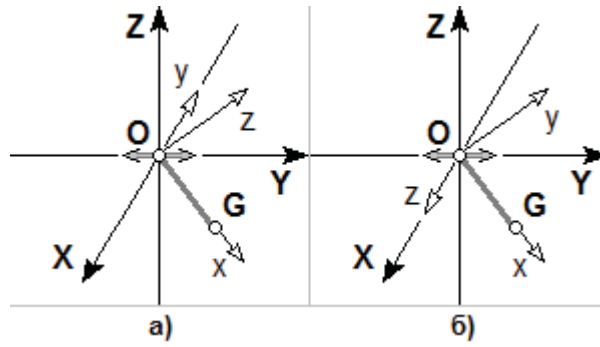


Рис. 3. Боковые равновесия тела с центром масс на главной оси инерции.

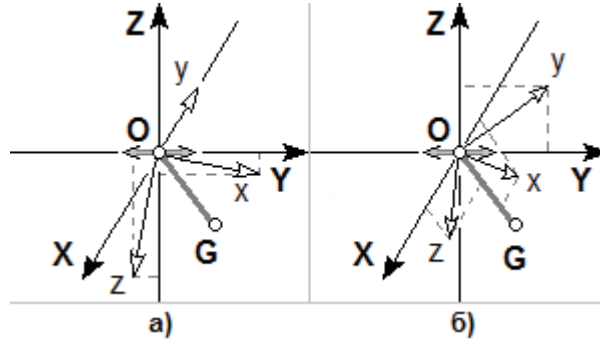


Рис. 4. Боковые равновесия тела с центром масс в главной плоскости инерции.

Для тела с центром масс в главной плоскости при выполнении соотношения $x_G^2 AB - x_G^2 CA - z_G^2 CA + z_G^2 CB = 0$ система уравнений (4) вырождается. В таком случае имеет место семейство положений равновесия. При этом радиус-вектор центра масс располагается так же, как показано на Рис. 4, но ориентация тела относительно OG может быть произвольной. Устойчивость этого случая в данной работе не исследуется.

3. Достаточные условия устойчивости положений равновесия. Устойчивость полученных равновесий удобнее изучать, рассматривая уравнения движения в канонической форме. Перейдём от величин α_i и γ_i к ψ, φ и θ с помощью соотношений (3) и введём возмущения по формулам

$$\psi = \psi_0 + x_1, \quad \varphi = \varphi_0 + x_2, \quad \theta = \theta_0 + x_3, \quad P_\psi = y_1, \quad P_\varphi = y_2, \quad P_\theta = y_3,$$

где ψ_0, φ_0 и θ_0 соответствуют равновесным значениям углов Эйлера. Разложение гамильтониана возмущённого движения по возмущениям имеет вид $H = H_2 + \dots$, где H_2 – квадратичная часть, а многочлен соответствует слагаемым более высоких порядков.

Функция H_2 имеет структуру $H_2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 b_{ij} y_i y_j$.

Так как рассматриваемая система автономна, она имеет первый интеграл $H = \text{const}$, поэтому достаточные условия будем искать в виде условий положительной определённости H_2 .

Применение критерия Сильвестра показало, что эти условия не выполняются для всех верхних положений равновесия. У нижних и боковых равновесий есть области выполнения достаточных условий устойчивости. Представим эти области в таблицах 5, 6 и 7.

Таблица 5. Условия устойчивости равновесий тела с центром масс на главной оси инерции.

Равновесие	Область устойчивости	Равновесие	Область устойчивости
Нижние		Боковые	
Рис. 1. а)	$B > C, \sigma < mgB / x_G$	Рис. 3. а)	$B > C, \sigma > mgB / x_G$
Рис. 1. б)	$B < C, \sigma < mgC / x_G$	Рис. 3. б)	$B < C, \sigma > mgC / x_G$

Таблица 6. Условия устойчивости равновесий динамически симметричного тела.

Равновесие	Область устойчивости	Равновесие	Область устойчивости
Нижние		Боковые	
Рис. 2. а)	$A > C, \sigma < mgA / r_G$	Рис. 4. а)	$A > C, \sigma > mgA / r_G$
Рис. 2. б)	$C > A, \sigma < \frac{mgACr_G}{(x_G^2 A + z_G^2 C)}$	Рис. 4. б)	$C > A, \sigma > \frac{mgACr_G}{(x_G^2 A + z_G^2 C)}$

Таблица 7. Условия устойчивости равновесий тела с центром масс в главной плоскости.

Равновесие	Область устойчивости
Нижние	
Рис. 2. а)	$x_G^2 AB - x_G^2 CA - z_G^2 CA + z_G^2 CB > 0, \sigma < mgB / r_G$
Рис. 2. б)	$x_G^2 AB - x_G^2 CA - z_G^2 CA + z_G^2 CB < 0, \sigma < mgACr_G / (x_G^2 A + z_G^2 C)$
Боковые	
Рис. 4. а)	$x_G^2 AB - x_G^2 CA - z_G^2 CA + z_G^2 CB > 0, \sigma > mgB / r_G$
Рис. 4. б)	$x_G^2 AB - x_G^2 CA - z_G^2 CA + z_G^2 CB < 0, \sigma > mgACr_G / (x_G^2 A + z_G^2 C)$

4. Необходимые условия устойчивости. Найдём теперь необходимые условия устойчивости. Характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущённого движения, соответствующих гамильтониану H_2 имеет вид

$$\lambda^6 + a_2 \lambda^4 + a_1 \lambda^2 + a_0 = 0,$$

где a_2, a_1 и a_0 – некоторые коэффициенты, зависящие от параметров задачи и равновесных значений углов Эйлера. Для устойчивости рассматриваемого равновесия необходимо, чтобы все корни этого уравнения были чисто мнимыми. Это будет выполнено, когда a_2, a_1 и a_0 будут положительны, а дискриминант $-4a_2^3 a_0 + a_2^2 a_1^2 - 4a_1^3 + 18a_2 a_1 a_0 - 27a_0^2$ кубического относительно λ^2 уравнения будет неотрицателен. Так как область выполнения достаточных условий устойчивости входит в область выполнения необходимых, будем рассматривать только области невыполнения достаточных условий. Отметим, что свободный член a_0 представляет собой выражение $k h_1 h_2$, где $k > 0$, причём неравенства $h_1 > 0$ и $h_2 > 0$ представляют собой область выполнения достаточных условий, поэтому необходимые условия устойчивости будем искать в области $h_1 < 0$ и $h_2 < 0$. Исследование показало, что в этой области другие коэффициенты характеристического уравнения не могут быть положительными одновременно. Таким образом, все необходимые условия устойчивости совпали с достаточными. При их нарушении имеет место неустойчивость. Соберём полученные результаты и покажем на Рис.5. Пусть тело соответствует одному из рассмотренных случаев геометрии масс. Тогда все положения равновесия таковы, что центр масс тела лежит в плоскости, содержащей ось вибраций и вертикаль.

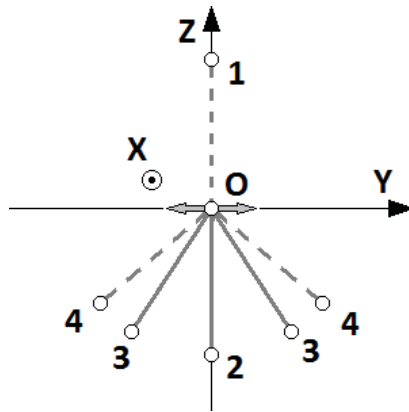


Рис. 5. Боковые равновесия тела с центром масс в главной плоскости инерции.

Верхнее положение равновесия 1 всегда неустойчиво. Нижнее положение равновесия возможно в случае двух различных групп ориентаций тела. При этом в зависимости от геометрии масс тела одна из этих групп неустойчива, а другая устойчива при $\sigma < \sigma_1$. Если $\sigma > \sigma_2$, то возникают неустойчивые боковые положения равновесия 4. При $\sigma > \sigma_1 > \sigma_2$ появляются положения равновесия 3, которые устойчивы в области своего существования.

5. О периодических движениях полной системы. Найденным относительным положениям равновесия для приближенной автономной системы уравнений (1) будут соответствовать периодические движения полной неавтономной системы. Действительно, в окрестности положения равновесия полную систему уравнений движения можно рассматривать, как квазилинейную. Так как корни её характеристического уравнения будут малы по сравнению с частотой внешних возмущений Ω , имеет место нерезонансный случай. Согласно теории малого параметра Пуанкаре [2], из каждого равновесия приближенной системы рождается единственное аналитическое по ε высокочастотное периодическое (с периодом $2\pi/\Omega$) решение полной системы. Эти движения представляют собой высокочастотные дрожания в окрестности средних значений, составляющих равновесное значение приближенной системы. При этом неустойчивые положения равновесия приближенной системы перейдут в неустойчивые периодические движения полной системы, а устойчивые равновесия перейдут в периодические движения, устойчивые в линейном приближении. Это следует из непрерывности по ε характеристических показателей соответствующих линеаризованных уравнений возмущённого движения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (НИУ).

Литература

1. Маркеев А.П. К теории движения твёрдого тела с вибрирующим подвесом // ДАН. 2009. Т. 427. №6. С. 771-775.
2. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.

DAMAGE VIBRODIAGNOSTICS USING DISTORTION OF INITIAL STRUCTURAL SYMMETRY OF TESTING OBJECT

Beresnevich V.I.¹, Yevstignejev V.Y.², Dobelis J.³

Riga Technical University, Riga, Latvia

¹ vitalijs.beresnevics@rtu.lv, ² vljevst@latnet.lv, ³ janis.dobelis@rtu.lv

Abstract. This paper considers damage detection methods, based on utilization of vibration effects caused by the distortions of system's initial symmetry due to appearance of faults. By the mathematical simulation it is shown that specific changes of flexural modes and vibration spectrum can be used as diagnostic signs of defects. The main advantage of this approach lies in the more high detection sensitivity in comparison with resonant frequency methods.

Initially symmetric structural elements or units are widely used in machines and engineering objects (reinforced members of thin-walled structures, sections of shafts or pipelines, etc.). Damages, which can appear in such structures, disturb their initial symmetry, and that can be the reason for appearance in the system of specific vibration effects.

At present, to detect damages in engineering structures, vibration methods of nondestructive testing are widely used [1]. The majority of existing vibration techniques is based on the monitoring of changes in resonant frequencies [2] or in damping factors [3]. But these vibration procedures do not always come up to practical requirements because of their inherently low sensitivity to defects. For example [4], the presence of a crack, which makes up about 10~20% of the undamaged cross-sectional area, reduces the natural frequencies of a component only by 0.6~1.9%. Besides, natural frequencies and damping factors of real structures can change their values not only through the generation of cracks, but also due to relaxation, wear, etc., and this latter change of parameters may be highly significant (up to 10~15%). Other demerit of existing vibration methods lies in the necessity to determine natural frequencies and damping characteristics of the structure in its undamaged condition and in the further monitoring of changes of these parameters while structure is in use. Such a procedure is very laborious and requires many working hours of trouble-shooting.

This paper considers possibilities to increase damage detection sensitivity by the utilization of specific vibration effects caused by the distortions of system's initial symmetry due to appearance of defects. Besides, in accordance with findings of works [1,5], it has been found advantageous to insert an additional nonlinear elastic element into the structure of testing object in order to increase the detection sensitivity.

Object of the study is a uniform viscoelastic fixed beam (e.g. span of a shaft) which is initially symmetric relative to the central section. In order to find possible defects, forced vibrations of the beam are excited with the aid of test harmonic force $P\sin\omega t$ applied in the middle section (Fig. 1).

The differential equation of forced bending vibrations of the beam can be stated as follows:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + bEI \frac{\partial^5 y}{\partial t \cdot \partial x^4} = P \sin \omega t \cdot \delta(x - x_P), \quad (1)$$

where EI and μ are the flexural rigidity in bending and the distributed mass of the beam; y is the lateral displacement of the beam cross-section with co-ordinate x ; b is the coefficient of internal friction; P and ω are the amplitude and the frequency of the external harmonic excitation; $\delta(x - x_P)$ is a Dirac delta function; $x_P = 0.5l$ is the co-ordinate of the cross-section to which the external harmonic force is applied; l is a length of the beam.

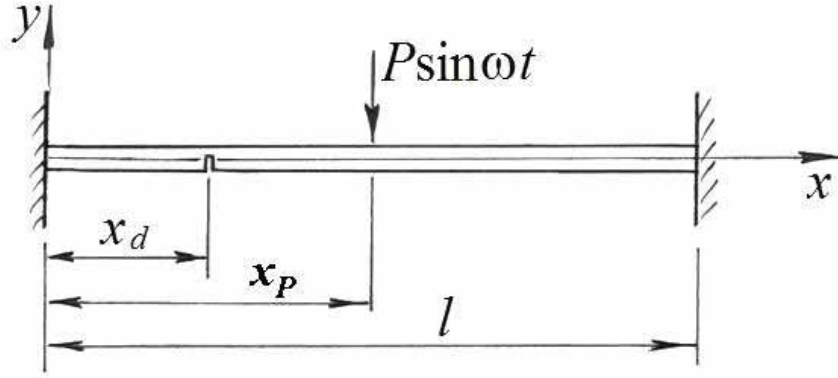


Fig.1. Dynamic model of testing object

Damage is simulated as a local reduction of beam's flexural rigidity EI in the cross-section with co-ordinate $x = x_d$. In this case the change of beam's flexural rigidity EI versus co-ordinate x can be mathematically described by the following expression:

$$EI(x) = EI_0[1 - q \cdot \delta(x - x_d)], \quad (2)$$

where $q = (1 - I_d/I_0)$ is a measure of the relative damage value; I_d is the second moment of the damaged cross-section; I_0 is the second moment of the undamaged cross-section; $\delta(x - x_d)$ is a Dirac delta function

In the case of a fixed beam, the boundary conditions are as follows

$$y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (3)$$

Dynamics of the system has been analyzed using two different methods: modeling on the specialized analogue-digital computer system developed in Riga Technical University [6, 7] and numerical simulation with program ANSYS.

The mathematical simulation has been carried out assuming the parameters of equations (1) – (3) according to the following conditions: $b\omega_1 = 0.00785$; $\omega_1 l^2 \sqrt{\mu/(EI)} = 7.1$; $Pl^2/(EI) = 1.5$; $x_d/l = 0.25$; $x_P/l = 0.5$. Here ω_1 is the first natural flexural frequency of the beam in the undamaged state. Other parameters of equations (1) – (3), expressed in dimensionless form ($p = Pl^2/(EI)$; $v = \omega/\omega_1$; q), have been varied within the limits of $p = 0.5 \div 2.0$, $v = 0.25 \div 3.50$ and $q = 0 \div 0.35$. Under such conditions the analysis of resonant vibrations corresponding to the two first flexural modes has become possible.

Vibration methods for damage detection. The dynamic behavior of the system under study is illustrated by the amplitude-frequency characteristic (AFC), which graphically represents mutual connections between the driving frequency and the half-swing of oscillations $u_0 = y_0/l$ in the beam's cross-section with co-ordinate $z = x/l = 0.4$ (Fig. 2). Numerical calculations were performed with ANSYS using elements BEAM188. The left AFC corresponds for the beam with no damage ($q = 0$), but the right one – for the beam with damage ($q = 0.2$).

Peak points of the AFC correspond to the first and the second modes of beam's resonant flexural vibrations. In the case of undamaged beam (the left AFC), excitation force $P \sin \omega t$ has a sufficient effect only on the first resonant regime (low frequency) and practically does not influence the second resonant regime (high frequency). The last feature is caused by the fact

that external harmonic force $P\sin\omega t$ is applied in the section with the co-ordinate $x_P/l = 0.5$, which coincides with the nodal point of the second flexural mode.

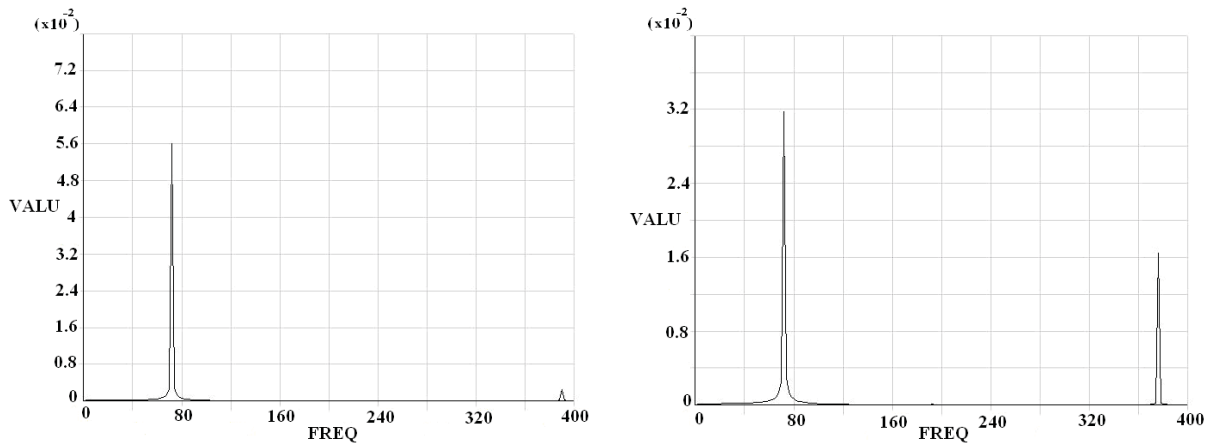


Fig. 2. Amplitude-frequency characteristics: left – for the beam with no damage; right – for the beam with damage

After appearance of a defect, initial symmetry of the system is disturbed. As the result, the crest point of the first mode and the node of the second mode are shifted from the middle section of the beam in the direction of damage location. And the value of this shift is increased with the rise of defect. Therefore harmonic excitation force, applied in section $x_P/l = 0.5$, begins active action on the beam not only at the first resonant mode, but also at the second one. In consequence of this, beam's flexural vibrations by the second resonant mode (high frequency) are sufficiently intensified, and the corresponding change of the AFC occurs (the right AFC in Fig.2).

Distortions of flexural modes due to appearance of fault can be used as diagnostic signs of defects. Graphs of the first and the second modes of bending vibrations corresponding to the beam's undamaged ($q = 0$; full lines) and damaged ($q = 0.2$; dotted lines) states are presented in Fig. 3.

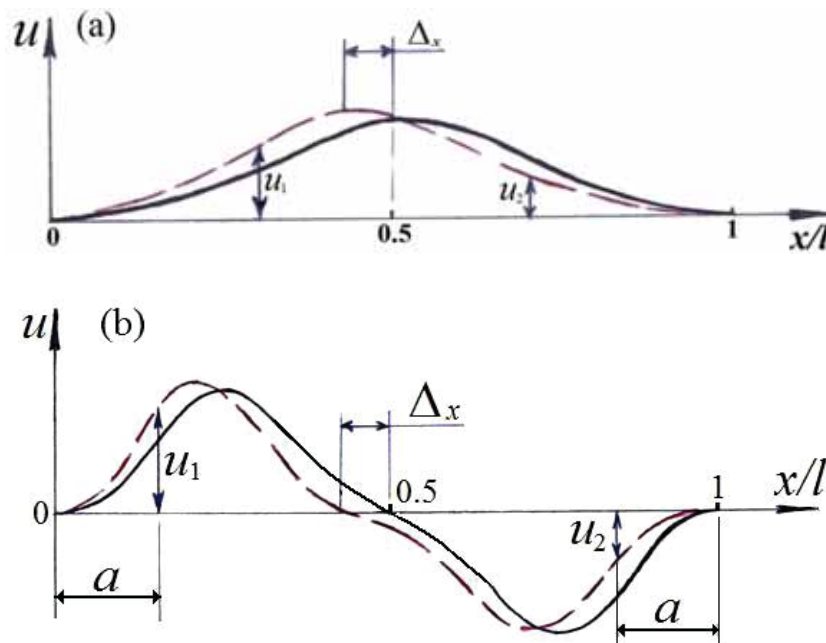


Fig. 3. Modes of beam resonant flexural vibrations: (a) the first resonant mode; (b) the second resonant mode

Specified distortions of flexural modes due to appearance of fault can be used in nondestructive testing as information signs of defect. In this case, fault can be detected by the recording of parameters which are definitively related to distortions of flexural modes: 1) a shift Δx of nodal (or antinodal) point of beam's flexural mode; 2) a difference in amplitudes Δu between two points of the beam equally distant from its middle (e.g. $\Delta u = u_1 - u_2$); 3) a ratio of amplitudes u_1/u_2 in two points of the beam equally distant from its middle.

The most preferable diagnostic sign has been selected taking account of its sensitivity to defect, convenience of measuring, and simplicity of hardware implementation. Parameter Δx was excluded due to its inconvenience for measuring and hardware implementation. Parameters Δu and u_1/u_2 have been compared by their detection sensitivity [1]

$$\eta = \frac{\Delta \Pi / \Pi}{\Delta \lambda / \lambda}, \quad (4)$$

where Π is numerical value of diagnostic sign in initial (undamaged) condition; λ is numerical value of testing parameter (e.g. stiffness k) in initial condition; $\Delta \Pi$ is absolute change of diagnostic sign which conforms to absolute change of parameter λ on value $\Delta \lambda$.

As the result of research, it has been finally proposed that the vibration testing should be carried out by recording the amplitudes ratio, u_1/u_2 , measured on the second flexural mode of beam's resonant vibrations. In this case detection sensitivity is about $\eta = 0.9 - 1.0$, that is sufficiently higher in comparison with the traditional resonant frequency methods [2].

Damage detection by the proposed linear vibration method can be carried out in the following operational procedure. At first, the second mode of beam's resonant flexural vibrations is excited. After that, the ratio of amplitudes u_1/u_2 in two points of the beam equally distant from its middle is recorded. The presence and the value of defect are evaluated by the measured ratio of amplitudes u_1/u_2 with the aid of calibration curve $q = f(u_1/u_2)$ preliminary constructed.

Insertion of additional nonlinear element into the structure of testing object. For the first time the idea to increase the detection sensitivity by the special transformation of initial linear mathematical model of testing object into the nonlinear one was formulated by S.Tsyfanskyy [1,5]. In the case considered here, such transformation is made by the insertion of additional nonlinear elastic support into the structure of the system (Fig. 4).

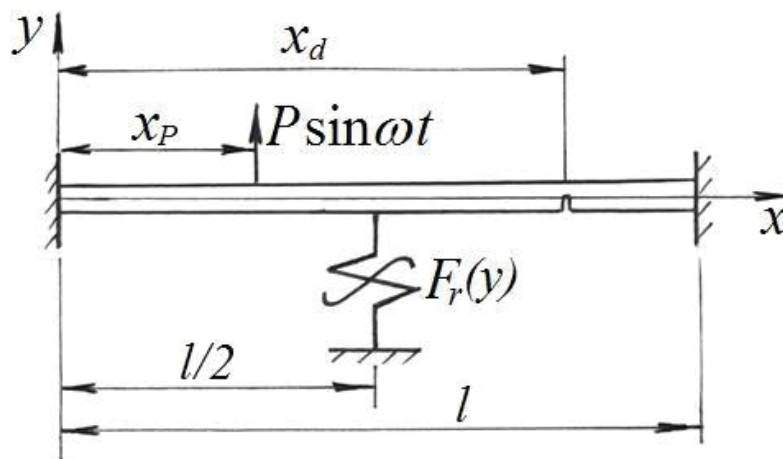


Fig. 4. Dynamic model of the beam interacting with nonlinear elastic support

Forced bending flexural vibrations of the damaged beam interacting with nonlinear elastic support $F_r(y)$ are mathematically described by the following differential equation:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + bEI \frac{\partial^5 y}{\partial t \cdot \partial x^4} = P \sin \omega t \cdot \delta(x - x_P) - F_r(y) \cdot \delta(x - l/2), \quad (5)$$

where $\delta(x - 0.5l)$ is Dirac delta function, $F_r(y)$ is a nonlinear restoring force of the additional elastic support. The sense of other symbols is the same as in equation (1).

As before, damage which can appear in the beam is mathematically described by the equation (2), but boundary conditions – by the equation (3). The variant of nonlinear elastic support with characteristic $F_r(y)$ of preload type is considered:

$$F_r(y) = ky + F_0 \text{sign } y. \quad (6)$$

The problem considered in this paper was solved assuming the parameters of equations (5) – (6) according to the following conditions: $b\omega_1 = 0.00785$; $\omega_1 l^2 \sqrt{\mu/(EI)} = 7.1$; $Pl^2/(EI) = 1.5$; $x_d/l = 0.75$; $x_P/l = 0.5$; $F_0 l^2/(EI) = 1$; $kl^3/(EI) = 20$. Dynamics analysis has been made by modeling on the specialized analogue-digital computer system [6, 7] as well by numerical simulation with program ANSYS. Modeling with ANSYS was performed using two types of elements: BEAM188 for beam and COMBIN39 for nonlinear elastic support.

Amplitude-frequency characteristics for the beam interacting with nonlinear support are shown in Fig. 5. These AFC are received by numerical simulation with ANSYS. As it is seen, damage in a beam has an influence on spectrum of forced vibrations. Specifically, additional low-frequency harmonic component (~ 190 Hz) appears in vibration spectrum.

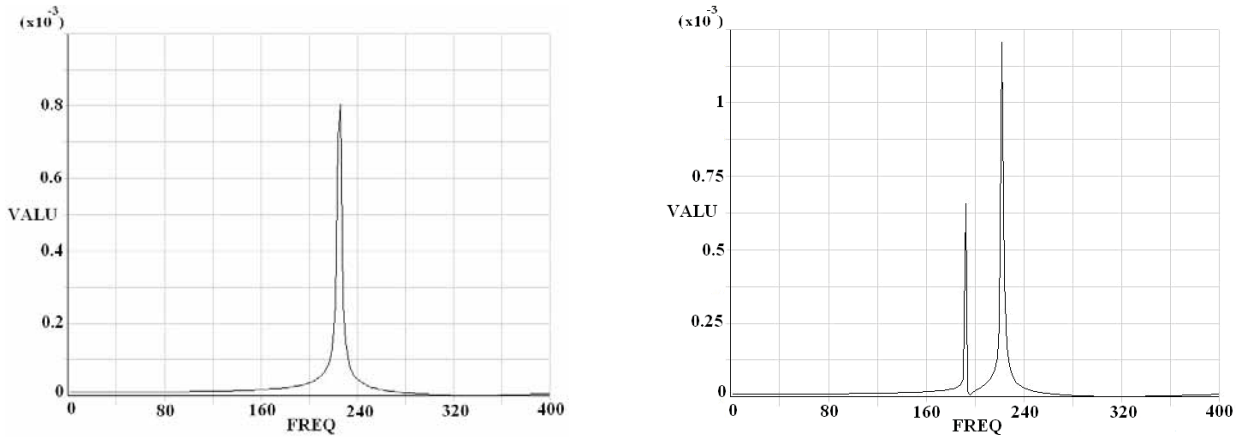


Fig. 5. Amplitude-frequency characteristic for the beam interacting with nonlinear support: left – beam without damage; right – beam with damage

Influence of additional elastic support on beam's resonant oscillations by the second flexural mode (frequency ν_{r2}) has been analyzed in more details. Possible distortions of the second flexural mode due to appearance of defect are shown in Fig. 6. As additional information, the time responses $u=f(\tau)$ and the spectrograms for points B and B' are presented.

If there is no damage in the beam, the nodal point of the second flexural mode coincide with the co-ordinate $x/l = 0.5$ of location of additional nonlinear elastic support. In this case, nonlinearity of elastic support practically does not influence the resonant oscillations of the second mode. Therefore bending oscillations of undamaged beam are close to monoharmonic ones (relative value of the 3rd harmonic component $u_{3/1}$ in Fourier spectrum makes up only 0.007).

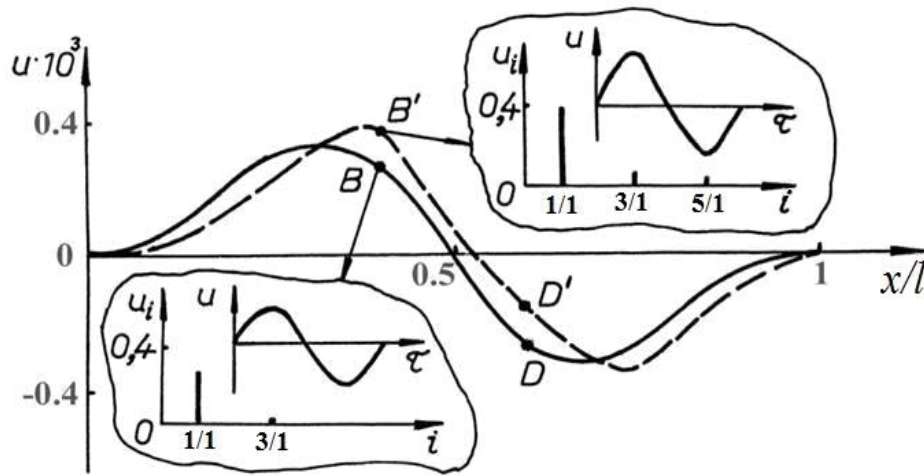


Fig. 6. Distortion of the second flexural mode due to appearance of fault:
full line – undamaged beam ($q = 0$); dotted line – beam with damage ($q = 0.2$)

With the appearance of damage, the original symmetry of beam's resonant mode is disturbed, and the nodal point is moved in the direction of defect. Therefore nonlinear elastic support, placed in section $x/l = 0.5$, begins active interactions with the vibrating beam not only at the first resonant mode, but also at the second one. In consequence of this, nonlinear properties of the system on the second resonant regime are sufficiently intensified, and as the result the corresponding change of vibration spectrum occurs. For example, at $q = 0.2$ (see Fig. 6) due to the influence of nonlinear elastic support spectral ratio $u_{3/1}/u_{1/1}$ is increased more than ten times (in comparison with the case of $q = 0$) and reaches $u_{3/1}/u_{1/1} = 0.08$ (here $u_{1/1}$ is an amplitude of main harmonic component). Besides, the sensitivity η to defect of the proposed spectral diagnostic sign $u_{3/1}/u_{1/1}$ is about 1.4 – 1.5 times higher in comparison with the above considered linear approach.

Damage detection by the proposed nonlinear vibration method can be carried out in the following operational procedure. At first, the middle section of the testing beam must be connected with an additional nonlinear elastic support. After that, the second mode of beam's resonant flexural vibrations is excited, and spectral ratio $u_{3/1}/u_{1/1}$ of these vibrations is recorded. The presence and size of damage are evaluated by the measured value of vibration parameter $u_{3/1}/u_{1/1}$ with the aid of calibration curve $q = f(u_{3/1}/u_{1/1})$ preliminary constructed.

Preliminary qualitative verification of the theoretical study has been done by experiments with a uniform steel beam having length $l = 380$ mm and rectangular cross-section 25×2 mm. Both ends of the beam were fixed. Damage was made in the form of local partial cut of beam's cross-section. Forced bending vibrations of the beam were excited with the aid of electromagnetic vibration exciter.

The obtained experimental results demonstrate good qualitative agreement with the theoretical investigations. Specifically, it was shown that with the appearance of fault characteristic distortions of beam's vibration flexural modes occur. For example, in the case of defect time responses $u = f(t)$ recorded in two points of the beam equally distant from its middle have substantially different amplitudes. But for the beam without defect time responses measured in the same points of the beam were equal by amplitudes. High detection sensitivity of the proposed diagnostic procedure was experimentally demonstrated. More detailed quantitative analysis of experimental results would be critical in the future.

References

1. Tsyfanskyy S., Beresnevich V., Lushnikov B. Methods and Means of Nonlinear Vibrodiagnostics. Riga, RTU Publishing House, 2011.

2. Chinchalkar S. Determination of crack location in beams using natural frequencies // Journal of Sound and Vibration, 2001, vol. 247. P. 417-429.
3. Panteliou S.D., Chondros T.G., Argyrakis V.C., Dimarogonas A.D. Damping factor as an indicator of crack severity // Journal of Sound and Vibration, 2001, vol. 241. P. 235-245.
4. Bovsunovsky A.P., Surace C. Considerations regarding superharmonic vibrations of a cracked beam and the variation in damping caused by the presence of the crack // Journal of Sound and Vibration, 2005, vol. 288. P. 865-886.
5. Цыфанский С.Л. Новизна подходов нелинейной вибродиагностики // Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1991, вып. 53. С. 115 – 125.
6. Цыфанский С.Л. Электрическое моделирование колебаний сложных нелинейных механических систем. Рига: Зинатне, 1979. 180 с.
7. Cifanskis S., Beresnevich V. Specialized analogue-digital computer system // High Tech in Latvia 2004, AGB Publishing House, Riga, 2004. P. 30.

ВИБРАЦИЯ ПРЕОДОЛЕВАЕТ ГРАВИТАЦИЮ – НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ, ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ

Блехман И.И.^{1,2}, Блехман Л.И.^{1,2}, Вайсберг Л.А.²

¹Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

²НПК «Механобр техника», Санкт-Петербург, Россия

iliya.blekhman@gmail.com

Аннотация. Рассматриваются эффекты, при которых действие вибрации на нелинейную систему приводит к кажущемуся изменению величины и направления силы тяжести. Такие эффекты находят техническое применение, но в то же время могут быть причиной аварийных ситуаций. Перечисляются хорошо известные эффекты; основное внимание уделяется недавно обнаруженным и еще недостаточно исследованным. Предложены две простейшие модели, позволяющие объяснить и приближенно описать наблюдаемые явления. Отмечается, что все рассмотренные эффекты объясняются и описываются в рамках вибрационной механики – общего подхода к изучению действия вибрации на нелинейные механические системы.

1. Введение

Действие вибрации на нелинейные механические системы – механизмы, жидкости, сыпучие и многофазные среды – связано с рядом своеобразных, порой парадоксальных эффектов [1, 2]. В ряде случаев при наблюдении движения частицы, тела или среды создается впечатление, что сила тяжести изменила величину или направление. Такие эффекты иногда служили поводом для заблуждений, в том числе для сомнений в справедливости законов механики (известные дискуссии о машине Дина [3] и инерциоиде). С другой стороны, они лежат в основе ряда важных технологических процессов и технических устройств. Поток соответствующих изобретений не иссякает, обнаруживаются и новые неожиданные эффекты.

Цель данной работы – систематизировать известные эффекты, уделив основное внимание описанию еще недостаточно известных и исследованных. Предложены две простейшие модели, позволяющие физически объяснить рассматриваемые явления. Более полное и строгое их изучение основывается на подходах вибрационной механики [1, 2].

2. Вибрация против гравитации – основные эффекты

Перечислим наиболее важные из рассматриваемых эффектов, остановившись подробнее на некоторых сравнительно недавно обнаруженных [2].

1). Устойчивость верхнего положения маятника с вибрирующей осью подвеса (классический маятник Стефенсона–Капицы; рис. 1, а) [4, 5].

2). Маятник В.Н. Челомея. При вибрации стержня (рис. 1, б) он приобретает вертикальное положение, а свободно насаженная на него шайба локализуется вблизи некоторых положений на стержне (обычно – узлов или пучностей) [1, 6, 7].

3). «Индийская магическая веревка». При вибрировании нижнего конца веревки она при определенных условиях приобретает вертикальное положение (рис. 1, в; [6, 8]).

4). Всплывание валунов в песчаном грунте под влиянием сейсмических воздействий (рис. 1, г; [9, 10]).

5). Выпучивание вверх секций трубопроводов, проложенных вблизи морского дна (рис. 1, д; [9]).

6). Парадокс «непотопляемости» конкреций. Глубоководные железомарганцевые конкреции плотностью $\rho=1,91\text{--}1,95\text{ кг/м}^3$, располагаются на поверхности и отчасти в слое значительно менее плотного ($\rho=1,1\text{--}1,4\text{ кг/м}^3$) ила (рис. 1, е; [10, 11]).

7). При вибрации сосуда тяжелая жидкость может устойчиво удерживаться над более легкой.

Для всех перечисленных примеров характерно, что устойчивым состоянием системы соответствует не минимум, а максимум потенциальной энергии системы.

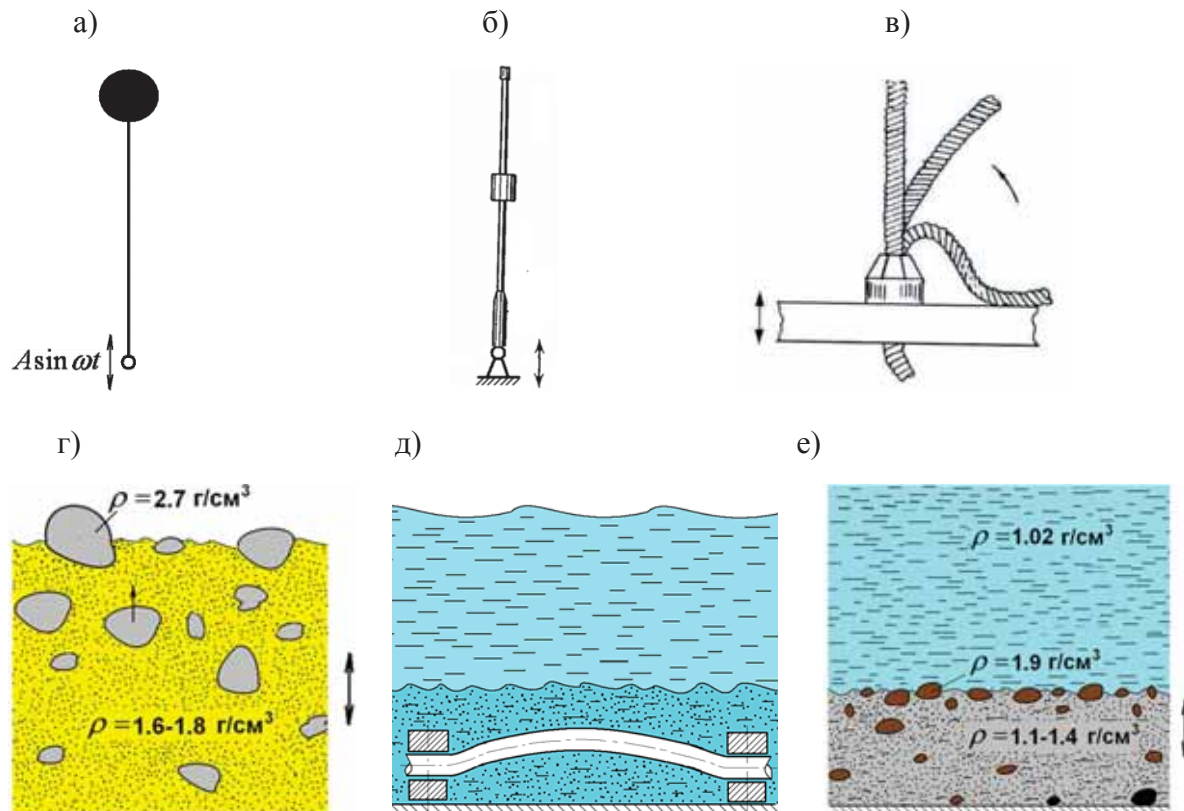


Рис. 1. Парадоксальные эффекты при воздействии вибрации:
а) – маятник Стефенсона-Катицы; б) – маятник Челомея; в) – индийская магическая веревка;
г) – всплывание валунов в грунте; д) – выпучивание трубопровода; е) – залегание конкреций

8). Инжекция газа в жидкость, запирание отверстий в вибрирующих сосудах. Если в открытый сосуд с отверстием внизу налита жидкость, то она выливается в виде струйки под действием силы тяжести. При вертикальной вибрации сосуда с увеличением ее интенсивности средний расход жидкости значительно уменьшается, т.е. происходит, по крайней мере, частичное *запирание отверстия*. (Считается, что это было причиной нескольких авиационных катастроф: топливо переставало вытекать из баков вследствие вибрации). При дальнейшем увеличении интенсивности вибрации истечение происходит прерывистым образом. Во время части периода из сосуда вытекает капля жидкости, а в другую часть периода в него проникает некоторый объем воздуха, который в виде пузырька поднимается на поверхность жидкости (рис. 2). Например, при частоте колебаний 30 Гц каждую секунду из сосуда выталкивается 30 капель жидкости и в него засасывается 30 пузырьков воздуха. Это явление, названное *вибрационной инжекцией газа в жидкость* [12, 6, 8], послужило основой ряда изобретений. При увеличении интенсивности вибрации средний расход жидкости начинает увеличиваться и превышает расход при истечении без вибрации. Значительное влияние на этот эффект может оказать форма отверстия или патрубка. Для случая истечения жидкости в жидкость это влияние проявляется в виде, так называемого, *виброструйного эффекта*.

Заметим, что изменение расхода при вибрации наблюдается и при истечении сыпучей среды (песочные часы и т.п.).

9). Погружение пузырьков газа в вибрирующий сосуд с жидкостью и всплывание в нем тяжелых частиц.

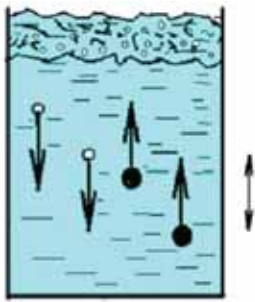


Рис. 3. В вибрирующем сосуде с водой пузырьки тонут, а тяжелые твердые частицы всплывают

Если открытый сосуд с водой подвергнуть вертикальной вибрации (рис. 3), то в определенной области изменения частоты и амплитуды вибрации относительно мелкие пузырьки воздуха начинают опускаться ко дну сосуда. Накапливаясь вблизи дна, они образуют воздушную подушку, которая по достижении определенного объема устремляется вверх. После этого процесс повторяется – происходят так называемые асинхронно возбуждаемые автоколебания [13, 14, 6]. Сравнительно крупные пузырьки при определенных условиях «тонут» и в закрытом сосуде [15].

В противоположность этому, при несколько иных параметрах вибрации, «тяжелые» твердые частицы, лежавшие на дне сосуда, устремляются вверх и локализуются на некотором удалении от дна или всплывают на поверхность. Создается впечатление о несправедливости закона Архимеда.

Существенное влияние на эти явления оказывает сжимаемость частиц (пузырьков) и среды.

В качестве основного физического фактора, обуславливающую данную группу явлений, можно назвать «притяжение» пузырьков и частиц к узлам или к пучностям стоячих волн, образующихся в насыщенной пузырьками среде. Такие явления давно привлекают внимание ученых, они находят ряд важных технических приложений.

Обзоры исследований, а также результаты, полученные в недавнее время, можно найти в публикациях [13, 6, 15]. Особо отметим фундаментальные исследования, выполненные в Институте машиноведения РАН Р.Ф. Ганиевым и Л.Е. Украинским, суммированные в монографии [13].

10). Замедление свободного падения или всплывания тел в вибрирующей жидкости [6].

Влияние вибрации на скорость падения или всплывания становится особенно значительным в случае деформируемого тела (например, пузырька), когда возможны резонансные явления. Соответствующие эффекты можно приписать (разумеется, неправомерно) отклонению от закона Архимеда.

11). Повышение плавучести тел, колеблющихся вблизи границы раздела сред.

При колебаниях твердого тела вблизи раздела границы двух сред с различными физическими свойствами возникает вибрационная сила, которая может внести существенную поправку в баланс сил, действующих на тело при отсутствии его колебаний. В результате, например, в случае жидкостей с различной плотностью и вязкостью может заметно увеличиться плавучесть тела, находящегося на границе раздела жидкостей или вблизи нее.

Рассмотрим для конкретности две жидкости 1 и 2, разделенные горизонтальной плоской границей ОР (рис. 4, а). Также для конкретности предполагаем, что нижняя жидкость 2 имеет большую плотность ρ_2 и большую вязкость μ_2 , чем соответствующие значения ρ_1 и μ_1 для верхней жидкости.

Если некоторое тело находится вдали от границы, то в среде 1 на него действует выталкивающая сила $P_{A1} = \rho_1 g G$ (G – объем тела), и сила сопротивления R_1 , а в среде 2 – выталкивающая сила $P_{A2} = \rho_2 g G$ и некоторая сила сопротивления R_2 . При этом $P_{A2} > P_{A1}$, а $R_2 > R_1$. В области же $|y| = |x/a| < q$ где a – размер тела, а $q > 1$ – некоторый коэффициент, величины P_A и R монотонно уменьшаются, в общем случае по нелинейному закону (рис. 4, а). Имеются основания полагать, что коэффициент q , определяющий величину приграничной области, варьирует в пределах от 3 до 5 (см., например, [2], гл. 17).

Естественно, также допустить, что при гармонических колебаниях тела средняя за половину периода, когда $\dot{y} < 0$, сила $P_{A-} + R_-$ будет больше, чем такая же сила $P_{A+} + R_+$ за другую половину периода (см. также модель 1 в п. 3). В результате на частицу будет действовать вибрационная сила

$$V = \frac{1}{2}[(P_{A-} + R_-) - (P_{A+} + R_+)] > 0, \quad (1)$$

направленная в сторону среды с меньшими ρ и μ , т.е. среды 1, и тогда, если тело находилось при отсутствии вибрации в равновесии в некотором положении $y = y_0$, т.е. было «на плаву» ($P_A = -P$), то вследствие вибрации оно сместится на некоторую величину $\Delta > 0$, т.е. плавучесть тела увеличится.

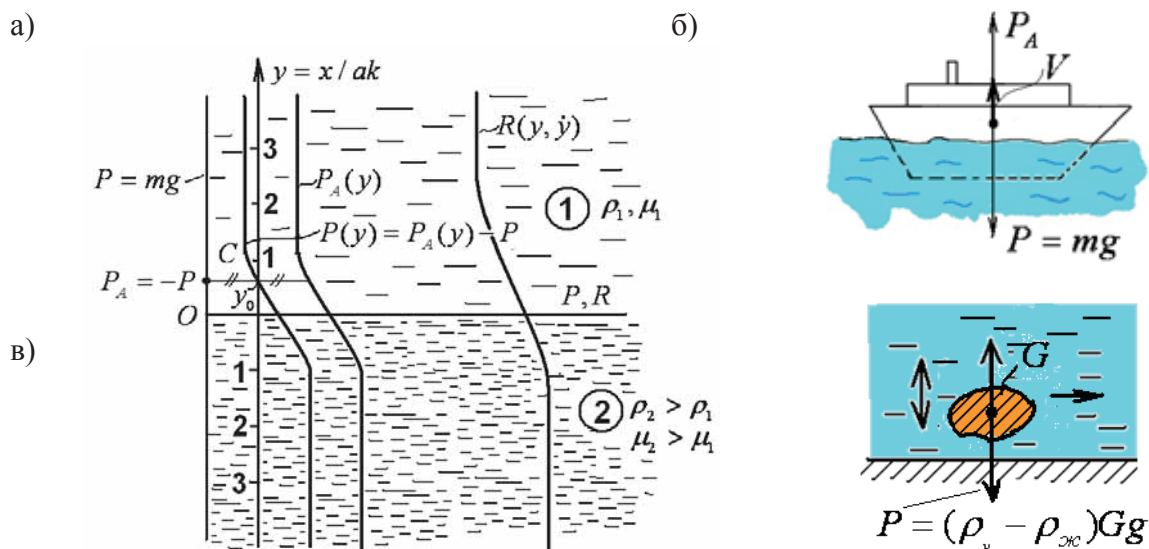


Рис. 4. На тело, колеблющееся вблизи границы раздела двух сред, действует сила, направленная в сторону менее плотной среды: а – общая схема, б – повышение плавучести судна, в – взвешивание частицы в пульсирующем потоке жидкости

Разумеется, приведенные качественные заключения не претендуют на строгость. Они подтверждаются выполненным экспериментом [10].

Повышение плавучести должно иметь место при определенных условиях и в случае колебания корабля на волнении (рис. 4, б). Первая среда в этом случае является воздухом ($\rho_1 / \rho_2 \approx 0$, $\mu_1 / \mu_2 \approx 0$).

Та же закономерность имеет место в случае колебаний частицы вблизи твердой поверхности: частица взвешивается над ней (рис. 4, в). Такой эффект важен для широко применяемого процесса гидротранспорта. Предложены его теории [11, 16] (см. также [6]), которые, конечно, значительно сложнее приведенного выше схематического рассмотрения. Здесь можно говорить также об эффекте возникновения области повышенного давления под колеблющимся вблизи стенки телом [10], а в случае колебаний диска – о вибронасосном эффекте, используемом в вибронасосах Г.Я. Лишанского. Отметим также, что подобные эффекты имеют место и в сыпучих средах (эффекты 4), 6) и 12)).

12). Противогравитационные эффекты при воздействии вибрации на системы с сухим трением и сыпучую среду.

Эта группа эффектов относительно хорошо изучена, по крайней мере, в отношении технических приложений – вибротранспортирования, вибрационного

разделения сыпучих смесей и ряда других [1, 2]. Поток изобретений на соответствующие устройства продолжается и в настоящее время (см., например, [17]).

Отметим следующие наиболее примечательные и практически важные эффекты:

- вибротранспортирование твердых и сыпучих тел вверх по вибрирующей поверхности;
- установление различных уровней сыпучей среды в вибрирующих сообщающихся сосудах;

- вибробункеризация – заполнение бункера сыпучей средой снизу-вверх;

- аномальная вибрационная сегрегация, при которой более тяжелые фракции занимают более высокое положение, т.е. процесс идет в направлении увеличения потенциальной энергии системы [1]. Примерами могут служить эффекты 3) и 5).

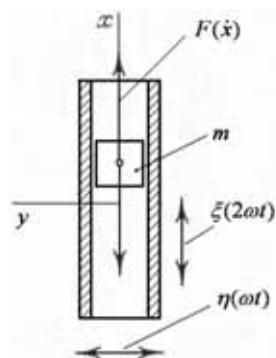


Рис. 5. Труба Р.М. Брумберга – устройство для вибрационного транспортирования тела вертикально вверх

Заслуживает упоминания также устройство для вертикального вибротранспортирования, представляющее собой трубу, которой сообщаются поперечные и продольные колебания (рис. 5). Подъем тела по трубе обеспечивается тем, что частота продольных колебаний 2ω вдвое больше частоты поперечных колебаний ω , причем сдвиг фаз между колебаниями выбирается определенным образом (см. [1], где приводится теория этого устройства – так называемой трубы Р.М. Брумберга, а также ссылка на изобретение, принадлежащее И.П. Шашкову).

13). Колебательные движения масс внутри космического корабля создают эффект, подобный тяге или торможению корабля. В результате корабль может быть выведен за пределы поля тяготения Земли или, наоборот, приближен к ней (гравилёт В.В. Белецкого и М.Е. Гиверца [20]). Как отмечают упомянутые авторы идеи, реализация такого аппарата вряд ли целесообразна, что не лишает его несомненного принципиального интереса.

14). Вибрация против гравитации в живой природе (насекомые, рыбы, птицы). Было бы неожиданным, если вибрационный способ преодоления силы тяжести не использовался в живой природе. Именно таким способом летают птицы и насекомые, плавают рыбы.

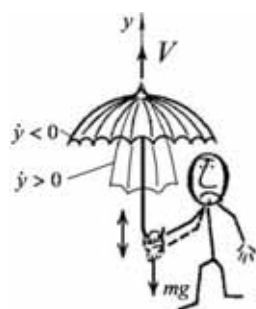


Рис. 6. «Вибролёт»

Представим себе человека, который совершает вертикальные колебательные движения зонтиком (рис. 6). Соппротивление воздуха при движении зонтика вниз больше, чем при движении вверх. В результате и возникает подъемная вибрационная сила V , направленная вверх – в полном соответствии с первой простейшей моделью п. 3 (рис. 7, а). Эта сила может быть существенно увеличена, если зонтик при движении вверх будет складываться. Дополнительное увеличение подъемной силы, можно получить, если двигать зонтик вверх медленно, а вниз – резко (модель 2 п. 3).

Трудно себе представить, что в результате таких манипуляций человек взлетит. Но его вес (давление на опору) заметно уменьшится. Подобное устройство рассмотрено Р.Ф. Нагаевым и Е.А. Тамм (см. [1, 2]). Птицы и насекомые используют для создания подъемной силы (а также и силы тяги) рассмотренные выше принципы. Роль зонтика при этом играют крылья или плавники, а отчасти и хвосты. Человеком же летательные аппараты с машущими крыльями пока не используются, несмотря на наличие ряда интересных проектов. Дело в том, что живые организмы имеют существенные преимущества – например, крылья птиц и плавники рыб деформируемы и легко управляемы, что способствует увеличению и простоте создания подъемной силы. Имеет большое значение и относительно малый размер птиц и насекомых: отношение поверхности тела к его весу увеличивается с уменьшением размера тела r как $1/r$. Поэтому для подъема единицы массы малого тела требуется

гораздо меньшая удельная сила, чем для крупного (подъемная сила крыльев, как и зонтика, примерно пропорциональна их поверхности). Существуют и другие преимущества и способы преодоления силы тяжести живыми организмами, на которых мы здесь не останавливаемся. О них можно прочесть в многочисленных публикациях, например, в [19].

3. К объяснению рассмотренных эффектов – две простейшие модели

Математическое описание и исследование упомянутых эффектов может быть выполнено (и частично уже выполнено) на основе подходов вибрационной механики и метода прямого разделения движений [1, 2]. Здесь мы рассмотрим две простейшие модели, позволяющие легко понять физический механизм вибрационного преодоления силы тяжести. В качестве первой модели представим себе тело (материальную точку), на которое действует сила тяжести $P = mg$, и которая испытывает действие силы сопротивления R_+ при движении вверх и силы R_- при движении вниз, причем $R_- > R_+$ (рис. 7, а). Предположим, что каким-либо способом мы заставили тело вибрировать так, что половину периода T тело движется вниз, а другую половину периода вверх. Тогда средняя за период сила сопротивления V , действующая на тело, будет

$$V = \frac{1}{T} \left(R_- \frac{T}{2} - R_+ \frac{T}{2} \right) = \frac{1}{2} (R_- - R_+). \quad (2)$$

Назовем ее *вибрационной силой*. Если эта сила больше силы тяжести, т.е.

$$\frac{1}{2} (R_- - R_+) > mg, \quad (3)$$

то тело будет двигаться вверх. Наблюдателю, который не замечает вибрации тела, например, видит движение в стробоскопическом освещении, будет казаться, что сила тяжести изменила направление.

Более вдумчивый наблюдатель, который понимает, что за игнорирование вибрации «надо платить», чтобы не вступать в противоречие с законами механики, скажет, что в этой ситуации надо учитывать вибрационную силу V , противодействующую весу тела.

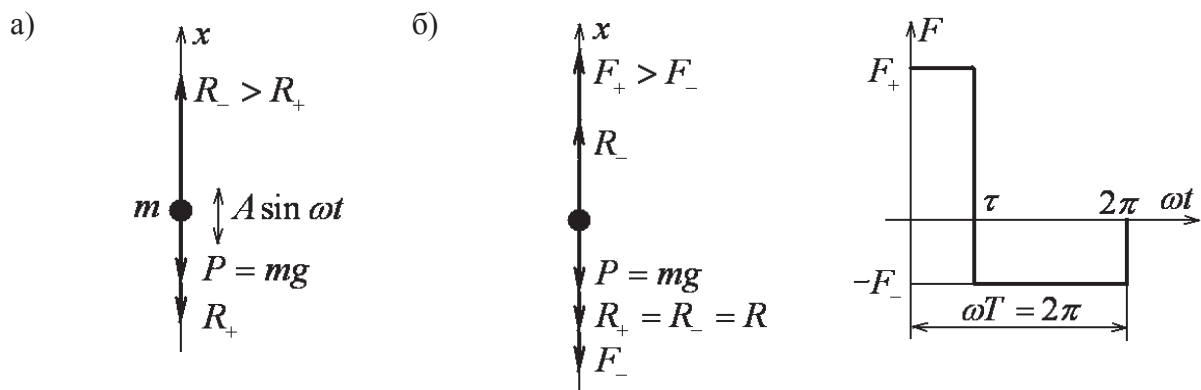


Рис. 7. Простейшие модели вибрационного преодоления силы тяжести

Вторая модель (рис. 7, б) предполагает, что силы сопротивления, действующие на тело, одинаковы в обоих направлениях, т.е. $R_+ = R_- = R$. Вместе с тем считается, что на тело действует периодическая вынуждающая сила, величина которой в направлении вверх F_+ больше, чем вниз F_- . При этом считается, что время τ действия силы F_+

меньше, чем время $T - \tau$ действия силы F_- ($T = 2\pi / \omega$ – период, а ω – частота вибрации). Образно говоря, предполагается, что рывок тела вверх резче, чем рывок вниз (такая ситуация характерна, например, для полета птиц). Соотношение между величинами F_+ , F_- и τ может быть любым, но основной интерес представляют случаи уравновешенного в среднем возбуждения, когда,

$$F_+ \tau = F_- (T - \tau) . \quad (4)$$

В этих случаях средняя за период сила, действующая на тело, равна нулю

$$F = \frac{1}{T} [F_+ \tau - F_- (T - \tau)] = 0 , \quad (5)$$

и тогда при отсутствии сил сопротивления R тело не будет направленно двигаться под действием сил F_+ и F_- , а будет совершать лишь периодические колебания.

При наличии же сил R тело сможет двигаться вверх, преодолевая силу тяжести; условиями этого являются неравенства

$$F_+ > R + mg , \quad F_- + mg < R , \quad (6)$$

при выполнении которых сила, движущая тело вверх, больше суммы силы сопротивления и силы тяжести, а сумма силы тяжести и движущей силы F_- не превышает силы сопротивления R движению тела вниз. Последнее условие, разумеется, не является необходимым: тело может двигаться преимущественно вверх и при не слишком большом $F_- + mg$ по сравнению с R .

Для получения необходимого и достаточного условия найдем вибрационную силу V , действующую на тело, т.е. среднее за период значение $F - R$:

$$V = \frac{1}{T} [(F_+ - R)\tau - (F_- - R)(T - \tau)] . \quad (7)$$

Тело будет подниматься вверх, если $V > mg$. Нетрудно убедиться, что это условие, как и должно быть, непременно выполняется, если справедливы неравенства (6).

Выражение (7) значительно упрощается в случае уравновешенного в среднем возбуждения, когда справедливо соотношение (4). Тогда

$$V = R \left(1 - \frac{2\tau}{T} \right) = R \frac{F_+ - F_-}{F_+ + F_-} \quad (8)$$

и условие подъема тела принимает вид

$$\frac{F_+ - F_-}{F_+ + F_-} > \frac{mg}{R} . \quad (9)$$

Заметим, что данная модель, относится, в частности, к упомянутой выше машине Н. Дина [3].

Предложенные модели являются простейшими идеализациями физических механизмов возникновения вибрационных сил V , противодействующих силе тяжести и, быть может, других внешних сил, действующих на тело. Они предполагают разрывность («кусочное постоянство») сил, возбуждающих колебания тела, и сил сопротивления. Между тем, во многих реальных устройствах эти силы непрерывны. Данные модели не

учитывают также достаточно сложный характер зависимости эффектов от амплитуд и частот колебаний.

Вместе с тем, эти модели отражают три основных фактора, определяющих возникновение вибрационных сил – асимметрию системы или сил, возбуждающих колебания, нелинейность системы (как правило) и ее взаимодействие с окружающей средой. Можно усмотреть наличие этих факторов в каждом из обсуждаемых случаев.

Заметим, что во всех случаях, чтобы не усложнять рассуждения, не рассматривается агент, заставляющий тело вибрировать – возбудитель колебаний. Повторим лишь, что если такой возбудитель находится внутри тела, то для возникновения вибрационной силы совершенно необходимо, чтобы это тело или возбудитель взаимодействовали с другими телами, с какой-либо внешней средой или находились под действием некоторого неоднородного силового поля. Такие факторы непременно присутствуют в упомянутом аппарате Дина и в инерциоидах. Иначе центр тяжести этих устройств оставался бы в среднем в покое в силу законов механики.

Рассмотренные модели являются одновременно и простейшими моделями более общего явления – вибрационного перемещения [5, 6].

4. Заключение

Мы рассмотрели ряд способов и эффектов, в которых сила тяжести преодолевается посредством вибрации. Несомненно, читатель в каждом случае сможет заключить, дает ли такой способ преимущества перед простейшим, т.е. путем приложения постоянной силы, направленной вверх.

Авторы надеются, что эта статья будет способствовать появлению новых изобретений и исследований в области вибрационной техники и технологии.

Отметим также, что вибрационное преодоление гравитации может рассматриваться как частный случай более общей проблемы – вибрационного преодоления силовых и энергетических барьеров. Эта проблема представляет значительный интерес, как для теоретической, так и для прикладной физики [21].

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ 13-08-01201.

Литература

1. Блехман И.И. Вибрационная механика. – М.: Физматлит, 1994. – 400 с. (англ. перевод: Blekhman I.I. Vibrational Mechanics. Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Applications. – Singapore et al: – World Scientific Publishing Co., 2000. – 510 p.).
2. Блехман И.И. Теория вибрационных процессов и устройств. Вибрационная механика и вибрационная техника. – СПб., Издательский дом «Руда и металлы», 2013. – 640 с.
3. Dean N.L., Washington D.S. System for converting rotary motion into unidirectional motion. Patent USA 2 886 976, May 19, 1959.
4. Stephenson A. On a new type of dynamic stability // Mem. Proc. Manch. Lit. Phil. Soc. 1908, 52. P. 1–10.
5. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук. – 1951. Т. 44, вып. 1. С. 7–20.
6. Selected Topics in Vibrational Mechanics (Edited by I.I. Blekhman). – Singapore, World Scientific, 2004, 415 p.
7. Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызванные вибрациями // ДАН СССР – 1956, – Т. 110, № 3. С. 341–344.
8. Васильков В.Б. Влияние вибрации на нелинейные эффекты в механических системах. Дис. ... докт. техн. наук – СПб, 2008 / Ин-т пробл. машиновед. РАН. – СПб., 2009. – 210 с.

9. Левин Б.В. О сейсмическом механизме выталкивания валунов к поверхности грунта // ДАН СССР. 1990. Т. 312, № 2. С. 332–334.
10. Блехман Л.И. Вибрационное взвешивание твердых тел в жидкости и сыпучей среде. // Вестник ПНИПУ. Механика. Пермь: Изд-во Перм. Гос. техн. ун-та. 2013. №2. С. 52–83. (http://vestnik.pstu.ru/mechanics/archives/?id=&folder_id=2048).
11. Баренблатт Г.И., Батурин Г.Н. О «непотопляемости» железомарганцевых конкреций и некоторых особенностях придонного слоя океана // Доклады АН СССР. 1989. Т. 308, № 1. С. 183–188.
12. Блехман И.И., Блехман Л.И., Вайсберг Л.А., Васильков В.Б., Якимова К.С. Нелинейные эффекты при истечении жидкости из вибрирующих сосудов // Доклады Академии наук. 2003. Т. 391, № 2. С. 185–188.
13. Ганиев Р.О., Украинский Л.Е. Нелинейная волновая механика и технологии. – М.: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 712 с.
14. Блехман И.И., Вайсберг Л.А., Блехман Л.И., Васильков В.Б., Якимова К.С. Аномальные явления в жидкости при действии вибрации // Доклады Академии наук. 2008. Т. 422, № 4. С. 470–474.
15. Блехман И.И., Васильков В.Б., Сорокин В.С. Движение пузырька газа в колеблющейся жидкости // Обогащение руд. 2010. – № 4. С. 13–20.
16. Баренблатт Г.И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке, занимающем полупространство или плоский открытый канал конечной глубины // Прикл. матем. и мех. 1956, Т. 19, вып. 1, С. 61–88.
17. Blekhman I.I., Blekhman L.I., Vaisberg L.A., Vasilkov V.B., Yakimova K.S. Vibration segregation – simulation, experiment, and application to create new classifying machines // Proc. of the XLII Summer School-Conference APM–2014. St. Petersburg, June 30–July 5, 2014. – St.Petersburg, IPME RAS, 2014. PP. 247–257.
18. <http://www.ipme.ru/ipme/conf/APM2014/2014-PDF/2014-247.pdf>
19. Kudrolli A. Size separation in vibrated granular matter // Reports on Progress in Physics, 2004. 67, pp. 209–247.
20. Lighthill M.J. Mathematical biofluid-dynamics. – Philadelphia: Soc. for Industr. And Appl. Math, 1975.
21. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. Изд. 3-е, испр. и доп. М.: Издательство ЛКИ, 2009. – 432 с.
22. Блехман И.И. Об энергетических и силовых барьерах и о вибрационных способах их преодоления // В сб.: «Академик Иван Иванович Артоболевский» / под ред. К.В.Фролова. М.: Наука, 2007. С.107–118.

РЕАЛИЗАЦИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ СИСТЕМ ВИБРОЗАЩИТЫ

Брысин А.Н., Синев А.В., Соловьев В.С., Побегайло П.А., Шохин А.Е.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

brysin@rambler.ru

Аннотация. Рассмотрен комплекс методик, позволяющих исследовать вибрационные воздействия. Разграничены области и задачи применяемых методик, представлены результаты исследований с их использованием. Определены временные диапазоны применения двух типов математического описания для исследования переходных процессов в гидропреобразователе.

Гидравлические системы виброзащиты, обладая высокой устойчивостью, по сравнению с механическими, имеют ряд особенностей, обусловленных специфическими свойствами рабочей среды. Это вызывает необходимость применения при их оценке нескольких математических описаний в зависимости особенностей основных протекающих процессов (быстрые медленные и длительных). Те же особенности необходимо учитывать при проведении испытаний физических моделей. Современное испытательное оборудование позволяет получать динамические параметры с различной дискретностью замеров, обладает возможностью хранения и обработки сигналов непосредственно в блоках съема информации. Параметры, которые раньше рассматривались как «дельта» функция могут быть исследованы подробно, а кратковременные пиковые изменения от случайной нагрузки усреднены при проведении длительных испытаний.

Одной из задач стоящей при модернизации систем является определение частот и амплитуд вибрационных воздействий. Оценка вибрационных ускорений в течении длительного периода времени характеризуется необходимостью сохранения большого объема данных. Время снятия показаний системами длительного мониторинга вибрации составляет от 8 часов до нескольких месяцев. Для работы с такими массивами данных возникает задача выборки реперных значений. как правило замеры проводимые в течении 2-5 секунд усредняются и полученное значение сохраняется в базе данных через 1-2 мин процесс замера показаний повторяется. Очевидным минусом такой методики являются большие интервалы времени в течении которых информация не снимается и не сохраняется и большой объем данных при длительных замерах. Однако данные получаемые с датчиков длительного мониторинга вибрации позволяют имитировать вибрационные испытания близкие к работе реальных объектов. Получаемые данные являются основой для создания математических алгоритмов имитационных воздействий для стендов ЭГВ -10 и математических описаний. В рамках создания банка были получены данные об изменении ускорений на автобусах и поездах пригородного сообщения с различной загрузкой и скоростными режимами.

Для обеспечения эффективной настройки систем виброзащиты на требуемый частотный диапазон в существующий алгоритм исследования были внесены коррективы.

В частности, отказались от исследования с возбуждением выше 2 G, были убраны донагружающая рамка и элементы крепления, резонирующие на исследуемом частотном диапазоне и затрудняющие выявления гидромеханических резонансов и антирезонансов, скорректирована компьютерная модель SAE опираясь на которую были выполнены опытные образцы. Применение активных современных фильтров и усилителей сигнала позволили идентифицировать антирезонанс на частоте настройки и снижение в его области динамической жесткости.

Несмотря на высокие достоинства алгоритма испытаний, позволяющего проводить различные исследования в области рабочих частот, а также оценивать единичные ударные процессы часть физических быстропротекающих динамических процессов не могла быть исследована. Основной проблемой стали невысокая частота дискретизации и несовершенство системы ударного возбуждения. В рамках расширения возможности испытательного стенда впервые для исследования колебательных процессов были использованы АЦП с частотой дискретизации 10 МГц что позволило получать не менее 5 млн точек в секунду. В качестве возбудителя был использован динамический молоток со встроенным датчиком силы и предварительным усилителем, встроенным в ручку. В отличие от динамических молотков, ранее применявшихся для создания калиброванного импульса, удалось отказаться от длинного кабеля (0,8 м) между датчиком и предварительным усилителем. Это позволило устранить паразитные наводки и получить сигнал с неискаженной помехами формы. В процессе испытаний возникла проблема хранения и обработки большого массива данных для уменьшения объема файлов Шохиным А.Е. был разработан макрос, позволяющий включать запись сигнала за несколько десятых секунд до прилагаемого импульса и завершать измерения за 1 - 2 секунды после прохождения импульса. это позволило сократить объем файла до 2-5 Мбайт.

В рамках исследования гидродинамических процессов в гидравлическом преобразователе был рассмотрен вопрос оценки влияния гидродинамических эффектов при ударном нагружении.

Как правило, динамическая модель гидравлической опоры включает в себя инерционный диссипативный и упругий элементы один из вариантов представлен на рис 1. где m_0 – масса объекта, m_1 инерционность по относительно движению создаваемая в преобразователе, b_1 - демпфирование, C_1 и C_{m1} упругие элементы создающие статическую и динамическую жесткости соответственно.

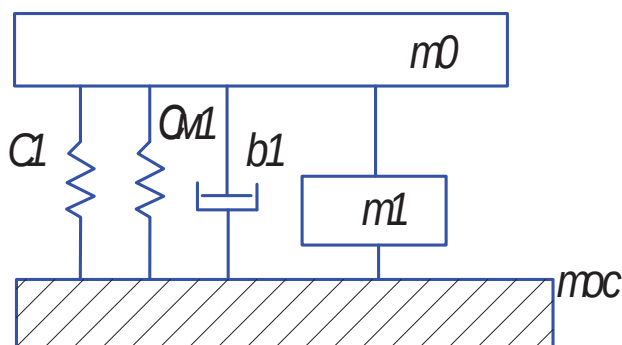


Рис 1.

m_0 – масса объекта , m_1 инерционность по относительно движению создаваемая в преобразователе , b_1 - демпфирование, C_1 и C_{m1} упругие элементы, создающие статическую и динамическую жесткости соответственно.

Данная модель справедлива в низкочастотном диапазоне частот до 1000 Гц. На частотах выше 1000 Гц наблюдается запираение гидравлического канала либо распад потока в нем. Также слабо исследовано поведение гидравлического преобразователя в процессе ударного воздействия. Если предположить, что в момент ударного воздействия инерционный преобразователь не включается в работу модель, представленная на рис 1, преобразуется к модели рис 2. где C гидроупругий элемент, моделирующий жесткость жидкости.

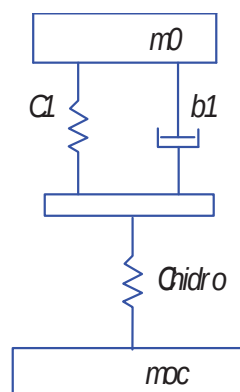


Рис 2

Первоначально для исследования ударных процессов была применена методика [1] позволяющая снимать сигналы с частотой обработки 100к Гц на канал и разрядностью АЦП 24 Бит. В ходе испытаний подтвердились предположения о том, что гидравлический преобразователь эффективно поглощает одиночный ударный импульс. Для сравнения были проведены испытания системы виброзащиты с отключенным гидравлическим преобразователем. Эффективное снижение амплитуды от использования гидропреобразователя составила 4- 6 дБ В зависимости от величины внешнего воздействия. Чем большей амплитудой был первоначальный импульс, тем эффективнее работала система виброзащиты. Это обусловлено повышением инерционных характеристик преобразователя. Однако применяемая методика не позволяла оценивать динамические параметры в первоначальный момент времени. С чем же связан интерес именно к первоначальному участку переходного процесса? Рабочей средой в гидропреобразователе является жидкость, которая приобретает высокие ускорения. Для расширения уровня понимания физических процессов, протекающих в канале потребовалось оценить возможность возникновения в ней явлений гидроудара и исследовать поведение системы в начальный момент времени. Для возникновения гидравлического удара необходимо придание потоку жидкости начальной скорости перед ударом об препятствие (например, использование столба жидкости поднятого на высоту 10 метров для пробивания отверстий). В нашем случае в качестве начального воздействия служит механический удар, который передается через камеры непосредственно на инерционный канал и от него во вторую камеру и упругую мембрану. Используя оборудование для высокоскоростного анализа сигналов, был рассмотрен механический удар и его динамика. Длительность ударного импульса составляла от 2 до 20мк секунд в зависимости от материалов применяемых в качестве бойков. Форма импульса представляла собой параболу. При ударе по гидравлическому преобразователю было обнаружено возникновение на начальном участке до момента отрыва дополнительной синусоиды, налагаемой на синусоиду основного сигнала на входном акселерометре. Также было обнаружено смещение сигнала по фазе на акселерометре, регистрирующем входные воздействия и датчике силы, оценивающим передаваемое воздействие на основание. Смещение сигнала на датчике силы зависит от пути прохождения волны импульса по механическим обводам конструкции. Смещение сигнала на акселерометре, установленном на мембрану второй камеры зависит от длины камер и инерционного преобразователя.

Что же происходит в гидравлическом преобразователе? Жидкость в гидравлическом преобразователе возбуждается за счет механического воздействия, более медленного по времени процесса чем гидроимпульс в длинном трубопроводе. Получается, что волновые процессы в первой камере нарастают не мгновенно, а с инерционным замедлением в силу природы создающего их механического возбуждения. Этот начальный ударный импульс отслеживается датчиком силы, встроенным в молоток,

а колебания поршня взаимодействующего с первой камерой отслеживаются акселерометром.

В первоначальный момент времени механическое воздействие приводит к возникновению гидроволн в первой камере направленных в сторону ее дна и инерционного канала. В этот момент времени инерционный канал еще не включился в работу и можно считать, что для системы с виброзащиты с ГПД справедлива модель системы с демпферо-упругими свойствами (рис 2). Часть волн отражается от дна и достигает верхней части камеры, воздействуя на поршень, по которому еще продолжается ударное воздействие. В результате акселерометр, установленный на поршне, фиксирует дополнительную синусоиду, накладывающуюся на параболический импульс. В определенный момент времени возникающие колебания жидкости в первой камере начинают работать над уменьшением амплитуды начального импульса. Встречное воздействие отраженных от дна волн работает как микро динамический гаситель, но существенного вклада в гашение ударного импульса внести не может, так как его энергия невысока.

В поршне возникают колебательные процессы, генерирующие новые волны, идущие к основанию первой камеры, а за счет высокой скорости протекающих в жидкости волновых процессов они успевают несколько раз пройти расстояние от дна до поршня за период нарастания ударного механического импульса.

В это время часть энергии первой волны проходит инерционный канал и достигая упругой мембраны запускает в работу инерционно преобразовательный контур. Работу контура фиксирует второй акселерометр, установленный на упругой мембране второй камеры. Так как процессы, протекающие в жидкости значительно быстрее процессов, протекающих в механических элементах, инерционный канал начинает работать на 0.3 - 0.6 микросекунды. К моменту нарастания механического импульса до максимального значения в работу включается инерционный канал, и система начинает функционировать как гидро-инерционная для медленно меняющихся процессов (рис 1) Таким образом работа системы как упруго диссипативной не оказывает существенного влияния на характеристики переходного процесса поскольку время ее работы незначительно и внешнее воздействие ее создающее по амплитуде менее 10% от максимального уровня ударного импульса. Поэтому для моделирования ударных процессов модель рис1 справедлива начиная со 0.7 мкс секунды ударного процесса. Применение методики рассмотрения гидравлического преобразователя с меньшим по частоте АЦП справедливо для проведения инженерных и отладочных испытаний. Поскольку вносимые погрешности от переходных процессов в первые 0,5 мкс секунд не превышают 5 %.

В ходе исследований системы виброзащиты с гидравлическими преобразователями ряд методик был существенно доработан, разработаны новые алгоритмы проведения испытаний, внедрена новая перспективная измерительная аппаратура. В результате создана методика комплексных испытаний, состоящая из нескольких алгоритмов взаимодополняющих друг друга. Расширение возможностей экспериментального исследования делает возможным исследовать не только динамические процессы в системах виброзащиты, но и быстроизменяющиеся процессы в других системах.

Литература.

1. Брысин А.Н., Шохин А.Е., Синев А.В. Возможности систем виброзащиты на базе инерционного преобразователя с дополнительным щелевым демпфированием // Вестник Нижегородского университета им Н.И. Лобачевского №4 часть 1 2011 стр 72-74

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ НЕ ВДОЛЬ ОСИ РОТОРА С РАДИАЛЬНЫМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ

Брысин А.Н.¹, Никифоров А.Н.², Татусь Н.А.³

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

¹ brysin@rambler.ru, ² n.andre@mail.ru, ³ nikalet@mail.ru

Аннотация. В работе определяются частоты радиально-окружных колебаний (волн) невязкой, несжимаемой жидкости, частично и равно заполняющей одинаковые отсеки в роторе, имеющем цилиндрическую полость, сплошные радиальные перегородки и постоянную угловую скорость. Предполагается следующее: влияние гравитации и поверхностного натяжения пренебрежимо мало по сравнению с центробежным эффектом; конфигурация динамического равновесия (невозмущенного движения) жидкости представляет собой вращение твердого кольцеобразного тела; возмущенное малым поперечным отклонением ротора движение жидкости не зависит от осевой координаты (плоское движение).

Данная задача возникает в связи с аномальным поведением эмульсии или раствора или суспензии в центрифугах и сепараторах, а также сжиженного топлива во вращающихся ракетах. Также как в невращающихся емкостях в полостях роторных машин жидкость имеет бесконечное число собственных форм колебаний, каждая из которых характеризуется своей частотой (периодом колебаний). «Собственные» поверхностные и/или внутренние волны в жидкости влияют на твердую оболочку как возмущающая сила. Возможно и обратное действие, в котором вибрация оболочки вызывает «вынужденные» волны в жидкости и на её свободной поверхности (при наличии). Разумное допущение об аномальном поведении состоит в том, что когда частота вибрации оболочки, т.е. вынужденных колебаний жидкости, оказывается достаточно близкой к одной из частот её собственных форм колебаний, устанавливается резонансное взаимодействие между ними с возникновением «замкнутого круга» – волны раскачивают оболочку, а оболочка повышает волны.

Уравнения гидродинамики Эйлера и неразрывности, определяющие собственное движение идеальной жидкости, свободной от весовых и поверхностных сил, во вращающейся вместе с ротором (рис.1) цилиндрической системе координат $r\theta z$, принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{r \partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{r \partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} + 2\omega u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{r \partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial(ru)}{r \partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad , \quad (1)$$

где u, v, w - скорости частиц жидкости относительно ротора, p - давление в жидкости, ρ - её плотность, ω - скорость вращения.

Граничные условия, дополняющие (1), т.е. задающие поведение этих уравнений на поверхностях жидкости:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad r = R \quad (\text{на боковой стенке полости}),$$

$$v = 0 \quad \text{при} \quad \theta = m\gamma, \quad \text{где } m - \text{целое число от } 0 \text{ до } n, \quad \gamma = 2\pi/n \quad (\text{на } n \text{ перегородках}),$$

$$w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, z = L \quad (\text{на торцевых стенках полости}),$$

$$u = u_r = \partial \mathfrak{R} / \partial t, \quad p = 0 \quad \text{при} \quad r = R \quad (\text{на свободной поверхности жидкости}).$$

В жидкости возмущенные скорости u, v, w сопряжены с возмущенным давлением p , дополняющим стационарное p_0 , связанное с угловой скоростью ω . По аналогии с гидростатическим давлением столба жидкости, в заданной системе ускорение $= \omega^2(r+r)/2$, а высота $= r-r$. Таким образом, без потери общности, давление в жидкости:

$$p = p_0 + p(r, \theta, z, t), \quad \text{где} \quad p_0 = \rho \omega^2 (r^2 - r^2) / 2.$$

Похожим образом можно определить свободную поверхность жидкости:

$$\mathfrak{R} = r + e(\theta, z, t),$$

где e - её возмущенное смещение.

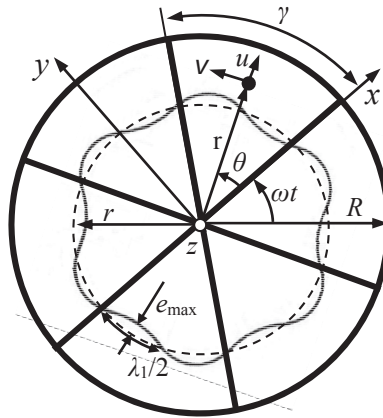


Рис.1. Сечение полости ротора, разделенной сплошными перегородками, частично и равно заполненной жидкостью, а также радиально-окружные волны первого порядка ($\kappa=1$)

Интерес задачи состоит в рассмотрении периодических движений жидкости. Пусть величины, характеризующие колебания системы «ротор-жидкость», являются малыми и периодическими, т.е. пропорциональными $\exp(iC_1x_1 + iC_2x_2 + \dots)$, где $C_{1,2,\dots}$ - константы, $x_{1,2,\dots}$ - переменные. В этом случае гидродинамические уравнения могут быть линеаризованы и решены в общем виде.

Для этого вначале используется метод возмущений, в соответствии с которым каждая искомая представляется в виде ряда по степеням малого отклонения ε оси ротора:

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots$$

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots, \quad w = 0. \quad (2)$$

В результате отбрасывания членов второго и более высокого порядка малости до и после подстановки (2) в (1) в первом приближении получается:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - 2\omega v_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + 2\omega u_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{r \partial \theta} \quad (3)$$

$$r \frac{\partial u_1}{\partial r} + u_1 + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} = 0$$

Далее разыскиваются периодические решения для u_1, v_1, p_1 , которые в силу представления $\mathfrak{R} = r + \varepsilon e_1$ и опускания квадратов малых удовлетворяют следующим кинематическим и динамическим граничным условиям на боковой стенке полости и на свободной поверхности жидкости:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \quad \text{при} \quad r = R, \\ u_1 &= \partial e_1 / \partial t, \quad p_1 = -\rho \omega^2 r e_1 \quad \text{при} \quad r = r. \end{aligned} \quad (4)$$

Собственное возмущение $e_1(\theta, t)$ должно быть гармоническим во времени и в окружном направлении:

$$e_1(\theta, t) = \exp i(k\theta - \Omega_k t),$$

где k и Ω_k - число и угловая скорость радиально-окружных волн вдоль всей свободной поверхности жидкости ($2\pi r$).

Необходимо отметить, что такое представление общепринято при решении волновых задач гидродинамики. Более того, из (4) следует:

$$\begin{aligned} u_1(r, \theta, t) &= U(r) \exp i(k\theta - \Omega_k t) \\ v_1(r, \theta, t) &= V(r) \exp i(k\theta - \Omega_k t), \\ p_1(r, \theta, t) &= P(r) \exp i(k\theta - \Omega_k t) \end{aligned} \quad (5)$$

Из-за перегородок суммарное волновое число k следует отличать от обычного волнового числа κ , определяющего длину волны:

$$\lambda_\kappa = \frac{\gamma r}{\kappa}, \quad \text{отсюда:} \quad \lambda_\kappa = \frac{2\pi r}{k}, \quad k = n\kappa,$$

где κ - число радиально-окружных волн в каждом из n отсеков, образованных n радиальными перегородками (в случае отсутствия последних $k=\kappa$).

Заменами (5) и сокращением на общую функцию $\exp i(k\theta - \Omega_k t)$, уравнения (3) могут быть приведены к виду:

$$\begin{aligned} -i\Omega_k U - 2\omega V &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \\ -i\Omega_k V + 2\omega U &= -i \frac{kP}{\rho r} \\ r \frac{dU}{dr} + U + ikV &= 0 \end{aligned}$$

Решением первых двух из этих уравнений являются:

$$\begin{aligned} U &= \frac{i}{\rho(\Omega_k^2 - 4\omega^2)} \left(2\omega \frac{kP}{r} - \Omega_k P' \right) \\ V &= \frac{1}{\rho(\Omega_k^2 - 4\omega^2)} \left(\Omega_k \frac{kP}{r} - 2\omega P' \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Подстановка этих соотношений в третье уравнение (неразрывности) приводит к простейшей форме уравнения Бесселя:

$$r^2 P'' + rP' - k^2 P = 0$$

с общим решением:

$$P = C_1 r^k + C_2 r^{-k}, \quad (7)$$

где C_1 и C_2 - определены граничными условиями (4) или вследствие (5) альтернативной формой:

$$U(R) = 0, \quad U(r) = -i\Omega_k, \quad P(r) = -\rho \omega^2 r.$$

Отсюда для определения C_1 и C_2 достаточно вернуться к полученному соотношению для U и подставить в него P и P' :

$$U(r) = \frac{ik}{\rho(\Omega_k^2 - 4\omega^2)} \left[(2\omega - \Omega_k) C_1 r^{k-1} + (2\omega + \Omega_k) C_2 r^{-k-1} \right].$$

Из условия $U(R)=0$ получается:

$$C_2 = C_1 \frac{\Omega_k - 2\omega}{\Omega_k + 2\omega} R^{2k}. \quad (8)$$

Из $U(r) = -i\Omega_k$ с учетом соотношения (8):

$$C_1 = \frac{\rho \Omega_k (\Omega_k + 2\omega)}{k (r^{k-1} - R^{2k} r^{-k-1})}. \quad (9)$$

Равенство $C_1 r^k + C_2 r^{-k} = -\rho \omega^2 r$ дает частотное уравнение:

$$\frac{\Omega_k^2}{\omega^2} - 2\sigma \frac{\Omega_k}{\omega} - k\sigma = 0, \quad \text{где } \sigma = \frac{1 - (r/R)^{2k}}{1 + (r/R)^{2k}}.$$

Откуда значение циклической частоты радиально-окружных волн (во вращающейся системе отсчета):

$$\Omega_k^{+,-} = \omega (\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + k\sigma}). \quad (10)$$

Итак, из (2) и (5–9) действительные решения следующие:

$$u = \varepsilon \Omega_k \frac{R^{2k} r^{-k-1} - r^{k-1}}{R^{2k} r^{-k-1} - r^{k-1}} \sin(k\theta - \Omega_k t), \quad v = -\varepsilon \Omega_k \frac{R^{2k} r^{-k-1} + r^{k-1}}{R^{2k} r^{-k-1} - r^{k-1}} \cos(k\theta - \Omega_k t),$$

$$p = p_0 - \rho \varepsilon \Omega_k \frac{(\Omega_k - 2\omega) R^{2k} r^{-k} + (\Omega_k + 2\omega) r^k}{k (R^{2k} r^{-k-1} - r^{k-1})} \cos(k\theta - \Omega_k t).$$

Формула (10) при $k=\kappa$, т.е. для полости без перегородок, дает количественные результаты аналогичные тем, которые получаются (по модулю) согласно зависимости Майлса-Треша [1]. Сравнивая (10) с (15), приведенной в [1], можно заключить:

- чем больше перегородок, тем значительнее (по модулю) значения частот радиально-окружных волн;
- каждому волновому числу k соответствуют две частоты: одна (Ω_k^+) - для волн, распространяющихся в направлении вращения ротора, а другая (Ω_k^-) - для волн противоположного направления;
- так как $\Omega_k^+ > |\Omega_k^-|$, то прямые радиально-окружные волны бегут быстрее обратных.

Кроме того, угловая скорость волн в неподвижной системе координат:

$$\Omega_k^{+,-} = \Omega_k^{+,-} + \omega, \quad (11)$$

поэтому относительно неподвижного наблюдателя оба типа длинных волн, а именно при $k < 3$, распространяются в сторону вращения ротора с жидкостью (рис.2а).

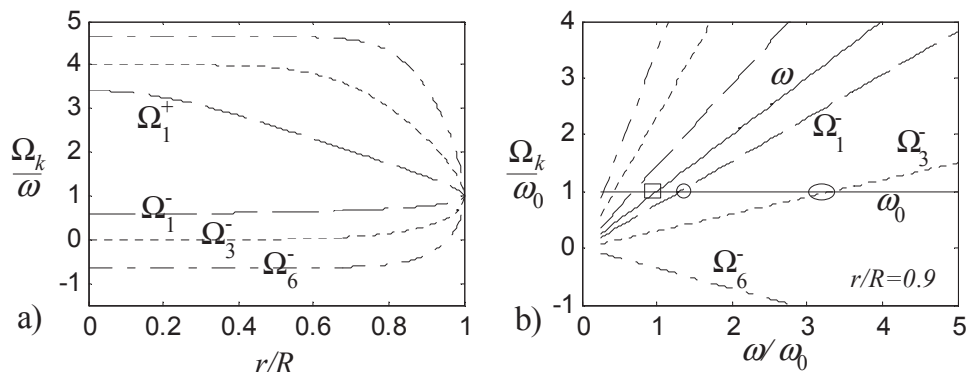


Рис.2.Циклические частоты основных радиально-окружных волн (с одним узлом) без перегородок (Ω_1), с тремя (Ω_3) и шестью (Ω_6) перегородками при различных заполнениях и скоростях вращения (при $r/R=0.9$)

Иллюстрируется наиболее важный случай для практики – это $k=1$, так как только такие формы колебаний жидкости возбуждаются поперечными движениями полости как

твёрдого тела [2]. Остальные формы колебаний с $k \neq 1$ являются ортогональными форме колебаний с $k=1$.

Рис.2а также показывает, что в постепенно пустеющей полости ротора значения волновых частот (за исключением Ω_1^+) сначала фактически не изменяются, а затем, когда слой жидкости становится тоньше уровня $r/R \approx 0.7$, что примерно эквивалентно 50%-ому заполнению, падают вплоть до значения скорости вращения.

Рис.2b – это диаграмма Кэмпбелла, в которую к частотам вращения ω и собственных колебаний ω_0 ротора добавлены частоты волн (11). Точка пересечения ω с ω_0 , отмеченная квадратом, соответствует критической скорости ротора. По аналогии точки внутри круга и эллипса отвечают скоростям так называемого волнового резонанса жидкости в податливом роторе [3]. Видно, что с повышением в нём числа перегородок критическая скорость жидкости заметно повышается и при достаточном и необязательно большом их количестве исчезнет.

Существование в окрестности указанных скоростей неустойчивости ротора, частично заполненного маловязкой жидкостью и содержащего радиальные перегородки, в т.ч. отсутствие резонансов в системе, обнаружено в экспериментах авторов [4,5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках проекта № 14-08-01120_a

Литература

1. Miles J.W., Troesch B.A. Surface Oscillations of a Rotating Liquid. Journal of Applied Mechanics, Vol.28, Ser.E, No.4 (1961), pp.491-496.
2. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твёрдого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. С.226-242 и 311-348.
3. Дерендяев Н.В. Устойчивость вращения роторных систем, содержащих жидкость. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2014. 154 с.
4. Бармина О.В., Брысин А.Н., Никифоров А.Н. О волновом резонансе ротора с секторизованной полостью при неполном наливе жидкости // Сборник трудов XXVI Международной инновационно-ориентированной конференции молодых ученых и студентов (МИКМУС-2014). М.: Изд-во ИМАШ РАН, 2015. С.452-455. - То же [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mikmus.ru/materialy-proshedshikh-konferentsij>
5. Никифоров А.Н., Татусь Н.А., Шохин А.Е. Самовозбуждение экспериментального ротора, частично заполненного жидкостью и содержащего радиальные перегородки // Проблемы машиностроения и надежности машин, №3, 2015.

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ И КОМБИНАЦИОННЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ УДАРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ

Бурд В.Ш.¹, Крупенин В.Л.²

¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

vburd1@gmail.com

²Институт машиноведения им. А. А. Благоднарова РАН, Москва, Россия

krupeninster@gmail.com

Аннотация. Рассматривается движение демпфированного ударного осциллятора под действием периодической полигармонической силы. Исследованы условия существования и устойчивости периодических резонансных режимов.

Представления виброударных процессов через интегралы движения виброударной системы с одной степенью свободы и (или) их однозначных функций диктуется физикой виброударных систем. Соответствующие переменные (импульс - фаза) весьма естественны для колебательных процессов, сопровождающихся ударами. Импульс может трактоваться как силовая характеристика удара, фаза - как момент соударения.

При этом в случае мгновенного удара представления периодических виброударных процессов могут быть записаны через так называемые периодические функции Грина, определяемые *только* линейной частью системы. Периодические функции Грина фигурируют ниже либо в виде рядов Фурье, либо конечных соотношений на интервалах периодичности. Это обстоятельство очень важно: с одной стороны сила удара представима через δ -функцию Дирака и величины, зависящие от импульса и фазы удара, а с другой стороны именно упомянутые периодические функции Грина вычисляются посредством хорошо известных методов [1, 2]. Такой подход был развит в работе [3].

Наша цель - дать корректное описание резонансных режимов движения в виброударных системах с одной степенью свободы.

Проводится исследование движение ударного осциллятора под действием малого полигармонического периодического возбуждения.

Эта задача сводится к исследованию двумерной системы с быстро вращающейся фазой.

Периодические возмущения гладких двумерных систем с быстро вращающейся фазой были изучены, в частности, в книге [4].

Основные результаты доклада, излагались в работах [5-8].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-08-01235-а).

Литература

1. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М., Наука, 1985. – 384 с.
2. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. 404 p.
3. Крупенин В.Л. О представлении периодических виброударных процессов через параметры движения «импульс - фаза» // Проблемы машиностроения и надежности машин, № 1, 2010 г. С. 10-19.

4. Burd V. Method of Averaging for Differential Equations on an Infinite Interval. Theory and Applications. // Chapman&Hall /CRC, Boca Raton, London, New York. 2007.352 p.
5. В.Ш. Бурд, В.Л. Крупенин Субгармонические резонансные колебания ударного осциллятора при полигармоническом возмущении электромагнитного типа// Вестник научно-технического развития.(Интернет-журнал www.vntr.ru). №7 (71). 2013. С.3-14.
6. V. Sh. Burd, V. L. Krupenin Resonance Oscillations of a Shock_Vibrating System under Polyharmonic Excitation // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. Allerton Press, Inc.2014. Vol. 43. No. 6. Pp. 537–543.
7. Бурд В.Ш. Вынужденные почти периодические колебания ударного осциллятора // Вестник научно-технического развития. (Интернет-журнал www.vntr.ru) . №4(56). 2012. С.3-13.
8. Крупенин В.Л. Об оценке числа периодических режимов движения нелинейных колебательных систем при периодическом полигармоническом возбуждении колебаний //Вестник научно-технического развития. (Интернет-журнал www.vntr.ru)№4 (68) 2013. С. 14-19.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ БЫСТРЫХ ВИБРАЦИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЦЕНТРОМ МАСС НА ГЛАВНОЙ ОСИ

Вишенкова Е.А.

Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия

vishenkova@bk.ru

Аннотация. Рассматривается движение тяжелого твердого тела, одна из точек которого совершает вертикальные высокочастотные гармонические колебания малой амплитуды. Предполагается, что центр масс тела лежит на одной из главных осей инерции. В рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений исследуется устойчивость двух типов перманентных вращений тела, при которых тело вращается вокруг главной оси инерции или вокруг осей из главной плоскости инерции. Для вращения первого типа найдены необходимые и в ряде случаев достаточные условия устойчивости вращений. Для вращения второго типа найдены достаточные условия устойчивости и неустойчивости вращений. Проведено сравнение полученных результатов с соответствующими результатами для тела с неподвижной точкой.

1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана. Рассмотрим движение твердого тела в однородном поле тяжести. Будем считать, что одна из точек тела O (точка подвеса) совершает вертикальные гармонические колебания относительно некоторой неподвижной точки O^* по закону $O^*O = \zeta(t) = a \cos(\Omega t)$.

Пусть $OXYZ$ — поступательно движущаяся система координат, ось OZ которой направлена вертикально вверх; $Oxyz$ — жестко связанная с телом система координат, ее оси направлены вдоль главных осей инерции тела для точки O . Ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно системы $OXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ . Пусть центр масс G тела расположен на одной из его главных осей инерции для точки O , например, на оси Ox ($x_G > 0$). Будем предполагать, что амплитуда a колебаний точки подвеса мала по сравнению с приведенной длиной $l = A/(mx_G)$, а частота Ω колебаний велика по сравнению с характерной частотой $\Omega_1 = \sqrt{g/l}$, при этом считаем, что $a\Omega \sim 1$. Введем малый параметр ε , безразмерную частоту ω_0 и безразмерные параметры α, β (A, B, C — главные моменты инерции тела для точки O):

$$\varepsilon = a/l \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad \Omega_1/\Omega = \varepsilon\omega_0, \quad \alpha = A/B, \quad \beta = A/C. \quad (1)$$

Уравнения движения тела будем рассматривать в канонической форме. При помощи методов теории возмущений гамильтониан системы может быть приведен к виду, главная часть которого не содержит времени. Как в исходной, так и в преобразованной системе координата ψ циклическая, соответствующий ей импульс постоянен.

Перейдем к безразмерным импульсам p_1, p_2, p_3 и безразмерному времени при помощи множителей $A\Omega_1$ и Ω_1 соответственно. В безразмерных переменных и параметрах приближенный гамильтониан системы примет вид:

$$H = \frac{\alpha \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{2 \sin^2 \theta} (p_1 - p_3 \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} p_2^2 (\alpha \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \frac{\beta}{2} p_3^2 + \sin \theta \sin \varphi + \quad (2) \\ + \frac{(1 - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \theta} (p_1 - p_3 \cos \theta) p_\theta + \frac{\xi}{2} (\alpha \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta \cos^2 \varphi), \quad \xi = \frac{mx_G a^2 \Omega^2}{2Ag}$$

Последнее слагаемое в гамильтониане представляет собой вибрационный потенциал [1, 2]. Параметр ξ ($\xi > 0$) характеризует частоту вибрации точки подвеса. Инерционные параметры α и β должны удовлетворять неравенствам, следующим из неравенств треугольника для моментов инерции: $\alpha + \beta - \alpha\beta \geq 0$, $\alpha - \beta + \alpha\beta \geq 0$, $\beta - \alpha + \alpha\beta \geq 0$.

Как и в случае с неподвижной точкой, стационарные вращения могут происходить только вокруг вертикально направленных осей. Существует два типа таких вращений: вокруг оси Ox , содержащей центр масс тела, и вокруг одной из осей в главных плоскостях инерции, содержащей Ox (но не совпадающей с этой осью).

В случае вращения первого типа центр масс может находиться ниже или выше точки подвеса. Этому вращению соответствует следующее частное решение системы с приближенным гамильтонианом (2):

$$\theta = \theta_0 = \pi/2, \quad \varphi = \varphi_0 = \text{const} (\cos \varphi_0 = 0), \quad p_1 = \eta, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \quad \eta = \omega/\Omega_1. \quad (3)$$

Здесь ω и η – размерная и безразмерная угловые скорости твердого тела, значения которых могут быть произвольными.

Рассмотрим теперь вращения вокруг осей из главной плоскости инерции. Пусть это будет плоскость Oxz . Вращениям соответствуют частные решения системы:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 = \text{const} \neq \pi/2, \quad \varphi = \varphi_0 = \text{const} (\cos \varphi_0 = 0), \\ p_1 &= \eta(\sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0 / \beta), \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \eta \cos \theta_0 / \beta. \end{aligned} \quad (4)$$

Параметры задачи о стационарных вращениях связаны соотношением, полученным из канонических уравнений движения:

$$\left(\eta^2 \frac{\beta - 1}{\beta} + \xi \alpha \right) s \sin \theta_0 = 1, \quad s = \text{sign}(\sin \varphi_0). \quad (5)$$

В качестве независимых примем параметры α , β , ξ , η . Допустимые оси перманентных вращений в плоскости Oxz определим из условия неотрицательности величины η^2 в (5). Точки пересечения окружности единичного радиуса с центром в точке подвеса и допустимых осей образуют допустимые дуги. Вертикальное направление в этой плоскости определим с помощью единичного вектора $n = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ оси OZ , в котором $\gamma_2 = 0$. Допустимые значения параметров φ_0 , θ_0 , η в зависимости от значений параметров β , ξ записаны в таблице 1.

Таблица 1.

	$\beta > 1$		$\beta < 1$		
	$\xi > 1/\alpha$	$\xi < 1/\alpha$	$\xi > 1/\alpha$		$\xi < 1/\alpha$
φ_0	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$3\pi/2$	$3\pi/2$
θ_0	$(0, \arcsin(1/\xi\alpha))$	$(0, \pi/2)$	$(\arcsin(1/\xi\alpha), \pi/2)$	$(\pi/2, \pi)$	$(\pi/2, \pi)$
η	$\eta > 0$	$\eta^2 > \frac{(1 - \xi\alpha)\beta}{\beta - 1}$	$\eta^2 < \frac{(\xi\alpha - 1)\beta}{1 - \beta}$	$\eta^2 > \frac{(\xi\alpha + 1)\beta}{1 - \beta}$	$\eta^2 > \frac{(\xi\alpha + 1)\beta}{1 - \beta}$

В случае $\xi < 1/\alpha$ допустимые дуги являются полуокружностями и совпадают с дугами для случая неподвижной точки подвеса (рис.1, а, б). Случай $\xi > 1/\alpha$ отличается от предыдущего уменьшением диапазона множества допустимых дуг в случае $\beta > 1$ (рис.1, в), и увеличением – в случае $\beta < 1$ (рис.1, г).

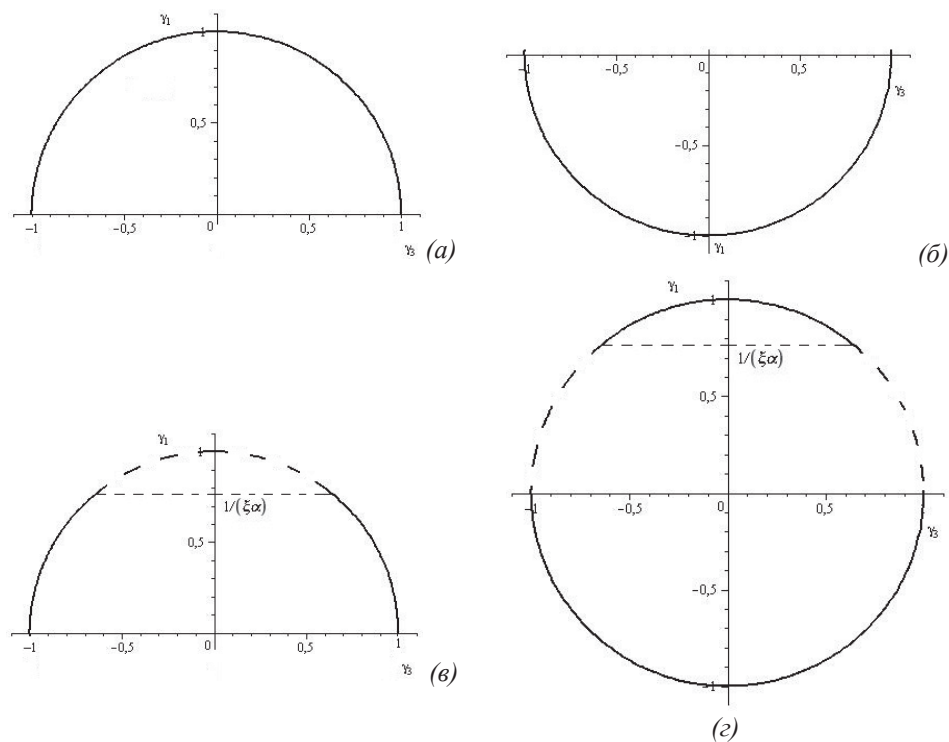


Рис.1. Допустимые дуги

Каждому значению угла θ_0 соответствует одна точка на допустимой дуге и одно значение угловой скорости η , определяемые при помощи соотношения (5).

Случай для осей, лежащих в главной плоскости Oxy , формально сводится к предыдущему заменой $\alpha \leftrightarrow \beta$, $\theta_0 \leftrightarrow \varphi_0$.

Цель работы – исследование устойчивости решений (3) и (4) по отношению к координатам θ , φ и отвечающим им импульсам в рамках приближенной системы.

2. Метод исследования. Введем возмущения по формулам $\theta = \theta_0 + x_1$, $\varphi = \varphi_0 + x_2$, $p_2 = y_1$, $p_3 = y_2$. Гамильтониан системы примет следующий вид: $H = H_2 + \dots$, где многоточие означает совокупность слагаемых не менее третьей степени относительно возмущений.

Система канонических уравнений движения автономна, поэтому функция Гамильтона является первым интегралом. Если квадратичная форма H_2 определенно-положительная, то по теореме Ляпунова исследуемое положение равновесия устойчиво. Если же форма H_2 знакопеременна, то будем исследовать характеристическое уравнение соответствующей ей линейной системы, имеющее вид

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0. \quad (7)$$

При выполнении условий

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d = a^2 - 4b > 0, \quad (8)$$

корни $\pm i\sigma_j$ ($j=1,2$) уравнения (7) чисто мнимые, и исследуемые решения устойчивы в линейном приближении. Неравенства (8) являются необходимыми условиями устойчивости перманентных вращений тела. Если хотя бы одно из неравенств (8) выполняется с противоположным знаком, то имеет место неустойчивость, так как в этом случае у характеристического уравнения будут корни с положительной вещественной частью. В частности, условие $b < 0$ является достаточным условием неустойчивости, которое далее будет исследовано в разделе 4.

Изложим результаты, полученные при исследовании устойчивости рассматриваемых решений системы. Результаты исследования представляются следующим образом. Для каждой из областей полуось положительных значений параметра ξ разбита на несколько интервалов, границы которых зависят от исследуемой точки. В соответствии каждому интервалу выписаны условия устойчивости или неустойчивости.

3. Случай перманентных вращений вокруг оси, содержащей центр масс.

3.1. *Центр масс тела ниже точки подвеса.* Допустимую часть плоскости параметров α, β разобьем на 6 областей прямыми $\alpha=\beta$, $\alpha=1$, $\beta=1$. Эти области расположены симметрично относительно прямой $\alpha=\beta$; они обозначены цифрами 1—3 и 1'—3' (рис.2, а).

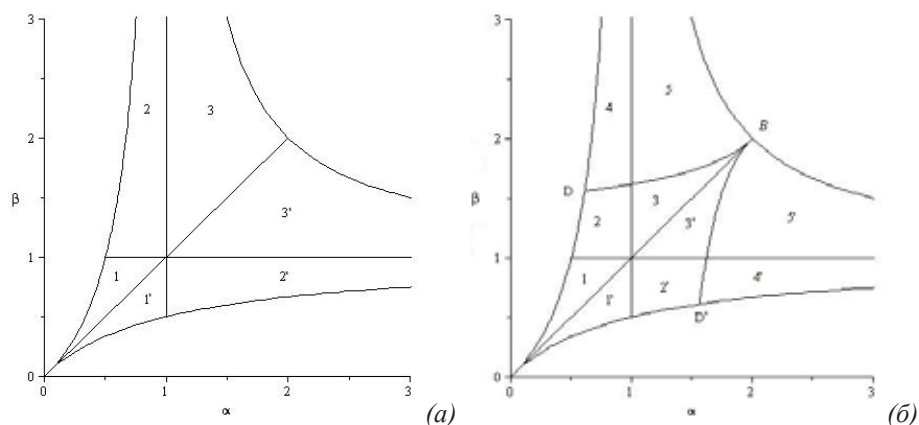


Рис.2. Области параметров α, β в случае расположения центра масс тела ниже (а) и выше (б) точки

В областях 1, 2 достаточные (и одновременно необходимые) условия устойчивости выполняются, если угловая скорость η перманентного вращения удовлетворяет условию $\eta < \eta_*$, а в области 3 — при любых значениях параметра η ($\eta > 0$). В области 1 могут выполняться также только необходимые (не являющиеся достаточными) условия устойчивости, определяемые неравенством $\eta > \eta_{**}$. Величины η_* , η_{**} задаются соотношениями: $\eta_* = \frac{\alpha(\xi\beta+1)}{1-\alpha}$, $\eta_{**} = \frac{\beta(\xi\alpha+1)}{1-\beta}$.

$$\eta_*, \eta_{**} \text{ задаются соотношениями: } \eta_* = \frac{\alpha(\xi\beta+1)}{1-\alpha}, \quad \eta_{**} = \frac{\beta(\xi\alpha+1)}{1-\beta}.$$

В указанных условиях устойчивости параметр ξ в правых частях может принимать любые положительные значения (частота вибрации точки подвеса тела произвольна). В областях 1'—3' условия устойчивости получаются из соответствующих условий для областей 1—3 заменой $\alpha \leftrightarrow \beta$.

3.2. *Центр масс тела выше точки подвеса.* Выделим в допустимой части плоскости параметров α, β области 1—5 и симметричные им относительно прямой $\alpha=\beta$ области 1'—5' (рис.2, б). Эти области разделены, помимо аналогичных предыдущему случаю разделительных прямых, двумя симметричными кривыми DB и D'B. Кривая DB задается уравнением $\alpha = (\beta(2\beta-3))/((\beta-1)^2)$.

В области 1 достаточные условия устойчивости выполнены только при $\xi > 1/\alpha$, причем при $1/\alpha < \xi < 1/(\alpha\beta)$ имеют вид $\eta^2 < \eta_2^2$, а при $\xi > 1/(\alpha\beta)$ — вид $\eta^2 < \eta_1^2$. Могут выполняться только необходимые условия устойчивости; диапазонам $0 < \xi < \xi_1$, $\xi_1 < \xi < \xi_3$, $\xi_3 < \xi < 1/(\alpha\beta)$, $\xi > 1/(\alpha\beta)$ отвечают условия $\eta^2 > \eta_4^2$, $\eta_1^2 < \eta^2 < \eta_3^2$ или $\eta_4^2 < \eta^2$, $\eta^2 > \eta_1^2$, $\eta^2 > \eta_2^2$.

В областях 2 и 4 достаточные условия устойчивости выполнены только при $\xi > 1/(\alpha\beta)$, причем при $\xi < 1/\alpha$ они имеют вид $\eta_2^2 < \eta^2 < \eta_1^2$, а при $\xi > 1/(\alpha\beta)$ — $\eta^2 < \eta_1^2$. Также в диапазонах $(\xi_3, 1/(\alpha\beta))$, (ξ_1, ξ_3) , (ξ_1, ξ_2) в области 2 и $(0, \xi_1)$ в области 4 изменения ξ

необходимые условия устойчивости имеют вид $\eta_1^2 < \eta^2 < \eta_2^2$, $\eta_1^2 < \eta^2 < \eta_3^2$ или $\eta_4^2 < \eta^2 < \eta_2^2$, $\eta_4^2 < \eta^2 < \eta_2^2$ соответственно. При $0 < \xi < \xi_2$ в области 4 – неустойчивость.

В областях 3 и 5 достаточные условия устойчивости выполняются при любом значении ξ , причем при $\xi > 1/\alpha$ угловая скорость η может быть произвольной. В обеих областях условия принимают вид: при $1/(\alpha\beta) < \xi < 1/\alpha - \eta^2 > \eta_2^2$, при $\xi < 1/(\alpha\beta) - \eta^2 > \eta_1^2$. В этих областях могут выполняются только необходимые условия устойчивости, причем они выполняются, если $0 < \xi < \xi_1$ в области 3 и если $\xi_2 < \xi < \xi_1$ в области 5. При $\xi < 1/(\alpha\beta)$ эти условия имеют вид $\eta_4^2 < \eta^2 < \eta_2^2$, а при $\xi > 1/(\alpha\beta) - \eta_4^2 < \eta^2 < \eta_1^{*2}$.

Здесь

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{3\alpha - 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2\beta + \beta}{2\alpha\beta - \alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 - \alpha^3 + \beta^2}, \\ \xi_2 &= \frac{3\beta - 2\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha}{2\alpha\beta - \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 - \beta^3 + \beta^2}, \\ \xi_3 &= \frac{\alpha - 2}{\alpha^2 - \alpha - \beta}, \quad \eta_1^2 = \frac{\alpha(\xi\beta - 1)}{1 - \alpha}, \quad \eta_2^2 = \frac{\beta(\xi\alpha - 1)}{1 - \beta}, \\ \eta_{3,4}^2 &= \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 2\beta)\xi + 4 - \alpha - \beta \mp 2\sqrt{((\alpha^2 - \alpha - \beta)\xi + 2 - \alpha)((\beta^2 - \alpha - \beta)\xi + 2 - \beta)}}{\alpha + \beta - \alpha\beta}.\end{aligned}$$

Если сравнить полученные результаты с соответствующими результатами для тела с неподвижной точкой[4], то для любого случая расположения центра масс относительно точки подвеса в областях, в которых выполнялись условия устойчивости и при неподвижной точки подвеса, добавление вибрации увеличивает диапазон изменения угловой скорости вращения η . В случае расположения центра масс выше точки подвеса при достаточно больших значениях скорости вибрации точки подвеса достаточные условия в этих областях выполняются при любом значении η . Для того же случая расположения центра масс есть области изменения инерционных параметров α , β , для которых не выполняются достаточные условия устойчивости, с добавлением вибрации одной из точек тела появляются области изменения угловой скорости η , для которых выполняются условия устойчивости. При этом угловая скорость не должна превышать некоторого предельного значения.

4. Случай перманентных вращений вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции Oxz .

4.1. Случай $\xi < 1/\alpha$. Допустимую часть плоскости параметров α , β разобьем на 7 областей прямыми $\alpha = \beta$, $\beta = 1$, $\beta = 4/3$, $\beta = 2$; они обозначены цифрами 1–7 (рис.3, а).

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{3\beta - 4}{4\alpha(\beta - 1)}, \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{3\beta^2 - 7\beta + 4}{\alpha^2\beta^3}}, \quad \xi_3 = \frac{\sqrt{\beta - 1}}{2\alpha}, \\ \eta_1^2 &= \frac{(\xi\alpha - 1)\beta}{1 - \beta}, \quad \eta_2^2 = \frac{(\xi\alpha + 1)\beta}{1 - \beta}.\end{aligned}$$

Здесь η_3^2, η_4^2 ($\eta_3^2 > \eta_4^2$) – решения бикубического уравнения

$$(\beta - 1)^3 \eta^6 + 3\xi\alpha\beta (\beta - 1)^2 \eta^4 + 3(\beta - 1)\beta^2 (\xi^2 \alpha^2 - \beta + 1) \eta^2 + \beta^2 \xi \alpha (\xi^2 \alpha^2 + \beta - 1) = 0.$$

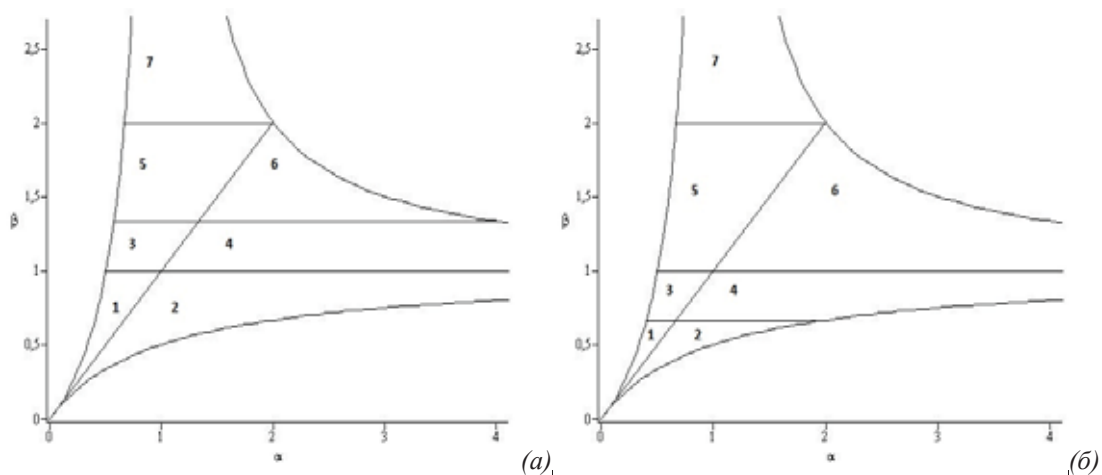


Рис.3. Области параметров α, β в случае $\zeta < 1/\alpha$ (а) и $\zeta > 1/\alpha$ (б)

Таблица 2.

Обл.	ζ	Достаточные условия устойчивости	Достаточные условия неустойчивости
1	$\forall \zeta$	—	$\forall \eta$
2	$\forall \zeta$	$\forall \eta$	—
3	$\zeta < 1/(\alpha\beta)$	—	$\eta^2 > \eta_1^2$
	$1/(\alpha\beta) < \zeta < 1/\alpha$		$\eta^2 > \zeta\alpha\beta$
4	$\zeta < 1/(\alpha\beta)$	—	—
	$1/(\alpha\beta) < \zeta < 1/\alpha$		$\eta_1^2 < \eta^2 < \zeta\alpha\beta$
5	$\zeta < 1/(\alpha\beta)$	—	$\eta^2 > \eta_1^2$
	$1/(\alpha\beta) < \zeta < 1/\alpha$		$\eta^2 > \zeta\alpha\beta$
6	$\zeta < \zeta_1$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \eta_3^2$	—
	$\zeta_1 < \zeta < 1/(\alpha\beta)$	—	
	$1/(\alpha\beta) < \zeta < 1/\alpha$	—	
7	$\zeta < 1/(\alpha\beta)$	—	$\eta^2 > \eta_1^2$
	$1/(\alpha\beta) < \zeta < \zeta_2$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \zeta\alpha\beta$	$\eta^2 > \zeta\alpha\beta$
	$\zeta_2 < \zeta < \zeta_1$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \eta_3^2$	
	$\zeta_1 < \zeta < \zeta_3$ (при $\beta > 5$ $\zeta_1 < \zeta < 1/\alpha$)	$\eta_4^2 < \eta^2 < \eta_3^2$	
	$\zeta_3 < \zeta < 1/\alpha$ (не существует при $\beta > 5$)	—	

В таблице 2 приведены результаты достаточных условий устойчивости и неустойчивости вращений. Результаты представлены аналогичным предыдущему

случаю способом. Прочерк в таблице означает, что соответствующие условия не выполнены ни при каких значениях параметра η .

4.2. *Случай $\xi > 1/\alpha$.* Допустимую часть плоскости параметров α, β разобьем на 7 областей прямыми $\alpha=\beta, \beta=2/3, \beta=1, \beta=2$; они обозначены цифрами 1–7(рис.3, б).

Таблица 3.

Обл.	ξ	Достаточные условия устойчивости	Достаточные условия неустойчивости
1	$1/\alpha < \xi < \xi_1$	—	$\eta^2 > \eta_2^2$
	$\xi_1 < \xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta_3^2 < \eta^2 < \eta_1^2$	$\eta^2 > \eta_2^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_2$	$\eta_3^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$	$\eta^2 > \eta_2^2,$ $\xi\alpha\beta < \eta^2 < \eta_1^2$
	$\xi > \xi_2$	—	$\eta^2 > \eta_2^2,$ $\xi\alpha\beta < \eta^2 < \eta_1^2$
2	$\xi < \xi_1$	—	$\eta^2 < \eta_1^2$
	$\xi_1 < \xi < 1/(\alpha\beta)$	—	$\eta^2 < \eta_1^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_2$	$\xi\alpha\beta < \eta^2 < \eta_1^2$	$\eta^2 < \xi\alpha\beta$
	$\xi > \xi_2$	$\eta_3^2 < \eta^2 < \eta_1^2$	$\eta^2 < \xi\alpha\beta$
3	$1/\alpha < \xi < 1/(\alpha\beta)$	—	$\eta^2 > \eta_2^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi$	—	$\eta^2 > \eta_2^2,$ $\xi\alpha\beta < \eta^2 < \eta_1^2$
4	$\xi < 1/(\alpha\beta)$	—	$\eta^2 < \eta_1^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_1$	—	$\eta^2 < \xi\alpha\beta$
	$\xi > \xi_1$	$\eta_3^2 < \eta^2 < \eta_1^2$	$\eta^2 < \xi\alpha\beta$
5	$\xi > 1/\alpha$	—	$\eta^2 > \xi\alpha\beta$
6	$\xi > 1/\alpha$	—	$\eta^2 < \xi\alpha\beta$
7	$1/\alpha < \xi < \xi_3$ (не существует при $\beta < 5$)	$\eta_4^2 < \eta^2 < \eta_3^2$	$\eta^2 > \xi\alpha\beta$
	$\xi > \xi_3$ (при $\beta < 5$ $\xi > 1/\alpha$)	—	

Таблицы 2 и 3 позволяют сравнить результат анализа устойчивости перманентных вращений твердого тела при наличии и отсутствии вибраций [4]. Для не слишком больших значений частоты ξ вибрации точки подвеса достаточные условия устойчивости совпадают по форме с аналогичными условиями для случая $\xi=0$. При этом границы изменения угловой скорости η перманентного вращения сдвигаются, являясь функциями ξ . С ростом ξ в ряде областей изменения инерционных параметров α, β ,

например, в областях 1 и 7, для которых при отсутствии вибраций достаточные условия описанным в работе способом не обнаружены, эти условия выявлены в ряде диапазонов изменения угловой скорости η .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00380) и программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (НШ-2363.2014.1).

Литература

1. Маркеев А.П. К теории движения твердого тела с вибрирующим подвесом // Доклады Академии наук. 2009. Т.427, N 6. С.771-775.
2. Юдович В.И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. Т.4, N 3. С.26-158.
3. Румянцев В.В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела // ПММ. 1956. Т.20. Вып. 1. С. 51-66.
4. Холостова О.В. Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде. М. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2008. 128 с.

КРИТЕРИИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОСТИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ МЕХАНИЗМОВ С НЕЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОЛОЖЕНИЯ

Вульфсон И.И.

Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна,

Санкт-Петербург, Россия

jvulf@yandex.ru

Аннотация. Исследованы условия квазистационарности колебательных систем цикловых механизмов, при которых собственные частоты на протяжении всего кинематического цикла сохраняют постоянное или мало изменяющееся значение. Установлено, что такие условия могут быть реализованы в приводах, имеющих решётчатую структуру. С целью повышения точности позиционирования исполнительных органов и снижения виброактивности привода предложен ряд новых критериев оптимизации динамических характеристик. Получены скорректированные условия динамической устойчивости при учёте квазистационарности.

Кинематические характеристики цикловых механизмов являются не только источником возмущений, но и формируют нестационарные динамические связи, которые могут привести к нарушению динамической устойчивости. Наиболее известным примером подобного проявления нестационарных связей является параметрический резонанс, при котором на определённых частотных диапазонах система приобретает способность накапливать энергию. В машинах с цикловыми механизмами обычно имеет место медленное изменение параметров. При этом реализуемый частотный диапазон параметрического возбуждения существенно удалён от наиболее опасного главного параметрического резонанса, а параметрические резонансы высших порядков оказываются подавленными даже при малых диссипативных силах. В практике это нередко приводит к ложному выводу, что влиянием нестационарных связей можно пренебречь.

Одной из возможных причин подобных заблуждений является традиционное представление об источниках возбуждения свободных колебаний, согласно которому эти колебания возникают лишь из-за начальных условий и относительно быстро затухают за счёт диссипативных сил. При этом не принимаются во внимание так называемые *сопровождающие колебания*. Этот термин был впервые использован И.М. Бабаковым [1] для случая, когда возбуждаемые колебания происходят с собственной частотой, но в отличие от свободных колебаний амплитуда этих колебаний зависит не от начальных условий, а от нарушений непрерывности частного решения и её производной. В цикловых механизмах такие нарушения чаще всего возникают при кинематическом возбуждении согласно заданному закону движения ведомого звена, причём не только при $t=0$, но и на протяжении всего кинематического цикла. Исследование этой проблемы применительно к кулачковым механизмам нашло отражение в ряде работ А.Е.Кобринского [2, 3] и получило дальнейшее развитие в работах [4 – 8].

Особую роль сопровождающие колебания приобретают в системах с переменными параметрами. С этой проблемой приходится сталкиваться при решении современных динамических задач цикловых механизмов, т.е. механизмов с нелинейной функцией положения $\Pi(\varphi)$. При линеаризации этой функции в окрестности программного движения в системе возникают нестационарные связи $\Pi(\varphi_* + q) \approx \Pi(\varphi_*) + \Pi'(\varphi_*)q$, где $\Pi' = d\Pi / d\varphi$ – первая передаточная функция механизма (аналог скорости), q – динамическая ошибка, возникающая при колебаниях.

Нестационарные связи могут быть важным источником повышения виброактивности в цикловых механизмах. В частности, в этом случае эффективный коэффициент диссипации существенно снижается и даже может стать отрицательным, что, вопреки традиционным представлениям, приводит к увеличению амплитуд колебаний. Условия подавления этого эффекта могут быть квалифицированы как *условия квазистационарности* [6, 7, 8].

Если динамическая модель имеет H степеней свободы, то система уравнений в матричной форме может быть представлена как

$$\mathbf{a}(\varphi)\mathbf{q}'' + \tilde{\mathbf{b}}(\varphi)\mathbf{q}' + \tilde{\mathbf{c}}(\varphi)\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{Q}}(\varphi). \quad (1)$$

Здесь в целях удобства анализа осуществлён переход к «безразмерному времени» $\varphi = \omega t$. При этом $(\)' = d/d\varphi$, $\mathbf{q}' = \dot{\mathbf{q}}/\omega$ и $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}/\omega$, $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}/\omega^2$, $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}/\omega^2$ (В дальнейшем будут использованы эти нормированные значения).

Определённые затруднения могут возникнуть при определении матрицы $\mathbf{b}(\varphi)$. Дело в том, что при позиционных силах сопротивления, свойственных механизмам, диссипация имеет частотно независимый характер и определяется на базе экспериментальных данных, полученных при моногармонических колебаниях. Поэтому для этих сил, равно, как и для гироскопических составляющих, приходится использовать процедуру приведения к определённой форме колебаний. При этом мы располагаем диагональной матрицей приведенных коэффициентов диссипации $\mathbf{b}^*$, на базе которой определяем матрицу $\mathbf{b}$ (подробнее см. [7, 8])

$$\mathbf{b} = (\boldsymbol{\beta}^T)^{-1} \mathbf{b}^* (\boldsymbol{\beta})^{-1}. \quad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{\beta}$ матрица коэффициентов форм колебаний.

Таким образом, для определения $\mathbf{b}^*$ и $\boldsymbol{\beta}$ требуется предварительный частотный и модальный анализ, что нетрудно осуществить, принимая во внимание, что при медленном изменении параметров «собственные» частоты и нестационарные формы колебаний могут быть получены как собственные значения и собственные векторы матрицы $\mathbf{\Gamma}(\varphi) = \mathbf{a}(\varphi)^{-1}\mathbf{c}(\varphi)$, т.е. при $\mathbf{b} \equiv 0$.

Существенным дополнительным источником периодического возбуждения колебаний нередко являются соударения при перекладке в зазорах и динамические эффекты, связанные с псевдоударом [3, 7 – 10].

Система уравнений (1) в квазинормальных координатах $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\beta}^{-1}\mathbf{q}$ имеет вид

$$a_r^*(\varphi)\eta_r'' + b_r^*(\varphi)\eta_r' + c_r^*(\varphi)\eta_r = M_r(\varphi) \quad (r = 1, \dots, H), \quad (3)$$

где a_r^*, c_r^* – соответствующие элементы диагональных матриц $\mathbf{a}^* = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{a} \boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{c}^* = \boldsymbol{\beta}^T \tilde{\mathbf{c}} \boldsymbol{\beta}$.

Отсюда

$$\eta_r'' + 2n_r(\varphi)\eta_r' + p_r^2(\varphi)\eta_r = W_r \quad (r = 1, \dots, H), \quad (4)$$

где $n_r(\varphi) = \delta_r(\varphi)p_r(\varphi)$; $\delta_r(\varphi) = \delta_{0r} + \delta_{gr} = \delta_{0r} - 0,5a_r(\varphi)^{-1}p_r(\varphi)^{-1}a_r'(\varphi)$, $\delta_{0r} = \Psi_r/(4\pi)$, δ_{gr} – приведенные к форме r диссипативные и гироскопические члены, Ψ_r – коэффициент рассеяния. (Здесь и ниже использовано безразмерное нормированное значение частоты $p_r = \sqrt{(\tilde{c}_r^*/a_r^*) - n_r^2 - n_r'} \approx \sqrt{\tilde{c}_r^*/a_r^*}$).

При переходе к квазинормальным координатам принято во внимание, что в цикловых машинах $\omega \square p_r(\varphi)$. Следовательно, в нашем случае изменение параметров можно считать медленным за исключением узких интервалов при их скачкообразном

или резком изменении. При этом с точностью до величин первого порядка малости кинетическая и потенциальная энергия определяются как [11]

$$T = 0,5 \sum_{r=1}^H a_r^*(\varphi) \dot{\eta}_r^2; \quad V = 0,5 \sum_{r=1}^H c_r^*(\varphi) \eta_r^2. \quad (5)$$

Как показано в работах [4–8], в системах с переменными параметрами даже при их медленном изменении возможны локальные нарушения условий динамической устойчивости на конечном отрезке времени. В этом случае, несмотря на то, что зона нарастания колебаний чередуется с зоной затухания, уровень возникающей амплитудной модуляции может быть весьма значительным и существенно повысить виброактивность всей системы.

Отметим, что знак n_r (или δ_r) не позволяет ещё судить о характере изменения амплитуды A_r сопровождающих колебаний. Действительно, при $n_r = 0$ на уровне ВКБ-приближения первого порядка имеем

$$A_r(\varphi) = A_r(0) \sqrt{p_r(\varphi_i) / p_r(\varphi)}. \quad (6)$$

При учёте (4) условие, при которых для формы колебаний r обеспечивается затухающий характер возбуждаемых сопровождающих колебаний, принимает вид

$$\delta_{0r} > \delta_r^*(\varphi). \quad (7)$$

где $\delta_{0r} = \vartheta_{0r} / (2\pi) = \psi_{0r} / (4\pi)$; $\vartheta_{0r}, \psi_{0r}$ – приведенные к форме r значения логарифмического декремента и коэффициента рассеяния, $\delta_r^*(\varphi) = \delta_{gr}(\varphi) + \delta_{pr}(\varphi)$. Здесь функция

$$\delta_{pr}(\varphi) = 0,5 p_r(\varphi)^{-2} \frac{dp_r(\varphi)}{d\varphi} \quad (8)$$

отражает влияние переменности «собственной» частоты колебаний. Максимальное значение функции δ_r^* соответствует критическому уровню возбуждения.

Неравенство (7) можно трактовать как условие динамической устойчивости на произвольном отрезке времени, соблюдение которого обеспечивает затухающий характер возбуждаемых свободных колебаний [5–8]. Это неравенство совпадает с результатами, полученными на основании прямого метода Ляпунова, устанавливающего достаточное условие динамической устойчивости. Можно показать, что при медленно меняющихся параметрах оно является также и необходимым.

На основании (4), (6), (7), (8) с учётом диссипации, гироскопических сил и переменности «собственных» частот решение дифференциального уравнения (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \eta_r = A_{0r} \exp \left[- \int_0^\varphi n_{0r}^* d\varphi \right] \sqrt{\frac{a_r^*(0) p_r(0)}{a_r^*(\varphi) p_r(\varphi)}} \cos \left[\int_0^\varphi p_r d\varphi + \gamma_r \right] + \\ + \frac{1}{\sqrt{p_r(\varphi)}} \int_0^\varphi \frac{W_r(u)}{\sqrt{p_r(u)}} \exp \left[- \int_u^\varphi n_r^*(\xi) d\xi \right] \sin \left[\int_u^\varphi p_r(\xi) d\xi \right] du. \end{aligned} \quad (9)$$

В формуле (9) слагаемые, описывающие сопровождающие колебания, в явном виде отсутствуют и выявляются только после процедуры интегрирования. При решении задач динамического анализа и синтеза это приводит к очевидным затруднениям, для устранения которых в работах [4–8] была использована процедура последовательного

интегрирования по частям, после чего второе слагаемое формулы (9) (аналог формулы Дюамеля) может быть представлено в виде ряда по производным частного решения. При этом амплитуда сопровождающих колебаний для формы r , возбуждённых при $t=t_i$ ($\varphi=\varphi_i$), описывается зависимостью

$$A_{ri}(\varphi) = A_r(\varphi_i) \exp \left[- \int_{\varphi_i}^{\varphi} (\delta_{0r} - \delta_r^*) p_r d\varphi \right] = A_r(\varphi_i) \exp \left[- \int_{\varphi_i}^{\varphi} \delta_{0r} p_r d\varphi \right] \sqrt{\frac{a_r^*(\varphi_i) p_r(\varphi_i)}{a_r^*(\varphi) p_r(\varphi)}}. \quad (10)$$

Амплитуда $A_r(\varphi_i)$ при медленном изменении параметров представляет собой быстро сходящийся ряд, члены которого пропорциональны скачкам производных функции возмущения W и обратно пропорциональны частоте в возрастающей степени (подробнее см. [4 – 8]).

Следует отметить, при выполнении условия (7) могут возникнуть трудности, так как «управлять» диссипативными характеристиками практически достаточно сложно. Дело в том, что, установка специальных регулируемых демпферов нежелательно из-за сопутствующего роста энергетических потерь и соответствующего уменьшения коэффициента полезного действия. К тому же, требуемый уровень диссипации δ_{0r} может оказаться весьма высоким, а иногда даже нереализуемым. Поэтому представляет интерес поиск других возможных способов выполнения условий квазистационарности. Ниже предложен ряд критериев, которые могут быть использованы при оценке виброактивности системы и для оптимизации параметров. Одним из таких критериев может служить, критический уровень возбуждения δ_r^* . Как следует из (4), (8), он состоит из двух переменных слагаемых, зависящих от гироскопических сил и «собственных» частот. Потребуем $p_r = \text{const}$. При этом естественно возникает сомнение в принципиальной возможности реализации постоянства частот свободных колебаний при нестационарных связях. Как показал анализ, в динамических системах цепной структуры осуществить малые изменения «собственной» частоты удаётся лишь посредством малой пульсации инерционных и упругих характеристик. В то же время это оказалось принципиально возможным применительно к цикловым системам, которые схематизированы в виде динамических решёток. Подобные системы встречаются во многих современных машинах текстильной, полиграфической, лёгкой и ряда других отраслей промышленности, когда для обеспечения достаточной жёсткости системы исполнительные органы приводятся в движение многократно сдублированными цикловыми механизмами [6, 7, 8]. При этом колебательная система имеет структуру решётки, в которой каждый повторяющийся элемент образует замкнутый контур, отображающий инерционные и упругодиссипативные характеристики главного вала, исполнительного органа и циклового механизма. Для данного класса систем ввиду идентичности цикловых механизмов критический уровень возбуждения на основании (4), (6), (8) также может быть определён следующим образом:

$$\delta_r^* = 0,5 \Pi''(v \frac{\partial p_r}{\partial \Pi'} p_r^{-2} - \frac{\partial a_r}{\partial \Pi'} p_r^{-1}), \quad (11)$$

где $v = -1$ соответствует амплитуде колебаний, $v = 1$ – виброскоростей, $v = 3$ – виброускорений.

На рис.1,а показаны два механизма, связывающие главный вал с исполнительным органом, схематизированные в виде динамической модели, приведенной на рис. 1,б.

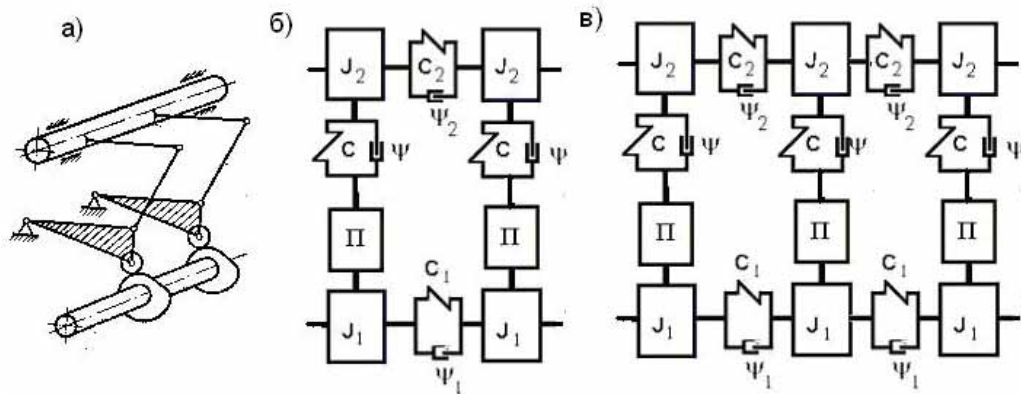


Рис.1. Фрагмент схемы и динамические модели привода решётчатой структуры

Примем следующие условные обозначения: J_j – момент инерции; c_j – коэффициенты жёсткости; ψ_j – коэффициенты рассеяния; Π – оператор, соответствующий функции положения циклового механизма $\varphi_{2j} = \Pi_j(\varphi_{1j})$, где $\varphi_{1j}, \varphi_{2j}$ – углы поворота входного и выходного звеньев; j – номер механизма. В общем случае эта модель отображает один из модулей динамической модели кольцевой структуры многосекционного привода.

В целях большей наглядности физических предпосылок для реализации условий квазистационарности сначала определим частотные характеристики одиночного модуля ($j_{\max} = 2$) в предположении жёсткого привода ($\varphi_{11} = \alpha$), жёсткого механизма ($c = \infty$) и отсутствии связей с другими подсистемами. В этом случае динамическая модель трансформируется в систему, состоящую из вала с приведенным коэффициентом крутильной жёсткости $c_* = c_1 + c_2 \Pi'^2(\varphi_*)$ и исполнительного органа с приведенным моментом инерции $J_* = J_1 + J_2 \Pi'^2(\varphi_*)$. Эта система имеет две степени свободы, причём одна из обобщенных координат является циклической. Тогда единственная частота свободных колебаний («собственная» частота) определяется как

$$p(\varphi_*) = \sqrt{c_*(\varphi_*) / J_*(\varphi_*)} = k_1 \sqrt{[1 + \zeta \Pi'^2(\varphi_*)] / [1 + \mu \Pi'^2(\varphi_*)]}, \quad (12)$$

где $k_1 = \sqrt{c_1 / J_1}$; $\zeta = c_2 / c_1$; $\mu = J_2 / J_1$.

Из-за переменности функции $\Pi'(\varphi_*)$ «собственная» частота p в общем случае также оказывается переменной, однако при $\zeta = \mu$ имеем $p = \text{const}$. Легко заметить, что условие $\mu = \zeta$, совпадает с равенством парциальных частот $\sqrt{c_1 / J_1} = \sqrt{c_2 / J_2}$. Для другого предельного случая при относительно малой динамической жёсткости привода получаем качественно аналогичный результат $p \approx k_1 \sqrt{2} = \text{const}$.

Если система состоит из двух секций ($j_{\max} = 3$), то при $\mu = \zeta$, $c \rightarrow \infty$ колебательная система имеет две степени свободы и следующие частотные характеристики:

$$p_1 = k_1 \sqrt{0,5(3 - \sqrt{5})}; \quad p_2 = k_1 \sqrt{0,5(3 + \sqrt{5})}. \quad (13)$$

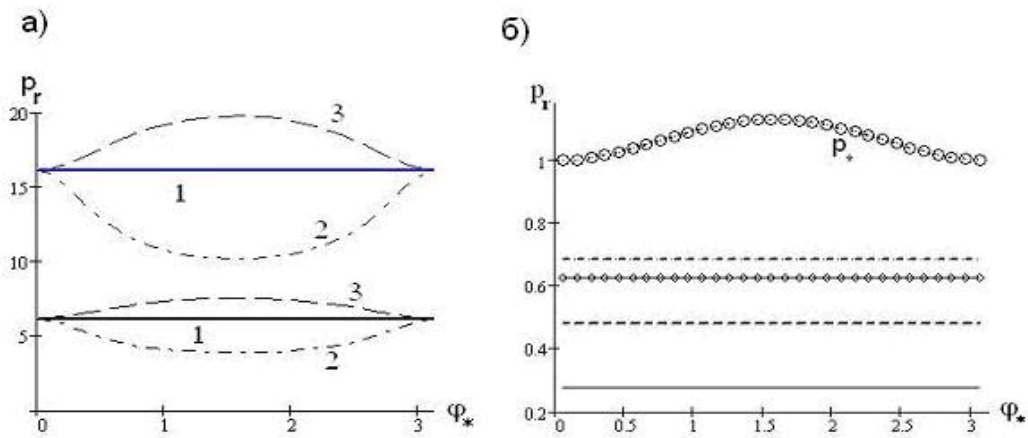


Рис.2. К анализу «собственных» частот при условиях квазистационарности

Этому случаю при $k=10$, $\Pi=x_0(1-\cos\varphi_*)$, $x_0=1$ на графиках функций $p_r(\varphi_*)$ (рис.2,а) соответствуют линии 1 (Здесь и ниже использованы безразмерные нормированные значения частот, равные их отношению к угловой скорости Ω .) Коэффициенты формы также остаются постоянными на всём протяжении кинематического цикла: $\beta = 0,5(\sqrt{5}-1)$; $\beta = -0,5(\sqrt{5}+1)$. Нарушение условия $\mu = \zeta$ иллюстрируется на графиках кривыми 2 ($\mu = 1, \zeta = 2$) и 3 ($\mu = 4, \zeta = 1$). На рис.2, б приведены ряд графиков $p_r(\varphi_*)$ для модели, которая по сравнению с рассмотренной выше представляет собой динамическую решётку, состоящую из шести секций, в которой учтены упругие характеристики механизмов. Графики показывают, что и в этом случае с достаточной точностью можно добиться постоянства частот свободных колебаний при переменных параметрах системы. Кривая p_* , отвечающая функции $p_* = \sqrt{c[J_2^{-1} + J_1^{-1}\Pi'^2(\varphi_*)]}$, разделяет спектр частот на две области. Ниже этой кривой форма колебаний описывается тригонометрическими функциями, а выше – комбинацией тригонометрических и гиперболических функций [7,8].

Из вышеизложенного не следует, что в общем случае возбуждаемые колебания будут затухающими. Согласно формуле (11) обращается в нуль только первое слагаемое.

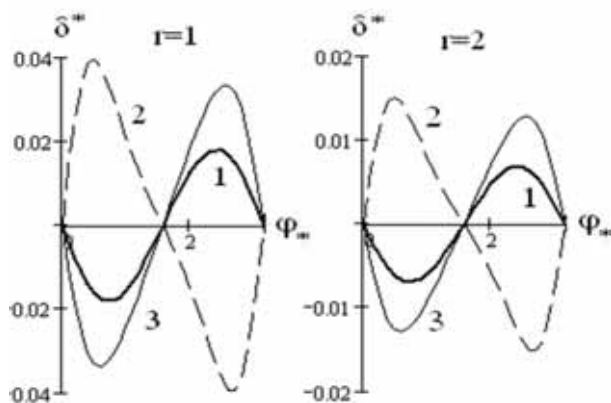


Рис.3. Графики $\delta_r^*(\varphi_*)$

При этом данный критерий описывается зависимостью $\delta_r^* = -0,5a'/\sqrt{a\tilde{c}}$. На рис.3 для двухсекционной динамической модели (см. рис. 1, б) приведены графики $\delta_r^*(\varphi_*)$, построенные для обеих форм колебаний ($r = 1; 2$) при одинаковых инерционных характеристиках ($\mu = 0,25$). Кривые 1 соответствуют критическому уровню возбуждения при $\zeta = 0,25$, что соответствует условию $p_r \approx \text{const}$. Эти условия для колебаний и виброускорений совпадают. Кривые 2 и 3 отвечают повышенной жёсткости исполнительного

органа ($\zeta = 1$). В этом случае критический уровень возбуждения для колебаний (сплошная линия) и виброускорений (штриховая линия) различаются по знаку и

величине, причём по абсолютному значению примерно в два раза превосходят результат, полученный при условиях квазистационарности.

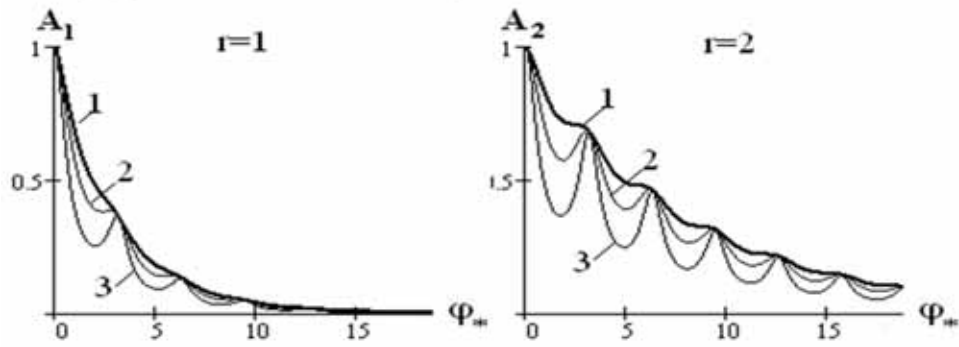


Рис.4. Графики $A_r(\varphi)$: 1 – $\mu = \zeta = 0,25$; 2 – $\mu = \zeta = 1$; 3 – $\mu = \zeta = 4$

При сохранении $p_r \approx \text{const}$ с ростом переменной составляющей инерционных характеристик, как и следовало ожидать, увеличивается критический уровень возбуждения. Для анализа интенсивности затухания возбуждаемых колебаний воспользуемся зависимостью (10). Примем $\varphi_i = 0$ и $A_r(0) = 1$. Тогда функция $A_r(\varphi)$ численно совпадает с безразмерной характеристикой, описывающей отношение текущего значения амплитуды к амплитуде при исходном возмущении. На графиках $A_r(\varphi)$ (рис.4) наглядно видно, что при диссипации ($\delta_{0r} = 0,02$), несмотря на, в целом, затухающий характер колебаний, внутри кинематического цикла при повышенных значениях $\mu = \zeta$ имеют место локальные нарушения условий динамической устойчивости. Это связано с тем, что работа гироскопических сил обращается в нуль только на периоде $\varphi_* = 2\pi$ [12].

Поскольку инерционные характеристики формирует частотный спектр, их роль носит комплексный характер и не ограничивается влиянием гироскопических сил. Это особенно проявляется на виброускорениях при массивных исполнительных органах ($\mu \geq 1$). Учёт этого фактора проиллюстрируем на примере модели, частота которой описана формулой (13) (см. рис 1, б при $c = \infty$, $j_{\max} = 2$). Используя (10), можно показать, что пульсация амплитуд возбуждаемых ускорений пропорциональна следующему функционалу:

$$\Psi = [1 + \zeta \Pi'^2(\varphi_*)]^{1,5} / [1 + \mu \Pi'^2(\varphi_*)]^{2,5} - 1. \quad (14)$$

Пусть $\zeta / \mu = \lambda$; $\Pi = x_0(1 - \cos \varphi_*)$; $x_0 = 1$. Если считать $\mu = J_2 / J_1$ заданной величиной, то $\Psi = \Psi(\varphi_*, \mu, \lambda)$. Экстремумы этой функции отвечают значению угла φ_* , равного $\varphi_{**}(\mu, \lambda) = \arcsin[x_0^{-1} \sqrt{(3\lambda - 5) / (2\mu\lambda)}]$. Аналогичный функционал для амплитуд виброперемещений представим в виде

$$\Psi_1 = [1 + \zeta \Pi'^2(\varphi_*)]^{0,5} [1 + \mu \Pi'^2(\varphi_*)]^{0,5} - 1. \quad (15)$$

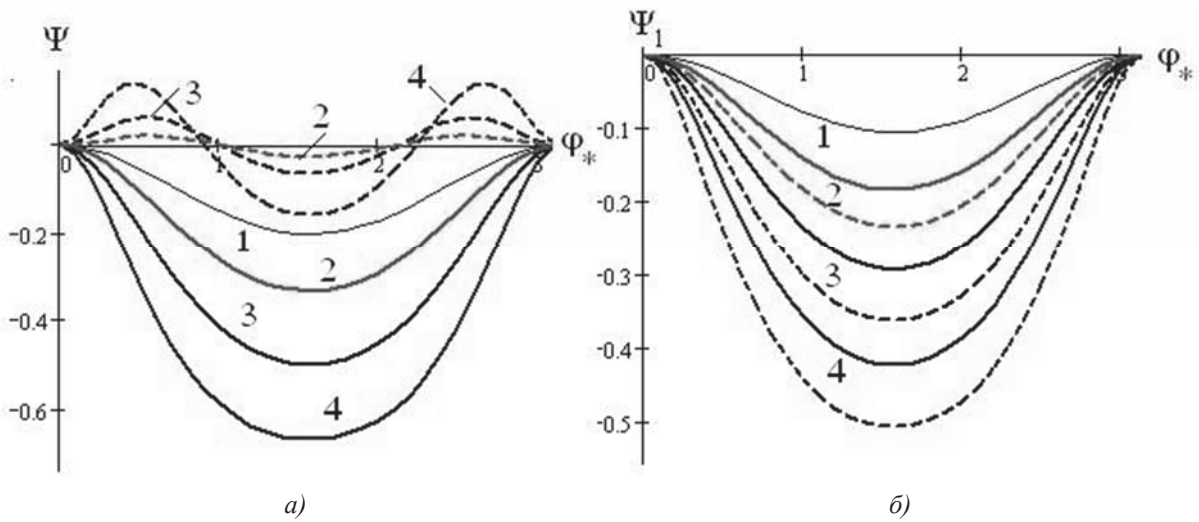


Рис.5. Семейство графиков $\Psi(\varphi_*)$, $\Psi_1(\varphi_*)$: 1 – $\mu = 0,25$; 2 – $\mu = 0,5$; 3 – $\mu = 1$; 4 – $\mu = 2$.

На графиках $\Psi(\varphi_*)$, $\Psi_1(\varphi_*)$ сплошные линии отвечают условию $\mu = \zeta$, а штриховые – условиям оптимизации уровня пульсации виброускорений (рис.5, а), при которых осуществляется равенство отклонений функции $\Psi(\varphi_*)$ от среднего значения. На графике Ψ_1 (рис.5, б) видно, что при реализации этих условий несколько возрастает уровень виброперемещений.

После обратного перехода от квазинормальных координат к исходным обобщённым координатам $\mathbf{q} = \beta \boldsymbol{\eta}$ можно проверить эффективность выполнения условий квазистационарности. В качестве иллюстрации на рис.6 для модели (см.рис.1,б, $j_{\max} = 3$) представлены графики изменения виброускорений q_1'' и q_2'' от одиночного возмущения при $\delta_{0r} = 0,02$ и $\mu = \zeta = 4$ (кривая 1), $\mu = 1$, $\zeta = 4$ (кривая 2).

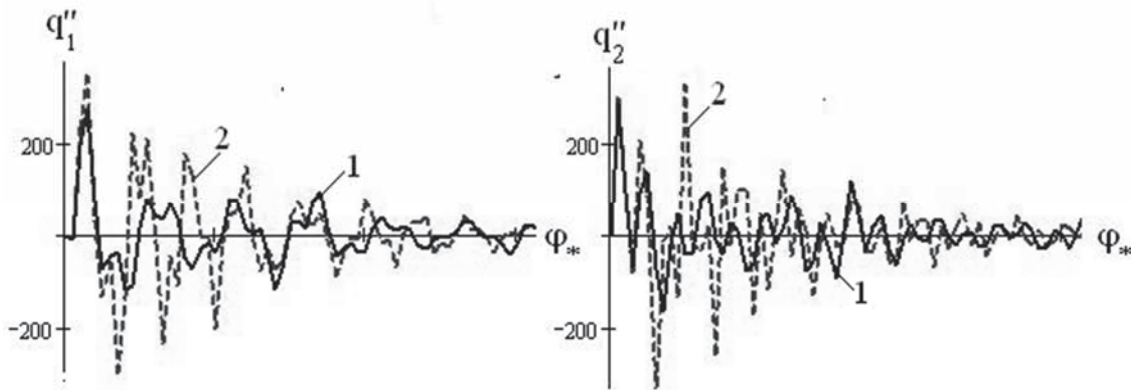


Рис.6. Графики виброускорений

Анализ графиков показывает, что в окрестности зоны большой связанности между главным валом и исполнительным органом ($\varphi_* \approx \pi/2$) использование условий квазистационарности даёт существенный динамический эффект. Однако следует отметить, что при определённых условиях может возникнуть дополнительное возбуждение, связанное с трансформацией форм колебаний [7, 9]. При этом происходит перераспределение энергии между формами колебаний, которое иногда создаёт иллюзию появления внешнего источника. Вопросы, связанные с переносом энергии в колебательных системах механизмов с нестационарными связями, рассмотрены в работе [12]. Данный способ может быть применён для подавления параметрических резонансов.

Литература

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1965. 560 с.
2. Кобринский А.Е. Влияние упругости звеньев на кинематику некоторых кулачковых механизмов. – М.: Оборонгиз, 1948. 50 с.
3. Кобринский А.Е. Механизмы с упругими связями. Динамика и устойчивость. – М.: Наука, 1964. 392. с.
4. Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамика машин.– Л.: Машиностроение. 1968. 284 с.
5. Вульфсон И.И. Динамические расчёты цикловых механизмов. – Л.: Машиностроение. 1976. 328 с.
6. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение. 1990. 309 с.
7. Вульфсон И.И. Динамика цикловых машин. – СПб.: Политехника, 2013. 425 с.
8. Vulfson, I. Dynamics of cyclic machines. (Expanded edition of the monograph [7] translation). – Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015. 410 p.
9. Вульфсон И.И. Критерии для анализа псевдоудара при сохранении кинематического контакта в зазорах шарниров. – Теория механизмов и машин. 2007. №1(5). С. 22-37.
10. Вульфсон И. И. Оптимизация параметров колебательных систем цикловых механизмов с учетом зазоров.– Проблемы машиностроения и надёжности машин.1994. №3. С.62–66.
11. Митропольский Ю. А. – Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 432 с.
12. Вульфсон И.И. Перенос энергии в колебательных системах приводов с цикловыми механизмами. – Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2013. №4. С. 3-11.

О ТОЧНОСТИ МОДЕЛИ АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНЫМ МЕХАНИЗМОМ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Глазунов В.А.¹, Хейло С.В.²

¹Институт машиноведения им. А.А. Благодирова РАН, Москва, Россия, vaglzn@mail.ru

²ФГБОУ ВПО «МГУДТ», Москва, Россия, sheilo@yandex.ru

Аннотация. В статье рассмотрен алгоритм управления поступательным механизмом параллельной структуры с тремя степенями свободы. Показано влияние параметров механизма на точность управления механизмом.

Важной функциональной частью промышленного манипулятора является система его управления. В настоящее время задачи управления приводными системами получили значительное развитие – разработаны приемы, методы и алгоритмы их проектирования. При этом рассматривались только механизмы роботов последовательной структуры [1, 2]. Наряду с этим, трудности вызывают задачи управления механизмами параллельной структуры с изменяющимися моментами инерции, нелинейностью уравнений связей, взаимовлиянием между степенями свободы, непостоянным передаточным отношением между входными и выходными координатами выходного звена.

Механизмы параллельной структуры находят широкое применение в качестве исполнительных органов разнообразных машин, автоматов, станков и устройств в различных отраслях промышленности [3-5]. Рассматриваемый алгоритм управления, основан на решении обратных задач динамики и связан с вычислением сил по заданному движению [1]. Такой подход применялся для механизма параллельной структуры с 2-мя степенями свободы [2, 6] при переходе через особое положение, связанное с потерей управляемости. Алгоритм управления рассмотрен применительно к поступательному механизму параллельной структуры с тремя степенями свободы [7, 8] (рис.1).

Механизм представляет три кинематические цепи с тремя приводами, каждый из которых обеспечивает движение одной из степеней подвижности. На вход каждого из приводов подается управляющий сигнал. Выходом системы является движение рабочего органа – выходного звена в рабочем пространстве. Манипуляционный механизм параллельной структуры, обеспечивает поступательные перемещения в каждой кинематической цепи, содержащей по три поступательные пары. Причем две из трех пар выполнены в виде шарнирного параллелограмма. Данный манипулятор имеет три замкнутые кинематические цепи, обладает тремя степенями свободы: перемещение вдоль осей x, y, z .

Уравнение связи для поступательно-направляющего манипулятора с тремя кинематическими парами представляется системой уравнений в виде [8]:

$$\begin{cases} F_1 = q_1 - (x + l_3) - l_2 \cdot \cos\left(-\arcsin \frac{y}{l_2}\right) - l_1 \cdot \cos\left(\arcsin \frac{z}{l_1}\right) = 0, \\ F_2 = q_2 - (y + l_3) - l_2 \cdot \cos\left(-\arcsin \frac{z}{l_2}\right) - l_1 \cdot \cos\left(\arcsin \frac{x}{l_1}\right) = 0, \\ F_3 = q_3 - (z + l_3) - l_2 \cdot \cos\left(-\arcsin \frac{x}{l_2}\right) - l_1 \cdot \cos\left(\arcsin \frac{y}{l_1}\right) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

где l_1, l_2, l_3 – длины звеньев, q_1, q_2, q_3 – входные координаты, x, y, z – координаты выходного звена.

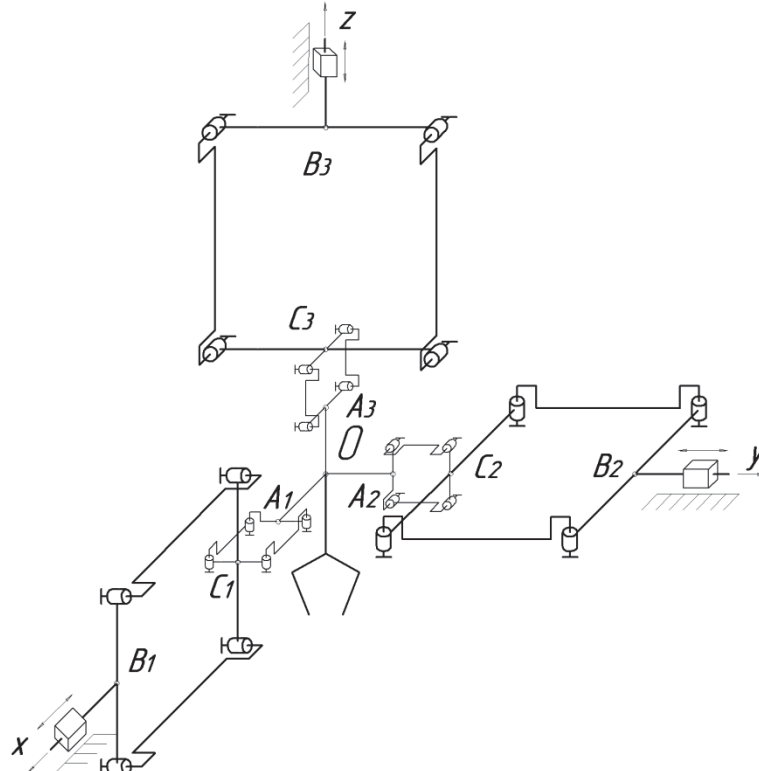


Рис.1 Поступательно-направляющий механизм с тремя степенями свободы

Математическая модель исполнительной системы состоит из уравнения движения механизма. Уравнение движения можно записать из условия, что сумма элементарных работ всех внешних сил, сил инерции и сил в приводах на элементарном перемещении механической системы равна нулю:

$$\sum dA_{np} + \sum dA_{ин} + \sum dA_{тяж} = 0$$

где dA_{np} , $dA_{ин}$, $dA_{тяж}$ - элементарные работы сил в приводах, сил инерции и сил тяжести.

При перемещениях в приводах на элементарные расстояния соответственно $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$ имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + m\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + m\ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + mg \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + m_1 \ddot{q}_1 \delta q_1 + P_1 \delta q_1 &= 0 \\ m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + m\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + m\ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + mg \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + m_2 \ddot{q}_2 \delta q_2 + P_2 \delta q_2 &= 0 \\ m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_3} \delta q_3 + m\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_3} \delta q_3 + m\ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_3} \delta q_3 + mg \frac{\partial z}{\partial q_3} \delta q_3 + m_3 \ddot{q}_3 \delta q_3 + P_3 \delta q_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

где m_1, m_2, m_3 - масса входных звеньев соответствующих цепей, m - масса выходного звена, P_1, P_2, P_3 - силы в приводах, $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ - ускорения выходного звена, $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3$ - ускорения в приводах, $\frac{\partial x}{\partial q_i}, \frac{\partial y}{\partial q_i}, \frac{\partial z}{\partial q_i}$ - переменны коэффициенты.

Переменные коэффициенты определяются из уравнения связей $F_i(x, y, z, q_i) = 0$. Дифференцируя каждую из этих неявных функций по переменным x, y, z получаем систему уравнений, связывающие скорости входных и выходных звеньев:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial F_i}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0 \quad i=1, 2, 3,$$

Из полученных выражений получаем формулы для определения искоемых переменных коэффициентов:

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} = -\frac{\partial F_i}{\partial q_i} \bigg/ \frac{\partial F_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_i} = -\frac{\partial F_i}{\partial q_i} \bigg/ \frac{\partial F_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_i} = -\frac{\partial F_i}{\partial q_i} \bigg/ \frac{\partial F_i}{\partial z}.$$

В уравнения движения входят значения ускорений входных и выходных звеньев. Дифференцируя уравнения (2) второй раз по t , после преобразований получаем уравнения, связывающие ускорения входных и выходных звеньев:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \ddot{x} - \left(\frac{y}{l \cdot a} \right) \cdot \ddot{y} - \left(\frac{z}{l \cdot b} \right) \cdot \ddot{z} - \left(\frac{1}{l \cdot b} + \frac{z^2}{l^3 \cdot b^3} \right) \cdot \dot{z}^2 - \left(\frac{1}{l \cdot a} + \frac{y^2}{l^3 \cdot a^3} \right) \cdot \dot{y}^2 \\ \ddot{q}_2 &= \ddot{y} - \left(\frac{z}{l \cdot b} \right) \cdot \ddot{z} - \left(\frac{x}{l \cdot c} \right) \cdot \ddot{x} - \left(\frac{1}{l \cdot b} + \frac{z^2}{l^3 \cdot b^3} \right) \cdot \dot{z}^2 - \left(\frac{1}{l \cdot c} + \frac{x^2}{l^3 \cdot c^3} \right) \cdot \dot{x}^2 \\ \ddot{q}_3 &= \ddot{z} - \left(\frac{y}{l \cdot a} \right) \cdot \ddot{y} - \left(\frac{x}{l \cdot c} \right) \cdot \ddot{x} - \left(\frac{1}{l \cdot c} + \frac{x^2}{l^3 \cdot c^3} \right) \cdot \dot{x}^2 - \left(\frac{1}{l \cdot a} + \frac{y^2}{l^3 \cdot a^3} \right) \cdot \dot{y}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

где $a = \sqrt{1 - \frac{y^2}{l_2^2}}$; $b = \sqrt{1 - \frac{z^2}{l_1^2}}$; $c = \sqrt{1 - \frac{x^2}{l_1^2}}$, $l = l_1 = l_2$

При заданном законе движения выходного звена $x_T(t)$, $y_T(t)$, $z_T(t)$, после дифференцирования можно получить скорости $\dot{x}_T(t)$, $\dot{y}_T(t)$, $\dot{z}_T(t)$ и ускорения $\ddot{x}_T(t)$, $\ddot{y}_T(t)$, $\ddot{z}_T(t)$.

Задача управления состоит в минимизации ошибки положения $\Delta_1(t) = x_T(t) - x(t)$, $\Delta_2(t) = y_T(t) - y(t)$, $\Delta_3(t) = z_T(t) - z(t)$, скорости $\dot{\Delta}_1(t) = \dot{x}_T(t) - \dot{x}(t)$, $\dot{\Delta}_2(t) = \dot{y}_T(t) - \dot{y}(t)$, $\dot{\Delta}_3(t) = \dot{z}_T(t) - \dot{z}(t)$, ускорения $\ddot{\Delta}_1(t) = \ddot{x}_T(t) - \ddot{x}(t)$, $\ddot{\Delta}_2(t) = \ddot{y}_T(t) - \ddot{y}(t)$, $\ddot{\Delta}_3(t) = \ddot{z}_T(t) - \ddot{z}(t)$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$, $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, $\ddot{z}(t)$ - фактические значения координат, скоростей, ускорений выходного звена.

Для оценки быстроты затухания и величины отклонения используем квадратичную интегральную оценку переходного процесса

$$J_S = \int_{t_0}^T (\Delta^2 + k_1 \cdot \dot{\Delta}^2 + k_2 \cdot \ddot{\Delta}^2) dt.$$

Минимум функционала реализуется на траекториях, на которых выполняется условие:

$$\ddot{\Delta} + \gamma_1 \cdot \dot{\Delta} + \gamma_0 \cdot \Delta = 0 \quad (4)$$

Для построения управляющих сил P_i необходимо выполнение условия, чтобы ошибки в переходном процессе являлись решением уравнения (4). Перепишем уравнение (4) в форме, соответствующей колебательному звену:

$$\begin{aligned} \tau^2 \ddot{\Delta} + 2\zeta\tau \cdot \dot{\Delta} + \Delta &= 0 \\ \tau^2 &= \frac{1}{\gamma_0}, \quad 2\zeta\tau = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}, \end{aligned}$$

где τ - постоянные времени, ζ - коэффициент затухания (демпфирования) собственных колебаний.

При коэффициенте затухания собственных колебаний $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ величина перерегулирования составляет $\sigma \approx 5\%$, а длительность переходных процессов при этом равна $t \approx \frac{3 \cdot \tau}{\xi}$ с [7]. Тогда постоянные γ_0, γ_1 будут равны: $\gamma_0 = \frac{1}{\tau^2}, \gamma_1 = \frac{\sqrt{2}}{\tau}$.

Закон изменения ошибки должен соответствовать колебательному звену, при этом обеспечивается устойчивость и минимизации ошибки по положению, скорости и ускорения:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{x}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{x}_T - \dot{x}) + \gamma_0 \cdot (x_T - x) \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{y}_T - \dot{y}) + \gamma_0 \cdot (y_T - y) \\ \ddot{z} &= \ddot{z}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{z}_T - \dot{z}) + \gamma_0 \cdot (z_T - z)\end{aligned}\quad (5)$$

Зададим время переходного процесса $t=0,05$ с, при этом постоянная времени будет равна $\tau \approx 0,013$ с, а коэффициенты обратной связи будут равны $\gamma_0 = 7200$, $\gamma_1 = 120$. Силы P_i могут быть найдены подстановкой ускорений $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ из уравнений (5) в уравнения движения (2). Зададим закон движения исполнительного звена:

$$x_T(t) = 0,1 \cdot \sin(\omega t), \quad y_T(t) = 0,12 \cdot \sin(\omega t), \quad z_T(t) = 0,15 \cdot \sin(\omega t).$$

Зададим $\omega=20$ рад/с, массу выходного звена с грузом $m=0,5$ кг, масса входных звеньев $m_i=0,15$ кг.

Одной из важной характеристики механизма, служащих для оценки качества функционирования, является точность позиционирования. Она определяется как разность фактического и расчетного местоположения выходного звена при многократном выведении его в заданную точку и выражается в линейных или угловых единицах.

Погрешность позиционирования кроме статических (зазоры в шарнирах, усталостные деформации звеньев, колебания температуры, отклонение параметров напряжения и т.д.) и динамических (вибрации робота, изменение внешних воздействий) может зависеть от несоответствия модели и робота.

Важным является вопрос о влиянии отклонения массы входного звена от массы входного звена модели. Рассмотрим случай, когда масса входного звена в модели не равна массе входного звена модели и равна нулю.

Как видно из полученных зависимостей, разность в отклонениях в ошибке положения выходного звена не превышает 5%, что позволяет пренебречь массой входного звена (рис.2).

Теперь рассмотрим случай, когда масса выходного звена не равна массе выходного звена в модели. Зададим массу выходного звена равную 0,3 кг, отличающуюся от массы выходного звена модели равной 0,5 кг.

Как видно из полученных зависимостей отклонение в ошибке положения не превышает 3% (рис. 3).

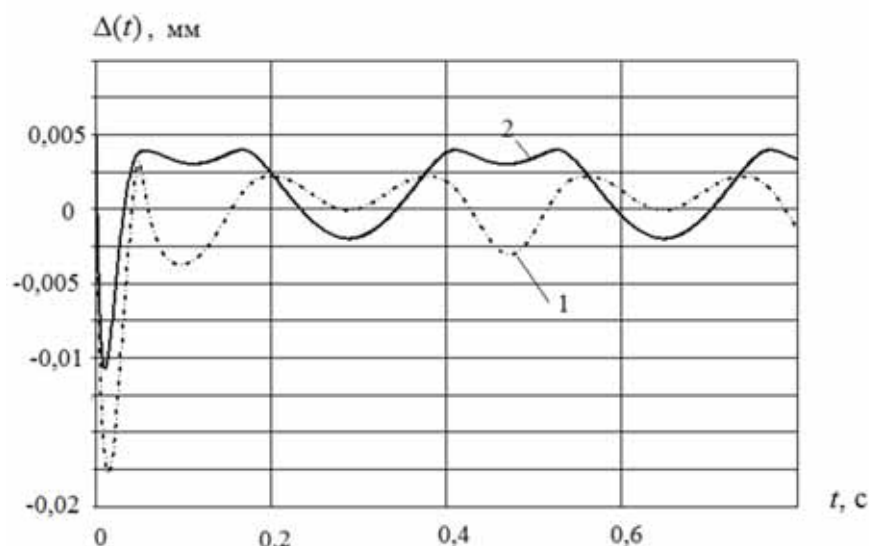


Рис. 2. Ошибка позиционирования:
 1 – массы входных звеньев модели и механизма различны,
 2 – массы входных звеньев модели и механизма равны

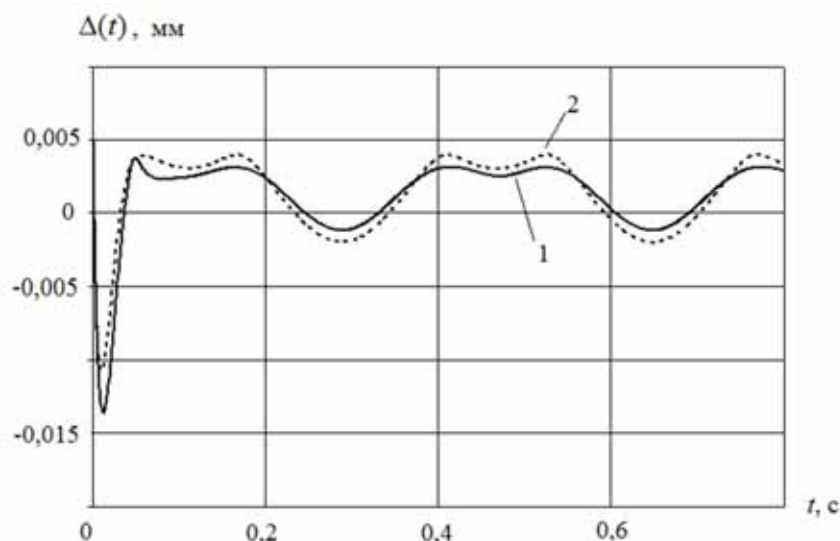


Рис. 3. Ошибки позиционирования:
 1 – массы выходных звеньев модели и механизма равны,
 2 – массы выходных звеньев модели и механизма различны

Таким образом, в представленной модели управления поступательно-направляющим механизмом проанализированы факторы, влияющие на точность позиционирования. Работоспособность механизма проверялась при отклонениях массы входных и выходных звеньев механизма от массы входных и выходных звеньев модели.

Литература

1. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Лит., 1988. – 328 с.
2. Глазунов В.А., Есина М.Г., Быков Р.Э. Управление механизмами параллельной структуры при переходе через особые положения. // Проблемы машиностроения и надежности машин. Машиноведение, 2004. № 2. С.78-84.
3. Merlet J. P. Parallel robots. Kluwer Academic Publishers, 2000, 372p.
4. Kong X., Gosselin C. Type Synthesis of Parallel Mechanisms. –Springer 2007. – 275 p.
5. Ceccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulations. – Kluwer Academic Publishers, 2004. – 412 p.

6. Glazunov V., Kraynev A., Bykov R., Rashoyan G., and Novikova N. Parallel manipulator control while intersecting singular zones. / Theory and Practice of Robots and Manipulators. (RoManSy), Proceedings of XV CISM-IFTToMM Symposium, Montreal, 2004.
7. Хейло С.В., Глазунов В.А. Решение задачи об управлении поступательно-направляющим механизмом параллельной структуры // Справочник. Инженерный журнал. –2013. –№ 10. – С. 17–24.
8. Хейло С.В., Глазунов В.А., Сухоруков Р.Ю. Решение задачи кинематики поступательно-направляющего манипулятора // Машиностроение и инженерное образование. –2011. –№ 4. – С. 11–17.

ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ВИБРАЦИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ НЕУДЕРЖИВАЮЩИХ СВЯЗЕЙ

Елисеев А.В.

ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет путей сообщения»

Иркутск, Россия, eavsh@ya.ru

Аннотация. Предлагаются фрагменты подхода к построению особенностей математических моделей процессов вибрационного упрочнения поверхностей длинномерных деталей при взаимодействии с сыпучей средой из стальных шариков. Разработаны технические средства контроля характеристик вибрационного поля технологических процессов и машин. Приведены некоторые результаты численного моделирования и данные экспериментов.

I. Введение. В последнее время вибрационные технологические процессы получили широкое распространение в производственных системах, относящихся к различным отраслям техники. Вибрация активно используется в технологиях вибрационного перемещения и обработки материалов, таких как вибрационное резание, виброгалтовка, вибрационное упрочнение и др.

Одним из актуальных вопросов, имеющих теоретическое и практическое значение, является исследование динамических взаимодействий при неударивающих связях. Неударивающие связи и их особенности определяют специфику движения технологических сред, что создает возможности в получении различных технологических эффектов. В этом направлении известны работы В.К. Асташева, В.И. Бабицкого, И.И. Блехмана, И.Ф. Гончаревича, И.И. Быховского, А.Е. Кобринского, Л.А. Вайсберга, С.Ф. Яцуна, А.П. Бабичева, И.Е. Бурштейна, М.С. Поляка, Г.Я. Пановко, Ю.Р. Копылова и др.

В ряде случаев вибрационное воздействие рассматривается как факт воздействия на состояние взаимодействующих сторон контакта соприкасающихся тел и возникающих при этом связей. Не достаточно полно изучены особенности неударивающих связей, которые характерны для технологических процессов виброперемещения, виброупрочнения, вибрационного транспортирования.

Теоретические основы формирования представлений о динамических взаимодействиях связаны с разработкой математических моделей, в которых рабочая среда на предварительном этапе рассматривается в качестве отдельной частицы, взаимодействующей с вибрирующей поверхностью. Многие вопросы, связанные с теорией движения отдельной частицы, находящейся с поверхностью в неударивающих связях, были рассмотрены в известных работах по теории вибрационных перемещений, вибрационного транспортирования, вибрационной сепарации и т.д.

II. Общие положения. Особенности подхода. Рассматриваются фрагменты общего подхода к построению математических моделей, отражающих особенности динамических взаимодействий, характерных для технологических процессов вибрационного упрочнения. Технологические эффекты достигаются в периодических виброударных контактах рабочей среды из мелких стальных шариков и вибрирующей рабочей поверхности обрабатываемой детали. Предложены элементы концепции математического моделирования технологического процесса вибрационного взаимодействия твердого тела с вибрирующей поверхностью. Особенностью, предлагаемого автором, подхода является использование для описания динамического состояния функция зазора, которая описывает изменение высоты частицы относительно вибрирующей поверхности [1,2]. Особенности таких взаимодействий описываются с

помощью обобщенной функции зазора и соответствующим введением ряда основных понятий, характеризующих особенности отрыва точки. Особенностью подхода служит предположение о соударении без упругого отскока, и предположение и о том, что контакт между твердым телом и поверхностью может иметь бесконечно малую длительность.

Методологический базис исследования включает в себя закономерности формирования траектории с непрерывным подбрасыванием, длительность которого кратна периоду вибрации контактирующей поверхности; характеристики и аналитические соотношения, определяющие условия отрыва и движения материальных частиц; особенности контактных взаимодействий и влияние ряда технологических факторов, связанных с учетом возникающих сил сопротивления со стороны рабочей среды [3÷7].

В целом одной из установок исследования является внимание к оценке возможностей формирования форм траекторий путем введения дополнительных сил.

Автором разработаны математические модели взаимодействия материальной частицы с учетом действия дополнительных сил. Такие силы могут совпадать по направлению с силами тяжести или могут быть направлены в противоположную сторону. Такие математические модели позволяют исследовать специфические режимы взаимодействий, которые могут оказаться полезными для технических приложений. В плане влияния на особенности реализации режимов с кратным подбрасыванием произведен учет сил вязкого трения [4].

В качестве примера на рисунке 1 приведены варианты траекторий для кратных режимов при варьировании настроечных параметров. С учетом специфики взаимодействия частиц в слое, который образует рабочая среда, предложена и разработана методика исследования режимов взаимодействия с учетом сил трения. На рисунке 2 представлены области параметров системы, соответствующие разным режимам.

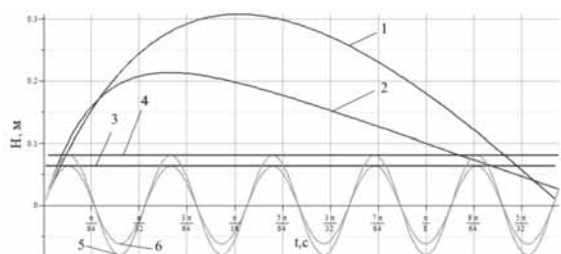


Рисунок 1. Графики подлетов для кратных режимов с коэффициентами

$p_1 = 6 \text{ кг/с}$, $p_2 = 18 \text{ кг/с}$, $m = 1 \text{ кг}$, $\omega = 60 \text{ рад/с}$, $A_1 = 0.06 \text{ м}$, $A_2 = 0.08 \text{ м}$

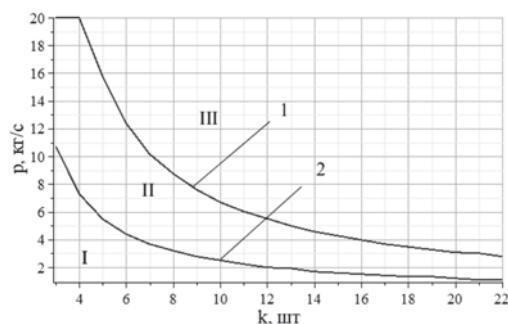


Рисунок 2. Области реализации кратного подбрасывания

Область I представляет область критических параметров отрыва с возможностью реализации режимов с кратным подбрасыванием, III - область, в которой не возможна реализация режима кратного подбрасывания. Критическое значение коэффициента вязкого трения, для которого нарушается режим кратного подбрасывания, находится в области II [3].

III. Особенности оценки условий динамического контакта для составного твердого тела с учетом неудерживающего характера связей. Особый интерес представляет развитие обобщенных представлений о контактных взаимодействиях, которые не сопровождаются нарушением контакта в составных твердых телах. В качестве составных контактирующих элементов рассматриваются твердые тела конечных размеров, для которых смещение допускается только вдоль нормали к контактной поверхности. В такого рода системах реакция связи складывается из статической и динамической компоненты, образуя полную реакцию. Если полная

реакция принимает нулевое значение, то в силу неудерживающего характера связей может произойти нарушение контакта и появления зазора. Для безззорного контактного движения полная реакция должна быть положительна. Автором предложен метод определения условий, при которых не происходит нарушения контакта.

Для ряда модельных задач разработана методика оценки условий сохранения динамического контакта. На рисунке 3 показана математическая модель, в которой условие нарушение контакта определяется параметрами массоинерционных и упругих связей. Для реализации метода оценки условий сохранения контакта вводится понятие о полной и динамической реакциях.

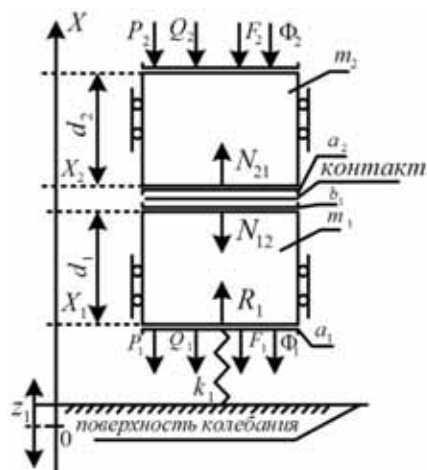


Рисунок 3. Составное твердое тело на упругом колеблющемся основании Z_1 . P_i - силы вязкого трения, Q_i - силы тяжести, F_i - постоянные силы, N_{12} , N_{21} - полные контактные реакции, a_2 , b_1 - контактные поверхности

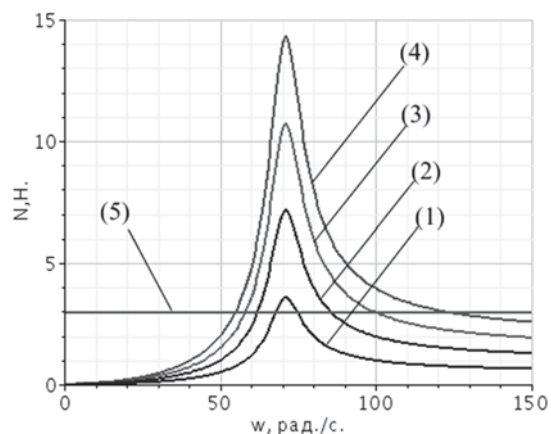


Рисунок 4. Оценки амплитуды колебания динамической компоненты реакции. 1,2,3,4 - оценки динамической компоненты для амплитуд кинематического возмущения A_1 от 1 до 4 мм. 5 - уровень статической реакции

В основе метода лежит построение амплитудно-частотной характеристики передаточной функции с входного воздействия на динамическую компоненту контактной реакции. На рисунке 4 представлены графики амплитуды колебания динамической реакции (1-4) для различных амплитуд колебания опорной поверхности в сравнении со статической реакцией (5).

В зависимости от параметров систем условие контактного движения принимает вид:

$$\sqrt{\frac{(m_2 k_1 \omega_1^2)^2 + (p_2 k_1 \omega_1)^2}{(k_1 - (m_1 + m_2) \omega_1^2)^2 + ((p_1 + p_2) \omega_1)^2}} \times A_1 < m_2 g + f_c. \quad (1)$$

Неравенство (1) может быть представлено в виде множества параметров системы в виде амплитудно-частотной области контакта. На рисунке 5 представлено множество амплитуд и частот, обеспечивающих только контактное колебание составного твердого тела на промежутке установившегося движения.

На рисунке 6 представлено разбиение амплитудно-частотной области на подобласти различных режимов колебания составного твердого тела в зависимости от дополнительной постоянной силы, являющейся фактором контактного движения с учетом массы элементов.

Предлагаемая методика обобщается на многомерные модельные задачи. На рисунке 7 представлена механическая система с несколькими составными частями, зажатыми между поверхностями посредством упругих элементов. Контакт между частями носит неудерживающий характер.

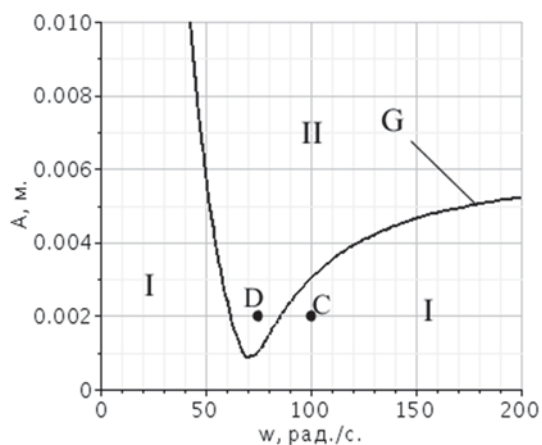


Рисунок 5. Амплитудно-частотная область контакта. I – область контакта, II – область возможного зазора, G – линия уровня N_{21}^{Σ} для функции $A_1 \cdot A(\omega_1)$, C – контакт, D – возможный отрыв

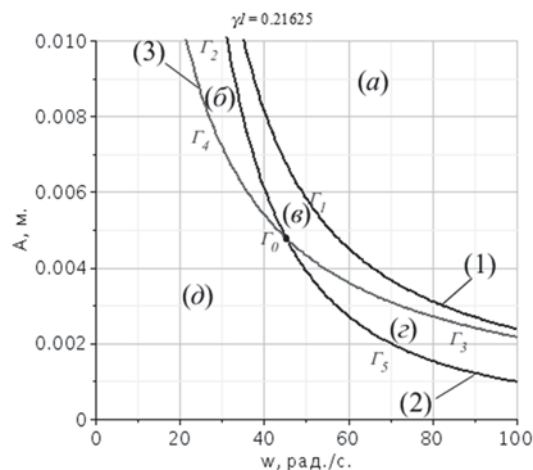


Рисунок 6. Области характерных режимов взаимодействия твердого тела с поверхностью колебания

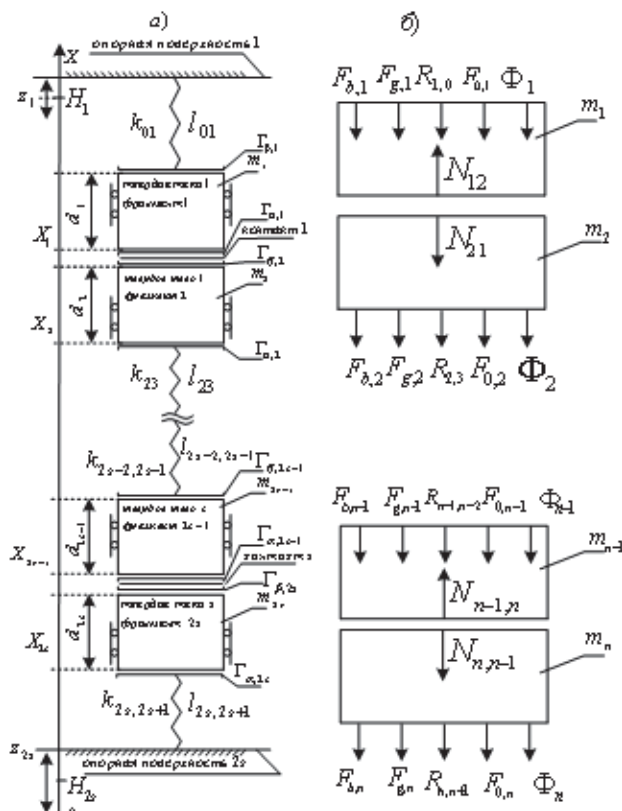


Рисунок 7. Составное твердое тело с S контактами и $2s$ фрагментами. а) Конструктивная схема. $\Gamma_{\beta,i}$, $\Gamma_{\alpha,i}$ – контактные поверхности фрагментов. Z_1 , Z_{2s} – координаты поверхностей колебания, m_{2q-1} , m_{2q} – фрагменты q -го составного твердого тела, $k_{2q-2,2q-1}$ – жесткость упругих элементов, б) Учитываемые силы: $F_{b,i}$ – силы вязкого трения, $F_{g,i}$ – силы тяжести, $F_{0,i}$ – постоянные силы, $R_{2q-1,2q-2}$, $R_{2q,2q+1}$ – реакция со стороны упругих элементов, Φ_i – силы инерции, $i = 1..n$; $N_{2q,2q-1}$, $N_{2q-1,2q}$ – полные контактные реакции, опорные поверхности 1 и 2s подвижны, $q = 1..s$, $i = 1..n$, $n = 2s$

Возможности учета динамических реакций в контакте с неудерживающей связью необходимы для перехода к моделям активизирующие форму среды из нескольких или большинства элементов. Наличие неудерживающих связей и соответствующих режимов с непрерывным подбрасыванием требует учета ряда особенностей формирования вибрационного поля.

IV. Возможности параметрического регулирования динамического контакта с учетом неудерживающего характера связей. Некоторые приложения. Реальные технологические машины, созданные для реализации вибрационных полей, как правило, обладают определенными недостатками из-за влияния движений по другим степеням

свободы из-за наличия связности между парциальными системами реализующих различные виды движения. По существу, подготовка вибрационного стенда к реализации необходимых условий устойчивого вибрационного процесса связана с разработкой и использованием специальных ограничителей, которые приближают реальную схему движения к схеме движения системы с одной степенью свободы.

Длительная работа технологической машины может привести к отклонению характеристик от допустимых значений. Для контроля характеристик вибрационного поля предложен датчик (рис.8) определения граничных параметров взаимодействия тел в вибрационных системах[8].

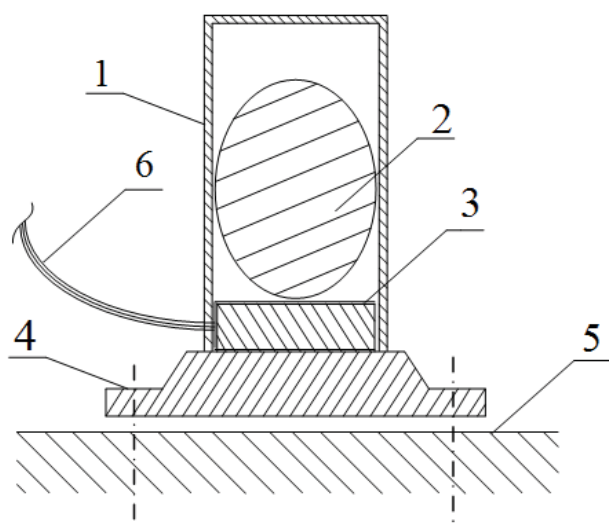


Рисунок 8. Датчик определения граничных параметров взаимодействия тел в вибрационных системах. Элементы: поверхность вибростола (5), цилиндрический корпус (1); инерционные элементы рабочей среды (2); пьезоэлектрический элемент (3); крепежный элемент (4); токовыводы (6).

Техническая применимость и реализация датчика обоснована теоретическими результатами и модельным экспериментом. На основе опытного образца получены и обработаны графики форм сигналов для соответствующих режимов движения опорной поверхности экспериментальной установки.

Разработанный методологический базис исследования контактного взаимодействия с учетом неударивающих связей был применен к рассмотрению комплекса вопросов связанных с обоснованием выбора параметров работы вибрационного стенда, на котором реализуется процесс виброупрочнения лонжерона лопасти вертолета.

Особенности вибрационного взаимодействия рабочей среды с обрабатываемой деталью изучались при экспериментальных исследованиях проводимых автором на реально существующем вибрационном технологическом комплексе по упрочнению лонжерона лопасти вертолета.

Рассмотрено формирование параметров вибростенда, который представляет собой твердое тело с 6-ю степенями свободы, опирающимся на упругие элементы. Формирование вибрационного поля обеспечивается инерционными вибровозбудителями. Кинематическая схема приведена на рисунке 9.

Для формирования одномерного поля в конструкции вибрационного стенда предусмотрено введение ограничителей и упоров. Схема измерения вибрации показана на рисунке 10.

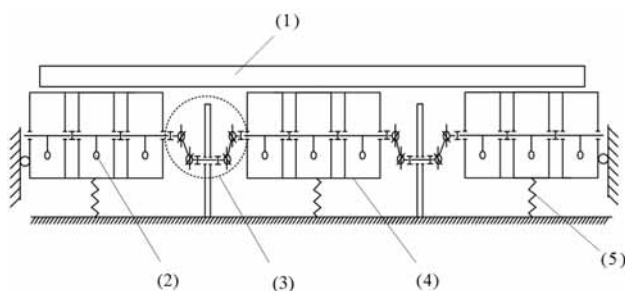


Рисунок 9. Кинематическая схема вибростенда. Вид сбоку. 1-контейнер с изделием, 2 – вибратор, 3-карданные передачи между валами вибратора и валом синхронизатора, 4-секция вибростенда, 5 – упругий элемент

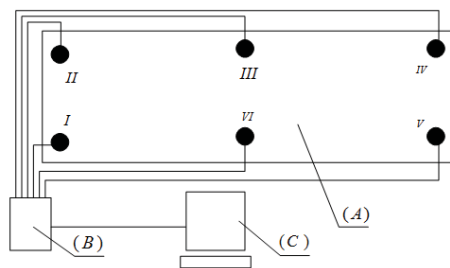


Рисунок 10. Схема измерения колебаний вибростенда. Вибростенд, вид сверху, В-станция синхронной записи сигналов с датчиков, С-устройство вывода информации, I-VI – датчики

Проведенные эксперименты, с использованием комплекта виброизмерительной аппаратуры ВУ-8, показали достаточно хорошее согласование с расчетными данными. На рисунке 11 показана осциллограмма точке твердого тела, формирующего вибрационное поле.

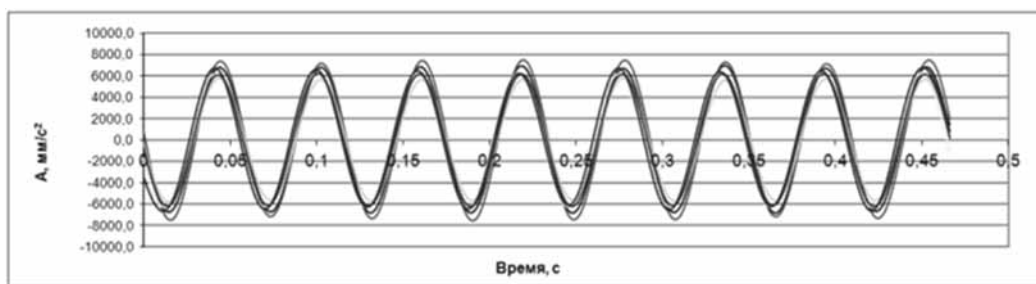


Рисунок 11. Графики осциллограмм ускорений на основе сигналов с 6-ти датчиков

На основе матрица взаимной корреляции, представленной в таблице 1, выдвинута гипотеза о возможности сведения модели к системе с одной степенью свободы.

Таблица 1. Матрица коэффициентов взаимной корреляции сигналов виброускорений с 6-ти датчиков

	Датчик 1	Датчик 2	Датчик 3	Датчик 4	Датчик 5	Датчик 6
Датчик 1	1					
Датчик 2	0,99	1				
Датчик 3	0,94	0,92	1			
Датчик 4	0,99	0,99	0,95	1		
Датчик 5	0,98	0,97	0,98	0,99	1	
Датчик 6	0,93	0,9	0,98	0,94	0,96	1

Экспериментально обнаружено, что устойчивый процесс непрерывного подбрасывания характеризуется наличием биения, частота которого определяется действием вибрационных факторов, формирующихся при вибрационных взаимодействиях рабочей среды с вибрирующей поверхностью с проявлением процессов частичного пролеживания и конструктивными особенностями вибрационной машины.

Таким образом, решалась задача по разработке и экспериментальному апробированию возможностей измерительных устройств, фиксирующих режимы непрерывного подбрасывания.

V. Заключение. Проведенное исследование позволяет сделать основные выводы.

1. Изучены отдельные особенности динамических взаимодействий элементов технологических комплексов, реализующих вибрационные технологии, в которых

проявляются эффекты неударяющих связей; определены и развиты некоторые фрагменты аналитического подхода в оценке возможностей вибрационных технологических процессов с подбрасыванием рабочей среды.

2. Разработаны отдельные фрагменты обобщенного подхода для решения задач динамического синтеза вибрационных технологий, реализуемых в режимах непрерывного подбрасывания. Основой подхода является введение понятия о функции зазора, позволяющей детализировать построение форм движений материальных частиц в соответствии с определенными критериями, отражающими свойства движения материальных частиц при взаимодействии с вибрирующей поверхностью.
3. Разработаны математические модели формирования вибрационных взаимодействий с учетом факторов, имеющих технологическое значение, или критериев, к которым относятся условия реализации кратных режимов, влияние дополнительных сил и упругих связей.
4. Выявленные особенности и характер зависимости контактного взаимодействия позволяют регулировать условия реализации контакта для требуемого частотного диапазона. В качестве безразмерных параметров регулирования могут выступать обобщенные параметры системы.
5. Разработана, апробирована и запатентована конструкция виброизмерительного устройства, обеспечивающего получение информации о свойствах вибрационного процесса. Разработанное устройство может быть использовано для контроля граничных параметров вибрационного поля технологических процессов и машин. Методы контроля параметров вибрационного поля представляют интерес для увеличения качества работы вибрационных технологических машин.

Литература

1. Елисеев, А.В. Режимы подбрасывания материальной частицы на вибрирующей поверхности в модельной задаче с неударяющими связями / Елисеев С.В., Елисеев А.В. // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2012. – №3(35). – С. 86 - 96.
2. Елисеев, А.В. Теоретические основы процессов взаимодействия материальной частицы с вибрирующей поверхностью с неударяющими связями / И.С. Ситов, А.В. Елисеев // Системы. Методы. Технологии. 2012. – № 4(16). – С. 19-29.
3. Елисеев, А.В. Определение коэффициента вязкого трения для режима кратного подбрасывания материальной частицы в модельной задаче с неударяющей связью / С.В. Елисеев, А.В. Елисеев // Системы. Методы. Технологии. – 2013. – № 1. – С. 22-27.
4. Елисеев, А.В. Исследование взаимодействия материальной частицы с вибрирующей поверхностью при наличии силы вязкого трения в модельной задаче с неударяющими связями / С.В. Елисеев, А.В. Елисеев // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2013. – № 1. – С. 69-77.
5. Елисеев, А.В. Обобщенные подходы в задачах определения контактных реакций в твердых телах при статических нагрузках с учетом неударяющих связей // С.В. Елисеев, А.В. Елисеев // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: ИрГУПС, 2013. – №4. – С.51-60.
6. Елисеев, А.В. Определение контактных реакций в составных твердых телах при динамических нагрузках с учетом неударяющих связей / С.В. Елисеев, А.В. Елисеев // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: ИрГУПС, 2014. – №1. – С.45-54.

7. Елисеев, А.В. Технология оценки свойств динамических взаимодействий в контактах составных твердых тел / А.В. Елисеев // Научные проблемы транспорта Сибири и Дальнего Востока.- 2014.-№1-2.- С. 179-183.
8. Елисеев А.В., Елисеев С.В., Артюнин А.И., Каимов Е.В. Датчик определения граничных параметров взаимодействия тел в вибрационных системах [текст] : пат. на полезную модель 142137 Рос. Федерация : МПК G01P 15/09(2006/01) / авторы и заявители Елисеев А.В. [и д.р.]; . Патентообладатель: ФГБОУ ВПО ИрГУПС.

ТРУДЫ БРАТЬЕВ КОССЕРА И СОВРЕМЕННАЯ МЕХАНИКА ОБОБЩЕННЫХ КОНТИНУУМОВ

Ерофеев В.И.

Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия, erf04@sinn.ru

Аннотация. Рассказывается о жизни и деятельности Эжена и Франсуа Коссера – основоположников механики обобщенных континуумов. Обсуждается современное состояние механики обобщенных континуумов и перспектив ее развития.

Выдающимся этапом в развитии механики сплошной среды было опубликование в 1909 году книги французских исследователей братьев Эжена и Франсуа Коссера (Cosserat) «Теория деформируемых тел» [1], заложившая основы механики обобщенных континуумов.

Известно, что одной из основных гипотез классической механики сплошных сред (МСС) является принцип напряжений Коши, устанавливающий эквивалентность действия всех внутренних сил, приложенных к элементарной площадке, действию их равнодействующей, приложенной к центру площадки. Однако в общем случае действие произвольной системы сил эквивалентно действию главного вектора и главного момента. При этом в среде возникают не только напряжения, но и моментные напряжения, образующие, вообще говоря, несимметричные тензоры. Чтобы учесть эти факторы, необходимо допустить в среде наличие дополнительных степеней свободы и рассмотреть физически бесконечно малый объем (по которому ведется усреднение свойств среды) не как материальную точку, а как более сложный объект, обладающий новыми степенями: ротационными, осцилляторными или способностью к микродеформации. Таким образом, для расширения спектра свойств сплошной среды необходимо предположить у физически бесконечно малого объема существование внутренней структуры (микроструктуры), обусловленной зернистостью или волокнистостью строения реальных материалов.

В теории Коссера каждая материальная точка континуума наделяется свойствами твердого тела путем учета ротационных степеней свободы. Можно сказать, что появление модели континуума Коссера знаменовало собой начало перехода в МСС от механики Ньютона, исходным объектом которой является материальная точка, к механике Эйлера, имеющей в качестве исходного объекта твердое тело.

Приведем некоторые сведения о жизни и деятельности Э. и Ф. Коссера. Старший брат – Франсуа Коссера родился 26 ноября 1852 года в городе Дуэ во Французской Фландрии. В 1870 году окончил в Париже Высшую политехническую школу (Ecole Polytechnique) (рис.3.1.3), а в 1872 году – Национальную школу мостов и дорог. В 1875 году получил должность гражданского инженера третьего класса. Женился, в 1878 году у него родилась дочь Амелия-Адель. В 1879 году переводится на должность железнодорожного (по северной зоне) инженера-строителя второго класса. В 1883 году становится гражданским инженером первого класса. Кавалер ордена Почетного легиона (1893 г.), главный инженер (1895 г.). В 1912 году избирается Вице-Президентом, а в 1913 году – Президентом Французского математического общества. Научная работа Ф. Коссера идет параллельным курсом с его деятельностью гражданского инженера, занимающегося строительством путей, тоннелей, мостов, железных дорог. Об этой работе лишь кратко упоминается в его служебных характеристиках (цитаты по книге [2]): «Месье Франсуа Коссера – это выдающийся инженер, имеющий богатый опыт практической деятельности, которую он сочетает с проведением теоретических исследований; недавно он представил во Французскую академию наук несколько замечательных работ по механике (27 июня 1898 г.)»; «Месье Франсуа Коссера является ценным сотрудником, он очень эффективен, особенно в

общественных работах. Среди научного сообщества он известен как автор замечательных исследований по вопросам математики и механики (11 октября 1910 г.); «Месье Франсуа Коссера обладает высоким уровнем компетенции для строительства тоннелей, мостов, ..., он является также выдающимся математиком, Президентом Французского математического общества. Кроме того, он внес существенный вклад в работы для нужд армии (20 октября 1913 г.)».

Ф. Коссера умер 22 марта 1914 года на 62 году.

Заметим, что следующим после него Президентом Французского математического общества стал Э. Вессю (1865-1952), получивший всемирную известность работами по представлению групп Ли, создавший (вместе с Э. Пикаром) дифференциальную теорию Галуа и применивший теорию Фредгольма к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Младший брат – Эжен Коссера (полное имя: Эжен-Морис-Пьер) родился 4 марта 1866 года на севере Франции, в городе Амьене. С 1883 по 1888 годы учился в Высшей нормальной школе в Париже (Ecole Normale Supérieure), по окончании которой занял должность астронома-ассистента в обсерватории города Тулузы. В 1889 году защитил докторскую диссертацию по математике, в которой развивались идеи Ю. Пюккера и Г. Дарбу [3]; переведен на должность адъюнкта Астрономической обсерватории. С 1895 года – профессор кафедры дифференциального и интегрального исчисления университета Тулузы. С 1908 года Э. Коссера становится директором Астрономической обсерватории Тулузы и занимает эту должность до конца своей жизни (умер 31 мая 1931 года в возрасте 65 лет). Его астрономические исследования включают кольца и спутники Сатурна, кометы и двойные звезды. Именно как астроном Э. Коссера был избран в 1919 году членом Французской академии наук. По отзывам коллег: «Сдержанный, добрый человек и прилежный работник, Эжен Коссера был одной из движущих сил в университете Тулузы в течение тридцати пяти лет» [4].

О потомках братьев Коссера известно следующее. У Эжена был только один сын, он умер в гостинице во время поездки, на руках у отца.

Единственная дочь Франсуа вышла замуж за морского инженера Эдуарда Даво (что интересно, переведшего с русского языка на французский курс физики петербургского профессора О.Д.Хвольсона [5]). У них было два сына, один из которых умер в 1939 году, а второй, Пьер-Франсуа, прожил до конца 1980-х годов и застал триумфальное возвращение в мир теории своего деда.

В период между 1895 и 1910 годами Э. и Ф. Коссера опубликовали серию статей и монографию по механике. Кроме теории континуума твердых тел, именуемого сегодня континуумом Коссера, в девяти статьях 1898-1901 г.г. братья излагают результаты своих исследований спектра пучка операторов статической теории упругости для одномерной изотропной среды. Обзор этих работ в современной интерпретации можно найти в [6].

Работы по спектру Коссера были продолжены в 60-х – 70-х годах двадцатого века С.Г.Михлиным, показавшим, в частности, что исследование спектра открывает перспективу построения теории многомерных интегральных уравнений [7].

Нынешние исследователи полагают, что главным в творческом союзе братьев был Франсуа, а Эжен лишь ассистировал («только вносил поправки в вычисления [2]»). В подтверждение сказанного приводится то обстоятельство, что после смерти старшего брата, Эжен, активно работавший в науке еще полтора десятилетия, не опубликовал более ни одной работы по механике и совсем не пропагандировал теорию обобщенного континуума.

Современники не были столь единодушными в своих суждениях. Известно, что когда Франсуа претендовал на должность заведующего кафедрой механики Высшей политехнической школы и конкурировал с Ж.Адамаром и Ж.Жуге, кто-то из ответственных лиц высказал сомнение о его участии в совместных работах, и предпочтение было отдано Ж.Жуге.

До недавних пор считалось, что работа Коссера существует как бы «в вакууме», не имея ни предшественников, ни, долгое время, последователей. Но это не соответствует действительности.

«Праотцами» полярных сред следует считать Якоба Бернулли, который в 1686 году ввел в рассмотрение момент количества движения и Леонарда Эйлера, описавшего в 1765 году кинематику твердого тела конечных размеров.

До конца 19 века физиками разрабатывались две теории эфира, конкурирующие между собой. Из наиболее известных ученых на позиции квазизжидкого (газоподобного) эфира стояли Р.Декарт, Д.Максвелл, Г.Лоренц. Они предполагали, что в эфире существуют вихри из каких-то очень мелких частиц. Потоки этих частиц образуют магнитные поля, а движения частиц от одного заряженного тела к другому обеспечивают электростатическое взаимодействие. Последовательными сторонниками квазитвердого эфира выступали Дж.МакКуллаг, В.Томсон (лорд Кельвин) и Дж.Стокс. По их теориям магнитные и электрические поля возникают в эфире в результате определенного вида деформаций.

В 1839 году Дж.МакКуллаг предложил модель эфирной среды, как упругого тела, невосприимчивого к деформациям сжатия и изменения формы, но реагирующего на деформацию кручения относительно абсолютного пространства [8].

Подробно теория МакКуллага изложена в книге А.Зоммерфельда [9] (см. также [10, 11]), который, в частности, заметил, что эта теория, будучи чисто механической, хорошо согласуется с теорией электромагнитных и оптических явлений Д.Максвелла.

Вслед за Дж.МакКуллагом В.Томсон (Кельвин) смоделировал эфир с помощью волчков, т.е. рассмотрел полярную среду, состоящую из вращающихся осесимметричных частиц, способных совершать большие повороты и перемещения общего вида [12].

В работе [13] найдена аналогия определяющих уравнений среды Кельвина и упругих непроводящих ферромагнетиков в состоянии насыщения.

Легко видеть, что модель МакКуллага является частным случаем модели Коссера, а модель Кельвина следует причислить к «Коссера-подобным» (определение А.К.Эрингена) моделям.

Во Франции среди современников работу Э. и Ф. Коссера оценили немногие, собственно, только трое, но кто! Это А.Пуанкаре, Э.Пикар и Э.Картан. О Э.Картане следует упомянуть особо. Его, будущего автора классической книги «Теория спиноров», знакомство с трудом Коссера вдохновило на создание теории пространств с кручением [12]. Именно у Коссера нашел он подсказку: связать тензор кручения с внутренними вращательными степенями свободы сплошных сред, что, в свою очередь, позволило связать кручение пространства-времени с конкретными свойствами материальных систем, а именно со спином. Такая связь достигается в рамках динамической теории гравитационных взаимодействий Эйнштейна-Картана [14, 15].

В Германии теорию микрополярного континуума пропагандировал К.Хейн, несколько лет читавший лекции по механике Коссера в университете Карлсруэ.

Подробный обзор книги Э. и Ф. Коссера опубликовал профессор Массачусетского технологического университета Э.Вильсон в альманахе «Достижения теоретической механики» за 1913 год.

А далее было забвение на несколько десятилетий. Но, воистину, идеям Коссера «как драгоценным винам, настанет свой черед». Без теории Коссера механика неполна. И эта теория вернулась в мир, и эта теория возвращается сегодня.

Столетие теории Коссера, заложившей основы механики обобщенных континуумов, широко отмечалось международной научной общественностью.

Столетняя годовщина публикации монографии Э. и Ф. Коссера, представляется благоприятным временем для изучения вопроса о современном состоянии, тенденциях и перспективах развития механики обобщенных континуумов.

Сегодня обобщенные континуумы представляют как теоретический, так и практический интерес и заслуживают внимания, как теоретиков, так и экспериментаторов, специализирующихся в различных отраслях механики и физики. Можно очертить следующий круг активно изучаемых вопросов:

- феноменология обобщенных континуумов;
- гомогенизация, динамика кристаллической решетки;
- дискретные модели обобщенных континуумов;
- энергия, импульс и момент импульса обобщенных континуумов;
- волны в обобщенных континуумах;
- экспериментальная идентификация параметров обобщенных континуумов;
- численная реализация обобщенных континуумов;
- классические и новые приложения обобщенных континуумов: наномеханика, биология, экология, науки о земле, строительство, машиностроение и другие;
- технологии, использующие концепции обобщенных континуумов;
- методы неразрушающего контроля и технической диагностики, базирующиеся на свойствах обобщенных континуумов.

Актуальность таких исследований повышается и тем обстоятельством, что, в сущности, для всех природных и искусственных материалов и систем проявляются взаимодействия механических процессов различного пространственного масштаба. В настоящее время обобщенные континуумы применяются при разработке новых металлургических технологий, позволяющих синтезировать искусственные материалы с управляемой микроструктурой. Они помогают прогнозировать поведение таких хрупких материалов, как бетон или лед. Некоторые методы технической диагностики и неразрушающего контроля базируются на усредненных материальных свойствах обобщенных континуумов. Большие надежды возлагаются на моделирование, базирующееся на концепциях обобщенных континуумов, для успешного и скорейшего развития нанотехнологий. Обобщенные континуумы, такие, как микрополярные или ориентированные материалы, микроморфный континуум, высокоградиентные материалы, тела со слабыми или сильными нелокальными взаимодействиями привлекаются, также, при разработке интегральных многомасштабных вычислительных процедур. Такие компьютерные технологии имеют целью объединение различных пространственных масштабов в одной численной схеме. Начало берется в квантово-механическом описании, моделировании процессов на атомарном, молекулярном, микроскопическом и, затем, континуальном масштабах.

К столетнему юбилею монография Э. и Ф. Коссера переиздана на французском языке. Без сомнения, пришло время для выхода в свет и русской версии этой эпохальной книги.

Сегодня такая работа ведется. Бытует, однако, мнение, что книга эта уже выходила на русском языке в начале 20-го века. Проясним этот вопрос. Большая работа Э. и Ф. Коссера "Заметка о теории евклидовского действия" была опубликована на русском языке в качестве приложения к третьему тому "Руководства теоретической (рациональной) механики" Поля Эмиля Аппеля [16].

"Руководство" П. Аппеля, известное у нас в стране как одготомник или двуготомник, единственный раз в 1911 году (год избрания его автора членом-корреспондентом Петербургской академии наук) выходило в трех томах и служило переводом третьего французского издания 1909 года.

"В этом новом издании, части классические переделаны мало, - писал П. Аппель в предисловии. - Главный интерес этого нового тома представляет замечательная "Заметка о теории евклидовского действия"...Э. и Ф. Коссера. ... Цель заметки - объединить различные механические теории в одну общую идею, из которой они вытекают дедуктивным путем, идею, которая могла бы служить орудием для новых открытий. Известно, что в современной механике господствуют энергия... и действие.

Э. и Ф. Коссера посвятили свои труды понятию о действии, ценность которого вытекает из теорий Гамильтона и Гельмгольца; им удалось достигнуть в этих теориях нового и важного успеха, извлечь из них все наиболее существенное и установить прямое определение действия, форма которого может быть перенесена во все области естественной философии. Отправная их точка заключается в том соображении, что действие, в том виде как его ввел Мопертюи, является инвариантом в группе евклидовских перемещений; тот же характер мы встречаем снова в статике деформируемых тел...; в физике, как показали это первыми Лаплас, Фурье и Максвелл, теория явлений, происходящих от тяготения, теплоты и электричества, зависит от изучения дифференциальных параметров, которые также являются инвариантами в группе перемещений. Пуанкаре написал, что понятие о группе предсуществует в нашем уме, по крайней мере в виде способности, и проявляется у нас обязательно, не в форме нашего чувствования, но как форма нашего разумения. В силу этой философской идеи, теоретическая механика и физика должны иметь основы, аналогичные основам геометрии, и попытка построить их на едином понятии евклидовского действия весьма естественна. Именно это и сделали Э. и Ф. Коссера в своей "Заметке", по отношению к вопросам, входящим в обычные рамки механики. Таким образом, они открыли новый путь для разбора начал, на которых покоится эта часть науки, в своей классической форме, - путь, интерес которого теперь очевиден. В то же время, они сумели полнее ввести в область рационального исследования вопросы о деформации тел, выдвинутые в последнем столетии великой французской школой математической физики.

Читатель увидит, какого успеха они достигли и как их метод привел их, правильным путем, к различным задачам статики и динамики, касающимся деформируемой линии, деформируемой поверхности, деформируемой среды, со всеми частными случаями, разбираемыми в геометрии и механике.

Я счастлив высказать здесь свою благодарность гг. Э. и Ф. Коссера за их любезность опубликовать свой прекрасный труд в конце моего Руководства механики "[16].

Репринтное издание одной из основополагающих работ по теории обобщенных континуумов [17], осуществленное по нашей инициативе журналом «Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии», сопровождается современными работами отечественных авторов, развивающих эту область механики. И здесь, прежде всего - работа Павла Андреевича Жилина [18], профессора, много лет возглавлявшего кафедру теоретической механики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, ушедшего из жизни в 2005 году. Представленная работа - из неопубликованного архива П.А. Жилина. Работы этой школы представляет также статья одной из ближайших учениц П.А. Жилина - профессора Е.А. Ивановой [19]. Публикуются также работы московских [20] и сибирских [21] авторов на эту тему.

Литература

1. Cosserat E. et F. Theorie des Corps Deformables. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. – 226p.
2. Pommaret J.F. Lie-Pseudogroups and Mechanics. – Gordon and Breach Science, 1988. – 590p.
3. Cosserat E. Sur le Cercle Considere Comme Element Generateur de L'Espace. Diss., Paris, 1889.
4. Montangerand L. Eloge de Cosserat // Ann. de l'Observatoire de Toulouse, 1933. – V.10. – P. 20-30.
5. Chwolson O.D. Traite de Physique. Ouvrage traduit sur les editions russe et allemande per E. Davaux. Edition revue et considerablement augmentee per l'Auteur, suivie de notes sur la physique theorique pur E. et F. Cosserat. Tome 1: Mecanique. Etats de la matiere. Acoustique, vii + 1092 pp., 1908. Tome 2: L'Energie rayonnante. 1188 pp., 1909. – Paris:

Librairie Scientifique A. Hermann et Fils.

6. Михлин С.Г., Морозов Н.Ф., Паукшто М.В. Интегральные уравнения в теории упругости. – СПб.: Изд-во С.Петербургского университета, 1994. – 272с.
7. Михлин С.Г. Спектр пучка операторов теории упругости // Успехи математических наук. – 1973. – № 3 (171). – С. 43-82.
8. MacCullagh J. An Essay Towards a Dynamical Theory of Crystalline Reflection and Resraction // Trans. Roy. Irish. Acad. Sci., 1839. – V. 21. – P. 17-50.
9. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред. – М.: Иностранная литература, 1954. – 486с.
10. Фесенко О.Г. Континуум Мак-Келлога – электромагнитный эфир. – Белгород: Изд. дом «Шاپовалов». 1997. – 86с.
11. Горбачевич Ф.Ф. Эфирная среда и универсум – СПб.: Изд-во «Альфа-Штамп», 2004. – 112с.
12. Thomson W. Mathematical and Physical Papers, 1882-1911. – 6 vols. – Cambridge University Press.
13. Грекова Е.Ф., Жилин П.А. Среда Кельвина и ферромагнетики: определяющие уравнения и волновые процессы // Нелинейная акустика твердого тела: сборник научных трудов / под ред. В.И.Ерофеева. – Нижний Новгород: Изд-во «Интелсервис», 1998. – С. 87-90.
14. Cartan E. Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relativite generalisee // Ann. Ec. Norm. Sup. – 1923. – V. 40. – P. 325-412; – 1924. – V. 41. – P. 1-25; – 1925. – V. 42. – P. 17-88.
15. Иваненко Д.Д., Сарданашвили Г.А. Гравитация. – М.: УРСС, 2008. – 200с.
16. Аппель П. Руководство теоретической (рациональной) механики. Пер. с послед. (3-го) фр. изд. (1909 г.) А. Безруков. М.: Типо-лит. т-ва И.Н. Кушнерев и К°. 1911. Т. 3. 457 с.
17. Коссера Э., Коссера Ф. Заметка о теории евклидовского действия (репринт) // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т. 5. № 1. С.5-76.
18. Жилин П.А. Построение модели электромагнитного поля с позиций рациональной механики // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т. 5. № 1. С.77-97.
19. Иванова Е.А. Моделирование термоупругих процессов в трехмерных средах и оболочках посредством среды Коссера с микроструктурой // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т. 5. № 1. С.98-110.
20. Садовский В.М., Садовская О.В., Варыгина М.П. Анализ резонансного возбуждения блочной среды на основе уравнений моментного континуума Коссера // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т. 5. № 1. С.111-118.
21. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Дифракция нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т. 5. № 1. С.119-125.

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ДЕПЛАНАЦИИ

^{1,2}Ерофеев В. И., ³Лампси Б. Б.

¹ ФГБУН «Институт проблем машиностроения Российской академии наук»

²ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Нижний Новгород, Россия, erf04@sinn.ru

³ГОУ ВПО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет», Нижний Новгород, Россия, boris-lampsi@yandex.ru

Аннотация. Предложена математическая модель, позволяющая описать распространение крутильной волны в стержне. Модель включает в себя геометрическую и физическую упругие нелинейности и депланацию. В отличие от большинства известных моделей, здесь связь между углом закручивания стержня и мерой депланации не постулируется, а находится в процессе решения задачи. Определено, что депланация, приводящая к появлению дисперсии фазовой скорости крутильной волны, приводит еще и к появлению квадратичной нелинейности, характерной для интенсивных продольных колебаний и не встречавшейся прежде в математических моделях, описывающих крутильные колебания. Показано, что в стержне может формироваться нелинейная стационарная крутильная волна. Выявлено, что такая волна является периодической и движется быстрее, чем любые линейные возмущения. Волна имеет пилообразную форму, длина волны увеличивается с ростом ее амплитуды.

В настоящее время стремительно развивающиеся техника и технология требуют новых, более точных методов расчета, на ряду с этим широко распространяется изучение волновых процессов. Полученные результаты исследований имеют широкую область применения: от контроля материалов и изделий при их производстве, до строительства зданий, сооружений, объектов машиностроения, металлургии, нефтехимии. Среди многообразия изделий металлургической, машиностроительной, нефтедобывающей, других отраслей промышленности имеется широкая номенклатура протяженных объектов, длина которых превосходит поперечные размеры в сто и более раз. К таким объектам можно отнести прутковый прокат различного сечения, насосно-компрессорные, газовые и нефтяные трубы, железнодорожные рельсы, стальные тросы, проволоку, пружины и другую продукцию.

Для неразрушающего контроля протяженных объектов в России и за рубежом все чаще используются не методы, основанные на изучении поведения лабораторных образцов, а волноводные (wave guided) методы, то есть методы, основанные на использовании продольных, изгибных и крутильных нормальных волн [1,2]. В основе акустического воздействия на объект контроля и напряженно-деформированного состояния лежат поля одной природы, поэтому оценка технического состояния металлоконструкций акустическим методом является наиболее достоверной. Использование при волноводном контроле продольной стержневой моды волны Похгаммера в области минимальной дисперсии скорости (для прутков) и нулевой крутильной волны (для труб) позволяет «прозвучивать» достаточно протяженные объекты – длиной в несколько сотен метров, обеспечивает высокую чувствительность к дефектам по всему сечению объекта.

Недостаточное количество работ по исследованию закономерностей распространения нормальных волн в протяженных объектах, их взаимодействия с дефектами, отсутствие научно-обоснованных технических решений по разработке эффективных высокочувствительных преобразователей, обоснованию новых информативных параметров является одной из причин, сдерживающих создание и внедрение надежных и эффективных методов бесконтактного акустического контроля линейно-протяженных объектов.

Крутильные волны наряду с продольными и изгибными волнами играют большую роль в формировании вибрационных полей строительных конструкций. Математические модели, используемые для изучения крутильных колебаний стержней, а также для изучения распространения крутильных волн, базируются на технической теории кручения и уточняющей ее теории стесненного кручения. Технические теории включают в себя модели Кулона и Сен-Венана, уточняющие – модели Тимошенко и Власова [1-3].

В основе теории Кулона лежат гипотезы о недеформируемости поперечного сечения стержня в своей плоскости и об отсутствии деформации, т.е. выхода сечения из первоначального плоского состояния. Сечения стержня, согласно этим предположениям, скользят относительно друг друга, поворачиваясь при этом в своей плоскости на малый угол как жесткие площадки. Согласно этой теории крутильная волна в стержне распространяется без дисперсии с той же скоростью, с которой распространяются сдвиговые волны в неограниченной среде.

По теории Сен-Венана предполагается, что кручение стержня складывается из кручения по Кулону (поворота поперечных сечений в своей плоскости) и продольных смещений, приводящих к деформации. Деформация полагается одинаковой для всех сечений и не зависящей от координаты x . Согласно этой теории крутильная волна в стержне не обладает дисперсией, но скорость крутильной волны отличается от скорости волны сдвига на постоянный множитель, зависящий от формы поперечного сечения стержня.

Если деформация неоднородна вдоль стержня, то кручение принято называть стесненным. По теориям Тимошенко и Власова деформация пропорциональна относительному углу закручивания, что приводит к дисперсии, т.е. зависимости фазовой скорости крутильной волны от ее частоты.

В монографии В. И. Сливкера [4] предложена еще одна уточняющая теория. В этой теории связь между углом закручивания $\theta(x,t)$ и мерой деформации $\beta(x,t)$ не постулируется как в теориях Тимошенко и Власова, а определяется в процессе решения задачи.

Выражение для плотности кинетической энергии имеет вид:

$$W_k = \frac{1}{2} \left[I_r \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \rho I_\omega \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (1)$$

где ρ – плотность материала стержня; I_r – полярный момент инерции;

I_ω – секториальный момент инерции.

Для учета упругой нелинейности в выражении для плотности потенциальной энергии следует удерживать не только квадратичные слагаемые, но и слагаемые в четвертой степени:

$$W_p = \frac{1}{2} G I_x \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} E I_\omega \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} G I_x \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right)^2 + \alpha_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^4 + \alpha_2 \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^4 + \alpha_3 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right)^4 \quad (2)$$

где E – модуль Юнга, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига, I_x – крутящий момент инерции,

$I_\omega = \frac{I_x}{g(\psi-1)}$, ψ – геометрический параметр (см. [4]); ν – коэффициент Пуассона.

α_i – коэффициенты, характеризующие геометрическую и физическую нелинейности стержня. Если стержень является геометрически нелинейным, то $\alpha_i > 0$, если – физически нелинейным, то $\alpha_i < 0$.

Составляя лагранжиан $L=W_k - W_p$ и применяя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского [2,3], получим систему уравнений динамики стержня:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_x}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \beta_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \beta_x}\right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где введены обозначения: $\theta_t = \frac{\partial \theta}{\partial t}$, $\theta_x = \frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\beta_t = \frac{\partial \beta}{\partial t}$, $\beta_x = \frac{\partial \beta}{\partial x}$.

После проведения необходимых дифференцирований и преобразований (3) запишется в виде:

$$\begin{cases} \rho r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - G(I_x + I_g) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + G I_g \frac{\partial \beta}{\partial x} + N_1 = 0, \\ \rho \omega \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} - E I_\omega \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - G I_g \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta \right) + N_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь через $N_{1,2}$ обозначены нелинейные слагаемые:

$$\begin{aligned} N_1 = & -12(\alpha_1 + \alpha_3) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 24 \alpha_3 \beta \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 12 \alpha_3 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \beta}{\partial x} - 24 \alpha_3 \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \\ & - 12 \alpha_3 \beta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 12 \alpha_3 \beta^2 \frac{\partial \beta}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$N_2 = -12 \alpha_3 \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - 4 \alpha_3 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^3 + 12 \alpha_3 \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - 12 \alpha_3 \frac{\partial \theta}{\partial x} \beta^2 + 4 \alpha_3 \beta^3. \quad (6)$$

Система (4) – (6) достаточно сложна для анализа. Для ее упрощения будем предполагать, что депланация $\beta(x,t)$ является малой. Поскольку нелинейные эффекты проявляются на величинах более высокого порядка малости, чем линейные, это позволяет учитывать депланацию только в линейной части уравнений, а в нелинейных слагаемых приближенно считать, что $\beta \approx \frac{\partial \theta}{\partial x}$. Тогда нелинейные слагаемые будут иметь вид:

$$N_1 = -12 \alpha_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (7)$$

$$N_2 = -12 \alpha_3 \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (8)$$

При данных предположениях система уравнений (4) сводится к одному уравнению относительно $\theta(x,t)$. Для этого из первого уравнения системы выразим

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{(I_x + I_g)}{I_g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{I_r \rho}{G I_g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{12 \alpha_1}{G I_g} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

и подставим его во второе уравнение, предварительно продифференцированное по переменной x .

Таким образом, нелинейное дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня с учетом депланации его поперечного сечения, будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{EI \omega (I_x + I_g)}{d_g I_r} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - \frac{I \omega}{I_g I_r G} \left[(I_x + I_g) G + EI_r \right] \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} + \\
& + \frac{I \omega}{c_\tau^2 I_g} \frac{\partial^4 \theta}{\partial t^4} - \frac{12 I \omega \alpha_1}{GI_g I_r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right] + \frac{12 I \omega \alpha_1 EI \omega}{d_r GI_g} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right] - \\
& - \frac{12 \alpha_1}{d_r} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{12 \alpha_3}{d_r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $c_s = \sqrt{\frac{GI_x}{\rho I_r}}$ – скорость распространения крутильных волн в стержне.

Заметим, что уравнение (9) содержит в себе, наряду с кубической нелинейностью, характерной для интенсивных крутильных колебаний стержней [3], еще и квадратичную нелинейность (последнее слагаемое), характерную для интенсивных продольных колебаний и не встречающуюся прежде в математических моделях, описывающих крутильные колебания.

Будем далее рассматривать волновые процессы, учитывая квадратичную нелинейность ($\alpha_3 \neq 0$) и пренебрегая кубической нелинейностью ($\alpha_1 = 0$).

Уравнения (9) в этом случае можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{I \omega}{c_\tau^2 I_g} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(I_x + I_g) c_\tau^2}{I_g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \theta + \frac{6 \alpha_3}{d_r} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 = 0, \tag{10}$$

Здесь $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость распространения продольных волн в стержне;

$c_\tau = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ – скорость распространения сдвиговых волн.

Линейные крутильные волны в стержне обладают дисперсией фазовой скорости [5]. Таким образом, на распространение крутильных волн, описываемых уравнением (10), будут влиять два фактора: дисперсия и нелинейность. Нелинейность приводит к зарождению в спектре волны новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов. Дисперсия же наоборот, сглаживает перепады из-за различия в фазовых скоростях гармонических составляющих волны. Совместное действие этих факторов может привести к формированию стационарных волн, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения формы.

Обзор основных результатов теоретических и экспериментальных исследований нелинейных стационарных волн в стержнях, пластинах и оболочках содержится в работе [7].

Решение уравнения (10) будем искать в виде: $\theta(x, t) = \theta(\xi)$, где $\xi = x - Vt$, V – скорость стационарной волны (заранее не известна).

Для относительного угла закручивания поперечного сечения стержня $\Theta = \frac{d\theta}{d\xi}$

уравнение в частных производных (10) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\xi^2} + m_1 \Theta + m_2 \frac{d}{d\xi} (\Theta)^2 = 0, \tag{11}$$

$$\text{где } m_1 = \frac{V^2 - \frac{c_\tau^2 I_x}{I_r}}{\frac{I_\omega}{c_\tau^2} \left(V^2 - \frac{(I_x + I_g) c_\tau^2}{I_g} \right) (V^2 - c_0^2)}, \quad m_1 = \frac{6 \alpha_3 c_\tau^2 I_g}{d_r I_\omega \left(V^2 - \frac{(I_x + I_g) c_\tau^2}{I_g} \right) (V^2 - c_0^2)}$$

Анализ уравнения (11) на фазовой плоскости $\Theta, \frac{d\Theta}{d\xi}$ показывает, что замкнутые фазовые траектории, а только им соответствуют финитные решения уравнения, возможны, если $m_1 > 0$. Следовательно, нелинейные крутильные стационарные волны могут существовать лишь при $m_1 > 0$. Это возможно если нелинейная волна является «быстрой», т.е. ее скорость превышает скорости всех линейных возмущений:

$$V > c_0 > c_\tau \sqrt{\frac{(I_x + I_g)}{I_g}} > c_s \quad (12)$$

или если нелинейная волна является «медленной» и ее скорость лежит в интервале:

$$c_s < V < c_\tau \sqrt{\frac{(I_x + I_g)}{I_g}} \quad (13)$$

В начале координат на фазовой плоскости имеется особая точка типа «центр». Прямая $\frac{d\Theta}{d\xi} = \varepsilon^*$ определяет устойчивые движения (замкнутые фазовые траектории):

$$\varepsilon^* = \frac{m_1}{2m_2} = \frac{d_r c_s^2}{12 \alpha_3} \left(\frac{V^2}{c_s^2} - 1 \right) \quad (14)$$

Этот параметр растет с увеличением относительного значения скорости нелинейной стационарной волны, т.е. $|\varepsilon^*| \sim \left(\frac{V}{c_s} \right)^2$ и уменьшается с увеличением $\alpha_3 : |\varepsilon^*| \sim \frac{1}{|\alpha_3|}$. Знак m_2 определяется знаком α_3 .

На рис.1 показан фазовый портрет уравнения (11) при $\alpha_3 < 0$ (а) и профиль стационарной волны, при амплитудах, близких к ε^* (б).

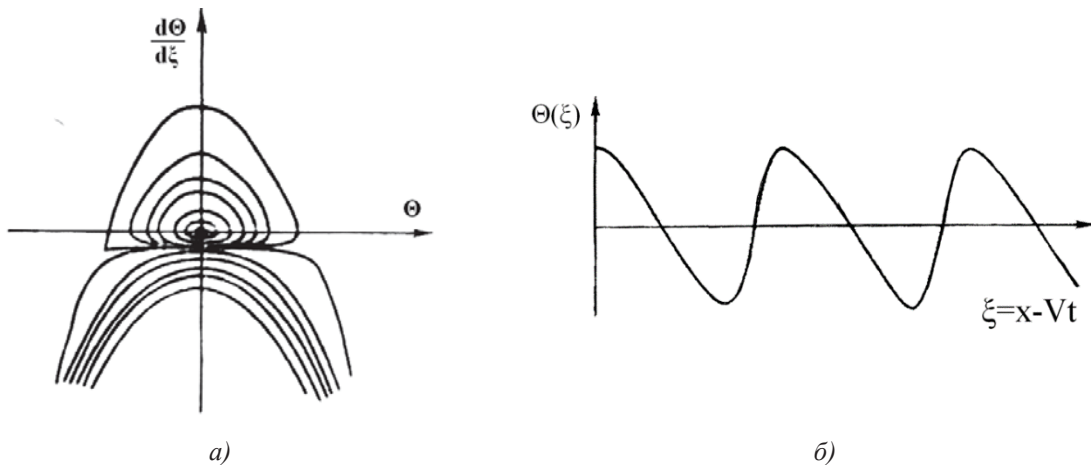


Рис.1.

Аналитические построения, выполненные для случая $\alpha_3 > 0$, показаны на рис.2 (а,б).

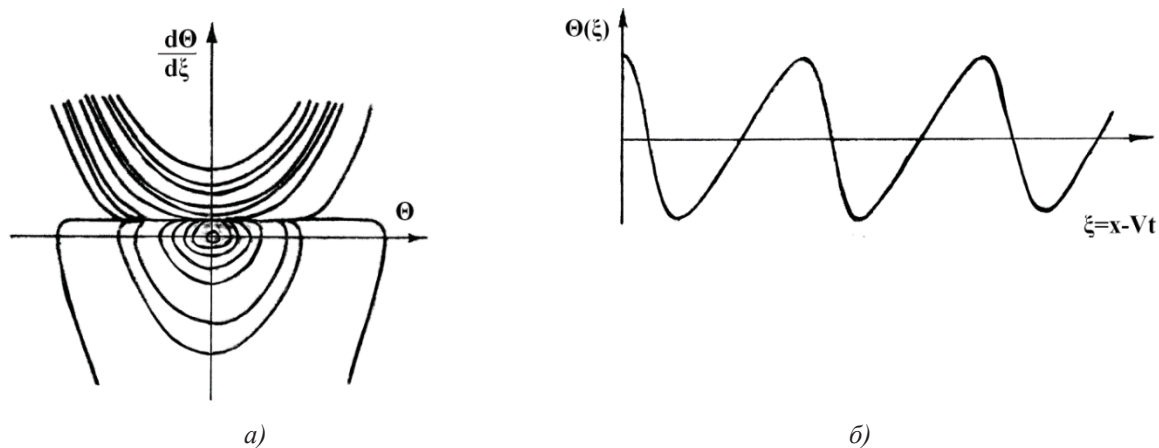


Рис.2.

Фазовый портрет позволяет оценить зависимость волнового числа нелинейной волны (k) от ее амплитуды (a):

$$\frac{k}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a/a_0}{\pi \varepsilon^*}\right)^2}} \quad (15)$$

где k_0, a_0 – волновое число и амплитуда гармонической (линейной) волны.

С ростом амплитуды волны относительное значение волнового числа уменьшается (длина волны растет) (рис.3).

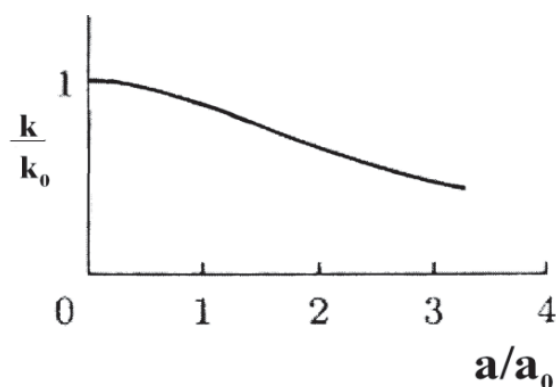


Рис. 3

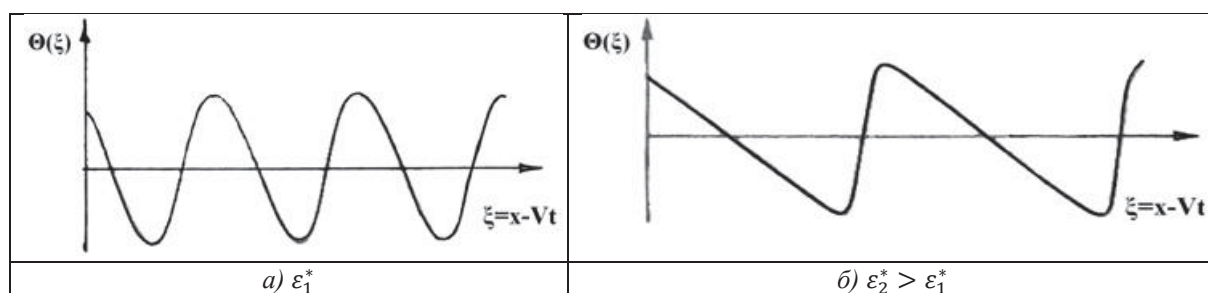


Рис. 4

Профили нелинейной волны при фиксированной амплитуде ($a/a_0 = \text{const}$) и различных значениях ε^* приведены на рис.4 (а,б).

Литература

1. Артоболовский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.

2. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти томах. Т.1/ под ред. Болотина В.В. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
3. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
4. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов. 2005. 736 с.
5. Дьяков С.Ф., Лалин В.В. Дисперсия крутильной волны, распространяющаяся в тонкостенном стержне // интернет журнал «Науковедение». 2013. №5. с. 1-10. 24ТВН513. [http:// naukovedenie.ru](http://naukovedenie.ru).
6. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти томах. Т.1/ под ред. Болотина В.В. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
7. Ерофеев В.И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. 2002. т.48, №6. с. 725-740.

ОСОБЕННОСТИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГИБКИХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ РОТОРОВ

Зейтман М.Ф.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

zeitman@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются нелинейные многоопорные роторные системы с распределенными и сосредоточенными параметрами. Предполагается, что они имеют сильные гироскопические свойства. Особенности изучаемых структур состоят в существовании почти периодических автоколебательных режимов в областях неустойчивости их изгибных колебаний. Уравнения движения таких систем представлены неоднородными квазилинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Граничные условия и условия сопряжения также выражаются подобными соотношениями с почти периодическим возмущением в правых частях. Гироскопические структуры обладают зависимостью собственных частот, форм колебаний и условий ортогональности от угловой скорости вращения ротора. По этой причине разложение в ряды по собственным функциям невращающегося вала упругих линий таких систем становится невозможным. Автоколебания находятся из почти периодических решений их уравнений движения. Последние получаются методом прямого разделения движений введением «медленного» и «быстрого» времени. Отмечается возникновение многочастотных автоколебаний в двух возможных случаях - нерезонансный (некритический) и более сложный - резонансный (критический). Здесь из-за обусловленных ограничений обсуждается более простой – нерезонансный случай.

1. Возбуждение автоколебаний роторов представляет собой одну из форм потери их устойчивости. Автоколебательные режимы могут чередоваться то появляясь, то исчезая, в зависимости от расположения рабочей угловой скорости вращения ротора. Заполнение областей неустойчивости изучаемых здесь систем зонами автоколебаний составляет небезинтересную их особенность. Это явление связано с возможным расширением полей вибрации именно гибких гироскопических роторов. Здесь рассматриваются автоколебания гибких многоопорных гироскопических роторов с распределенными и сосредоточенными массами. Такие схемы нередко используются в качестве динамических моделей различных турбомашин, как-то: высокоскоростные ультрацентрифуги, сепараторы, турбонагнетатели, турбонасосные агрегаты и многие другие распространенные конструкции.

Динамика рассматриваемых в статье роторов заметно зависит от расположения вдоль оси вала континуально спроектированных его участков, гироскопического действия сосредоточенных элементов с соответствующими значениями главных центральных моментов инерции. Линеаризованная гиromoдель обладает бесконечным числом собственных частот прямой и обратной прецессии, не равных друг другу. Априори предполагается, что сосредоточенные грузы или часть из них демонстрируют сильные гироскопические свойства. Все эти обстоятельства способствуют появлению большего числа режимов многочастотных автоколебаний в противоположность негироскопическим схемам.

Движение исследуемых гироскопических структур описывается квазилинейными неоднородными дифференциальными уравнениями в частных производных, а граничные ситуации и условия сопряжения связаны аналогичными переменными. Анализ подобных систем затрудняется из-за зависимости собственных частот, форм колебаний и условий ортогональности от угловой скорости вращения ротора. В силу этого их применение, а также разложение в ряды упругой линии вала по собственным формам невращающегося ротора невозможны. Вследствие этого для отыскания почти

периодических решений уравнений движения использован приближенный метод, о котором речь пойдет ниже.

Детальному исследованию автоколебаний негироскопических роторов посвящена монография [1]. В ней рассмотрены вопросы нахождения почти периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, там же, по-видимому, впервые исследованы автоколебания простейшей дискретной гиомодели в форме консольного ротора с невесомым валом и диском на его конце. Для такого объекта были получены стационарные автоколебания в нерезонансном режиме. В статье [2] изучаются периодические колебания сложных гироскопических роторов с распределенными и сосредоточенными массами, а также их устойчивость. Настоящая работа посвящена автоколебаниям аналогичных систем. Приближенным методом получены почти периодические решения уравнений движения, что связано с разложением его в ряд по малому параметру. При этом аналитическая процедура поиска такого решения основана на методе прямого разделения движений [3]. Отмечается возможность существования двух случаев: нерезонансного (некритического) и резонансного (критического). В последнем случае фундаментальное уравнение системы имеет критические корни. Здесь решение ограничивается только нерезонансным случаем

2. Динамическая модель нелинейного гибкого гироскопического ротора в наиболее общей форме без каких - либо ограничений любых его характеристик используется далее на каждом этапе проводимого исследования. Величины $u_j(x,t)$, $j=1,2$ есть проекции оси вала на плоскости неподвижной системы координат. Они должны удовлетворять почти периодическим дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^4 u_j}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \mu \chi \frac{\partial u_j}{\partial t} = f_j(x,t) + \mu F_j(\mu, t, x, u_1, u_2, u_{1x}, u_{2x}, u_{1t}, u_{2t}) \quad (1)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} x=0, u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0, x=l, \\ \sigma \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = -K_1 \frac{\partial^3 u_j}{\partial x \partial t^2} + i^{2j} K_1 \frac{\partial^3 u_j}{\partial x \partial t^2} + i^{2j} K_0 \omega \frac{\partial^2 u_j}{\partial x \partial t} - c \frac{\partial u_j}{\partial x} + g_j(t) - \mu \chi_1 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x \partial t} + \mu G_j(\mu, t, u_1 \dots u_{2t}), \quad (2) \\ \sigma \frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3} = m \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + q_j(t) + \mu \chi_2 \frac{\partial u_j}{\partial t} + \mu Q_j(\mu, t, u_1 \dots u_{2t}) \end{aligned}$$

$$i = \sqrt{-1}, j=1,2.$$

здесь $f_j, g_j, q_j, F_j, G_j, Q_j$ – непрерывные почти периодические функции времени t , а μ – малый параметр; $\sigma, \rho, K_1, K_0, m, \omega, c, \chi, \chi_1, \chi_2$ – постоянные, определяющие геометрическую, распределенномассовую, инерционную, кинематическую, упругую и демпфирующую характеристики гироскопического ротора.

Функции f_j, g_j, q_j можно исключить соответствующей подстановкой. Почти периодическое решение целесообразно искать приближенно в форме разложения в ряд функций $u_j(x,t)$ по малому параметру μ [4,5]

$$u_j(x,t) = u_j^0(x,t,\tau) + \mu u_j^{(1)}(x,t,\tau) + \mu^2 u_j^{(2)}(x,t,\tau) + \dots, \quad (3)$$

где t - “быстрое” время, $\tau = \mu t$ - “медленное” время, $u_j^0(x, t, \tau)$, $u_j^{(1)}(x, t, \tau) \dots$ -- почти периодические функции “быстрого” времени, а “медленное” время входит в них только как постоянный параметр.

В уравнениях (1), (2) порождающая система возникает, когда $\mu = 0$. Для нее предполагается исследовать интересующие нас многочастотные автоколебания [1], соответствующие собственным частотам λ_s ($s = 1, \dots, k$) и собственным формам $Y_{js}(x, \lambda_s)$ линеаризованной гиомодели. Как отмечалось выше, в настоящей работе решено ограничиться нерезонансным режимом возбуждения в ней автоколебаний. Поэтому следует учитывать, что каждой частоте λ_s соответствует одна пара простых корней $\pm \lambda_s$ фундаментального уравнения. Тогда нулевое приближение почти периодического решения (3) можно записать, как

$$u_j^0(x, t, \tau) = \sum_{s=1}^k u_{js}^0(x, t, \tau),$$

$$u_{js}^0(x, t, \tau) = i^{j-1} \left[-i^{2j} A_{1s}(\tau) \exp i \lambda_s t + A_{2s}(\tau) \exp(-i \lambda_s t) \right] Y_{js}(x, \lambda_s), \quad (4)$$

где величины A_{ms} в силу вида (4) будут функциями только «медленного» времени

$$A_{ms} = c_{ms}(\tau) \exp i \varphi_{ms}(\tau), m = 1, 2, s = 1, \dots, k \quad (5)$$

здесь в (5) амплитуды $c_{ms}(\tau)$ и фазы $\varphi_{ms}(\tau)$ по той же причине оказываются функциями только «медленного времени». При этом следует помнить, что каждому корню фундаментального уравнения λ_s и $-\lambda_s$ соответствует своя собственная форма [2]

$$Y_{1s}(x, \lambda_s) = -Y_{2s}(x, \lambda_s) = Y_{js}(x, \lambda_s), Y_{1s}(x, -\lambda_s) = Y_{1s}(x, -\lambda_s)$$

Дифференциальное уравнение для функций первого приближения $u_j^{(1)}(x, t, \tau)$ из (3) можно получить подстановкой (3) в систему (1), (2). Тогда мы получим следующие уравнения

$$\frac{\partial^4 u_j^{(1)}}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 u_j^{(1)}}{\partial t^2} = -\chi \frac{\partial u_j^0}{\partial t} - 2\rho \frac{\partial^2 u_j^0}{\partial t \partial \tau} + F_j(0, t, x, u_1^0 + u_{10}, u_2^0 + u_{20}, \dots) \quad (6)$$

и граничные условия

$$x=l, \sigma \frac{\partial^2 u_j^{(1)}}{\partial x^2} + K_1 \frac{\partial^3 u_j^{(1)}}{\partial x \partial t^2} - i^{2j} K_0 \omega \frac{\partial^2 u_{j\pm 1}^1}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x} =$$

$$-2K_1 \frac{\partial^3 u_j^0}{\partial x \partial t \partial \tau} + i^{2j} K_0 \omega \frac{\partial^2 u_{j\pm 1}^0}{\partial x \partial \tau} - \chi_1 \frac{\partial^2 u_j^0}{\partial x \partial t} + G_j(0, t, u_1^0 + u_{10}, u_2^0 + u_{20}, \dots) \quad (7)$$

$$\sigma \frac{\partial^3 u_j^{(1)}}{\partial x^3} - m \frac{\partial^2 u_j^{(1)}}{\partial t^2} = 2m \frac{\partial^2 u_j^0}{\partial t \partial \tau} + \chi_2 \frac{\partial u_j^0}{\partial t} + Q_j(0, t, u_1^0 + u_{10}, u_2^0 + u_{20}, \dots)$$

где $u_{j0}(x, t, \tau)$ – частное решение неоднородной порождающей системы (1), (2) с ее правыми частями.

Допустим, что часть собственных частот λ_s ($s=1, \dots, q < k$) порождающей системы и частоты возмущающих сил из правых частей (1), (2) -- ω_s ($1, \dots, p$) связаны n линейно независимыми целочисленными резонансными соотношениями вида

$$\Delta_r = m_1^{(r)} \lambda_1 + \dots + m_q^{(r)} \lambda_q + n_1^{(r)} \omega_1 + n_p^{(r)} \omega_p = 0, (r=1, \dots, n) \quad (8)$$

Все коэффициенты в (8) не могут быть одновременно равны нулю.

Если условие (8) выполняется, то при некритических частотах частные решения в (6), (7) -- $u_{js}^{(1)}$, соответствующие их правым частям, могут быть представлены таким образом

$$u_{js}^{(1)}(x, t, \tau) = i^{j-1} \sum_{s=1}^k [y_{j1}(x, \lambda_s, \tau) \exp i \lambda_s t + y_{j2}(x, \lambda_s, \tau) \exp(-i \lambda_s t)] + z_j(x, t, \tau) \quad (9)$$

где y_{j1}, y_{j2} вследствие вида выражения (9) не зависят от t , а z_j по этой же причине будет почти периодической функцией того же t .

Подстановка (9) в (6), (7) после трудоемких преобразований с учетом (4) дает обыкновенные дифференциальные уравнения для $y_{jm}(x, \lambda_s, \tau), m=1, 2$ с новыми переменными $A_{ms}(\tau)$

$$y_{jm}^{1V} - \rho \lambda_s^2 y_{jm} = i^{2jm+1} \lambda_s \left(\chi A_{ms} + 2\rho \frac{dA_{ms}}{d\tau} \right) Y_s(x, \lambda_s) + i^{1-j} A_{ms} |A_{ms}|^{-1} p_{jm}(x, A_{ms}) \quad (10)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} x=0, y_{jm} = y'_{jm} = 0, x=l, \sigma y''_{jm} - (K_1 \lambda_s^2 - c) y'_{jm} + i^{2m} K_0 \omega \lambda_s y'_{j\pm 1, m} = \\ = i^{2jm} + 1 \left[(2K_1 \lambda_s - K_0 \omega) \frac{dA_{ms}}{d\tau} + \chi_1 \lambda_s A_{ms} \right] Y'_s(l) + i^{1-j} A_{ms} |A_{ms}|^{-1} g_{jm}(A_{ms}), \\ \sigma y'''_{jm} + m \lambda_s^2 y_{jm} = -i^{2jm+1} \lambda_s \left[2m \frac{dA_{ms}}{d\tau} + \chi_2 A_{ms} \right] Y_s(l) + i^{1-j} A_{ms} |A_{ms}|^{-1} q_{jm}(A_{ms}) \end{aligned} \quad (11)$$

в которых $A_{ms}(\tau)$ и $dA_{ms}/d\tau$ определяются при $\mu \neq 0$, функции p_{jm}, g_{jm}, q_{jm} получаются, как результат усреднения правых частей в (6), (7)

$$\begin{aligned} p_{jm}(x, A_{ms}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t F_j(0, \nu, x, A_{ms}, \dots) \exp i(\mp \lambda_s \nu - \varphi_{ms}) d\nu, \\ g_{jm}(A_{ms}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t G_j(0, \nu, A_{ms}, \dots) \exp i(\mp \lambda_s \nu - \varphi_{ms}) d\nu, \\ q_{jm}(A_{ms}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t Q_j(0, \nu, A_{ms}, \dots) \exp i(\mp \lambda_s \nu - \varphi_{ms}) d\nu. \end{aligned} \quad (12)$$

здесь знак «минус» берется для аргументов экспонент, когда $m=1$ и «плюс» при $m=2$. Разложение интегралов из (12) в ряды Фурье показывает, что последние, имея вид $\gamma_r t + \psi_r$, не зависят от t при условии, если γ_r оказывается линейной комбинацией резонансных соотношений (8), что приводит к равенству

$$\gamma_r = \sum_{s=1}^q m_s^{(r)} \lambda_s + \sum_{s=1}^p n_s^{(r)} \omega_s, \beta_r = \gamma_r t + \psi_r \quad (13)$$

Такое соотношение будет для нерезонансных частот просто суммой корней фундаментального уравнения, а фазы ψ_r определяются зависимостью только от суммы фаз в координатных плоскостях

$$\theta_s = \varphi_{1s} + \varphi_{2s} \quad (14)$$

а запись аргументов (12) можно представить, как

$$\begin{aligned} p_{jm}(x, A_{ms}) &= p_{jm}(x, c_{1s}, c_{2s}, \theta_s), g_{jm}(A_{ms}) = g_{jm}(c_{1s}, c_{2s}, \theta_s), \\ q_{jm}(A_{ms}) &= q_{jm}(c_{1s}, c_{2s}, \theta_s), \end{aligned} \quad (15)$$

где x – абсцисса вдоль продольной оси, $c_{1s}(\tau), c_{2s}(\tau)$ – функции амплитуд $A_{ms}(\tau)$ – амплитудная функция $\theta_s(\tau)$ – сумма фаз согласно (14).

Условия периодичности $y_{jm}(x, \lambda_s, \tau)$, учитывая (9) – (11), дают после преобразований уравнения в стандартной форме для функций $A_{ms}(\tau)$ [4,5]

$$\frac{dA_{ms}}{d\tau} = \mu \left[A_{ms} B_s(\lambda_s) + A_{ms} |A_{ms}|^{-1} C_{ms}(A_{ms}) \right] \quad (16)$$

здесь $B_s(\lambda_s)$ – функции только λ_s , $C_{ms}(A_{ms}) = C_{ms}(c_{1s}, c_{2s}, \theta_s)$ – функции указанных в скобках аргументов с учетом (15).

Автоколебания определяются стационарными решениями вида (5), принимая во внимание (14), (15). Подстановка (5) в (16) дает систему уравнений относительно $c_{1s}(\tau), c_{2s}(\tau), A_s(\tau)$ и $\varphi_{ms}(\tau)$. При нерезонансных частотах нулевое приближение почти периодического решения (3) вслед за интегрированием (16) и последующими преобразованиями имеет вид

$$\begin{aligned} u_{1s}^0(x, t, \tau) &= 2c_{1s}^0(\tau) \cos[(\lambda_s + \mu\delta_s^0)t + \varepsilon_s^0(\tau)] \\ u_{2s}^0(x, t, \tau) &= 2c_{2s}^0(\tau) \cos[(\lambda_s + \mu\delta_s^0)t + \varepsilon_s^0(\tau)] \end{aligned} \quad (17)$$

где δ_s^0 – нулевое приближение поправки частоты автоколебаний $\varepsilon_s^0(\tau)$ – те же приближения для фаз. Равенства (17) дают искомое решение, поскольку для рассматриваемого случая уже нулевое приближение оказывается достаточным для суждения о характере процесса.

Нулевое приближение амплитудной функции $A_{sm}(\tau)$ следует из (5)

$$A_{ms}^0(\tau) = c_{ms}^0(\tau) \exp i^{2m-1} \varphi_{ms}^0(\tau) \quad (18)$$

и в силу (18) можно найти из (10), (11) выражения следующих функций

$$y_{jm}(x, \lambda_s, \tau) = i^{2m(j+1)} A_{ms}^{(1)}(\tau) Y_s(x, \lambda_s) + i^{1-j} \Psi_{jm}(x, A_{ms}^0) \exp i \varphi_{ms}^0, \quad (19)$$

$$\Psi_{jm}(x, A_{ms}^0) = \Psi_{j1s}(x, A_{ms}^0) + i^{2m-1} \Psi_{j2s}(x, A_{ms}^0),$$

здесь в (19) применены условия ортогональности функций $\Psi_{jm}(x, A_{ms}^0)$ и собственных форм $Y_s(x, \lambda_s)$.

Таким образом, построенная процедура вычисления стационарных значений амплитуд $c_{sm}(\tau)$ и суммы фаз $\theta_s(\tau)$ позволяет найти для рассмотренного в статье нерезонансного случая поправки любого приближения для амплитуд и частот искомого стационарного решения.

Литература

1. Кушуль М.Я. Автоколебания роторов. М.; Изд-во АН СССР, 1963.167с.
2. Кушуль М.Я. Устойчивость периодических решений квазилинейных упругих гироскопических систем с распределенными и сосредоточенными параметрами. ПММ,1970.т.34. вып.1. с.с. 115 – 126.
3. Блехман И.И. Метод прямого разделения движений в задачах о действии вибрации на нелинейные механические системы. МТТ, 1976, №6, с.с 13 – 27.
4. Зейтман М.Ф. Автоколебания многоопорных гибких гироскопических валопроводов. Труды IV – ой международной конференции по проблемам механики современных машин,2009, т. 1. С.с.220 – 227
5. Banakh L.Ya., Zeytman M.F. Shaft Oscillations under High – Frequency Vibration of Foundation. Self – Induced Oscillations of Gyroscopic Rotors, Proceedings of the 8th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics, Seoul: Publishing Office of KIST, 2010,v.1,p.p. 1016 – 1021.

УПРАВЛЕНИЕ МНОГОМЕРНЫМ НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ В ОПИСАНИИ ПРИ ВЫВОДЕ НА ЗАДАННОЕ МНОГООБРАЗИЕ

Колесникова С.И.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Томск, Россия

skolesnikova@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается метод управления сложным объектом (нелинейным, многомерным с хаотическими режимами в разомкнутом состоянии), алгоритмически реализованный совместным применением методик управления в скользящем режиме, аналитического конструирования агрегированных регуляторов и «бэкстеппинг». Метод синтеза системы управления компенсирует неполноту описания за счет известного целевого многообразия и совмещает достоинства указанных методик. Приводятся примеры конструирования систем управления плохо формализуемыми объектами из разных прикладных областей: электрогидравлическая тормозная система; авиационный объект; экономический объект. Приводятся результаты сравнения с ранее полученными результатами.

В докладе рассматривается задача синтеза системы управления многомерными нелинейными объектами с возникновением хаотических режимов в процессе функционирования [1-5].

Приводится алгоритм, развивающий метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) на объекты с неполным описанием (см. обзор в [4]).

Постановка задачи. Рассматривается нелинейный многомерный объект с плохо формализуемой правой частью в его описании:

$$\begin{aligned}\dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, \dots, x_n; \theta) + u_j, \quad j = \overline{1, m}, \\ \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, \dots, x_n; \theta), \quad j = \overline{m+1, n},\end{aligned}\tag{1}$$

где $x \in R^n$ - вектор состояний, $\theta \in R^k$, - вектор постоянных параметров, $u \in R^m$, $m < n$, - вектор управления, $f \in R^n$ – непрерывная ограниченная вектор-функция; компоненты $f_1, \dots, f_m$ вектора $f \in R^n$ - неизвестны.

Предполагается выполнение естественных условий:

- 1) существование асимптотически устойчивой (в целом) целевой системы, удовлетворяющей заданным технологическим требованиям;
- 2) существование целевого *инвариантного* многообразия по отношению к исходной системе уравнений объекта, заданного в виде $\psi(x)=0$, где x – вектор состояния объекта;
- 3) ограниченность всех решений исходной системы;
- 4) стабилизируемость состояния объекта.

Для объекта с описанием (1) ставится задача нахождения закона управления $u(x)$, обеспечивающего перевод объекта управления (1) из произвольного начального состояния x_0 в некоторой области фазового пространства в заданное состояние, стабилизацию объекта в некоторой окрестности многообразия $\psi(x)=0$ и доставляющие минимум функционалу вида (с учетом m -мерности управления):

$$\Phi = \int_0^\infty \sum_{l=1}^m \left[\phi_l^2(\psi_l) + w_l^2 \dot{\psi}_l^2(t) \right] dt\tag{2}$$

где функции $\phi_l(\psi_l)$, $l = \overline{1, m}$ - однозначные, непрерывные, дифференцируемые для всех ψ_l ; $\phi_l(0) = 0$; $\phi_l(\psi_l)\psi_l > 0$, $\forall \psi_l \neq 0$.

Здесь рассмотрим задачу стабилизации объекта в виде целевых условий: $\psi_l = \psi_l(x_l - x_{l0}) = 0$, $l = \overline{1, m}$, где x_{l0} , $l = \overline{1, m}$ - целевые значения координат объекта.

Решение задачи. Обозначим через I и J множества номеров стабилизируемых переменных с управлениями в описании и без управлений, соответственно, при этом число целевых макропеременных ψ_l^* , $l = \overline{1, m}$ должно совпадать с числом m управляющих воздействий в описании объекта управления.

$$\begin{aligned} \psi_l^* &= \psi_l^*(x_l - x_{l0}) = 0, \quad l \in I \cup J, \quad I = \{1, \dots, s\}, \quad \bar{I} = \{s+1, \dots, m\}, \\ J &= \{m+1, \dots, m+k\}, \quad \bar{J} = \{m+k+1, \dots, n\}, \quad s \leq m, \quad k \leq n-m, \quad s+k = m. \end{aligned} \quad (3)$$

Алгоритм синтеза системы управления.

I. Для объекта (1) применяется аналитический вывод АКАР-управлений u_l^A , $l \in I \cup J$ в пространстве состояний по схеме работы [4]. С этой целью выполняются следующие шаги.

- Вводится первая совокупность макропеременных, из них вспомогательные макропеременные $\psi_i^{(1)}$, $i \in J$ определяются с точностью до неизвестных далее определяемых функций:

$$\begin{aligned} \psi_i^{(1)} &= x_i - x_{i0} = \psi_i^*, \quad i \in I, \\ \psi_i^{(1)} &= x_i - \phi_{i-s}(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}), \quad i \in \bar{I} = \{s+1, \dots, m\}, \quad j_q \in J, \quad q = \overline{1, k}; \end{aligned} \quad (4)$$

функции u_i^A , $i = \overline{1, m}$ и $\phi_1, \dots, \phi_k$ согласно АКАР, называются внешними и внутренними управлениями, соответственно;

- Формулируется критерий качества управления (сопровождающий оптимизирующий функционал): $\Phi_1 = \int_0^\infty \sum_{l=1}^m \left[(\psi_l^{(1)})^2 + (\omega_l^{(1)})^2 (\dot{\psi}_l^{(1)})^2 \right] dt$.

Утверждение. Пусть имеет место задача: $\Phi = \int_0^\infty F(t, \psi, \dot{\psi}) dt \rightarrow \min$, где $F(t, \psi, \dot{\psi}) = \omega^2 \dot{\psi}^2 + \phi^2(\psi)$ при ограничении $\psi(x(t)) = 0$. Решения уравнения

$$\omega \dot{\psi} + \phi(\psi) = 0$$

являются решениями уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\psi}} = 2\phi(\psi) \frac{\partial \phi}{\partial \psi} - 2\omega^2 \ddot{\psi} = 0$$

для задачи $\Phi \rightarrow \min$, а, следовательно, доставляют функционалу Φ глобальный экстремум.

- Составляются уравнения $\omega_i^{(1)} \dot{\psi}_i^{(1)} + \psi_i^{(1)} = 0$, $(\omega_i^{(1)} > 0)$, $i = \overline{1, m}$, устойчивые решения которых обеспечивают справедливость уравнений Эйлера-Лагранжа $\frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial \psi_i^{(1)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F_i^{(1)}}{\partial \dot{\psi}_i^{(1)}} = 0$, где $F_i^{(1)} = (\psi_i^{(1)})^2 + (\omega_i^{(1)})^2 (\dot{\psi}_i^{(1)})^2$ и доставляют безусловный минимум функционалу Φ_1 .

- Переменные управлений u_i^A , $i \in I$ вида (5) находятся из уравнений $\omega_i^{(1)} \dot{\psi}_i^{(1)} + \psi_i^{(1)} = 0$, $i = \overline{1, m}$, доставляющих с учетом уравнений объекта (1) безусловный экстремум функционалу вида (2):

$$u_i^A = - \left(\frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial x_i} \right)^{-1} \left(\omega_i^{-1} \psi_i^{(1)} + \frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial x_i} f_i \right) = -f_i - \left(\frac{\partial \psi_i^*}{\partial x_i} \omega_i^{(1)} \right)^{-1} \psi_i^*, \quad i \in I, \quad (5)$$

$$u_i^A = -f_i + \dot{\phi}_{i-s}^{(1)} - \left(\frac{\partial \psi_{i-s}^{(1)}}{\partial x_i} \omega_i^{(1)} \right)^{-1} \psi_i^{(1)}, \quad \dot{\phi}_{i-s}^{(1)} = \sum_{r=m+1}^k \frac{\partial \phi_{i-s}^{(1)}}{\partial x_r} f_r, \quad i \in \bar{I} = \{s+1, \dots, m\}.$$

II. Корректируются внешние управления по формуле: $u_i = u_i^A + v_i$, $v_i = \Delta u_i^A$, $i \in \{1, \dots, m\}$, где невязки v_i подлежат определению, а также корректируются уравнения с номерами $1, \dots, m$ в (1) в соответствии с новым представлением $u_i(t)$:

$$x_i = - \left(\frac{\partial \psi_i^*}{\partial x_i} \omega_i^{(1)} \right)^{-1} \psi_i^* + v_i, \quad i \in I, \quad (6)$$

$$x_i = - \left(\frac{\partial \psi_{i-s}^{(1)}}{\partial x_i} \omega_i^{(1)} \right)^{-1} \psi_i^{(1)} + \dot{\phi}_{i-s}^{(1)} + v_i, \quad i \in \bar{I} = \{s+1, \dots, m\}.$$

Неопределенность, связанная с отсутствием информации относительно описания (1), переходит в переменные $v_i = v_i(t)$, $i \in I$.

III. Привлекается функция Ляпунова в виде: $V(t) = 0.5 \sum_{i=1}^m \left(\left(\psi_i^{(1)} \right)^2 + v_i^2 \right)$.

Переменные управления вида: $\dot{v}_i = -\psi_i^{(1)}$, $i = \overline{1, m}$ приводят к выполнению условия $\dot{V}(t) < 0$, гарантирующего асимптотическую устойчивость управляемому объекту.

IV. Находятся функции ϕ_l , $l = \overline{1, k}$ по схеме:

- декомпозируется система (1), замечая, что на целевых инвариантных многообразиях $\psi_i^{(1)} = 0$, $i = \overline{1, m}$, заданных на 1-м шаге АКАР-синтеза, выполняются соотношения: $x_i = x_{i0}$, $i \in I$; $x_i = \phi_{i-s}(\cdot)$, $i \in \bar{I}$;

- задается вторая совокупность макропеременных (2-й шаг иерархического АКАР-синтеза) с целью достижения оставшихся целевых инвариантов ψ_i^* , $i \in \bar{I}$, для декомпозированной системы:

$$\psi_j^{(\Pi)} = x_j - x_{j0} = \psi_j^*, \quad j \in J \quad (7)$$

- решается вариационная задача, в соответствии с которой макропеременные $\psi_j^{(\Pi)}$, $j \in J$ должны удовлетворять системе функциональных уравнений: $\omega_j^{(\Pi)} \dot{\psi}_j^{(\Pi)}(t) + \psi_j^{(\Pi)}(t) = 0$, $j \in J$, устойчивые решения которых доставляют безусловный минимум функционалу $\Phi_2 = \int_0^\infty \sum_{j \in J} \left[\left(\psi_j^{(\Pi)} \right)^2 + \left(\omega_j^{(\Pi)} \right)^2 \left(\dot{\psi}_j^{(\Pi)} \right)^2 \right] dt$; решение этих уравнений с учетом уравнений декомпозированной системы (6) и требований (7) дает выражения для функций ϕ_l , $l = \overline{1, k}$, внутренних управлений. Синтез системы управления закончен.

Замечание. Если все целевые переменные являются управляемыми переменными, то процедура синтеза существенно проще и минует этап нахождения функций ϕ_l , $l = \overline{1, k}$.

Примеры конструирования систем управления на многообразиях. Рассмотрим два объекта с нелинейным и неполным описанием (плохо формализуемых объекта), для получения управления которыми применим вышеуказанный алгоритм.

Пример 1. Управление моделью Ферхюльста – задача непростая в силу ее неустойчивости и хаотичности при определенных значениях параметров. В докладе рассмотрена возможность построения аналитической системы управления по состоянию в указанной модели, причем управление должно осуществляться по параметру (оказывающему влияние на характер хаотичности модели), что весьма актуально в экономических моделях, где уравнение Ферхюльста используется (см., например, стр. 447 в [4]). Сформулируем задачу управления по параметру в модели Ферхюльста, полагая $\lambda = \lambda(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \lambda(t)x(t)(1 - \alpha x(t)), \\ \dot{\lambda}(t) &= f_{\lambda}(x, \lambda) + u,\end{aligned}\tag{8}$$

Такое описание соответствует постановке задачи (1), так как функция $f_{\lambda}(x, \lambda)$ – неизвестна. Сформулируем цель управления объектом (10) или, целевое многообразие, например, в виде: а) $\psi^* = x(t) - x^*$, где x^* – заданное значение; б) $\psi^* = x(t) - x^*(t)$, где $x^*(t)$ – заданная функция.

Согласно представленному алгоритму система управления для случая а) будет иметь вид (рис. 1):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \lambda(t)h(x, \alpha), \\ \dot{\lambda}(t) &= -\omega_1^{-1}\psi^{(1)} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\lambda h + v(t), \\ \dot{v}(t) &= -\psi^{(1)}, \quad \psi^{(1)} = \lambda(t) - \varphi(x(t)), \\ \varphi &= -h^{-1}\omega_2^{-1}\psi^*, \quad \psi^* = x(t) - x^*, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\omega_2^{-1}(h^{-1} - h^{-2}\psi^*(1 - 2\alpha x)).\end{aligned}$$

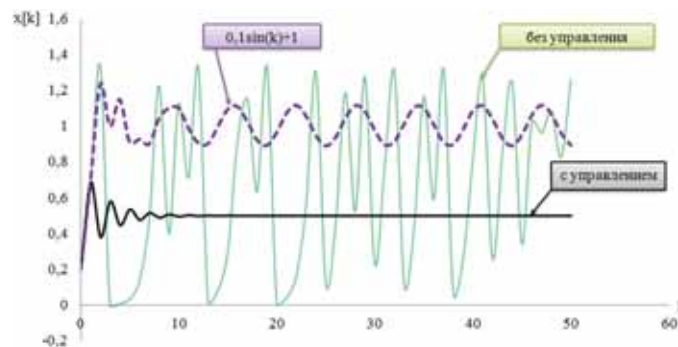


Рис.1. Поведение управляемой модели Ферхюльста

Пример 2. Синтез системы управления для объекта «самолет-амфибия» и сравнение особенностей систем управления, построенных по классическому алгоритму АКАР [6] и вышеизложенному алгоритму (назовем его для отличия АКАР+). Задача синтеза системы управления продольным движением [6] объекта с описанием (9) а):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -g \sin x_5 + a_1 u_1 + z_1, \\
\dot{x}_2(t) &= -g \cos x_5 + a_2 u_2 + z_2, \\
\dot{x}_3(t) &= a_3 u_3 + z_3, \\
\dot{x}_4(t) &= x_1 \sin x_5 + x_2 \cos x_5, \\
\dot{x}_5(t) &= x_3, \\
\dot{x}_6(t) &= x_1 \cos x_5 - x_2 \sin x_5,
\end{aligned}$$

а)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1 + a_1 u_1, \\
\dot{x}_2(t) &= f_2 + a_2 u_2, \\
\dot{x}_3(t) &= f_3 + a_3 u_3, \\
\dot{x}_4(t) &= x_1 \sin x_5 + x_2 \cos x_5, \\
\dot{x}_5(t) &= x_3, \\
\dot{x}_6(t) &= x_1 \cos x_5 - x_2 \sin x_5,
\end{aligned}$$

б)

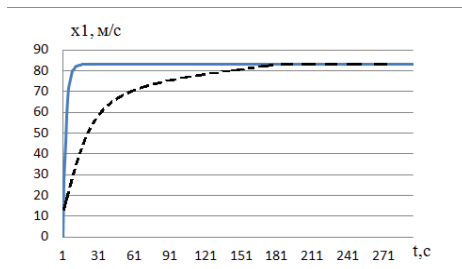
где z_1, z_2, z_3 – неизвестные возмущения, состояла в определении векторного управления $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, который обеспечивал бы выход объекта на движение со скоростью $x_{10} = V_0$, высотой $x_{40} = H_0$, углом тангажа $x_{50} = \vartheta_0$. Эти требования реализуются естественными технологическими инвариантами $\psi_i^* = x_i - x_{i0}$, $i = 1, 3$.

В рамках задачи управления объектом (1) поставим задачу управления выводом объекта с описанием (9) б) на целевое многообразие и стабилизации его в окрестности заданного многообразия, а именно: требуется найти закон векторного управления, обеспечивающий достижение цели управления $\psi(\mathbf{x}) = 0$ и компенсирующий неопределенность f_1, f_2, f_3 в описании по управляемым координатам x_1, x_2, x_3 .

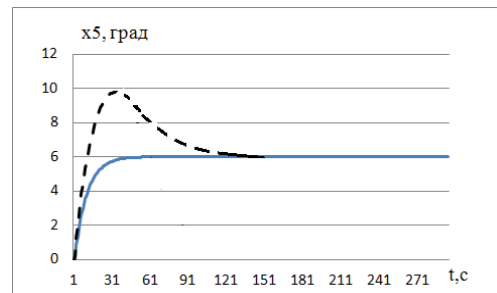
Согласно шагам алгоритма АКАР+ система управления будет иметь вид (здесь неопределенности $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3$ тоже неизвестны, но переменная управления от них не зависит):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \tilde{f}_1 - (a_1 \omega_1)^{-1} \psi_1^{(1)} + a_1 v_1, \\
\dot{x}_2 &= \tilde{f}_2 - \omega_2^{-1} \psi_2^{(1)} + \dot{\varphi}_1 + a_2 v_2, \\
\dot{x}_3 &= \tilde{f}_3 - \omega_3^{-1} \psi_3^{(1)} + \dot{\varphi}_2 + a_2 v_2, \\
\dot{x}_4(t) &= x_1 \sin x_5 + x_2 \cos x_5, \\
\dot{x}_5(t) &= x_3, \\
\dot{x}_6(t) &= x_1 \cos x_5 - x_2 \sin x_5, \\
\dot{v}_l &= -a_l \psi_l^{(1)}, \quad l = 1, 2, 3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1^{(1)} &= x_1 - x_{10}, \\
\psi_2^{(1)} &= x_2 - \varphi_1(x_4, x_5), \quad \varphi_1 = -\frac{\omega_4 \psi_1^* \sin x_5 + \psi_2^*}{\omega_4 \cos x_5}, \\
\psi_3^{(1)} &= x_3 - \varphi_2(x_4, x_5), \quad \varphi_2 = -(\omega_5^{(2)})^{-1} \psi_3^*.
\end{aligned}$$



а) траектория x_1



б) траектория x_5

Рис.2. Переходные процессы для двух целевых значений стабилизируемых переменных:

$x_{10} = V_0 = 83 \text{ м/с}$, $x_{40} = H_0 = 2500 \text{ км}$, $x_{50} = \vartheta_0 = 6 \text{ град}$ при управлении по алгоритму АКАР+ (сплошная линия) в предположении, что f_1, f_2, f_3 – неизвестны; при управлении по алгоритму АКАР (пунктир) в предположении, что f_1, f_2, f_3 – известны

Заключение. В докладе изложен алгоритм построения системы управления для объекта с неполной информацией для решения задачи стабилизации плохо формализуемого объекта, основой для которого являются методы управления в

скользящем режиме, аналитического конструирования агрегированных регуляторов и бэкстеппинг. Результаты работы могут быть актуальны в системах управления плохо формализуемыми динамическими объектами в различных предметных областях [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-01015 А).

Литература

1. Халил Х.К. Нелинейные системы: монография. - М.: Институт компьютерных исследований; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 812 с.
2. P.V. Kokotovic and M. Arcak. Activation of Nonlinear Feedback Concepts, in System Theory: Modeling, Analysis, and Control—A Tribute to Sanjoy K. Mitter, T. E. Djaferis and I. C. Schick, Eds., The Springer International Series in Engineering and Computer Science, New York, NY: Springer-Verlag New York, LLC, 1999, pp. 379-389.
3. Терехов В.А., Тюкин И.Ю. Адаптация в нелинейных динамических системах. – М.: ЛКИ, 2008.
4. Колесников А.А. Синергетика и проблемы теории управления: сборник научных трудов / Под ред. А.А. Колесникова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 504 с.
5. A. Isidori. Robust Feedback Design for Nonlinear Systems: a Survey // Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences. 2010. Vol.18. P. 693-714.
6. Колесников А.А., Кобзев В.А. Динамика полета и управление: синергетический подход. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009.
7. Колесникова С.И. Использование апостериорной информации для управления плохо формализуемым динамическим объектом // Автометрия. 2010. Т.46. № 6. С. 78-89.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ

Крупенин В.Л.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

krupeninster@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена методика, позволяющая прогнозировать характер вибрационных и виброударных режимов в механических конструкциях с большим числом степеней свободы при отказе от моделей в виде дифференциальных уравнений. Методы анализа могут основываться не только на построении решений дифференциальных уравнений движения, но и на использовании экспериментально получаемых характеристиках механических систем (динамические податливости, жесткости и др.). В ряде случаев бывает удобнее сразу оперировать с этими характеристиками, не обращаясь к дифференциальным уравнениям. Такой подход оказывается актуальным, когда цель анализа — исследование конкретных конструкций, а не их моделей. Ниже приводятся примеры построения указанных характеристик в результате типовых экспериментов. Проводится построения вибрационных полей конструкций, как в линейном, так и в виброударном случаях, когда для анализа выбираются частотно-временные методы.

1. В работах [1-5] и многих других отмечалось, что методы анализа динамики вибрационных и, в частности, виброударных процессов, могут основываться не только на анализе дифференциальных уравнениях движения, но и на использовании экспериментально получаемых характеристиках процессов.

Таких, например, как динамические податливости и жесткости, функции Грина, периодические функции Грина и др. Эти характеристики непременно могут быть построены в случаях, когда заданы уравнения движения систем. В этом случае знание одной из таких характеристик обеспечивает знание и всех остальных. Но в ряде случаев бывает удобнее сразу оперировать с этими характеристиками, не обращаясь к дифференциальным уравнениям. Такой подход оказывается актуальным, когда цель анализа — исследование конструкций, а не их моделей. Здесь естественно нельзя не сделать оговорку, что необходима уверенность, что объект исследования - линейен. Линейность объекта может быть проверена теми же экспериментальными методами, например, посредством проверки выполнения принципа взаимности. Ниже приводятся примеры построения упомянутых характеристик в результате типовых экспериментов.

Необходимые определения даны в работах [1, 2, 4, 5]. Обычно характеристики систем строятся как результат отклика конструкций на определенного вида эталонные воздействия.

Основной характеристикой оказывается динамическая податливость — вообще говоря, комплекснозначная функция чисто мнимого аргумента $i\omega$. Обозначение: $L(i\omega)$. Функция L (особенно при экспериментальном определении) задается своим модулем и аргументом:

$$L(i\omega) = |L(i\omega)| \arg[-i \arg L(i\omega)].$$

Рассмотрим схемы определения динамических податливостей при двух различных эталонных воздействующих факторах.

2. Пусть тестовый сигнал — синусоидальный с медленно меняющейся частотой. Подробное описание возможных возбуждения и измерения приведено в [6, 7]. Для возбуждения силового (моментного) синусоидального воздействия в широкой полосе

частот наиболее приемлемым является электродинамический вибратор, который возбуждается при помощи управляющего генератора через усилитель мощности. Измерение силы возбуждения производится при помощи датчика силы пьезокерамического типа [8], помещаемого между толкателем вибратора и исследуемой конструкцией.

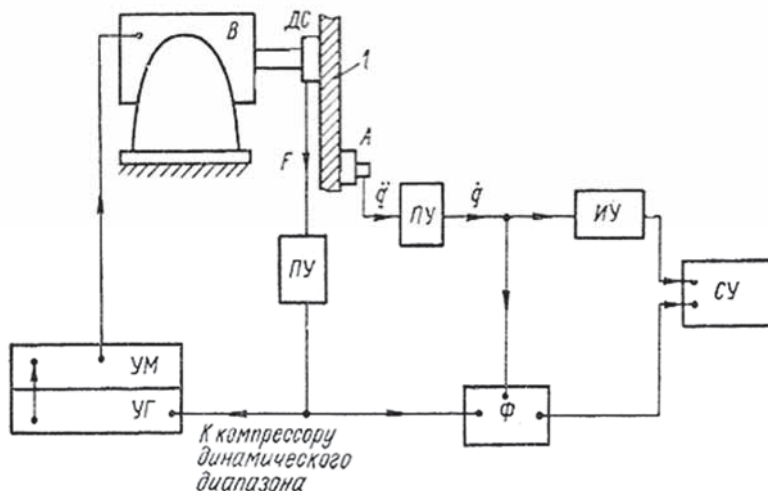


Рис.1

В интересующей нас точке конструкции устанавливается пьезоакселерометр, электрический сигнал, которого после предварительного усиления и интегрирования поступает на измерительный усилитель и фазометр. Электрический сигнал датчика после предварительного усиления также поступает на фазометр и далее — на вход блока компрессора динамического диапазона управляющего генератора. Тем самым обеспечивается постоянство силы возбуждения при автоматической развертке частоты. Электрические сигналы от измерительного усилителя и фазометра подаются на входы двухканального самописца уровня, изображающего в определенном масштабе зависимость модуля и аргумента динамической податливости от частоты. Ставшая классической блок- схема измерителя динамической податливости фирмы «Брюль и Кьер» изображена на рис.1, на котором обозначено: УГ— управляющий генератор; УМ— усилитель мощности; В — электродинамический вибратор с вибростолом; ДС — датчик силы; А - акселерометр; ПУ — предварительный усилитель; ИУ— измерительный усилитель; Ф -фазометр; СУ — самописец уровня; I — исследуемая конструкция; $\dot{q}, \ddot{q}$ — сигналы скорости и ускорения; F — сигнал динамической силы.

К основным недостаткам способа относятся искажение частотных характеристик исследуемой конструкции вследствие присоединения колебательной системы вибратора и большое время проведения эксперимента (десятки минут).

3. Обратимся теперь к силовому ударному воздействию, которое часто принимается в качестве эталонного. Известно [1, 2], что мгновенное ударное воздействие с единичным импульсом и действующее, например, при $t=0$ описывается при помощи обобщенной δ -функции Дирака [1-4].

Это согласуется с экспериментами [4]. Установлено, в частности, что при соударении твердых тел спектр ударной силы (рис. 2) достаточно широк и равномерная его аппроксимация приводит к удовлетворительным результатам, которые тем точнее, чем ярче выражены фильтрующие свойства соударяющихся колебательных систем. На рис. 2 видна зона равномерного спектра 0—2 кГц при времени соударения — $t_0=2 \cdot 10^{-4}$ с. На основании вышесказанного в качестве эталонного весьма целесообразно выбирать

ударное воздействие, что позволяет получать удобные математические описания характеристик линейных систем.

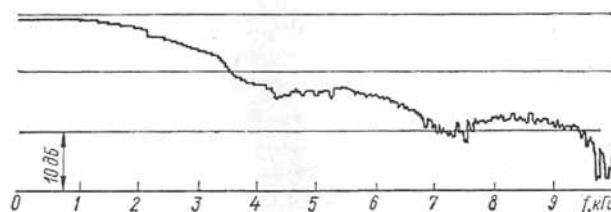


Рис. 2

Реакция колебательной системы на однократное силовое воздействие, представляемое в виде δ -функции Дирака, обозначается $h(t)$ и носит название функции Грина. Между функцией Грина и динамической податливостью существует зависимость определяемая свойствами Фурье-анализа динамических процессов [1-3]:

$$L(i\omega) = \int_0^{\infty} h(t) \exp(-i\omega t) dt,$$

Ввиду диссипации энергии $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ поэтому на практике бесконечный предел в интеграле можно заменить конечным

$$L(i\omega) \approx \int_0^{\tau_s} h(t) \exp(-i\omega t) dt,$$

Таким образом, если записать отклик механической системы на одиночный удар, а затем произвести его Фурье-преобразование, то мы могли бы получить интересующую нас динамическую податливость. На основе этого принципа и работает система (рис. 3), состоящая из динамометрического молотка ДМ и двухканального спектроанализатора СА, являющегося, по существу, специализированным компьютером.

В динамометрический молоток встроен пьезокерамический датчик силы, которым и производится удар. Меняя насадки, можно добиться необходимых формы и спектра ударного импульса. Сигналы датчика силы и акселерометра, установленного на исследуемом объекте, через предварительные усилители подаются на каналы анализатора.

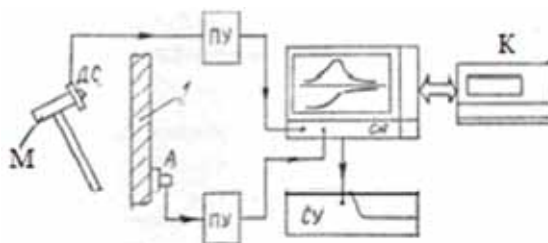


Рис.3

В анализаторе, происходит их временная дискретизация и обработка подаваемых на его каналы сигналы по стандартным программам. Обработка занимает доли секунды. Информация отображается на дисплее, может быть передана в память компьютера или на самописец уровня СУ.

Преимущество метода в том, что конструкция исследуется в «чистом виде» (без присоединения «чужеродных» колебательных систем); имеется возможность получения экспресс - информации.

Таким образом, показано, как минуя переход к аналитическим моделям конструкций можно построить их динамические податливости.

Подчеркнем, что эти динамические податливости могут быть двух разных родов [1, 4] – локальные (1) и проходные (2). То есть реакции систем в выделенных точках на силы, приложенные в тех же точках (1) или на силы, приложенные в удаленных точках тех же конструкций (2).

4. Обратимся теперь к виброударным системам. Показано [1-5], что для анализа периодических режимов движения в таких системах особую роль играют так называемые периодические функции Грина – реакции систем на периодические последовательности δ -функций Дирака (обозначение: $\delta^T(t)$; T – некоторый период). Периодическая последовательность $\delta^T(t)$ определяется так:

$$\delta^T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = 1/T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ik\omega t) \quad (1)$$

При этом последний ряд Фурье сходится в обобщенном смысле [1, 2]. Периодические функции Грина (ПФГ) обозначаются как $\chi(t)$ и могут быть определены как:

$$\chi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT) = 1/T \sum_{k=-\infty}^{\infty} L(ik\omega) \exp(ik\omega t).$$

Таким образом, ПФГ линейных систем определяются их динамическими податливостями или функциями Грина.

Для примера на рис. 4 приведен спектр модуля динамической податливости судового рамного фундамента (I) и спектр его реакции (II) на силовое возбуждение (1) в полосе частот 0-200 Гц. Частота следования ударов 20 Гц.

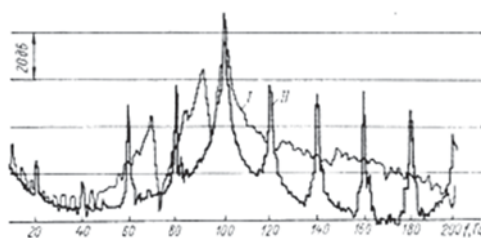


Рис.4

Таким образом, возникает простая идея: попытаться «сконструировать» искомый периодический или почти периодический виброударный режим [9] из ПФГ – реакций соударяющихся линейных систем на периодические последовательности ударов.

Методы анализа виброударных систем, в которых важную роль играют ПФГ и переменные «импульс-фаза», получили название «методы частотно-временного» анализа [3]. Не предполагая здесь останавливаться на теории, сконцентрируемся на экспериментальных вопросах, связанных с частотно-временным анализом. При этом будем интересоваться, в основном, весьма важными резонансными виброударными процессами [1-3].

В качестве примера исследуем типовую виброударную систему — балочку с сосредоточенным на свободном конце массивным телом, снабженную жестким односторонним ограничителем хода. Такая система весьма распространена в технике и моделирует, например, контакты релейных устройств, исполнительные устройства

клапанов, модули генератора широкополосной вибрации для вибрационных испытаний и т. д. Для проведения эксперимента А. М. Веприком был сконструирован стенд, схема которого приведена на рис. 5.

Здесь использованы устройства: *УМ*— усилитель мощности (СУВ-1); *В* — электродинамический вибратор (ВЭДС-10); *ДС* — датчик силы (ДК-1); *ЭВМ* — компьютер;

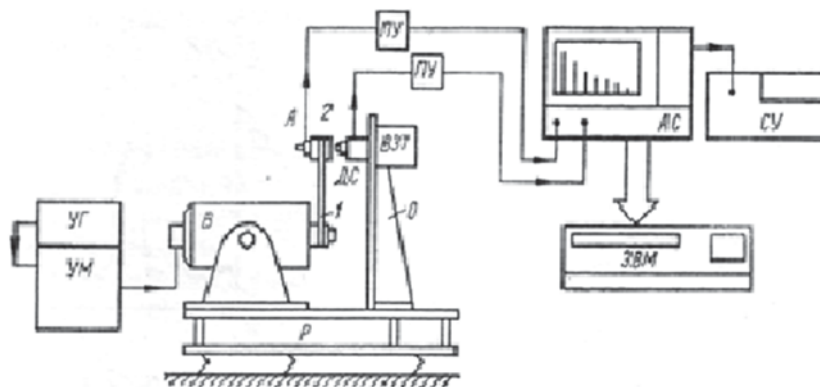


Рис.5

УГ —управляющий генератор; А — акселерометр; ПУ — предусилитель; АС — узкополосный цифровой анализатор; СУ — самописец уровня. На рисунке также показаны: Р — несущая рама; О — опора; ВЗТ — виброзадерживающее тело; 1 — балочка; 2— массивное тело.

Синусоидальный сигнал управляющего генератора проходит через усилитель мощности и подается на обмотку возбуждения вибратора, жестко установленного на несущей раме. На штоке вибратора закреплена балочка (200×50×1 мм), выполненная из пружинной стали 65Г. На массивном теле (массой 130 г), присоединенном к балочке, крепится акселерометр, а на несущей раме, кроме того, смонтирована опора с датчиком силы, свободная шпилька которого является ограничителем перемещений. Для уменьшения динамической податливости опоры, в районе установки датчика силы крепится виброзадерживающее тело массой 1 кг. В целях уменьшения ударного демпфирования соударяющиеся поверхности изготовлены из стали Ст.45 и термобработаны до 56—61 HRC₃. Кроме того, для реализации точечного контакта поверхности ударной пары имеют форму плоскость — полусфера. Электрические сигналы датчика силы и акселерометра после предусилителей поступают для обработки в узкополосный цифровой анализатор спектра. Анализатор работает как в частотной, так и во временной областях; к нему подключены самописец уровня и компьютер.

Описанный стенд позволяет с одного установка определять как динамические податливости, так и импульсы ударных сил, что очень важно для повышения точности и повторяемости экспериментальных данных.

Спектр модуля локальной динамической податливости в точке контакта исследуемой колебательной системы в диапазоне частот 18—400 Гц изображен на рис. 6.

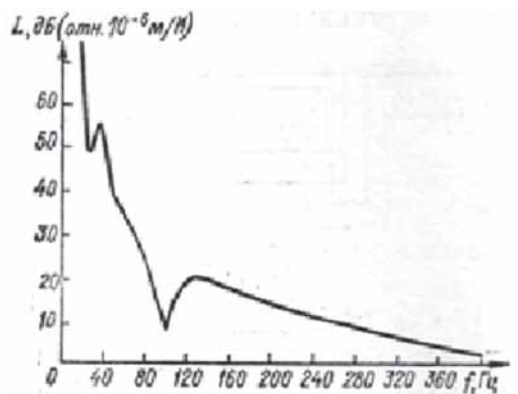


Рис.6.

В соответствии с вышеизложенным, величину ударного импульса (J) при малой диссипации можно определить по следующей формуле:

$$J = -\Delta/\chi(0) \approx -\Delta\{2T^{-1} \sum_k \operatorname{Re}[L(ik\omega)]\}^{-1}, \quad (2)$$

где суммирование ведется с учетом знака величины $\operatorname{Re}[L(ik\omega)]$. Выражение (2) является приближенным и справедливо для систем, у которых мнимая часть динамической податливости мала по сравнению с действительной. Так как коэффициенты ряда в формуле (2) убывают достаточно быстро, то при суммировании целесообразно ограничиться сравнительно небольшим их числом. Так, начиная с 20 члена, относительный вклад каждого последующего в общую сумму не превосходит 0,1 %. Именно таким числом членов мы и пользовались при вычислениях. Для проверки найденного по формуле (2) ударного импульса (при различных значениях зазора) применяется непосредственный способ — измерение, основанный на численном интегрировании измеренной при помощи датчика силы силовой функции (рис. 7) по формуле прямоугольников

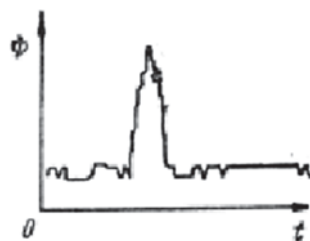


Рис.7

$$J = C_g \Delta\tau \sum_{j=1}^N \Phi_j,$$

где C_g — масштаб шкалы силы, Н/дел; $\Delta\tau$ — величина интервала дискретизации, $\Delta\tau = 2 \cdot 10^{-5}$ с; Φ_j — дискретные средние значения силовой функции в j -м интервале дискретизации, дел.; n — количество интервалов дискретизации.

Как следует из общей теории виброударных систем [1, 2], резонансные виброударные режимы существуют в полосах частот $\Omega_j - \Omega_{*j}$; Ω_j — собственная частота линейной системы (в нашем случае $\Omega_j = 17,6$ Гц); Ω_{*j} — частота срыва резонансных колебаний, определяемая как величинами демпфирования и внешней силы, так и собственными динамическими свойствами системы. В рассматриваемой колебательной системе устойчивые резонансные режимы наблюдались в полосе частот 18—28 Гц. Этот

диапазон исследован с шагом 2 Гц для трех значений зазора: $\Delta_1 = 2,0 \times 10^{-4}$ м, $\Delta_2 = 3,7 \times 10^{-4}$ м, $\Delta_3 = 5,8 \times 10^{-4}$ м при минимальном напряжении на обмотке возбуждения вибратора, достаточного для поддержания резонансного виброударного режима. Жесткое возбуждение резонансного виброударного режима осуществлялось внешним запускающим импульсом.

На рис. 8 приведены зависимости величин ударных импульсов от частоты, полученные вычислением (кривая I) и измерением (кривая II) для трех значений зазора (а — Δ_1 , б — Δ_2 , в — Δ_3), показывающие их удовлетворительное совпадение.

Следует отметить, что даже при проведении вибрационных измерений с помощью современной прецизионной аппаратуры, точность оказывается в пределах ± 1 дБ. Учитывая особенности приведенных расчетных формул, можно определенно констатировать, что без привлечения каких-либо специальных методик решение проблемы достижения большей точности измерения ударных импульсов — проблематично.

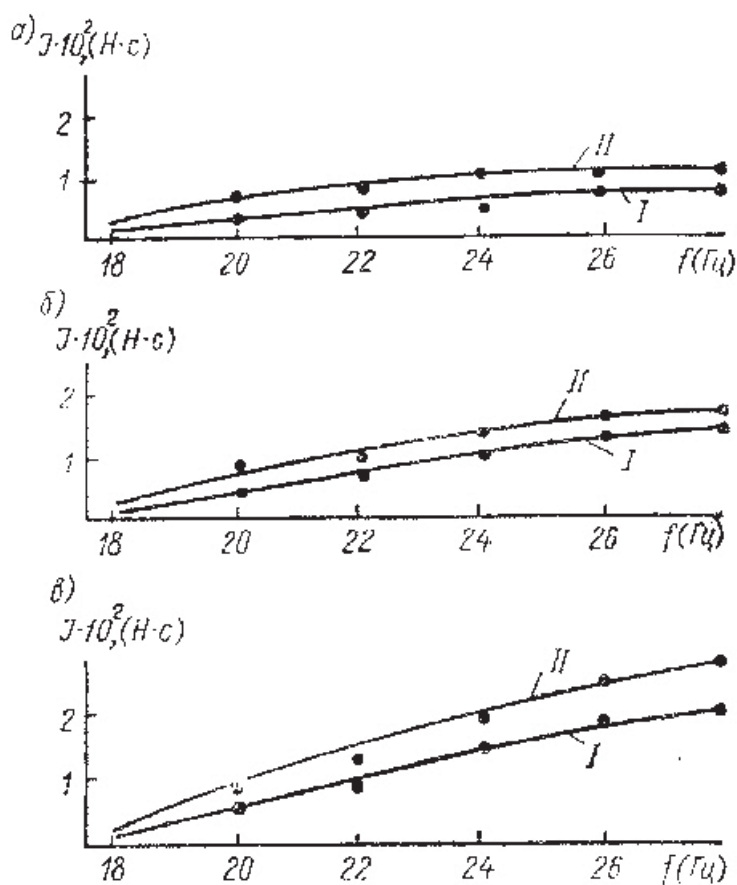


Рис. 8

Вышеизложенное демонстрирует возможность предсказания с достаточной для инженерной практики точностью величин ударных импульсов в ударных парах на основе экспериментально полученной информации о динамических свойствах соударяющихся объектов. Значение величин ударных импульсов позволяет прогнозировать ресурс механизма в целом. Кроме того появляется возможность строить поля его виброперемещений, что важно для выбора мест размещения опорных и неопорных связей.

Экспериментально полученные законы движения описанной виброударной системы и их спектральные представления приведены на рис. 9 и 10. На рис. 9

изображены характерные зависимости скорости ($\dot{q}$) и перемещения (q), а на рис. 10 — спектры ускорения сосредоточенного тела (а), ударной силы (б) в резонансном виброударном режиме частотой 20 Гц.

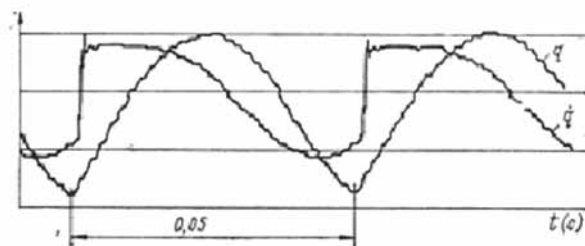


Рис.9

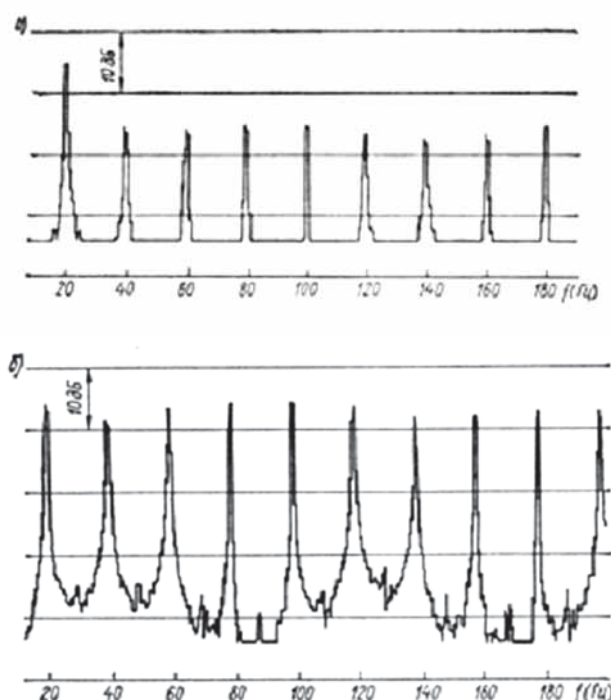


Рис.10

Эти зависимости иллюстрируют сказанное о возможностях методов частотно-временного анализа, а также показывают, что теперь появилась возможность дать решения сильно нелинейных задач, не обязательно обращаясь к традиционным моделям систем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-08-01235-а).

Автор выражает благодарность А.М. Веприку.

Литература

1. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М., Наука, 1985. – 384 с.
2. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. 404 p.p.

3. Крупенин В.Л. О представлении периодических виброударных процессов через параметры движения «импульс - фаза» // Проблемы машиностроения и надежности машин, № 1, 2010 г. С. 10-19.
4. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний//Крупенин В.Л., Веприк А.М. и др.- Л.: Машиностроение, 1987. 76 с.
5. Крупенин В.Л. О прогнозировании структур вибрационных полей в конструкциях, содержащих ударные пары // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. №3. С. 78-83.
6. Вибрации в технике. Справочник/Под ред. М.Д. Генкина, т.5. М.: Машиностроение. 1981. 496 с.
7. Приборы и системы для измерения вибрации, шума и удара. Справочник / Под ред. Ключева В.В., т.2. М.: Машиностроение. 1978. 439 с.
8. Крупенин В. Л., Веприк А. М. Датчики в машиностроении // М.: Знание. 1989. 64 с.
9. Бурд В.Ш. Вынужденные почти периодические колебания ударного осциллятора // Вестник научно-технического развития. Интернет-журнал (www.vntr.ru). №4(56). 2012. С.3-13.

АВТОКОЛЕБАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО УДАРНОГО ЭЛЕМЕНТА

Крупенин В.Л.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

krupeninster@gmail.com

Аннотация. Рассмотрены автоколебательные сильно виброударные процессы в системе с распределенным ударным элементом – струной, вибрирующей между двумя симметричными стенками. Сила возбуждения зависит от скорости струны и в системе в каждый момент времени осуществляется компенсация сил диссипации. Находятся точные представления для стоячих волн, которыми оказываются изученные ранее трапециевидные формы - «хлопки». Устойчивость решений анализируется числен. Указывается класс задач, который может быть исследован посредством развиваемой теории.

1. В этом и следующих двух п. п. обсуждаются результаты, полученные ранее и необходимые для дальнейших рассмотрений, целью которых является изучение автоколебательных виброударных процессов в системах, с распределенными ударными элементами. В данном случае, в системах с двусторонними ограничителями.

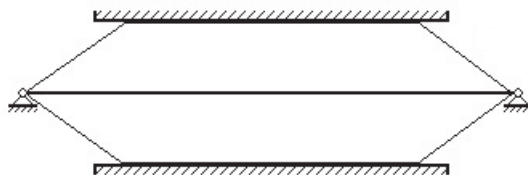


Рис.1.

В работах [1-12] и др. теоретически и экспериментально изучались виброударные системы с распределенными ударными элементами, а также их дискретные аналоги (рис. 1). Система рис. 1 определяет длинноволновое приближение системы рис. 2. На обоих рисунках показан трапециевидной профиль, возникающий при реализации периодических режимов движения (стоячих волн) типа "хлопков", возможность существования хлопков была установлена ранее. При их реализации относительно удаленные части ударных элементов - сосредоточенных или распределенных – могут синхронно соударяться с соответствующими частями различного рода ограничителей.

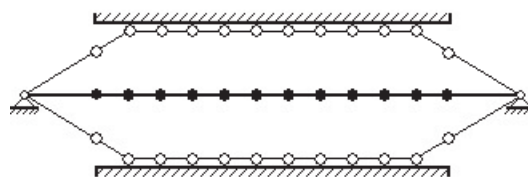


Рис.2

Рассмотрим малые поперечные колебания струны, расположенной между двумя абсолютно жесткими ограничителями хода, установленными параллельно оси ее статического равновесия (рис. 1). В консервативной модели трапециевидный профиль стоячей волны реализуется при начальных условиях специального вида (см. ниже).

На рис. 3 показан профиль экспериментально полученной стоячей волны-хлопка в режиме вынужденных колебаний. На врезе дана фотография зависимости угла поворота жгута в заделке от времени. Видимые скачки свидетельствуют о быстром изменении знака этого угла после прохождения жгутом положения равновесия. Такая ситуация как раз и характерна для трапециевидных профилей. Экспериментально, в режиме вынужденных

колебаний трапецевидные профили полученных стоячих волн-хлопков, по-видимому, впервые было получены на стенде А.М. Веприка. Их описание дано, в частности, в работе [11].



Рис.3.

Формализуем постановку задачи. Пусть система - консервативна, когда препятствия неподвижны и возбуждение от внешних источников отсутствуют.

Обозначив $u(x,t)$ искомый прогиб, описанные выше ограничения запишем как:

$$|u(x,t)| \leq \Delta < l; \quad x \in [-l/2, l/2], \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Между касаниями струны с ограничителями, когда первое неравенство (1) – строгое, уравнение движения записывается в виде линейного волнового уравнения: $\square u \equiv u_{tt} - u_{xx} = 0$.

Примем, далее, следующие граничные и начальные условия:

$$u(\pm l/2, t) = 0; \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = v_0(x). \quad (2)$$

При этом предполагается, что гладкость функции $v_0(x)$ (начальной скорости) такова, что, обеспечено существование и единственность непрерывного решения задачи Коши для линейного волнового уравнения $\square u = 0$ и дополнительных условий (2).

Если в первом неравенстве (1) реализуется знак равенства, то происходит взаимодействие струны и ограничителя, который должен действовать на струну «от себя». Поэтому, если $u \geq 0$ или $u \leq 0$, то соответственно

$$\square u \leq 0; \quad \square u \geq 0 \quad (3)$$

Опираясь на решения, имеющими разрывы производной, потребуем, чтобы носитель сингулярной обобщенной функции [4] выражающей силу ударного взаимодействия

$$\text{supp } \square u \subset \{(x, t); |u(x, t)| = \Delta\}. \quad (4)$$

Считая, что при взаимодействии энергия не теряется, постулируем здесь выполнение, имеющего место в соответствующей линейной системе, соотношения, выражающего закон сохранения энергии, то есть именно постулируем, что и в данном нелинейном случае в смысле обобщенных функций [4]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (|u_x|^2 + |u_t|^2) = \frac{\partial}{\partial x} (2u u_x) \quad (5)$$

Отсюда легко выводится:

$$u_t(x, t-0) = -u_t(x, t+0), \quad (x, t) \in \text{supp } \square u, \quad |u(x, t)| = \Delta. \quad (6)$$

То есть постулирование (5) приводит к континуальному аналогу гипотезы Ньютона для абсолютно упругого удара, который в данном случае и рассматривается. Вопрос о введении каких-либо гипотез рассеяния энергии при взаимодействиях такого рода представляет собой самостоятельную и нетривиальную проблему.

Условия типа (3) – (6) в случае одностороннего ограничителя рассматривались ранее в работах [3-5]. Используя один из результатов работы [4], можно показать, что неравенства (5) эквивалентны условию дозвукового распространению взаимодействий: если $|u[x, t(x)]| = \Delta$, то $|t'(x)| \leq 1$. (В принятых единицах измерения скорость звука равна единице).

Условия ударного взаимодействия (3) - (5) определяют обобщенную функцию, описывающую ударное взаимодействие и обозначаемую ниже как $\Phi(u)$. При помощи этой функции уравнение можно записать как нелинейное уравнение Клейна – Гордона [2, 5-7]

$$\square u + \Phi(u) = 0. \quad (7)$$

Для принятой гипотезы во время контакта и какого-либо из ограничителей:

$$|\Phi\{u[x, t(x)]\}| = J\delta[t-t(x)], |u[x, t(x)]| = \Delta, \quad (8)$$

где плотность ударного импульса [6 - 8]

$$J = 2|u_t[x, t(x) - 0]|.$$

В дальнейшем, изучению будут подлежать системы, в которых колебания струны возбуждаются сторонними источниками. Тогда вместо (7) модель будет представлять собой нелинейное уравнение Клейна-Гордона с правой частью:

$$\square u + \Phi(u) = h(t, u, u_t, \dots),$$

где вид функции $h(\dots)$ обсуждается ниже.

В частности, для автоколебаний струн, например, находящихся в набегающих потоках газа или жидкости часто принимается [13 - 15] $h = h(u_t)$, где $h(y)$ – полином нечетной степени с вещественными коэффициентами.

2. В работе [6], имея в виду изучить стоячие волны в определенном смысле соответствующие собственным формам линейной струны, выбирались начальные условия вида

$$v_0(x) = 2 \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} N [\eta(x-x_j) - \eta(x-x_{j+1})]. \quad (9)$$

Здесь $\eta(x)$ - функция Хевисайда; отрезок $[-1/2, 1/2]$ разбит на N равных частей $\square l = N^{-1} \square$; принято $x_j = x_1 + (j-1)N^{-1}$, $j=1, \dots, N$; $x_1 = -1/2$.

Выбранные начальные условия действительно в определенном смысле отвечает тем, что дают синусоидальные формы колебаний линейной струны и порождают семейство стоячих волн, имеющих «пилообразные» профили [16] (рис. 4 – штриховые линии). Периоды колебаний, естественно, совпадают с периодами колебаний линейных форм $T_{0N} = 2N^{-1}$.

При установке вблизи струны двусторонних ограничителей, условиям (2) и (9) отвечает семейство T_N – периодических (T – периодических) стоячих трапецевидных волн $u(x, t) = A_N(x, t)$ $T_N = 2\Delta N^{-1}$ [6] (рис.4).

С соответствующих сторон к ограничителям со скоростями $v = \pm 2N$ подходят прямолинейные отрезки струны $[l_j^-, l_j^+] \subset [x_j, x_{j+1}]$, причем, используя элементарные построения, найдем:

$$l_j^- = -1/2 [2(j-1) - N + \Delta] N^{-1}; \quad l_j^+ = 1/2 [2j - N - \Delta] N^{-1}$$

Затем эти участки в соответствии с (6) мгновенно отскакивают от ограничителей и совершают движения в обратном направлении. То есть через время $1/2 T_N$ те же участки соударяются с противоположенными ограничителями и так далее.

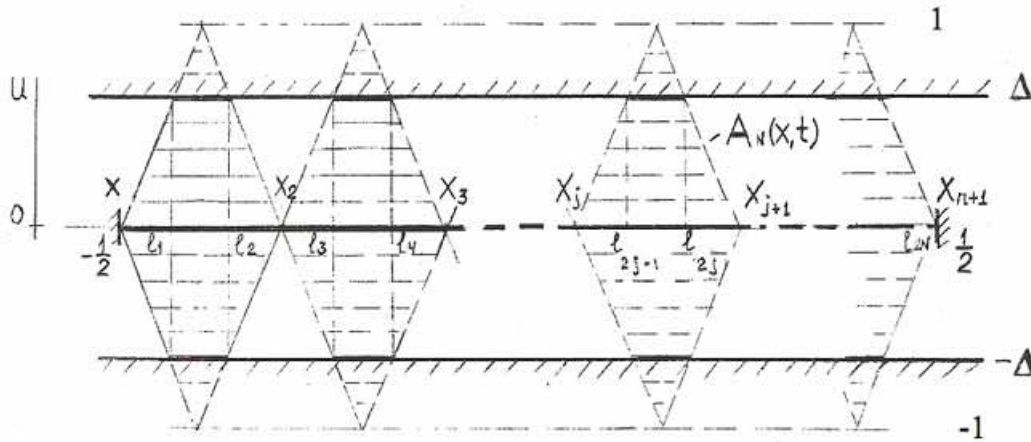


Рис.4.

Аналитические выражения для членов семейства высших форм хлопков $\{A_N\}$ можно получить при помощи методов частотно-временного анализа [2, 5, 8]. Так как найденные стоячие волны, очевидно, удовлетворяю условию $u(x,t) = -u(x, t + 1/2 T_N)$, то периодические волны семейства $\{A_N\}$, удовлетворяющие уравнению (7), должны удовлетворять интегральному уравнению вида [2, 5, 8]:

$$A_N(x,t) = - \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^{1/2 T} \chi(x,y;t-s) \Phi[A_N(y,s)] ds dy \quad (10)$$

Учитывая условие (9) и представление (8), для плотности силы Φ , запишем

$$\Phi[A_N(y,s)] = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} J_N \delta^{T/2}(t-t_0) [\eta(x-x_j) - \eta(x-x_{j+1})], \quad (11)$$

где плотность ударного импульса $J_N = 2N$; момент первого подхода струны к ограничителю $t_0 = 0,5 \Delta N^{-1}$; симметричная T -периодическая последовательность δ -функций дается, например, обобщенным рядом Фурье вида:

$$\delta^{T/2}(t) = 2T^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[(2k+1)i\omega t]; \quad \omega = 2\pi T^{-1};$$

соударения происходят при $t_{0q} = t_0 + 0,5 T q$ ($q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

В (10) также входит $\chi(x,y;t)$ – симметричная периодическая функция Грина (ПФГ) линейной задачи, представимая в виде ряда

$$\chi(x,y;t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(t) \sin[(\pi n(x+1/2))] \sin[(\pi n(y+1/2))].$$

Здесь обозначено $\chi_n(t)$ – симметричные ПФГ линейных осцилляторов с собственными частотами $\Omega_n = \pi n t^{-1}$. При $t \in [0, 1/2 T]$ указанные ПФГ даются конечными формулами [5, 7, 8]:

$$2\chi_n(t) = \sin \Omega_n(t - 1/4 T) [\Omega_n \cos 1/4 \Omega_n T]^{-1}, \quad (12)$$

причем это представление имеет место только в пределах указанного полуинтервала. Для получения полного представления необходимо продолжить функцию (12) для всех t , исходя из условий $\chi_n(t) = -\chi_n(t + 1/2T)$ [8].

Принимая во внимание сказанное, а также пользуясь вычислениями, проделанными ранее в [6], получим после ряда преобразований:

$$A_N(x, t) = \sum_{k=1}^N k^{-1} \Lambda_{kN} \sin[1/2 N^{-1} k \pi (1 - \Delta)] \sin[1/2 N^{-1} k \pi (x + 1/2)] \chi_k(t - t_0), \quad (13)$$

$$\Lambda_{kN} = 4\pi \sum_{j=1}^N (-1)^j \sin \frac{1}{2} (2j - 1) \pi k N^{-1}.$$

Отметим, что для получения конечного выражения $\chi_k(t - t_0)$ необходимо учесть, что представление (12) верно только при $(t - t_0) \in [0, 1/2T]$. Вне данного полуинтервала формула (12) нуждается в корректировке (см. [5, 7, 8]).

Стоячие волны $A_N(x, t)$ удовлетворяют сформулированным условиям удара (3) – (6) [6].

Стоячие волны $A_N(x, t)$ – жестко анизохронны. Чтобы в этом убедиться, введем параметр, однозначно связанный с полной энергией стоячей волны – полный импульс удара:

$$I_N = NJ_N \sum_{j=1}^N (l_j^+ - l_j^-) \geq 0.$$

При этом считаем, что величины J_N – не фиксированы, а зависят от частоты колебаний ω . Формула (13) останется в силе, но изменятся значения, определяющих её параметров. Так как значение J_N численно равно удвоенной скорости каждого из N ударяющихся участков струны, то, посредством простых вычислений, можно показать для всех j :

$$l_{Nj}^0 \equiv l_{Nj}^+ - l_{Nj}^- = N^{-1} - 4\Delta J_N^{-1},$$

и, следовательно,

$$J_N = 4\Delta \pi^{-1} \omega; l_{Nj}^0 = N^{-1} - \pi \omega^{-1}; I_N = 4\Delta \pi^{-1} (\omega - \pi N) \geq 0, \quad (14)$$

то есть импульс прямо пропорционален частоте движения и N -я трапецевидная форма волны может существовать лишь справа от N -й формы линейных колебаний: $\omega \geq \pi N$. В случае нефиксированной полной энергии будем обозначать: $A_N(J_N; x, t)$, причем $A_N(4N; x, t) \equiv A_N(x, t)$. Заметим также, что в этом случае предположение $\Delta < 1$, вообще говоря, несущественно.

3. Специфические начальные условия (9), вообще говоря, представляются весьма трудно реализуемыми на практике. Однако семейство решений $\{A_N\}$ играет в теории подобных систем совершенно особую роль. Рассмотрим начальные условия, приводящие в линейном случае к стоячим волнам с профилями, в определенном смысле подобным высшим синусоидальным формам линейной задачи.

Простейший пример: в условиях (2) примем $v_0(x) = N\pi \sin[N\pi(x + 1/2)]$; $N = 1, 2, \dots$. Более общие начальные условия данного типа, определяются следующим образом.

Снова разобьем отрезок $[-1/2, 1/2]$ на N отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ и положим теперь:

$$v_0(x) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} v_j(x) [\eta(x - x_j) - \eta(x - x_{j+1})]; \quad v_j(x) \geq 0; \quad \int_{x_j}^{x_{j+1}} v_j(x) dx = 2. \quad (15)$$

Подобные начальные условия порождают стоячие волны, аналитическое представление которых было дано в [6].

Было доказано, что периодичность трансформированных форм стоячих волн возможна лишь при соизмеримости периодов колебаний линейной струны $T_0 = 2$ и периодов форм $\{A_N\}$ $T_N = 2\Delta N^{-1}$, то есть при рациональных значениях зазора 2Δ . В общем случае формула начальные условия (14) приводят к почти - периодической стоячей волне [3, 6, 9, 10].

Таким образом, оказывается, что для данного достаточно общего класса начальных условий, семейство $\{A_N\}$ поставляет пример единственного периодического виброударного процесса, сохраняющего периодичность вне зависимости от значения зазора. Показывается, что этот факт остается в силе и при более общих, нежели (15), начальных условиях. Таким образом, в определенном смысле, именно семейство $\{A_N\}$ обладает в определенном смысле «структурной устойчивостью». Было показано, что этот факт остается в силе и при более общих, нежели (15), начальных условиях

4. Обратимся к автоколебаниям струны (абсолютно гибкого стержня). Будем рассматривать струну, колеблющуюся между двумя прямыми протяженными ограничителями (см. п.п. 1-3). Рассмотрению подлежат авторезонансные режимы [17]. Предположим, что перпендикулярно линии оси её статического положения имеет место набегающий стационарный поток жидкости или газа, приводящий к возбуждению стационарных автоколебаний [13-15]. Предполагая возбуждаемые волны плоско поляризованными и происходящими в плоскости (x, u) , обратимся к уравнению движения.

$$\square u + \Phi(u) = h(u_t), \quad (16)$$

где $h(y)$ – гладкая при всех $y \in \mathbf{R}$ нечетная полиномиальная функция нечетной степени. Обычно плотность силы h аппроксимируют кубической параболой вида:

$$h(u_t) = \alpha u_t - \beta u_t^3 + \dots (\alpha, \beta > 0). \quad (17)$$

Существуют эффективные экспериментальные методы, позволяющие измерить значения коэффициентов α и β в зависимости, от параметров набегающего потока [13-15]. В представление (17) могут быть добавлены и высшие члены; обычно, их влияние оказывается пренебрежимо малым.

При переходе к уравнениям движения типа (17), строго говоря, должны быть скорректированы условия (3) и (5), понимаемые в смысле обобщенных функций. Именно: если $u \geq 0$ или $u \leq 0$, то соответственно

$$\square u - h(u_t) \leq 0; \quad \square u - h(u_t) \geq 0.$$

Постулированное уравнение баланса мощностей (5) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (|u_x|^2 + |u_t|^2) - \frac{\partial}{\partial x} (2u u_x) = 2 h(u_t) u_t \quad (18)$$

Из дальнейшего будет видно, что возбуждающий фактор может записываться в более общем виде, например как $h_1(t, x, u, u_t)h(u_t)$, где непрерывная по совокупности переменных функция h_1 – описывает распределение возбуждения вдоль струны.

При изучении автоколебаний вначале предположим, что и струна, и протяженные преграды – неограниченны по длине. Будем искать решения уравнения (16) в виде периодических волновых пакетов $u(x, t) = U(kx - \omega t)$, где предполагается, что функция $U(\theta)$ имеет некоторый период τ . Подставив U в (16) и, учитывая (8) и (11), получим уравнение движения «традиционной» виброударной системы:

$$(k^2 - \omega_0^2)U''(\theta) + J_0 \delta^{\tau/2}(\theta - \theta_0) = h[\omega_0 U'(\theta)],$$

где $J_0 = 2(k^2 - \omega_0^2)|U'(\theta_0 - 0)|$ - импульс описывающей частицы в сопровождающей системе координат. Удары происходят поочередно через каждые полпериода с верхним и нижним ограничителями: $\Delta = U(\theta_0 + q\tau)$, $\Delta = U(\theta_0 + q\tau + \tau/2)$, причем, в виду автономности системы, без ограничения общности, можно положить $\theta_0 = 0$.

Последнее уравнение легко проинтегрировать, понизив его порядок. В данном случае для «кубического трения» (17) задача сводится к хорошо известной задаче. Стационарный авторезонансный процесс имеет вид: $U(\theta) = -J_0 \chi_0^*(\theta)$, где «пилообразная» функция $\chi_0^*(\theta) = (k^2 - \omega_0^2)^{-1}(0,5t - 0,25\tau)$, причем $t \in [0, 0,5\tau[$, вне этого полуинтервала предыдущее равенство распространяется по периодичности, исходя из условий симметрии для всех $t \in \mathbf{R}$. Стационарному значению «импульса» и зависимости «импульса» от «частоты движения» $\omega_1 = 2\pi/\tau$ отвечают соотношения:

$$J_0 = 2\sqrt{\alpha/\beta}; J_0 = 4\Delta\pi^{-1}\omega_1(k^2 - \omega_0^2), \quad (19)$$

причем второе равенство, представляющее из себя дисперсионное соотношение, с точностью до множителя («массы частицы» в сопровождающей системе координат), совпадает с выражением для плотности ударного импульса, отвечающего в исходной ограниченной системе семейству форм $\{A_N(J_N; x, t)\}$; см. (14).

5. Вернемся к исходной задаче об автоколебаниях струны, находящейся между двумя протяженными (но ограниченными по длине) ограничителями. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что семейство $\{A_N(J_N; x, t)\}$ удовлетворяет уравнению движения (16) так как при $J_N \equiv J_0 = 2\sqrt{\alpha/\beta}$ для стоячих волн $u(x, t) \equiv A_N(J_0; x, t)$ одновременно:

$$\square u + \Phi(u) \equiv 0, \quad h(u_t) = \alpha u_t - \beta u_t^3 \equiv 0. \quad (20)$$

Последнее тождество иллюстрирует рис. 5. Здесь сплошными линиями при помощи стрелок показан разрывный профиль $u_t(x, t) = A_N(J_*; x, t)$ при некотором значении $J_0 = J_*$; пунктиром показан профиль $[-u_t(x, t)]$. Ясно, что всегда можно так выбрать числа $\alpha, \beta > 0$, чтобы второе тождество (20) действительно имело место.

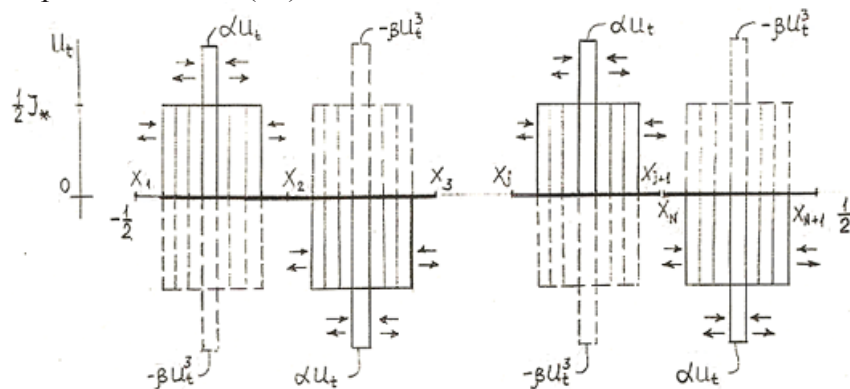


Рис. 5

В данном случае параметры авторезонансных процессов определяются из (14) и найденного представления для J_N . После простых вычислений для j -го участка струны, взаимодействующего с ограничителем и частоты авторезонанса, находим соотношения:

$$l_{Nj}^0 \equiv l_{Nj}^+ - l_{Nj}^- = N^{-1} - 2\Delta\sqrt{\beta\alpha^{-1}}; \omega_N = \pi N\sqrt{\alpha}[\sqrt{\alpha} - N(\sqrt{\alpha} - 2\Delta\sqrt{\beta})]^{-1}. \quad (21)$$

Форма A_N может реализовываться только, если $\omega_N \geq \pi N$, то есть, если

$$\sqrt{\alpha}N^{-1} > \sqrt{\alpha} - 2\Delta\sqrt{\beta} > 0.$$

Стационарные значения полного импульса удара

$$I_N^* = 4\Delta\pi^{-1}(\omega_N - \pi N).$$

Авторезонансные режимы типа найденных обеспечивают баланс работ неконсервативных сил на периодическом движении $u(x,t)$ за период (полупериод) движения, получаемых двукратным интегрированием соотношения (18):

$$\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^T h[u_t(x,t)] u_t(x,t) dt dx = 0. \quad (22)$$

И кроме того, как это видно из соотношений (20), эти режимы осуществляют и баланс самих сил. Это означает, что система относится к классу систем с компенсацией сил диссипации в каждый момент времени – (КСД – системам [18]); они также получили наименование «псевдоконсервативных».

Для изучения вопроса устойчивости найденного решения система анализировать методом конечных разностей. Струна единичной длины дискретизировалась по стандартной (и потому подробно не описываемой) схеме и при моделировании удара заменялась системой n упруго связанных сосредоточенных тел равной $M_0 = n^{-1}$. Пусть координата (скорость) q -го тела во время j -го шага по времени, продолжительность которого равна Θ , есть $u_q^j(v_q^j)$. По выполнению условия $|u_q^{j+1}| > \Delta$ полагалось $|u_q^{j+1}| = \Delta, v_q^{j+1} = 0$ и при этом считалось, что на каждое из соударяющихся тел действует сила реакции, равная импульсу, отнесенному к шагу по времени $f_{qj} = M_0 v_q^j \Theta^{-1} \text{sign } u_q^{j+1}$. Выбиралось: $n=60, h=n^{-1}; \Theta=0,75h$; значение зазора варьировалось в широких пределах. При соответствующем задании начальных условий были получены формы $A_N(x,t)$ (при нескольких первых значениях N) и установлена их устойчивость.

Аналитическое исследование устойчивости авторезонансных режимов в частном случае силы возбуждения, приложенной в единственной точке, выполнено в классической работе А. А. Витта [19], посвященной динамике скрипичных струн полужэкспериментальное изучение которых восходит к Г. Гельмгольцу [20]. В этих работах естественно не рассматривались какие-либо ограничители хода струны.

6. В заключении сделаем ряд замечаний.

А. При рассмотрении подобных автоколебательных моделей распределенных систем представляют интерес и другие задачи, связанные с взаимодействием струн с ограничителями хода более сложных структур: прямые ограничители малой длины, точечные ограничители, выпуклые, вогнутые, наклонные, тавровые и другие ограничители. Задачи такого рода предполагаются рассмотреть в дальнейшем. Необходимо отметить, что подобные системы весьма часто оказываются КСД - системами.

Б. Рассматриваемое свойство автоколебательных систем достаточно чувствительно к структуре выбранной модели. Если, например, в разделе отказаться от гипотезы об отсутствии потерь энергии при взаимодействии и каким-то образом учитывать эти потери, то проведенные рассуждения могут рассматриваться только как приближенные.

Это касается и механизма возбуждения автоколебаний. Например, если обратиться к Ван-дер-Полевскому типу возбуждению $h(u, u_t) = (a - bu^2)u_t$, где $a, b > 0$, то можно

установить, что такая система не является КСД–системой. Поиск точных аналитических решений здесь проблематичен, однако хорошо развиты многочисленные приближенные методики.

Выделение данного класса моделей имеет смысл не только в связи с возможностью построения эталонных точных решений сильно нелинейных задач динамики, но и (как в случае со струнами и стержнями) для объяснения экспериментально наблюдаемых динамических эффектов (например, возникновения трапециевидных волн). Кроме того, можно синтезировать возбуждающее воздействие так, чтобы система целенаправленно реализовывала авторезонансный КСД - режим. При практическом использовании эти режимы оказываются эффективными и экономичными.

В. Физическое обоснование существования волн с изломанными профилями в струнных системах, впервые, по-видимому, дал А.А. Витт [19]. Он объяснял это эквидистантностью спектра собственных частот линейной струны, так как широкополосные воздействия (здесь – и удары, и механизм возбуждения автоколебаний) в этом случае способны одновременно возбудить большое число мод колебаний. А. А. Витт провел аналитическое исследование подобных волн и их устойчивости.

Заметим, что подобные трапециевидные волны возникают и при автоколебаниях струн, вибрирующих в потоке жидкости или газа и без ограничителей [16].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-08-01235-а).

Литература

1. Веденова Е.Г. Маневич Л.И. Периодические и локализованные волны в виброударных системах с ргулярными структурами// Машиноведение. 1984. № 4. С.21-30.
2. Крупенин В.Л. К теории виброударных систем с распределенными ударными элементами // Изв. АН СССР.МТТ. 1986.№1.С.25-32.
3. Cabannes H. Cordes Vibrantes avec Obstacles//Acustica. 1984.V.55.P.14-20.
4. Bamberger A., Schatzman M. New results of a string vibrating against the obstacles // Saim. J. Math. Anal. 1983. Vol. 14. № 3. P. 560-595.
5. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998.№5 С.13-30.
6. Крупенин В.Л. Трансформация форм колебаний струны, взаимодействующей с двумя протяженными преградами.// ДАН СССР.1990.Т.313.№6.С.1394-1394.
7. Krupenin V.L., Veprik A.M. Vibroconductors equipped with impact elements and distributed vibroimpact systems // Proceedings of the 2-nd European Nonlinear Oscillations Conference. V.1. Czech Prague: CTU, 1996, P. 229-234.
8. Крупенин В.Л. Периодические движения в семействе упругих систем со взаимодействующими через удары граничными элементами // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2001, №3. - С.20-28
9. Крупенин В.Л. К описанию динамических эффектов, сопровождающих колебания струн вблизи однотоавровых ограничителей// Доклады Российской Академии наук. 2003. № 388 (3).
10. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Продольные колебания тонкого стержня, взаимодействующего с неподвижным ограничителем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2007. №6. С. 41-48.
11. Крупенин В.Л. Об эффекте возникновения высших нелинейных форм стоячих волн в виброударных системах с распределенными ударными элементами и большим числом ударных пар // Интернет- журнал. «Вестник научно-технического развития». №8. 2010.С.31-40.

12. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Эксперименты с протяженными виброударными системами (резонансные движения) // Интернет- журнал. «Вестник научно-технического развития». №7. 2010.С.3-10.
13. Махутов Н.А., Каплунов С.М., Прусс Л.В. Вибрация и долговечность судового энергетического оборудования. Л.: Судостроение, 1985. 302 с.
14. Аксиса Ф., Антунеш Дж., Виллар Б. Обзор методов расчета гидродинамических возбуждаемых вибраций // Теоретические основы инженерных расчетов. М.: Мир, 1988, № 4. С. 109 – 123.
15. Паркинсон Г.В., Брукс Н.П. Аэроупругая неустойчивость плохо обтекаемых цилиндров // Труды американского общества инженеров-механиков: Прикладная механика. Сер.Б. 1961. Т. 28. С. 115-123.
16. Крупенин В.Л. Стоячие волны с пилообразными профилями, возбуждаемые набегающими потоками жидкости или газа.// Интернет-журнал «Вестник научно -технического развития». 2014. №10. С. 10 –14.
17. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 905 с.
18. Крупенин В.Л. К динамике автоколебательных систем с компенсацией сил диссипации в каждый момент времени.// Интернет-журнал «Вестник научно -технического развития». 2014. №6. С. 10 –15.
19. Витт А. А. К теории скрипичной струны//ЖТФ. 1936. Т. 6. Вып. 9. С. 1459— 1479.
20. Hetmholz H.L.F. On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music. London: Longmans, Green and Co. 1895

NONLINEAR RANDOM WAVES IN FLUID, AND THE MAIN MECHANISM OF THEIR EXCITATION

Landa P.S.

Lomonosov Moscow State University (Department of Physics), Moscow, Russia
planda@mail.ru

Abstract. To describe such a problem, there is only a single way: using models based on physical considerations and (or) some experimental data. The main attention in this review will be attended to random waves, emerging, for example, at stall flutter. Such waves are often occur in fluid, and they are the main cause of many disasters in sea sand oceans. As a rule, stall flutter is connected with the pulling phenomenon, and appears in systems with two and (or) more degrees of freedom. In principle, in such systems both approximately one-frequency (synchronous) mode and asynchronous modes (when each mode oscillates with own mean frequency) are possible. But in the case of the pulling phenomenon only one-frequency mode is stable. Unlike to usual turbulence stall flutter is a self-oscillatory process. The feedback in this process appears due to interaction between the fluid and the streamline body. It should be noted that wave motions in fluid can be of very complex character. In last years a great interest appears to waves of an anomalously high amplitude — so called **freak-waves**, and **rogue-waves**. We assume that the main cause of such waves is also vortex separation.

I. Introduction. It is well known that systems with random forces having a strong effect on the investigated system are difficult both for analytical and numerical solution. In some cases such solutions are impossible. The very important example is the phenomenon of vortex separation and connected with it phenomenon of stall flutter. In this case to find even average motion, as a rule, is impossible. Just such problems are considered in this paper in detail. The consideration with using models allows us to understand the causes of many disasters possible in such systems. There is a very important type of models, called by us "models of a phenomenon" [25]. As a rule, equations describing these models are not isomorphic to the equations for the simulated system, but they are possessed of a very important property: they are based on experimental data which are known to us. Just such models are considered in this paper. The existence of such models is conditioned by the universality of oscillatory and wave processes. An assumption, that this universality exists really, and some reasonings showing that it can exist, were made by L. Mandelshtam, S. Strelkov, and me. Although these assumptions are not proved, numerous experiments show that they are valid. We do not know any experiments showing that it is absent. The universality allow us to understand the causes of the considered phenomena and find the means for attenuation of their undesirable influence.

Due to the universality of oscillatory and wave laws (the most of experiments and a great number of argumentative considerations show that this universality exist really) [25, 33], these disasters are of a similar character in different systems of such a kind. That is why the main purpose of this paper lies in the consideration of causes of such disasters and methods of controlling by them. Special attention to these problems is attended last time in connection with a great number of disasters caused by the stall flow of the lengthy bodies: wires, suspension bridges, steel factory pipes, helicopter propellers, periscopes of submarines, compressor blades, turbines in turbo-jet engines, ropes drawn down from ships into ocean and so on. The vortex separation occurs under streamline of the blunt notched bodies. At such streamline vortices are reflected from the inequalities of the body surface. It is evident that such reflection is of a random character, and hereupon the reflected wave is random. Owing to multiple reflection we obtain the bunch of random waves. Since we do not know this randomness, and its behavior depends on time, we cannot describe this wave analytically, i.e. we cannot write equations describing our problem. Many examples of similar phenomena we can indicate in hydrodynamics and biology. That is why we have called the corresponding problems

unsolvable [6]. It is very important that we have often a possibility to observe different manifestations of these phenomena in real life. Below we give several real examples of the stall flutter resulted in catastrophes.

1. Not far from Lancaster there is a sea, where very fast tides exist. In these tides the flow velocity changes randomly. It is known that these tides cause sometimes the loss of people and cars. We assume that due to large velocity of there stall flutter is excited. It is evident that the same might be in Ocean when there is strong wind.
2. As another example of real stall flutter was described in [34], where it is shown that stall flutter of electrical conductors is excited due to wind.
3. Stall flutter of the helicopter' screw. Such stall flutter is very unsafe. There is an assumption that a famous Russian oculist S.N. Fedorov was met with a helicopter accident in 2000 and died.

It should be noted that in last several years a great interest appears to waves of a high amplitude — freak waves and Rogue waves [49–51]. We assume that the main cause of freak and Rogue waves is also vortex separation. Our assumption may be conditioned by universality of wave processes and some pictures of these waves. Further we will consider some of such waves.

II. Aeolian tones, vortex separation and stall flutter. The phenomena of vortex separation and connected with this sound emission are known many years as Aeolian tones [3, 4]. They are described in many books and papers, see, for example, [6, 11–17, 20]. It was found that these sounds are resulted from the reaction to the vortex-shedding that is created by a Kaman wake [28] downstream.

This wake is precisely that reason which causes oscillations of the streamlined body and the surrounding fluid. The phenomenon of the excitation of such oscillations we will call stall flutter, in spite of the fact that the authors of some books [17, 29] distinguish the stall flutter, when oscillations of aerodynamical forces are induced by the body oscillations, and forced oscillations (wind resonance), when the Kaman wake exists also in the case of the immovable streamlined body. It should be noted that vortices excite the sounds, and vice versa, sounds generate the vortices, because, as shown in [10], acoustic and hydrodynamic waves represent two wave solutions of the same equations of fluid dynamics in a moving medium.

More often the stall flutter excites when one of the natural frequencies of the body oscillations is close or divisible to the frequency of vortex separation from this body when it is immovable. Stall flutter was observed repeatedly for a diversity of technical constructions, for example, many suspended bridges, steel factory pipes, helicopter's propellers, periscopes of submarines, compressor blades, turbines in turbo-jet engines, ropes drawn down from ships into ocean and so on [14–18, 20]. We believe that stall flutter is one of the main reasons resulted in the sway of wires in the presence of wind. It may be shown that the stall flutter may cause rotatory oscillations of wires which are similar in its form to thermo- mechanical self-oscillations considered in [25, 26]. It is also known that stall flutter is the main cause of many technical disasters. The most known from them is the so called Tacoma catastrophe that happened in 1940 [15, 18]. That is why the study of stall flutter is an important theoretical and practical problem.

Experimental studies of stall flutter and photos of some disasters caused by him, for example, the shot from the film about the catastrophe of Tacoma bridge demonstrating its state for half hour before its failure [15, 18] show that for this flutter torsional oscillations are predominated, whereas bending constituent is small (see fig. 1). By this stall flutter differs markedly from more known bending-torsion flutter that was the main cause of the airplane catastrophes at the earliest stage of their appearance. However, as shown in [30], taking into account of even very small bending vibrations can change essentially critical velocity and character of the stall flutter. This confirms once more that the stall flutter phenomenon is very complicated, far more complicate than more known flexure-torsion flutter. It is also seen that near the right bridge footing many vortices are stalled. We assume that just these vortex separations (each vortex separation is an impact) excite the bridge self-oscillations.

It should be noted that there are many works devoted to the stall flutter phenomenon and describing experimental results (see, for example, [17]), but all of them are of a partial

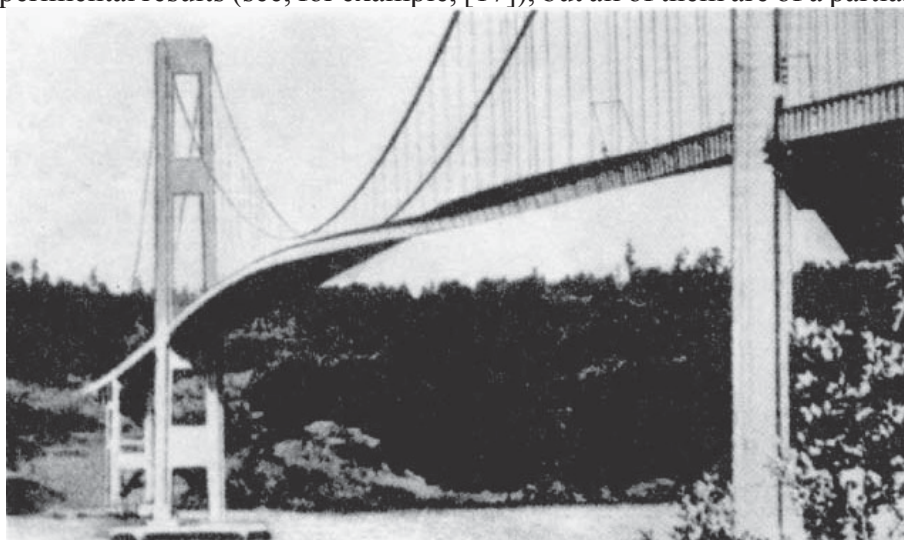


Fig. 1. The shot from the film about the catastrophe of Tacoma bridge demonstrating its state for half hour before its failure

character, whereas a sequential description are absent. Apparently, this may be explained by a great complexity of the problem and by the fact that in airplane flight this form of flutter was primarily rare in occurrence [17], and therefore it was studied not very intensively.

In detail monograph [17] it is written: “Classical type of the flutter is associated with a potential flow and usually, but not necessarily, involves the interaction between two or more degrees of freedom. Nonclassical type of the flutter, which is theoretically analyzed with difficulty, may take place at stalling flow: periodical separation of the flow with its adjacency again.” It is our opinion that the main difficulty of the stall flutter theory lies in the description of the random backwash behind the streamlined body that appears at vortex separation.

In the most of existing works the stall flutter is explained as the excitation of resonant oscillations under the action of a periodic force caused by the vortex separation and having a given frequency depending on the flow velocity, the size and shape of the streamlined body. The force frequency is defined by the Strouhal number [31]. First of all such an explanation comes into conflict with known experimental facts concerning the stall flutter of sufficiently long ropes which are streamlined by flow with different velocities in different sections of the rope. This conflict is connected with the fact that stall flutter is not forced oscillations but it is a random process.

III. Modelling of stall flutter. It is seen from the previous description that any exact mathematical model of stall flutter is impossible. But we can use any approximate model of some phenomenon attendant to stall flutter. It follows from experimental data that such a phenomenon is the synchronization of the stall flutter frequency by some periodic forcing. For an oscillator with additional circuit ours numerical calculations have shown that such forcing can be caused by oscillations of the additional circuit. Because the synchronization is possible only in self-oscillatory systems [38], this means that we will use a self-oscillatory model.

A. General principles of the construction of mathematical models for different systems and their classification. General principles of the construction of mathematical models for different systems are described in some Russian textbooks, mainly in [22, 23]. There the following types of models are considered: geometrical, physical, analogous mathematical and simulated. It is asserted that all these models must have a general foundation — isomorphism. It is evident that the definition given above is based on that our object can be described by dynamical equations, i.e. that it is a dynamical system. But up-to-date oscillation theory and nonlinear dynamics research often not dynamical systems, but stochastic ones. Many systems cannot be described sufficiently by dynamical equations and therefore they cannot be solved exactly neither analytically nor numerically.

In book by Blekhman, Myshkis and Panovko [24] some principles of model construction are also considered. There the following definition of a model is given: “an object a' is a model of an object a with respect to some system S of characteristics (properties), if a' is constructed (or is selected) for the simulation of a in according with these characteristics.” In this book it is emphasized that “the modelling lies in the base of all sciences.” This assertion is undoubtedly quite right, since any science cannot study nature, as is written in school textbooks. It can study only models of natural phenomena.

Another classification of models and their role in the nature study is given in [25]. There a very important type of models, called “models of a phenomenon” was introduced. As a rule, equations describing these models are not isomorphic to the equations for the simulated system, but they possess of a very important property: they are based on experimental data.

IV “Un-solvable problems” as a special class. The impossibility to obtain equations for the process studied by us is precisely that feature which separates the “un-solvable” problems” from other complicated problems into a special class. Such separation and the approach to the solution of these problems are new. We do not know any similar works. Although models used by us and considered systems are known in oscillation theory and engineering, the results obtained by us and their explanation are new.

In this review we consider in detail an example of systems from this class: vortex separation and connected with this the stall flutter phenomenon.

It is well known that when lengthy bodies are flowed around by fluid they radiate sounds known as Aeolian tones [3, 4]. It was found that these sounds are resulted from the reaction to the vortex-shedding that creates a Karman wake [28] downstream of the body, as sketched in Fig. 2.

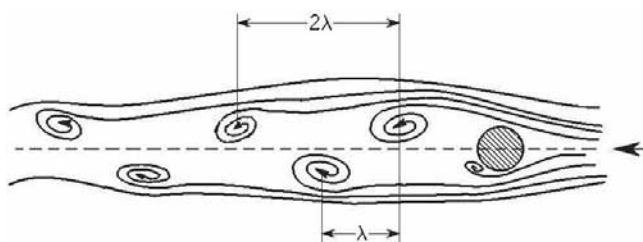


Fig. 2. Schematic diagram of the Karman wake for streamlined flow around a cylinder

This wake is precisely that reason which causes random oscillations of the streamlined body and the surrounding fluid. The phenomenon of the excitation of such oscillations we will call stall flutter, in spite of the fact that authors of some books (see, for example, [17, 29]) distinguish the stall flutter, when oscillations of aerodynamical forces are induced by the body oscillations, and forced oscillations (wind resonance), when the Karman wake exists also in the case of the immovable streamlined body.

It should be noted that vortices give birth to sounds, and vice versa, sounds generate vortices, because, as shown in [10], acoustic and hydrodynamic waves represent two wave solutions of the same equations of fluid dynamics in a moving medium. More often the stall flutter excites when one of the natural frequencies of the body oscillations is close or divisible to the frequency of vortex separation from this body when it is immovable. Stall flutter was observed repeatedly for a diversity of technical constructions, for example, of many suspended bridges, steel factory pipes, helicopter's propellers, periscopes of submarines, compressor blades, turbines in turbo-jet engines, ropes drawn down from ships into ocean and so on [14–18, 20]. Apparently, stall flutter is one of the main reasons resulted in the random sway of wires in the presence of wind. It may be shown that the stall flutter may cause rotatory oscillations of wires which in average are similar in its form to thermo-mechanical self-oscillations considered in [25, 26]. It is also known that stall flutter is the main cause of many technical disasters. The most known from them is the so called Tacoma catastrophe that happened in 1940 [15, 18]. That is why the study of stall flutter is an important theoretical and practical problem.

Experimental studies of stall flutter and photos of some disasters caused by him, for example, the shot from the film about the catastrophe of Tacoma bridge demonstrating its state for half hour before its failure [15, 18] show that for this flutter torsional oscillations are predominated, whereas bending constituent is small (see fig. 1). By this stall flutter differs markedly from more known bending-torsion flutter that was the main cause of the airplane catastrophes at the earliest stage of their appearance. However, as shown in [30], taking into account of even very small bending vibrations can change essentially critical velocity and character of the stall flutter. This confirms once more that the stall flutter phenomenon is very complicated, far more complicate than more known flexure-torsion flutter.

In addition, it is seen from this figure that near the bridge footings many vortex separations occur. We think that these vortex separations just cause self-oscillations of the bridge because a vortex separation is equivalent to impact on the bridge.

It should be noted that there are many works devoted to the stall flutter phenomenon, but all of them are of a partial character, whereas a sequential description is absent. Apparently, this may be explained by a great complexity of the problem and by the fact that in airplane flight this form of flutter was primarily rare in occurrence [17], and therefore it was studied not very intensively.

In detail monograph [17] it is written: “Classical type of the flutter is associated with a potential flow and usually, but not necessarily, involves the interaction between two or more degrees of freedom. Nonclassical type of the flutter, which is theoretically analyzed with difficulty, may take place at stalling flow: periodical separation of the flow with its adjacency again.”. It is our opinion that the main difficulty of the stall flutter theory lies in the description of the random backwash behind the streamlined body that appears at vortex separation.

In the most of existing works the stall flutter is explained as the excitation of resonant oscillations under the action of a periodic force caused by the vortex separation and having a given frequency depending on the flow velocity, the size and shape of the streamlined body. The force frequency is defined by the Strouhal number [31]. First of all such an explanation comes into conflict with known experimental facts concerning the stall flutter of sufficiently long ropes which are streamlined by flow with different velocities in different sections of the rope. This conflict is connected with the fact that stall flutter is not forced oscillations but self-oscillations.

Because of the similarity between stall flutter and self-oscillations, we can consider a model of stall flutter as self-oscillations in a system containing both active and passive oscillatory elements. A classic example of such a system is a van der Pol oscillator with an additional oscillatory circuit [7, 34–38].

We have a good reason to believe that all peculiar properties of this process: frequency pulling and characteristic dependencies of the oscillation amplitudes in the oscillator and additional circuit as the frequency mismatch varies (see [4, 7, 34] have to be observed in the case of the stall flutter too. Unfortunately, experimental comparisons of these phenomena are unknown to us.

To signs the analogy between self-oscillations and the vortex separation process from a streamlined body we indicate the following:

1. Pulsations of the velocity and pressure in the Karman wake have rather narrow spectrum with well-defined maximum;
2. The vortex separation process from a streamlined body may be synchronized on the average if we excite oscillations of this body at a certain frequency that is approximately divisible by the frequency of vortex separation from the immovable body [11, 27, 39, 40]. The dependence of the vortex separation from the surface of oscillating body on the mismatch between the mean body oscillation frequency f and the frequency of vortex separation from the rest body is of the same character as well known dependence of the frequency of synchronized oscillations of van der Pol oscillator on the mismatch between the free self-oscillation frequency and the external force

frequency [38] (see fig. 3 constructed from the experimental data of [11]). On this figure D is the cylinder diameter, and U_0 is the flow velocity.

V. Synchronization of the vortex separation frequency by the cylinder oscillation For comparison the dependence $\Delta S_t = \sqrt{(\Delta S_t)^2 - (\Delta S_{t0})^2}$ is shown in the same figure by dashed line. Such a dependence should be valid in the case of synchronization of a van der Pol oscillator by small harmonic external force. However, judging by the fact that the synchronization region is rather wide, the amplitude of the cylinder oscillations was significant, that resulted in the more steep dependence of ΔS_t on ΔS_{t0}

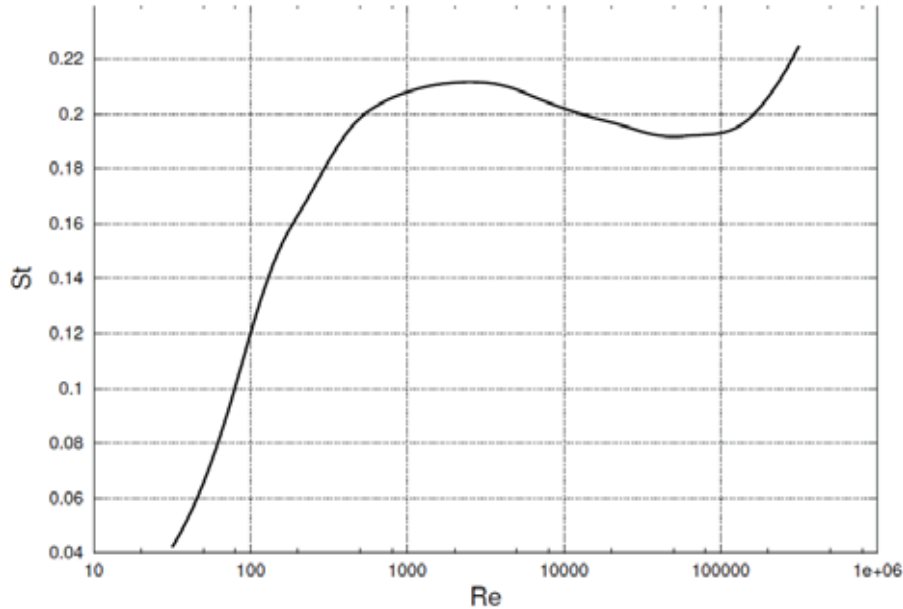


Fig. 3. The dependence of the mismatch between the frequency of vortex separation from oscillated cylinder and frequency of cylinder oscillations $f_0(\Delta S_t = (f - f_0)D/U_0)$ on the mismatch between frequencies of vortex separation from a rest cylinder f_{st} and $f_0(\Delta S_{t0} = (f_{st} - f_0)D/U_0)$ expressed in terms of the Strouhal numbers

It should be noted that, as in van der Pol oscillators, synchronization in average can occur not only on the main frequency but on its harmonics and subharmonics [27]. We note that the synchronization of a van der Pol oscillator on the harmonics and subharmonics of an external force is considered in [8, 38]. The stall flutter phenomena may be conveniently considered by using the simplest model of oscillating body in the form of an elastic circular cylinder of length l with fixed ends and placed transversely to the flow directed along x -axis (see fig. 3). In fluid flow on such a cylinder transversal forces act in the plane orthogonal to the flow (see [20, 27, 41]). We can set that one of thid forces is directed along axis z , as shown in Fig. 3. In this case the cylinder will be displaced along x -axis.

As was noted, behind a streamlined cylinder the Karman vortex wake is formed [28], which for the Reynolds numbers $40 < Re < 150$ is regular [27], and for $150 < Re < 300$ — turbulent. For $300 < Re < 2 \cdot 10^5$ the Karman wake becomes again close to regular but with turbulent bursts. After this for $Re > 5 \cdot 10^6$ in the wake spectrum a dominating frequency of vortex separation is also observed [42]. It should be emphasized that such alternation of the regions of different behavior as a parameter changes is typical for chaotic self-oscillatory systems [8, 44]. In particular, the region $300 < Re < 2 \cdot 10^5$ may be considered as the region of intermittency. The aforesaid testifies once more that forming the Karman wake may be modelled by a weakly noisy self-oscillation process.

When stalling streamline occurs in the direction of axis x with mean velocity V , identical for all cylinder sections [27], on this section a periodic (or close to periodic) lift force $F_z(t)$ directed along axis z act. This force represents a sum of two components: regular, independent of time, and random, slowly changing with time.

In the case of immovable cylinder, for a wide range of the Reynolds numbers, the frequency of the lift force is close to the vortex separation frequency ω_{stall} , and the frequency of drag force is close to $2\omega_{\text{stall}}$ [27]. The difference between mean periods of lift and drag forces is conditioned by the fact that the mean lift force frequency is defined by the distance between vortices only along one of the sides of the Karman wake (2λ), whereas the mean drag force frequency is defined by the distance between vortices irrespective of the side of the Karman wake (λ) (see fig. 2).

The mean frequency ω_{stall} is connected with the Strouhal number St and the flow velocity V by formula

$$\omega_{\text{stall}} = 2\pi St/DV, \quad (\text{V.1})$$

where D is the cylinder diameter.

Experiments [20] show that for $40 < Re < 150$ the Strouhal number initially increases, then becomes approximately constant and equal to 0.2, and further again begins to increase. In the range $2 \cdot 10^5 < Re < 5 \cdot 10^6$ vortex wake is strongly turbulent, so that the Strouhal number cannot be determined. For $Re > 5 \cdot 10^6$, the Strouhal number $St \approx 0.3$. All of the said is illustrated by fig. 4, taken from [20].

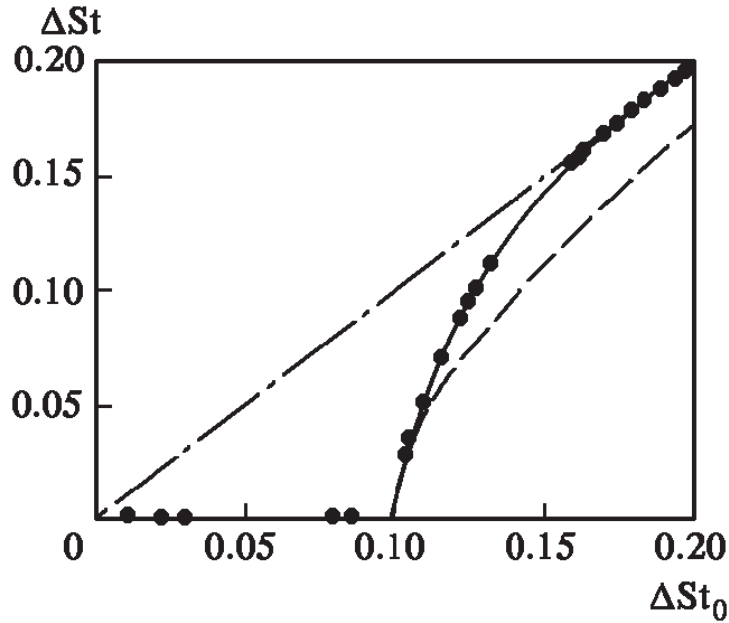


Fig. 4. The dependence of the Strouhal number on the Reynolds number for transversal streamline of an immovable circular cylinder

As we know, any equations allowing us to describe rigorously the lift and drag forces in the case of stalling streamline are absent in literature. Only the expressions for peak-to-peak values of these forces are given [18, 20, 27, 41]. In all known books on aeroelasticity (see, for example, [20], Dowell:2004 the amplitudes of these forces are found from dimensionality considerations. For example, the amplitudes of the drag and lift forces (A_x and A_z) may be written as

$$A_x = c_x(Re) S_{yx} \frac{\rho V^2}{2}, A_z = c_z(Re) S_{yz} \frac{\rho V^2}{2}, \quad (\text{V.2})$$

where ρ is the density of medium where the body moves, $c_z(Re)$ are factors depending on the extent of the body streamlining (the worse is streamlining, the greater values of c_z), and on the Reynolds number. In V.2 S_{yx} is the area of the body projection on the plane yx , S_{yz} is the area of the body projection on the plane yz . We suppose that S_{yx} and S_{yz} are independent of y .

VI Model equations for stall flutter without regard for random forces. In our work [4] we have considered the oscillating cylinder as a string and retained only a single oscillation

frequency. In so doing we can change the cylinder by a material point of mass m and write the equations of its oscillations along axes x and z in the form:

$$\ddot{U}_x + 2\alpha_x \dot{U}_x + \omega_x^2 U_x = \frac{F_x}{m}, \quad \ddot{U}_z + 2\alpha_z \dot{U}_z + \omega_z^2 U_z = \frac{F_z}{m}, \quad (\text{VI.1})$$

where U_x and U_z are the cylinder displacements along axes x and z , $F_z(t)$ and $F_x(t)$ are the forces acting on the cylinder at the expense of the vortex separation in the directions of x and z axes; ω_x and ω_z are the natural frequencies of the cylinder in the directions of x and z , α_x and α_z are the damping factors in x and z -directions. In the case of difference of the oscillation frequencies in the directions x and z , resulting oscillations of the cylinder may have rather complex form. It should be noted that force F_x is a drag force, whereas F_z is a lift force.

It should be noted that because of the backwash behind the streamlined body that always appears at vortex separation, on the cylinder always act random forces caused by this backwash. We will denote these forces $\eta_x(t)$ and $\eta_z(t)$. These forces must be added in the right side of Eqs. (VI.1). Subject to these forces, Eqs. (VI.1) becomes

$$\ddot{U}_x + 2\alpha_x \dot{U}_x + \omega_x^2 U_x = \frac{F_x}{m} + \eta_x(t), \quad \ddot{U}_z + 2\alpha_z \dot{U}_z + \omega_z^2 U_z = \frac{F_z}{m} + \eta_z(t). \quad (\text{VI.2})$$

Because any equations describing the vortex separation phenomenon and allowing to find an expression for forces $F_z(t)$ and $F_x(t)$ are absent in the literature, we will use for our calculations model equations for self-oscillations. Considering van der Pol oscillator [8] as a self-oscillation system, taking account of the experimental fact that the cylinder oscillations can synchronize the vortex separation, and neglecting the influence of the backwash, we write the following model equations for forces $F_x(t)$ and $F_z(t)$ acting on the cylinder:

$$\ddot{F}_x - \mu \left(1 - a_1 F_x^2 \right) \dot{F}_x + \omega_{\text{stall}x}^2 F_x = m_x U_x, \quad (\text{VI.3})$$

$$\ddot{F}_z - \mu \left(1 - a_2 F_z^2 \right) \dot{F}_z + \omega_{\text{stall}z}^2 F_z = m_z U_z,$$

where μ is a parameter responsible for the excitation of self-oscillations, $a_{1,2}$ are coefficients determining the amplitudes of forces F_x and F_z , $m_{x,z}$ are the coupling coefficient which determines the influence of the cylinder oscillations on the vortex separation in x and z directions, $\omega_{\text{stall}x}$ and $\omega_{\text{stall}z}$ are frequencies of vortex separation in the directions of axes x and z .

We note that members $m_x U_x$ and $m_z U_z$ are responsible for the synchronization of vortex separation by cylinder oscillations in x and z directions. It follows from Eqs. (VI.3) that, in the case of the immovable cylinder and small μ the stationary values of $F_x(t)$ and $F_z(t)$ are

$$F_x(t) \approx A_x \cos \omega_{\text{stall}x} t, \quad F_z(t) \approx A_z \cos \omega_{\text{stall}z} t, \quad (\text{VI.4})$$

where A_x and A_z are the oscillatory amplitudes.

It should be noted that formulas (VI.4), in view of (V.2), are in full accordance with the expressions for drag and lift forces given in [27]. In the simplest case the forces $F_x(t)$ and $F_z(t)$ can be described by expressions (VI.4).

Equations (VI.2) and (VI.3) define two self-oscillatory systems, each with two degree of freedom. In particular, such systems are considered in [7, 8].

Further we will make examples of self-oscillatory systems with two degree of freedom, which may be taken as models of stall flutter.

Versus the Reynolds number in x and z directions oscillations of systems described by Eqs. (VI.2) and (VI.3) can be periodical, quasi-periodical or random.

In the next section we consider self-oscillatory systems with two degree of freedom without regard for random forces.

A. Self-oscillatory systems with the main and additional circuits and pulling phenomenon without regard for random forces

It is known that oscillators with two degree of freedom may be described either two differential equations of the second order either a single equation of the fourth order. Mandelshtam in his lectures [2] considered different systems of the second order, but without friction. In well known works [34–37] authors considered systems described by two second order equations corresponding to their experimental installations. Schematic image of the installation with inductive coupling between circuits, studied in [34] and [38] is given in [34]. Another installation with capacitive coupling between circuits, studied by Teodorichik, is shown in [37]. Both these installations consist from two oscillatory circuits and an amplifier. It should be noted that equations describing oscillations in both installations differ from one another. This difference results in the fact that the dependencies of frequency and amplitude on the frequency mismatch are essentially different (compare Figs. 7 and 10, and also 8 and 11).

In this section oscillators with capacitive and inductive couplings between the circuits will be studied as applied to stall flutter.

We consider a system consisting from two oscillators, i.e. a system with two degrees of freedom. A consideration of such systems without friction was first conducted in famous lectures on oscillations delivered by Russian academician L. Mandelshtam in 20–30th years of last century [33]. In these lectures he showed that the behavior of such systems is conditioned by so called **connectedness** but not by coupling. The connectedness cd is defined as

$$cd = \frac{\omega_1 \omega_2}{|\omega_1^2 - \omega_2^2|}, \quad (\text{VI.5})$$

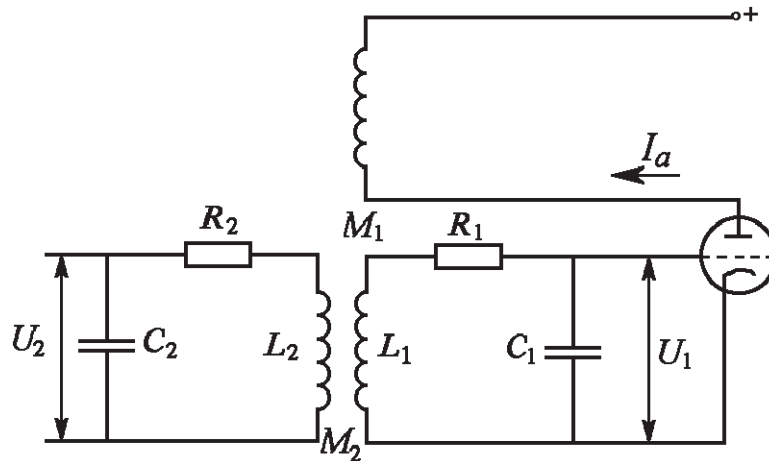


Fig. 5. The schematic image of the triode generator with two inductively coupled circuits

Setting $I_a = S_0 U_1 - S_1 U_1^3 / 3$, we can write the equations for such a generator in dimensionless coordinates. They may be easily transformed to the following:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \mu(1 - \alpha x^2) \frac{dx}{dt} + \omega_1^2 x = m_1 \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \epsilon \mu \frac{dy}{dt} + \omega_2^2 y = m_2 \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (\text{VI.6})$$

where

$$x = \sqrt{\frac{M_1 S_1}{M_1 S_0 - R_1 C_1}} U_1, \quad y = \sqrt{\frac{M_1 S_1}{M_1 S_0 - R_1 C_1}} U_2$$

are dimensionless voltage drops across the triode grid and the capacitor C_2 , respectively,

$$\mu = \frac{M_1 S_0 - R_1 C_1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \epsilon = \frac{R_2 L_1 C_1}{L_2 (M_1 S_0 - R_1 C_1)},$$

$m_{1,2} = M_2 C_{2,1} / (L_{1,2} C_{1,2})$ are the coupling coefficients, ω_1 and ω_2 are the natural frequencies of the main and additional circuits, $M_{1,2}$ are the coefficients of mutual induction between the coils L_1 and L_2 and L_1 and L_2 , respectively.

We will assume that the coupling coefficients $m_{1,2}$ are small, of order of a conditional small parameter. In this case we can use for approximate solution of Eqs. (VI.6) the averaging method proposed by Bogolyubov [46] and developed by Mitropol'skii [47, 48]. We apply this method in the form set forth in [38]. For using this method we rewrite Eqs. (VI.6) introducing dimensionless time $\tau = \omega t$, where frequency ω is unknown frequency of self-oscillations and another conditional small parameter $\mu_1 = \mu/\omega$.

In this case Eqs. (VI.6) can be conveniently rewritten as

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x - \mu_1(1 - \alpha x^2) \frac{dx}{d\tau} = m_1 \frac{d^2 y}{d\tau^2}, \quad (VI.7)$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \epsilon \mu_1 \frac{dy}{d\tau} + \xi y = m_2 \frac{d^2 x}{d\tau^2},$$

where $\mu_1 = \mu/\omega$,

$$\xi = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \quad (VI.8)$$

is the mismatch frequency squared.

1. Zero approximation

In zero approximation with respect to small parameters μ_1 Eqs. (VI.7) become

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + x_0 - m_1 \frac{d^2 y_0}{d\tau^2} &= 0, \\ \frac{d^2 y_0}{d\tau^2} + \xi y_0 - m_2 \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} &= 0. \end{aligned} \quad (VI.9)$$

It should be noted that system (VI.9) is a conservative system. Its solution can be set as

$$x_0(\tau) = A_x \cos \omega \tau, \quad y_0(\tau) = A_y k \cos \omega \tau, \quad (VI.10)$$

where ω is the unknown frequency of self-oscillations, k is the distribution coefficient.

System (VI.9) allows us to calculate its determinant D and the distribution coefficient $k = A$:

$$D = (1 - m_1 m_2) \omega^4 - (1 + \xi) \omega^2 + \xi, \quad (VI.11)$$

$$k = \frac{A_y}{A_x} = \frac{\omega^2 - 1}{m_1 \omega^2} = \frac{m_2 \omega^2}{\omega^2 - \xi}. \quad (VI.12)$$

Systems of equations (VI.7) and (VI.9) describe the interaction between the self-oscillatory system defined by function $x(\tau)$ and passive oscillatory system defined by function $y(\tau)$. If oscillatory frequencies of these systems differ strongly from each other then the systems will be weakly interacting, i.e. they will be sensibly independent. But if the frequencies are sufficiently close, synchronization, i.e. one-frequency mode, can appear.

Andronov and Witt [34] solved Eqs. (VI.7) in one-frequency mode by using the Poincaré method of small parameter [21] at the assumption that parameter μ_1 is sufficiently small. However, here we will solve equations (VI.7) by the Krylov–Bogolyubov method, as more preferable.

In zero approximation a solution of Eqs. (VI.9) is

$$x \equiv x_0 = A \cos(\omega \tau + \varphi_x), \quad y \equiv y_0 = k A \cos(\omega \tau + \varphi_y), \quad (VI.13)$$

where A is the amplitude of variable x , and ϕ_x and ϕ_y are phases of variables x and y , and ω is the frequency defined from the condition of vanishing determinant of system (VI.9) defined by Eq. (VI.11). Equation for the frequency ω has two real roots:

$$\left(\omega^{(1,2)}\right)^2 = \frac{1+\xi}{2\xi(1-m_1m_2)} \left(1 \mp \sqrt{1 - 4\xi^2(1-m_1m_2)/(1+\xi)^2}\right). \quad (\text{VI.14})$$

The dependencies of these roots on ξ are shown in Fig. 6. Such a graph is often called the Vien diagram.

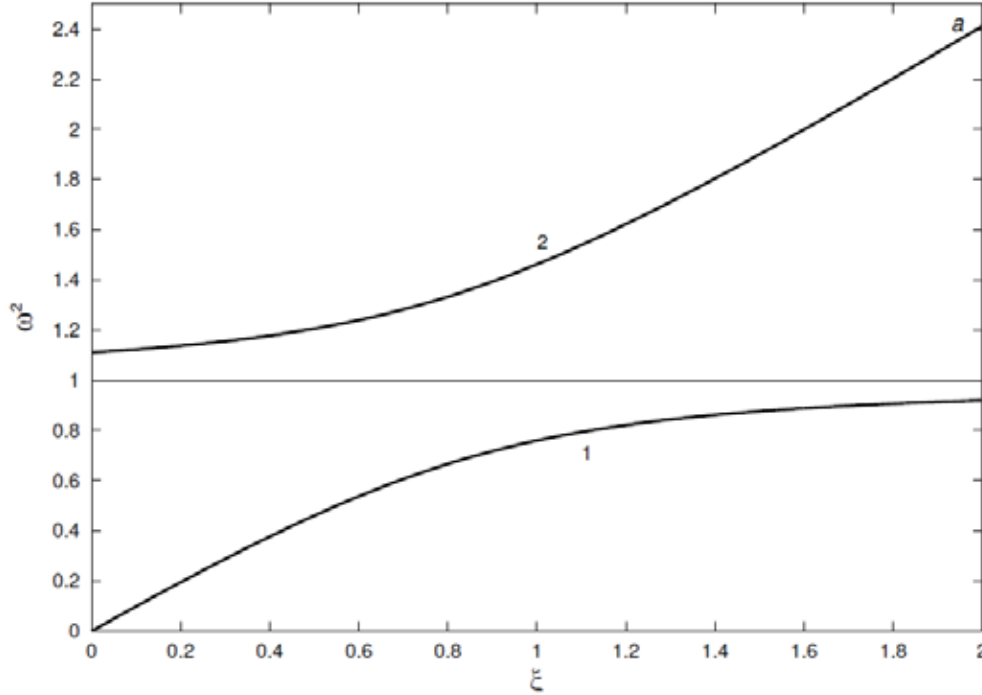


Fig. 6. The dependences of two oscillation frequencies squared on the frequency mismatch $\xi = \omega_2/\omega_1$ in zero approximation for $m_1m_2 = 0.1$ (the Vien diagram)

To consider the pulling phenomenon we must take into account the nonlinear terms at least in the first approximation.

2. First approximation

We will assume that the coefficient of nonlinearity α is small, so that the term $(1 - \alpha x^2) dx/d\tau$ can be linearized under the assumption that x changes according to harmonic law. In addition we will suppose that frequencies ω_1 , ω_2 and ω are sufficiently close, so that their differences are of order of a conditional small parameter ϵ_1 . This can be possible only for ξ closed to 1.

In the first approximation we will seek a solution of Eqs. (VI.7) in the complex form:

$$x = A_x \exp^{i\omega\tau + i\varphi_x}, \quad y = A_y \exp^{i\omega\tau + i\varphi_y}. \quad (\text{VI.15})$$

Substituting (VI.15) into Eqs. (VI.9) we obtain the following equations:

$$(1 - \omega^2)A_x - i\mu_1\omega \left(1 - \frac{\alpha A_x^2}{4}\right) A_x + m_1\xi\omega^2 A_y e^{i\varphi} = 0, \quad (\text{VI.16})$$

$$i\epsilon\mu_1\omega A_y + (\xi - \omega^2)A_y + m_2\omega^2 A_x e^{-i\varphi} = 0,$$

where $\phi = \phi_y - \phi_x$.

The condition of the equality to zero for the determinant of linear system (VI.16) gives us an approximate complex characteristic equation in the first approximation.

$$(1 - \omega^2)(\xi - \omega^2) + \epsilon \mu_1^2 \omega^2 \left(1 - \frac{\alpha A_x^2}{4}\right) - m_1 m_2 \xi \omega^4 = 0, \quad (\text{VI.17})$$

$$(1 - \omega^2)\epsilon - (\xi - \omega^2) \left(1 - \frac{\alpha A_x^2}{4}\right) = 0.$$

Real and imaginary parts of this equation are

$$(1 - \omega^2)(\xi - \omega^2) + \epsilon \mu_1^2 \omega^2 \left(1 - \frac{\alpha A_x^2}{4}\right) - m_1 m_2 \xi \omega^4 = 0, \quad (\text{VI.18})$$

$$\epsilon(1 - \omega^2) - (\xi - \omega^2) \left(1 - \frac{\alpha A_x^2}{4}\right) = 0. \quad (\text{VI.19})$$

From Eq. (VI.19) we can find αA_x^2 :

$$\alpha A_x^2 = 4 \left(1 - \epsilon \frac{1 - \omega^2}{\xi - \omega^2}\right). \quad (\text{VI.20})$$

Substituting (VI.20) into (VI.18) we obtain the following bicubic equation for ω :

$$\omega^6 - (1 + 2\xi - \epsilon \mu_1^2 + m_1 m_2) \omega^4 + (2 + m_1 m_2) \xi + \xi^2 - \epsilon \mu_1^2 \omega^2 - \xi^2 = 0. \quad (\text{VI.21})$$

Further, by using Eqs. (VI.20) and (VI.21) we calculate examples of the dependencies of ω^2 and αA_x^2 on ξ for $m_1 m_2 = 0.1$, $\mu_1 = 0.1$ and four values of ϵ (see Figs. 7, 8).

We see from Eq. (VI.13) that it can have either one or three real positive roots. Our calculations showed that for $\epsilon < \epsilon_4$ and $\xi \leq \xi_1(\epsilon)$ Eq. (VI.13) has a single such root, and for $\xi > \xi_1(\epsilon)$ it has three such roots (see Fig. 7 a, b, c). For ϵ more some value and all ξ Eq. (VI.13) has a single root (see Fig. 7 d).

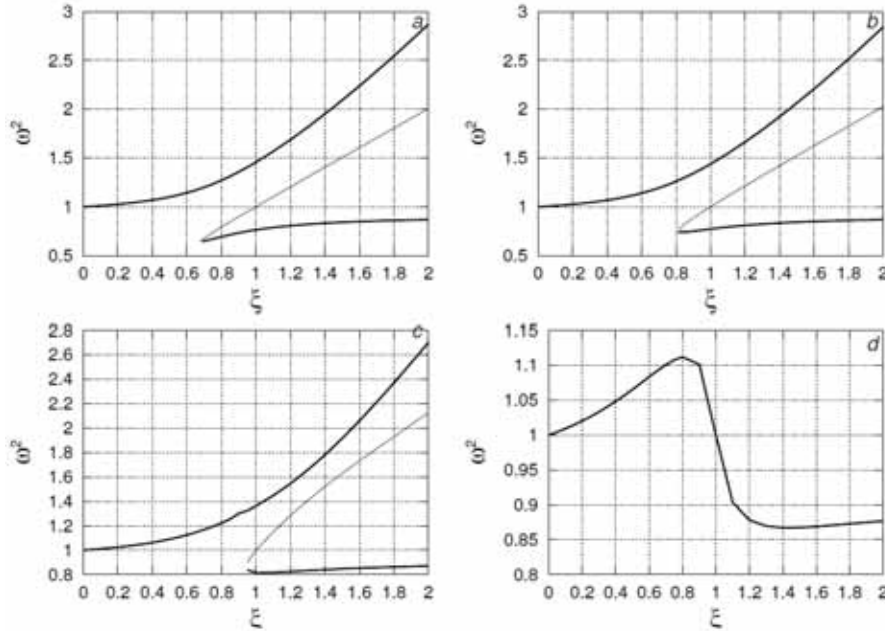


Fig. 7. Examples of the dependencies of ω^2 on the frequency mismatch ξ for $\mu_1 = 0.1$, $m_1 m_2 = 0.1$, $\epsilon = 1$ = 0.5 (a), (b) $\epsilon = 2$ = 1, (c) $\epsilon = 3$ = 1 and $\epsilon = 4$ = 1 (d) in the case of an oscillator with inductive coupling between circuits

We can see from Fig. 8 that for $\epsilon > 1$ there exist the domains of non-existence of the solutions found. In these domains the equilibrium states are stable for $\epsilon < m_1 m_2 / \mu_1^2$, i.e. for sufficiently large coupling factors.

It can be seen that the amplitude dependencies are of the same character as calculated by Andronov and Witt [34, 38]. It should be noted that these dependencies are shown in Fig. 8 were calculated nonmetering the stability.

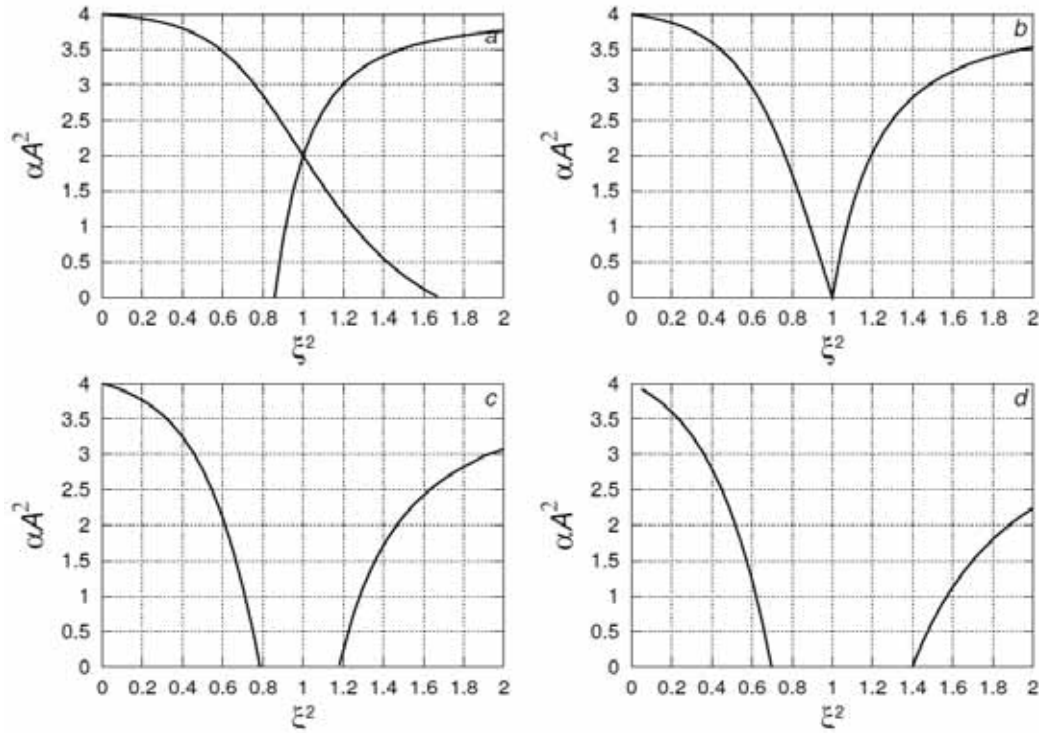


Fig. 8. Examples of the dependencies of oscillation amplitudes squared αA^2 on the frequency mismatch ξ for $\mu l = 0.1$, $m l m_2 = 0.1$ and the values of ϵ the same as in Fig. 7 $\epsilon = (\epsilon = 1(a), (b))$ ($\epsilon = 2, (c)$) ($\epsilon = 3$ and (d)) ($\epsilon = 4$) in the case of an oscillator with inductive coupling between circuits

B. The triode generator with the capacitive coupling between circuits without regard for random forces

A detailed consideration of the pulling phenomenon in oscillators with capacitive coupling between circuits was first pursued by Teodorichik [37]. In Fig. 9 the same schema of an oscillator that was analyzed by Teodorichik in [37]. is shown.

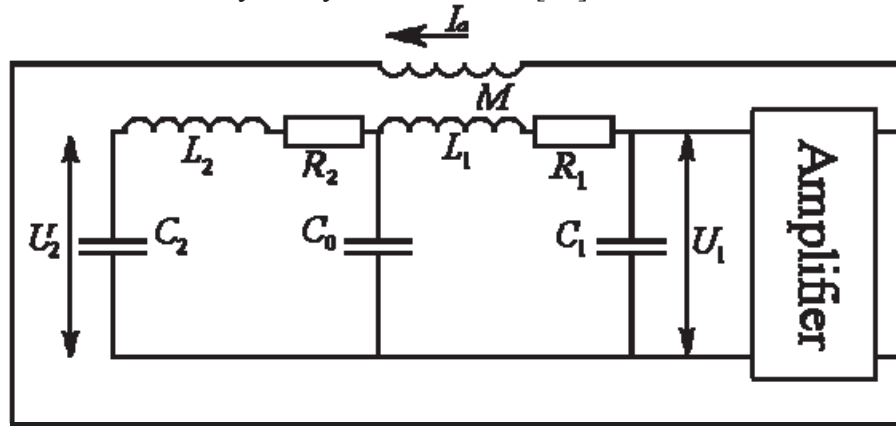


Fig. 9. Schematic image of an oscillator with capacitive coupling between circuits

Setting $dz/dt = (S_0 - S_1 x^2) dx/dt$, where z is the anode current, we obtain the following equations for the oscillations in this schema [37]:

$$\left(1 + \frac{C_1}{C_0}\right)x + (R_1C_1 - MS_0 + MS_1x^2)\frac{dx}{dt} + L_1C_1\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{C_2}{C_0}y, \quad (VI.22)$$

$$\left(1 + \frac{C_2}{C_0}\right)y + R_2C_2\frac{dy}{dt} + L_2C_2\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{C_1}{C_0}x,$$

Equations (VI.16) may be conveniently transformed to the following:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - \alpha x^2)\frac{dx}{dt} + \omega_1^2x = m_1y, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\epsilon\mu\frac{dy}{dt} + \omega_1^2\xi y = m_2x, \quad (VI.23)$$

where

$$x = \sqrt{\frac{M_1S_1}{M_1S_0 - R_1C_1}}U_1, \quad y = \sqrt{\frac{M_1S_1}{M_1S_0 - R_1C_1}}U_2$$

are dimensionless voltage drops across the triode grid and the capacitor C_2 , respectively,

$$\mu = \frac{M_1S_0 - R_1C_1}{L_1C_1}, \quad \alpha = \frac{MS_1}{MS_0 - R_1C_1}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right)}, \quad (VI.24)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{L_2}\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_0}\right)}, \quad m_1 = \frac{C_2}{L_1C_1C_0}, \quad m_2 = \frac{C_1}{L_2C_2C_0}, \quad \delta = \frac{R_2}{2L_2},$$

$m_{1,2} = M_{1,2}C_{2,1}/(L_{1,2}C_{1,2})$ are the coupling coefficients, $M_{1,2}$ are the coefficients of mutual induction between the coils L_1 and L and L_1 and L_2 , respectively; the dots mean the differentiation with respect to dimensionless time $\tau = \omega t$, where ω is a supposed frequency of self-oscillations,

$\xi = \omega_2^2 / \omega_1^2$ is the frequency mismatch squared.

Comparing Eqs. (VI.18) with Eqs. (VI.3) for oscillator with inductive coupling between the circuits, we see that they differ from one another. The main difference consists in that in Eqs. (VI.3) the coupling is realized via the second derivatives $\ddot{x}$ and $\ddot{y}$, whereas in Eqs. (VI.18) it is realized via the variables x and y . This distinction results in different equations for self-oscillatory frequencies and amplitudes.

As before, for approximate solution of Eqs. (VI.18) we use the averaging method proposed by Bogolyubov [46] and developed by Mitropol'skii [47, 48]. We apply this method in the form set forth in [38]. For using this method let us rewrite Eqs. (??) introducing dimensionless time $\tau = \omega t$, where ω is a complex self-oscillation frequency, and another conditional small parameter ϵ_1 characterizing the difference between frequencies ω and ω_1 :

$$\ddot{x} - \mu_1(1 - \alpha x^2)\dot{x} + x - \tilde{m}_1y = \epsilon_1\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)x, \quad (VI.25)$$

$$\ddot{y} + \delta\dot{y} + \xi y - \tilde{m}_2x = \epsilon_1\xi\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)y,$$

where dots mean differentiation with respect to τ , $\mu_1 = \mu / \omega$, $\tilde{m}_{1,2} = m_{1,2} / \omega_2$. It should be noted that parameters μ_1 and $\tilde{m}_{1,2}$ are dimensionless.

Further we will set in Eqs. (VI.20), as in the last section, $\delta = \epsilon \mu_1$, where ϵ is a variable parameter, and reject in these equations terms of order of ϵ_1 . As a result, we obtain the following equations:

$$\ddot{x} - \mu_1(1 - \alpha x^2)\dot{x} + x - \tilde{m}_1 y = 0, \quad (\text{VI.26})$$

$$\ddot{y} + \epsilon \mu_1 \dot{y} + \xi y - \tilde{m}_2 x = 0.$$

We will assume in Eqs. (VI.26) that the coefficient of nonlinearity α is small, so that the term $(1 - \alpha x^2)\dot{x}$ can be linearized subject to that x and y change according to harmonic law with complex frequency ω , i.e.

$$x = A_x \exp^{i(\omega\tau + \phi_x) + \text{c.c.}}, \quad y = A_y \exp^{i(\omega\tau + \phi_y) + \text{c.c.}}, \quad (\text{VI.27})$$

where A_x, A_y are amplitudes of variables x and y , and ϕ_x, ϕ_y are their phases.

Substituting (VI.23) into (VI.22) we obtain the following equations:

$$(1 - \omega^2 - i\omega\mu_1) \left(1 - \frac{\alpha \overline{A_x^2}}{4} \right) A_x - \tilde{m}_1 A_y e^{-i\varphi} + \text{c.c.} = 0, \quad (\text{VI.28})$$

$$(\xi - \omega^2 + i\omega\epsilon\mu_1) A_y - \tilde{m}_2 A_x e^{i\varphi} + \text{c.c.} = 0,$$

where $\phi = \phi_x - \phi_y$.

The condition of the vanishing of the determinant of linear system (VI.28) gives a complex equation coupling ω^2, ξ and $\alpha A_x^2 / 4$:

$$\left[1 - \omega^2 - i\omega\mu_1 \left(1 - \frac{\alpha \overline{A_x^2}}{4} \right) \right] \left(\xi - \omega^2 + i\epsilon\omega\mu_1 \right) - \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 = 0. \quad (\text{VI.29})$$

Real and imaginary parts of this equation are:

$$(1 - \omega^2)(\xi - \omega^2) + \epsilon\omega^2\mu_1^2 \left(1 - \frac{\alpha \overline{A_x^2}}{4} \right) - \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 = 0, \quad (\text{VI.30})$$

$$(1 - \omega^2)\epsilon\omega\mu_1 - (\xi - \omega^2)\omega\mu_1 \left(1 - \frac{\alpha \overline{A_x^2}}{4} \right) = 0.$$

From Eq. (VI.30) we find amplitude squared for variable x :

$$\overline{A_x^2} = 4 \left(1 - \epsilon \frac{1 - \omega^2}{\xi - \omega^2} \right). \quad (\text{VI.31})$$

Taking account of (VI.31), Eq. (VI.29) becomes:

$$[(1 - \omega^2)(\xi - \omega^2) + \epsilon\omega^2\mu_1^2] \left(1 - \frac{\alpha \overline{A_x^2}}{4} \right) - \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 = 0, \quad (\text{VI.32})$$

$$(1 - \omega^2)\epsilon\omega\mu_1 - (\xi - \omega^2)\omega\mu_1 \left(1 - \frac{\alpha \overline{A_x^2}}{4} \right) = 0.$$

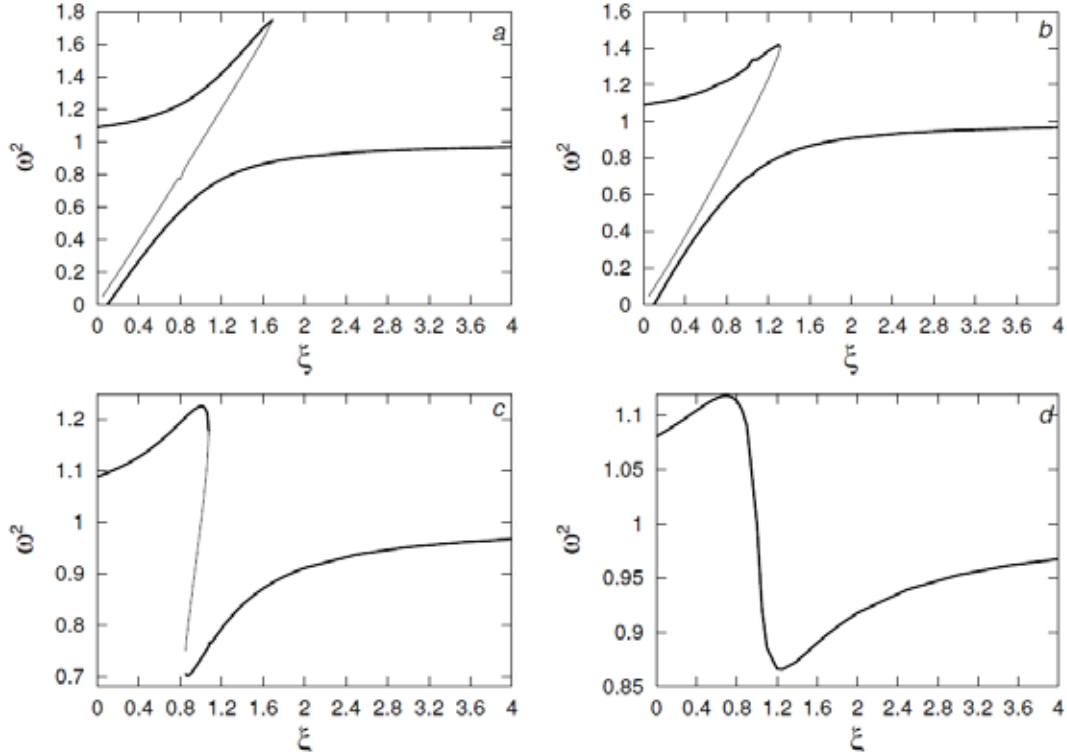


Fig. 10. Examples of the dependencies of ω^2 on ξ for $\mu_1 = 0.1, m_1 m_2 = 0.1, \epsilon = 0.5$ (a), $\epsilon = 1$ (b), $\epsilon = 2$ (c) and $\epsilon = 4$ (d) in the case of an oscillator with capacitive coupling between circuits

Substituting (VI.28) into Eq. (VI.26), we obtain equation for frequency ω :

$$\omega^6 - (1 + 2\xi - \epsilon^2 \mu_1^2) \omega^4 + (2\xi + \xi^2 - \epsilon^2 \mu_1^2 - \tilde{m}_1 \tilde{m}_2) \omega^2 - \xi + \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 = 0. \quad (\text{VI.33})$$

We see that Fig. 10 differs significantly from Figs. 7 for oscillator with inductively coupled circuits, whereas Figs. 11 and 8 are similar.

As for a generator with inductive coupling between the circuits, the dependencies shown in Fig. 10 and 11 are constructed without taking into account the stability of the solutions found. That is why they contain unstable pieces. Eqs. (VI.25), (VI.26) allow us to investigate the stability.

VII MODEL EQUATIONS FOR STALL FLUTTER. As a model for stall flutter we have taken a generator with additional circuit coupled with the main by capacitor. In so doing for the vortex separation we have used model equations with a noise sources $\eta x(t)$, $\eta z(t)$ in equations for F_x , F_z and model equations with a noise sources $\zeta x(t)$, $\zeta z(t)$ in equations for U_x , U_z . These equations are

$$\ddot{U}_x + 2\alpha_x \dot{U}_x + \omega_x^2 U_x = \frac{F_x}{m} + \eta_x(t), \quad \ddot{F}_x - \mu(1 - a_1 F_x^2) \dot{F}_x + \omega_{\text{stall}x}^2 F_x = m_1 U_x + \zeta_x(t), \quad (\text{VII.34})$$

$$\ddot{U}_z + 2\alpha_z \dot{U}_z + \omega_z^2 U_z = \frac{F_z}{m} + \eta_z(t), \quad \ddot{F}_z - \mu(1 - a_2 F_z^2) \dot{F}_z + \omega_{\text{stall}z}^2 F_z = m_2 U_z + \zeta_z(t) \quad (\text{VII.35})$$

where U_x and U_z are displacements of the additional circuit in x and z directions, F_x and F_z are aerodynamical forces in x and z directions, ω_x and ω_z are the natural frequencies of the additional circuit in x and z directions, $\omega_{\text{stall}x}$ and $\omega_{\text{stall}z}$ are the vortex stall frequencies in x and z directions, $\eta x(t)$ and $\eta z(t)$ are white noises of intensity Ku , $\zeta x(t)$ and $\zeta z(t)$ are white noises of intensity K_f .

Equations (VII.34) and (VII.35) describe two independent self-oscillatory systems each of which possess two degree of freedom. In terms of oscillation theory these systems can be

considered as generators with additional oscillatory circuits connected with the main ones by capacitors. It should be noted that terms $m_1 U_x(t)$ and $m_2 U_z(t)$ are responsible for the synchronization of vortex separation frequency by the additional circuits oscillations $U_x(t)$ and $U_z(t)$.

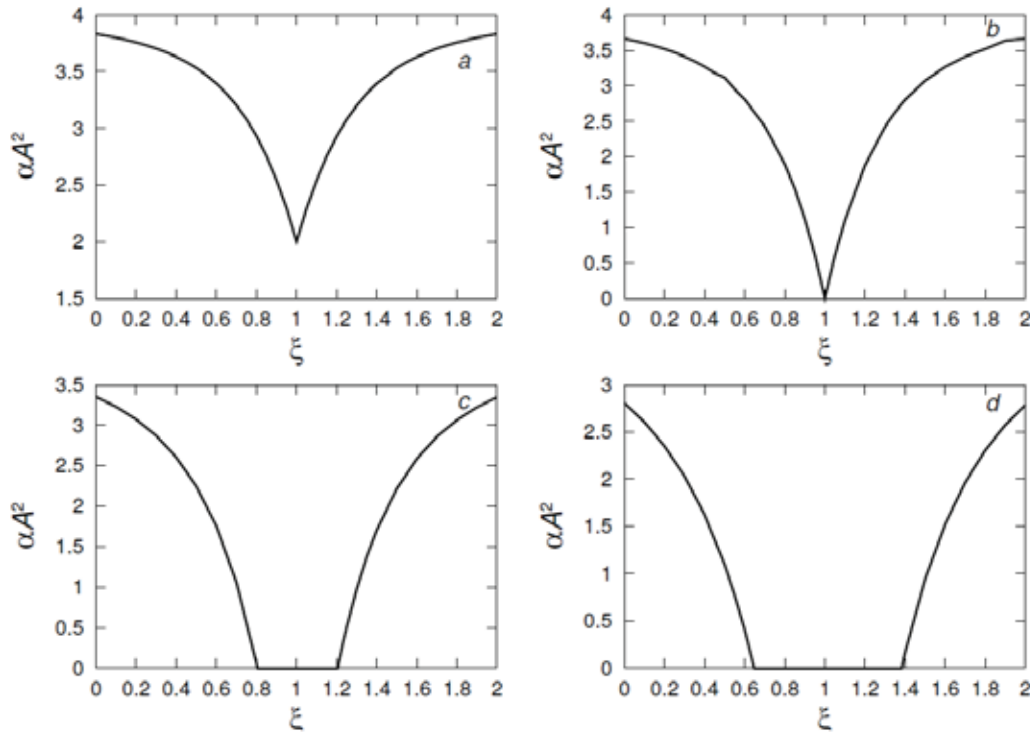


Fig. 11. Examples of the dependencies of oscillation amplitudes on the frequency mismatch ξ for $\mu_1 = 0.1$, $m_1 m_2 = 0.1$, $\epsilon = 0.5$ (a), (b) $\epsilon = 1$, (c) $\epsilon = 2$ and (d) $\epsilon = 4$ in the case of an oscillator with capacitive coupling between circuits

For brevity we will consider a system described by Eqs. (VII.34). This system describes the interaction between the self-oscillatory system defined by $F_x(t)$ and a passive oscillatory system defined by $U_x(t)$. If natural frequencies of each of this systems (ω_x and ω_{stallx}) differ essentially, then the system will be weakly interacting one, i.e. variables U_x and F_x will be practically independent. But if the frequencies are sufficiently close then synchronization may appear. Similar equations we can obtain for the system described by Eqs. (VII.35).

We will assume that $\omega_x^2 U_x \ll \ddot{U}_x$ and $\omega_z^2 U_z \ll \ddot{U}_z$. In this case the first of Eqs. (VII.34) can be rewritten approximately as

$$\dot{V}_x + 2\alpha_x V_x = \frac{F_x}{m} + \eta_x(t), \quad (\text{VII.36})$$

where $V_x = \dot{U}_x$ is the velocity of the additional circuit in x-direction.

Equation for self-oscillations of force F_x can be solved approximately for small μ in the absence of noise. In the case of immovable additional circuit, when $U_x = 0$, its approximate solution is:

$$F_x \approx A_x \cos(\omega_{stallx} t + \varphi_x), \quad (\text{VII.37})$$

where A_x is an oscillatory amplitude of force F_x , φ_x is its phase. It should be noted that formula (VII.37) is in the full accordance with the expression for lift force given in [27].

The first case was considered in two previous sections. Here we will consider the case, when the frequencies differ essentially, i.e./ the variables U_x and F_x are practically independent. We will suppose that the oscillatory process in the additional circuit (U_x) is incomparably more rapid than the vortex separation process (F_x), i.e. that $\omega_x \gg \omega_{stallx}$.

A solution of Eq. (VII.36) may be conveniently found as sums of two constituents: fast constituent V_x and slow constituent defined by function F_x .

The following Fokker-Planck equation corresponds to Eq. (VII.36) (see [38]):

$$\frac{\partial w(V_x, F_x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial V_x} \left[\left(2\alpha_x V_x - \frac{F_x}{m} \right) w(V_x, F_x, t) \right] + \frac{K_u}{2} \frac{\partial^2 w(V_x, F_x, t)}{\partial V_x^2}. \quad (\text{VII.38})$$

We will assume that solution Eq. (VII.38) differs slightly from $w_0(V_x)$, i.e.

$$w(V_x, F_x, t) = w_0(V_x) + \epsilon w_1(V_x) F_x(t), \quad (\text{VII.39})$$

where $w_0(V_x)$ and $w_1(V_x)$ are described by equations

$$2\alpha_x V_x w_0(V_x) + \frac{K_u}{2} \frac{\partial w_0(V_x)}{\partial V_x} = 0, \quad (\text{VII.40})$$

$$w_1(V_x) \frac{\partial F_x(t)}{\partial t} - F_x(t) \frac{\partial}{\partial V_x} \left[2\alpha_x V_x \frac{\partial w_1(V_x)}{\partial V_x} + \frac{K_u}{2} \frac{\partial w_1(V_x)}{\partial V_x} \right] = - \frac{\partial}{\partial V_x} \left(\frac{F_x(t)}{m} w_0(V_x) \right) \quad (\text{VII.41})$$

ϵ is a small parameter.

A solution of (Eq. VII.40) is

$$w_0(V_x) = C \exp \left(- \frac{2\alpha_x V_x^2}{K_u} \right), \quad (\text{VII.42})$$

where C is an arbitrary constant.

As followed from (VII.37) and (VII.41), functions $F_x(t)$ and $w_1(V_x)$ are periodic functions of time with period $T = 2\pi/\omega_{\text{stallx}}$. Amplitude of function $w_1(V_x)$ is defined by the right-hand member of (Eq. VII.41). It is the greater, the greater is the derivative of $w_0(V_x)$ over velocity V_x .

It follows from here that the location of maximum of a wave and its value are defined by not the wave maximal value of the wave amplitude, but mainly by the derivative of $w_0(V_x)$ over velocity V_x . It follows from here that the explanation of the freak and rogue waves given in work [51] is not right for all waves.

VIII Conclusion. As followed from our results that for systems with two and more numbers of degree of freedom the small parameter methods can give wrong results even for rather small coupling between the degrees of freedom. However, Russian researcher Poznyak [19] has shown that using the method of harmonic linearization gives results more close to numerical and experimental.

Using of model equations for vortex separation from the surface of the oscillating body allow us to calculate amplitudes and frequencies of self-oscillations excited due to this vortex separation, i.e. to solve the problem on stalling flatter. In so doing the effect of synchronization of the vortex separation frequency by natural oscillations of the streamlined body was discovered. This effect requires experimental examination.

References

1. Panovko Ya.G., Gubanov I.I. Stability and Oscillations of Elastic Systems. Moscow, Nauka, 1979 (in Russian).
2. Mandelshtam L.I. Lectures on Oscillations (1930–1932), Complete Works, vol. 4 (in Russian). Izd-vo AN SSSR, Moscow, 1955, pp. 241–260.
3. Richardson E.G. Aolian Tones. Proc. Phys. Soc. Lond., 1923, vol. 36, pp. 153–167.
4. Landa P.S. and McClintock P.V.E., Aolian tones and stall flutter of lengthy objects in fluid flows. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2010, vol. 43, 375101 - 375109.
5. Landa P.S. and P.V.E. McClintock. Nonlinear systems with fast and slow motions. Changes in the probability distribution for fast motions under the influence of slower ones. Physics Reports, June 2013.
6. Landa P.S., Ginevsky A.S. Use of mathematical models for the solution of "unsolvable" problems. In "Nonlinear Problems of Oscillation Theory and Control Theory. Vibrational

- Mechanics. Eds. V.V. Beletskii, D.A. Indeytsev, A.L. Fradkov. Institute of Theoretical Engineering RAS. SPB, Nauka, 2009, 349–367.
7. Landa P.S. Regular and Chaotic Oscillations. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2001.
 8. Landa P.S. Nonlinear oscillations and waves. URSS, Moscow, 2010.
 9. Landa P.S. Hypothesis on fluctuational origin of turbulence in parallel unclosed flows. AEN: Association of authors of scientific discoveries. Moscow, 1994, 1 A-008.
 10. Landa P.S., Trubetskov D.I. and Gusev V.A. Delusions versus reality in some physics problems: theory and experiment. Physics–Uspekhi, 2009, vol. 52, 235–255.
 11. Fedyaevskii K.K., Blyumina L.Kh. Hydrodynamics of body separation streamline. Moscow, Mashinostroenie, 1977 (in Russian).
 12. Belotserkovsky S.M. and Ginevsky A.S. Modeling of turbulent jets and wakes by discrete vortices method. izd-vo "Fiziko-matematicheskaya literatura", 1995 (in Russian).
 13. A Modern Course of Aeroelasticity. Ed. Dowell E.H. Kluwer Acad. Publ., 2004.
 14. Goldenblat I.I. Contemporary problems of vibration and stability of engineering constructions. Moscow: Gosstroyizdat, 1947 (in Russian).
 15. Rocard Y. Dynamique Générale des Vibrations. Paris, Masson et Cie, Editeurs, 1949.
 16. Rocard Y. Mechanical instability. Paris, Masson et Cie, Editeurs, 1954.
 17. Bisplinghoff R.L., Ashley H., Halfman R.L. (1955) Aeroelasticity. Addison-Wesley Publ. Comp. Inc., Cambridge Mass.
 18. Panovko Ya.G., Gubanova I.I. Stability and Oscillations of Elastic Systems. Moscow, Nauka, 1979 (in Russian).
 19. Poznyak E.L. On the faults of the small parameter method [], the problems of self-oscillations in systems with two degrees of freedom. Proc. of V Int. Conf. on Nonlinear Oscillations, vol. 3, 1970, p. 618. Izd-vo Instituta Matematiki Akademii Nauk USSR, Kiev
 20. Fershing G. Principles of Aeroelasticity. Moscow, Mashinostroenie, 1984 (in Russian).
 21. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, I (1892), II (1893), III (1899). Gauthier–Villars, Paris.
 22. Neimark Yu.I. Mathematical Models in Natural Science and Engineering, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2003.
 23. Neimark Yu.I. Mathematical Modeling as a Science and Art. Nizhnii Novgorod, University Press, 2010 (in Russian).
 24. Blekhman I.I., Myshkis A.D., Panovko Ya.G. Applied Mathematics: Topic, Logic, Characteristics of Approach. With examples from mechanics. Moscow, LKI Press, 2007.
 25. Landa P.S. Universality of oscillation theory laws. Types and role of mathematical models. Discrete Dynamics in Nature and Society, 1997, vol. 1, pp. 99–110.
 26. Landa P.S. Self-oscillations of a wire heated by electric current subject to tensoresistive effect (in Russian). Applied Nonlinear Dynamics, vol. 16, pp. 19–32, 2008.
 27. Bishop R.E.D., Hassan A.Y. The lift and drag forces on a circular cylinder in a flowing fluid. Proc. Royal Soc. (London), 1964, v. A277, pp. 32–50, 51–75.
 28. Karman Th. Ueber den Mechanismus des Flussesigkeitsund Luftwiderstands. Phys. Z., Bd. 13, 1912, SS. 49–59.
 29. Kazakevich M.I. Aerodynamics of Bridges. Moscow: Transport, 1987 (in Russian).
 30. Halfman R.L., Johnson H.C., Haley S.M. Evaluation of high-angle-of-attack aerodynamic-derivative data and stall-flutter prediction techniques. N.A.C.A.T.N. p. 2533, 1951.
 31. Strouhal V. von Uber eine besondere Art der Tonerregung. Ann. Phys. vol. 5, 1878, 216–251.
 32. Landau L.D. and Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. (Oxford: Butterworth and Heinemann), 1987.
 33. Mandelshtam L.I. Lectures on Oscillations (1930–1932), Complete Works, vol. 4 (in Russian). Izd-vo AN SSSR, Moscow, 1955, pp. 241–260. bibitemStrelkov:2005 Strelkov S.P. Introduction in Theory of Oscillations (in Russian). Moscow, 2005, izd-vo "Lan".

34. Andronov A.A., Witt A.A. On the mathematical theory of self-oscillatory systems with two degrees of freedom (in Russian). ZhTF, 1934, vol. 4, pp.122–136 (in Russian).
35. Van der Pol B. On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom. Phil. Mag., 1922, Ser. 6, vol. 43, No 256.
36. Strelkov S.P., Skibarko A.P. Qualitative investigation of the processes in a complex circuit oscillator. On the Van der Pol pulling theory. ZhTF, 1934, vol. 4, pp.158–171 (in Russian).
37. Teodorchik K.F. Self-Oscillatory Systems. Moscow, Gostekhizdat, 1952 (in Russian).
38. Landa P.S. Self-Oscillatory Systems with a Finite Number of degrees of freedom. URSS, 2009, pp. 54,130 (in Russian).
39. Pavlikhina M.A., Smirnov L.P. Vortex wake at the streamline of oscillated cylinders. Izv. AN SSSR, OTN, 1958, No 8, pp. 124–127 (in Russian).
40. Blyumina L.Kh., Fedyaevskii K.K. Study of the effect of forced cylinder oscillations in air flow on the mechanism of vortex separation. Izv. AN SSSR, MZhG, 1969, No 8, pp. 118–119 (in Russian).
41. Fyn Ya.Ts. Introduction to the aeroelasticity theory. Moscow, Fizmatgiz, 1959 (in Russian).
42. Roshko A. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, pp. 345–356.
43. Landa P.S. Self-Oscillations in Distributed Systems. URSS, Moscow, 2009, (in Russian)
44. Neimark Yu.I., Landa P.S. Stochastic and Chaotic Oscillations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1992.
45. Landa P.S. Stall flutter as one of mechanisms of excitation of self-oscillations of the electric power transmission line (in Russian). Applied Nonlinear Dynamics, 2009, vol. 16, pp. 3–15.
46. Bogolyubov N.N. Perturbation theory in nonlinear mechanics. In: Sb.Instituta stroit. mekhaniki AN, Moscow, 1950, vol. 14, pp. 9–34 (in Russian).
47. Bogolyubov N.N. and Mitropolsky Yu.A. Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. New York, Gordon and Breach, 1961.
48. Mitropolsky Yu.A. Averaging Method in Nonlinear Mechanics. Kiev: Naukova Dumka, 1971 (in Russian)
49. Annenkov S.Yu. and Badulin S.I. Multi-wave resonances and formation of high-amplitude waves in the ocean— Rogue Wavea 2000 (Brest, France, 2000). Eds. M.Olagnon, G.A. Athanassoulis. Ifremer, 2001, pp.205–213.
50. Janssen p.A.E.M. Nonlinear four-wave interactions and freak waves. J.Phys. Oceanogr. 2003, vol. 33, pp.863–884.
51. Kurkin A.A., Pelinovsky E.N. Waves — Slayers. Nizhniy Novgorod, 2004.

О ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ СОХРАНЯЮЩЕГО ПЛОЩАДЬ ОТОБРАЖЕНИЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ШАРА НАД ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Маркеев А.П.

Московский авиационный институт, Институт проблем механики РАН, Москва, Россия
anat-markeev@mail.ru

Аннотация. Рассматривается движение однородного шара в поле тяжести над абсолютно гладким желобом, имеющим форму эллиптического цилиндра с горизонтальной образующей. Соударения шара с желобом считаются абсолютно упругими. Существует движение, при котором шар движется вдоль вертикали, периодически соударяясь с желобом. Для задачи об орбитальной устойчивости этого периодического движения получено сохраняющее площадь отображение в виде степенного ряда с точностью до членов седьмой степени включительно относительно возмущений. Для некоторых частных случаев найдена производящая функция этого отображения.

1. Постановка задачи. Пусть однородный шар массы m движется в однородном поле тяжести над неподвижным абсолютно гладким желобом, представляющим собой поверхность эллиптического цилиндра, образующая которого горизонтальна. Движение рассматриваем в неподвижной системе координат $O\xi\eta\zeta$, оси $O\eta$ и $O\zeta$ которой направлены соответственно вертикально вверх и вдоль образующей желоба. Поверхность желоба задается соотношениями

$$\zeta = 0, \quad \frac{\xi^2}{d^2} + \frac{(\eta - l)^2}{l^2} = 1 \quad (0 \leq \eta \leq l). \quad (1)$$

При движении шар время от времени соударяется с поверхностью желоба. Считаем, что удар является абсолютно упругим.

В сделанных предположениях проекция скорости центра шара на горизонтальную ось $O\zeta$ во все время движения остается постоянной. Не ограничивая общности, примем ее равной нулю, и если пренебречь размерами шара, то придем к задаче о движении материальной точки веса mg в вертикальной плоскости $\zeta = 0$ над кривой $\eta = \varphi(\xi)$, где функция $\varphi(\xi)$ определяется вторым из соотношений (1). При малых значениях ξ эта функция задается степенным рядом вида

$$\eta = l \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{d} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{\xi}{d} \right)^4 + \frac{1}{16} \left(\frac{\xi}{d} \right)^6 + \frac{5}{128} \left(\frac{\xi}{d} \right)^8 + \dots \right]. \quad (2)$$

Существует движение точки, когда ее траектория лежит на вертикальной оси $O\eta$, а сама точка в результате соударений с кривой (2) в начале координат $\xi = \eta = 0$ периодически подскакивает на заданную высоту h . Период τ движения определяется равенством

$$\tau = 2 \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (3)$$

Задача об устойчивости этого периодического движения исследовалась ранее [1,2]. Анализ основывался на результатах по устойчивости неподвижной точки сохраняющего площадь отображения, отвечающего исследуемому периодическому движению. Полного решения задачи однако не получено, так как для некоторых значений параметров требуется разложение отображения в ряд в окрестности ее неподвижной точки до членов довольно высокой степени.

Целью данной статьи является получение явного вида упомянутого разложения отображения в ряд до членов седьмой степени включительно. Такого разложения (как показывает не приводящийся в статье анализ) достаточно для решения задачи об устойчивости периодического движения точки над дугой эллипса (2) при всех физически допустимых значениях параметров задачи. Кроме того, в некоторых важных случаях в статье получены производящие функции для рассматриваемых отображений.

2. Отображение. За обобщенные координаты примем величины ξ и $q = \eta - \varphi(\xi)$. Во все время движения выполняется неравенство $q \geq 0$. На координату ξ не накладывается никаких ограничений. Для обобщенных импульсов имеем следующие выражения:

$$p_\xi = m\dot{\xi} + m(\dot{q} + \varphi'(\xi))\varphi', \quad p = m\dot{\eta} = m(\dot{q} + \varphi'(\xi)), \quad (4)$$

где точкой и штрихом обозначается дифференцирование по времени t и координате ξ соответственно.

Функция Гамильтона при свободном полете точки над кривой (2) (когда $q > 0$) будет такой:

$$H = \frac{1}{2m}(1 + \varphi'^2)p^2 - \frac{1}{m}\varphi'pp_\xi + \frac{1}{2m}p_\xi^2 + mg(q + \varphi(\xi)). \quad (5)$$

При соударении точки с кривой (2) (когда $q = 0$) импульс p_ξ не изменяется [3]. Значения же p^- и p^+ импульса p до и после удара связаны следующим соотношением, получающимся из интеграла $H = const$ или из равенства $\dot{q}^+ = -\dot{q}^-$:

$$p^+ = -p^- + \frac{2\varphi'}{1 + \varphi'^2} p_\xi. \quad (6)$$

На изучаемом периодическом движении точки вдоль вертикали $H = mgh$. Возмущенное движение будем рассматривать на этом же уровне энергии.

Пусть непосредственно перед первым соударением $\xi = hu$, $p_\xi = m\sqrt{2gh}v$ ($u^2 + v^2 \ll 1$). Подставив эти значения ξ, p_ξ в интеграл $H = mgh$, учтя разложение (2) и тот факт, что во время удара величины ξ, p_ξ и q неизменны, можно найти выражение для значения p^+ импульса p после удара в виде ряда по степеням u, v . Для целей данной статьи достаточно получить этот ряд с точностью до членов седьмой степени включительно. Соответствующие аналитические вычисления проводились на компьютере. Имеем

$$p^+ = m\sqrt{2gh} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \left(1 + 2 \frac{\beta}{\alpha} \right) u^2 + \frac{\beta}{\alpha} uv - \frac{1}{2} v^2 + \dots \right]. \quad (7)$$

Здесь введены безразмерные параметры задачи:

$$\alpha = \frac{d^2}{l^2}, \quad \beta = \frac{h}{l}.$$

Для краткости члены выше второй степени в равенстве (7) явно не выписаны и обозначены многоточием.

После соударения начинается свободный полет материальной точки над кривой (2). Траекторией точки является парабола. Если принять, что первое соударение происходило в момент времени $t=0$, то во время свободного полета (когда $t>0$) справедливы равенства

$$\xi(t) = \dot{\xi}_0 t + \xi_0, \quad \eta(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \dot{\eta}_0 t + \eta_0. \quad (8)$$

Здесь нижним индексом «нуль» обозначаются значения соответствующих величин непосредственно после удара (т.е. при $t=0$). Эти значения находятся при помощи соотношений (2), (4) в виде разложений по степеням u, v . Для ξ_0 и $\dot{\eta}_0$, в частности, имеем конечные выражения: $\xi_0 = hu$, $\dot{\eta}_0 = p^+ / m$.

Во время свободного полета через промежуток времени t_1 материальная точка снова попадает на кривую (2) и происходит второе соударение. Непосредственно перед ним $\xi = hu_1$, $p_\xi = m\sqrt{2ghv_1}$. Величины u_1, v_1 будут аналитическими функциями от u, v . Эти функции и задают искомое отображение, сохраняющее площадь и обладающее неподвижной точкой $u=v=0$, соответствующей изучаемому периодическому движению материальной точки над кривой (2).

Величина t_1 является наименьшим положительным корнем уравнения $\eta(t_1) = \varphi(\xi(t_1))$. Очевидно, что при $u=v=0$ эта величина равна периоду τ исследуемого невозмущенного периодического движения. Учитывая равенства (2) и (7), можно найти разложение t_1 в ряд по степеням u, v . При помощи компьютерных вычислений это разложение было найдено до членов шестой степени включительно (именно такая точность здесь нужна для достижения целей статьи). Затем при помощи равенств (8) и (4) на компьютере было найдено искомое отображение $u, v \rightarrow u_1, v_1$ в виде

$$u_1 = au + bv + U_3 + U_5 + U_7 + \dots, \quad v_1 = cu + dv + V_3 + V_5 + V_7 + \dots \quad (9)$$

Здесь

$$a = 1 - 4\frac{\beta}{\alpha}, \quad b = 4, \quad c = 4\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2\frac{\beta}{\alpha}, \quad d = 1 - 4\frac{\beta}{\alpha}.$$

$$U_3 = \frac{1}{\alpha^4} A_3, V_3 = \frac{1}{2\alpha^5} B_3, U_5 = \frac{1}{8\alpha^7} A_5, V_5 = \frac{1}{16\alpha^8} B_5, U_7 = \frac{1}{32\alpha^{10}} A_7, V_7 = \frac{1}{64\alpha^{11}} B_7$$

$$A_k = \sum_{v+\mu=k} a_{v\mu} u^v v^\mu, \quad B_k = \sum_{v+\mu=k} b_{v\mu} u^v v^\mu \quad (k=3,5,7).$$

Коэффициенты $a_{v\mu}, b_{v\mu}$ зависят от параметров задачи α, β и вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} a_{30} &= 2\beta^2(4\beta^2 - \alpha^2\beta + \alpha^2), \quad a_{21} = -\alpha\beta(24\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2), \quad a_{12} = 4\alpha^2\beta(6\beta + \alpha), \\ a_{03} &= -2\alpha^3(4\beta + \alpha); \quad b_{30} = \beta^2[64\beta^4 - 48(\alpha+1)\beta^3 + 4\alpha(4\alpha+5)\beta^2 - 2\alpha^2(\alpha+4)\beta + \alpha^3] \\ b_{21} &= -4\alpha\beta^2[48\beta^3 - 12(2\alpha+3)\beta^2 + \alpha(3\alpha+8)\beta - \alpha^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{12} &= 2\alpha^2\beta[96\beta^3 - 24(\alpha+3)\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2], \quad b_{03} = -8\alpha^3\beta(8\beta^2 - 6\beta - \alpha); \\
a_{50} &= 4\beta^4[64\beta^4 - 32(2\alpha+1)\beta^3 + 16\alpha(3\alpha-1)\beta^2 - \alpha^2(3\alpha^2+16)\beta + 3\alpha^4], \\
a_{41} &= -\alpha\beta^2[1280\beta^5 - 128(8\alpha+5)\beta^4 + 96\alpha(5\alpha-3)\beta^3 + 4\alpha^2(4\alpha-39)\beta^2 + 2\alpha^3(\alpha-2)\beta + \alpha^4], \\
a_{32} &= 16\alpha^2\beta^3[160\beta^3 - 16(6\alpha+5)\beta^2 + 8\alpha(3\alpha-4)\beta + \alpha^3 - 8\alpha^2], \\
a_{23} &= -4\alpha^3\beta[640\beta^4 - 64(4\alpha+5)\beta^3 + 8\alpha(3\alpha-14)\beta^2 - 10\alpha^2\beta + \alpha^3], \\
a_{14} &= 64\alpha^4\beta^2[20\beta^2 - 2(2\alpha+5)\beta - 3\alpha], \quad a_{05} = -4\alpha^5(64\beta^3 - 32\beta^2 - 8\alpha\beta + \alpha^2); \\
b_{50} &= \beta^3[6144\beta^7 - 512(15\alpha+13)\beta^6 + 256(18\alpha^2+22\alpha+5)\beta^5 - 64\alpha(21\alpha^2+54\alpha+1)\beta^4 + \\
&\quad + 24\alpha^2(8\alpha^2+40\alpha+17)\beta^3 - 4\alpha^3(3\alpha^2+33\alpha+29)\beta^2 + 2\alpha^4(3\alpha+5)\beta + \alpha^5], \\
b_{41} &= -8\alpha\beta^4[3840\beta^5 - 320(12\alpha+13)\beta^4 + 32(5\alpha^2+84\alpha+25)\beta^3 - 16\alpha(18\alpha^2+69\alpha-1)\beta^2 + \\
&\quad + \alpha^2(15\alpha^2+176\alpha+112)\beta - 7\alpha^4 - 16\alpha^3], \\
b_{32} &= 4\alpha^2\beta^2[15360\beta^6 - 1280(9\alpha+13)\beta^5 + 128(24\alpha^2+58\alpha+25)\beta^4 - \\
&\quad - 48\alpha(5\alpha^2+35\alpha-6)\beta^3 + 44\alpha^2(2\alpha+3)\beta^2 + 2\alpha^3(\alpha-2)\beta + \alpha^4], \\
b_{23} &= -32\alpha^3\beta^3[1920\beta^4 - 160(6\alpha+13)\beta^3 + 8(15\alpha^2+64\alpha+50)\beta^2 - 8\alpha(3\alpha-8)\beta - 3\alpha^3], \\
b_{14} &= 4\alpha^4\beta[7680\beta^5 - 640(3\alpha+13)\beta^4 + 64(6\alpha+25)\beta^3 + 16\alpha(9\alpha+23)\beta^2 - 10\alpha^2\beta + \alpha^3], \\
b_{05} &= -128\alpha^5\beta^2[48\beta^3 - 52\beta^2 - 2(4\alpha-5)\beta + 3\alpha]; \\
a_{70} &= 8\beta^6[1024\beta^6 - 512(3\alpha+2)\beta^5 + 128(10\alpha^2+5\alpha+1)\beta^4 - 32\alpha(18\alpha^2+15\alpha-4)\beta^3 + \\
&\quad + 64\alpha^2(3\alpha^2+\alpha+2)\beta^2 - \alpha^3(5\alpha^3+104\alpha-32)\beta + 5\alpha^6 + 8\alpha^4], \\
a_{61} &= -\alpha\beta^5[57344\beta^8 - 8192(9\alpha+7)\beta^7 + 512(95\alpha^2+57\alpha+14)\beta^6 - \\
&\quad - 256\alpha(64\alpha^2+61\alpha-25)\beta^5 + 32\alpha^2(105\alpha^2+34\alpha+145)\beta^4 + \\
&\quad + 8\alpha^3(8\alpha^2-210\alpha+113)\beta^3 + 4\alpha^4(\alpha^2-5\alpha+2)\beta^2 + 2\alpha^5(\alpha-1)\beta + \alpha^6], \\
a_{52} &= 48\alpha^2\beta^5[3584\beta^5 - 256(15\alpha+14)\beta^4 + 64(30\alpha^2+22\alpha+7)\beta^3 - 32\alpha(7\alpha+11)(2\alpha-1)\beta^2 + \\
&\quad + 16\alpha^2(3\alpha^2+11)\beta + 2\alpha^5(\alpha-1)\beta + \alpha^5 - 22\alpha^4 + 24\alpha^3], \\
a_{43} &= -2\alpha^3\beta^2[14336\beta^7 - 20480(6\alpha+7)\beta^6 + 1280(34\alpha^2+31\alpha+14)\beta^5 - \\
&\quad - 128\alpha(48\alpha^2+50\alpha-95)\beta^4 + 16\alpha^2(15\alpha^2-44\alpha+245)\beta^3 - 4\alpha^3(26\alpha-71)\beta^2 + 2\alpha^4(\alpha-8)\beta + 3\alpha^5], \\
a_{34} &= 256\alpha^4\beta^4[1120\beta^4 - 80(9\alpha+14)\beta^3 + 20(8\alpha^2+9\alpha+7)\beta^2 - \\
&\quad - 5\alpha(2\alpha^2-\alpha-16)\beta - 4\alpha^3 + 15\alpha^2], \\
a_{25} &= -12\alpha^5\beta[14336\beta^6 - 2048(3\alpha+7)\beta^5 + 128(5\alpha^2+5\alpha+14)\beta^4 + 64\alpha(5\alpha+13)\beta^3 - \\
&\quad - 8\alpha^2(2\alpha-9)\beta^2 - 6\alpha^3\beta + \alpha^4], \\
a_{16} &= 512\alpha^6\beta^3[112\beta^3 - 8(3\alpha+14)\beta^2 - 2(4\alpha-7)\beta + 2\alpha^2 + 5\alpha], \\
a_{07} &= -8\alpha^7[1024\beta^5 - 1024\beta^4 - 64(3\alpha-2)\beta^3 + 32\alpha\beta^2 - 4\alpha^2\beta + \alpha^3]; \\
b_{70} &= \beta^4[32768\beta^{10} - 16384(35\alpha+29)\beta^9 + 4096(120\alpha^2+151\alpha+44)\beta^8 - \\
&\quad - 1024(235\alpha^3+470\alpha^2+115\alpha+14)\beta^7 + 256\alpha(280\alpha^3+862\alpha^2+387\alpha-22)\beta^6 - \\
&\quad - 64\alpha^2(189\alpha^3+1049\alpha^2+615\alpha+125)\beta^5 + 16\alpha^3(64\alpha^3+690\alpha^2+898\alpha+33)\beta^4 - \\
&\quad - 8\alpha^4(5\alpha^3+102\alpha^2+280\alpha+64)\beta^3 + 4\alpha^5(5\alpha^2+22\alpha+14)\beta^2 + 4\alpha^6(\alpha+1)\beta + \alpha^7],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{61} = & -16\alpha\beta^6[14336\alpha^7 - 1024(210\alpha + 203)\beta^6 + 256(585\alpha^2 + 888\alpha + 308)\beta^5 - \\
& - 128(440\alpha^3 + 1090\alpha^2 + 319\alpha + 49)\beta^4 + 16\alpha(729\alpha^3 + 3000\alpha^2 + 1634\alpha - 152)\beta^3 - 16\alpha^2(72\alpha^3 + 615\alpha^2 + \\
& + 464\alpha + 136)\beta^2 + \alpha^3(35\alpha^3 + 904\alpha^2 + 1768\alpha + 32)\beta - 19\alpha^6 - 136\alpha^5 - 40\alpha^4], \\
b_{52} = & 6\alpha^2\beta^3[114688\alpha^9 - 8192(175\alpha + 203)\beta^8 + 2048(380\alpha^2 + 719\alpha + 308)\beta^7 - 512(410\alpha^3 + \\
& + 1315\alpha^2 + 471\alpha + 98)\beta^6 + 128\alpha(208\alpha^3 + 1236\alpha^2 + 851\alpha - 150)\beta^5 - 160\alpha^2(7\alpha^3 + 115\alpha^2 + \\
& + 117\alpha + 63)\beta^4 + 8\alpha^3(74\alpha^2 + 294\alpha - 31)\beta^3 + 4\alpha^4(\alpha^2 - 11\alpha - 3)\beta^2 + 2\alpha^5(\alpha - 1)\beta + \alpha^6], \\
b_{43} = & -32\alpha^3\beta^5[35840\alpha^6 - 256(140\alpha + 203)\beta^5 + 128(111\alpha^2 + 275\alpha + 154)\beta^4 - \\
& - 64(380\alpha^3 + 1690\alpha^2 + 760\alpha + 245)\beta^3 + 8\alpha(175\alpha^3 + 1744\alpha^2 + 1620\alpha - 740)\beta^2 - \\
& - 16\alpha^2(28\alpha^2 + 36\alpha + 105)\beta - 15\alpha^5 - 22\alpha^4 - 72\alpha^3], \\
b_{34} = & 4\alpha^4\beta^2[286720\alpha^8 - 2048(105\alpha + 203)\beta^7 + 512(108\alpha^2 + 381\alpha + 308)\beta^6 - \\
& - 128(35\alpha^3 + 244\alpha^2 + 137\alpha + 98)\beta^5 + 64\alpha(54\alpha^2 + 85\alpha - 730)\beta^4 + 16\alpha^2(90\alpha^2 + \\
& + 331\alpha - 415)\beta^3 - 28\alpha^3(8\alpha + 7)\beta^2 + 2\alpha^4(\alpha - 8)\beta + 3\alpha^5], \\
b_{25} = & -512\alpha^5\beta^4[1344\alpha^5 - 96(70\alpha + 203)\beta^4 + 24(35\alpha^2 + 212\alpha + 308)\beta^3 + \\
& + 4(45\alpha - 147)\beta^2 - 3\alpha(20\alpha^2 + 53\alpha + 72)\beta + 12\alpha^3 - 15\alpha^2], \\
b_{16} = & 8\alpha^6\beta[28672\alpha^7 - 2048(35\alpha + 203)\beta^6 + 512(43\alpha + 308)\beta^5 + 128(75\alpha^2 + 197\alpha - \\
& - 98)\beta^4 - 32\alpha(81\alpha + 142)\beta^3 - 8\alpha^2(9\alpha + 19)\beta^2 - 6\alpha^3\beta + \alpha^4], \\
b_{07} = & -1024\alpha^7\beta^3[320\alpha^4 - 464\beta^3 - 8(9\alpha - 22)\beta^2 + 2(26\alpha - 7)\beta + 2\alpha^2 - 5\alpha].
\end{aligned}$$

Задача об орбитальной устойчивости рассматриваемого периодического движения эквивалентна задаче об устойчивости неподвижной точки $u = v = 0$ отображения (9).

Анализ линеаризованного отображения (9) показывает [1], что при выполнении неравенства $\beta > \alpha/2$ неподвижная точка $u = v = 0$ неустойчива, а при $\beta < \alpha/2$ имеет место устойчивость в первом приближении. Для полного строгого решения задачи об устойчивости на граничной прямой $\beta = \alpha/2$ и внутри области $\beta < \alpha/2$ требуется анализ нелинейного отображения. Условия устойчивости и неустойчивости могут быть выражены через коэффициенты специальным образом построенной производящей функции отображения [4]. Производящую функцию можно получить в виде степенного ряда при помощи алгоритма из статьи [5].

3. О производящей функции на границе области устойчивости. Пусть $\beta = \alpha/2$.

После замены переменных $u = 2x$, $v = y/2$ отображение (9) можно представить в виде композиции двух отображений. Одно отображение $x_*, y_* \rightarrow x_1, y_1$ задается равенством

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix}.$$

А второе отображение $x, y \rightarrow x_*, y_*$ близко к тождественному и неявно задается производящей функцией F :

$$x = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad y_* = \frac{\partial F}{\partial x_*}, \quad (10)$$

$$F = x_*y + F_4(x_*, y) + F_6(x_*, y) + \dots \quad (11)$$

где F_m - форма степени m относительно x_*, y ,

$$F_m = \sum_{r+s=m} f_{rs} x_*^r y^s. \quad (12)$$

Вычисления по алгоритму статьи [5] показали, что

$$\begin{aligned} f_{40} &= -\frac{1}{2}\alpha + 2, & f_{31} &= \alpha - 4, & f_{22} &= -\frac{3}{2}\alpha + 4, & f_{13} &= \alpha - 2, & f_{04} &= -\frac{1}{4}\alpha + \frac{13}{32}; \\ f_{60} &= -\frac{7}{2}\alpha^2 + \frac{25}{2}\alpha - \frac{64}{3}, & f_{51} &= \frac{27}{4}\alpha^2 - \frac{91}{2}\alpha + 72, & f_{42} &= -\frac{99}{8}\alpha^2 + \frac{1235}{16}\alpha - \frac{435}{4}, \\ f_{33} &= \frac{27}{2}\alpha^2 - \frac{151}{2}\alpha + \frac{280}{3}, & f_{24} &= -\frac{75}{8}\alpha^2 + \frac{715}{16}\alpha - 48, & f_{15} &= \frac{15}{4}\alpha^2 - 15\alpha + 14, \\ f_{06} &= -\frac{5}{8}\alpha^2 + \frac{69}{32}\alpha - \frac{455}{256}. \end{aligned}$$

4. О производящей функции отображения для значений параметров, лежащих внутри области устойчивости в первом приближении. Пусть $\beta < \alpha/2$. Положим

$$\sin \gamma = \frac{2\sqrt{2\beta}}{\alpha} \sqrt{\alpha - 2\beta}, \quad \cos \gamma = 1 - 4\frac{\beta}{\alpha}. \quad (13)$$

В переменных x, y , вводимых заменой

$$u = \frac{2}{\sqrt{\sin \gamma}} x, \quad v = \frac{\sqrt{\sin \gamma}}{2} y,$$

отображение (9) может быть представлено композицией двух отображений. Одно отображение $x_*, y_* \rightarrow x_1, y_1$ представляет собой поворот на угол γ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix}.$$

Второе отображение близко к тождественному и задается равенствами вида (10) – (12). Вычисления показали, что

$$\begin{aligned} f_{40} &= -\frac{\beta[256\beta^5 - 128(2\alpha+1)\beta^4 + 96\alpha(\alpha+1)\beta^3 - 4\alpha^2(4\alpha+9)\beta^2 + 2\alpha^3(\alpha+2)\beta - \alpha^4]}{4\alpha^4(\alpha-2\beta)}, \\ f_{31} &= \frac{2\sqrt{2\beta}\beta^2[64\beta^3 - 16(3\alpha+2)\beta^2 + 4\alpha(3\alpha+4)\beta - \alpha^3 - 4\alpha^2]}{\alpha^4\sqrt{\alpha-2\beta}}, \\ f_{22} &= -\frac{\beta[384\beta^4 - 192(\alpha+1)\beta^3 + 24\alpha(\alpha+2)\beta^2 - 6\alpha^2\beta - \alpha^3]}{2\alpha^4}, \\ f_{13} &= \frac{16\sqrt{2\beta(\alpha-2\beta)}\beta^3(4\beta - \alpha - 2)}{\alpha^4}, \quad f_{04} = -\frac{\beta(\alpha-2\beta)[64\beta^3 - 32\beta^2 - 8\alpha\beta - \alpha^2]}{4\alpha^4}. \end{aligned}$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00068) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

Литература

1. Маркеев А.П. О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями. - Изв. РАН, МТТ. 1996. №2. С.37-54.
2. Маркеев А.П. О критическом случае резонанса четвертого порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы. – ПММ. 1997. Т.61. Вып.3. С. 369-376. Аппель П. Теоретическая механика. Т.2. М.: Физматлит, 1960. 487 с.
3. Маркеев А.П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем.- Изв. РАН, МТТ. 2004. №6. С.3-12.
4. Маркеев А.П. Об одном способе аналитического представления отображений, сохраняющих площадь. – ПММ. 2014. Т.78. Вып.5. С. 611-624.

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА ВОКРУГ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСИ ПРИ НАЛИЧИИ СОУДАРЕНИЙ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

Маркеев А.П.¹, Чуркина Т.Е.²

¹ИПМех РАН, МАИ, Москва, Россия, markeev@ipmnet.ru

²МАИ, Москва, Россия, tatiana802@mail.ru

Аннотация. Рассмотрено движение однородного эллипсоида вращения в поле тяжести над неподвижной горизонтальной плоскостью. Плоскость считаем абсолютно гладкой. Движение тела происходит с соударениями о плоскость, удар считается абсолютно упругим. В невозмущенном движении тело вращается вокруг горизонтальной оси с постоянной угловой скоростью, а центр его тяжести в промежутках между соударениями движется по фиксированной вертикали. Проведено в первом (линейном) приближении исследование устойчивости такого движения относительно угла отклонения оси симметрии эллипсоида от вертикали. В плоскости параметров построено счетное множество чередующихся зон неустойчивости и устойчивости в первом приближении.

Пусть однородный твердый эллипсоид вращения движется в однородном поле силы тяжести над неподвижной горизонтальной плоскостью. Плоскость считаем абсолютно гладкой. Движение тела происходит с соударениями о плоскость, удар считается абсолютно упругим.

Пусть $Oxyz$ – неподвижная система координат с началом в произвольной точке O горизонтальной плоскости. Ось Oz направлена вертикально вверх. Координаты центра тяжести G эллипсоида обозначим x, y, z . Пусть $G\xi\eta\zeta$ – неподвижно связанная с ним система координат, оси которой направлены вдоль его главных центральных осей инерции. В этой системе координат эллипсоид имеет уравнение $\xi^2 a^{-2} + \eta^2 a^{-2} + \zeta^2 c^{-2} = 1$. Ориентация тела относительно абсолютного пространства определяется углами Эйлера ψ, θ, φ , которые вводятся обычным образом.

Пусть m – масса тела, g – ускорение свободного падения, A, B, C – моменты инерции тела относительно осей $G\xi, G\eta$ и $G\zeta$ ($A=B=(a^2+c^2)m/5, C=2ma^2/5$). Через p, q, r обозначим проекции абсолютной угловой скорости тела на эти оси [1]:

$$\omega_\xi = \psi\gamma_1 + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_\eta = \psi\gamma_2 - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad \omega_\zeta = \psi\gamma_3 + \dot{\varphi}.$$

Здесь $\gamma_1 = \sin\theta \sin\varphi, \gamma_2 = \sin\theta \cos\varphi, \gamma_3 = \cos\theta$ – компоненты единичного вектора оси Oz в системе координат $G\xi\eta\zeta$.

В невозмущенном движении тело вращается вокруг горизонтальной оси $G\xi$ с постоянной угловой скоростью ω , а центр его тяжести в промежутках между соударениями движется по фиксированной вертикали $x=0, y=0$, проходящей через центр масс тела. В этом случае

$$\theta = \pi/2, \quad \psi = 0, \quad \omega_\xi = 0, \quad \omega_\eta = 0, \quad \omega_\zeta = \dot{\varphi} = \omega = \text{const}, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0.$$

Расстояние от центра масс тела до горизонтальной плоскости, проходящей через наинизшую точку поверхности тела равно d и

$$d = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}. \quad (1)$$

Далее вместо координаты z будем использовать величину $q = z - d$. Во все время движения $q \geq 0$, а при $q = 0$ происходит абсолютно упругий удар тела о плоскость Oxy . В момент удара знак $\dot{q}$ меняется на противоположный [2]. В свободном полете движению эллипсоида отвечает функция Лагранжа

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + C\omega_\zeta^2) - mg(q + d) = \\ &= \frac{m}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left(\dot{q} + \frac{\sin \theta \cos \theta (a^2 - c^2) \dot{\theta}}{d} \right)^2 \right) + \\ &+ \frac{(a^2 + c^2)m}{10} (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{a^2 m}{5} (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi})^2 - mg(q + d). \end{aligned} \quad (2)$$

При ударе неизменны все обобщенные координаты $x, y, q, \psi, \theta, \phi$ и все обобщенные импульсы, кроме импульса p , соответствующего обобщенной координате q [2].

Поскольку (2) не содержит x, y, ψ и ϕ , то во все время движения имеют место следующие четыре интеграла

$$\begin{aligned} p_x &= m\dot{x} = C_x, \quad p_y = m\dot{y} = C_y, \\ p_\psi &= \frac{(a^2 + c^2)m}{5} \dot{\psi} \sin^2 \theta + \frac{2a^2 m}{5} (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) \cos \theta = C_\psi, \\ p_\phi &= \frac{2a^2 m}{5} (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) = C_\phi. \end{aligned}$$

Здесь C_x, C_y, C_ψ, C_ϕ – константы. Поскольку мы считаем, что центр тяжести эллипсоида движется вдоль фиксированной вертикали, то $C_x = C_y = 0$. А в случае вращения вокруг горизонтальной оси $C_\phi = \frac{2a^2 m}{5} \omega, C_\psi = 0$.

Во время свободного полета справедливы следующие уравнения движения: $\ddot{z} = -g$ и

$$\ddot{\theta} = \Omega^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \quad \left(\Omega = \frac{2a^2}{a^2 + c^2} \omega \right). \quad (3)$$

Введем импульсы

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \left(\dot{q} + \frac{\sin \theta \cos \theta (a^2 - c^2) \dot{\theta}}{d} \right) = m\dot{z}, \quad (4)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \left(\dot{q} + \frac{\sin \theta \cos \theta (a^2 - c^2) \dot{\theta}}{d} \right) \frac{\sin \theta \cos \theta (a^2 - c^2)}{d} + \frac{a^2 + c^2}{5} m \dot{\theta}, \quad (5)$$

Функция Гамильтона имеет следующий вид

$$H = \frac{\left(-5 \cos^4 \theta (a^2 - c^2)^2 + 2 \cos^2 \theta (a^2 - c^2)(2a^2 - 3c^2) + a^2(a^2 + c^2)\right) p^2}{2m(a^2 + c^2)d^2} +$$

$$+ \frac{5}{2} \frac{p_\theta^2}{m(a^2 + c^2)} - \frac{5(a^2 - c^2) \cos \theta \sin \theta p_\theta p}{m(a^2 + c^2)d} -$$

$$- \frac{m(3a^2 \cos^2 \theta - c^2 \sin^2 \theta - a^2)a^2 \omega^2}{5(a^2 + c^2) \sin^2 \theta} + (q + d)mg.$$

Будем считать, что для возмущенного движения, также как и для невозмущенного, имеет место интеграл

$$H = mg(h + a) + \frac{ma^2}{5} \omega^2. \quad (6)$$

где h – высота подскока ближайшей к плоскости точки эллипсоида.

Введем обозначения

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} + x, \quad p_{\theta_0} = \sqrt{\frac{g}{2h}} \frac{ma^2}{5} y, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} + x_1, \quad p_{\theta_1} = \sqrt{\frac{g}{2h}} \frac{ma^2}{5} y_1.$$

Из (6) при $q = 0$ значение импульса p непосредственно после удара равно

$$p^+ = m\sqrt{2gh} + O_2 \quad (7)$$

Здесь и далее O_n – члены не ниже n -й степени относительно x и y .

Значит из (4), (5), (7)

$$\dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{2g}{h}} \left(\frac{5h(a^2 - c^2)}{a(a^2 + c^2)} x + \frac{a^2}{2(a^2 + c^2)} y \right) + O_3. \quad (8)$$

При $t = 0$ высота z центра масс эллипсоида равна

$$z(0) = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta(0) + c^2 \cos^2 \theta(0)} = a + O_2.$$

Далее

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad \dot{z}(t) = \dot{z}_0 - g t \quad (\dot{z}_0 = \dot{z}(0) = \frac{p^+}{m}). \quad (9)$$

Решение дифференциального уравнения (3) ищется в виде ряда по степеням C_1 и C_2 , где $C_1 = \theta(0) - \frac{\pi}{2} = x$, $C_2 = \dot{\theta}(0)/\Omega$ (при этом $\dot{\theta}(0)$ определяется равенством (8)):

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} + C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t + \dots \quad (10)$$

Здесь многоточием обозначены члены не ниже третьего порядка относительно величин C_1 и C_2 .

Время t_1 окончания полета определяется из уравнения $z(t) - d = 0$ ($z(t)$ и θ определяются формулами (9), (10)), $t_1 = \tau + O_2$, $\tau = 2\sqrt{2h/g}$.

Теперь найдем $x_1 = \theta(t_1) - \frac{\pi}{2}$ и $y_1 = \frac{5}{ma^2} \sqrt{\frac{2h}{g}} p_\theta(t_1)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_{11}x + z_{12}y + O_3, \\ y_1 &= z_{21}x + z_{22}y + O_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Где величины z_{ij} являются элементами матрицы $\mathbf{Z}$ и определяются следующими соотношениями

$$z_{11} = z_{22} = \cos \tilde{a} + \tilde{a}\tilde{b} \sin \tilde{a}, \quad z_{12} = \frac{\sin \tilde{a}}{\omega\tau}, \quad z_{21} = \omega\tau((\tilde{a}^2\tilde{b}^2 - 1)\sin \tilde{a} + 2\tilde{a}\tilde{b} \cos \tilde{a}).$$

$$\text{Здесь } \tilde{a} = \Omega\tau, \quad \tilde{b} = \frac{5(a^2 - c^2)g}{2a(a^2 + c^2)\Omega^2}$$

Для устойчивости движения в первом приближении достаточно, чтобы характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{Z}$

$$\rho^2 - 2\kappa\rho + 1 = 0 \quad (\kappa = \cos \tilde{a} + \tilde{a}\tilde{b} \sin \tilde{a}).$$

имело корни с модулями, меньшими единицы (т.е. чтобы выполнялось соотношение $|\kappa| < 1$) [3, 4]. При наличии корней с модулями, большими единицы (т.е. при $|\kappa| > 1$), имеет место неустойчивость при любом выборе нелинейных слагаемых в правых частях равенств (11). При отсутствии таковых корней, но при наличии корней с модулями, равными единице ($|\kappa| = 1$), для устойчивости движения в линейном приближении необходимо, чтобы матрица $\mathbf{Z}$, приводилась к диагональной форме [3].

Т.к. неравенство $|\kappa| < 1$ приводится к системе неравенств

$$\begin{cases} -\operatorname{ctg} \frac{\tilde{a}}{2} < \tilde{a}\tilde{b} < \operatorname{tg} \frac{\tilde{a}}{2}, & 2\pi k < \tilde{a} < \pi + 2\pi k, \quad k \in 0, 1, 2, \dots, \\ \operatorname{tg} \frac{\tilde{a}}{2} < \tilde{a}\tilde{b} < -\operatorname{ctg} \frac{\tilde{a}}{2}, & \pi + 2\pi k < \tilde{a} < 2\pi + 2\pi k, \quad k \in 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

то в плоскости параметров $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ существует счетное множество чередующихся зон неустойчивости и устойчивости в первом приближении, которые представлены на рисунке 1 (зоны неустойчивости заштрихованы).

Рассмотрим отдельно некоторые важные частные случаи значений параметров задачи.

Случай движения шара. Пусть $a=c$. В этом случае параметр $\tilde{b}=0$ (за исключением ситуации, когда $\omega=0$ и значение $\tilde{b}$ не определено). На рисунке 1 этому случаю соответствует горизонтальная ось $\tilde{b}=0$. При этом $\kappa = \cos \tilde{a}$ и $|\kappa| \leq 1$ для любых значений параметра $\tilde{a}$. Очевидно, что при всех $\tilde{a} \neq \pi k$, $k=0, 1, 2, \dots$ движение устойчиво в первом приближении. Для значений $\tilde{a} = \pi k$, $k=1, 2, \dots$ матрица $\mathbf{Z}$ принимает вид

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix},$$

т.е. имеет диагональную форму. Таким образом, движение вращающегося шара,

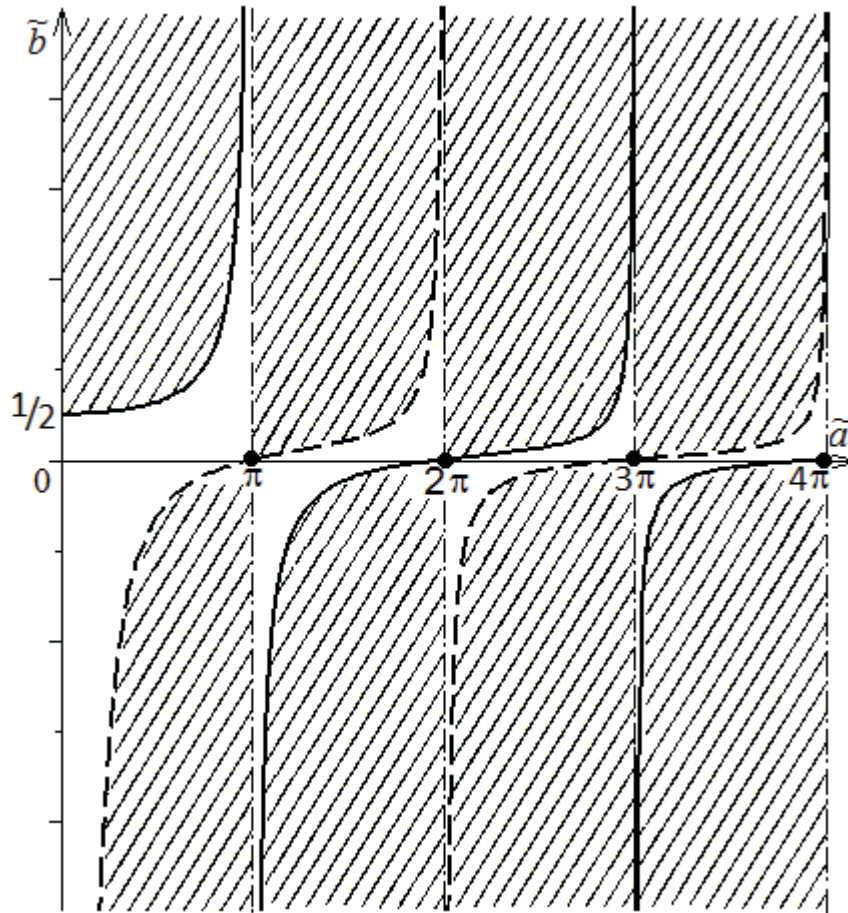


Рис.1. Области неустойчивости и устойчивости в первом приближении

подскакивающего над неподвижной горизонтальной плоскостью, устойчиво в первом приближении. На рисунке 1 жирными точками отмечены соответствующие значения параметров на оси $\tilde{b}=0$, для которых движение устойчиво в первом приближении.

Заметим, что, если шар либо не вращается, либо не подпрыгивает над плоскостью ($\tilde{a}=0$), то в этом случае движение неустойчиво.

Случай невращающегося подскакивающего эллипсоида. Пусть $\omega=0$, $a \neq c$, $h \neq 0$. Вычислим значение κ при $\omega \rightarrow 0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \kappa = 1 + \frac{20h(a^2 - c^2)}{a(a^2 + c^2)}.$$

Легко видеть, что при $a > c$ $|\kappa| > 1$, и имеет место неустойчивость движения. Если $a < c$, но при этом $\kappa < -1$ (т.е. $h > \frac{a(a^2 + c^2)}{10(c^2 - a^2)}$) то движение также неустойчиво. При одновременном

выполнении неравенств $a < c$ и $h < \frac{a(a^2 + c^2)}{10(c^2 - a^2)}$ движение устойчиво в линейном

приближении. Если же $h = \frac{a(a^2 + c^2)}{10(c^2 - a^2)}$, то $\kappa = -1$ и матрица $\mathbf{Z}$ не приводится к

диагональному виду, т.к. принимает следующий вид

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} -1 & \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \Omega \tau}{\omega \tau} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2a^2}{a^2 + c^2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, движение неустойчиво в первом приближении.

Случай неподскакивающего вращающегося эллипсоида. Пусть $h=0$, $a \neq c$, $\omega \neq 0$. В этом случае $\tau = 0$ (или, что то же самое, $\tilde{a}=0$). При этом удара не происходит. Записав соответствующие линеаризованные уравнения возмущенного движения, можно получить, что движение устойчиво в первом приближении при выполнении следующего условия

$$\frac{5g(a^4 - c^4)}{4a^5\omega^2} < 1 \text{ или, что то же самое, } \tilde{b} < \frac{1}{2} \quad (12)$$

При обратном знаке неравенства движение неустойчиво. Условие (12) выполнено при $a < c$ для любого значения ω . Если же $a > c$, то для устойчивости движения в первом приближении дополнительно накладывается ограничение на угловую скорость:

$$\omega > \frac{1}{2a^2} \sqrt{\frac{5g}{a}(a^4 - c^4)}.$$

На рисунке 1 точкой, разделяющей область устойчивости в первом приближении от области неустойчивости, является точка $(\tilde{a}; \tilde{b}) = (0; 1/2)$, устойчивость в которой исследована ниже.

Случай неподскакивающего невращающегося (покоящегося) эллипсоида. Несложно проверить, что при $c > a$ потенциальная энергия $\Pi = mgd$, где d определяется соотношением (1), при $\theta = \pi/2$ имеет строгий минимум и положение равновесия в рассматриваемом случае устойчиво, и неустойчиво при $c < a$.

Отдельно проведем исследование на вертикальных (штрихпунктирные линии на рисунке 1) и криволинейных границах областей устойчивости в первом приближении (сплошные и штриховые линии на рисунке 1).

1) Пусть сначала $\tilde{a} = 2\pi k$, $k=1, 2, \dots$ и $\tilde{b} \neq 0$. При этом $\kappa = 1$. В данном случае матрица $\mathbf{Z}$ такова

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4\pi k \omega \tau \tilde{b} & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{Z}$ не приводится к диагональной форме, что означает, что движение неустойчиво в первом приближении.

2) Пусть теперь $\tilde{a} = \pi + 2\pi k$, $k=0, 1, 2, \dots$. При этом $\kappa = -1$. В данном случае матрица $\mathbf{Z}$ представляется в виде

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2(\pi + 2\pi k) \omega \tau \tilde{b} & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{Z}$ не приводится к диагональной форме, что означает, что движение неустойчиво в первом приближении.

3) Предположим, что $\tilde{b} = \frac{\operatorname{tg}(\tilde{a}/2)}{\tilde{a}}$. При этом $\kappa = 1$ и при $2\pi k < \tilde{a} < \pi + 2\pi k$, $k \in 0, 1, 2, \dots$ граница является верхней для области устойчивости в первом приближении, а при $\pi + 2\pi k < \tilde{a} < 2\pi + 2\pi k$, $k \in 0, 1, 2, \dots$ – нижней (на рисунке 1 эти границы обозначены сплошными линиями). В данном случае матрица $\mathbf{Z}$ такова

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin \tilde{a}}{\omega \tau} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ при } \omega \tau \neq 0 \text{ и } \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2a^2}{a^2 + c^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ при } \omega \tau = 0.$$

Матрица $\mathbf{Z}$ не приводится к диагональной форме, что означает, что движение неустойчиво в первом приближении. Отметим, что случаю $\omega \tau = 0$ на рисунке 1 соответствует точка с координатами $(\tilde{a}; \tilde{b}) = (0; 1/2)$.

4) Предположим, что $\tilde{b} = -\frac{\operatorname{ctg}(\tilde{a}/2)}{\tilde{a}}$. При этом $\kappa = -1$ и при $2\pi k < \tilde{a} < \pi + 2\pi k$, $k \in 0, 1, 2, \dots$ граница является нижней для области устойчивости в первом приближении, а при $\pi + 2\pi k < \tilde{a} < 2\pi + 2\pi k$, $k \in 0, 1, 2, \dots$ – верхней (на рисунке 1 эти границы обозначены штриховыми линиями). В данном случае матрица $\mathbf{Z}$ такова

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\sin \tilde{a}}{\omega \tau} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{Z}$ не приводится к диагональной форме, что означает, что движение неустойчиво в первом приближении.

Таким образом, проведенное исследование показывает, что вращение эллипсоида вокруг горизонтальной оси при наличии соударений с горизонтальной плоскостью устойчиво в линейном приближении для значений параметром внутри области устойчивости в первом приближении, в счетном множестве точек оси $\tilde{b} = 0$ и для $h=0$ при выполнении некоторых дополнительных условий на значения параметров задачи. Для остальных значений параметров, принадлежащих границе области устойчивости в первом приближении, имеет место неустойчивость.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

Литература

1. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Редакция журнала «Регулярная и хаотическая динамика» ЧеРо, 1999. 572 с.
2. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматлит, 1960. 487 с.
3. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 396 с.
4. Ляпунов А.М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах // Собр. соч. Т. 1. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 327-401.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС НАНОКОНДЕНСАТОРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Морозов Н.Ф.¹, Индейцев Д.А.², Скубов Д.Ю.³, Штукин Л.В.⁴

¹СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия, morozov@nm1016.spb.edu

²ИПМАШ РАН, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия, dmitry.indeitsev@gmail.com

³ИПМАШ РАН, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия, skubov.dsk@gmail.com

⁴ИПМАШ РАН, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия, lvtvsh4749@gmail.com

Аннотация. В настоящей работе исследуется новый тип нано-электромеханической системы (НЭМС), использующий эффект параметрического резонанса. Основная его идея состоит в получении параметрического резонанса колебаний средней внутренней пластины двойного конденсатора, на каждую из составляющих которого подается высокочастотное гармоническое напряжение. Дифференциальное включение двойного конденсатора со средней колеблющейся обкладкой, в отличие от схемы НЭМС, исследованной в [1], позволяет уточнить зону параметрического резонанса и увеличить область восприятия посторонней нано-частицы, прилипание которой изменяет зону резонанса.

Настоящая работа является продолжением работ [1,2] посвященных определению спектральных характеристик графенового нанослоя при осаждении на нем нано-частицы. Способом определения таких характеристик, по сути основной частоты свободных колебаний, служит «конструирование» НЭМС, обладающей высокой чувствительностью к малому изменению инерционных параметров гибкого нанослоя. Как и в предыдущих работах графеновый слой и проводящие поверхности являются обкладками конденсатора, но в данном случае проводящий нанослой служит средней обкладкой двойного конденсатора. Изменение емкостей слоев конденсатора под действием прогиба среднего слоя ведет к появлению кулоновского усилия, пропорционального разности квадратов меняющихся зарядов внешних обкладок. Под действием гармонических напряжений приложенных к обеим обкладкам оказывается возможной потеря устойчивости симметричного положения среднего слоя и возбуждение его параметрического резонанса. Дифференциальное включение среднего слоя обуславливает симметрию зоны параметрического резонанса, что облегчает измерение его спектральных характеристик.

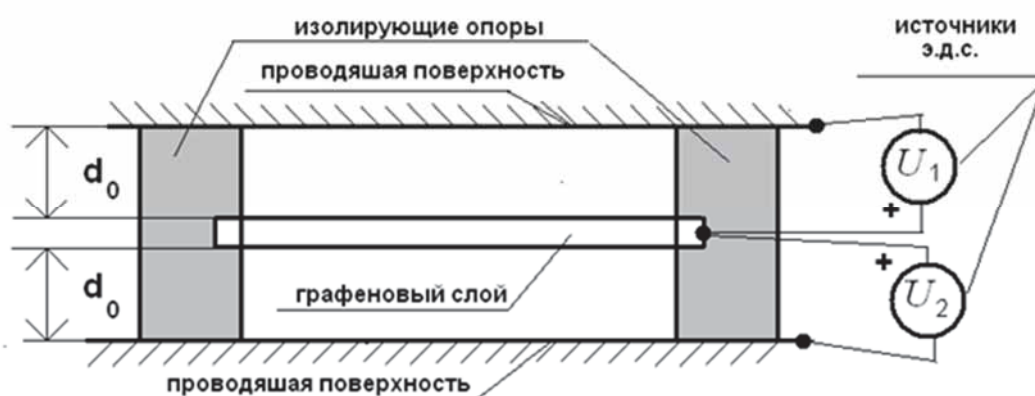


Рис.1 Физическая модель

Под действием сил взаимного притяжения вызванных силами взаимодействия обкладок и среднего проводящего слоя возникают симметричные гармонические колебания без постоянной составляющей с частотами равными частотам приложенных напряжений

$$U_1 = U_0 \sin \omega_1 t, U_2 = U_0 \sin \omega_2 t \quad (1)$$

Система уравнений Лагранжа-Максвелла [3] взаимосвязанной динамики двухслойного конденсатора, на обкладки которого подаются синфазные гармонические напряжения одинаковой амплитуды:

$$R\dot{Q}_2 + \frac{1}{C_2}Q_2 = U_2(t), \quad R\dot{Q}_1 + \frac{1}{C_1}Q_1 = U_1(t),$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx - \frac{Q_1^2}{2C_1^2} \frac{dC_1}{dx} + \frac{Q_2^2}{2C_2^2} \frac{dC_2}{dx} = 0 \quad (2)$$

Последним двум слагаемым второго из уравнений (2) отвечают усилия, действующие на среднюю активную движущуюся обкладку, где емкости слоев, зависящие от смещения среднего слоя x , определяются выражениями:

$$C_1 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d_0 - x(t)}, \quad C_2 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d_0 + x(t)} \quad (3)$$

Усилия притяжения обкладок противоположно направлены и за счет дифференциального включения не имеют постоянной составляющей, что принципиально отличает такой тип НЭМС от исследованной в статье [1].

Здесь неизвестные переменные: заряды обкладок и деформация (прогиб средней обкладки). Неавтономность системы (2) обусловлена приложением к обоим конденсаторам (Рис.1) гармонических напряжений постоянной амплитуды и частоты. В дальнейшем амплитуды и частоты напряжений полагаются равными, хотя может быть интересен и случай малого рассогласования частот, приводящий к биениям средней движущейся обкладки. Линейный случай биений двуслойного графенового резонатора рассмотрен в [2]. Далее система (2) переписывается в безразмерном виде, вводятся безразмерные переменные:

$$q_1 = \frac{Q_1}{Q_0}, q_2 = \frac{Q_2}{Q_0}, \xi = \frac{x}{d_0}, \Omega_i = \frac{\omega_i}{\lambda}$$

относительно указанных ниже базисных величин:

$$\lambda^2 = \frac{c}{m}, \quad C_0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d_0}, \quad Q_0 = C_0 U_0$$

Здесь λ – частота малых свободных колебаний графенового слоя (среднего слоя конденсатора). Емкости слоев как функции безразмерного прогиба средней активной обкладки:

$$C_1 = C_0 \frac{1}{1-\xi}, \quad C_2 = C_0 \frac{1}{1+\xi}$$

Интересно, что за счет воздействия гармонических напряжений при росте их амплитуды частота механических колебаний падает, в то время как амплитуда параметрического возмущения растет.

Уравнения взаимосвязанной динамики электромеханической системы в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 + \kappa(1 - \xi)q_1 &= \kappa\tilde{u} \sin\Omega_1\tau, \\
\dot{q}_2 + \kappa(1 + \xi)q_2 &= \kappa\tilde{u} \sin\Omega_2\tau, \\
\ddot{\xi} + 2n\dot{\xi} + \xi + \alpha(q_2^2 - q_1^2) &= 0
\end{aligned}
\tag{4}$$

Ясно, что в уравнении механических колебаний (третьем из (4)) кулоновское усилие зависит от разности квадратов зарядов обкладок. В системе уравнений (4) введены основные безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{C_0 U_0^2}{2m\lambda^2 d_0^2}, \quad 2n = \frac{\beta}{\lambda}, \quad \kappa = \frac{1}{RC_0\lambda},$$

Считаем далее большим параметр $\kappa = \frac{\tilde{\kappa}}{\varepsilon}, \tilde{\kappa} \sim O(1)$, т.е. период свободных колебаний обкладки полагается много больше времени разрядки конденсатора. Тогда можно пренебречь производной в первых двух уравнениях системы (4), полагая, что установление периодического режима электрической цепи происходит намного быстрее установления стационарного режима механических колебаний. Считая частоты напряжений равными, обозначим безразмерные частоты и амплитуды напряжений как $\frac{\omega}{\lambda} = \tilde{\omega}$, $\tilde{u} = \frac{U}{U_0}$, тогда для зарядов обкладок получаем выражения

$$q_1 = \frac{\tilde{u}}{1-\xi} \sin \tilde{\omega}\tau, \quad q_2 = \frac{\tilde{u}}{1+\xi} \sin \tilde{\omega}\tau \tag{5}$$

Подстановка выражений (5) в уравнение механических колебаний - последнее уравнение системы (4) - приводит к нелинейному уравнению с периодическим коэффициентом, которое описывает динамику среднего движущегося слоя:

$$\ddot{\xi} + 2n\dot{\xi} + \xi - \frac{2\alpha\tilde{u}^2}{(1-\xi^2)^2} \xi (1 - \cos 2\tilde{\omega}\tau) = 0 \tag{6}$$

Это уравнение динамики среднего слоя двойного конденсатора отличается от уравнения проводящего слоя в случае обычного однослойного конденсатора, рассмотренного в работе [1]

$$\ddot{\xi} + 2n\dot{\xi} + \xi - \frac{\alpha\tilde{u}^2}{2(1-\xi)^2} (1 - \cos 2\tilde{\omega}\tau) = 0 \tag{7}$$

Существенно, что в случае двойного конденсатора (уравнение (6)) эффективная жесткость обкладки при ее деформации за счет силы кулоновского притяжения уменьшается уже в первом порядке, в то время как параметрическое возмущение возрастает при росте амплитуды напряжения.

Рассматривая свободные колебания обкладки двойного конденсатора, полагая отсутствующим временное слагаемое последнего слагаемого уравнения (6), легко прийти к выводу, что уравнение (6) имеет при $b=2\alpha u^2 < 1$ три особые точки $\xi_{1,2} = \pm\sqrt{1-\sqrt{b}}$ (седла) и центр $\xi_3 = 0$. Фазовый портрет свободных колебаний показан на Рис.2

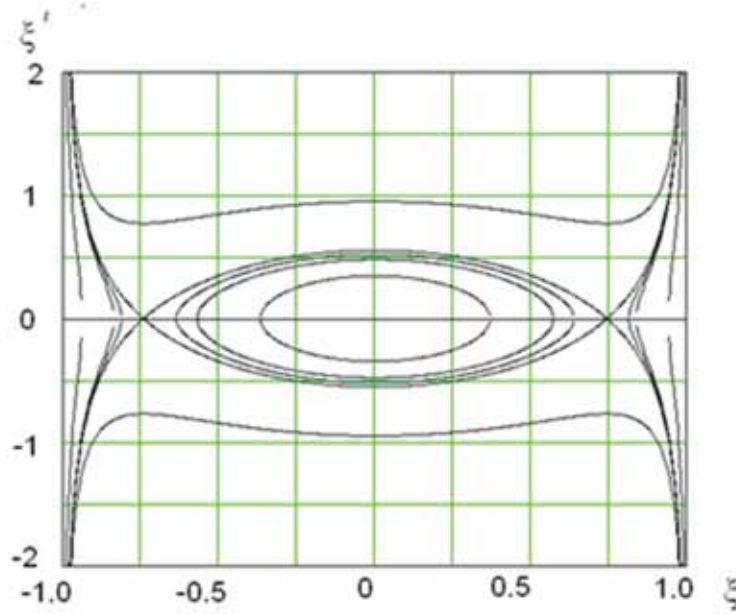


Рис.2. Фазовый портрет свободных колебаний ($b=0.2$, $\xi_{1,2}=\pm 0.7435$)

Величине $b=1$ отвечает точка ветвления, при которой сливаются три особые точки, переходя при дальнейшем росте b в одну – седло $\xi=0$. Колебания пропадают, что равносильно нарушению математической модели. Физически это соответствует прилипанию среднего общего слоя к одной из обкладок. Выше упомянутой системе, отвечающей динамике однослойного нано-конденсатора, рассмотренного в [1], отвечает точка ветвления $b = \frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}}$. Сепаратриса фазового портрета свободных колебаний двуслойной модели находится из интеграла энергии уравнения (6) в отсутствие временного гармонического слагаемого и соответствует фазовой кривой, соединяющей седловые точки при заданном значении b

$$\dot{\xi}^2 + \xi^2 - b \frac{1}{1-\xi^2} + b = h, \quad h = (1 - \sqrt{b})^2 > 0 \quad (8)$$

Удерживая только первую гармонику: $\xi = a \sin \Omega t$, получаем приближенное уравнение скелетной кривой

$$(1 - \Omega^2) = \frac{b}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^3}} \right) \quad (9)$$

Аналитически свободные колебания находятся из интеграла энергии (8), полагая начальными условиями: $\dot{\xi}(0) = 0$, $\xi(0) = \xi_0 \Rightarrow \dot{\xi}^2 = \xi_0^2 - \xi^2 + b \frac{(\xi^2 - \xi_0^2)}{(1-\xi^2)(1-\xi_0^2)}$. Осциллограмма свободных колебаний для значения $b = 0.2$ и $\xi_0 = 0.67$ приведена на Рис.3.

При приближении начального отклонения к седловой точке колебания все более отличаются от гармонических и для их Фурье-приближения необходим учет более высоких гармоник.

Набор скелетных кривых – зависимостей частоты свободных колебаний от их амплитуды при различных напряжениях возбуждения (различных значениях коэффициента b) показан на Рис.4

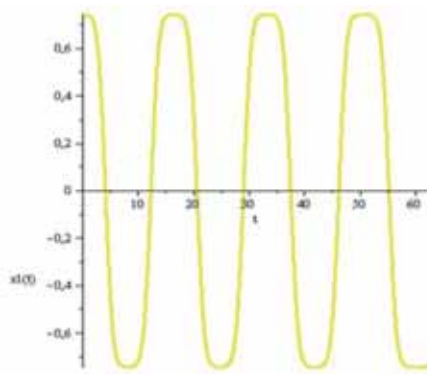


Рис.3. Осциллограмма свободных колебаний - $b=0.2$

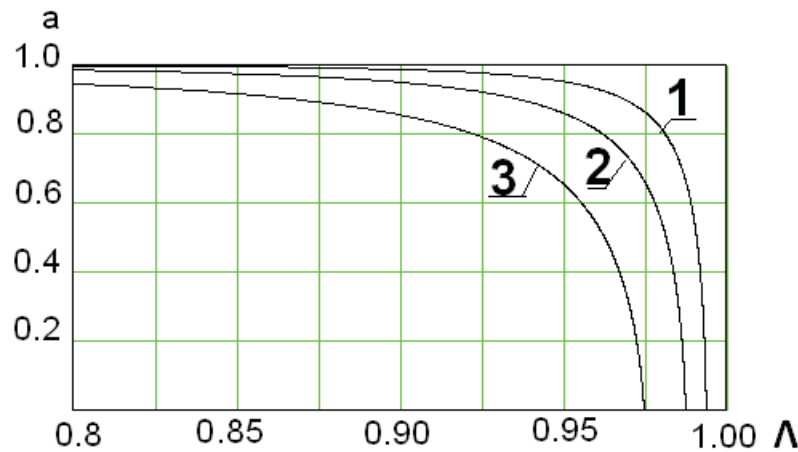


Рис.4. Скелетные кривые свободных колебаний 1- $b=0.1$, 2- $b=0.2$, 3- $b=0.3$

Скелетные кривые имеют мягкий профиль, причем частота колебаний падает по мере роста амплитуды напряжений. При малых колебаниях - малых ξ уравнение (6) можно линеаризовать

$$\ddot{\xi} + 2n\dot{\xi} + (1 - b)[1 + \frac{b}{1-b} \cos 2\tilde{\omega} \tau]\xi = 0 \quad (10)$$

Собственная частота малых колебаний определяется из линеаризованного уравнения как $\Omega = \sqrt{1 - b}$ и при $b = 0.1 \rightarrow \Omega = 0.9486$. Линеаризованное уравнение позволяет найти зоны устойчивости среднего нулевого положения наносоя. Расчетные области устойчивости, отвечающие различным порядкам параметрического резонанса, приведены на Рис.5. Границы областей устойчивости соответствуют мультипликаторам, лежащим на единичной окружности. При росте параметра b , пропорционального квадрату амплитуды приложенных напряжений, собственная частота падает, а параметрическое возмущение возрастает.

Уравнение (10) является уравнением Матье, причем от параметра b зависит как амплитуда пульсаций параметрического возбуждения, так и собственная частота. Для уравнения (10) могут быть построены диаграммы устойчивости. На Рис.5 показаны такая диаграмма при различных значениях добротности, определяемой как отношение собственной частоты к коэффициенту демпфирования



Рис.5. Области устойчивости и неустойчивости положения равновесия
1 – добротность 100, 2 – добротность 70, 3 – добротность 50

Результаты расчета - осциллограммы колебаний среднего слоя двойного конденсатора (нано-слоя) при частотах напряжений, соответствующих окрестности главного параметрического резонанса, проведенного согласно уравнению (6) при $b = 0.2$, $\Omega = 0.8944$, $n = 0.05$ приведены ниже на Рис.6.

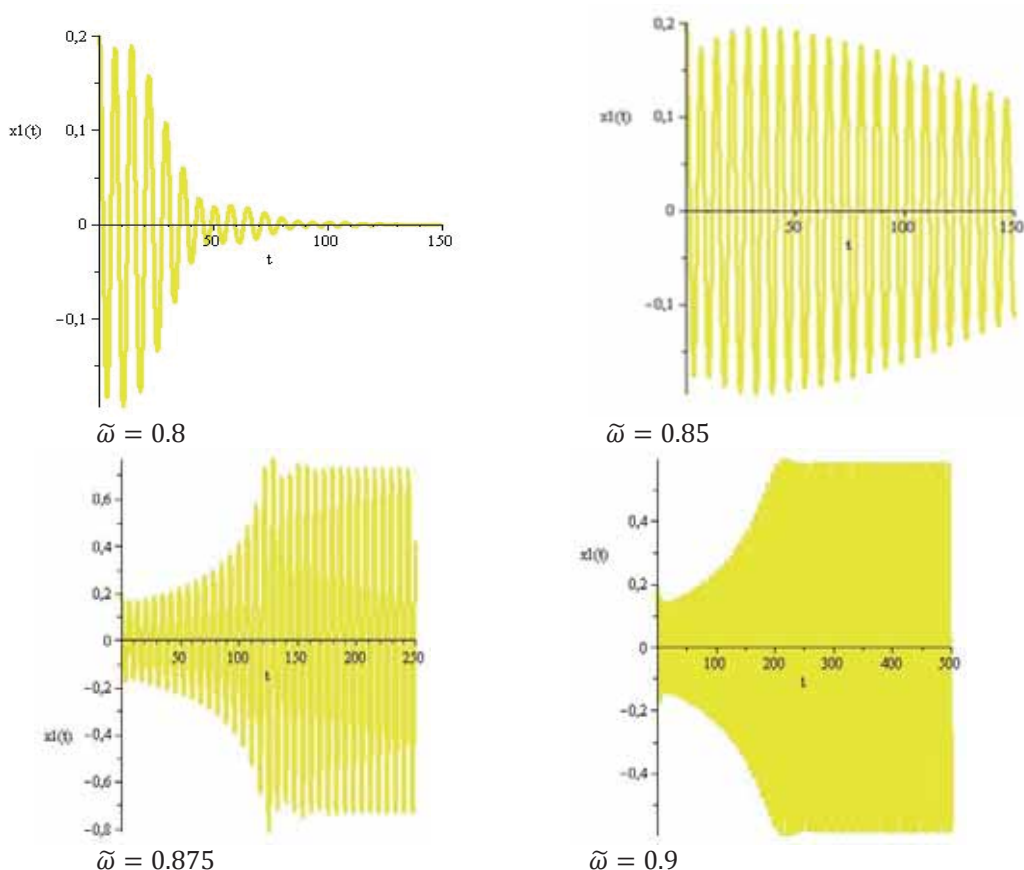


Рис.6. Расчетные кривые параметрического возмущения

Из Рис.6 хорошо виден процесс установления параметрического резонанса с ростом амплитуды колебаний по мере приближения к частоте свободных механических колебаний среднего нанослоя. Сама зона главного параметрического резонанса симметрична по отношению к диапазону резонансных частот. Амплитуда колебаний достаточна для записывающих приемных устройств.

В результате работы предложена новая схема графенового нанорезонатора. Основное отличие ее традиционной состоит в том, что возбуждение установившихся колебаний происходит чисто параметрически, причем только в узкой полосе частот вблизи собственной частоты резонатора. Ширина этой полосы сужается при уменьшении добротности, что может быть полезно для увеличения точности измерения собственной частоты при низкой добротности колебательной системы. Тем самым рассмотренный способ определения инерционных параметров nano-частицы оказывается наиболее выгодным и надежным по отношению к предложенным ранее в статьях [1, 2].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00845 и гранта Президента Российской Федерации МК-4873.2014.1.

Литература

1. Морозов Н.Ф., Беринский И.Е., Индейцев Д.А., Привалова О.В., Скубов Д.Ю., Штукин Л.В. «Срыв колебаний графенового резонатора как способ определения его спектральных характеристик»// ДАН, Физика, 2014, т. 456, №5, с. 537-540
2. Морозов Н.Ф., Беринский И.Е., Индейцев Д.А., Скубов Д.Ю., Штукин Л.В. «Дифференциальный графеновый резонатор»// ДАН, Физика, 2014, т. 457, №1, с. 37-40
3. Skubov D.Yu., Khodzhaev K.Sh. Non-Linear Electromechanics. Springer, 2008, 397 p.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС ДВОЙНОГО НАНОКОНДЕНСАТОРА

Морозов Н.Ф.¹, Индейцев Д.А.², Скубов Д.Ю.³, Штукин Л.В.⁴

¹СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия, morozov@nm1016.spb.edu

²ИПМАШ РАН, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия, dmitry.indeitsev@gmail.com

³ИПМАШ РАН, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия, skubov.dsk@gmail.com

⁴ИПМАШ РАН, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия, lvtvsh4749@gmail.com

Аннотация. В настоящей работе исследуется новый тип нано-электромеханической системы (НЭМС), использующий эффект параметрического резонанса. Основная его идея состоит в получении параметрического резонанса колебаний средней внутренней пластины двойного конденсатора, на каждую из составляющих которого подается высокочастотное гармоническое напряжение. Двуслойность конденсатора со средней колеблющейся обкладкой, в отличие от схемы НЭМС, исследованной в [1], позволяет уточнить зону параметрического резонанса и увеличить зону восприятия посторонней прилипающей нано-частицы.

Настоящая работа является продолжением работ [1,2] посвященных определению спектральных характеристик графенового нано-слоя при осаждении на нем нано-частицы. Способом определения таких характеристик, по сути основной частоты свободных колебаний, служит «конструирование» НЭМС, обладающей высокой чувствительностью к малому изменению инерционных параметров гибкого нано-слоя. Как и в предыдущих работах графеновый слой и проводящие поверхности являются обкладками конденсатора, но в данном случае проводящий нано-слой служит средней обкладкой двойного конденсатора. Изменение емкостей слоев конденсатора под действием прогиба среднего слоя ведет к появлению кулоновского усилия, пропорционального разности квадратов меняющихся зарядов внешних обкладок. Под действием гармонических напряжений, приложенных к обеим обкладкам, оказывается возможной потеря устойчивости симметричного положения среднего слоя и возбуждение его параметрического резонанса. Дифференциальное включение среднего слоя обуславливает симметрию зоны параметрического резонанса, что облегчает измерение его спектральных характеристик.

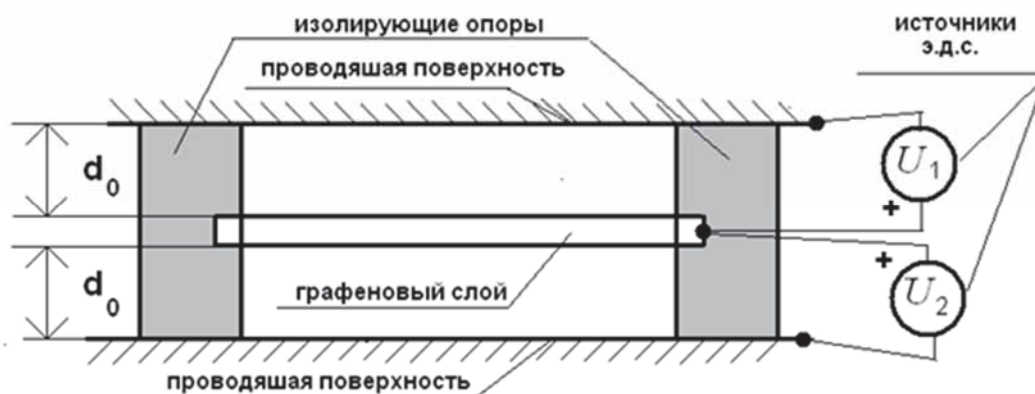


Рис.1 Физическая модель

Под действием сил взаимного притяжения, вызванных силами взаимодействия обкладок и среднего проводящего слоя, возникают симметричные гармонические колебания без постоянной составляющей с частотой равной частоте приложенных напряжений

$$U_1 = U_0 \sin \omega t, U_2 = U_0 \sin \omega t \quad (1)$$

Система уравнений Лагранжа-Максвелла [3] взаимосвязанной динамики двухслойного конденсатора, на обкладки которого подаются синфазные гармонические напряжения одинаковой амплитуды:

$$\begin{aligned} R\dot{Q}_2 + \frac{1}{C_2}Q_2 &= U_2(t), \quad R\dot{Q}_1 + \frac{1}{C_1}Q_1 = U_1(t), \\ m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx - \frac{Q_1^2}{2C_1^2} \frac{dC_1}{dx} + \frac{Q_2^2}{2C_2^2} \frac{dC_2}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Кулоновские усилия, действующие на среднюю активную движущуюся обкладку, определяются выражениями: $F_i = \frac{Q_i^2}{2C_i^2} \frac{dC_i}{dx}$, где емкости слоев:

$$C_1 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d_0 - x(t)}, \quad C_2 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d_0 + x(t)} \quad (3)$$

Усилия притяжения обкладок противоположно направлены и за счет «дифференциального» включения не имеют постоянной составляющей, что принципиально отличает такой тип НЭМС от исследованной в статье [1].

Здесь неизвестные переменные: заряды обкладок и деформация (прогиб средней обкладки). Неавтономность системы (2) обусловлена приложением к обоим слоям конденсатора переменных в данном случае гармонических напряжений постоянной амплитуды и частоты. В дальнейшем амплитуды и частоты напряжений полагаются равными, хотя может быть интересен и случай малого рассогласования частот, приводящий к биениям средней движущейся обкладки. Линейный случай биений двухслойного графенового резонатора рассмотрен в [2]. Далее система (2) переписывается в безразмерном виде, вводятся безразмерные переменные:

$$q_1 = \frac{Q_1}{Q_0}, q_2 = \frac{Q_2}{Q_0}, \xi = \frac{x}{d_0}, \Omega_i = \frac{\omega_i}{\lambda}$$

относительно указанных ниже базисных величин:

$$\lambda^2 = \frac{c}{m}, \quad C_0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d_0}, \quad Q_0 = C_0 U_0$$

Здесь λ – частота малых свободных колебаний графенового слоя (среднего слоя конденсатора). Емкости слоев как функции безразмерного прогиба средней активной обкладки:

$$C_1 = C_0 \frac{1}{1-\xi}, \quad C_2 = C_0 \frac{1}{1+\xi}$$

Причем интересно, что за счет воздействия гармонических напряжений при росте их амплитуды частота механических колебаний падает, в то время как амплитуда параметрического возмущения растет.

Уравнения взаимосвязанной динамики электромеханической системы в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 + \kappa(1-\xi)q_1 &= \kappa\tilde{u} \sin\Omega_1\tau, \\ \dot{q}_2 + \kappa(1+\xi)q_2 &= \kappa\tilde{u} \sin\Omega_2\tau, \\ \ddot{\xi} + 2n\xi + \xi + \alpha(q_2^2 - q_1^2) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Ясно, что в уравнении механических колебаний (третьем из (4)) кулоновское усилие зависит от разности квадратов зарядов обкладок. В системе уравнений (4) введены основные безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{C_0 U_0^2}{2m\lambda^2 d_0^2}, \quad 2n = \frac{\beta}{\lambda}, \quad \kappa = \frac{1}{RC_0 \lambda},$$

Считаем далее большим параметр $\kappa = \frac{\tilde{\kappa}}{\varepsilon}, \tilde{\kappa} \sim O(1)$, т.е. период свободных колебаний обкладки полагается много больше времени разрядки конденсатора. Тогда можно пренебречь производной в первых двух уравнениях системы (4), полагая, что установление периодического режима электрической цепи происходит намного быстрее установления стационарного режима механических колебаний. Обозначим безразмерные частоты $\omega_1 = \omega_2 = \frac{\omega}{\lambda} = \tilde{\omega}$, $\tilde{u} = \frac{U}{U_0}$, тогда для зарядов обкладок получаем выражения

$$q_1 = \frac{\tilde{u}}{1-\xi} \sin \tilde{\omega} \tau, \quad q_2 = \frac{\tilde{u}}{1+\xi} \sin \tilde{\omega} \tau \quad (5)$$

Подстановка выражений (5) в уравнение механических колебаний - последнее уравнение системы (4) - приводит к нелинейному уравнению с периодическим коэффициентом, которое описывает динамику среднего движущегося слоя:

$$\ddot{\xi} + 2n\dot{\xi} + \xi - \frac{2\alpha\tilde{u}^2}{(1-\xi^2)^2} \xi (1 - \cos 2\tilde{\omega} \tau) = 0 \quad (6)$$

Это уравнение динамики среднего слоя двойного конденсатора «несколько» отличается от уравнения проводящего слоя в случае обычного однослойного конденсатора, рассмотренного в работе [1]

$$\ddot{\xi} + 2n\dot{\xi} + \xi - \frac{\alpha\tilde{u}^2}{2(1-\xi^2)^2} (1 - \cos 2\tilde{\omega} \tau) = 0 \quad (7)$$

Существенно, что в случае двойного конденсатора (уравнение (6)) эффективная жесткость обкладки при ее деформации за счет силы кулоновского притяжения уменьшается уже в первом порядке, в то время как параметрическое возмущение возрастает при росте амплитуды напряжения. Рассматривая свободные колебания обкладки двойного конденсатора легко прийти к выводу, что уравнение (6) в отсутствие гармонического временного слагаемого имеет при $b=2\alpha u^2 < 1$ три особые точки $\xi_{1,2} = \pm\sqrt{1-\sqrt{b}}$ (седла) и центр $\xi_3 = 0$. Фазовый портрет свободных колебаний показан на Рис.2

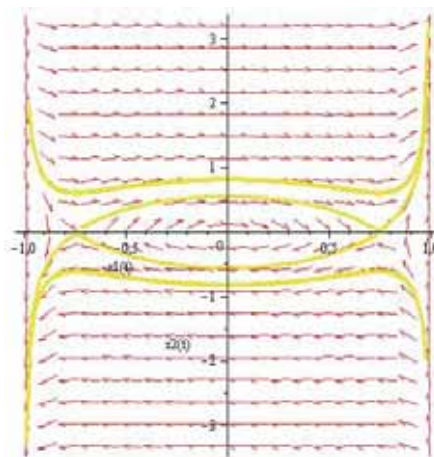


Рис.2. Фазовый портрет свободных колебаний ($b=0.2$, $\xi_{1,2}=\pm 0.7435$)

Величине $b=1$ отвечает точка ветвления, при которой сливаются три особые точки, переходя при дальнейшем росте b в одну – седло $\xi=0$. Колебания пропадают, что равносильно нарушению математической модели. Физически это соответствует прилипанию среднего общего слоя к одной из обкладок. Выше упомянутой системе, отвечающей динамике однослойного конденсатора, рассмотренной в [1], отвечает точка ветвления $b = \frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}}$. Сепаратриса фазового портрета свободных колебаний двуслойной модели находится из интеграла энергии уравнения (6) в отсутствие временного гармонического слагаемого и соответствует фазовой кривой соединяющей седловые точки при заданном значении b

$$\dot{\xi}^2 + \xi^2 - b \frac{1}{1-\xi^2} + b = h, \quad h = (1 - \sqrt{b})^2 > 0 \quad (8)$$

Удерживая только первую гармонику: $\xi = a \sin \Omega t$, получаем приближенное уравнение скелетной кривой

$$(1 - \Omega^2) = \frac{b}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^3}} \right) \quad (9)$$

Осциллограмма свободных колебаний при $b = 0.2$, $\dot{\xi}(0) = 0$, $\xi(0) = 0.67$ приведена на Рис.3. Аналитически свободные колебания находятся из интеграла энергии, полагая начальные условия: $\dot{\xi}(0) = 0$, $\xi(0) = \xi_0 \Rightarrow \dot{\xi}^2 = \xi_0^2 - \xi^2 + b \frac{(\xi^2 - \xi_0^2)}{(1-\xi^2)(1-\xi_0^2)}$

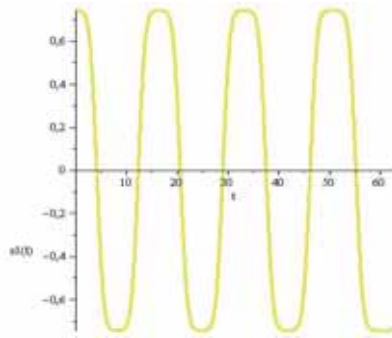


Рис.3. Осциллограмма свободных колебаний

Из Рис.3 видно, что при приближении начального отклонения к седловой точке колебания все более отличаются от гармонических и для их аналитического приближения необходим учет более высоких гармоник.

Набор скелетных кривых – зависимостей частоты свободных колебаний от их амплитуды при различных значениях напряжения возбуждения показан на Рис.4

Скелетные кривые имеют мягкий профиль, причем частота колебаний падает при росте амплитуды напряжений. При малых колебаниях - малых ξ уравнение (6) можно линеаризовать

$$\ddot{\xi} + 2n\dot{\xi} + (1 - b)[1 + \frac{b}{1-b} \cos 2\tilde{\omega} \tau]\xi = 0 \quad (10)$$

Собственная частота малых колебаний определяется из линеаризованного уравнения как $\Omega = \sqrt{1 - b}$ и при $b = 0.1 \rightarrow \Omega = 0.9486$.

При росте параметра b , пропорционального квадрату амплитуды приложенных напряжений, собственная частота падает, а параметрическое возмущение возрастает.

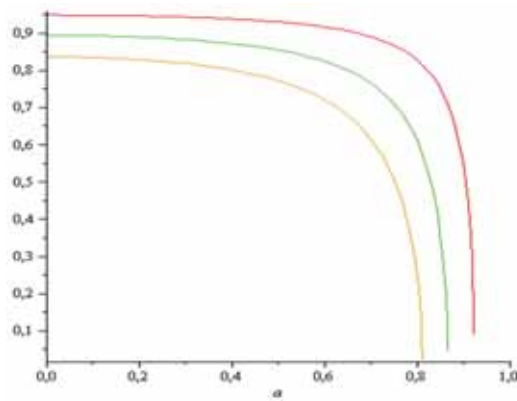


Рис.4. Скелетные кривые свободных колебаний

Результаты расчета - осциллограммы колебаний среднего слоя двойного конденсатора (нано-слоя) при частотах напряжений, соответствующих окрестности главного параметрического резонанса, проведенного согласно уравнению (6) при $b = 0.2$, $\Omega = 0.8944$, $n = 0.05$ приведены ниже на Рис.5.

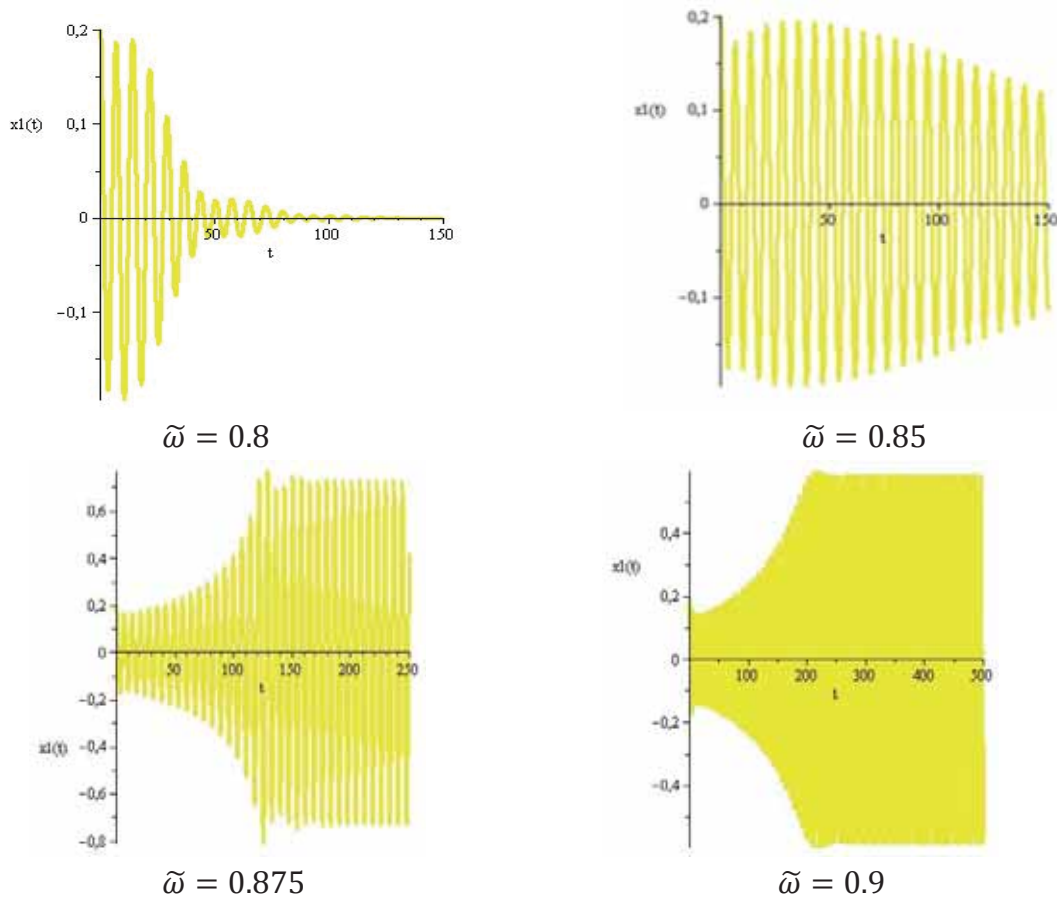


Рис.5. Расчетные кривые параметрического возмущения

Из Рис.5 хорошо виден процесс установления параметрического резонанса с ростом амплитуды по мере приближения к частоте свободных механических колебаний среднего нано-слоя. Сама зона главного параметрического резонанса симметрична по отношению к диапазону резонансных частот. Амплитуда колебаний достаточна для записывающих приемных устройств. Тем самым рассмотренный способ определения инерционных параметров нано-частицы оказывается наиболее выгодным и надежным по отношению к предложенным ранее в статьях [1,2].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00845 и гранта Президента Российской Федерации МК-4873.2014.1.

Литература

1. Морозов Н.Ф., Беринский И.Е., Индейцев Д.А., Привалова О.В., Скубов Д.Ю., Штукин Л.В. «Срыв колебаний графенового резонатора как способ определения его спектральных характеристик»// ДАН, Физика, 2014, т. 456, №5, с. 537-540
2. Морозов Н.Ф., Беринский И.Е., Индейцев Д.А., Скубов Д.Ю., Штукин Л.В. «Дифференциальный графеновый резонатор»// ДАН, Физика, 2014, т. 457, №1, с. 37-40
3. Skubov D.Yu., Khodzhaev K.Sh. Non-Linear Electromechanics. Springer, 2008, 397 p.

СОСТАВЛЕНИЕ ОБОБЩЁННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕЛЬСОВОЙ ТРАНСПОРТНОЙ МАШИНЫ

Омаров Т.И.¹, Абдирова Р.Д.², Ибрагимова Р.Р.

Казахский национальный технический университет им. К.И.Сатпаева,

Алматы, Казахстан

¹ omarov_tim@list.ru, ² raushan.abdirova@mail.ru

Аннотация. Рассматривается методика составления обобщённой динамической модели рельсовой транспортной машины, как механической системы переменной структуры. При этом учитываются реальные факторы, такие как упругость звеньев механизмов, отрыв колеса от рельса, нелинейные характеристики упругих элементов, переменная жесткость пути, различные режимы движения, а также возможное проскальзывание колес, т.е. изменение структуры. Модель составлена в общем виде, но как частный случай показан характер изменения моментов упругости в трансмиссии рельсовой машины.

Рельсовой транспортной машиной будем называть машину на рельсовом ходу, предназначенную для скоростного перемещения пассажиров и грузов, такие как железнодорожные локомотивы, приводные вагоны трамваев, метро и другие. Ходовая часть таких машин соединена с кузовом посредством системы упругого подвешивания, которая предохраняет машину от ударных нагрузок и обеспечивает необходимую плавность хода. Движение машины сопровождается различного вида колебаниями.

На рисунке 1 показана расчетная схема рельсовой машины с подрессоренной рамой (кузовом). Динамическая модель данной машины представляется шестимассовой замкнутой системой переменной структуры с безинерционными упругими связями. Упругими связями здесь являются пружины (рессоры), испытывающие деформации растяжения – сжатия с жесткостями c_{jk} , упругие валы колесных пар, характеризуемыми крутильными жесткостями c_{ij} ($j = 1, 2, 3, 4; i = 3, 4, 5; k = 7$) и рельсовые пути. В ходовой части установлены гасители колебаний (амортизаторы), которые дают диссипативную составляющую нагрузки. При определении инерционных характеристик системы массы упругих связей учитываются. Переменность структуры системы обусловлена возможным проскальзыванием любого из колес, отрывом (отскоком) колеса от рельса, нелинейными реакциями пружин подвески, переменной жесткостью пути. Меняющиеся при движении машины параметры могут способствовать параметрическому возбуждению колебательного процесса.

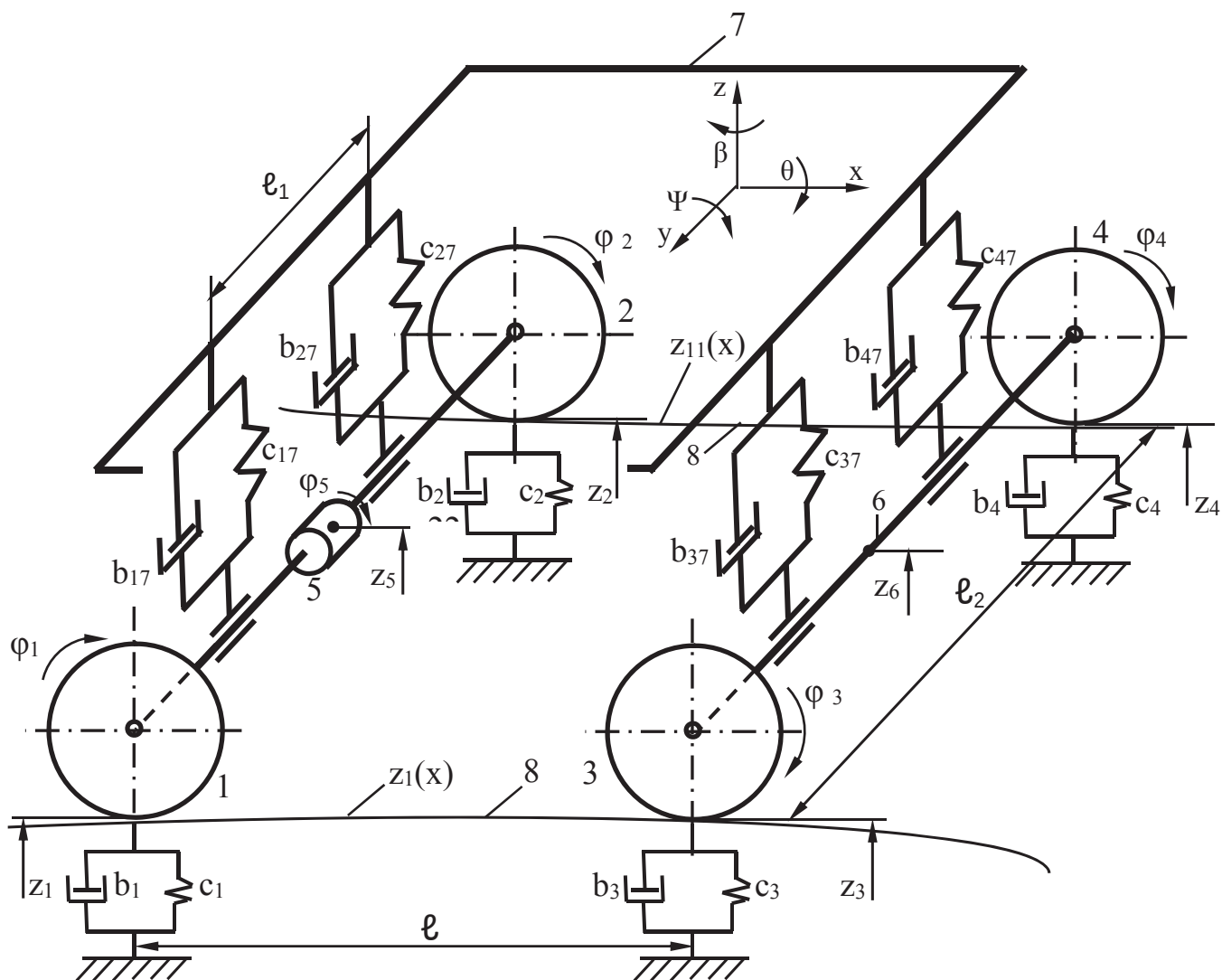
Ходовая часть машины имеет групповой привод от одного электродвигателя 5 на пару ходовых колес 1 и 2; вторая пара колес – неприводная (опорная), с жестко посаженными на общую ось вращения колесами 3 и 4 (рисунок 1).

Обобщенные координаты системы: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ – углы поворота ходовых колес; φ_5 – приведенный к оси вращения колесной пары 1 и 2 угол поворота ротора электродвигателя; x – поступательное движение машины; z_0 – вертикальная координата центра масс O кузова – подпрыгивание; z_5 и z_6 – вертикальные координаты центров масс первой и второй колесных пар; γ_{12} и γ_{34} – углы наклона осей первой и второй колесных пар к горизонтальной плоскости; θ – угол поворота рамы относительно оси Ox – боковая качка; ψ – угол поворота рамы относительно оси Oy – галопирование; β – угол поворота рамы относительно оси Oz – виляние [1].

Рельсы примем как безинерционные упругие связи с текущей жесткостью по колесам c_1, c_2, c_3, c_4 , которая в процессе движения периодически меняется. При расположении колеса посередине пролета между шпалами жесткость рельса принимает наименьшее значение, а при нахождении колеса на уровне опоры (шпалы) жесткость будет максимальной [2]. Жесткости рельсов по колесам представляются периодическими функциями

$$c_1 = c_1(x), \quad c_2 = c_2(x), \quad c_3 = c_2(x + \ell), \quad c_4 = c_2(x + \ell),$$

где ℓ – расстояние между осями ходовых колес (база машины).



1, 2, 3, 4 – ходовые колёса, 5 – электродвигатель и приводная колёсная пара,
6 – неприводная колёсная пара, 7 – рама (кузов), 8 – рельсовый путь

Рисунок 1 – Расчётная схема рельсовой транспортной машины

Исходный недеформируемый профиль рельса под колесами задаются зависимостями, соответственно: под первым колесом $z_{1,0} = z_I(x)$, вторым – $z_{2,0} = z_{II}(x)$, третьим – $z_{3,0} = z_I(x + \ell)$, четвертым – $z_{4,0} = z_{II}(x + \ell)$

Вертикальные реакции P_{0j} , действующие со стороны рельсового пути на колеса – в общем случае нелинейная функция его деформации – Δ_j , для каждого из колес определяются по формулам: $\Delta_1 = z_I(x) - Z_1$, $\Delta_2 = z_{II}(x) - Z_2$, $\Delta_3 = z_I(x + \ell) - Z_3$, $\Delta_4 = z_{II}(x + \ell) - Z_4$, где Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 – текущие координаты точек контакта каждого из колес с рельсами (при отсутствии контакта – нижняя точка обода колеса, расположенная на одной вертикали с центром вращения колеса).

Выражение для реакции P_{0j} с учетом неударяющей связи представлено в виде: $P_{0j} = f_j(\dot{\Delta}_j, \Delta_j, c_j)$, если $\Delta_j > 0$, $P_{0j} = 0$, если $\Delta_j < 0$, где P_{0j} – знакоположительная функция; $j = 1, 2, 3, 4$. Если принять, что реакции P_{0j} линейно зависят от деформации Δ_j и скорости деформации $\dot{\Delta}_j$, то можно записать $P_{0j} = b_j \dot{\Delta}_j + c_j \Delta_j$, если $\Delta_j > 0$ и $P_{0j} = 0$, если $\Delta_j < 0$, где b_j – коэффициент диссипативного сопротивления рельсового пути.

Когда значение реакции P_{0j} равно нулю происходит отрыв колеса от рельсового пути.

При движении рельсовой машины в зоне контакта колес с рельсами возможно проскальзывание, что обусловлено статической неопределенностью привода ходового механизма и характером нагрузок, приходящейся на ходовые колеса машины в режиме разгона и торможения.

Дифференциальные уравнения движения рельсовой машины с расчетной схемой по рисунку 1 (четырнадцать обобщенных координат) имеют вид [3]

$$\begin{aligned}
 J_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= b_{51} \left(\frac{d\varphi_5}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt} \right) + c_{51} (\varphi_5 - \varphi_1) + M_{01} \\
 J_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} &= b_{52} \left(\frac{d\varphi_5}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt} \right) + c_{52} (\varphi_5 - \varphi_2) + M_{02} \\
 J_3 \frac{d^2 \varphi_3}{dt^2} &= b_{43} \left(\frac{d\varphi_4}{dt} - \frac{d\varphi_3}{dt} \right) + c_{43} (\varphi_4 - \varphi_3) + M_{03} \\
 J_4 \frac{d^2 \varphi_4}{dt^2} &= -b_{43} \left(\frac{d\varphi_4}{dt} - \frac{d\varphi_3}{dt} \right) - c_{43} (\varphi_4 - \varphi_3) + M_{04} \\
 J_5 \frac{d^2 \varphi_5}{dt^2} &= M_5 - b_{51} \left(\frac{d\varphi_5}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt} \right) - b_{52} \left(\frac{d\varphi_5}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt} \right) - \\
 &\quad - c_{51} (\varphi_5 - \varphi_1) - c_{52} (\varphi_5 - \varphi_2) \\
 J_x \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= (P_{27} + P_{47}) \left(\frac{\ell_1}{2} + \lambda_y \right) + (P_{17} + P_{37}) \left(\frac{\ell_1}{2} - \lambda_y \right)
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
J_y \frac{d^2 \psi}{dt^2} &= - (P_{17} + P_{27}) \left(\frac{\ell}{2} + \lambda_x \right) - (P_{37} + P_{47}) \left(\frac{\ell}{2} - \lambda_x \right) \\
J_z \frac{d^2 \beta}{dt^2} &= (P_{1p} + P_{2p}) \left(\frac{\ell}{2} + \lambda_x \right) \text{sign } \beta + (P_{3p} + P_{4p}) \left(\frac{\ell}{2} - \lambda_x \right) \text{sign } \beta \\
J_{12} \frac{d^2 \gamma_{12}}{dt^2} &= - P_{01} \left(\frac{\ell_2}{2} + y_1 \right) + P_{02} \left(\frac{\ell_2}{2} - y_1 \right) + P_{17} \left(\frac{\ell_1}{2} + y_1 \right) - P_{27} \left(\frac{\ell_1}{2} - y_1 \right) \\
J_{34} \frac{d^2 \gamma_{34}}{dt^2} &= - P_{03} \left(\frac{\ell_2}{2} + y_3 \right) + P_{04} \left(\frac{\ell_2}{2} - y_3 \right) + P_{37} \left(\frac{\ell_1}{2} + y_3 \right) - P_{47} \left(\frac{\ell_1}{2} - y_3 \right) \\
m_{12} \frac{d^2 z_5}{dt^2} &= P_{01} + P_{02} + P_{17} + P_{27} - m_{12} g \\
m_{34} \frac{d^2 z_6}{dt^2} &= P_{03} + P_{04} + P_{37} + P_{47} - m_{34} g \\
(m_7 + m_{12} + m_{34}) \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \\
m_7 \frac{d^2 z_0}{dt^2} &= P_{17} + P_{27} + P_{37} + P_{47} - m_7 g.
\end{aligned}$$

Здесь приняты следующие, неуказанные выше, обозначения:

J_1, J_2, J_3, J_4 , – приведенные к осям вращения ходовых колес моменты инерции вращающихся деталей трансмиссии колесных пар 1 – 2 и 3 – 4 (соответственно левой и правой частей);

J_5 – приведенный момент инерции ротора электродвигателя;

J_x, J_y, J_z – центральные моменты инерции рамы (кузова) 7 рельсовой машины соответственно относительно осей Ox, Oy и Oz в предположении, что оси проходят через центр масс системы (точка O);

J_{12}, J_{34} – моменты инерции колесных пар 1 – 2 и 3 – 4 относительно осей, параллельных Ox , проходящих через центры масс колесных пар;

$M_5 = a + b \dot{\varphi}_5$ – момент, развиваемый электродвигателем, (статическая характеристика двигателя, a и b – справочные постоянные [4]);

$c_{51}(\varphi_5 - \varphi_1), c_{52}(\varphi_5 - \varphi_2), c_{43}(\varphi_4 - \varphi_3)$ – приведенные моменты сил упругости осей колесных пар (трансмиссионных валов) при кручении;

$$b_{51} \left(\frac{d\varphi_5}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt} \right), b_{52} \left(\frac{d\varphi_5}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right), b_{43} \left(\frac{d\varphi_4}{dt} - \frac{d\varphi_3}{dt} \right) - \text{приведенные}$$

моменты диссипативных сопротивлений осей колесных пар (трансмиссионных валов) при кручении;

$M_{01}, M_{02}, M_{03}, M_{04}$ – моменты сил реакций, действующих со стороны рельсов на ходовые колеса машины;

$P_{17}, P_{27}, P_{37}, P_{47}$ – реакции пружин подвесок, действующих на раму (кузов) рельсовой машины;

F_1, F_2, F_3, F_4 – силы трения, возникающие в зоне контакта колес с рельсами;

m_{12} и m_{34} – соответственно массы колесных пар 1 – 2 и 3 – 4;

ℓ и ℓ_2 – база и колея рельсовой машины;

ℓ_1 – расстояние между геометрическими осями упругих элементов подвесок одной колесной пары;

λ_x и λ_y – расстояния, учитывающие смещение центра масс кузова относительно геометрического центра симметрии соответственно вдоль осей Ox и Oy ;

Y_1 и Y_3 – расстояния от центров масс колесных пар до геометрических центров (середин) каждой из пар.

Момент, развиваемый электродвигателем, зависит в основном от типа двигателя и режима работы машины [4]. При исследовании динамических явлений в системе с электродвигателем в тех случаях, когда рассматриваются переходные процессы при трогании в начале движения, разгоне машины, торможении двигателем, преодолении путевых неровностей и в любых других случаях отклонениях привычного режима движения, т.е. при динамическом режиме движения, может быть использована динамическая характеристика электродвигателя [5].

Для исследования движения механических систем с асинхронным электродвигателем и электродвигателем постоянного тока при установившихся режимах работы может быть использована указанная выше формула, выражающая статическую характеристику электродвигателя.

Моменты сил упругости в осях колесных пар определяются по формулам

$$M_{51} = c_{51}(\varphi_5 - \varphi_1), \quad M_{52} = c_{52}(\varphi_5 - \varphi_2), \quad M_{43} = c_{43}(\varphi_4 - \varphi_3).$$

Моменты сил диссипативных сопротивлений в тех же осях – соответственно по формулам

$$M_{51}^r = b_{51} \left(\frac{d\varphi_5}{dt} - \frac{d\varphi_1}{dt} \right), \quad M_{52}^r = b_{52} \left(\frac{d\varphi_5}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right), \quad M_{43}^r = b_{43} \left(\frac{d\varphi_4}{dt} - \frac{d\varphi_3}{dt} \right).$$

Реакции пружин подвесок $P_{17}, P_{27}, P_{37}, P_{47}$ в общем случае есть нелинейные функции деформаций $\Delta_{17}, \Delta_{27}, \Delta_{37}, \Delta_{47}$, определяемые для каждой из пружин согласно формул

$$\Delta_{17} = z_5 - \gamma_{12} \frac{\ell_1}{2} - z_0 + \theta \frac{\ell_1}{2} + \psi \frac{\ell}{2}, \quad \Delta_{27} = z_5 + \gamma_{12} \frac{\ell_1}{2} - z_0 - \theta \frac{\ell_1}{2} + \psi \frac{\ell}{2}$$

$$\Delta_{37} = z_6 - \gamma_{34} \frac{\ell_1}{2} - z_0 + \theta \frac{\ell_1}{2} - \psi \frac{\ell}{2}, \quad \Delta_{47} = z_6 + \gamma_{34} \frac{\ell_1}{2} - z_0 - \theta \frac{\ell_1}{2} - \psi \frac{\ell}{2}.$$

Для систем с линейными характеристиками упругих элементов подвешивания, реакции пружин подвесок P_{17} , P_{27} , P_{37} , P_{47} можно представить в виде

$$\begin{aligned} P_{17} &= b_{17} \frac{d\Delta_{17}}{dt} + c_{17} \cdot \Delta_{17}, & P_{27} &= b_{27} \frac{d\Delta_{27}}{dt} + c_{27} \cdot \Delta_{27}, \\ P_{37} &= b_{37} \frac{d\Delta_{37}}{dt} + c_{37} \cdot \Delta_{37}, & P_{47} &= b_{47} \frac{d\Delta_{47}}{dt} + c_{47} \cdot \Delta_{47}, \end{aligned}$$

где b_{17} , b_{27} , b_{37} , b_{47} и c_{17} , c_{27} , c_{37} , c_{47} – коэффициенты, определяющие диссипативное сопротивление и жесткость упругих элементов каждой подвески.

Для использования в системе уравнений (1) формул, определяющих вертикальные реакции P_{01} , P_{02} , P_{03} , P_{04} со стороны рельсов на ходовые колеса, необходимо выразить через обобщенные координаты системы деформации рельсов Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 . Под каждым из колес деформация рельса определится по формулам

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= z_I(x) - z_5 + \gamma_{12} \frac{\ell_2}{2}, & \Delta_2 &= z_{II}(x) - z_5 - \gamma_{12} \frac{\ell_2}{2}, \\ \Delta_3 &= z_I(x + \ell) - z_6 + \gamma_{34} \frac{\ell_2}{2}, & \Delta_4 &= z_{II}(x + \ell) - z_6 - \gamma_{34} \frac{\ell_2}{2}, \end{aligned}$$

где $z_I(x)$ и $z_{II}(x)$ – аналитические выражения, описывающие профиль недеформированного рельсового пути [1].

Выражения для определения значений моментов реакций M_{01} , M_{02} , M_{03} , M_{04} и сил трения F_1 , F_2 , F_3 , F_4 составлены с учетом возможности проскальзывания ходовых колес относительно рельсов, поэтому каждая из составляющих моментов реакций и сил трения записывается в трех видах: первые два – при отсутствии проскальзывания, третий – при наличии проскальзывания. Моменты и силы трения в обобщенном виде [3]

$$M_{0j} = \begin{cases} -b_{ij} \left(\frac{d\varphi_i}{dt} - \frac{d\varphi_j}{dt} \right) - c_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) + J_j \frac{d^2\varphi_j}{dt^2}, & v_{j0} = 0, f_0 P_{0j} r_j > |M_j(F_j)| \\ -P_{0j} [k + f_0 r_j \operatorname{sign} M_j(F_j)], & v_{j0} = 0, f_0 P_{0j} r_j = |M_j(F_j)| \\ -P_{0j} (k - f_k r_j \operatorname{sign} v_{j0}), & v_{j0} \neq 0 \end{cases} \\ (j = 1, 2, 3, 4; i = 3, 4, 5)$$

$$F_j = \begin{cases} \frac{M_j(F_j)}{r_j}, & v_{j0} = 0, f_0 P_{0j} r_j > |M_j(F_j)| \\ f_0 P_{0j} \operatorname{sign} M_j(F_j), & v_{j0} = 0, f_0 P_{0j} r_j = |M_j(F_j)| \\ f_k P_{0j} \operatorname{sign} v_{j0}, & v_{j0} \neq 0 \end{cases}$$

Будучи переменной величиной, сила трения имеет предельное значение, определяемое коэффициентом трения скольжения покоя (при отсутствии проскальзывания). В формулах для M_{0j} и F_j приняты следующие обозначения:

$v_{j0} = \dot{X} - \dot{\phi} r_j$ – абсолютная скорость точки колеса в зоне контакта с рельсом;

f_0 и f_k – коэффициент трения при отсутствии и наличии проскальзывания;

k – коэффициент трения качения; $M_j(F_j)$ – момент сил трения, определяется из

выражения $M_j(F_j) = b_{ij}(\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_j) + c_{ij}(\phi_i - \phi_j) - k P_{0j} - J_j \ddot{\phi}_j$.

При необходимости более точного исследования динамических процессов вместо коэффициентов f_0 и f_k можно использовать зависимость этого коэффициента от скорости скольжения v , полученную на основании экспериментальных данных [6]

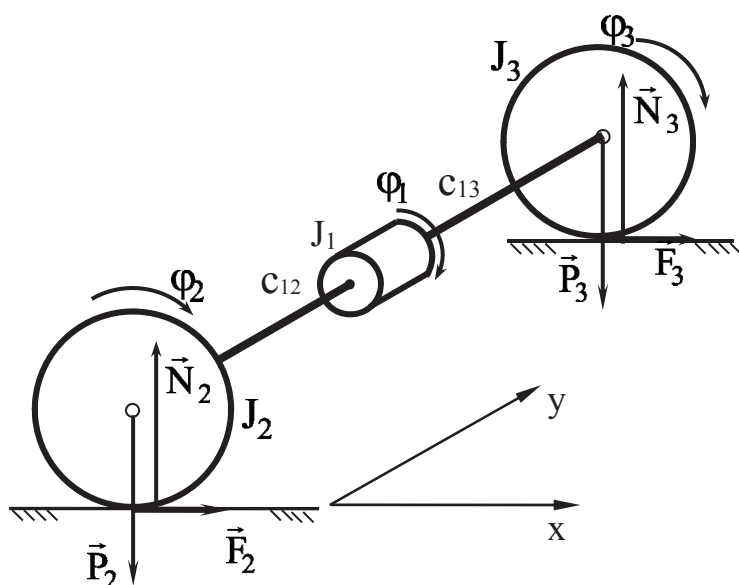


Рисунок 2 – Расчетная схема механизма передвижения рельсовой машины

На рисунке 2 показана расчетная схема ходовой части рельсовой машины. Движение данной системы описывается дифференциальными уравнениями идентичными уравнениями 1, 2, 5 и 13 системы (1). Указанные уравнения решены относительно моментов сил упругости M_{12} и M_{13} . В динамической модели использовались параметры напольной завалочной машины мартеновских цехов металлургического производства. На графике (рисунок 3) видно, что изменение нагрузки в трансмиссионных валах (моментов сил упругости M_{12} и M_{13} .) носит автоколебательный характер.

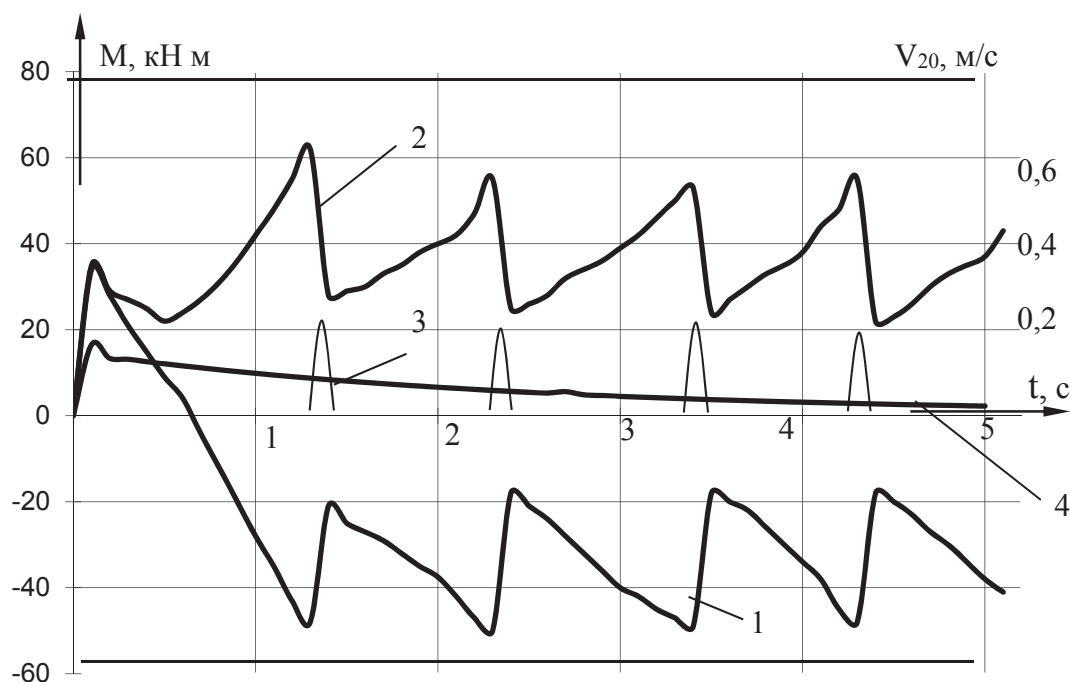


Рисунок 3 - Графики изменения динамических нагрузок в трансмиссии механизма передвижения рельсовой машины

На рисунке 3 позициями 1 и 2 указаны графики изменения моментов сил упругости в правой и левой ветвях привода, позиция 3 – скорость проскальзывания колеса относительно рельса. При движении машины из-за разницы в диаметрах колес (из-за допуска на изготовление) в приводе происходит нарастание моментов сил упругости. При превышении значения момента сил упругости $M_{12} = c_{12} (\varphi_1 - \varphi_2)$ или $M_{13} = c_{13} (\varphi_1 - \varphi_3)$ значения момента силы трения $M(F_2) = f_0 P_2 r_2$ происходит проскальзывание колеса относительно рельса. Явление это происходит периодически и называется релаксационные автоколебания. Причина такого явления – избыточная фрикционная связь, наложенная на одно из колёс пары, т.е. статическая неопределимость привода. Позиция 4 на графике показывает изменение значения момента сил упругости ходового механизма без избыточных связей.

Автоколебательный характер изменения значений моментов сил упругости в трансмиссионных валах подтверждается осциллограммами, полученными японскими учеными при экспериментальном исследовании нагрузки в приводе механизма передвижения рельсовой транспортной машины [7].

Литература

1. Ефремов И.С., Гущо-Малков Б.П. Теория и расчет механического оборудования подвижного состава городского электрического транспорта. – М.: Стройиздат, 1970. – 480 с.
2. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1967. – 420 с.
3. Омаров Т.И. Динамика механизмов переменной структуры рельсовых машин – Алматы, КазНТУ, 2014. – 231с.
4. Вешеневский С.Н. Характеристики двигателей в электроприводе. – М.: Энергия, 1977. – 431 с.
5. Вейц В.Л., Кочура А.Е., Мартыненко А.М. Динамические расчеты приводов машин. – Л.: Машиностроение, 1971. – 352 с.
6. Крагельский И.В., Виноградова И.Э. Коэффициенты трения: справочное пособие. – М.: Машгиз, 1962. – 220 с.
7. Хироцу Т., Касай С., Такай Х. Автоколебания с проскальзыванием в механизме привода параллельного карданного типа для рельсовых транспортных средств с электрической тягой // Нихон кикай гаккай ромбунсю, Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. – 1986. – C32, № 483. – С. 2843 – 2849.

К ВОПРОСУ О РЕЗОНАНСНОЙ НАСТРОЙКЕ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ВИБРОМАШИН

Пановко Г.Я.¹, Шохин А.Е.²

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

¹ gpanovko@yandex.ru, ² shohinsn@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются вопросы стабилизации резонансных режимов колебаний вибромашины, возбуждаемые неуравновешенным ротором асинхронного электродвигателя переменного тока, при изменении параметров системы. Предложена система частотного управления режимами колебаний, основанная на измерении сдвига фазы между колебаниями рабочего органа вибромашины и возмущающей силой. Предложен численный алгоритм автоматической настройки на резонансный режим при изменении массы технологической нагрузки в вибромашине.

Одной из актуальных проблем создания высокоэффективных вибрационных технологических процессов, машин и устройств является обеспечение их устойчивой работы на резонансных режимах, когда при относительно низких уровнях возбуждения реализуются относительно высокие уровни колебаний рабочего органа машины. Принципиально резонансная настройка позволяет на порядок снизить потребляемую мощность при одновременном улучшении конструктивных, динамических и эксплуатационных качеств машины [1]. Однако в ряде случаев проблема устойчивого поддержания резонансного режима колебаний вибрационных машин связана не только с возможными флуктуациями технологической нагрузки, нелинейностью характеристик механической части, но и с динамическими особенностями взаимодействия машины с вибрационным приводом. Здесь в первую очередь имеется в виду эффект Зоммерфельда [1-6]. Именно по этой причине большинство вибрационных технологических машин, колебания рабочего органа которых возбуждаются центробежным вибровозбудителем с приводом от электродвигателя, эксплуатируются на до- или зарезонансных режимах.

К настоящему времени достаточно хорошо проработан вопрос стабилизации резонансного режима дебалансного вибровозбудителя с электродвигателем постоянного тока за счет включения обратной связи в систему управления угловой скорости (например, путем изменения сопротивления в цепи якоря, изменением тока возбуждения или подводимого напряжения) [7]. Условия существования и устойчивости резонансных колебаний, возбуждаемых в авторезонансной машине с синхронным электродвигателем, описаны в [8], где рассмотрены возможности возбуждения автоколебаний и управления ими путём изменения сдвига фаз в цепи обратной связи, и предложены некоторые схемы реализации авторезонансного режима.

Другой способ повышения стабильности резонансных машин при высокой добротности их колебательных систем без средств автоматического управления основан на возбуждении параметрических колебаний, в которых реализуются многократные комбинационные резонансные режимы [9].

Вместе с тем вопрос о стабилизации резонансного режима колебаний в системах с асинхронным электродвигателем (наиболее используемым в вибрационных технологических машинах) до настоящего времени мало изучен и требует своего дальнейшего развития.

В настоящей работе рассматривается вопрос автоматической настройки резонансного режима колебаний вибрационной машины, возбуждаемые неуравновешенным ротором асинхронного электродвигателя переменного тока, при

флуктуациях технологической нагрузки с помощью системы управления по каналу обратной связи.

Расчетная схема исследуемой системы представлена на рис. 1, которая позволяет выявить и описать важнейшие динамические свойства многих различных реальных машин [2, 10].

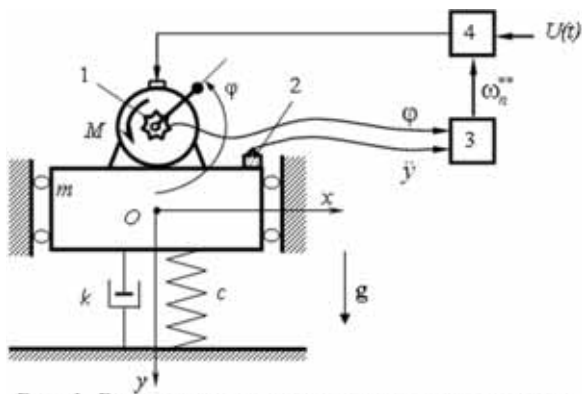


Рис. 1. Расчетная схема механической системы

Рабочий орган машины с технологической нагрузкой (ниже - платформа) представляется в виде абсолютно жесткого тела массой m . Упруго-вязкая опора обладает линейными характеристиками с коэффициентами жесткости c и демпфирования. Платформа может совершать колебания только в вертикальном направлении. На платформе установлен вибровозбудитель дебалансного типа с массой дебаланса m_r и эксцентриситетом r , совмещенный с асинхронным электродвигателем

трехфазного переменного тока. В отличие от обычно используемого описания движущего момента в виде зависимости от угловой скорости вращения (статической характеристики двигателя), в настоящей работе рассматривается связь между потокосцеплениями и токами, устанавливаемая из условий равновесия напряжений для всех фаз статора и ротора, что позволяет описать систему управление работой двигателя. Учитывается также постоянный момент M_c сопротивления вращения ротора двигателя. Движение системы рассматривается относительно неподвижной системы координат xOy , начало которой совмещено с положением общего центра масс, причем вертикальная ось Oy совпадает с направлением вектора сила тяжести g . Вращение ротора описывается углом φ , отсчитываемым против часовой стрелки от положительного направления оси Oy .

Уравнения движения исследуемой системы имеют вид [2, 5, 10]:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + k\dot{y} + cy = m_r r (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi); \\ J\ddot{\varphi} - m_r r (\ddot{y} \sin \varphi - g \sin \varphi) = M - M_c, \end{cases} \quad (1)$$

где J – приведенный момент инерции ротора электродвигателя с дебалансом; точками обозначены полные производные по времени t .

Движущий электромагнитный момент M записан в следующем виде [10, 11]:

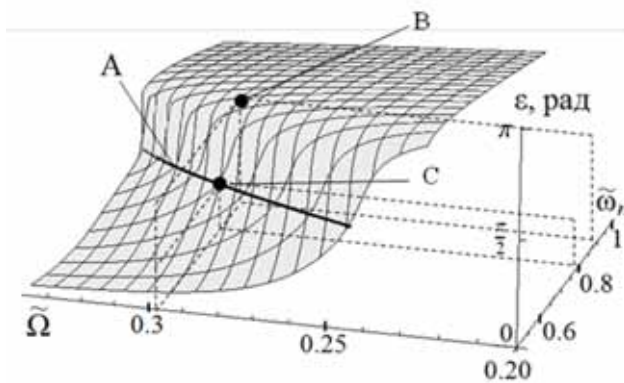
$$M = \frac{1}{2\sqrt{3}} p_n \left[(2\psi_{1A} - \psi_{1B} - \psi_{1C}) i_{1B} - (2\psi_{1A} - \psi_{1B} - \psi_{1C}) i_{1C} - 3(\psi_{1B} - \psi_{1C}) i_{1A} \right] \quad (2)$$

Здесь, как и в работе [10] использованы следующие обозначения: ψ и i – потокосцепления и токи в соответствующих фазах обмотки статора, индексом 1 обозначены переменные, относящиеся к фазам A, B, C статора (индексом 2 ниже будут обозначены переменные, относящиеся к фазам a, b, c ротора); $p_n=2$ – число полюсов электродвигателя.

Связь между потокосцеплениями и токами устанавливается из условий равновесия напряжений для всех фаз статора и ротора [10, 11]. Подробный анализ динамики рассматриваемой системы приведен в [10].

С целью последующего формирования системы управления рассмотрим зависимость сдвига фазы ε между перемещением платформы и возмущающей силой от собственной частоты $\square$ системы и угловой частоты питающего напряжения ω_n при

заданных других параметрах системы. Для этого из уравнений (1) и (2) можно получить в пространстве параметров $\{\varepsilon, \Omega, \omega_n\}$ поверхность, каждая точка которой будет соответствовать возможному динамическому состоянию системы; эту поверхность будем называть «динамическим портретом» системы, который представлен на рис. 2, где ось $\tilde{\Omega} = \Omega/\Omega_0$, ось $\tilde{\omega}_n = \omega_n/\Omega_0$ (здесь $\Omega_0 = 100\pi$ рад/с – масштаб частоты). Расчет выполнялся при следующих значениях параметров системы: момент инерции вращающихся частей электродвигателя с дебалансом $J=0,0032$ кг·м²; коэффициенты жесткости и демпфирования $c = 444,00$ кН/м и $k=0,5$ кН·с/м, соответственно; главная индуктивность $L_m=1,364$ Гн; индуктивности рассеяния фазы статора $L_{1\sigma}=0,089$ Гн; индуктивности рассеяния фазы ротора $L_{2\sigma}=0,156$ Гн; активные сопротивления фаз статора $R_1=56,84$ Ом; активные сопротивления фаз ротора $R_2=46,23$ Ом; амплитуда питающего напряжения $U=220$ В; момент сопротивления вращению ротора $M_c=0,02$ Н·м; ускорение свободного падения $g=9,81$ м/с².



Линией *A* на рис. 2 изображено состояние системы, соответствующее резонансным колебаниям при сдвиге фазы $\varepsilon=\pi/2$.

Целью управления вибрационной машиной является автоматическое поддержание резонансного режима при изменении каких-либо механических или электрических параметров системы с помощью системы управления с обратной связью, блок-схема которой

Рис. 2. Динамический портрет системы

включает следующие основные элементы: датчик угла поворота ротора электродвигателя (дебаланса) 1, датчик колебаний платформы 2, блок управления 3, частотный преобразователь 4 (рис. 1).

В качестве контролируемого параметра примем сдвиг фазы ε между перемещением платформы и возмущающей силой, который на резонансе должен быть равен $\pi/2$ [12]. Так как значение возмущающей силы, действующей на платформу, определяется ее проекцией на вертикаль (рис. 1), то в качестве измеряемого параметра для этой силы естественно принять положение ротора, определяемое датчиком угла, например, энкодером. Перемещение y и частота ω колебаний платформы измеряются датчиком поступательных колебаний, например, пьезоэлектрическим акселерометром с последующим двукратным интегрированием. Измеряемые сигналы обрабатываются в блоке управления.

В качестве управляющего параметра будем рассматривать частоту напряжения ω_n , подаваемого на двигатель через частотный преобразователь, что позволяет регулировать скорость вращения ротора ω в широком диапазоне и минимизировать затраты энергии [12].

Численный алгоритм определения сдвига фаз ε и корректирующего значения управляющего параметра ω_n реализуется в блоке управления. Первоначально вычисляются параметры установившихся колебаний платформы, которые определяются из сравнения двух последующих размахов, и определяется соответствующий момент времени t_* . Далее, для момента $t > t_*$, при котором платформа оказывается в положении статического равновесия $\{y = 0, \dot{y} > 0\}$, определяется соответствующее значение угла

поворота дебаланса φ_* и, затем сдвиг фаз $\varepsilon = \varphi_* - 2\pi n$, где n – число полных оборотов дебаланса в значении угла φ_* .

Предположим, что в какой-то момент времени масса исходной технологической нагрузки (составляющая параметра m) изменилась на некоторую неизвестную величину Δm , что привело к изменению собственной частоты $\square$ системы. При заданной частоте ω_n^* питающего напряжения и измеренному сдвигу фазы ε^* , с помощью динамического портрета, определяем собственную частоту Ω^* , соответствующую текущим параметрам системы (точка B на рис. 2). Зная собственную частоту Ω^* , определяем частоту питающего напряжения ω_n^{**} , соответствующую сдвигу фазы $\varepsilon = \pi/2$ (точка C на рис. 2), которая подается на частотный преобразователь и, соответственно, на электродвигатель.

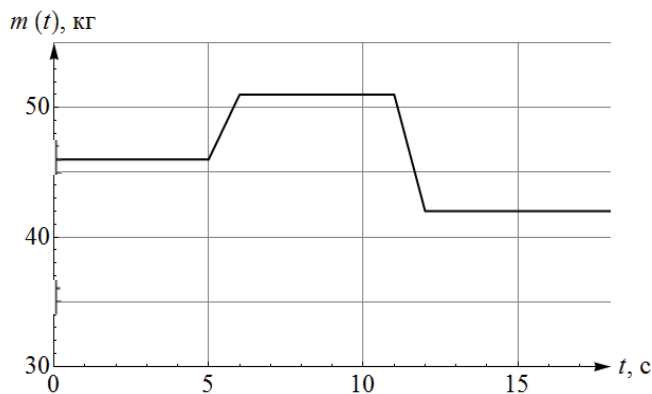


Рис. 3. Закон изменения массы нагрузки во времени

При численной апробации изложенного алгоритма было задано изменение массы системы в соответствии с рис. 3. В результате расчета были получены графики изменения частоты питания электродвигателя (рис. 4), перемещений платформы (рис. 5) и сдвига фазы (рис. 6). На рис. 5 видны три временных интервала установившихся колебаний платформы, которые соответствуют интервалам времени на рис. 3 с постоянной массой системы.

Отметим, что переходные процессы происходят без каких-либо скачков в амплитуде колебаний. Сдвиг фазы характеризуется значительными скачками при изменении массы системы (рис. 6). Штриховыми линиями на рис. 5 и 6 показаны соответствующие значения при отсутствии регулирования.

Разработанный алгоритм управления вибрационной технологической машиной, основанный на построении динамического портрета системы, позволяет осуществлять выведение машины на резонансный режим как из дорезонансного режима, так и из зарезонансного. Разработанный подход обладает универсальностью и может применяться при изменяющихся других параметрах системы.

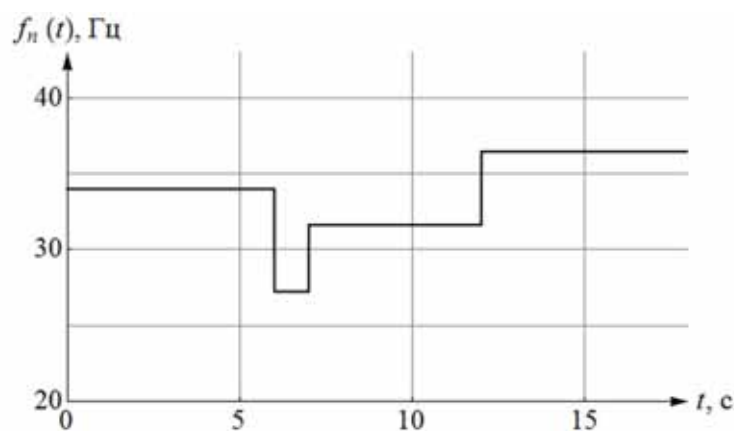


Рис. 4. Изменение частоты питания электродвигателя

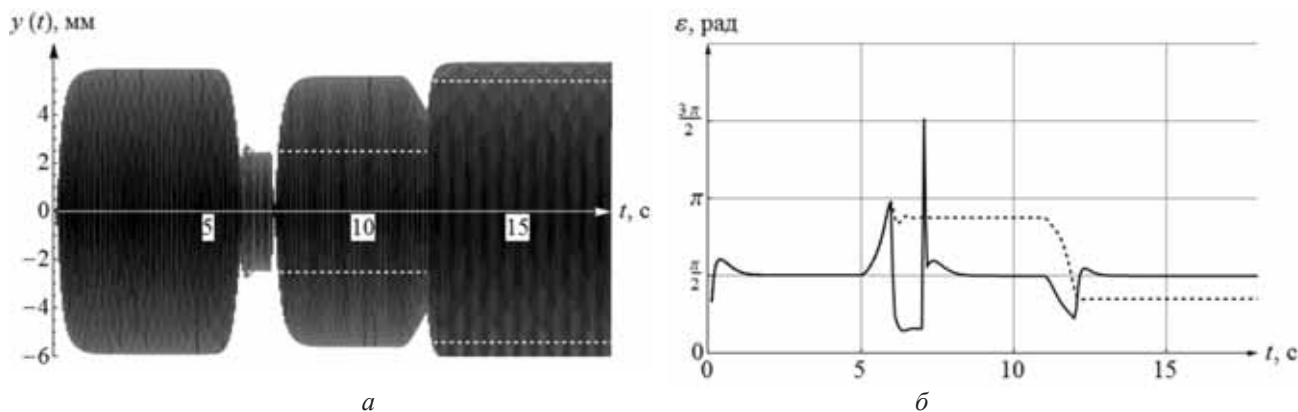


Рис. 5. Колебания платформы (а) и сдвиг фаз (б) при изменении массы нагрузки

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-08-00461_a

Литература

1. Асташев В.К., Бабицкий В.И., Вульфсон И.И. Динамика машин и управление машинами. М.: Машиностроение. 1988. 240 с.
2. Блехман И.И. Вибрационная механика. - М.: Наука, 1994. - 394 с.
3. Вайсберг Л.А. Проектирование и расчет вибрационных грохотов. - М.: Недра, 1986. - 144 с.
4. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. - М.: Наука, 1964. - 256 с.
5. Гуськов А.М., Пановко Г.Я. Особенности колебаний механических систем, возбуждаемых неуравновешенным ротором электродвигателя ограниченной мощности // Управляемые вибрационные машины и технологии. Сб. научных статей в 2-х томах. Т. 1. ISBN 978-5-7681-0731-4. – Курск: ЮЗГУ. - 2012. - С. 192-202.
6. Токарев Б.Ф. Электрические машины: Учебное пособие для вузов. М., Энергоатомиздат, 1990.
7. Асташев В.К., Бабицкий В.И., Соколов И.Я. Авторезонансное вибровозбуждение синхронным электродвигателем // Проблемы машиностроения и надежности машин. -1990. -№4. –С.41-46.
8. Антипов В.И. Динамика вибромашины с комбинационным параметрическим возбуждением // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2001. - №2. - С.16-20.
9. Ниселовская Е.В., Пановко Г.Я., Шохин А.Е. Колебания механической системы, возбуждаемые неуравновешенным ротором асинхронного электродвигателя // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2013, № 6. – С. 17-23.
11. Соколовский Г.Г. Электроприводы переменного тока с частотным регулированием. – М.: АCADEMIA, 2006. – 265 с.
12. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В.Н.Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, - Т.4. Вибрационные процессы и машины / Под ред. Э.Э.Лавендела. 1981. – 509 с.

УПРУГОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ СМАЗКИ РОЛИКОВ БОЧКООБРАЗНОЙ ФОРМЫ

Пановко М.Я.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
mpanovko@yandex.ru

Аннотация. Представлены метод и результаты численного моделирования упругогидродинамических (УГД) контактов, образующихся при качении смазанных коротких роликов со скруглённым краем. Вычислительный алгоритм основан на методе Ньютона для решения системы нелинейных интегродифференциальных уравнений и неравенств, описывающих УГД контакт. Показано заметное влияние профилирования, угла перегиба между осью ролика и поверхностью качения, а также ориентации вектора средней скорости контактирующих поверхностей относительно осей эллиптического УГД контакта на распределения давления и толщины смазочного слоя в зоне контакта.

1. Введение. Задачи об упругогидродинамической (УГД) смазке возникают при анализе процессов в зоне контакта смазанных деформируемых тел, образующих различные узлы трения. Режим УГД смазки характеризуется наличием тонкой смазочной плёнки, толщина которой в несколько раз превосходит высоту шероховатости поверхностей, и упругой деформацией тел в зоне контакта. К настоящему времени наибольшее число результатов в случае сосредоточенных УГД контактов получено для линейных (неограниченных по длине) и точечных контактов [1]. Вместе с тем значительный практический интерес представляют процессы смазки в линейном контакте конечной длины. Подобные контакты имеют место в роликоподшипниках и зубчатых передачах. Для расчётного анализа таких контактов формулируется модельная задача о качении смазанного упругого короткого ролика по упругому полупространству. При этом особое внимание с точки зрения надёжной работы узла трения уделяется явлениям в концевой зоне. Скругление осевого профиля торцевой части ролика, как известно, весьма эффективно снижает или совсем исключает возрастание напряжения на торце. Для несмазанного контакта это показано в ряде численных исследований (см., например, [2]).

В отличие от УГД смазки линейных и точечных контактов смазка коротких роликов исследована численными методами существенно меньше, главным образом, из-за трудностей реализации устойчивого вычислительного процесса, особенно в случае тяжёлого нагружения. Среди крайне ограниченного числа публикаций, посвящённых численному моделированию УГД смазки роликов, следует отметить работы [3, 4], в которых приводятся результаты решений для кругового цилиндрического ролика со скруглённым краем. Однако на практике ролику часто придают, например, бочкообразную форму, не создавая при этом в образующей ролика прямолинейного участка.

В настоящей работе представлены результаты численного исследования УГД смазки короткого ролика бочкообразной формы, образующая которого составлена из двух дуг окружностей. Показано влияние на УГД контакт различных значений параметров скругления центральной и торцевой частей ролика, угла перегиба между осью ролика и поверхностью качения, ориентации вектора средней скорости контактирующих поверхностей относительно осей эллиптического УГД контакта.

2. Постановка задачи. Рассматривается стационарная изотермическая задача об УГД контакте короткого ролика бочкообразной формы. На рис. 1 схематично показан ролик, поверхность которого в зоне контакта описывается следующей функцией

$$z = F(x, y) = h_0 + f(y) + x^2 / 2R_x(y) + u_z(x, y) - u_z(0, 0) + \eta,$$

где x, y - декартовы координаты в плоскости контакта, h_0 - расстояние между смазанными поверхностями в начале координат, $f(y)$ - уравнение образующей, $R_x(y)$ - радиус кривизны ролика в сечении $y=const$, $u_z(x, y)$ - упругая деформация, γ - угол перекоса.

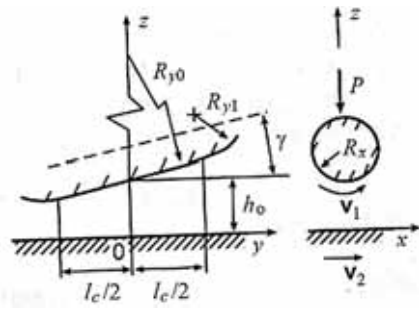


Рис. 1. Схема смазанного контакта

Далее полагается, что $R_x(y) \cong R_{x0}$, где $R_{x0} = R_x(0)$.

Образующая, составленная из дуг двух окружностей с радиусами R_{y0} , R_{y1} ($R_{y1} \ll R_{y0}$), сопрягаемых в сечении $|y| = l_c/2$, описывается функциями следующего вида

$$f(y) = y^2 / 2R_{y0} + f_1(|y|)(1/2R_{y1} - 1/2R_{y0})\theta(|y|),$$

$$\theta(|y|) = \begin{cases} 1, & \text{при } |y| > l_c/2 \\ 0, & \text{при } |y| \leq l_c/2. \end{cases}$$

Здесь $f_1(|y|) = (|y| - l_c/2)^2$ при сопряжении дуг гладким образом и $f_1(|y|) = y^2 - (l_c/2)^2$ при негладком сопряжении. В случае, когда $R_{y0} \rightarrow \infty$, на интервале $|y| \leq l_c/2$ поверхность ролика в окрестности контакта (до деформации) имеет форму кругового цилиндра. В случае, когда $R_{y1} = R_{y0}$ поверхность ролика в окрестности контакта (до деформации) имеет вид эллиптического параболоида, а зона контакта - вид эллипса. Полагается, что подобные контакты реализуются при качении со скольжением упругого ролика по гладкой поверхности упругого полупространства, при этом контактирующие тела разделены слоем смазки со свойствами несжимаемой вязкой жидкости и находятся под воздействием внешней сжимающей силы. В задаче используются типичные допущения УГД теории смазки (см., например, [5]). Основные допущения заключаются в следующем: толщина слоя смазки существенно меньше характерных размеров контактирующих тел, силы вязкого трения значительно больше инерционных, локально контактирующие тела заменяются полупространствами.

В случае ролика безразмерные переменные вводятся нормировкой размерных переменных на параметры несмазанного линейного контакта и имеют следующий вид

$$(x', y') = (x, y) / a_H, l'_c = l_c / a_H, p' = p / p_H, h' = h / h_0, \mu' = \mu / \mu_0, H_0 = 2R_{x0}h_0 / a_H^2, \\ \varepsilon_0 = R_{x0} / R_{y0}, \varepsilon_1 = R_{x0} / R_{y1}, \gamma' = 2R_{x0}\gamma / a_H, V = 24\mu_0 |\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2| R_{x0}^2 / p_H a_H^3, P' = P / p_H a_H^2, \\ \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) / |\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|, Q'_0 = Q_0 p_H,$$

где R_{x0} , R_{y0} , R_{y1} - радиусы кривизны; ε_0 , ε_1 - параметры скругления в осевом направлении; $p(x, y)$ - давление в смазочной плёнке; a_H - полуширина герцевского линейного контакта; p_H - максимальное герцевское напряжение в линейном контакте; P - внешняя нагрузка; $h(x, y)$ - толщина смазочной плёнки (зазор); h_0 - толщина смазочной плёнки в начале координат; μ - вязкость смазки; μ_0 - вязкость смазки при давлении окружающей среды; $\mathbf{v}_1(v_{1x}, v_{1y})$, $\mathbf{v}_2(v_{2x}, v_{2y})$ - векторы и компоненты скоростей контактирующих поверхностей; H_0 - безразмерная толщина плёнки в начале координат; V - нагрузочно-скоростной параметр; Q_H - пьезокэффициент вязкости.

Аналогично обезразмеривается эллиптический УГД контакт нормировкой переменных на параметры несмазанного эллиптического контакта с учётом, что для

нормировки используются полуоси герцевского эллипса контакта a_H, b_H ($a_H \leq b_H$) и p_H - максимальное герцевское напряжение эллиптического контакта. При этом дополнительно используются следующие параметры

$$\beta = a_H / b_H, e = \sqrt{1 - \beta^2}, \phi(\beta) = (K(e) - D) / \beta^4 D, D = (K(e) - E(e)) / e^2, \alpha = \arctg(v_y / v_x)$$

где e – эксцентриситет эллипса контакта, $K(e)$ и $E(e)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, значение β определяется из уравнения $\beta^2 \phi(\beta) = R_{y0} / R_{x0}$, α – угол между направлением вектора средней скорости контактирующих поверхностей $\mathbf{v}$ и малой осью эллипса контакта a_H на оси x .

Уравнения УГД задачи смазки для ролика бочкообразной формы в безразмерных переменных имеют вид (далее штрихи опущены)

$$L(p) = \nabla \cdot \left(H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - V \mathbf{v} h \right) = 0, \quad (1)$$

$$h(x, y) = 1 + \frac{x^2 + \varepsilon_0 y^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) f_1(|y|) \theta(|y|)}{H_0} + \frac{1}{\pi H_0} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{\mathcal{W}}{H_0}, \quad (2)$$

$$M(p) = \frac{\pi}{2} l_c - \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0, \quad (3)$$

$$p|_C = \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{C_e} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \mathbf{v} = (v_x, v_y), \mu = \mu(p),$$

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

Решение системы (1)-(4) должно удовлетворять граничным условиям для давления, различным для входной C_i и выходной C_e частей границы $C = C_i \cup C_e$ области контакта Ω . Полагается, что входная часть границы C_i задана, а выходная C_e заранее неизвестна и определяется в процессе решения задачи.

Для определения местоположения выходной (свободной) границы, отделяющей зону смазки от зоны кавитации, используются условия дополненности [6]

$$L(p) = 0, \quad p > 0 \text{ в зоне смазки}; \quad L(p) < 0, \quad p = 0 \text{ в зоне кавитации}. \quad (5)$$

Система (1)-(5) является нелинейной интегродифференциальной системой уравнений и неравенств, состоящей из уравнения Рейнольдса (1), уравнения для определения толщины смазочной плёнки между упругими телами (2), условия равенства внешней нагрузки интегралу от давления по области контакта (3), краевых условий для давления (4) и условий дополненности (5). Условие равновесия (3) записано в

предположении, что сила, приложенная к ролику, равна суммарной силе P на участке l_c в случае бесконечно длинного цилиндра, т.е. в размерных величинах $P = \pi p_H a_H l_c / 2$. В расчетах использовалась зависимость $\mu = \mu_0 \exp(Q_0 p)$. В системе (1)-(5) задаются: геометрия входной границы смазочной плёнки C_i , нагрузочно-скоростной параметр V , пьезокоэффициент вязкости Q_0 , компоненты вектора скорости $\mathbf{V}(v_x, v_y)$, параметры скругления $\varepsilon_0 = R_{x0}/R_{y0}$, $\varepsilon_1 = R_{x0}/R_{y1}$, угол перекося γ и зависимость $\mu(p)$.

Для решения задачи об эллиптическом УГД контакте уравнения (2) и (3) в системе (1)-(5) заменяются следующими уравнениями

$$h(x, y) = 1 + \frac{x^2 + \varepsilon_0 y^2}{H_0} + \frac{\varepsilon_0}{\pi \beta^2 D H_0} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2')$$

$$M(p) = \frac{2\pi}{3\beta} - \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (3')$$

Решением системы являются распределения давления $p(x, y)$, толщины смазочной плёнки $h(x, y)$, выходная граница $x_e(y)$ и безразмерная толщина смазочной плёнки в начале координат H_0 .

3. Численный метод. Расчётная область контакта в плоскости (x, y) задается в виде прямоугольника $\{x, y : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$ и покрывается неравномерной разнесённой декартовой сеткой с системой узлов $(x_i, y_j), (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$. Давление определяется в узлах (x_i, y_j) , толщина смазочной плёнки – в узлах $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$. Интегрируя (1) по области $\Delta\Omega_{ij}$ ячейки (i, j) внутри контура (l_{ij}) , получаем

$$L_1(p; H_0) = \int_{(l_{ij})} \left[H_0^2 \frac{h^3}{\mu} (\nabla p \cdot \mathbf{n}) - V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) h \right] dl = 0. \quad (6)$$

Решение системы уравнений проводится методом Ньютона. Линеаризуя (1), (3), (4) около решения $(p(x, y), H_0)_k$, где k - номер итерации, и аппроксимируя пространственные производные, в итоге получаем систему разностных уравнений относительно $\Delta p_{k+1} = p_{k+1} - p_k$ и $\Delta H_{0,k+1} = H_{0,k+1} - H_{0,k}$

$$\begin{pmatrix} (a_{qr})_{nn} & (b_q)_n \\ (c_r)_n^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Delta p_r)_n \\ \Delta H_0 \end{pmatrix}_{k+1} = - \begin{pmatrix} L_1(p_r)_n \\ M(p_r)_n \end{pmatrix}_k, \quad (7)$$

где элементами матрицы Якоби порядка $(n+1)$ являются полная квадратная матрица $(a_{qr})_{nn}$ порядка n , вектор-столбец $(b_q)_n$ и вектор-строка $(c_r)_n^T$ ($q, r = 1, \dots, n$). Значение n равно числу узлов сетки, в которых определяется давление, и зависит от местоположения выходной границы.

На каждом шаге итерационного процесса решаются разностные уравнения (7) методом гауссова исключения с частичным выбором ведущего элемента, вычисляются

$H_{0,k+1}$, $p_{k+1}(x_i, y_j)$, $h_{k+1}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$, $x_{e,k+1}(y_j)$. Интеграл в (2) вычислялся по кубатурной формуле для сингулярных интегралов [7]. Итерационный процесс продолжался до достижения заданной относительной точности решения δ , т.е. $\max(|H_{0,k+1}/H_{0,k} - 1|, |p_{k+1}/p_k - 1|, |h_{k+1}/h_k - 1|, |x_{e,k+1}/x_{e,k} - 1|) < \delta$.

4. Результаты расчётов. Изложенный выше вычислительный алгоритм был применён для расчёта УГД контакта профилированных роликов. В случае цилиндрического ролика ($\varepsilon_0 = 0$) [8] расчёты проводились на сетке с числом узлов

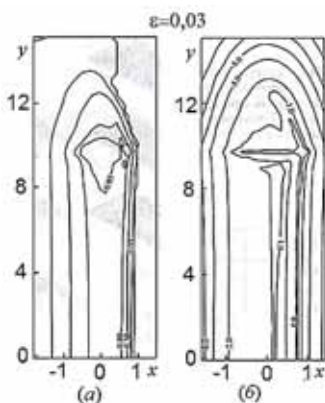
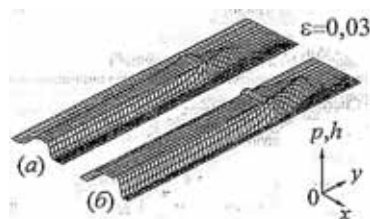


Рис. 2. Распределения давления (а) и толщины плёнки (б)

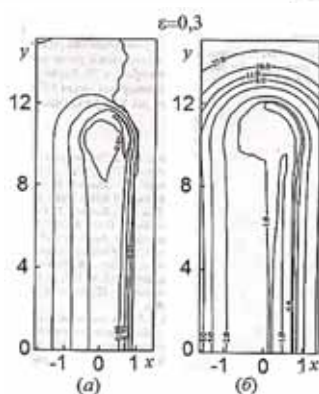
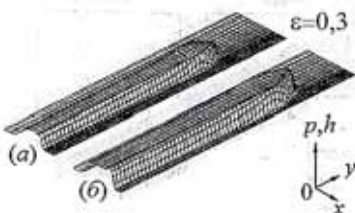


Рис.3. Распределения давления (а) и толщины плёнки (б)

22×62 для негладкого (рис. 2 а, б) и гладкого (рис. 3 а, б) сопряжений при следующих параметрах: $V=0,1$, $Q_0=3$, $l_c=20$, $v_x=1, v_y=0$, $\varepsilon_1 = 0,02 \div 0,04$ для негладкого сопряжения и $\varepsilon_1 = 0,1 \div 0,3$ для гладкого. Видно, что в окрестности $y = l_c/2$ гладкое сопряжение заметно снижает градиенты давления и толщины смазочной плёнки по сравнению с негладким. Расчёты показали, что с увеличением ε_1 возрастает $p_{\max}$, снижается $h_{\min}$, H_0 практически не изменяется. При увеличении l_c значения H_0 приближаются к

значениям H_0 для бесконечно длинного цилиндра. Так, из расчётов для случая гладкого сопряжения $\varepsilon_1 = 0,2$ следует: при $l_c=10$ $H_0=0,1722$, при $l_c=20$ $H_0=0,1696$, при $l_c=30$ $H_0=0,1684$. Из расчёта по методике решения одномерных УГД задач [9] при тех же значениях $V=0,1$, $Q_0=3$ следует, что в случае бесконечного цилиндра $H_0=0,1622$.

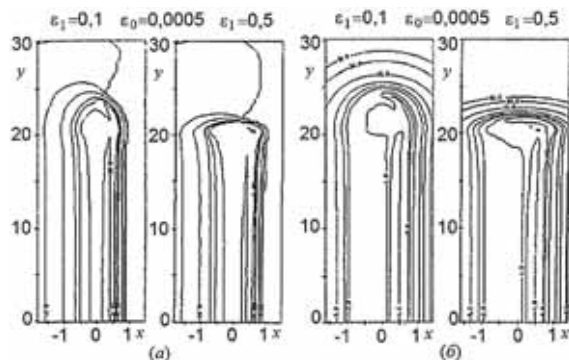


Рис. 4. Распределения давления (а) и толщины плёнки (б)

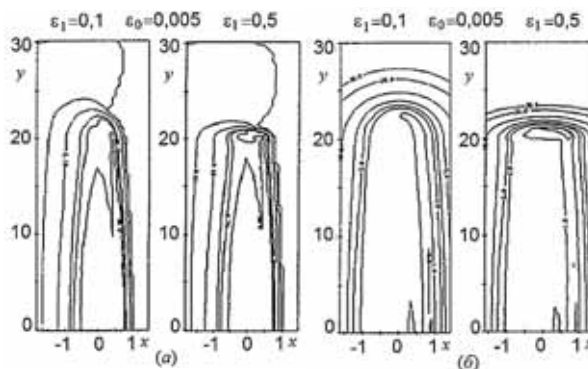


Рис. 5. Распределения давления (а) и толщины плёнки (б)

Расчёты УГД смазки для бочкообразного ролика без перекоса ($\gamma=0$) [10] проводились для гладкого сопряжения при следующих параметрах: $V=0,1$, $Q_0=3$, $l_c=40$, $v_x=1, v_y=0$, $\varepsilon_0 = 0 \div 0,005$, $\varepsilon_1 = 0,1 \div 0,5$ на сетке с числом узлов 22×92.

Распределения $p(x,y)$ и $h(x,y)$ в УГД контакте при $\varepsilon_0=0,0005$, $\varepsilon_0=0,005$ для значений $\varepsilon_1=0,1$, $\varepsilon_1=0,5$ представлены на рис. 4 и рис. 5 соответственно в виде линий уровня. В сечении сопряжения ($y=l_c/2$) $p=p_{\max}$, $h=h_{\min}$. Отмеченные эффекты

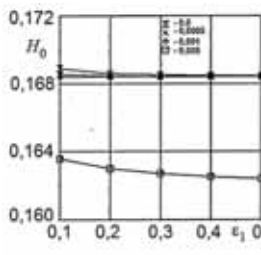


Рис. 6. Зависимость H_0 от ε_1

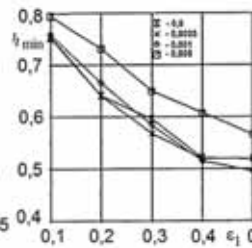


Рис. 7. Зависимость $h_{\min}$ от ε_1

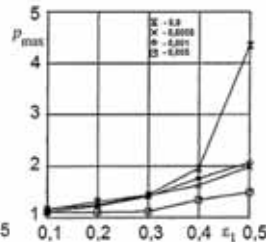


Рис. 8. Зависимость $p_{\max}$ от ε_1

проявляются все резче по мере уменьшения ε_0 и увеличения ε_1 . Влияние параметров ε_1 и ε_0 на значения H_0 , $h_{\min}$ и $p_{\max}$ иллюстрируют рис. 6-8. Характерно, что значения H_0 практически не изменяются с ростом ε_1 при $\varepsilon_0 < 0,001$ (см. рис. 6).

При этом значения $h_{\min}$ и $p_{\max}$ изменяются значительно, что демонстрируют рис. 7 и рис. 8 соответственно.

Расчёты УГД смазки ролика с перекосом ($\gamma \neq 0$) [11] проводились при следующих

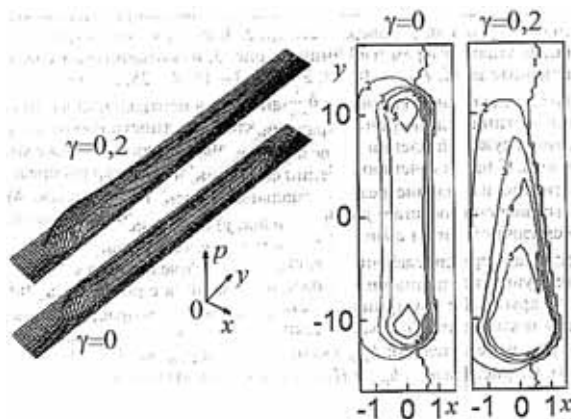


Рис. 9. Распределения давления

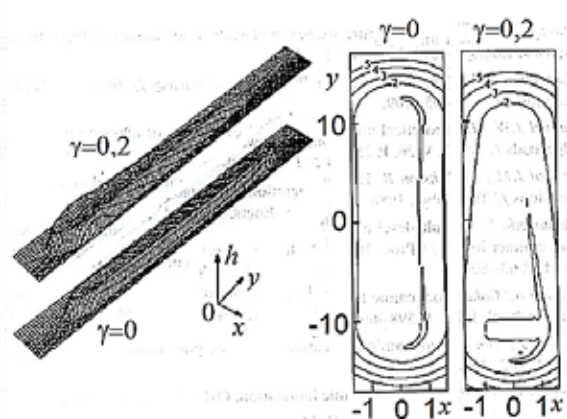


Рис. 10. Распределения толщины плёнки

параметрах: $V=0,1$, $Q_0=3$, $l_c=20$, $v_x=1$, $v_y=0$, $\varepsilon_0=0$, $\varepsilon_1=0,2$. Безразмерные значения

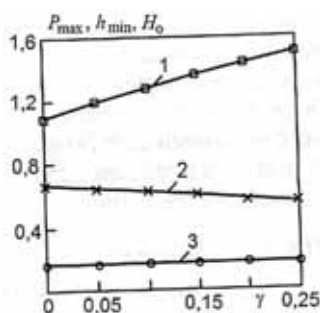


Рис. 11. Зависимости $p_{\max}$ (1), $h_{\min}$ (2), H_0 (3) от угла γ

угла перекоса варьировались в диапазоне $\gamma=0 \div 0,25$. При этом нормировочный параметр для размерных значений угла перекоса был выбран равным $2R_{x0}/aH=100$. Расчёты проводилось на сетке с числом узлов 22×122 . Распределения $p(x,y)$ и $h(x,y)$ при $\varepsilon_0=0$ и $\varepsilon_1=0,2$ для $\gamma=0$ и $\gamma=0,2$ представлены (в виде поверхностей и изолиний) на рис. 9 и рис. 10 соответственно и демонстрируют заметное влияние перекоса. Распределения становятся при перекосе существенно асимметричными – одна часть ролика более нагружена по сравнению с другой. Влияние γ на значения $p_{\max}$, $h_{\min}$ и H_0 иллюстрирует рис. 11. Значения H_0 практически не изменяются с ростом γ , при этом $h_{\min}$

уменьшается, а $p_{\max}$ возрастает с ростом γ .

Расчёты эллиптического УГД контакта [12] проводились на сетке с числом узлов 30×50 при следующих параметрах: $V=0,1$, $Q_0=5$, $\beta=0,3$ ($\varepsilon_0 = 0,1602$), $\alpha = 0^\circ \div 90^\circ$. Распределения $p(x,y)$ и $h(x,y)$ представлены в виде поверхностей на рис. 11 и изолиний на рис. 12. Видно, что с изменением угла α изменяется расположение выходной границы, пиков давления и сужения зазора на выходе из контакта. На рис. 13 и рис. 14 показано изменение распределений $h(y=0,x)$ и $h(x=0,y)$ вдоль осей эллипса контакта (1- $\alpha = 0^\circ$, 2- $\alpha = 45^\circ$, 3- $\alpha = 60^\circ$, 4- $\alpha = 90^\circ$). На рис. 15 показано изменение значений $h_{\min}$

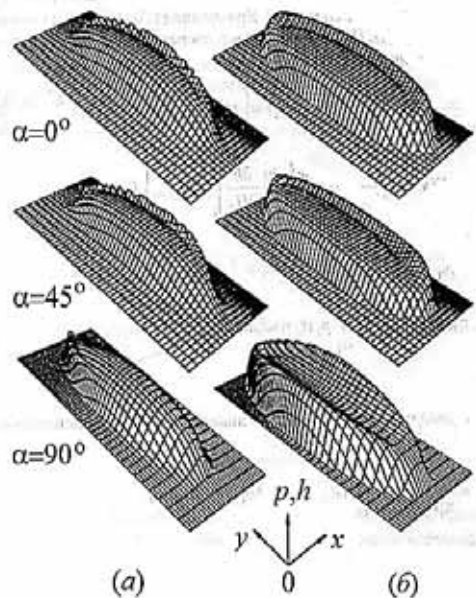


Рис. 11. Распределения давления (а) и толщины плёнки (б)

(светлые точки) и H_0 (тёмные точки) в зависимости от α : при $\alpha = 0^\circ$ $h_{\min}=0,7447$, $H_0=0,202$; при $\alpha = 90^\circ$ $h_{\min}=0,3105$, $H_0=0,1764$. Для сравнения в круговом контакте $H_0=0,1786$, $h_{\min}=0,4741$ (соответственно штриховые прямые 1 и 3 на рис. 15); в линейном контакте $H_0=0,2342$, $h_{\min}=0,7587$ (соответственно штриховые прямые 2 и 4 на рис. 15). Результаты расчётов свидетельствуют о заметном влиянии ориентации вектора скорости $\mathbf{V}$ на распределения $p(x,y)$ и $h(x,y)$ в эллиптическом УГД контакте. Особенно заметно изменяется $h_{\min}$. Сходные особенности изменений параметров эллиптического УГД контакта в зависимости от угла α проявлялись также в расчётах УГД

контакта другим численным методом [13].

Представленные в настоящей работе результаты численного моделирования продемонстрировали заметное влияние профилирования роликов, угла перекоса их осей и ориентации вектора средней скорости поверхностей в случае эллиптического УГД контакта на распределение давления и толщины смазочной плёнки в зоне контакта.

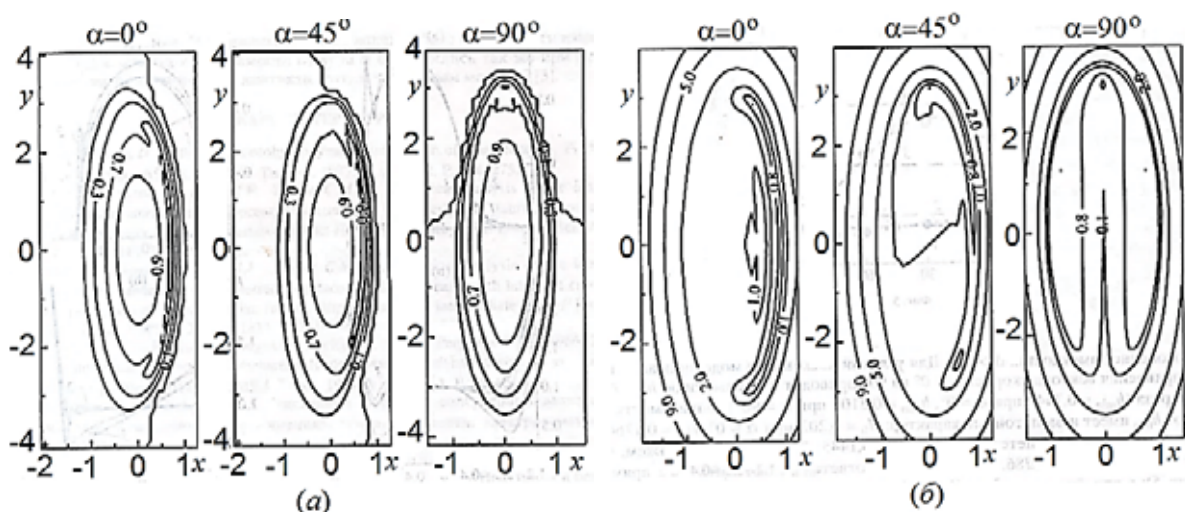


Рис. 12. Распределения (изолинии) давления (а) и толщины плёнки (б)

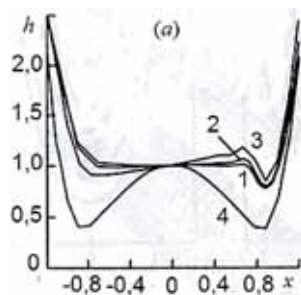


Рис. 13. Распределение $h(x, y=0)$, $\alpha = \text{var}$

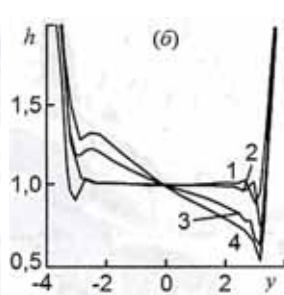


Рис. 14. Распределение $h(x=0, y)$, $\alpha = \text{var}$

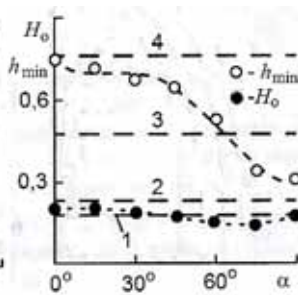


Рис. 15. зависимости $h_{\min}(\alpha)$, $H_0(\alpha)$

Литература

1. Dowson D., Ehret P. Past, present and future studies in elastohydrodynamics // Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J. J. Engng Tribol. 1999. V. 213. № J5. P. 317-333.
2. Natsumeda S. Application of multi-level multi-integration to contact problems. Part 1: non-Hertzian contact in rolling bearings // Proc. Instn Mech. Engrs. Part J. J. Engng Tribol. 1999. V. 213. № J1. P. 63-80.
3. Mostofi A., Gohar R. Elastohydrodynamic lubrication of finite line contacts // Trans. ASME. J. Lubric. Technol. 1983. V. 105. № 4. P. 82-88.
4. Park T.J., Kim K.W. Elastohydrodynamic lubrication of a finite line contact // Wear. 1998. V. 223. № 1. P. 102-109.
5. Галахов М.А., Гусятников П.В., Новиков А.П. Математические модели контактной гидродинамики. М.: Наука. 1985. 296 с.
6. Oh K.P. The numerical solution of dynamically loaded elastohydrodynamic contact as a nonlinear complementarity problem // Trans. ASME. J. Tribol. 1984. V. 106. № 1. P. 88-95.
7. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука. 1985. 253 с.
8. Пановко М.Я. Упругогидродинамическая смазка цилиндрического ролика со скруглённым краем // Изв. АН. Механика твёрдого тела. 2003. № 2. С. 40-48.
9. Айрапетов Э.Л., Кудиш И.И., Пановко М.Я. Численный метод решения задач смазки тяжело нагруженного упругогидродинамического контакта // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 6. С. 957-964.
10. Пановко М.Я. Влияние профилирования на параметры упругогидродинамического контакта коротких роликов // Трение и износ. 2003. Т. 24. № 4. С. 355-361.
11. Пановко М.Я. Численное моделирование упругогидродинамического контакта профилированных роликов с учётом перекоса их осей // Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2009. № 5. С. 54-60.
12. Пановко М.Я. Влияние ориентации вектора средней скорости контактирующих поверхностей на параметры эллиптического упругогидродинамического контакта // Изв. АН. Механика твёрдого тела. 2000. № 5. С. 159-165.
13. Chittenden R.J., Dowson D., Dunn J.F., Taylor C.M. A theoretical analysis of the isothermal elastohydrodynamic lubrication of concentrated contacts. II. General case, with lubricant entrainment along either principal axis of the Hertzian contact ellipse or at some intermediate angle // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1985. V. 397. № 1813. P. 271-294.

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ ТИПА "ЗАЗОР" И "ТРЕНИЕ" В ПРИВОДАХ НА ТОЧНОСТЬ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ В МНОГООКООРДИНАТНОЙ МАШИНЕ С ЧПУ

Пась О.В.¹, Серков Н.А.²

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

¹ o.pa88@yandex.ru, ² serkov1943@mail.ru

Аннотация. Прецизионные многокоординатные станки с ЧПУ и промышленные роботы являются важной частью технологического оборудования современного машиностроения. Постоянно повышаются требования к точности воспроизведения траектории движения рабочих органов технологического оборудования с ЧПУ. Нелинейности, типа «зазор» и «трение», в приводах технологического оборудования существенно влияют на точность воспроизведения траектории. Описаны результаты исследования влияния зазоров и трения в механизмах приводов, охваченных и не охваченных обратной связью по положению, на точность воспроизведения траектории. Результаты получены методом имитационного моделирования.

Развитие машиностроения тесно связано с расширением и ужесточением требований к современным машинам, в частности, повышению быстродействия и точности выполняемых операций. Постоянно возрастают требования к точности движения исполнительных органов технологического оборудования с ЧПУ, на которых изготавливаются современные машины. Среди многочисленных факторов, действующих на несущую систему многокоординатной машины с ЧПУ и вызывающих дополнительные относительные смещения рабочих органов, следует выделить динамические, проявляющиеся в процессе движения отдельных деталей и узлов. К таким факторам, в первую очередь, относятся: зазоры в подвижных соединениях и силы трения. Вредное влияние указанных факторов на точность воспроизведения пространственной траектории рабочих органов пытаются уменьшить или полностью устранить как путем совершенствования конструкции, так и методами коррекции через систему ЧПУ [1].

На рис. 1, в качестве примера, представлены отклонения воспроизведения окружности радиусом 100 мм при контурной подаче $F = 500$ мм/мин для станка мод. ФП 27 и станка мод. МС - 300 (ОАО НИАТ), полученные с помощью прибора ballbar QC 10 ф. Renishaw.

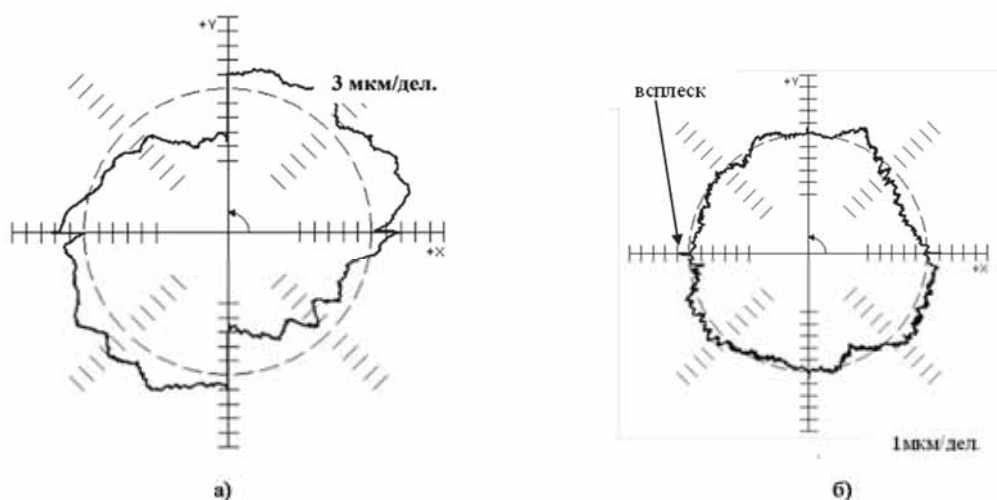


Рис. 1. Отклонения воспроизведения окружности $R 100$ при контурной подаче $F = 500$ мм/мин: а) на станке мод. ФП 27 (механизмы с зазорами не охвачены обратными связями по положению); б) на станке мод. МС – 300 (механизмы с зазорами охвачены обратными связями по положению).

Здесь наблюдаются существенные различия в поведении кривой отклонения от эталонной окружности при реверсе по каждой линейной координате (скорость движения одного из узлов «проходит» через ноль). Круглограмма, полученная на станке ФП 27 (рис. 1, а), является характерной для приводов, в которых механизмы с зазорами не охвачены обратными связями по положению (датчики обратной связи расположены на валу электродвигателя). Круглограмма, полученная на станке МС – 300 (рис. 1, б), является характерной для приводов, в которых механизмы с зазорами охвачены обратными связями по положению (датчики – «линейки» установлены на салазках).

Ниже представлены результаты исследования влияния на точность воспроизведения эталонной окружности при наличии в приводе по линейным координатам кинематического зазора и трения методом моделирования в среде Matlab (Simulink).

Модель привода по линейной координате машины с ЧПУ. На рис. 2 представлена в качестве примера механическая часть, охваченной ОС, схема привода подачи с использованием шариковой винтовой передачи (ШВП).

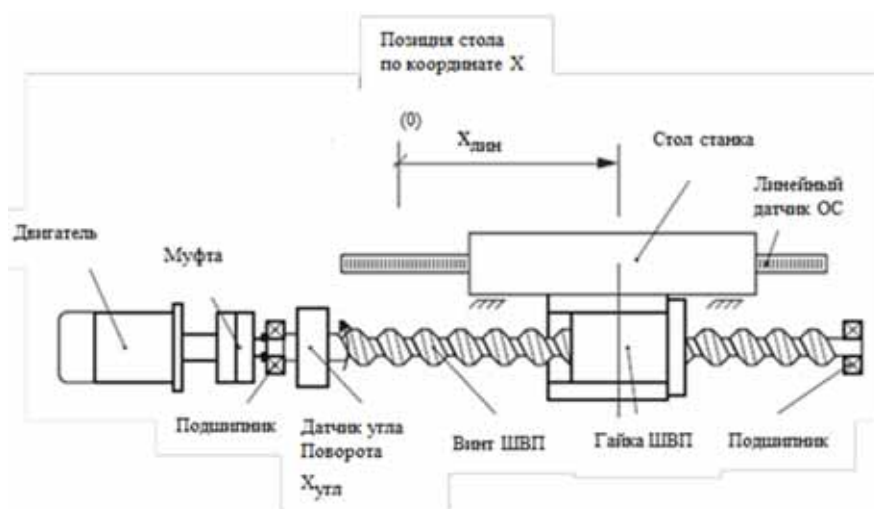


Рис. 2. Схема привода подачи по линейной координате с ШВП.

На рис. 3 представлена имитационная модель привода при наличии кинематического зазора (приведённого к конечному звену) в механической части, охваченной обратной связью по положению. В работе [2] описана методика создания модели.

При построении модели электродвигателя было принято допущение, что поле возбуждения считается постоянным при постоянном напряжении возбуждения, а момент сопротивления на валу двигателя не зависит от скорости вращения якоря. Механическая часть привода представлена ротором электродвигателя, охваченным обратной связью по скорости и углу поворота. Звенья системы считаются жесткими. Модель регулятора составлена по общепринятой схеме построения СУ, представляющей собой каскад регуляторов контуров тока, скорости и положения. Кроме того, на вход регулятора положения также подается дополнительный корректирующий сигнал, который компенсирует скоростную ошибку.

Также будем считать, что отсутствуют возмущающие воздействия: $M_d = 0$ (вход блока J_e).

В механике (рис. 4, а) под зазором понимается «свободный ход» (люфт), т. е. минимальная величина перемещения задающего элемента механической системы - массы M_1 , при которой не наблюдается никакого перемещения выходного элемента системы - массы M_2 .

На рис. 4 в) величина зазора равна отрезку BE, $\omega = 2\pi/10$ рад./сек. Если рассмотреть обработку двух синусоидальных сигналов: $X_1 = \sin(\omega t)$ без зазора и $Y_1 = \sin(\omega t + \pi/2)$ с зазором и отобразить выходные сигналы X_2 и Y_2 в полярной системе координат, то получится картина, представленная на рис. 4, б) (получено с помощью моделирования). Здесь: входные сигналы X_1 и Y_1 – пунктирная линия (эталонная окружность), выходные сигналы X_2 и Y_2 – сплошная линия (действительная траектория). Рассмотренный случай соответствует обработке траектории «окружность» приводом по X без зазора и приводом по Y с зазором, не охваченным обратной связью по положению.

При охвате механической передачи с зазором обратной связью по положению картина влияния зазора на обработку входного сигнала принципиально меняется. Ниже рассматривается этот случай.

Применительно к моделированию несущей системы привода по линейной координате отклонение действительного положения исполнительного органа от заданного показано на рис. 5, а). На осциллографе «Scope_backlash» высвечиваются следующие кривые: 1- задающее воздействие по перемещению в соответствии с углом поворота двигателя, 2 – перемещение в соответствии с показаниями датчика угла поворота ($X_{\text{угл}}$ рис. 2) при движении системы с зазором (муфта) и 3 - сигнал рассогласования, поступающий на вход регулятора. Как видно из графика, изменение направления движения привода сопровождается характерным «выступом», когда сигнал с датчика угла поворота показывает постоянное значение во время прохождения зазора.

Если рассматривать движение ИО по эталонной окружности, реализуемой двумя линейными приводами расположенными ортогонально относительно друг друга, то отклонения действительной траектории от заданной принимают вид, показанный на рис. 5, б). Здесь: Радиус эталонной окружности – 10 мм, зазор – 0,4 мм, обход против часовой стрелки, 1 – эталонная окружность, 2 – действительная траектория. Для построения указанных отклонений в полярной системе координат используются блоки U_zad и U_delta (рис. 3) передачи данных из Simulink в Matlab.

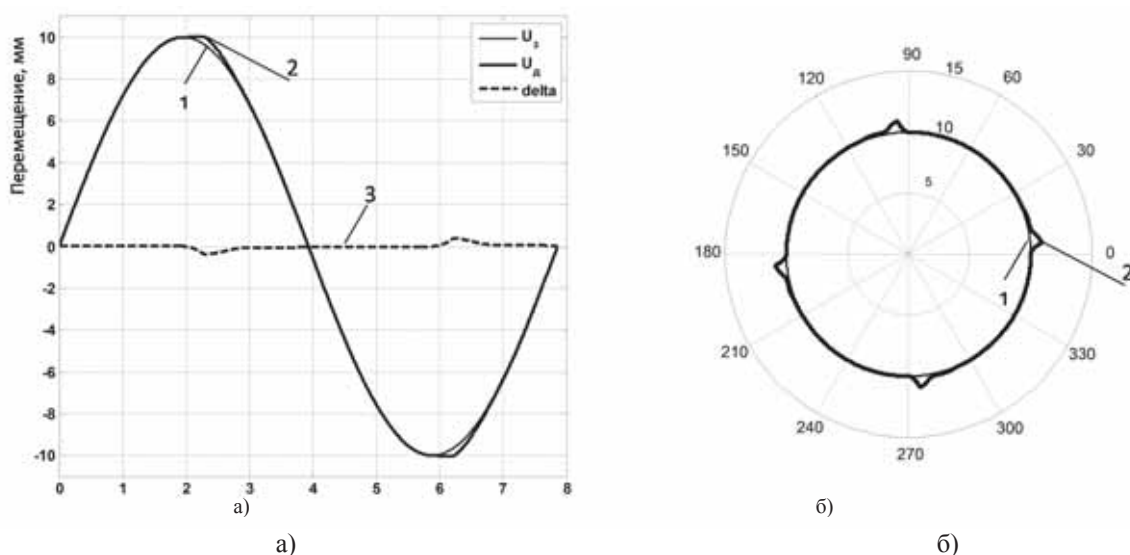


Рис. 5. Точность воспроизведения эталонного движения: а) отклонения при воспроизведении эталонного синусоидального движения при наличии зазора, охваченного обратной связью; б) отклонения воспроизведения эталонной окружности в полярной системе координат.

Следует отметить, что в момент реверса, например, по координате Y будет сохраняться постоянное значение $y_{act}(t) = y_{max}$ (ИО стоит на месте). В этот момент система привода находится в состоянии отключения обратной связи по положению, т. е. система является разомкнутой до момента полной выборки зазора (рис. 4, а). Отклонение по Y от заданной координаты до полной выборки зазора будет $\Delta y_1 = y_{act}(t) - y_3(t) = y_{max} - y_3(t)$. После полной выборки зазора привод вновь становится замкнутым и ИО начинает двигаться в направлении уменьшения величины рассогласования и, соответственно, уменьшения Δy . Это видно после прохождения точки $x(t_{выб})$, $y(t_{выб})$ на рис.6, а).

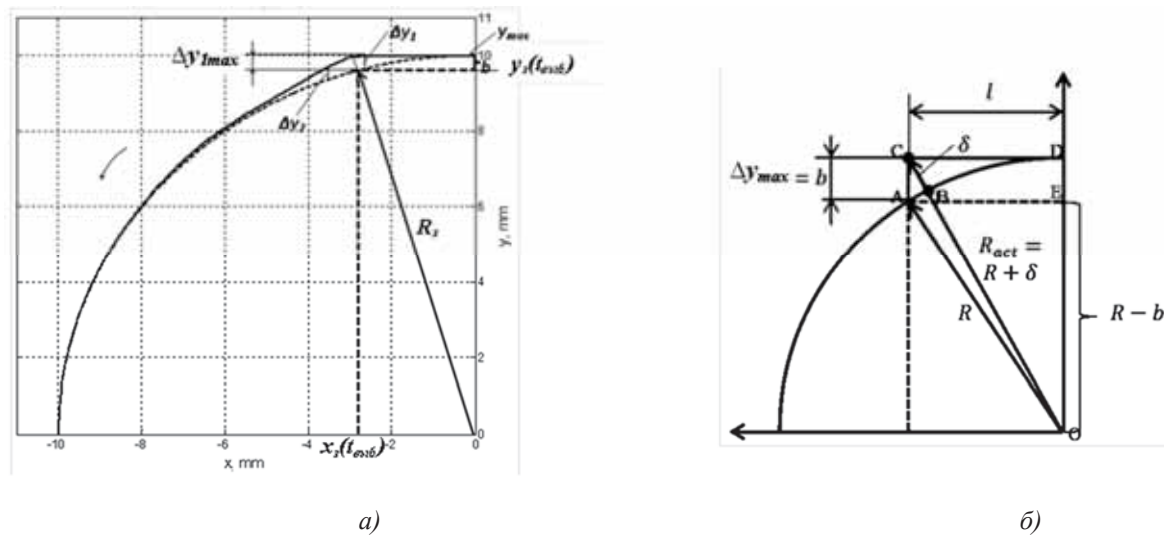


Рис. 6. Схемы образования отклонения: а) Отклонения по координате Y при воспроизведении эталонной окружности ($R = 10$ мм, $b = 0,5$ мм, $k_m = 1$); б) отклонения по радиус-вектору при воспроизведении эталонной окружности.

В свою очередь, зазор будет выбран в момент $t_{выб}$, когда привод в разомкнутом состоянии преодолет зазор и поверхность тела M_1 соприкоснется с поверхностью тела M_2 . Из этого условия определяется $t_{выб}$ (система разомкнута и соединение сопрягающихся поверхностей тел M_1 и M_2 , рис. 4, а). Выходная координата разомкнутой системы должна быть $y_{max} - b$. Из условия осуществления замкнутости системы в момент полной выборки зазора $y_3(t_{выб}) = y_{max} - b$ сигнал с датчика обратной связи равен y_{max} . В этом случае максимальное отклонение по координате Y в состоянии «разомкнутый привод» будет равно

$$\Delta y_{1\max} = y_{act}(t_{выб}) - y_3(t_{выб}) = y_{max} - (y_{max} - b) = b$$

Таким образом, максимальное отклонение по одной координате системы с зазором, движущейся по окружности, при отсутствии иных видов нелинейностей равняется величине зазора и не зависит от других параметров: радиуса, скорости обхода траектории и др.

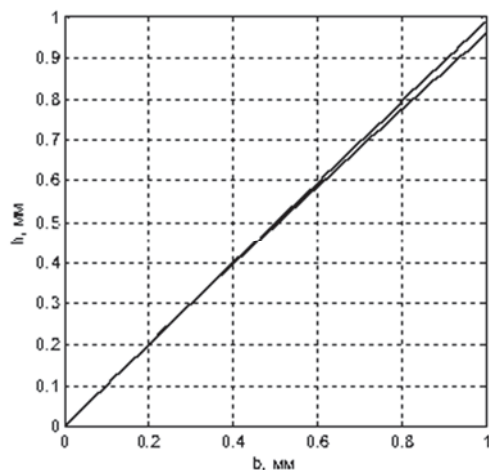
Напротив, поведение отклонения $\Delta y_2(t)$ по координате Y в состоянии «замкнутый привод» уже зависит от динамических свойств «замкнутого» привода и соответственно моделирование поведения движения вдоль координаты Y зависит от принятой модели поведения соприкасающихся поверхностей тел M_1 и M_2 в момент удара и после удара [3] (в данной работе не рассматривается).

На практике оценка точности воспроизведения эталонной окружности проводится по отклонению, направленному по радиус - вектору с помощью прибора ballbar ф. Renishaw [4 - 5]. Это соответствует отклонению по нормали к заданной траектории в данный момент времени t . На рис. 6, б) этим отклонением δ является отрезок ВС. Значение отклонения δ зависит не только от зазора b , но и от радиуса окружности R , и определяется следующим соотношением.

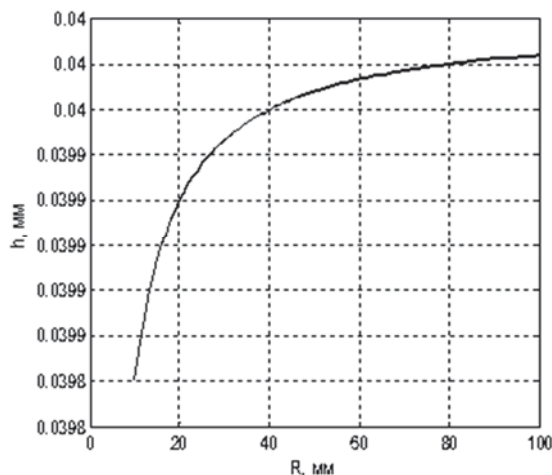
$$\delta = \sqrt{R^2 + 2Rb - b^2} - R, \quad (1)$$

В данном случае значение отклонения δ будет зависеть не только от зазора b , но и от радиуса окружности R .

Влияние величины зазора b на размер вспеска δ . На рис. 7, а) показано, как отличается величина вспеска δ (кривая 2), рассчитанная в соответствии с (1), от величины зазора b (прямая 1). Величина вспеска δ всегда меньше величины зазора b (катет меньше гипотенузы, ΔABC , рис. 6, б). При величине зазора $b = 0,5$ мм, $R = 100$ мм отличие δ от b составляет 1,2%. При зазорах, близких к реальным, отличие становится пренебрежимо малым. Так, при зазоре $b = 0,1$ мм разница составляет всего лишь 0,06%.



а)



б)

Рис. 7. Влияние различных параметров на величину вспеска h : а) влияние зазора b (1- результаты аналитического расчёта, 2 - результаты моделирования); б) влияние радиуса R по результатам моделирования.

Влияние радиуса R эталонной окружности на величину вспеска. На рис. 7, б) представлена зависимость величины вспеска δ от радиуса эталонной окружности R при $b = 0,04$ мм. Отклонения δ от b при $R \geq 10$ мм составляют менее 0,5 % процентов. Поэтому на практике можно считать, что величина вспеска равна величине зазора для всех значений $R \geq 10$ мм. При $R \leq 10$ мм необходимо учитывать влияние радиуса и чем меньше радиус, тем сильнее это влияние.

Трение. Трение приводит к искажению заданной траектории (окружности) и картина искажения (вспеска) аналогична действию геометрического зазора, но механизм возникновения совершенно другой.

Трение — это сопротивление движению (сила трения, противодействует движению). Чаще всего силу трения рассматривают как функцию скорости [6].

Для целей исследования влияния трения на точность воспроизведения эталонной окружности методами моделирования воспользуемся широко распространенной моделью:

$$M_{fr} = \begin{cases} \text{sign}(\omega) * M_c, & |\omega| \geq |\omega_{th}|; \\ \frac{\omega}{|\omega_{th}|} * M_c, & |\omega| < |\omega_{th}|. \end{cases}$$

В соответствии с этой моделью вблизи нулевой скорости существует линейная зависимость момента трения от скорости:

$$M_{fr} = \frac{\omega}{|\omega_{th}|} * M_c,$$

где $|\omega_{th}|$ – пороговое значение скорости, при преодолении которого заканчивается участок с линейной характеристикой, $\omega_{th} = 10^{-5} \div 10^{-3}$ рад/с [7], $M_c = \mu N$ – момент сопротивления имеет постоянную величину и меняет направление при изменении знака скорости ω , создавая постоянное сопротивление движению, определяемое коэффициентом трения $\mu = Const$ и силой нормального давления N . Графически модель трения изображена на рис. 8, а).

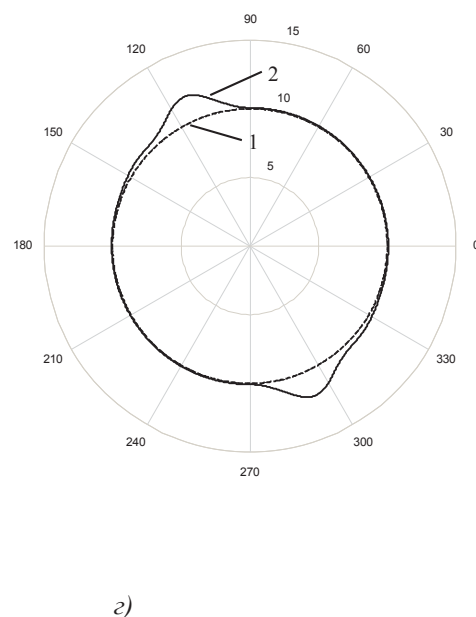
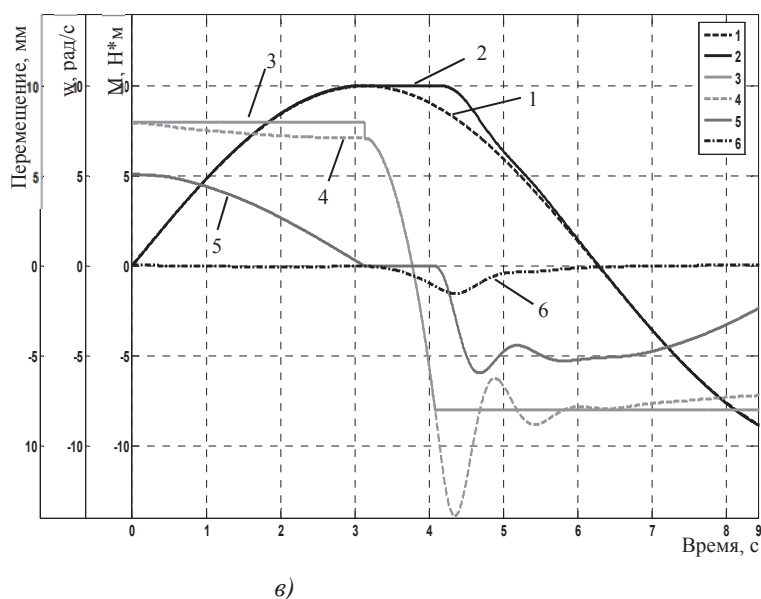
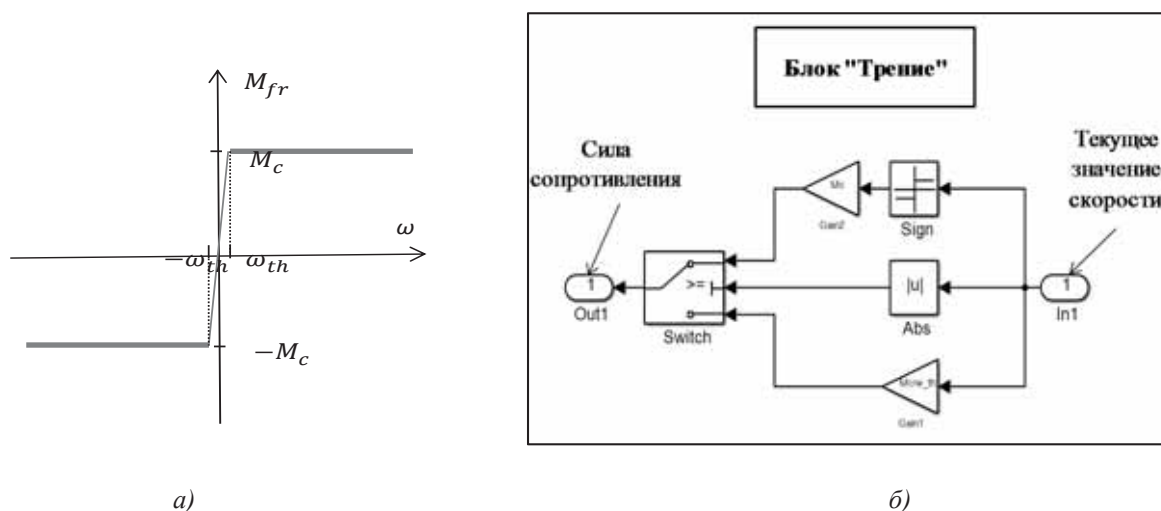


Рис. 8.

В среде имитационного моделирования Simulink данная модель трения реализована с помощью соединения стандартных блоков математических операций “sign”, “gain”, “abs”, а также блока переключения сигналов “switch” (рис. 8, б). Входом для данного блока является текущее значение угловой скорости. Этот сигнал берется с выхода блока W (рис. 3). Сигнал с выхода блока «Трение» (порт out1) поступает как возмущающее воздействие (блок M_d) на сумматор “Je” Simulink-модели, приведенной на рис. 3.

На рис. 8, в) показаны результаты моделирования движения исполнительного органа по одной координате: 1- задающее воздействие по углу поворота двигателя, 2 – показания датчика угла поворота при движении системы с трением, 3 – момент сопротивления движению, 4 – вращательный момент, развиваемый электродвигателем, 5 – скорость вращения вала двигателя, 6 – сигнал рассогласования.

При движении ИО по эталонной окружности, реализуемой двумя линейными приводами расположенными ортогонально относительно друг друга, искажения от наличия трения в механизме, охваченном обратной связью, принимают вид, показанный на рис. 8, г). Здесь зазор в системе отсутствует, т.е. $b = 0$, $R = 10$ мм, $M_c = 8$ Нм, $\omega = 0,5$ рад/с, обход против часовой стрелки, 1 – эталонная окружность, 2 – действительная траектория.

Выводы.

1. Зазор в механической части привода принципиально по-разному влияет на точность отработки траектории «окружность» в зависимости от того, охвачена или нет обратной связью по положению механическая часть привода.

2. Величина зазора в механической части привода, охваченного обратной связью, при допущении отсутствия других нелинейностей, как «трение», «гистерезис упругости» и др., непосредственно определяет размер «всплеска» при обходе эталонной окружности с помощью двух ортогонально расположенных линейных приводов.

3. Наличие нелинейности в механизмах, типа «трение», приводит к искажению траектории «эталонная окружность», похожему на искажение от «зазора», охваченного обратной связью.

4. Целесообразно дальнейшее развитие работ по моделированию и экспериментальному исследованию движения несущей системы машины при наличии зазора, трения и гистерезиса упругости с целью выявления наиболее существенных факторов, влияющих на точность воспроизведения заданной траектории и создания методики диагностики точности отработки эталонной траектории [8].

Литература

1. SINUMERIK 840D/840Di/SINUMERIK 810D. Extended Functions. (Part 2) Description of Functions. https://cache.automation.siemens.com/dnl/zkzNDY4NwAA_28820965_HB/FBT_0304_en.pdf
2. Пась О. В., Серков Н. А. Моделирование отклика несущей системы многокоординатной машины с ЧПУ на ступенчатое силовое воздействие // Научные труды III Международной научной конференции “Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении” FRITME-2014, ИМАШ РАН, Москва, Россия, 13-15 мая 2014 г. С.225-227.
3. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Изд. 3-е, доп. и переработ. Л., «Машиностроение» (Ленингр. Отд-ние), 1976. 320 с. с ил.
4. Серков Н.А. Методы и средства измерения интегрального отклонения взаимного положения рабочих органов многокоординатных станков с ЧПУ // Проблемы машиностроения и автоматизации, 2012. № 4. С. 112-124.

5. А. Г. Кольцов, А. В. Торопов, А. А. Петухов. Проверка пятикоординатного фрезерного обрабатывающего центра на точность. Вестник УГАТУ. Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры 2012. Т. 16. № 4 (49). С. 129-132.
6. Armstrong-Helouvry B., Dupont P. and De Wit C. C. A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction. Automatica, Vol. 30, № 7, pp. 1083-1138, 1994.
7. Matlab Simscape library help.
<http://www.mathworks.com/help/physmod/simscape/ref/rotationalfriction.html>
8. Андрейчиков Б. И. Динамическая точность систем программного управления станками. М.: Машиностроение, 1964. 368 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ИХ ОТКАЗА

Петрова И.М.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

impetr@mail.ru

Аннотация. Предложена модель оценки изменения технического состояния механических систем под влиянием внешних воздействий, позволяющая оценить их влияние на вероятность появления отказов. Для примера рассчитаны вероятности разрушения шатунов оппозитного компрессора при совместном действии циклического нагружения и износа.

В процессе эксплуатации осуществляется сложное взаимодействие механизмов нагружения и повреждения деталей машин и элементов конструкций по ряду критериев: прочности, износостойкости, коррозионной стойкости и др. [1-3].

При этом в зависимости от окружающей среды и условий нагружения реализуются различные механизмы накопления повреждений и разрушения. Так как многие технические системы к настоящему времени исчерпали назначенный ресурс и должны эксплуатироваться на основе данных об их техническом состоянии, актуальной научной задачей, имеющей большое практическое значение, является создание моделей накопления повреждений применительно к изделиям машиностроения, работающих в различных условиях эксплуатации с целью мониторинга их технического состояния, оценки остаточного ресурса и оценки значимости различных факторов, влияющих на протекание деградационных процессов на основании данных о текущем состоянии исследуемых объектов.

Модели должны позволять оценивать эффективность влияния конструктивных и технологических мероприятий на долговечность и надежность деталей машин и элементов конструкций по различным критериям эксплуатации, в частности по прочности и износостойкости. Совершенствование средств вычислительной техники позволяет создавать все более сложные модели, способствующие более точному описанию технического состояния механических систем.

Математическое описание многопараметрического состояния системы может быть представлено обобщенным вектором

$$X^T = \{ X_1, X_2, \dots, X_j \}, \quad (1)$$

где $X_1, \dots, X_j$ - параметры, описывающие техническое состояние системы в рамках принимаемой модели, и изменяющиеся в процессе эксплуатации. Эти параметры могут быть выражены скалярными величинами (температура, давление), векторными величинами (нагрузка, реакция, геометрия, скорость, ускорение), тензорами (напряжения, деформации), функциями (колебания, вибрация, шум). Они могут быть сосредоточенными или распределенными по системе.

Рассматривая прочность объекта при динамическом нагружении можно отметить три параметра. Циклический характер нагружения, связанный с переменными составляющими рабочих процессов, приводящих к появлению напряжений не превышающий предел упругости материала, вызывает накопление повреждений соответствующее многоциклового усталости. Циклический характер действующих на объект нагружающих факторов, связанный с периодическими пусками и остановками, возникновением аварийных ситуаций и т. п. приводит к появлению в наиболее нагруженных местах напряжений, превышающих предел упругости. В этих случаях наряду с явлением многоциклового усталости проявляются процессы свойственные

малоцикловой усталости. В деталях трибосопряжений в зоне фрикционного контакта, накопление повреждений зависит от уровня изношенности. В данном случае обобщенный вектор состояния системы (1) может быть записан уравнением, отражающим суммарное повреждение D

$$D = D_N + D_e + D_{и} , \quad (2)$$

где D_N отражает накопление повреждений при динамическом нагружении и упругом деформировании, соответствующее многоцикловой усталости; D_e - накопление повреждений при упруго пластических деформаций - малоцикловая усталость, $D_{и}$ - накопление повреждений от износа при трении.

Для обеспечения требуемого уровня надежности и долговечности механических систем, находящихся в эксплуатации, критерии работоспособности должны быть рассмотрены с учетом степени их влияния на накопление повреждений.

Критерий (2) был предложен и рассмотрен в работе [4], где приведен алгоритм использования данного критерия и дана оценка влияния увеличения зазоров в узлах трения на долговечность деталей машин.

В зависимости от условий нагружения и окружающей среды в эксплуатации реализуются различные механизмы накопления повреждений и разрушения. Износ машины является одним из основных факторов, способствующих увеличению динамических нагрузок, уровня вибрации и шума, что приводит к потере работоспособности технической системы. Компьютерное моделирование динамики и изнашивания узлов позволяет связать воедино изменение функциональных и динамических параметров машин с износом отдельных её элементов и прогнозировать эти процессы на время будущей эксплуатации. В процессе эксплуатации, вследствие деградации технического состояния узлов, динамика механизма значительно изменяется, что приводит к повышению интенсивности изнашивания деталей и увеличению вероятности разрушения. В [5] была предложена модель основанная на применении уравнений движения в бесконечно малых перемещениях механической системы, что позволяет учесть влияние зазоров почти во всех основных сопряжениях механизма, размеры которых на несколько порядков меньше размеров номинальных длин звеньев. По результатам динамического анализа проводится расчет износа трущихся деталей с учетом обратных связей, что позволяет в первом приближении решить задачу изменения технического состояния деталей. Общий прием решения таких задач заключается в дискретизации исследуемой трибосистемы во времени и пространстве с использованием численных методов решения. В этом случае дискретные состояния узла рассматриваются через определенный интервал, называемый шагом износа. В качестве износа принимается малая величина за малый конечный промежуток времени. Закономерности изнашивания материалов в зависимости от наиболее влияющих факторов определяются экспериментально или принимаются на основе данных справочных материалов. Переход от одного состояния по критерию износа к другому осуществляется скачкообразно. В пределах шага износа параметры состояния и свойства системы принимаются неизменными, что позволяет развитие процессов, протекающих при изнашивании, заменить квазистатической моделью. Чем меньше выбранный шаг, тем более корректно расчетная модель описывает протекающие процессы. На основе данной методики в [5, 6] была определена величина износа механизма ДВС. Адекватность предложенной модели оценки износа подтверждена экспериментальным исследованием виброакустических характеристик ДВС при различных состояниях узлов трения. Анализ результатов экспериментальных исследований показал их удовлетворительное соответствие с расчетными значениями. Предложенная модель оценки технического состояния элементов механической системы позволяет проводить уточненные расчеты по оценке вероятности разрушения детали. В

этом случае совместное влияние процесса накопления повреждений при динамическом нагружении и трении на долговечность деталей, работающих в этих условиях, целесообразно проводить используя гипотезу С.В.Серенсена – В.П.Когаева о постепенном снижении предела выносливости вследствие циклических нагрузок и увеличении динамических нагрузок вследствие износа, записываемой формулой.

$$\sigma_{-li} = \sigma_{-li-1} \left[1 - \frac{n_i}{N_i} k \left(\frac{\sigma_{ai}}{\sigma_{-li-1}} - 1 \right) \right] \quad (3)$$

Здесь σ_{-li} - предел выносливости исходного материала, соответствующий базе 10^7 циклов, не подвергавшегося предварительному нагружению; k – параметр, характеризующий интенсивность снижения предела выносливости от предварительного нагружения; N_i – число циклов по кривой усталости исходного материала, соответствующее амплитуде нагружения σ_{ai} . Практический опыт использования уравнения (3) показал, что величину k можно принять равной 1,65. При расчете по формуле (3) приняты допущения, что циклическое нагружение уже поврежденных предварительным циклическим нагружением образцов приведет к новому снижению предела выносливости и что амплитуды в блоке нагружения при расчете расположены по убывающей.

Алгоритм расчета долговечности с использованием формулы (3) приведен в [7]. Вероятность разрушения детали за назначенный период эксплуатации при заданном законе распределения амплитуд напряжений или блоке нагружения полученным экспериментально определяется с помощью квантили

$$u_p = \frac{1 - \tilde{n}}{\sqrt{\tilde{n}^2 v_{\sigma_{-1}}^2 + v_\varepsilon^2}} \quad (4)$$

где $\tilde{n} = \frac{n_p}{n}$ – относительный коэффициент запаса; $n_p = \sigma_{a \max} / \sigma_{-1}$ – предельный коэффициент нагруженности; $n = \bar{\sigma}_{a \max} / \bar{\sigma}_{-1D}$ – отношение среднего значения максимальной амплитуды в блоке нагружения к среднему значению предела выносливости; $v_{\sigma_{-1}}$ – коэффициент вариации предела выносливости; v_ε – коэффициент вариации максимальных амплитуд в блоке нагружения. Предельный коэффициент нагруженности $n_p = \sigma_{a \max} / \sigma_{-1}$ обозначает, что при $\sigma_{a \max} / \sigma_{-1} > n_p$ будут наступать усталостные разрушения до истечения срока службы или заданного значения долговечности, а при $\sigma_{a \max} / \sigma_{-1} < n_p$ разрушений не будет.

Для примера использования предложенного подхода были рассчитаны вероятности разрушения шатунов оппозитного компрессора при совместном действии циклического нагружения и износа

В результате расчета по методике, изложенной в [7] с использованием формул (3, 4), получим ряд значений коэффициентов предельной нагруженности n_p , соответствующий им ряд значений суммарной долговечности (ресурса) $N_{\text{сум}}$ и вероятности безотказной работы P . Исследования, проведенные Филимоновым М.А. (ГИАП) показали, что увеличение зазора в крейцкопфном подшипнике с 0,05мм до 0,15мм соответствует увеличению нагрузки на 30%. Следовательно, увеличение динамических нагрузок за счет износа можно учесть в первом приближении увеличением предельного коэффициента нагруженности n_p , которое будет возрастать с увеличением срока службы детали. Причем значение n_p будет также возрастать с увеличением износа, что в свою очередь приведет к дальнейшему увеличению динамических нагрузок. С использованием алгоритма [7] был проведен расчет

вероятности разрушения шатунов оппозитного компрессора в зависимости от изменения зазора в сопряжении, результаты которого представлены в таблице. В таблице представлены для трех нагрузок увеличение амплитуд напряжений σ_a в зависимости от зазора в сопряжении, соответствующие каждой амплитуде значение предельного коэффициента нагруженности и квантили вероятности разрушения, соответствующие нормальному закону распределения.

Таблица. Результаты расчета вероятности разрушения шатунов

Нагрузка кН	Зазор в сопряжении, мм	σ_a МПа	n_p	u_p
300	0,06	63,0	1,33	-1,98
	0,10	72,0	1,17	-1,08
	0,15	78,5	1,07	-0,48
250	0,06	53,3	1,58	-3,18
	0,10	60,0	1,40	-2,33
	0,15	66,5	1,26	-1,83
180	0,06	40,0	2,10	-4,73
	0,10	45,5	1,85	-4,19
	0,15	50,7	1,66	-3,55

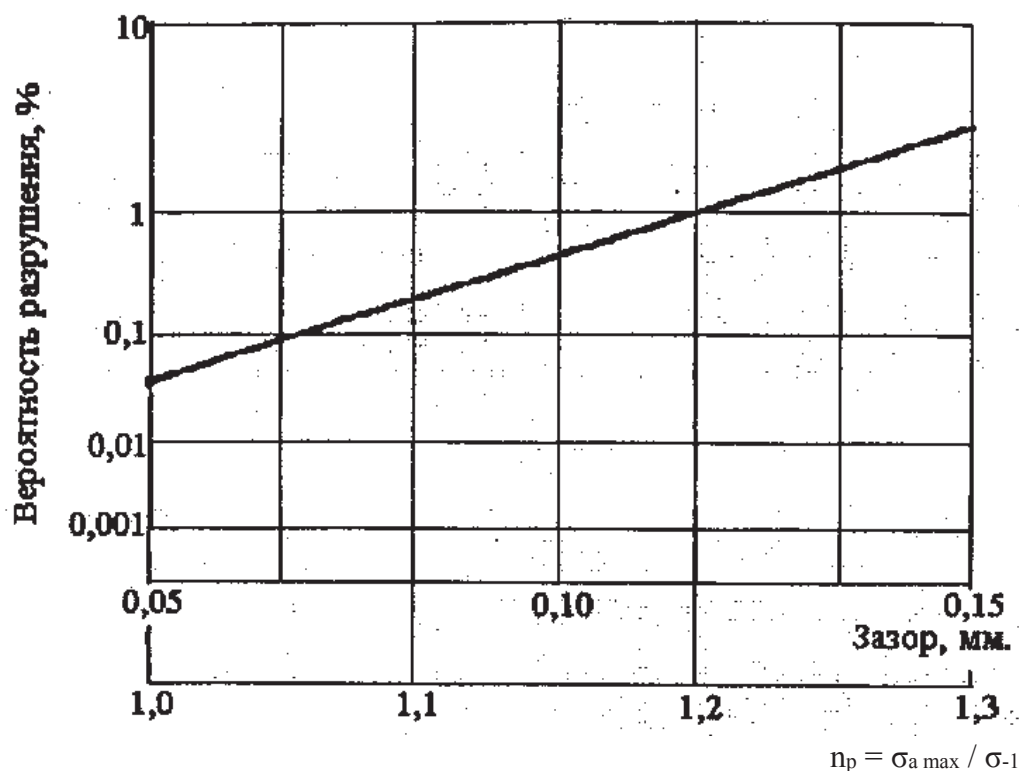


Рис. 1. Зависимость вероятности разрушения шатуна оппозитного компрессора от величины зазора и предельного коэффициента нагруженности

Расчет по изложенному методу позволил также получить зависимость вероятности разрушения шатуна оппозитного компрессора от величины зазора и предельного коэффициента нагруженности, полученную расчетом и представленную на рис. 1. Проведенная оценка показала, что вероятность разрушения шатунов компрессора при номинальных режимах его работы увеличивается от 0,001 до 0,005 при увеличении зазора в сопряжении вследствие износа в исследуемых пределах от 0,06 до 0,15мм.

Полученные результаты подтверждают возможность использования данного подхода к оценке вероятности разрушения элементов механических систем. Предложенный метод позволяет учесть влияние на долговечность и надежность износа и возможных перегрузок.

Литература

1. Болотин В.В.. Ресурс машин и конструкций.- М.: Машиностроение, 1990, 448 с.
2. Махутов Н.А. Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность. Часть 1, – Новосибирск: Наука, 2005.494с.
3. Махутов Н.А. Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность. Часть 2. – Новосибирск: Наука, 2005.610с
4. Петрова И.М., Москвитин Г.В., Гриб В.В.. Влияние износа на накопление усталостных повреждений// Заводская лаборатория. 2006. № 11.С. 49-52.
5. Гриб В.В., Сафонов Б.П., Жуков Р.В. Динамика механизма движения поршневого компрессора с учетом зазоров в подвижных соединениях. // Вестник машиностроения, 2002, № 4, с. 3-7.
6. Гриб В.В., Жуков Р.В., Петрова И.М. Моделирование изменения технического состояния сложных механических систем. // Машиностроение и инженерное образование, 2012, № 4, с. 28-32.
7. Расчеты деталей машин на выносливость в вероятностном аспекте. Методические указания. Ред. Гусенков А.П., Петрова И.М., Гадолина И.В. М.: МЦНТИ, 1991. 85 с.

МАНИПУЛЯЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ ОТКРЫТЫХ ГОРНЫХ РАБОТ: ИССЛЕДОВАНИЕ МАНИПУЛЯТИВНОСТИ РАБОЧЕГО ОБОРУДОВАНИЯ

Побегайло П.А.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

petrp214@yandex.ru

Аннотация. В работе выполнено обобщение наших предыдущих результатов, касающихся исследования геометрических свойств рабочего оборудования одноковшовых гидравлических экскаваторов. Это позволило сделать несколько важных выводов и дать несколько общих рекомендаций для практического применения. Установлено, что рабочее оборудование одноковшовых гидравлических экскаваторов имеет глубокие резервы для совершенствования. В основу выполненного исследования положены идеи А.Е. Кобринского.

В монографии [1] нами была намечена первая постановка задачи об исследовании геометрических свойств рабочего оборудования (РО) одноковшовых гидравлических экскаваторов (ОГЭ) [выход книги затянулся и поэтому три других работы автора этой статьи были опубликованы раньше]. В последующих наших работах [2 - 7 и др.] указанная постановка была уточнена. Там же были представлены частные результаты проводимых исследований. Настоящая же работа посвящена суммированию полученных ранее основных результатов.

Основным ядром исследований геометрических свойств РО ОГЭ является, по нашему мнению, исследование манипулятивности.

За последние два года удалось выполнить исследование манипулятивности для трех типов РО ОГЭ (для восьми различных экскаваторов). Единственным ограничением при выполнении этих исследований является наличие или отсутствие потребных исходных данных. В будущем, предполагается продолжение этих исследований для других кинематических схем РО и ОГЭ, по мере сбора необходимых исходных данных.

На сегодняшний момент мы рассмотрели следующие кинематические схемы РО ОГЭ:

- первая кинематическая схема РО – схема РО ОГЭ прямого копания с индивидуальным независимым приводом поворота стрелы, рукояти и ковша (например, экскаваторы ЭГ-12А и ЭГ-20 ПО «УРАЛМАШ»);

- вторая кинематическая схема РО - схема РО ОГЭ прямого копания с зависимым приводом ковша (например, проекты экскаваторов ЭГ-15, ЭГ-10 ПО «УРАЛМАШ», проект экскаватора ЭГ-6М одной из коммерческих фирм);

- третья кинематическая схема РО - схема РО ОГЭ обратного копания с моноблочной стрелой (например, проект экскаватора ЭГО-4, МИСИ, проект экскаватора ЭГО-8 ПО «УРАЛМАШ», строительный экскаватор ЭО-5126 СКТБ "ЗЕММАШ").

Исследование манипулятивности проводилось согласно следующему алгоритму:

- для рассматриваемой кинематической схемы РО строится рабочая зона. Далее, рассматривая т.н. осевой профиль рабочей зоны, строится, например, прямоугольная, сетка с каким-то наперед выбранным шагом. После этого рассматривается каждая из этих точек (включая точки пересечения сетки с границами рабочей зоны). Удобно исследования начинать с рассмотрения квадратной сетки с метровым шагом. Число точек при этом обычно около ста – трехсот (для мощных ОГЭ);

- для каждой отдельной точки построенной сетки рассматриваются различные положения ковша, перебираемые с каким-то заданным шагом в диапазоне 360 градусов (шаг должен быть не более 1 градуса, а лучше не более 0,1 градуса). Фиксация ковша указанным образом позволяет успешно решать обратную позиционную задачу [1 и др.],

выясняя, существует ли рассматриваемая конфигурация РО в данной точке. Это позволяет определить для данной точки допустимый диапазон установки ковша. После этого для рассматриваемой точки рабочей зоны вычисляется значение коэффициента сервиса;

- после рассмотрения всех заданных точек рабочей зоны мы имеем все данные для проведения оценки манипулятивности РО ОГЭ. Это удобно делать с помощью графического представления полученных значений коэффициента сервиса. Ведь очень важную роль играет близость областей с высокими значениями коэффициента сервиса к областям, где ОГЭ выполняет свои основные рабочие операции. При этом заметим, что каждой точке рабочей зоны может быть поставлено в соответствие некоторое число – в данном случае – значение коэффициента сервиса. Будем далее называть рабочую зону с нанесенными на неё значениями этой характеристики – скалярным полем сервиса (манипулятивности) (о математическом содержании данного поля сейчас мы говорить не будем).

Используя поля сервиса, полученные нами для различных кинематических схем РО ОГЭ, можно строить их новую классификацию. Опираясь при этом можно и на максимальные значения коэффициента сервиса, и на его средние значения (это удобнее).

Для первой кинематической схемы РО можно сообщить следующее (на основании исследования ЭГ-12А):

- максимальные значения манипулятивности лежат на уровне 0,168 (иными словами, допустимый диапазон установки ковша в рассматриваемых точках рабочей зоны не превышает 60 градусов). Визуальная оценка распределения значений манипулятивности по рабочей зоне позволяет заключить, что они (максимальные) лежат в центральной части рабочей зоны. Области около границы рабочей зоны характеризуются быстрым понижением значений коэффициента сервиса, особенно со стороны базовой машины. Можно предположить, что любые рабочие операции в участках рабочей зоны со значением коэффициента сервиса меньше 0,1 не являются рациональными (полученные данные можно применять при проектировании системы управления);

- расположение допустимых интервалов установки ковша является важным фактором, позволяющим оценить возможность и эффективность основных рабочих операций ОГЭ. Для данного экскаватора тут скрыт значительный резерв совершенствования РО, так как полученные данные говорят о не рациональном расположении гидроцилиндров (также, по видимому, не рациональны и параметры самих гидроцилиндров).

Итак, рассмотренная кинематическая схема РО ОГЭ прямого копания имеет максимальное значение показателя манипулятивности 0,168. Среднее значение этого показателя в данном случае равно 0,111.

Из-за ограничений на объем настоящей работы рисунки с полями сервиса мы сюда не включили, предполагая показать их при устном выступлении. Все основные численные характеристики исследований геометрических свойств РО ЭГ-12А приведены ниже, в таблице 1 (в этой таблице приведены данные по всем изученным нами экскаваторам).

Некоторая разница в численных значениях между ЭГ-12А и ЭГ-20 объясняется меньшей отработкой этой кинематической схемы РО по сравнению с третьей схемой.

По третьей кинематической схеме РО может быть сказано следующее [на примере ЭГО-4]:

- максимальные значения манипулятивности лежат на уровне 0,407 (иными словами, допустимый диапазон установки ковша в рассматриваемых точках рабочей зоны не превышает 150 градусов). Визуальная оценка распределения значений манипулятивности по рабочей зоне позволяет заключить, что они (максимальные) лежат, в основном, от уровня стоянки машины до уровня пяты стрелы в левой части рабочей

зоны, ближе к базовой машине. Эта часть рабочей зоны не является основной при выполнении экскаватором основных рабочих операций. Его основные операции выполняются в центральной части рабочей зоны (значения показателя манипулятивности тут лежат на уровне 0,2 – 0,3), а также вдоль дальней её границы (значения коэффициента сервиса тут существенно ниже). Возможно, что в корректировке такой картины лежит резерв совершенствования РО ОГЭ обратного копания (это и изменения параметров гидроцилиндров и самого РО).

Итак, рассмотренная кинематическая схема РО ОГЭ обратного копания имеет максимальное значение показателя манипулятивности 0,407. Среднее значение этого показателя в данном случае 0,214. Очевидно, что, для данных экскаваторов, третья кинематическая схема РО обладает большей манипулятивностью чем первая (более чем в два раза). По видимому, рассмотрение иных экскаваторов с такими же кинематическими схемами РО не изменит эту картину на качественном уровне¹ (например, рассмотрение экскаватора ЭО-5126 дает значение средней оценки сервиса 0,211, что практически идентично оценке ЭГО-4; максимальное же значение коэффициента сервиса для этой машины лежит на уровне 0,526, что несколько выше оценки для ЭГО-4). Также важно отметить, что картины распределений параметров, связанных с манипулятивностью для ЭГО-4 аналогичны таковым и для прочих машин обратного копания с такой же кинематической схемой РО (у прямых лопат такая же картина для ОГЭ с одинаковыми кинематическими схемами РО) [структуры полей одинаковы и не зависят от типоразмера ОГЭ]. Заметим, что третья кинематическая схема отработана в нашей стране наиболее лучшим образом.

Важно отметить (это касается всех схем РО), что все это получается при условии, что РО проектируется в рамках одной и той же методологии, что присуще ОГЭ конкретного типоразмерного ряда, или ОГЭ одной страны, в нашем случае СССР. Так например, в СССР стремились к максимизации геометрических свойств РО, а в ФРГ методологические требования иные, что дает РО с заниженными геометрическими свойствами (например, экскаватор РС-7000 обратного копания фирмы Komatsu) [степень занижения манипулятивности у этой машины около 30% в сравнении с советскими экскаваторами]. Приведенное здесь замечание условно назовем уточнением (УТ). В ранее приведенном алгоритме оценки манипулятивности для рассматриваемых нами кинематических схем можно отказаться от решения позиционной задачи. Это возможно, если обратить внимание на то, что любому крайнему положению ковша соответствует какое-либо экстремальное значение длины гидроцилиндров. На базе этого можно ввести двенадцать параметров, характеризующих это свойство РО. Не уточняя сейчас суть этих параметров, заметим, что первые четыре связаны с гидроцилиндрами стрелы, вторая четверка связана с гидроцилиндрами рукояти, и последняя четверка связана с гидроцилиндрами ковша.

Очевидно, что каждая точка рабочей зоны может быть охарактеризована набором из этих параметров (два числа в наибольшем числе случаев), указывающим на то, что явилось ограничением в данной точке. Это позволяет построить еще одно скалярное поле – поле ограничений манипулятивности. Анализ этого поля у ЭГО-4 показывает, что:

- рабочая зона разбивается на конечное число подзон, характеризующих своим сочетанием ограничивающих факторов;
- число сочетаний факторов не велико, по отношению к числу возможных их комбинаций;
- около семидесяти процентов рабочей зоны попадает в две основные подзоны (7-11 и 9-11). В этих подзонах экскаватор и выполняет свою работу. Ограничения вызваны в основном приводом ковша и реже рукояти;

¹ Это касается всех кинематических схем РО.

- геометрические параметры стрелы практически не оказывают влияние на манипулятивность в той части рабочей зоны, где ведется основная работа.

Изучение подобных скалярных полей для экскаваторов ЭГО-8 и ЭО-5126 показывает, что типоразмер машины (при одинаковой кинематической схеме РО) не влияет на характер распределения ограничивающих факторов по рабочей зоне – они инвариантны относительно типоразмера экскаватора и имеют вполне определенную пространственную структуру для конкретной кинематической схемы РО (это действительно с учетом УТ). Анализ подобного поля для ЭГ-12А позволяет сказать следующее:

- рабочая зона разбивается на конечное число подзон, характеризующихся своим сочетанием ограничивающих факторов;

- число сочетаний факторов не велико, по отношению к числу возможных их комбинаций;

- около восьмидесяти процентов рабочей зоны попадает в две основные подзоны (5-9 и 9-11). В этих подзонах экскаватор и выполняет свою работу. Ограничения вызваны в основном приводом ковша и режущей рукоятки. При этом сочетание 5-9 соответствует в основном транспортным операциям РО перед началом экскавации, а сочетание 9-11 операции копания;

- геометрические параметры стрелы практически не оказывают влияние на манипулятивность в той части рабочей зоны, где ведется основная работа.

Изучение подобных скалярных полей для экскаватора ЭГ-20 показывает, что типоразмер машины (при одинаковой кинематической схеме РО) не влияет на характер распределения ограничивающих факторов по рабочей зоне – они инвариантны относительно типоразмера экскаватора и имеют вполне определенную пространственную структуру для конкретной кинематической схемы РО (это действительно с учетом УТ).

По второй кинематической схеме РО может быть сказано следующее [на примере ЭГ-10]:

- максимальные значения манипулятивности лежат на уровне 0,22 (иными словами, допустимый диапазон установки ковша в рассматриваемых точках рабочей зоны не превышает 80 градусов). Визуальная оценка распределения значений манипулятивности по рабочей зоне позволяет заключить, что они (максимальные) лежат, в основном, от уровня стоянки машины до уровня пяты стрелы в центральной части рабочей зоны, а также и чуть выше. Эта часть рабочей зоны является основной при выполнении экскаватором главных рабочих операций, но при этом имеет весьма не большую ширину, что указывает на то, что большая часть работы ЭГ-10 проходит в тех частях рабочей зоны, где манипулятивность существенно ниже (значения показателя манипулятивности тут лежат на уровне 0,1 – 0,2). Особенно сильно манипулятивность снижена на уровне стоянки экскаватора, что очень не хорошо. По видимому, в корректировке такой картины лежит резерв совершенствования РО ОГЭ прямого копания с рассматриваемым РО (это и изменения параметров гидроцилиндров и самого РО). Итак, рассмотренная кинематическая схема РО ОГЭ прямого копания имеет максимальное значение показателя манипулятивности 0,22. Среднее значение этого показателя в данном случае 0,137.

Видно, для данных экскаваторов, что вторая кинематическая схема РО обладает большей манипулятивностью чем первая (увеличение не очень большое), и меньшей чем третья (тут разница более существенна). По видимому, рассмотрение иных экскаваторов с такими же кинематическими схемами РО не изменит эту картину на качественном уровне (например, исследование экскаватора ЭГ-15 дает значение средней оценки сервиса 0,144, что близко к оценке манипулятивности ЭГ-10 (некоторая численная разница может быть объяснена существенно меньшей отработкой в нашей стране этой кинематической схемы РО в сравнении с третьей)). Также важно отметить, что картины

распределений параметров, связанных с манипулятивностью для ЭГ-10 аналогичны таковым и для прочих машин прямого копания с таким же РО (это действительно с учетом УТ).

Анализ поля ограничений для ЭГ-10 позволяет сказать следующее (появляются два дополнительных ограничения - 13 и 14, связанные с цилиндрами привода ковша; в точках рабочей зоны, где они есть, потеряна манипулятивность за счёт применения схемы РО с параллелограммом):

- рабочая зона разбивается на конечное число подзон, характеризующихся своим сочетанием ограничивающих факторов;

- число сочетаний факторов не велико, по отношению к числу возможных их комбинаций;

- около восьмидесяти процентов рабочей зоны попадает в четыре основные подзоны (5-13, 11-13, 9-11, 7-11). В этих подзонах экскаватор и выполняет свою работу. Ограничения вызваны в основном приводом ковша и режущей рукояткой. При этом сочетание 5-13 соответствует в основном транспортным операциям РО перед началом экскавации, а прочие сочетания операции копания. Внешний вид этих подзон может быть назван "ленточным";

- применение параллелограмма в конструкции механизма привода ковша приводит к сильному сокращению размеров рабочей зоны, в первую очередь рядом с базовой машиной (до трети ее объема);

- геометрические параметры стрелы практически не оказывают влияние на манипулятивность в той части рабочей зоны, где ведется основная работа.

Изучение подобных скалярных полей для экскаваторов ЭГ-6М и ЭГ-15 показывает, что типоразмер машины (при одинаковой кинематической схеме РО) не влияет на характер распределения ограничивающих факторов по рабочей зоне – они инвариантны относительно типоразмера экскаватора и имеют вполне определенную пространственную структуру для конкретной кинематической схемы РО (это действительно с учетом УТ).

Таким образом, на основании критерия манипулятивности, может быть предложена новая классификация РО ОГЭ (это действительно с учетом УТ):

- первая кинематическая схема имеет максимальное значение сервиса 0,16-0,19 (среднее значение 0,11-0,12);

- вторая кинематическая схема имеет максимальное значение сервиса 0,19 – 0,26 (среднее значение 0,12 - 0,14);

- третья кинематическая схема имеет максимальное значение 0,4 - 0,52 (среднее значение 0,21).

Очевидно, что использование среднего значения коэффициента сервиса более удобно для классификации РО. Попутно с классификацией РО может быть осуществлена и классификация точек рабочей зоны.

Напомним, что при вычислении коэффициента сервиса для точек рабочей зоны мы получаем интервал допустимой установки ковша для каждой из точек. При более пристальном внимании к этому фактору оказывается, что не во всех точках рабочей зоны такой интервал один. Примем число таких интервалов за признак классификации.

Для РО ОГЭ обратного копания точки рабочей зоны по данному признаку могут быть классифицированы на три типа:

- обычные точки (один интервал). Их большинство;

- граничные точки (точки границы рабочей зоны, манипулятивность равна, условно, нулю);

- особые точки (два интервала). Таких точек мало. Для рассматриваемых экскаваторов их частота появления равна, приблизительно 1/90. Положения РО соответствующие таким точкам могут быть названы особыми.

Для РО ОГЭ прямого копания (для двух рассмотренных нами кинематических схем РО) картина в целом аналогична. При увеличении числа элементов в кинематической схеме РО возможно увеличение и числа интервалов у особых точек.

Ниже приведена таблица 1, аккумулирующая полученные нами данные при изучении геометрических свойств РО для восьми рассмотренных экскаваторов.

Таблица 1. Геометрические свойства РО ОГЭ

№	Марка ОГЭ	$\overline{K_C}$	$\max K_C$	$\max U$, град.	$\overline{U}$, град.	Δ , град.	ζ	Тип РО
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Первая кинематическая схема РО								
1	ЭГ-12А	0,111	0,168	60,584	39,96	20,624	-	А
2	ЭГ-20	0,128	0,195	70,664	46,08	24,584	-	А
Вторая кинематическая схема РО								
3	ЭГ-6М	0,126	0,191	68,583	45,36	23,223	-	А
4	ЭГ-10	0,137	0,220	79,291	49,32	29,971	-	А
5	ЭГ-15	0,144	0,264	95,196	51,84	43,356	-	А
Третья кинематическая схема РО								
6	ЭГО-4	0,214	0,407	146,6	77,04	69,56	1,149	Б
7	ЭО-5126	0,211	0,526	189,414	75,96	113,454	1,101	Б
8	ЭГО-8	0,209	0,406	146,007	74,24	70,767	1,35	Б

В этой таблице приведены следующие параметры РО: $\overline{K_C}$ - средний коэффициент сервиса; $\max K_C$ - максимальное значение коэффициента сервиса; $\max U$ - максимальный угол; $\overline{U}$ - средний угол; Δ - разница между максимальным и средним значением углов, приведенных в этой таблице; ζ - (вычислен только для обратных лопат) - разница в манипулятивности в нижней и верхней части рабочей зоны; тип манипулятора - результат классификации по схеме предложенной в работе [8] и перенесенной нами на РО ОГЭ в работе [7].

Данные по ОГЭ РС-7000 обратного копания фирмы Komatsu в таблицу 1 не включены, т.к. не все еще исследования его РО завершены. Заметим лишь, что у него $\overline{K_C} = 0,139$, а $\zeta = 0,491$, что, по видимому, указывает на иную методологию проектирования, приводящую к существенному занижению геометрических свойств РО. Это, с учетом УТ, ни в коей мере не нарушает предложенную нами классификацию кинематических схем РО, а скорее дополняет ее, показывая путь к дальнейшему ее совершенствованию (через поиск ответа на вопрос - что дало снижение геометрических свойств РО для иных характеристик экскаватора). Знание манипулятивности конкретного РО позволяет узнать о том, насколько она снижена относительно "идеального РО". Этому посвящена наша статья [7] и сейчас мы не будем её повторять, но учтем полученные там результаты при выписывании выводов по работе.

В статье [6] выполнено исследование пропорций РО ОГЭ в сравнении с пропорциями руки человека. Также учтем это при формировании выводов.

На базе выполненных нами работ представляется целесообразным предложить следующую схему комплексного исследования геометрических свойств РО ОГЭ (её необходимо включить в практику проектирования отечественных ОГЭ, особенно на ранних стадиях проектирования):

- исследовать манипулятивность рассматриваемого РО;
- вычислить и сравнить пропорции рассматриваемого РО с известными пропорциями как РО ОГЭ, так и руки человека;
- изучить свойства "идеального РО" для рассматриваемого РО;

- оценить потерю манипулятивности для рассматриваемого РО относительно его "идеального" варианта;

- принять решение о соответствии предлагаемого РО производственным задачам с позиции геометрических свойств РО и предполагаемой технологии выполнения работ.

Заключение. По итогам наших исследований могут быть сделаны следующие выводы:

- ОГЭ это манипуляционная система, а его РО при решении многих задач допустимо рассматривать как плоский манипулятор;

- предложен новый подход к классификации РО ОГЭ (с учетом УТ). Он основан на понятии манипулятивности. Численно эта оценка выполнена для трёх наиболее распространенных кинематических схем РО ОГЭ, что позволило наметить пути их совершенствования. Попутно предложена классификация точек рабочей зоны по числу интервалов допустимой установки ковша. Описанные идеи могут быть перенесены и на иные манипуляционные системы;

- полезной классификацией для ОГЭ является классификация предложенная в работе [8]. Она позволяет разбить все традиционные ОГЭ на два класса (А и Б). Это даёт дополнительные возможности для анализа и синтеза;

- оценка манипулятивности при проектировании РО может помочь избежать получения рабочих зон с лагунами и дефектами (это особенно важно для разработки не стандартных кинематических схем);

- анализ характера распределения манипулятивности по рабочей зоне и сравнение этого распределения с распределением максимальных реализуемых усилий указывает на то, что однокритериальная оптимизация РО не имеет смысла (тем более не имеет смысла локальная оптимизация отдельных подсистем РО). Целесообразна многокритериальная оптимизация всего РО (а в перспективе и всего экскаватора), поиск компромисса среди противоречивых требований и характеристик;

- коэффициент сервиса и прочие связанные с ним показатели, описанные в наших работах, позволяют получать оценки основных геометрических свойств РО ОГЭ, инвариантные по отношению к типоразмеру экскаватора. Пространственная картина распределения этих параметров по рабочей зоне имеет вполне конкретный вид для каждой из кинематических схем РО (все это точно работает при одном и том же типе кинематической схемы РО, для одного поколения экскаваторов у конкретной фирмы, а дальнейшее обобщение требует дополнительных исследований);

- за применение схемы с параллелограммом в приводе ковша приходится платить сокращением размеров рабочей зоны и снижением манипулятивности на ближних и дальних радиусах копания. С другой стороны в центральной части зоны мы получаем достаточно равномерное значение коэффициента сервиса. Однако при этом ухудшается возможность копания на уровне стоянки машины. При современном уровне развития автоматики, возможно, следует отказаться от таких схем;

- есть практический смысл в поиске более манипулятивных кинематических схем РО, например, за счёт лучшей расстановки гидроцилиндров, применения шестизвенных механизмов в приводах элементов РО, уменьшения кинематической длины основного ковша, более обоснованного подбора кинематических длин стрелы и рукояти и пр.;

- предложенная схема комплексного анализа геометрических свойств РО ОГЭ должна быть включена в практику проектирования отечественных экскаваторов, особенно на ранних стадиях проектирования;

- проектирование удлиненного РО нужно обязательно сопровождать исследованием его геометрических свойств. Ведь даже незначительное изменение пропорций РО может приводить к существенному изменению манипулятивности. Это важно учитывать и при изменении параметров основного ковша;

- каждая кинематическая схема РО ОГЭ (и каждый конкретный экскаватор) может быть достаточно полно охарактеризована ансамблем полевых структур. Их

минимальный набор: скалярные поля сервиса (двух видов), ограничений, падения манипулятивности; векторные поля нагруженности (при разных режимах копания и пр.);

- при рассмотрении экскаваторов подобной конструкции, чьи размеры укладываются в тот или иной типоразмерный ряд, на основании введенного нами ансамбля полевых структур можно проводить, в некотором смысле идентификацию, т.е. находить параметры подобного экскаватора, лежащего между уже известными;

- резервы совершенствования РО ОГЭ далеко не исчерпаны и весьма велики.

В завершении важно отметить, что в основе настоящей работы лежат идеи А.Е. Кобринского, наиболее полно сконцентрированные в монографии [8]. В свете столетнего юбилея этого крупного ученого мирового уровня представление настоящего доклада на конференцию, посвященную его памяти представляется полезным, важным и обоснованным.

Литература

1. Побегайло П.А. Мощные одноковшовые гидравлические экскаваторы: выбор основных геометрических параметров рабочего оборудования на ранних стадиях проектирования. М.: ЛЕНАНД, 2014. 296 с.
2. Побегайло П.А. Некоторые геометрические свойства рабочего оборудования одноковшовых гидравлических экскаваторов: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2014, № 1, 28 с.
3. Pobegailo P.A. New classification of the hydraulic excavators working equipment // Българско списание за инженерно проектиране, 2013, №. 20, с. 93 – 99.
4. Побегайло П.А. О классификации рабочего оборудования одноковшовых гидравлических экскаваторов по критерию «манипулятивности» // Юбилейная XXV Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2013): материалы конференции (аннотации докладов). М.: Изд-во ИМАШ РАН, с. 69, 2013.
5. Побегайло П.А. Манипулятивность и некоторые геометрические свойства рабочего оборудования одноковшовых гидравлических экскаваторов // Труды международной научной конференции посвященной 75-и летию ИМАШ им. А.А. Благоднарова РАН «Машины, технологии и материалы для современного машиностроения» М.: ИМАШ РАН, с. 84, 2013.
6. Побегайло П.А. О пропорциях рабочего оборудования одноковшовых гидравлических экскаваторов // Горный информационно-аналитический бюллетень, 2015, № 2, с. 143 - 147.
7. Побегайло П.А., Митрев Р. Идеальное и реальное рабочее оборудование одноковшовых гидравлических экскаваторов: сравнение геометрических свойств // Горный информационно-аналитический бюллетень, 2015, № 4 (в печати).
8. Кобринский А.А., Кобринский А.Е. Манипуляционные системы роботов: основы устройства, элементы теории. М.: Наука, 1985. 344 с.

МЕТОДЫ ВЗАИМНОГО АНАЛИЗА СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЗАДАЧАХ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОЗЫ ТЕЛА ЧЕЛОВЕКА

Розенблюм М.Г.¹, Фирсов Г.И.²

¹Физический факультет, Потсдамский университет, Потсдам, Германия

mros@uni-potsdam.de

²Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

firsovgi@mail.ru

Аннотация. Рассматривается применение коэффициента максимальной корреляции, дисперсионного отношения и взаимной дисперсионной функции для выявления нелинейной взаимосвязи колебаний тела человека в сагиттальном и фронтальном направлении. Для некоторых неврологических заболеваний отмечается высокая степень когерентности колебаний в сагиттальном и фронтальном направлениях в достаточных широких диапазонах частот, что свидетельствует о наличии сильной линейной инерционной статистической связи колебаний.

Применение известных и хорошо апробированных электрофизиологических методов (электроэнцефалография, электромиография, вызванные потенциалы, реография) в неврологической практике далеко не всегда дает возможность достаточно точно оценить функциональное состояние отдельных систем организма для более точной и адекватной диагностики тех или иных патологических состояний. Одним из таких состояний в медицинской, и особенно в неврологической практике, является нарушение равновесия, которое служит условием и основой для нормального взаимодействия с окружающей внешней средой и обеспечения деятельности человека в ней [1-3]. Поддержание равновесия и позы в гравитационном поле достигается согласованной деятельностью большого комплекса анализаторов и систем мозга (чувствительный, зрительный, вестибулярный, мозжечковая, экстрапирамидная системы). Следует отметить, что процесс поддержания позы является, как всякая система гомеостаза, динамичным и человек никогда не может стоять совершенно неподвижно и постоянно совершает колебательные движения. И задача заключается в том, чтобы выбрать наиболее адекватный метод регистрации этих движений. В настоящее время одним из таких методов является стабиллография - регистрация движения общего центра давления на плоскости с помощью платформы на тензометрических датчиках [1-4]. Основной формой исследования регуляции тела человека в норме и патологии является пассивный эксперимент. При этом обследуемый находится в свободной вертикальной позе на платформе стабиллографа. Возможные воздействия со стороны экспериментатора ограничены отдельными изменениями в состоянии обследуемого (закрывание и открывание глаз), выполнение несложных заданий в уме (счет, пение, чтение стихов), использование так называемой методики подмен, заключающейся в слежении обследуемым за движением светящейся точки на экране осциллографа, отражающей положение центра давления стоп на платформе стабиллографа (обследуемый был проинструктирован наблюдать экран и хранить точку в пределах круга в центре, данное испытание может рассматриваться как простейший неинвазивный метод изменения динамической системы стоящего человека с целью извлечения дополнительной информации, при этом в процесс регуляции позы, в дополнение к проприоцептивным механизмам, включалась сильная зрительная обратная связь).

В наших экспериментах, проведенных на базе клиники нервных болезней Первого Московского государственного медицинского университета им И.М Сеченова с помощью стабиллоплатформы Ela французской фирмы l'Electronique Applique, обследуемый устанавливался на платформе в свободной стойке таким образом, что

проекция центра тяжести располагалась на 3-4 см сзади от центра платформы. Исследование проводилось в разных режимах: открытые глаза, закрытые глаза, открытые глаза. Экспериментальные реализации дискретизировались с частотой 25 Гц. Каждая запись содержит два массива данных, каждый из 4096 точек (длительностью приблизительно 160 с). Более 750 стабิโลграмм были получены при исследовании практически здоровых и пациентов с различной неврологической патологией.

Полученные стабิโลграммы здоровых людей выглядят как полиморфные, разной амплитуды и частоты волны и визуально характеризовались низко- и среднеамплитудными колебаниями. В частотном спектре можно было отметить колебания частотой от 0,1 до 3 гц. При закрывании глаз в большинстве случаев несколько увеличивался размах колебаний при сохранении их частоты. После открывания глаз характер стабิโลграмм возвращался к исходному.

В литературе описаны различные показатели, характеризующие способность человека удерживать равновесие [1-3]. Эти показатели, имеющие весьма интегративный характер, не позволяют выделить тонкие характерные особенности траектории движения центра тяжести человека, и их использование при решении диагностических задач весьма затруднительно. Ниже рассматривается возможность анализа стабิโลграмм как реализаций случайных процессов на основе теоретико-вероятностных методов их описания, поскольку в целом стабิโลграмму можно рассматривать как двумерный временной процесс, отражающий особенности регуляции позы тела человека и несущий информацию о состоянии опорно-двигательного аппарата и нервной системы человека. Поэтому для анализа стабิโลграммы целесообразно использовать математический аппарат анализа временных рядов, позволяющий оценить природу, характер уровень и частотный состав колебаний, проекций центра тяжести тела во взаимно перпендикулярных плоскостях - сагиттальной (вперед - назад) и фронтальной (вправо - влево).

В настоящее время известно два основных подхода к анализу стабิโลграмм - либо отдельно в сагиттальном (вперед - назад) и фронтальном (вправо - влево). направлениях, либо совместно. Первый подход достаточно традиционен, его широко используют при оценке характера стабิโลграфической кривой и ее изменениях при различных патологиях или функциональных нагрузках. В качестве показателей, характеризующих способность человека удерживать равновесие, обычно используются число колебаний в 1 мин., средняя и максимальная амплитуда, площадь вектор стабิโลграммы, "коэффициент Ромберга" - отношение средней амплитуды колебаний тела при закрытых глазах средней амплитуде колебаний при открытых глазах; "суммарная амплитуда колебаний" Ю.В. Терехова (мм); "коэффициент устойчивости" И.И. Розена, равный отношению суммы всех отклонений общего центра тяжести тела в одной из плоскостей или их равнодействующей Y и некоторой постоянной T к последней; "коэффициент подвижности" И.И. Розена, равный отношению общей амплитуды колебаний общего центра тяжести тела в одной из плоскостей Y и проекции кривой на ось абсцисс X к последней. Самым простым и потому распространенным способом исследования траекторий является непосредственное изображение траектории на плоскости (статокенизограмма) в выбранных координатах с последующим ее визуальным контролем. При простых законах движения полученные траектории имеют достаточно наглядный вид, позволяющий качественно оценить их расположение на плоскости, плотность (частоту линий) в различных областях плоскости и некоторые другие особенности. На практике, особенно при случайном характере колебаний, свойственном стабิโลграммам, такой визуальный качественный анализ становится неэффективным. В этом случае целесообразно ориентироваться на методику образного анализа экспериментальных данных, либо на анализ совместной плотности распределения двух геометрически складываемых процессов [5].

Как известно, совместная плотность распределения двух процессов $P(x, y)$ (двумерная гистограмма) определяет вероятность того, что мгновенные значения процессов в произвольный момент времени будут заключены одновременно в двух определенных интервалах. Важной количественной мерой движения является максимальная площадь гистограммы, определяемая как опорная площадь соответствующей двумерной гистограммы: $S_{max} = \iint dx dy$. Оценка площади траектории (статокинезиограммы) позволяет сравнивать различные объекты движений с точки зрения величины заполняемого участка плоскости и протяженности границ предельного движения. Отметим, что проблема оценки площади статокинезиограммы решается как с помощью достаточно грубого метода подсчета числа элементарных квадратов на опорной плоскости, где элементарный “квант” по осям координат определяется по числу интервалов гистограммы, так и с помощью построения эллипсов рассеяния или построения выпуклых оболочек [6]. Представляется интересным использование для оценки площади статокинезиограммы методов контурного анализа и R-функций В.Л. Рвачева [7,8]. Вместе с тем оценка величины площади траектории не содержит информации о степени заполнения траектории этой площади. Подобная информация заключена в особенностях формы боковой поверхности двумерной гистограммы, которые можно выявить с помощью ее плоских сечений, параллельных координатной плоскости, определяя площадь каждого сечения S и относительную вероятность F попадания траектории в область, ограниченную соответствующим сечением $F(S) = \iint P(x,y) dx dy$. В результате получим зависимость вероятности заполнения данной площади от величины этой площади, иначе говоря, функцию распределения вероятностей заполнения площади. Конкретный вид полученной функции распределения, естественно, будет определяться формой исходной двумерной гистограммы. С целью получения количественной оценки равномерности заполнения площади траектории можно использовать степенную аппроксимацию функции распределения: $F(S) = S_{отн}^c$, где c - показатель равномерности заполнения площади, $S_{отн} = S/S_{max}$ - относительная площадь траектории ($0 < S_{отн} < 1$), $F(S)$ - вероятность заполнения данной площади ($0 < F(S) < 1$). Большие значения показателя c свидетельствуют о более равномерном заполнении площади траектории. Если, например, траектория неравномерно по плотности сконцентрирована на малом участке вокруг своего центра, что видно по высокому острому пику и крутым спадающим боковым поверхностям гистограммы, то рассматриваемая функция быстро достигает больших значений еще при сравнительно малой площади. Если же траектория более равномерно заполняет занимаемую площадь, т.е. гистограмма имеет пологую вершину или горизонтальные площадки (что характерно, например, для атактических больных), то функция будет медленно достигать больших значений. Использование данных о площади статокинезиограммы и значений коэффициента c позволяет оценить эффективность различных медикоментозных коррекций нарушений функции равновесия [9].

В состав программного обеспечения отечественных компьютерных стабิโลграфов часто входит расчет показателей устойчивости вертикальной позы, основанных на определении скорости движения проекции общего центра давления на опорную плоскость и ее ортогональных составляющих. Считается, что средняя скорость движения (иногда называемая индексом рыхлости) характеризует устойчивость вертикальной позы - чем выше скорость, тем менее устойчива поза. Иногда определяется так называемый “путь”, рассчитываемый как произведение средней скорости на время обследования. Очевидно, что коэффициент корреляции между средней скоростью и путем практически равен единице при близких значениях времени эксперимента. С увеличением времени эксперимента нарастание усталости, как чисто физической, так и психологической, может существенно влиять на полученные значения средней скорости. Отметим также, что применяемая обычно формула для оценки средней скорости

использует для расчета соседние значения стабิโลграмм, что может приводить к существенным погрешностям вследствие достаточно грубой дискретизации стабิโลграммы. Более точные и достоверные значения средней скорости можно получить, используя приближенные формулы для вычисления производных по трем или пяти точкам кривой, либо применяя алгоритмы цифровой фильтрации, синтезированные по методу Ремеза. При описании стабิโลграммы, как функции, изменяющейся во времени, важное значение имеет скорость этого изменения, т.е. частота процесса. Спектральная плотность является основной характеристикой частотного состава процесса, она обычно интерпретируется как распределение его дисперсии по частоте и имеет размерность, равную квадрату размерности измеряемого параметра, деленному на Герц. Спектры стабิโลграмм практически здоровых людей представляют собой плавно спадающие от 0 до 12,5 Гц кривые, иногда с пиком в области от 8 до 12 Гц, что отражает наличие физиологического тремора в регуляции равновесия. О присутствии паркинсонического тремора сигнализирует широкий пик в области 3-5 Гц. В некоторых случаях регистрация подобного пика позволила выявить субклинические проявления паркинсонического тремора [10].

Широкое распространение в практике спектрального анализа получили так называемые непараметрические методы спектрального оценивания, наиболее часто среди которых применяется подход, основанный на прямом Фурье - анализе последовательности отсчетов данных с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ). Известно, что этому подходу, наряду с высокой эффективностью в вычислительном отношении, присущ ряд принципиальных ограничений, проявляющихся при анализе достаточно коротких реализаций данных и связанных как с пониженным разрешением по частоте, так и с неявной весовой обработкой данных при вычислении БПФ. В последние годы предложены различные процедуры спектрального оценивания, позволяющие ослабить эти ограничения, что особенно важно при обследовании неврологических больных, которым трудно стоять на стабильной платформе более 1 мин. Характерная особенность нового подхода, получившего название параметрического, заключается в наличии некоторой модели спектральной плотности временного ряда в виде дробно-рациональной функции, параметры которой оцениваются на основании наблюдения соответствующего процесса на некотором ограниченном интервале времени [11].

Уровень колебаний на стабิโลграммах можно характеризовать как их пиковым значением или размахом, так и их дисперсией. Информация о дисперсии колебаний по каждому из ортогональных направлений и ее изменению при различных функциональных воздействиях на обследуемого, выраженному как отношение дисперсий стабิโลграмм во фронтальной и сагиттальной плоскостях либо как отношение дисперсий одноименных стабิโลграмм при изменении состояния (например, при закрывании глаз) позволяет оценить состояние обследуемого и может служить диагностическим признаком. В частности, анализ дисперсии колебаний оказался весьма информативным при исследовании некоторых заболеваний психогенного характера, а резкое увеличение дисперсии при закрывании глаз может свидетельствовать о нарушениях глубокой чувствительности [12].

В литературе, посвященной анализу процессов регуляции вертикальной позы, неоднократно высказывалось мнение об отсутствии корреляционных связей между сагиттальной и фронтальной составляющими стабิโลграммы. Обосновывалось это обычно малыми значениями коэффициента корреляции r . Наши эксперименты [13,14] показали, что подобное заключение не всегда справедливо, связь между ортогональными составляющими стабิโลграммы может быть нелинейной, что не может быть установлено с помощью коэффициента корреляции r . Кроме того, связь между фронтальной и сагиттальной стабิโลграммами зависит от функционального состояния человека. Поэтому при обработке стабิโลграмм помимо вычисления значений

коэффициента корреляции r должен выполняться расчет взаимно-корреляционной функции (ВКФ), дисперсионного отношения $\eta_{x(y)}$ и взаимной дисперсионной функции (ВДФ) [15]. Дисперсионное (корреляционное) отношение случайной величины Y относительно X определяется как

$$\eta_{y|x}^2 = DM(X|Y)/DY, \quad DM(Y|Y) = M[M(Y|X) - M(Y)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y|x)dy - m_y \right]^2 \varphi(x)dx$$

- дисперсия условного математического ожидания, характеризующая ту часть флуктуаций переменной Y , которая вызвана влиянием переменной X , DY - дисперсия Y . Дисперсионное отношение $\eta_{x(y)}$ определяет, в какой мере соблюдается функциональная зависимость между переменными x и y . При $\eta_{x(y)} \approx 1$ зависимость практически функциональная; чем ближе $\eta_{x(y)}$ к нулю, тем она больше нарушается. В случае независимости X и Y $\eta_{x(y)} = 0$. В общем случае $0 \leq \eta_{x(y)} \leq 1$. Дисперсионное отношение $\eta_{x(y)}$ можно интерпретировать как количественную характеристику меры определенности случайной величины y по значениям случайной величины x . При этом, дисперсионное отношение всегда больше или равно коэффициенту корреляции и не является симметричным, т.е. $\eta_{x(y)} \neq \eta_{y(x)}$.

Использование дисперсионного отношения $\eta_{x(y)}$ позволяет выявить наличие функциональной связи между колебаниями тела в сагиттальном и фронтальном направлениях, особенно у больных с органическими поражениями центральной нервной системы. Так, для больного А.Б. (диагноз - рассеянный склероз), значение r составило 0,03, а $\eta_{x(y)}$ было больше чем на порядок ($\eta = 0,28$). Это может свидетельствовать как о существовании запаздывающих элементов в системе управления поддержанием позы, так и о нелинейном характере взаимосвязи колебаний в ортогональных плоскостях. Вместе с тем, при некоторых заболеваниях отличие величины $\eta_{x(y)}$ от r было сравнительно небольшим, так у больной С.И. (паркинсонизм) при значении $r = 0,72$ величина $\eta_{x(y)}$ (как во фронтальном направлении по отношению к сагиттальному, так и наоборот), составила примерно 0,73. Такие большие значения коэффициента корреляции r и дисперсионного отношения η свидетельствуют о возможном наличии единого мощного источника колебаний по обеим плоскостям.

Значения дисперсионного отношения η и коэффициента корреляции r достаточно полно описывают общую форму статистической безынерционной взаимосвязи двух случайных процессов, подразумевающую отсутствие сдвига во времени (по фазе) между значениями двух связанных процессов. Рассмотрение же динамической системы регуляции позы делает целесообразным обращение к взаимному дисперсионному анализу. ВДФ для каждой пары значений t_1, t_2 равна дисперсии условного математического ожидания сечения одной функции x относительно сечения другой функции y сдвинутой на интервал $t_1, -t_2$

$$\begin{aligned} \theta_{yx}(t_1, t_2) &= M[M(Y_{t_1}|X_{t_2}) - MY_{t_1}]^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y_{t_1} \varphi(y_{t_1}; t_1 | x_{t_2}; t_2) dy_{t_1} - \int_{-\infty}^{\infty} y_{t_1} \varphi_y(y_{t_1}; t_1) dy_{t_1} \right]^2 \varphi_x(x_{t_2}; t_2) dx_{t_2}, \end{aligned}$$

где $\varphi(y_{t_1}; t_1 | x_{t_2}; t_2)$ - условная плотность вероятности $Y(t_1)$ относительно $X(t_2)$; $\varphi_y(y_{t_1}; t_1)$ и $\varphi_x(x_{t_2}; t_2)$ - одномерные плотности вероятности случайных функций $Y(t_1)$ и $X(t_2)$.

Как и ВКФ $\rho(t)$, $\eta_{x(y)}(t)$ позволяет оценить величину инерционной статистической связи процессов во времени. Количественной мерой величины этой связи служат коэффициенты максимальной корреляции r_{max} (и, соответственно, максимума ВДФ η_{max}),

равные максимальным значениям соответственно ВКФ или ВДФ $\rho(t)$ и $\eta_{x(y)}(t)$. Указанные коэффициенты позволяют оценить степень связанности двух процессов, даже если между ними имеются фазовые сдвиги. Так, для случая функционального левостороннего гемипареза у больного В.В. при значении коэффициента корреляции при стоянии с закрытыми глазами 0,0677 максимальный коэффициент корреляции составил 0,4448, что говорит о наличии определенной линейной инерционной статистической связи колебаний во фронтальной и сагиттальной плоскостях. При этом у здоровых обследуемых различие в величинах дисперсионного отношения максимального дисперсионного отношения очень мало, не более 10 - 15%. Результаты расчетов корреляционных и дисперсионных зависимостей стабилотрамм показывает, что коэффициенты корреляции, максимальные коэффициенты корреляции, дисперсионные отношения и максимумы ВДФ обладают определенной информационной ценностью с точки зрения медицинской диагностики, поэтому целесообразно ввести в программное обеспечение серийно выпускаемых компьютеризированных стабيلاتрофов и стабيلاتролизаторов пакеты программ по расчету и графическому отображению корреляционно-дисперсионных характеристик стабيلاتрограмм.

При некоторых видах неврологических патологий наблюдается возбуждение взаимосвязанных колебаний центра тяжести, в т.ч. при неврозах и истерии. Об этом может свидетельствовать замеченная нами высокая степень когерентности колебаний на стабيلاتрограммах в сагиттальной и фронтальной плоскостях в достаточно широких частотных диапазонах (от 4 до 8 Гц) [9,13]. Большое значение функции когерентности свидетельствует о наличии сильной линейной инерционной статистической связи колебаний в двух плоскостях и может быть объяснено либо существованием единого мощного источника колебаний в ЦНС, либо синхронизацией колебаний в двух плоскостях. Выявленный феномен может быть проявлением нарушения программирования регуляции равновесия вертикальной позы и заинтересованности систем, отвечающих за это программирование, в частности лобных отделов. В частности, возможным механизмом, обуславливающим появление площадок функции когерентности, выступает электрическая деятельность мозга, проявляющаяся в тета-ритме ЭЭГ с частотой 4 - 7 Гц и амплитудой в десятки мкВ, при этом выраженность тета-ритма зависит от степени эмоционального, умственного напряжения, фона основной активности и возраста. Существующая взаимосвязь между активностью тета-ритма и умственным напряжением, эффективностью деятельности объясняется тем, что тета-ритм отражает активность срединно-стволовых образований головного мозга и является электрофизиологическим коррелятором механизма, квантующим поток извлекаемых из памяти энграмм. В целом, результаты наших экспериментов могут служить подтверждением известной гипотезы [16], что динамика здоровой физиологической системы должна продуцировать высоко нерегулярные и комплексные типы вариативности, в то время как заболевание и старение связаны с потерей комплексности и большей регулярностью. Для оценки связанности колебаний в сагиттальной и фронтальной плоскостях весьма перспективно использование взаимной обобщенной информации, подробно рассмотренное в работе [13].

В заключение отметим, что для решения задач функциональной диагностики неврологических заболеваний на основе компьютерной стабيلاتрографии необходимо применять весь спектр методов расчета вероятностных характеристик стабيلاتрограмм, как по отдельности для сагиттального и фронтального направлений, так и их взаимных характеристик.

Литература

1. Гаже П.-М., Вебер Б. Постурология. Регуляция и нарушения равновесия тела человека- СПб.: Изд. дом СПбМАПО, 2008. – 316 с.

2. Гурфинкель В.С., Коц Я.М., Шик М.Л. Регуляция позы человека. - М.: Наука, 1965. - 256 с.
3. Скворцов Д.В. Диагностика двигательной патологии инструментальными методами: анализ походки, стабилметрия. - М.: Т.М. Андреева, 2007. - 640 с.
4. Baron J. History of Posturography // Vestibular and Visual Control of Posture and Locomotor Equilibrium. / Igarashi M., Black F. (Ed.). - Basel: Karger, 1983. - P. 54-59.
5. Винарская Е.Н., Кууз Р.А., Ронкин М.А., Фирсов Г.И. Топологические аспекты афферентного и эфферентного системного синтеза в задачах изучения постуральной активности человека // Информатика и системы управления. - 2009. - № 4(22). - С.44-46.
6. Беляев В.Е., Кононов А.Ф., Слива С.С. Подходы к оценке площади статокинезиграммы // Клиническая постурология, поза и прикус. - СПб.: ООО "ИД СПбМАПО", 2004. - С.81-86.
7. Фурман Я.А., Кревецкий А.В., Передреев А.К. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 592 с.
8. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. - Киев: Наук. Думка, 1982. - 552 с.
9. Кууз Р.А., Фирсов Г.И. Применение методов компьютерной стабилметрии для решения задач функциональной диагностики в неврологии // Биомедицинская радиоэлектроника. - 2001. - № 5-6. - С. 24-33.
10. Кууз Р.А., Магомедова Р.К., Розенблюм М.Г., Суслов, В.Н., Фирсов Г.И. Исследование спектральных особенностей и нелинейной динамики физиологического, эссенциального и паркинсонического тремора // Вестник научно-технического развития. - 2010. - № 11(39). - С.12-20.
11. Кууз Р.А., Ронкин М.А., Фирсов Г.И. Методы параметрического спектрального анализа стабิโลграфической информации в задачах клинической неврологии // Медико-экологические информационные технологии. - Курск: КГТУ, 2004. - С.11-14.
12. Diukova G.M., Stoliajrova A.V., Kuuz R.A., Firsov G.I., Vein A.M. Posturography in Hysteria // International Symposium of Gait Disorders. (Prague, Czech Republic. September 4-6. 1999): Book of Abstracts. - Prague, Qualisis, 1999. - P.122.
13. Rosenblum M.G., Firsov G.I., Kuuz R.A., Pompe B. Human Postural Control - Force Plate Experiments and Modelling // Nonlinear Analysis of Physiological Data. / Ed. by H.Kantz, J.Kurths and G.Mayer-Kress. - Berlin: Springer, 1998. - P. 283-306.
14. Розенблюм М.Г., Фирсов Г.И., Кууз Р.А., Суслов В.Н. Исследование хаотических колебаний в нелинейной системе управления поддержанием вертикальной позы тела человека // Вестник научно-технического развития. - 2007. - № 3. - С.32-42.
15. Райбман Н.С., Капитоненко В.В., Овсепян Ф.А., Варлаки П.М. Дисперсионная идентификация / Под ред. Н.С.Райбмана. - М.: Наука, 1981. - 336 с.
16. Ehlers C.L. Chaos and complexity: can it help us to understand mood and behavior // Archives of General Psychiatry. - 1995. - Vol. 52. - P.960-964.

СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ РОБОТИЗИРОВАННОЙ ПЛАТФОРМЫ

Рыбак Л.А.¹, Чичварин А.В.²

¹Белгородский государственный технологический университет,
г. Белгород, Россия, rl_bgtu@intbel.ru

²Старооскольский технологический институт (филиал) МИСиС,
г. Старый Оскол, Россия, ch_alex79@rambler.ru

Аннотация. Рассмотрена задача построения цифрового регулятора состояний для управления роботизированной платформой, включающей приводной механизм с шаговым электродвигателем, при низкочастотных воздействиях со стороны основания. Задача решается методами теории пространства состояний и H_∞ - оптимизации. Дан пример синтеза оптимального регулятора и алгоритм решения дискретного уравнения Риккати, получена матрица коэффициентов обратных связей. Найдена структура управления по обратным связям. Представлены результаты математического моделирования.

Рассмотрим роботизированную платформу, предназначенную для защиты технологических объектов, а также человека-оператора от низкочастотных воздействий со стороны основания. [1] При этом поставим обратную робототехническую задачу: при любых случайных воздействиях со стороны подвижного основания построить такой закон управления приводным механизмом, при котором объект (платформа) является неподвижным в инерциальной системе координат. При этом необходимо рассмотреть вопросы выбора схем и конструкций приводов и типа датчиков, а также синтеза системы управления. [2]. В качестве привода будем рассматривать электромеханический исполнительный механизм (рис.1), который является наиболее простым по своему конструктивному исполнению и эксплуатационным характеристикам.

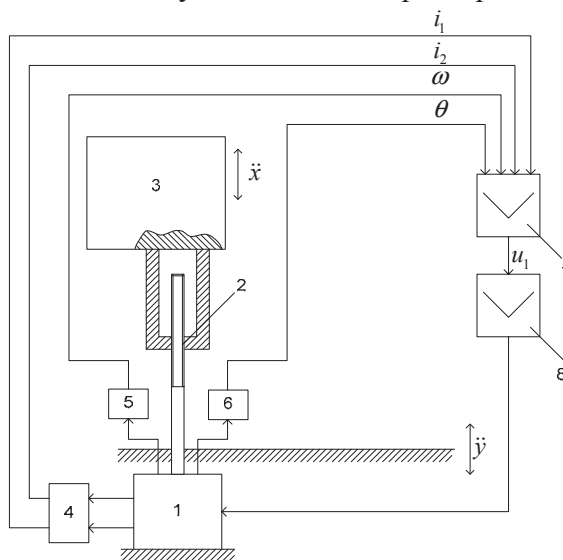


Рис. 1. Схема роботизированной платформы с электромеханическим исполнительным механизмом: 1 — электродвигатель; 2 — шариковая винтовая пара; 3 — платформа; 4 — датчик тока; 5 — датчик скорости; 6 — датчик положения; 7 — регулятор; 8 — усилитель мощности; i_1, i_2 — токи двигателя; ω — скорость вращения якоря двигателя; θ — угол поворота ротора двигателя; $\ddot{x}$ — абсолютное ускорение объекта, $\ddot{y}$ — абсолютное ускорение основания

Построим математическую модель движения роботизированной платформы с учетом характеристик электромеханического приводного механизма, включающего

шариковую винтовую пару и шаговый двигатель. В шариковой винтовой паре модель передачи скоростей и момента описывается выражениями

$$\omega = R_1 \dot{z}, \quad M = R_2 F \quad (1)$$

$$\dot{x} = \dot{y} + \dot{z} \quad (2)$$

где R_1 — передаточное число по скоростным параметрам, R_2 — передаточное число по силовым параметрам, ω — скорость вращения якоря двигателя, M — вращающий момент на гайке, $F = m\ddot{x}$ — сила сопротивления, m — масса платформы, x — абсолютное перемещение объекта, y — абсолютное перемещение основания, z — относительное перемещение объекта.

Момент, приложенный к валу двигателя и усилие, создаваемое поступательным движением объекта, связаны зависимостью

$$M = \frac{1}{2} F D_{sr} \operatorname{tg}(\psi + \rho) \quad (3)$$

где D_{sr} — диаметр окружности, на которой располагаются центры шариков, ψ — угол подъема винтовой линии по цилиндру диаметром D , ρ — приведенный угол трения качения.

С учетом выражений (1), (2), (3) и того, что $\operatorname{tg}(\psi + \rho) = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\eta}$; $\operatorname{tg}\psi = \frac{S}{\pi D}$ получаем передаточные отношения по скоростным и силовым параметрам

$$R_1 = \frac{2\pi}{Sn}, \quad R_2 = \frac{S}{2\pi\eta} \quad (4)$$

где S — шаг резьбы, n — число заходов резьбы, η — КПД шариковой винтовой пары.

Рассмотрим двухфазный шаговый электродвигатель с активным неявнополюсным ротором. Примем за начало отсчета угла θ положение, при котором ось полюса ротора совпадает с осью первой фазы. При этом

$$L_{11} = L_{22} = L = \text{const}; \quad r_1 = r_2 = r; \quad u_1 = u_2 = u$$

Запишем уравнения движения ротора и напряжения в обмотках статора

$$\begin{cases} J\ddot{\Theta} + D\dot{\Theta} + I_1 p \psi \sin p\Theta + I_2 p \psi \sin p(\Theta - \lambda) + M = 0 \\ rI_1 + L\dot{I}_1 + M_{12}\dot{I}_2 - \frac{d}{dt}(\psi \cos p\Theta) = u \\ rI_2 + L\dot{I}_2 + M_{12}\dot{I}_1 - \frac{d}{dt}[\psi \cos p(\Theta - \lambda)] = u \end{cases} \quad (5)$$

где J — момент инерции ротора двигателя, I_1, r_1 — ток и сопротивление 1-й фазы статора, I_2, r_2 — ток и сопротивление 2-й фазы статора, u — напряжение источника питания, Θ — угол между осью полюсов и вектором н. с., p — число пар полюсов, ψ —

максимальное потокосцепление возбужденного ротора с одной фазой статора, L — собственная индуктивность, D — коэффициент вязкого трения, I_0 — установившееся значение тока в обмотках, λ — интервалы между обмотками, M_{12} — взаимная индуктивность.

Уравнения системы (5) являются нелинейными дифференциальными уравнениями. Так как нелинейные дифференциальные уравнения крайне сложно решить аналитически, линеаризуем их следующим образом. Если по обмоткам обеих фаз проходит постоянный ток I_0 в направлении, указанном на рис. 2, то положение равновесия здесь достигается при $\Theta = \lambda/2$. Отклонение от положения равновесия обозначим θ . Оно является функцией времени t и в последующем анализе является достаточно малой величиной. Когда ротор поворачивается или колеблется, ток в обеих обмотках отклоняется от установившегося значения на i_1 и i_2 соответственно.

Предположим, что

$$\Theta = \lambda/2 + \theta, \quad I_1 = I_0 + i_1, \quad I_2 = I_0 + i_2 \quad (6)$$

тогда имеем

$$\sin p\Theta = \sin\left(\frac{p\lambda}{2} + p\theta\right) = \sin\frac{p\lambda}{2} \cos p\theta + \cos\frac{p\lambda}{2} \sin p\theta \quad (7)$$

Учитывая, что произведение $p\theta$ малая величина, получим $\cos p\theta \approx 1$, $\sin p\theta \approx p\theta$. Уравнение (7) упрощается и принимает вид

$$\sin p\Theta = \sin\frac{p\lambda}{2} + p\theta \cdot \cos\frac{p\lambda}{2} \quad (8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sin p(\Theta - \lambda) &= \sin p\left(\frac{\lambda}{2} + \theta - \lambda\right) = -\sin p\left(\frac{\lambda}{2} - \theta\right) = -\sin\frac{p\lambda}{2} + p\theta \cdot \cos\frac{p\lambda}{2}; \\ \cos p\Theta &= \cos p\left(\frac{\lambda}{2} + \theta\right) = p\theta \cdot \sin\frac{p\lambda}{2} + \cos\frac{p\lambda}{2}; \\ \cos p(\Theta - \lambda) &= \cos p\left(\frac{\lambda}{2} + \theta - \lambda\right) = \cos p\left(\frac{\lambda}{2} - \theta\right) = -p\theta \cdot \sin\frac{p\lambda}{2} + \cos\frac{p\lambda}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

Подставив уравнения (6), (8) и (9) в (5) и приняв $i_1\theta = 0$ и $i_2\theta = 0$, получим

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} + D\dot{\theta} + 2p^2\psi I_0\theta \cos\frac{p\lambda}{2} + p\psi(i_1 - i_2) \sin\frac{p\lambda}{2} + R_2 m\ddot{z} + R_2 m\dot{y} = 0 \\ ri_1 + Li_1 + M_{12}i_2 - p\psi\theta \sin\frac{p\lambda}{2} = u \\ ri_2 + Li_2 + M_{12}i_1 + p\psi\theta \sin\frac{p\lambda}{2} = u \\ \dot{\theta} = R_1\dot{z} \end{cases} \quad (10)$$

Упростим уравнения системы (10) и приведем их к виду, характерному для уравнений, описывающих систему в пространстве состояний, приняв $\Psi_1 = p\psi \sin\frac{p\lambda}{2}$ и

$\Psi_2 = 2p^2\psi I_0 \cos \frac{p\lambda}{2}$. Тогда имеем

$$\begin{cases} \ddot{z} = -\frac{R_1}{JR_1 + R_2m} \left(D + \frac{2\Psi_1}{L - M_{12}} \right) \dot{z} - \frac{R_1\Psi_2}{JR_1 + R_2m} z + \\ + \frac{r\Psi_1}{(JR_1 + R_2m)(L - M_{12})} (i_1 - i_2) - R_2m\ddot{y} \\ \dot{z} = \dot{z} \\ \dot{i}_1 = \frac{R_1\Psi_1}{L - M_{12}} \dot{z} - \frac{Lr}{L^2 - M_{12}^2} i_1 + \frac{M_{12}r}{L^2 - M_{12}^2} i_2 + \frac{1}{L - M_{12}} u \\ \dot{i}_2 = -\frac{R_1\Psi_1}{L - M_{12}} \dot{z} + \frac{Mr}{L^2 - M_{12}^2} i_1 - \frac{Lr}{L^2 - M_{12}^2} i_2 + \frac{1}{L - M_{12}} u \end{cases} \quad (11)$$

Введем 4 переменные состояния: $x_1 = \dot{z}$, $x_2 = z$, $x_3 = i_1$ и $x_4 = i_2$. Система уравнений (11) примет вид в векторно-матричной форме

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} = \mathbf{C}\mathbf{X} \end{cases} \quad (12)$$

где $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ — вектор переменных состояния, $\mathbf{Y} = [\ddot{y} \ 0 \ 0 \ 0]^T$ — вектор возмущающего воздействия, $\mathbf{u} = [u \ u \ 0 \ 0]^T$ — вектор входных сигналов; матрицы коэффициентов:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{JR_1 + R_2m} \left(D + \frac{2\Psi_1}{L - M_{12}} \right) & 1 & \frac{R_1\Psi_1}{L - M_{12}} & -\frac{R_1\Psi_1}{L - M_{12}} \\ -\frac{R_1\Psi_2}{JR_1 + R_2m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r\Psi_1}{(JR_1 + R_2m)(L - M_{12})} & 0 & -\frac{Lr}{L^2 - M_{12}^2} & \frac{Mr}{L^2 - M_{12}^2} \\ -\frac{r\Psi_1}{(JR_1 + R_2m)(L - M_{12})} & 0 & \frac{Mr}{L^2 - M_{12}^2} & -\frac{Lr}{L^2 - M_{12}^2} \end{bmatrix}^T, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{L - M_{12}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -R_2m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

Работа шагового двигателя осуществляется в результате подачи на вход импульсов напряжения. В связи с этим переведем первое уравнение системы уравнений 9 в дискретную форму. В результате получим

$$\begin{cases} \mathbf{X}[i+1] = \mathbf{A}_\Delta \mathbf{X}[i] + \mathbf{B}_\Delta \mathbf{u}[i] + D_\Delta \mathbf{Y}[i] \\ v[i+1] = \mathbf{C}_\Delta \mathbf{X}[i] \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{где } \mathbf{A}_\Delta = \exp(\mathbf{A}T) = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i T^i}{i!}; \quad \mathbf{B}_\Delta = \left(\int_0^T \exp(\mathbf{A}(T-t)) \mathbf{B} dt \right) = \left(\mathbf{I}T + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i T^{i+1}}{(i+1)!} \right) \cdot \mathbf{B};$$

$$\mathbf{C}_\Delta = \mathbf{C} \cdot \left(\int_0^T \exp(\mathbf{A}(T-t)) dt \right) = \mathbf{C} \cdot \left(\mathbf{I}T + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i T^{i+1}}{(i+1)!} \right) \quad (14)$$

В матричном уравнении (13) символы $\mathbf{A}_\Delta$, $\mathbf{B}_\Delta$, $\mathbf{C}_\Delta$ и D_Δ обозначают аналоги матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и D для дискретной системы, а символ T введён для обозначения периода дискретизации. Ввиду большой сложности математических выкладок представляется нецелесообразным выводить общий вид матриц $\mathbf{A}_\Delta$, $\mathbf{B}_\Delta$, $\mathbf{C}_\Delta$ и D_Δ . Удобнее рассчитывать матрицы $\mathbf{A}_\Delta$, $\mathbf{B}_\Delta$, $\mathbf{C}_\Delta$ и D_Δ в числовом виде для каждой конкретной четверки матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и D .

Перейдём к передаточной функции, описывающей влияние напряжений на якоре u на скорость поступательного движения механизма $\dot{v}$

$$W_{u-\dot{v}}(z) = \frac{\dot{v}(z)}{u(z)} = \mathbf{C}_\Delta \Phi(z) \mathbf{B}_\Delta \quad (15)$$

где $\Phi(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_\Delta)^{-1}$ - переходная матрица состояния.

Из уравнения (15) может быть выражена передаточная функция, описывающая влияние напряжений на якоре u на угловую скорость вращения вала двигателя ω

$$W_{u-\omega}(z) = \frac{\omega_{\text{об}}(z)}{u(z)} = \frac{2 \cdot \pi}{S \cdot n} \cdot W_{u-\dot{v}}(z) \quad (16)$$

В качестве примера рассмотрим шаговый электродвигатель FL20STH.

После проведения соответствующих вычислений получаем передаточную функцию

$$W_{u-\omega} = \frac{108,5 \cdot (1 - 453z)}{(z - 0,46)(z + 0,03) + 0,014} \quad (17)$$

Для нашей системы (13) найдем управление $\mathbf{u} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{X}$, которое минимизирует

$$J \doteq \sup_{\omega} \|y\|_2^2 \quad (18)$$

Введем во второе уравнение системы (13) управление u . Сделано это для ограничения величины используемого управления, т.к. в противном случае можно добиться сколь угодно маленького значения J с помощью u . Система (13) примет вид

$$\begin{cases} \mathbf{X}[i+1] = \mathbf{A}_\Delta \mathbf{X}[i] + \mathbf{B}_\Delta \mathbf{u}[i] + D_\Delta \mathbf{Y}[i]; \\ v[i+1] = \mathbf{C}_\Delta \mathbf{X}[i] + \mathbf{B}_{1\Delta} \mathbf{u}[i] \end{cases} \quad (19)$$

Как известно

$$J = \|H(s)\|_\infty^2, \quad (20)$$

где $H(S) = (C_{\Delta} + B_{1\Delta}K)(sz - A_{\Delta} + BK)^{-1}D$ – передаточная функция замкнутой системы от возмущения ω к выходу y , т.е. минимизация J эквивалентна задаче H_{∞} -оптимизации.

Преобразуем предварительно $\|y\|_2^2$

$$\begin{aligned}\|y\|_2^2 &= \int_0^{\infty} (C_{\Delta} \cdot x + B_{1\Delta} \cdot u)^T (C_{\Delta} \cdot x + B_{1\Delta} \cdot u) dt = \\ &= \int_0^{\infty} (x^T \cdot C_{\Delta}^T \cdot C_{\Delta} \cdot x + 2 \cdot u^T \cdot B_{1\Delta}^T \cdot C_{\Delta} x + u^T \cdot B_{1\Delta}^T \cdot B_{1\Delta} \cdot u) dt\end{aligned}\quad (21)$$

Предположим для простоты выкладок, что $B_{1\Delta}^T C_{\Delta} = 0$, тогда смешанное произведение отсутствует

$$\|y\|_2^2 = \int_0^{\infty} (x^T \cdot C_{\Delta}^T \cdot C_{\Delta} \cdot x + u^T \cdot S \cdot u) dt \quad (22)$$

где

$$S = B_{1\Delta}^T \cdot B_{1\Delta} \quad (23)$$

Таким образом, задача записывается так

$$\dot{x} = A_C x + D_{\Delta} y, \quad \|y\|_2^2 \leq 1, \quad x(0) = 0, \quad A_C = A_{\Delta} + B_{\Delta} K \quad (24)$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T R x dt, \quad \text{где } R = C_{\Delta}^T C_{\Delta} + K^T S K \quad (25)$$

Если неравенство

$$A_C^T P + P A_C + \frac{1}{\gamma^2} P D_{\Delta} D_{\Delta}^T P + R \leq 0 \quad (26)$$

имеет решение $P > 0$, то $J \leq \gamma^2$.

Умножим неравенство (20) слева и справа на $Q = P^{-1}$ и сделаем замену $Y = K \cdot Q$

$$Q A_{\Delta}^T + A_{\Delta} Q + Q C_{\Delta}^T C_{\Delta} Q + Y^T B_{\Delta}^T + B_{\Delta} Y + Y^T S Y + \frac{1}{\gamma^2} D_{\Delta} D_{\Delta}^T \leq 0 \quad (27)$$

Преобразуем члены, зависящие от Y

$$Y^T B_{\Delta}^T + B_{\Delta} Y + Y^T S Y = (S^{1/2} Y + S^{-1/2} B_{\Delta}^T)^T (S^{1/2} Y + S^{-1/2} B_{\Delta}^T) - B_{\Delta} S^{-1} B_{\Delta}^T \geq -B_{\Delta} S^{-1} B_{\Delta}^T \quad (28)$$

причем равенство достигается при $Y = -S^{-1} B_{\Delta}^T$.

Неравенство (22) выполняется при некоторых $Q > 0$, Y тогда и только тогда, когда выполняется неравенство относительно $Q > 0$

$$Q A_{\Delta}^T + A_{\Delta} Q + Q C_{\Delta}^T C_{\Delta} Q - B_{\Delta} S^{-1} B_{\Delta}^T + \frac{1}{\gamma^2} D_{\Delta} D_{\Delta}^T \leq 0 \quad (29)$$

В свою очередь он имеет положительно-определенное решение $Q > 0$, если такое решение имеет уравнение Рикатти, полученное заменой неравенства на равенство. По этому решению восстанавливаем соответствующий стабилизирующий регулятор

$$K = YQ^{-1} = -S^{-1}B_{\Delta}^T Q^{-1} \quad (30)$$

Матрицы **A**, **B** и **D** уравнения (13) для такой системы будут следующими:

$$A = \begin{bmatrix} -13,3 & 0 & 0 & -0,0012 \\ 0 & -13,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8,9 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2,38 \\ 2,38 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 2,936]$$

Перейдя к дискретной задаче, приняв период дискретизации $T = 0,01$ с, получим следующие матрицы **A_Δ**, **B_Δ**, **C_Δ** уравнения (13):

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} -0,35 & 0 & 0 & -5 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 0 & 1,6 \cdot 10^{-10} & 0 \\ -4,4 \cdot 10^3 & 0 & 10^{-4} & 1,3 \cdot 10^{-4} \\ 3,7 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 5,2 \end{bmatrix}, B_{\Delta} = \begin{bmatrix} -0,84 \\ 3,86 \\ 1,04 \cdot 10^4 \\ 8,8 \cdot 10^3 \end{bmatrix}, B_{1\Delta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{\Delta} = [1,1 \cdot 10^4 \quad 0 \quad 0 \quad 15,3], D_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4,4 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

Установим следующие значения весовых коэффициентов:

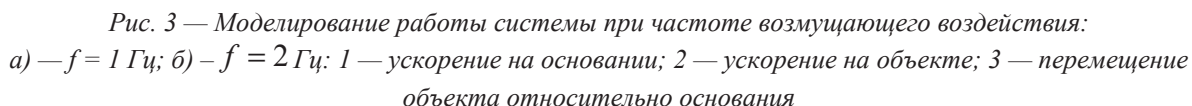
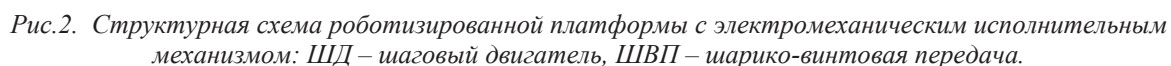
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, r = 10^{-6}$$

После выполнения процедуры нахождения коэффициентов обратных связей оптимального регулятора была получена матрица коэффициентов обратных связей:

$$K = [0,0984; \quad 0; \quad 0,0001; \quad 0,0001]$$

На рис. 2 приведена структурная схема роботизированной платформы с электромеханическим исполнительным механизмом с учетом коэффициентов обратных связей. Для данной схемы управления проведено математическое моделирование работы системы при возмущениях различных видов.

Графики ускорения на объекте и перемещения объекта относительно основания для частоты возмущающего воздействия $f = 1$ Гц приведены на рис. 3 а). Амплитуда возмущающего воздействия была принята равной $A_y = g$. В данном случае коэффициент подавления возмущающего вибрационного воздействия по амплитуде был равен $A_x/A_y = 0,17$. Необходимо также отметить, что относительное перемещение объекта ограничено и может быть удержано на приемлемом уровне. Результаты моделирования для частоты возмущающего воздействия $f = 2$ Гц приведены на рис. 3 б). Также как и в предыдущем случае, амплитуда возмущающего воздействия была принята равной $A_y = g$. В этом случае коэффициент подавления возмущающего вибрационного воздействия по амплитуде был равен $A_x/A_y = 0,175$.



Статья подготовлена в рамках грантов РФФИ №14-41-08058 р_офи_м, №14-01-00761 А.

1. Рыбак Л.А., Ларин В.Б., Синев А.В. Синтез цифрового регулятора состояний с инвариантным управлением активной виброизоляции// Проблемы машиностроения и надежности машин.-1998.- № 2.-С. 104.
2. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П.С. Щербаков.— М.: Наука, 2002.— 303 с.

К ДИНАМИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ПРОЦЕССА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ В КОРОБКАХ ПЕРЕДАЧ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

Саламандра К.Б., Тывес Л.И.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

ksalamandra@yandex.ru, tyves@recuper.ru

Аннотация. Описываются проблемы и известные подходы к анализу динамических эффектов, возникающих при переключениях в автоматических коробках передач транспортных средств. Эти подходы предполагают разделение процесса на этапы и составление дифференциальных уравнений динамики на каждом из них. Авторами предлагается другой подход, базирующийся на теореме об изменении кинетического момента механической системы и теории удара. Такой подход существенно упрощает математические выкладки и позволяет рассчитать по скоростям на входе и выходе коробки передач до переключения – скорости на входе и выходе коробки передач после переключения, а также оценить динамические нагрузки на зубчатые передачи.

Одним из основных требований, предъявляемых к процессу переключения передач, является уменьшение его длительности. Оно обусловлено потребностью в улучшении потребительских качеств автомобиля: снижению времени разгона и повышенными требованиями к экономичности транспортных средств (ТС) в целом. В настоящее время длительность процесса переключения составляет от 0,3 до 0,7 сек.

В современных автоматических коробках передач (АКПП) переключение передач осуществляется без разрыва силовых связей между двигателем и трансмиссией с помощью фрикционных муфт (соединяющих два подвижных звена) и тормозов (муфт, соединяющих подвижное звено с неподвижным корпусом). Муфты работают в масле и приводятся в действие с помощью гидроприводов.

Неразрывность обеспечивается перекрытием процессов выключения муфт выключаемой передачи и включением муфт включаемой передачи. Если начинать процесс включения муфт раньше начала выключения, то длительность переключения передачи уменьшится, но возрастут нагрузки в муфтах и зубчатых передачах, увеличатся потери энергии, приводящие к ощутимому пассажирами торможению ТС. Тем более нельзя допустить одновременного рабочего состояния обеих муфт, так называемого избыточного перекрытия [1]. С другой стороны, запаздывание начала включения муфт по отношению к началу выключения заведомо увеличивает длительность процесса переключения передач. Общепринятый компромисс сводится к одновременному началу процессов включения и выключения муфт.

Если в переключении участвуют только две муфты (включаемая и выключаемая), то такое переключение называют одинарным. Если участвуют 4 муфты (2 включают, 2 выключаются) – двойным [2]. В настоящее время не известны промышленно изготавливаемые коробки передач, в которых бы осуществлялись двойные переключения. Хотя практическая необходимость таких переключений имеется, например, при переключениях через несколько ступеней: с шестой передачи на четвертую при разгоне или со второй передачи на пятую при движении накатом и т.п. Производить последовательное переключение на соседние передачи до перехода на необходимую передачу увеличивает длительность требуемого переключения.

Для некоторых типов коробок передач иногда удастся оптимизировать схему соединения механизмов таким образом, чтобы обойтись только одинарными переключениями. Например, в 8-ми ступенчатой планетарной коробке передач немецкой фирмы ZF Friedrichshafen AG [3] предусмотрено переключение с 6-й передачи на 3-ю или 4-ю, с 7-й на 5-ю, с 8-й на 6-ю или 4-ю и т.п. К сожалению, не для любой коробки передач такое возможно.

Другой способ реализован в роботизированных преселективных коробках передач, например, в коробке, кинематическая схема которой приведена на рис. 1 [4]. Двойные переключения осуществляются при переходе на все соседние передачи, кроме перехода с 1-й на 2-ю (см. табл. 1). В таких коробках передач переключение осуществляется последовательно.

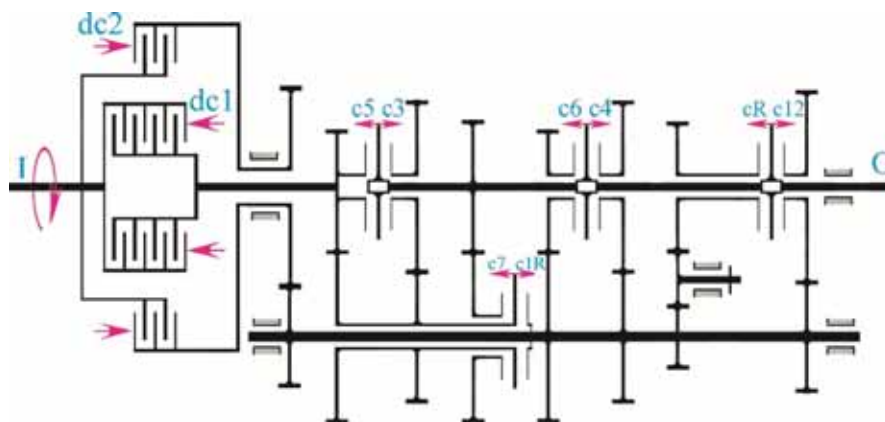


Рис. 1. Кинематическая схема 7-ми ступенчатой роботизированной преселективной коробки передач.

I, O – входное и выходное звенья соответственно; dc1 и dc2 – многодисковые фрикционные муфты, отвечающие соответственно за нечетные и четные ступени; c1R – муфта, включающаяся на 1-й и задней ступенях; c12 – муфта, включающаяся на 1-й и 2-й ступенях; c3, c4, c5, c6, c7 и cR – муфты, при включении которых коробка передач реализует соответственно 3 – 7 ступени и передачу заднего хода.

Таблица 1. Состояние муфт на соответствующей передаче.

№ передачи	Передаточное отношение	Состояние муфт									
		dc1	dc2	c1R	c12	c3	c4	c5	c6	c7	cR
1.	4,8	×		×	×						
2.	2,7		×		×						
3.	1,7	×				×					
4.	1,3		×				×				
5.	1,0	×						×			
6.	0,8		×						×		
7.	0,7	×								×	
Задний ход	– 4,3	×		×							×

Разветвленная компоновка преселективных коробок передач позволяет осуществлять переключение в ненагруженной ветви, то есть следующая ступень может быть заранее подготовлена до ее непосредственного включения. Так для коробки передач (рис. 1) при движении, например, на 2-й передаче муфта c3 не нагружена и может быть заранее включена, после достижения скорости перехода на 3-ю передачу происходит выключение муфты dc2 и включение dc1. В результате каждое следующее переключение является одинарным.

К недостаткам преселективных коробок передач можно отнести необходимость предугадывания той передачи, которую требуется подготовить. Из-за непредсказуемости дорожных условий и действий водителя ТС вероятность ошибочной подготовки передачи довольно высока, поэтому требуемая передача зачастую может быть включена с существенной задержкой. Все вышесказанное требует динамического анализа процесса переключения передач.

Модель коробки передач [1] с двумя степенями свободы (рис. 2), ставшая классической и довольно грубая, часто используется для динамического анализа

процессов переключения. Модель имеет параллельно расположенные входной и выходной валы, 2 пары постоянно находящихся в зацеплении зубчатых колес и оснащенные гидроприводами 2 фрикционные муфты сцепления, которые по командам системы управления выключают одну передачу и включают другую.

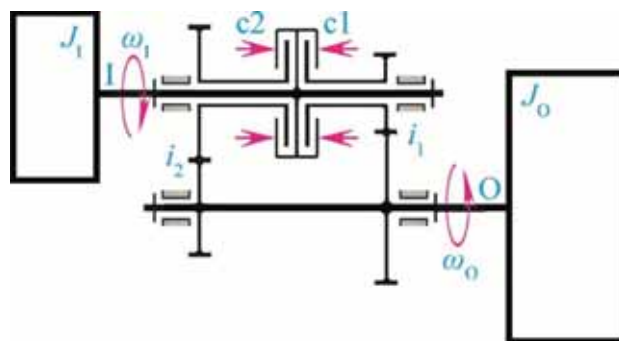


Рис. 2. Модель 2-х ступенчатой коробки передач.

I и O – входной и выходной валы коробки передач; J_1 и J_0 – соответственно приведенные моменты инерции двигателя и ТС; ω_1 и ω_0 – угловые скорости вращения входного и выходного валов коробки передач соответственно; $c1$ и $c2$ – муфты, включающие, соответственно, низшую и высшую передачи; i_1 – передаточное отношение низшей передачи, i_2 – передаточное отношение высшей передачи ($i_1 > i_2$)

Пусть в начальном положении включена муфта $c1$. Тогда при разгоне ТС происходит выключение муфты $c1$ и включение $c2$. С учетом ряда допущений (чаще всего постоянство скорости выходного вала из-за предполагаемого бесконечно большого приведенного момента инерции ТС) процесс разделяют на этапы, для каждого этапа записывают уравнения динамики и предполагаемые на границах этапов соотношения нагрузок, приложенных к звеньям коробки передач. Их анализ позволяет описать изменения скоростей и моментов на входе и выходе модели коробки передач. Вполне естественно, что компьютерные технологии позволили отказаться от классической модели и перейти к рассмотрению более сложных моделей, учитывающих некоторые упругие и инерционные свойства элементов трансмиссии [5]. Однако подход к рассмотрению процесса не меняется.

Для модели рис. 2 процесс переключения разбивается на два этапа. Во время первого этапа (в [2] фаза моментов) происходит передача крутящего момента от $c1$ к $c2$. Обе муфты включены и передают момент двигателя на выходной вал коробки передач. Фаза моментов начинается с увеличения момента в муфте $c2$ и длится до нулевого момента в муфте $c1$. В конце фазы моментов муфта $c2$ передает момент не полностью и проскальзывает.

Во время второй фазы (в [2] инерционная фаза, в [1] – этап разгона) происходит уменьшение скорости вала двигателя. Скорость двигателя меняется с уровня выключаемой передачи до уровня включаемой. Чтобы учесть изменение скорости на входе АКПП, авторы [2] добавляют в уравнение момента, передаваемого включаемой муфтой, момент сил инерции ($J_1\alpha$) движущихся частей от двигателя до входного вала коробки передач при условии равноускоренного (α) вращения вала в течение второй фазы. Вторая фаза заканчивается в момент синхронизации, когда скорость проскальзывания в муфте $c2$ станет равной нулю.

Отметим, что вторая фаза, на которой происходит изменение скорости на входе, занимает только часть времени в процессе переключения передач. На диаграмме рис. 3, заимствованной из работы [6], представлены графики скорости и момента двигателя, ускорения ТС и давления в муфтах в зависимости от времени. При полном времени переключения около 0,7 сек снижение скорости двигателя, т.е. инерционная фаза длится не более 0,3 сек.



Рис. 3. Перекрытие муфт $c1$ и $c2$ при разгоне ТС.

Модель рис. 2 соответствует одинарному переключению передач. Некоторые исследователи [2 (стр. 37), 5 (стр. 235)] считают процесс двойного переключения трудно контролируемым, т.к. коробка передач в этом случае имеет 3 степени свободы – три кинематически не связанных механизма: входной вал с двигателем, выходной вал с трансмиссией и промежуточный между ними механизм в коробке передач. Именно это мнение, не подкреплённое расчетами или экспериментами, определило необходимость проведения собственных исследований динамики процессов переключения в АКПП, в первую очередь для оценки действующих нагрузок на звенья передач.

Анализ динамики процесса переключения передач будем проводить, используя теорему об изменении кинетического момента механической системы и теорию удара [8]. Малое время переключения передач, в частности, инерционной фазы с «экстраординарными инерционными нагрузками» [2, 5] указывают на правомерность такого подхода. При этом существенно упрощаются математические выкладки вследствие того, что по скоростям на входе и выходе коробки передач до переключения сразу рассчитываются скорости на входе и выходе коробки передач после переключения. Для оценки действующих нагрузок рассмотрим модель в виде двухступенчатой передачи (рис. 2) при произвольном значении J_0 .

Используем закон сохранения кинетического момента для оценки скачков изменений скоростей вращений ω_1 и ω_0 инерционных элементов модели J_1 и J_0 , соответственно, на входе и выходе коробки передач. Обозначим: ω_{1-} и ω_{0-} – скорости вращений инерционных элементов до переключения передач, а ω_{1+} и ω_{0+} – их скорости после переключения передач. Элементы системы предполагаются абсолютно жесткими. Внешние по отношению к рассматриваемой модели импульсы момента двигателя и момента сопротивления на выходном валу предполагаются малыми по сравнению с импульсами "соударения" и поэтому не учитываются. Таким образом модель представляет собой замкнутую систему, для которой справедлива теорема сохранения кинетического момента: кинетический момент системы сохраняет постоянное значение, если главный момент внешних сил равен нулю [7]. В соответствии с этой теоремой переключение передачи, например, с низшей на высшую в рассматриваемой модели после приведения моментов инерции и скоростей выходного вала к шестерням на входном валу описывается соотношением:

$$J_1\omega_{1-} + \frac{J_0\omega_{0-}}{i_1} = J_1\omega_{1+} + \frac{J_0\omega_{0+}}{i_2}$$

или

$$J_1\omega_{1+} - J_1\omega_{1-} = \frac{J_0\omega_{0-}}{i_1} - \frac{J_0\omega_{0+}}{i_2} \quad (1)$$

Соотношение скоростей до переключения $\omega_{1-}/\omega_{0-} = i_1$, после переключения $\omega_{1+}/\omega_{0+} = i_2$. Следовательно,

$$\omega_{1+} = \omega_{1-} \cdot \frac{i_2^2(J_1i_1^2 + J_0)}{i_1^2(J_1i_2^2 + J_0)}$$

и

$$\omega_{0+} = \omega_{1-} \cdot \frac{i_2(J_1i_1^2 + J_0)}{i_1^2(J_1i_2^2 + J_0)}$$

Заданные передаточные отношения и закон сохранения кинетического момента полностью определяют начальные условия движения модели на следующей передаче. Изменение скорости $\Delta\omega_1$ на входе коробки передач:

$$\Delta\omega_1 = \omega_{1+} - \omega_{1-} = \omega_{1-} \frac{J_0(i_2^2 - i_1^2)}{i_1^2(J_1i_2^2 + J_0)} \quad (2)$$

Как видно из (2), при переключении передач с низшей на высшую величина изменения скорости входного вала отрицательная, т.к. $i_1 > i_2$. Иными словами, скорость на входе коробки передач в процессе рассматриваемого переключения уменьшится. Нетрудно выписать выражение изменения скорости на выходе коробки передач. Величина его в рассматриваемом случае будет положительной. Далее, если рассматривать обратное переключение передач, то есть с высшей на низшую, получим обратную картину изменения скоростей на входе и выходе коробки передач.

По изменению кинетического момента на входе в коробку передач (1)

$$\Delta K = J_1\Delta\omega_1 = J_0\omega_{1-} \frac{(i_2^2 - i_1^2)}{i_1^2 \left(i_2^2 + \frac{J_0}{J_1} \right)} \quad (3)$$

можно судить о нагрузках на звенья коробки передач.

Действительно, $\Delta K = \int_0^T M(t) \cdot dt$, где $M(t)$ – момент «ударного» воздействия на входной вал, T – длительность инерционной фазы переключения передач, t – время. Такой же по величине момент, но с обратным знаком, приложен к шестерне включаемой передачи. Поэтому в соответствии с (1) ударное воздействие на выходном валу будет: $-i_2M(t)$. На входной вал и на звенья зубчатой передачи нагрузка передается через муфту. Вообще говоря, мы не знаем закона изменения $M(t)$. Знаем, что он в каждый момент времени не больше, чем предельные значения моментов сил трения в муфте, которые зависят от давления в муфте (в данном случае в муфте с2). Известно [1], что момент трения включаемой муфты возрастает по закону, близкому к линейному. Используя эту особенность и предполагая, что предельный момент сил трения в муфте и передаваемый муфтой момент равны, запишем

$$M(t) = kt$$

где k – тангенс угла наклона прямой.

Зная (или задав) длительность T инерционной фазы переключения передач интегрированием $M(t)$ в интервале времени от 0 до T , получим изменение кинетического момента за время переключения в виде:

$$\Delta K = \int_0^T kt \cdot dt = \frac{kT^2}{2} \quad (4)$$

Приравняв выражения (3) и (4), найдём значение коэффициента k

$$k = \frac{2}{T^2} J_0 \omega_{1-} \frac{(i_2^2 - i_1^2)}{i_1^2 \left(i_2^2 + \frac{J_0}{J_1} \right)}$$

и, далее, оценку максимального момента, передаваемого включаемой зубчатой передачей и муфтой:

$$M_{max} = \frac{2}{T} \Delta K = \frac{2}{T} J_0 \omega_{1-} \frac{(i_2^2 - i_1^2)}{i_1^2 \left(i_2^2 + \frac{J_0}{J_1} \right)} \quad (5)$$

Ещё раз подчеркнём свойство полученной оценки максимального момента: она может быть равна или выше действительного максимального момента, передаваемого включаемой зубчатой передачей.

Описанная выше методика применена для расчёта максимальной величины действующего на муфты момента при двойном переключении со 2-й на 3-ю передачу в коробке передач (рис. 1). Схема задействованных звеньев коробки передач в этом случае показана на рис. 4.

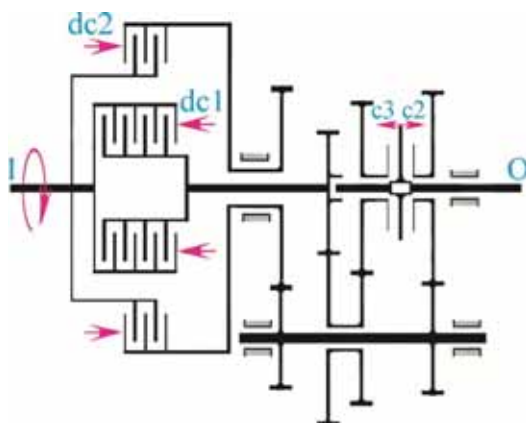


Рис. 4. Схема задействованных звеньев коробки передач [4] при переключении со 2-й на 3-ю передачу.

Этот механизм можно представить простой моделью рис.5. В этой модели, как и на схеме рис. 4, муфты dc1 и dc2 установлены на входном валу коробки передач, а муфты c3 и c2 – на выходном. В обеих схемах передача момента на выходной вал осуществляется либо при включенных муфтах dc1 и c3, либо при включенных муфтах dc2 и c2. Передаточные отношения рядовых зубчатых передач между муфтами dc1 и c3, а также муфтами dc2 и c2 механизма рис. 4 равны передаточным отношениям зубчатых пар между теми же муфтами модели рис. 5 соответственно. Для рассматриваемого переключения с второй на третью передачи $i_2 = 2,7$, $i_3 = 1,7$.

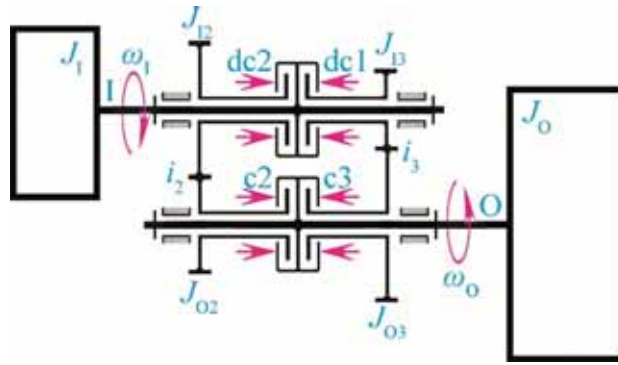


Рис. 5. Модель 2-х ступенчатой коробки передач с двойным переключением.

I и O – входной и выходной валы коробки передач; J_1 и J_0 – соответственно приведенные моменты инерции двигателя и ТС; J_{12} , J_{13} , J_{02} , J_{03} – моменты инерции соответствующих зубчатых колес; ω_1 и ω_0 – угловые скорости вращения входного и выходного валов коробки передач соответственно; $dc2$ и $c2$ – муфты, включающие, соответственно, низшую передачу; $dc1$ и $c1$ – муфты включающие высшую передачу; i_2 – передаточное отношение нижней передачи, i_3 – передаточное отношение высшей передачи ($i_2 > i_3$)

Принципиально возможны только пять вариантов переключения для модели на рис. 5:

1. Одновременное выключение муфт $dc2$, $c2$ и включение $dc1$, $c3$.
2. Включение муфты $c3$, а затем с задержкой Δt одновременное выключение муфт $dc2$, $c2$ и включение $dc1$.
3. Одновременное выключение муфт $dc2$, $c2$ и включение муфты $c3$, а затем с задержкой Δt включение муфты $dc1$.
4. Включение муфты $dc1$, а затем с задержкой Δt одновременное выключение муфт $dc2$, $c2$ и включение $c3$.
5. Одновременное выключение муфт $dc2$, $c2$ и включение муфты $dc1$, а затем с задержкой Δt включение муфты $c3$.

В общем случае для любой АКПП с преселективной компоновкой или компоновкой с дифференциалами [8, 9] и тормозными муфтами из указанных пяти вариантов управления возможны лишь 1, 3 и 5. Второй – пятый варианты управления характеризуются увеличением длительности переключения по сравнению с одинарным переключением на величину задержки. Это и будет «платой» за определённую двойного переключения.

Численный пример для определения максимальных нагрузок, действующих на муфты при переключении. Будем считать, что выключение кинематических связей (здесь выключение муфт $c2$ и $dc2$) освобождает входной и выходной валы коробки и их скорости при этом не меняются.

Вариант управления двойным переключением		
	Третий	Пятый
1-й этап	Включение муфты $c3$ – присоединение зубчатых колес J_{13}, J_{03} к выходному валу O. Закон сохранения кинетического момента: $J_0 \omega_{0-} = [J_0 + J_{03} + J_{13} i_3^2] \omega_{0+}^*$ тогда $\omega_{0+}^* = J_0 \omega_{0-} / [J_0 + J_{03} + J_{13} i_3^2]$ Максимальный момент, действующий на муфту $c3$: $M_{max} = -\frac{2}{T} (J_{03} + J_{13} i_3^2) \omega_{0-}$	Включение муфты $dc1$ – присоединение зубчатых колес J_{13}, J_{03} к входному валу I. Закон сохранения кинетического момента: $J_1 \omega_{1-} = [J_1 + J_{13} + J_{03} / i_3^2] \omega_{1+}^*$ тогда $\omega_{1+}^* = J_1 \omega_{1-} / [J_1 + J_{13} + J_{03} / i_3^2]$ Максимальный момент, действующий на муфту $dc1$: $M_{max} = -\frac{2}{T} (J_{13} + J_{03} / i_3^2) \omega_{1-}$
2-й этап	Включение муфты $dc1$. Закон сохранения кинетического момента: $J_1 \omega_{1-} + [J_0 + J_{03} + J_{13} i_3^2] \omega_{0+}^* =$ $= (J_1 + J_{13}) \omega_{1+} + (J_0 + J_{03}) \omega_{0+}$ после подстановки ω_{0+}^* получим:	Включение муфты $c3$. Закон сохранения кинетического момента: $[J_1 + J_{13} + (J_{03} / i_3^2)] \omega_{1+}^* + J_0 \omega_{0-} =$ $= (J_1 + J_{13}) \omega_{1+} + (J_0 + J_{03}) \omega_{0+}$ после подстановки ω_{1+}^* получим:

$$J_1 \omega_{1-} + J_0 \frac{\omega_{0-}}{i_3} = (J_1 + J_{I3}) \omega_{1+} + (J_0 + J_{O3}) \frac{\omega_{0+}}{i_3}$$

Отметим, что полученное уравнение можно записать сразу при рассмотрении двойного переключения по первому варианту. Это связано с тем, что окончательный результат не зависит от варианта управления, поскольку рассматриваемая модель во всех случаях остаётся замкнутой системой (внешние силы равны нулю).

Соотношение скоростей до переключения $\omega_{1-}/\omega_{0-} = i_2$, после переключения $\omega_{1+}/\omega_{0+} = i_3$. Следовательно,

$$\omega_{1+} = \omega_{1-} \frac{J_1 + \frac{J_0}{i_2 i_3}}{J_1 + J_{I3} + \frac{J_0 + J_{O3}}{i_3^2}}$$

Максимальный момент на входном валу коробки передач:

$$M_{max} = \frac{2}{T} \omega_{1-} \frac{J_1 J_0 (i_3 - i_2) + J_0 J_{I3} i_3 - J_1 J_{O3} i_2}{i_2 (i_3^2 (J_1 + J_{I3}) + J_0 + J_{O3})}$$

Принимая $J_0 J_{I3} i_3 \cong J_1 J_{O3} i_2$ и $J_{I3} = J_{O3} \cong 0$, получим:

$$M_{max} = \frac{2}{T} J_0 \omega_{1-} \frac{(i_3 - i_2)}{i_2 \left(i_3^2 + \frac{J_0}{J_1} \right)}$$

Подставив $\frac{J_0}{J_1} = 20$, скорость двигателя до переключения $\omega_{1-} = 6000 \frac{\text{об.}}{\text{мин.}} = 628 \frac{1}{\text{сек.}}$, $T = 0,3$ сек, получим $M_{max} = -68 \cdot J_0 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Таким образом, в рамках рассматриваемых моделей не выявлены особенности, указывающие на неконтролируемость двойного переключения передач в АКПП.

Результаты и выводы. Предложенный подход отражает физику процесса переключения, является универсальным – не зависит от типа трансмиссии и числа одновременно задействованных муфт при переключениях. Позволяет оценить скорости и моменты, действующие на звенья коробок передач, а также силы сжатия дисков муфт.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований – проект № 13-08-01235 а.

Литература

1. Дмитриев М.И., Шарипов В.М., Маланин И.А. Разгон тракторного агрегата при переключении передач без разрыва потока мощности. стр. 380 – 395. – Материалы Международной научно-технической конференции Ассоциации автомобильных инженеров (ААИ) "Автомобиле- и тракторостроение в России: приоритеты развития и подготовка кадров", посвященной 145-летию МГТУ "МАМИ". Книга 1, Москва, МГТУ «МАМИ», 2010 г.
2. Bai Sh., Maguire J., Peng H. Dynamic analysis and control system design of automatic transmission. – SAE International, Warrendale, Pennsylvania, USA, 2013. – ISBN 978-0-7680-7604-2.
3. Патент WO 2006/074707. Multispeed Transmission. 20.07.2006.
4. Патент US 7231843. Double Clutch Transmission. 19.06.2007.
5. Pfeiffer F. Mechanical System Dynamics. Corrected Second Printing. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. – ISBN 978-3-540-79435-6.
6. Naunheimer H., Bertsche B., Ryborz J., Novak W. Automotive Transmissions. Fundamentals, Selection, Design and Application. Second Edition. – Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2011. – ISBN 978-3-642-16213-8.
7. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2-х томах. Т. II. Динамика. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.

8. Саламандра К.Б., Тывес Л.И. Динамическое гашение колебаний выходного вала коробки передач автомобиля с двигателем внутреннего сгорания // Проблемы машиностроения и надежности машин – 2014. – № 5. стр. 12 – 20.
9. Крайнев А.Ф., Асташев В.К., Саламандра К.Б., Орешкин В.Е. Коробка передач // Патент России № 2391588. 2010. Бюл. № 16.

К ОЦЕНКЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ГЕНЕРАТОРОВ НА ОСНОВЕ ВИБРОУДАРНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Саттаров Р.Р.¹, Алмаев М.А.²

¹Уфимский государственный авиационно-технический университет

Уфа, Россия, sattar.r@mail.ru

²Уфимский государственный авиационно-технический университет

Уфа, Россия, marsellll@yandex.ru

Аннотация. В работе представлены расчетные соотношения для предельных энергетических характеристик микроэлектромеханических генераторов для сбора и преобразования энергии вибрации и ударов. Показано, что энергетическая эффективность генераторов на основе линейных систем существенно снижается из-за отклонения частоты возбуждения от резонансной. Предложена оценка энергетической эффективности электромеханических генераторов с симметричными ограничениями на размах колебаний и реализацией виброударных режимов. Показано, что виброударные системы позволяют несколько увеличить предельную мощность и существенно расширить рабочий частотный диапазон.

В последнее время представлено и исследовано большое количество устройств, предназначенных для сбора и преобразования энергии (ЕН – Energy Harvesting), рассеиваемой в окружающих естественной или технологических средах при протекании в них основных функциональных энергетических процессов. Так как преобразуется часть первичной энергии источников, неизбежно рассеиваемая при выполнении основных функций, то вместо понятия «сбор энергии» можно также говорить о рекуперации энергии, например [1, 2]. Такой интерес, прежде всего, вызван развитием автономных микроэлектронных радиотехнических систем, уровень энергопотребления которых относительно невелик и в перспективе будет снижаться. Одной из активно развиваемых технологий является преобразование в электрическую энергию механической энергии тряски, ударов и вибрации – технология сбора вибрационной энергии окружающей среды (VEN – Vibration EN).

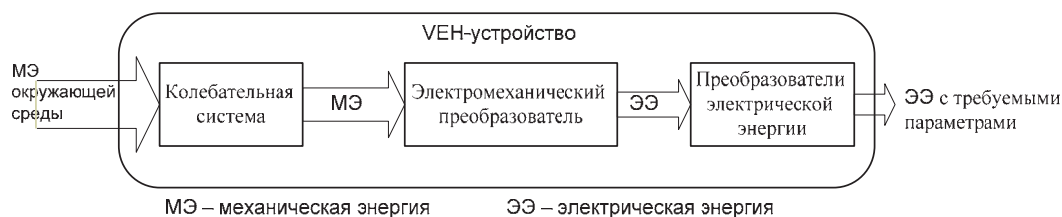


Рис.1. Состав и преобразование энергии в VEN-устройстве

Устройство и принцип действия электромеханических генераторов или VEN-устройств аналогичны инерционным генераторным датчикам абсолютной вибрации [3]. В настоящее время разработано большое количество микроэлектромеханических генераторов мощностью до единиц милливатт [1, 4, 5], а также предложен ряд конструкций «мезо»-электромеханических преобразователей мощностью до нескольких ватт [2, 6–8]. Электрохимический генератор включает в себя ряд систем: колебательную систему для выделения механической энергии вибрации, электрохимический преобразователь для генерирования электрической энергии и преобразователи для согласования параметров электрической энергии с параметрами нагрузки (рис.1).

В большинстве случаев основой ВЕН-устройств является линейная механическая колебательная система, в которой механическая энергия преобразуется в электрическую посредством пьезоэлектрических, электромагнитных или электростатических электромеханических преобразователей. Максимальная генерируемая мощность достигается при возбуждении на резонансной частоте и существенно снижается при незначительных отклонениях частоты возбуждения от собственной частоты колебательной системы. Поэтому при разработке и настройке необходимо согласование собственной частоты колебательной системы с частотой возбуждающей вибрации. В тоже время частота вибрационных источников в большинстве случаев либо заранее не известна, либо не постоянна, а изменяется в некотором диапазоне. В настоящее время проведено множество исследований, посвященных решению этого противоречия, и предложены различные способы реализации ВЕН-устройств, обеспечивающих близкие к максимальным, энергетические характеристики в увеличенном частотном диапазоне. Каждый из предлагаемых способов обладает как достоинствами, так и недостатками и не может служить универсальным решением. Важной задачей является классификация существующих способов увеличения частотного диапазона и общая оценка энергетической эффективности ВЕН-устройств.

Принципиально возможно два направления увеличения частотного диапазона: реализация самонастройки системы в зависимости от частоты возбуждения и реализация колебательных систем одинаково эффективных в определенном диапазоне частот возбуждения [9, 10].

Первое направление предполагает создание систем с управлением, при этом здесь возможны два варианта устройств – с непрерывным управлением (активной настройкой) при постоянном использовании части получаемой энергии или энергии внешних источников или с периодическим управлением (пассивной настройкой) с кратковременным использованием дополнительной энергии. В [11] представлены ряд устройств и дан анализ методов активной и пассивной настройки, в частности, показано, что устройства с активной настройкой не позволяют увеличить генерируемую мощность. В случае с пассивной настройкой существенными недостатками являются затраты энергии и усложнение структуры колебательной системы.

Создание ВЕН-устройств эффективных в широком диапазоне частот может быть осуществлено на основе линейных и нелинейных колебательных систем. Наиболее простой способ заключается в использовании ряда линейных колебательных систем с одной степенью свободы с различающимися собственными частотами [10]. Аналогично может быть использована линейная система с несколькими степенями свободы с отличными друг от друга собственными частотами. Также подобный подход может быть использован для увеличения «диапазона» по направлениям вибрации, например [12]. Недостатками предлагаемого способов являются относительно большой объем колебательной системы и низкая удельная мощность.

Использование нелинейных колебательных систем позволяет не только расширить частотный диапазон, но и увеличить генерируемую мощность [13]. Здесь предложены и исследованы колебательные системы с несколькими метастабильными положениями, а также системы с ограничителями амплитуды колебаний. К недостаткам би- и мультистабильных систем относят относительно сложную структуру колебательной системы для реализации нелинейной восстанавливающей характеристики, а также необходимость высокой точности при изготовлении системы для расширения частотного диапазона [10].

ВЕН-устройства, особенно для микросистемной техники, имеют определенные ограничения на геометрические размеры, что в свою очередь ограничивает амплитуду колебаний и использование резонансных режимов. Однако в этом случае могут использоваться виброударные режимы, позволяющие повысить энергетическую эффективность и расширить частотный диапазон [14-17].

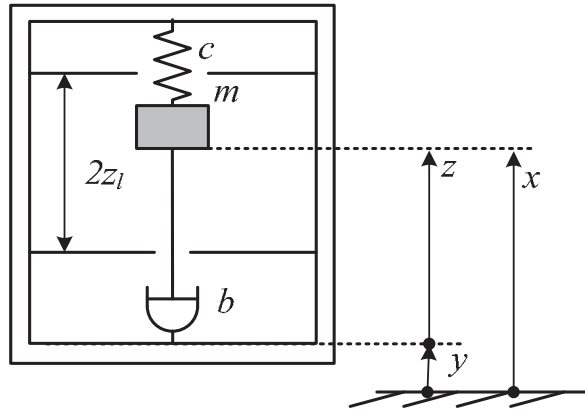


Рис.2 Расчетная схема

Расчетная схема механической нелинейной колебательной системы представлена на рис.2. Колебания сейсмической массы описывается уравнением

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + f(z) = -m\ddot{y}, \quad (1)$$

где z - относительная координата перемещения инерционного элемента; y - координата перемещения корпуса; $f(z)$ - восстанавливающая, в общем случае нелинейная, сила.

При гармоническом возбуждении

$$y = y_m \cos(\omega t),$$

если восстанавливающая сила линейна, то колебания происходят также по гармоническому закону [3,18,19]

$$z = z_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где

$$z_m = y_m \frac{\gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + 4\beta^2\gamma^2}}; \quad \varphi = \arctg \frac{2\beta\gamma}{1-\gamma^2}. \quad (2)$$

Здесь $\beta = \frac{h}{\omega_0} = \frac{b}{2m\omega_0}$ - относительное затухание; $\gamma = \frac{\omega}{\omega_0}$ - относительная частота

возбуждающей силы; ω_0 - собственная частота линейной колебательной системы.

Для определения энергетического баланса уравнение (1) необходимо умножить на скорость и проинтегрировать в пределах периода:

$$m \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \ddot{z} \dot{z} dt + b \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \dot{z}^2 dt + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(z) \dot{z} dt = -m \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \ddot{y} \dot{z} dt.$$

Первое слагаемое левой части представляет собой кинетическую энергию, второе – рассеиваемую в демпфере механическую энергию и третье – потенциальную энергию системы. Правая часть представляет собой работу внешней вынуждающей силы. При периодических режимах в силу взаимной ортогональности перемещения, скорости и ускорения изменения кинетической и потенциальной энергии за период равны нулю [18,20]. Таким образом, для VEN-устройств «собранный» энергия может определяться через энергию, рассеиваемую в демпфере, или работу возбуждающей силы.

Для линейной системы средняя мощность [21,22]

$$P = m y_m^2 \omega^3 \frac{\beta \gamma^3}{(1-\gamma^2)^2 + 4\beta^2 \gamma^2}. \quad (3)$$

При резонансе $\gamma=1$ из (3) следует, что уменьшение относительного затухания приводит к бесконечному росту выходной мощности. Демпфирование, обеспечивающее максимум выходной мощности,

$$\beta_{opt} = \frac{\sqrt{1-2\gamma^2+\gamma^4}}{2\gamma},$$

а максимальная мощность

$$P_{max} = \frac{1}{4} m y_m^2 \omega^3 \frac{\gamma^2}{\sqrt{1-2\gamma^2+\gamma^4}} \quad (4)$$

Из (4) следует, что при резонансе выходная мощность стремится к бесконечности. Амплитуда колебаний по (2) при этом также бесконечна. Таким образом, полученные соотношения не учитывают, что в действительном устройстве амплитуда колебаний массы относительно корпуса ограничена размерами последнего, т.е. должно выполняться условие

$$|z| \leq z_l.$$

Для получения максимального значения выходной мощности при условии ограниченности колебаний, необходимо увеличивать относительное затухание так, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась до предельного значения z_l . Полагая, что амплитуда равна предельному значению можно получить коэффициент затухания, обеспечивающий максимальную мощность при наличии ограничителя [21]

$$\beta_{opt} = \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\gamma^4 \frac{y_m^2}{z_l^2} - (1-\gamma^2)^2}. \quad (5)$$

Оптимальное значение относительного затухания наиболее просто можно получить за счет регулирования нагрузки генератора. Мощность максимальную при ограничении амплитуды можно получить, подставляя (5) в (3)

$$P_{max} = m y_m^2 \omega^3 \frac{1}{2\gamma^2} \frac{z_l^2}{y_m^2} \sqrt{\gamma^4 \frac{y_m^2}{z_l^2} - (1-\gamma^2)^2}. \quad (6)$$

Наибольшая мощность может быть получена при резонансе $\gamma=1$

$$P_{max\ res} = \frac{1}{2} m \omega^3 y_m z_l. \quad (7)$$

Таким образом, в линейной системе максимальная мощность может быть получена при выполнении условий резонанса и выборе оптимального значения коэффициента затухания, при чем если выполняется условие $\frac{z_l}{y_m} \leq \frac{\gamma^2}{|1-\gamma^2|}$, то

максимальная мощность определяется по (7), если же это условие не выполняется, то мощность должна определяться по (3) и (4).

При оценке предельных показателей ВЕН-устройств часто используются именно выражения (3) – (7), которые получены в [21]. Следует отметить, что (7) определяет максимально возможную мощность, поэтому для сравнения энергетической эффективности различных устройств в [22] предлагается использовать нормированную мощность $m y_m^2 \omega^3$. В [23] представлена удельная нормированная мощность, которая характеризует ту часть энергии вибраций в окружающей среде, которая может быть использована, $\frac{1}{2} \omega^3 y_m^2$. Порядок этой величины для большинства случаев составляет 10 – 700 мкВт/кг [23].

В случае нелинейной системы определить максимальную мощность и оптимальные значения затухания в общем случае не представляется возможным. Однако

можно получить оценку предельной мощности ВЕН-устройства на основе нелинейной колебательной системы [20]

$$P = \frac{my_m \omega^3}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \dot{z} \cos(\omega t) dt \leq \frac{my_m \omega^3}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} |\dot{z}| |\cos(\omega t)| dt \leq \frac{my_m \omega^3}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} |\dot{z}| dt .$$

Так как $\dot{z}$ периодическая функция, то последний интеграл может быть записан

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} |\dot{z}| dt = 4 \int_0^{\frac{2\pi}{4\omega}} \dot{z} dt = 4 \int_0^{z_l} dz = 4z_l .$$

Тогда для мощности нелинейной системы [20,24]

$$P \leq \frac{2}{\pi} my_m z_l \omega^3 . \quad (8)$$

Таким образом, в предельном случае нелинейная система позволяет получить в $4/\pi$ большую мощность, чем в линейной резонансной системе. Однако, в случае если линейная система не точно настроена на резонанс ее мощность при малом демпфировании существенно ниже максимального значения, и поэтому мощность в нелинейной системе может существенно превышать мощность линейной. Однако для этого необходимо, чтобы в нелинейной системе мощность существенно бы не изменялась при расстройке частоты.

Нелинейность физически может реализовываться разнообразными способами. Так как размеры ВЕН-устройства накладывают ограничения на размах колебаний, то наиболее просто для увеличения мощности или увеличения частотного диапазона устройства можно использовать режимы с соударениями об ограничитель. В виброударных системах рассеяние механической энергии происходит не только в демпфере, но и при ударе [19]. Поэтому возможны различные конструкции со «сбором» и преобразованием механической энергии, как при движении между соударениями, так и при ударах [9,14–16,25]. В [14] получена экспериментальная оценка увеличения диапазона генератора линейно-кусочной жесткой упругой характеристикой на 240% от 1,4Гц до 4,79 Гц.

Для рассматриваемой расчетной схемы линейной колебательной системы с симметричными ограничителями (рис.2) существует точное решение для виброударного режима [19]. С учетом введенных обозначений можно записать следующий закон движения в исследуемых режимах в интервале $t \in \left[0, \frac{\pi l}{\omega}\right]$, где l - кратность периода колебаний.

$$z_{vi} = e^{-\beta \omega_0 t} (\cos \omega_0 t + F \sin \omega_0 t) \frac{DR}{\omega_0} \dot{z}_- + z_m \cos(\omega t + \varphi) , \quad (9)$$

$$\text{где} \quad \sin \varphi = \frac{BD}{z_m \omega_0} \dot{z}_- ; \quad \cos \varphi = \left(1 - \frac{D}{\omega_0 z_l} \dot{z}_-\right) \frac{z_l}{z_m} ; \quad F = \frac{e^{\beta \theta} + \cos \theta}{\sin \theta} ;$$

$$B = \left(\frac{1}{D} - \frac{e^{\beta \theta} + \cos \theta + \beta \sin \theta}{\sin \theta} \right) \frac{1}{\gamma} ; \quad D = \frac{(1+R) \sin \theta}{e^{\beta \theta} + 2 \cos \theta + e^{-\beta \theta}} ; \quad \theta = \frac{\pi l}{\gamma} ;$$

$$\dot{z}_- = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \left(1 - \frac{z_m^2}{z_l^2}\right) (1 + B^2)}}{1 + B^2} \frac{\omega_0 z_l}{D} . \quad (10)$$

При расчете по полученным выражениям необходимо проверять выполнение условия, что в промежутке между расчетными соударениями сейсмическая масса должна находиться между ограничителями, не пересекая их уровня $|z_{vi}| = z_l$. В соответствии с

(10) могут быть реализованы два виброударных режима. Виброударные режимы в системе могут существовать не только при превышении амплитуды линейного осциллятора предельного перемещения $z_l < z_m$, но и при меньших амплитудах до значений, определяемых энергетической границей [19]. В последнем случае система также может реализовать гармонические колебания, а для выхода на виброударные режимы необходимо жесткое возбуждение. В случае установки ограничителей в пределах амплитуды колебаний $z_l < z_m$ может существовать только по одному режиму каждой кратности. При $\gamma \geq l$ реализуется режим, которому соответствует знак «плюс» в (10), а при $\gamma < l$ – со знаком «минус».

Принимая, что преобразуется энергия, рассеиваемая при движении между соударениями, можно определить среднюю выходную мощность системы в виброударном режиме

$$P_{vi} = \frac{\omega}{\pi l} b \int_0^{\frac{\pi l}{\omega}} \dot{z}_{vi}^2 dt . \quad (11)$$

Скорость определяется дифференцированием (9)

$$\dot{z}_{vi} = DR\dot{z}_- e^{-\beta\omega_0 t} \left[(F - \beta) \cos \omega_0 t - (\beta F + 1) \sin \omega_0 t \right] - z_m \omega \sin(\omega t + \varphi) . \quad (12)$$

Нужно отметить, что скорость $\dot{z}_{vi}$ можно представить в виде суммы ряда временных гармоник, и при определении мощности использовать только первую гармонику, так как все гармоники ортогональны друг другу.

Эффективность колебательной системы можно оценить степенью приближения выходной генерируемой мощности к максимально возможной мощности линейной системы, которая определяется по (7)

$$E_{vi} = \frac{P_{vi}}{0.5m\omega^3 y_m z_l} . \quad (13)$$

В соответствии с (8) эффективность виброударной системы не будет сильно отличаться от эффективности линейной резонансной системы.

Для оценки и сравнения частотного диапазона, в котором ВЕН-устройство эффективно, можно ввести показатель качества по частотному диапазону, по аналогии [22],

$$k_\omega = \frac{\Delta\omega}{\omega} , \quad (14)$$

здесь $\Delta\omega$ - диапазон частот, в котором выходная мощность составляет половину от максимального значения. Для выделения режимов с более плоской выходной характеристикой предлагается использовать снижение мощности на 1 дБ [22].

Количественная оценка рабочего частотного диапазона может быть получена с помощью представленных выражений. Качественный анализ АЧХ рассматриваемой системы, представленный в [19], позволяет оценить степень увеличения частотного диапазона виброударной системы. На рис.3 представлена АЧХ рассматриваемой системы, зависимости 2 соответствуют неоптимальным, а кривая 1 – оптимальному безударному режиму. При медленном увеличении частоты амплитуда нарастает как для линейной системы, так как реализуется режим гармонических безударных колебаний (зависимости 3 на рис. 3) [19]. При достижении амплитудой значения z_l в дорезонансной области осуществляется режим с ударами только об один ограничитель, в котором амплитуда практически мало отличается от z_l . При достижении резонансной частоты реализуется симметричный виброударный режим с поочередными соударениями о каждый ограничитель. При достижении частоты срыва виброударный режим переходит в режим гармонических колебаний. При уменьшении частоты из зарезонансной области виброударный режим устанавливается на частоте меньшей частоты срыва. Рабочий

частотный диапазон можно приближенно определять как разницу между частотой срыва и установления виброударного режима. Таким образом, установление виброударных режимов позволяет значительно расширить область рабочих частот, как при возрастании, так и уменьшении частоты.

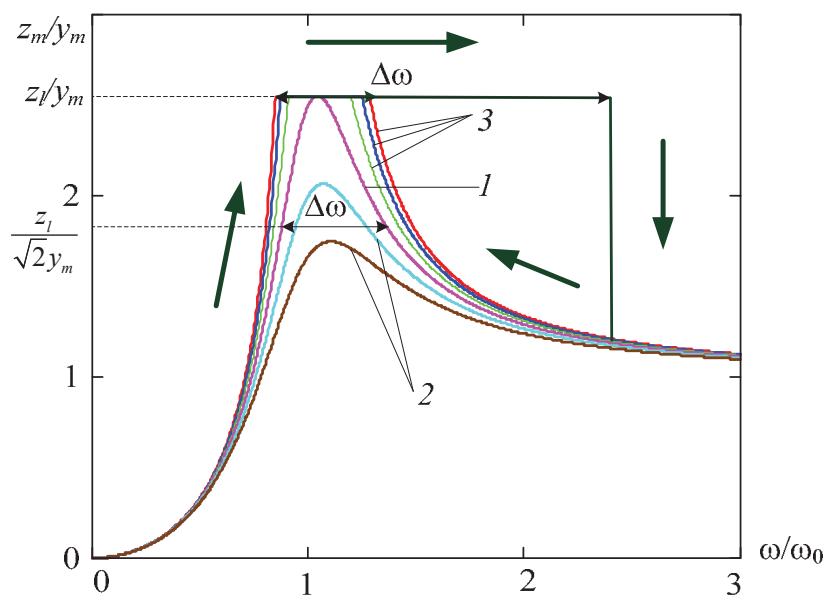


Рис. 3 Амплитудно-частотная характеристика

Существенным свойством рассматриваемых виброударных систем является зависимость установления режимов от пути перехода, а также в некоторых случаях необходимости дополнительных специальных воздействий для перехода на виброударный режим [19]. Также необходимо исследовать устойчивость виброударных режимов к случайным внешним возмущениям. Поэтому при оценке эффективности применения виброударных систем в конкретном приложении для электромеханических систем необходимо получить данные о характере изменения параметров вибрации, энергию которой предполагается использовать, о наиболее характерных переходных и установившихся протекающих процессах. На основании этих данных с использованием предложенных расчетных выражений может быть определены перемещение и скорость сейсмической массы и проведена оценка эффективности и частотного диапазона, получена средняя мощность и полная энергия «собираемая» ВЕН-устройством. На основании сравнения полученных данных с требуемыми энергетическими характеристиками может быть сделан вывод о возможности использования виброударных режимов для рассматриваемой прибора или устройства.

Литература

1. Драгунов В.П., Остертак Д.И. Сравнительный анализ МЭМ рекуператоров электрической энергии. 2011. Т. 1, № 42.
2. Посметьев В.И., Драпалюк М.В., Зеликов В.А. Оценка эффективности применения системы рекуперации энергии в подвеске автомобиля // Научный журнал КубГАУ. 2012. Т. 76, № 2.
3. Ключев В.В. Приборы и системы для измерения вибрации, шума и удара. Справочник. М.: Металлургия, 1990.
4. Cook-Chennault K., Thambi N., Sastry M. Powering MEMS portable devices—a review of non-regenerative and regenerative power supply systems with special emphasis on piezoelectric energy harvesting systems // Smart Mater. Struct. 2008. Vol. 17, № 4.
5. Small-Scale Energy Harvesting // ed. Lallart M. / InTech, 2012.

6. Nelson C. et al. Power harvesting for railroad track safety enhancement using vertical track displacement // Proc. SPIE. Spie, 2009. Vol. 7288.
7. Kuo A.D. Harvesting Energy by Improving the Economy of Human Walking. 2011. Vol. 1686, № 2005.
8. Саттаров Р.Р., Бабикова Н.Л., Полихач Е.А. Исследование установившегося режима синхронного генератора возвратно-поступательного движения // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 6(24).
9. Tang L., Yang Y., Soh C.K. Toward Broadband Vibration-based Energy Harvesting // J. Intell. Mater. Syst. Struct. 2010. Vol. 21.
10. Twiefel J., Westermann H. Survey on broadband techniques for vibration energy harvesting // J. Intell. Mater. Syst. Struct. 2013. Vol. 24, № 11.
11. Roundy S., Zhang Y. Toward self-tuning adaptive vibration based micro-generators // Proceedings of SPIE. 2005. Vol. 5649.
12. Исмагилов Ф.Р., Хайруллин И.Х., Саттаров Р.Р., Риянов Л.Н. Генератор Пат. РФ №2402142, Бюл. № 29.
13. Moehlis J. et al. Exploiting nonlinearity to provide broadband energy harvesting // Proc. ASME Dyn. Syst. Control Conf. 2009. Vol. 12.
14. Soliman M.S.M. et al. A wideband vibration-based energy harvester // J. Micromechanics Microengineering. 2008. Vol. 18.
15. Moss S., Powlesland I. Vibro-impacting power harvester // SPIE Smart 2010. Vol. 7643.
16. Moss S. et al. A broadband vibro-impacting power harvester with symmetrical piezoelectric bimorph-stops // Smart Mater. Struct. 2011. Vol. 20, № 4. P. 045013.
17. Vandewater L.A., Moss S.D. Probability-of-Existence of High Energy-States for a Vibro-Impacting Vibration Energy Harvester // Smart Mater. Struct. 2013. Vol. 22, № 9.
18. Быховский И.И. Основы теории вибрационной техники. М.: Машиностроение, 1968.
19. Бабицкий В.И. Теория виброударных систем. Москва: Наука, 1978.
20. Ramlan R. et al. Potential benefits of a non-linear stiffness in an energy harvesting device // Nonlinear Dyn. 2009.
21. Mitcheson P.D. et al. Architectures for vibration-driven micropower generators // Microelectromechanical Syst. J. 2004. Vol. 13, № 3.
22. Mitcheson P.D. et al. Energy harvesting from human and machine motion for wireless electronic devices // Proc.IEEE. 2008. Vol. 96, № 9.
23. Драгунов В.П., Остертак Д.И. Предельные характеристики микроэлектромеханических преобразователей энергии // Научный вестник НГТУ. 2009. Vol. 1, № 34.
24. Mitcheson P.D. et al. Human and Machine Motion for Wireless Electronic Devices // Proc. IEEE. 2008. Vol. 96, № 9.
25. Leistriz B., Toepfer H. Nonlinear vibration energy generators with mechanical stops for low-frequency broadband applications // J. Phys. Conf. Ser. 2013. Vol. 476.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ НА ДИНАМИКУ ДВУХМАССОВОЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ПЛАНИРУЕМОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Статников И.Н.¹, Фирсов Г.И.²

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

¹ instatn@gmail.com, ² firsovgi@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрены результаты проведенных вычислительных экспериментов по исследованию поведения двухмассовой виброударной системы в широком диапазоне изменения значений всех параметров системы как в исходной области варьирования параметров системы, так и в выделенной области концентрации наилучших решений по всем критериям качества.

В работах [1,2] описаны краткие результаты расчетов динамического поведения двухмассовой виброударной системы, моделирующей колебания i -го сечения теплообменной трубы [3],

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i + p_{ix}(\dot{x}, \dot{y}) + q_{ix}(x, y) &= F_{ix}(t), \\ m_i \ddot{y}_i + p_{iy}(\dot{x}, \dot{y}) + q_{iy}(x, y) &= F_{iy}(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь m_i - масса, приведенная к рассматриваемому i -му сечению; $p_{ix}(\dot{x}, \dot{y}), p_{iy}(\dot{x}, \dot{y})$ - проекции на оси x и y сил сопротивления движению, которые предполагаются зависящими как от скоростей в i -м сечении, так и от скоростей относительного перемещения сечения; $q_{ix}(x, y), q_{iy}(x, y)$ - проекции упругой силы, зависящие от величин абсолютного смещения i -го и относительного смещения обоих сечений из положения статического равновесия, отвечающего недеформированному состоянию упругой системы; $F_{ix}(t), F_{iy}(t)$ - внешние силы, возбуждающие колебания, которые задаются в виде явных функций времени.

В предположении линейности диссипативных и упругих сил в (1) запишем систему уравнений на интервалах движения в зазоре в следующем виде

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) &= P_{1x} \sin \omega t, \\ m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 + c_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_2 (y_1 - y_2) &= P_{1y} \sin 2\omega t, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{x}_1 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + c_3 \dot{x}_2 + k_3 x_2 &= P_{2x} \sin \omega t, \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2 (y_2 - y_1) + c_3 \dot{y}_2 + k_3 y_2 &= P_{2y} \sin 2\omega t. \end{aligned} \quad (3)$$

Удвоенная частота возбуждающей силы, действующей по оси y , соответствует вихревому характеру возбуждения колебаний трубы потоком жидкости [4]. Система уравнений (2), (3) может использоваться только при движении обеих масс без контакта с ограничителем. В рассматриваемой модели предполагается, что каждая из масс совершает плоское поступательное движение, причем и массы, и ограничители имеют круглую форму. Соответствующие геометрические характеристики масс и ограничителей обозначим так: r_{i1} - радиус i -й массы; r_{i2} - радиус ограничителя; $\Delta_i = r_{i2} - r_{i1}$ - максимальное относительное перемещение центра i -й массы в зазоре; e_{ix}, e_{iy} - координаты центра для i -го ограничителя (эксцентриситеты). При недеформированном состоянии упругой системы координаты центров обеих масс равны нулю, $x_i = y_i = 0$, что вытекает из системы уравнений (2), (3), другими словами, начало системы координат совпадает с недеформированным положением системы.

Принятые допущения и условия соударения масс приведены в работе [1]. Основные положения по формированию системы уравнений и алгоритмам расчета динамики рассматриваемой системы приведены в работе [5]. К анализируемым динамическим характеристикам относятся следующие: A_i - полное число ударов i -й массы; $\Sigma |u_{i-}|$, $\Sigma |v_{i-}|$ - накопленные тангенциальная и нормальная составляющие скорости удара i -й массы; τ_i , $\Sigma |s_i|$ - полная длительность режима скольжения и полный путь скольжения i -й массы; $\int \Phi_{in} dt$ - полный импульс силы нормального давления при скольжении i -й массы. После завершения процесса моделирования полученные накопленные значения динамических характеристик нормируются. Величины A_i делятся на число периодов интегрирования, так что нормированные значения определяют среднее число ударов на период возбуждающей силы, если эта величина равна нулю, то имеет место безударный режим чистого скольжения. Остальные характеристики нормируются длительностью интервала реализации, определяя среднее значение соответствующего критерия в единицу времени. Помимо перечисленных выше в отдельных вычислительных экспериментах (ВЭ) определялись и характеристики «комплексного» характера, относящиеся к ударным взаимодействиям и к режиму скольжения. Такими характеристиками являются, соответственно, средняя полная скорость удара $\sqrt{(u_{i-})^2 + (v_{i-})^2}$ и среднее значение работы сил трения скольжения $\int f \Phi_{in} ds_i$, где f - коэффициент ударного трения, определяющий уменьшение тангенциальной составляющей скорости удара вследствие мгновенного проскальзывания соударяющихся тел. В качестве варьируемых параметров были выбраны следующие: значения радиусов зазоров Δ_1 и Δ_2 , ограничивающих перемещение масс; значения составляющих e_{ix} , e_{iy} , эксцентриситетов, определяющих положение центров ограничителей относительно равновесного положения упругой системы; амплитуды P_{ix} , P_{iy} возбуждающих сил и частота возбуждения ω .

Введем вектор $\vec{\alpha}$ варьируемых параметров, используя следующие обозначения: $\alpha_1 = \Delta_1$, $\alpha_2 = \Delta_2$, $\alpha_3 = e_{1x}$, $\alpha_4 = e_{1y}$, $\alpha_5 = e_{2x}$, $\alpha_6 = e_{2y}$, $\alpha_7 = \ln (P_{1y}/P_{1x})$, $\alpha_8 = \ln (P_{2y}/P_{2x})$, $\alpha_9 = \omega$. Представление отношений амплитуд возбуждающих сил в форме экспоненциальной функции от соответствующих параметров α_7 и α_8 , равномерно распределенных в анализируемой области пространства параметров, позволяет эффективно проводить вычислительные эксперименты в достаточно широкой зоне изменения отношений P_{iy}/P_{ix} , охватывающей точку равенства амплитуд $P_{ix} = P_{iy}$ ($\alpha_j = 1$).

Приведем обозначения динамических критериев:

- $\Phi_1(\vec{\alpha})$, $\Phi_4(\vec{\alpha})$ - среднее значение числа ударов первой и второй масс в установившемся режиме за один период возбуждающей силы;
- $\Phi_2(\vec{\alpha})$, $\Phi_5(\vec{\alpha})$ - среднее значение накопленной нормальной составляющей ударной скорости первой и второй масс в единицу времени;
- $\Phi_3(\vec{\alpha})$, $\Phi_6(\vec{\alpha})$ - среднее значение накопленной тангенциальной составляющей ударной скорости первой и второй масс в единицу времени;
- $\Phi_7(\vec{\alpha})$ - средняя доля времени, когда первая масса двигалась в контакте с ограничителем (режим скольжения);
- $\Phi_8(\vec{\alpha})$ - среднее значение скорости скольжения по ограничителю для первой массы;
- $\Phi_9(\vec{\alpha})$ - среднее значение силы нормального давления первой массы на ограничитель

(для критериев Φ_8 и Φ_9 в качестве нормирующего множителя при усреднении выбирается длительность интервала скольжения). Аналогичные критерии с индексами от Φ_{10} до Φ_{12} вычисляются для движения массы m_2 в режиме скольжения по ограничителю.

В работах [1,2] анализ динамических свойств двухмассовой системы проводился путем построения сечений для области

$$\begin{cases} \alpha_1 \in (0,05;0,85); & \alpha_4 \in (0,05;0,85); & \alpha_7 \in (-1,7;1,7); \\ \alpha_2 \in (0,05;0,85); & \alpha_5 \in (0,05;0,85); & \alpha_8 \in (-1,7;1,7); \\ \alpha_3 \in (0,05;0,85); & \alpha_6 \in (0,05;0,85); & \alpha_9 \in (0,7;2,4). \end{cases} \quad (4)$$

пространства параметров по частоте ω при фиксированных значениях всех параметров, за исключением величин зазоров Δ_1, Δ_2 . Очевидно, что проводить аналогичное исследование для каждого из параметров рассматриваемой системы не представляется возможным в силу высокой размерности пространства параметров. Поэтому дальнейшее исследование с учетом найденных в [1,2] качественных закономерностей целесообразно проводить методом планируемого вычислительного эксперимента, основные принципы которого изложены в работах [6-8]. Каждый из проведенных ВЭ включал формирование плана-матрицы варьируемых параметров динамической системы, k -я строка которой представлялась используемым вектором параметров $\bar{\alpha}_k$, а число строк (т.е. число ВЭ) обозначалось через N_0 . По результатам моделирования каждому вектору $\bar{\alpha}_k$ параметров системы ставится в соответствие вектор $\bar{\Phi}_k$ значений критериев. Полученная матрица критериев дает возможность, несмотря на высокую размерность пространства варьируемых параметров, проводить одномерный анализ по всем парам «критерий – варьируемый параметр», при этом безусловно надо все время иметь ввиду, что мы оперируем усредненными величинами.

В работе [9] в табл. 1 приведены условия проведения 10 серий ВЭ и указаны их основные характеристики, к которым относятся: N_0 - число векторов $\bar{\alpha}_k$ (пробных точек) для данного ВЭ; J - число независимо варьируемых параметров в каждом векторе $\bar{\alpha}_k$; M - число векторов $\bar{\alpha}_k$, входящих в каждую серию эксперимента; T - число серий ВЭ ($N_0 = T \times M$); $G(\alpha)$ - область изменения параметров модели. Кроме того указано, когда отдельные пары параметров модели α_i, α_j , входящие в $\bar{\alpha}$, выбирались совпадающими.

Таблица 1. Условия проведения второй серии экспериментов

1.	Эксперимент II $N_0 = 256$	Задана область исследования (4), но во всех ВЭ $\Delta_1 \neq \Delta_2$, в $P_{1y} = P_{2y}$
2.	Эксперимент IIa $N_0 = 64$	По результатам предыдущих экспериментов выделена область концентрации $G_2(\bar{\alpha})$ наилучших решений по всем критериям качества: $\Delta_1 \neq \Delta_2$; $P_{1y} = P_{2y}$
3.	Эксперимент IIб $N_0 = 64$	В выделенной области $G_2(\bar{\alpha})$ оставили исходные диапазоны варьирования амплитуд и частоты возбуждения: $\Delta_1 \neq \Delta_2$; $P_{1y} = P_{2y}$
4.	Эксперимент IIв $N_0 = 64$	В исходной области (4) оставили без изменения диапазон варьирования амплитуды возбуждения, а диапазон частоты возбуждения выбран между двумя собственными частотами системы: $\Delta_1 \neq \Delta_2$; $P_{1y} = P_{2y}$
5.	Эксперимент IIг $N_0 = 128$	Задана область исследования (4) и варьировались все параметры, т.е.: $\Delta_1 \neq \Delta_2$ и $P_{1y} \neq P_{2y}$

Целесообразность представления матрицы планируемого ВЭ в виде последовательности из T отдельных серий, каждая из которых включает по M векторов параметров, обусловлена тем обстоятельством, что число M экспериментов в серии совпадает с числом уровней изменения для каждого из параметров, причем для применяемого метода ПЛП-поиска каждый из параметров α_j «пробегает» в каждой из серий по всем

заданным уровням. Таким образом, в каждой из серий получаем по одному уровню для каждого из параметров α_j , так что для $N_0 = T \times M$ точек моделирования имеем T выборок по M значений на каждом из уровней параметра α_j .

В работе [10] представлены результаты первых пяти серий экспериментов, на основании которых были выявлены соответствующие границы диапазонов варьирования параметров модели. В табл. 1 указаны условия проведения второй пятерки ВЭ. Результаты статистической обработки ВЭ представляются в виде соответствующих таблиц, где отражены сводные статистические характеристики результатов каждого из ВЭ: средние значения $\bar{\Phi}_{k0}$ критериев $\Phi_k(\bar{\alpha})$ по всей совокупности N_0 ВЭ, их среднеквадратические отклонения от $\bar{\Phi}_{k0}$, изменчивость выборки, максимальное и минимальное значения $\Phi_k(\bar{\alpha})$.

Ниже подробно рассмотрены результаты проведенных вычислительных экспериментов как в исходной области варьирования параметров системы $G(\bar{\alpha})$, так и в найденной области $G_1(\bar{\alpha})$ концентрации наилучших решений по всем критериям качества.

Эксперимент II.

МПЭ в этом эксперименте имела следующие параметры: $N_0 = 256$, $T = 16$ и $M_j = 16$. Число варьируемых параметров $J = 8$, т.е. варьировался и параметр α_2 . Область исследования была такая же, как и в (4), а сам параметр α_2 , как и α_1 , варьировался в области $[0,05; 0,85]$. Сводные статистические характеристики по результатам ВЭ представлены в табл. 2. Сравнивая данные табл. 2 и табл. 1 из [9], отметим, что значения практически всех характеристик из табл. 2 лучше, чем у соответствующих характеристик из табл. 1 [10]. Кроме того, в табл. 2 по сравнению с данными табл. 1 [10] наблюдается существенно меньшая вариативность выборочных данных характеристик ударного режима. Включение второго зазора в качестве варьируемого параметра привело к тому, что наблюдается практически существенное влияние всех параметров на все критерии, чего не было в эксперименте I. А высокая степень достоверности результатов дисперсионного анализа подтверждается, как и в предыдущих случаях [10], характером зависимостей $\bar{\Phi}_{kij}$, аналогичным приведенным на рис. 1 [10]. Результаты дисперсионного анализа и характер всех зависимостей $\bar{\Phi}_{kij}$ позволили выделить области концентраций наилучших решений по каждому критерию и наметить область проведения контрольных ВЭ

$$\begin{cases} \alpha_1 \in [0,375; 0,850]; & \alpha_4 \in [0,125; 0,475]; & \alpha_7 \in [-1,7; 0,319]; \\ \alpha_2 \in [0,375; 0,575]; & \alpha_5 \in [0,050; 0,850]; & \alpha_8 \in [-1,7; 0,319]; \\ \alpha_3 \in [0,050; 0,850]; & \alpha_6 \in [0,050; 0,850]; & \alpha_9 \in [0,7; 2,4]. \end{cases} \quad (5)$$

Эксперимент IIa.

ВЭ проводились в области (5). МПЭ имела следующие параметры: $N_0 = 64$, $T = 8$ и $M_j = 8$. Сводные статистические характеристики представлены в табл. 3. В таблице 3 наблюдаем заметное улучшение значений исследуемых характеристик по сравнению с данными табл. 2 и, особенно, характеристик режимов скольжения. Дисперсионный анализ практически не выявил влияния зазоров на величины динамических характеристик, заметно лишь влияние эксцентриситетов и параметров источника возбуждения. Высокие результаты в табл. 3, конечно, в немалой степени объясняются сужением диапазонов варьирования по параметрам α_7 и α_9 .

Таблица 2. Сводные статистические характеристики для шестой группы ВЭ

Характеристики	Номер критерия					
	1	2	3	4	5	6
Среднее значение	4,846	0,510	0,905	4,768	0,514	0,849

Характеристики	Номер критерия					
	1	2	3	4	5	6
Среднеквадратическое отклонение	3,251	0,475	0,854	3,038	0,457	0,817
Минимальное значение	0	0	0	0	0	0
Максимальное значение	14,20	3,044	4,331	14,50	2,566	4,829
Вариативность (изменчивость) выборки, %	67,1	93,1	94,4	63,7	89,0	96,2
Характеристики	Номер критерия					
	7	8	9	10	11	12
Среднее значение	0,222	0,511	0,880	0,247	0,607	0,892
Среднеквадратическое отклонение	0,340	0,696	1,137	0,348	0,847	1,342
Минимальное значение	0	0	0	0	0	0
Максимальное значение	1,000	2,665	5,058	1,001	3,446	4,487
Вариативность (изменчивость) выборки, %	153	136	129	141	139	151

Таблица 3. Сводные статистические характеристики для седьмой группы ВЭ

Характеристики	Номер критерия					
	1	2	3	4	5	6
Среднее значение	3,645	0,409	0,507	4,075	0,367	0,593
Среднеквадратическое отклонение	2,373	0,304	0,242	2,414	0,351	0,189
Минимальное значение	0	0	0	1,6	0,057	0,142
Максимальное значение	12,00	1,092	1,088	10,70	2,597	1,162
Вариативность (изменчивость) выборки, %	65,2	74,4	47,7	59,0	96,0	32,0
Характеристики	Номер критерия					
	7	8	9	10	11	12
Среднее значение	0,138	0,273	0,433	0,039	0,215	0,207
Среднеквадратическое отклонение	0,261	0,445	0,615	0,097	0,485	0,445
Минимальное значение	0	0	0	0	0	0
Максимальное значение	1,000	1,997	2,131	0,413	2,110	2,005
Вариативность (изменчивость) выборки, %	189	163	142	250,5	226	215

Эксперимент IIб.

Эксперименты проводились в области (5), но диапазон варьирования по α_7 и α_9 остались исходными. Параметры МПЭ: $N_0 = 64$, $T = 8$ и $M_j = 8$. Сводные статистические характеристики по итогам ВЭ приведены в табл. 4. Как и следовало ожидать, результаты в табл. 4 несколько хуже, чем в табл. 3, но все же лучше, чем в табл. 2. И в табл. 3 и в табл. 4 наблюдается значительный разброс величин критериев, характеризующих режим скольжения, гораздо больший, чем у соответствующих характеристик из табл. 2. Включение исходных диапазонов варьирования по α_7 и α_9 в область (5) привело к тому, что по результатам дисперсионного анализа лишь сравнительно малое число критериев оказывается зависимым от геометрических параметров ударных пар. С другой стороны,

имеет место существенное влияние на эти характеристики параметров источника возбуждения.

Таблица 4. Сводные статистические характеристики для восьмой группы ВЭ

Характеристики	Номер критерия					
	1	2	3	4	5	6
Среднее значение	4,363	0,489	1,140	4,950	0,471	1,137
Среднеквадратическое отклонение	2,555	0,380	1,095	3,081	0,314	0,871
Минимальное значение	0	0	0	1,4	0,063	0,139
Максимальное значение	12,7	2,285	5,007	19,0	1,297	3,256
Вариативность (изменчивость) выборки, %	58,6	78	96	62,2	66,7	76,6
Характеристики	Номер критерия					
	7	8	9	10	11	12
Среднее значение	0,105	0,224	0,441	0,040	0,345	0,457
Среднеквадратическое отклонение	0,236	0,422	0,753	0,106	0,649	0,936
Минимальное значение	0	0	0	0	0	0
Максимальное значение	1	1,634	3,371	0,667	2,704	4,915
Вариативность (изменчивость) выборки, %	225	188	171	265	188	205

Таблица 5. Сводные статистические характеристики для девятой группы ВЭ

Характеристики	Номер критерия						
	1	2	3	4	5	6	7
Среднее значение	4,414	0,452	1,070	4,698	0,515	0,921	0,188
Среднеквадратическое отклонение	2,602	0,456	0,956	3,758	0,453	0,852	0,346
Минимальное значение	0	0	0	0	0	0	0
Максимальное значение	11	2,980	3,821	15	2,489	3,523	1
Вариативность (изменчивость) выборки, %	59	101	89,3	80	88	92,5	184
Характеристики	Номер критерия						
	8	9	10	11	12	13	14
Среднее значение	0,434	0,517	0,232	0,623	0,780	0,301	0,484
Среднеквадратическое отклонение	0,775	0,796	0,365	0,806	1,030	0,651	0,978
Минимальное значение	0	0	0	0	0	0	0
Максимальное значение	4,355	3,437	1	2,511	4,316	3,670	5,484
Вариативность (изменчивость) выборки, %	181	154	157	129	132	216	202

Таблица 6. Сводные статистические характеристики для десятой группы ВЭ

Характеристики	Номер критерия							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Среднее значение	5,234	0,499	0,988	5,042	0,521	0,973	0,186	0,600
Среднеквадратическое отклонение	3,364	0,445	0,928	3,026	0,390	0,955	0,305	0,753
Минимальное значение	0	0	0	0	0	0	0	0
Максимальное значение	14,8	2,074	4,078	15,1	2,681	4,148	1	2,852
Вариативность (изменчивость) выборки, %	64,3	89,1	93,0	60,0	75,0	98,0	164	126
Характеристики	Номер критерия							
	9	10	11	12	13	14	15	16
Среднее значение	0,797	0,222	0,620	0,776	1,232	1,224	0,223	0,210
Среднеквадратическое отклонение	0,995	0,321	0,774	0,863	0,978	0,976	0,546	0,417
Минимальное значение	0	0	0	0	0	0	0	0
Максимальное значение	4,239	1	2,661	3,418	4,115	4,164	4,795	2,484
Вариативность (изменчивость) выборки, %	125	145	125	111	79,4	80	245	198

Эксперимент Пв.

Представлялось интересным провести ВЭ в исходной области (4), варьируя все 9 параметров, но частоту возбуждения α_9 выбрать между собственными частотами упругой системы $\square_1 = 1$ и $\square_2 = 2,24$. Поэтому диапазон варьирования по α_9 был выбран на интервале частот (1,2; 2). МПЭ имела следующие параметры: $N_0 = 64$, $T = 8$ и $M_j = 8$. Сводные статистические характеристики результатов ВЭ приведены в табл. 5. Статистические характеристики в табл. 5 занимают некоторое промежуточное положение между результатами ранее рассмотренных ВЭ для случая $\alpha_1 \neq \alpha_2$, но, во всяком случае, хуже, чем в табл. 3. Результаты дисперсионного анализа показывают, что параметр α_9 не оказывает в среднем существенного влияния ни на один критерий качества движения масс. Слабо и влияние параметра α_7 , но зато существенным стало влияние геометрических параметров ударных пар. Дисперсионный анализ показал, как симметрично делится влияние зазоров на характеристики скольжения, особенно, на средние величины работы сил трения скольжения для обеих масс.

Эксперимент Пг.

В этой группе ВЭ варьировалось 9 параметров (в каждом эксперименте $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и $\alpha_7 \neq \alpha_8$). Параметры МПЭ: $N_0 = 128$, $J = 9$, $M_j = 8$ и $T = 16$. Анализировались те же самые характеристики, что и в предыдущем эксперименте. В этом эксперименте были введены дополнительные статистические характеристики движения масс: $\Phi_{13}(\bar{\alpha})$ - средняя накопленная величина модуля ударной скорости первой массы в единицу времени; $\Phi_{14}(\bar{\alpha})$ - средняя накопленная величина ударной скорости второй массы $\Phi_{15}(\bar{\alpha})$ и $\Phi_{16}(\bar{\alpha})$ - средняя величина работы силы трения при скольжении первой и второй массы по ограничителю, соответственно.

Сводные статистические характеристики представлены в табл. 6. Сопоставление данных табл. 5 [10] и табл. 6 не выявляет особых отличий режимов по усредненным значениям характеристик движения масс. Данные дисперсионного анализа подтверждают симметричный характер влияния в среднем зазоров на характеристики движения: α_1 на $\Phi_{13}(\bar{\alpha})$ и $\Phi_{15}(\bar{\alpha})$ и α_2 на $\Phi_{14}(\bar{\alpha})$ и $\Phi_{16}(\bar{\alpha})$. Результаты корреляционного анализа очевидным образом подчеркивают тесную корреляционную связь между $\Phi_2(\bar{\alpha})$, $\Phi_3(\bar{\alpha})$ и $\Phi_{13}(\bar{\alpha})$ и между $\Phi_5(\bar{\alpha})$, $\Phi_6(\bar{\alpha})$ и $\Phi_{14}(\bar{\alpha})$ для двух ударных пар ($|r_{2,13}| = 0,57$, $|r_{3,13}| = 0,952$ и соответственно $t_{2,12}^3 = 8,547$ и $t_{3,13}^3 = 115$ - для первой ударной пары и $|r_{5,14}| = 0,504$, $|r_{6,14}| = 0,956$ и соответственно $t_{5,14}^3 = 7,644$ и $t_{6,14}^3 = 125$ - для второй ударной пары).

Литература

1. Статников И.Н., Фирсов Г.И. Исследование виброударных систем методом ПЛП-поиска // Вестник научно-технического развития. – 2007. - № 2. - С.56-64.
2. Статников И.Н., Фирсов Г.И. Анализ особенностей динамики двухмассовой виброударной системы в переходном и установившемся режимах // Вестник научно-технического развития. – 2009. - № 10(26). - С.33-41.
3. Фельдман М.С., Фирсов Г.И. Экспериментальные исследования динамики конструкций // Динамика конструкций гидроаэроупругих систем / Фролов К.В., Махутов Н.А., и др. - М.: Наука, 2002. - С. 313 - 355.
4. Жукаускас А.А., Улинскас Р.В., Катинас В.И. Гидродинамика и вибрации обтекаемых пучков труб. - Вильнюс: Мокслас, 1984. - 312 с.
5. Кобринский А.А., Кобринский А.Е. Двумерные виброударные системы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 336 с.
6. Статников И.Н., Фирсов Г.И. Эвристические возможности ПЛП-поиска при проектировании динамических систем // Обзорение прикладной и промышленной математики. - 2008. - Т.15, вып. 3. - С.930-931.
7. Статников И.Н., Фирсов Г.И. О некоторых возможностях ПЛП-поиска в решении задач моделирования и исследования динамических систем машин // Южно-Сибирский научный вестник. – 2012. - № 1. - С.92-96.
8. Статников И.Н., Фирсов Г.И. Решение задач проектирования динамических систем интеллектуальным методом ПЛП-поиска // Вестник Московского финансово-юридического университета. - 2012. - № 1. - С.28-33.
9. Статников И.Н., Фирсов Г.И. О планировании вычислительных экспериментов в задачах динамики двухмассовой виброударной системы // Вестник научно-технического развития. – 2012. - № 6(58). - С.27-33.
10. Статников И.Н., Фирсов Г.И. Вопросы статистического оценивания влияния параметров на динамику двухмассовой виброударной системы в переходном и установившемся режимах // Вестник научно-технического развития. – 2012. - № 11(63). - С.38-47.

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ РАЗРАБОТКЕ КОМПЕНСАЦИОННЫХ ПАТРУБКОВ С ТРМЭ

Тихонов В.А.¹, Чистяков А.Г.¹

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

¹ vla-tikhonov@ya.ru, ² chis55@ya.ru

Аннотация. В докладе показывается применение метода расчета тонкослойных резинометаллических элементов – ТРМЭ, как упругих виброизолирующих элементов в компенсационных патрубках, предложенного в докладе предыдущей конференции [1] – модифицированного метода решения краевой задачи из пакета MathCad. Метод реализован в задачах оценки критической нагрузки сжатия при потере поперечной устойчивости слоистого элемента.

В угловых и прямооточных патрубках трубопроводов высокого давления упругие цилиндрические и кольцевые ТРМЭ находятся в условиях предварительного и эксплуатационного сжатия. Потеря поперечной устойчивости элемента проявляется в нарастании первично малого сдвига срединных слоев – выпучивания – при увеличении сжимающей нагрузки на фланцы. Этот эффект связан как с в внецентренным приложением нагрузки на каждый из слоев, так и с начальными технологическими неправильностями – косослоем, с неоднородностью механических параметров резины в слое и т.д.. Здесь напрашивается аналог сжатия упругого стержня с начальной погибью. Таков механизм деформации. Далее аналогия не проходит ввиду существенного различия в соотношении изгибной и сдвиговой деформации участка стержня и слоя ТРМЭ. Для точного решения задачи необходимо решение 3-х мерной задачи теории упругости сжатия сдвинутого резинового слоя и его взаимодействия с другими слоями в ансамбле пакета.

Предлагается методика численного анализа имеющихся решений плоских задач сжатия-изгиба из решения дифференциального уравнения с переменными границами и использованием энергетических оценок потери устойчивости для получения зависимости нагрузка – сдвиговое перемещение и изучения влияния на нее косослоя.

Задача определения критической нагрузки сжатия многослойного пакета сводится к расчету напряженного состояния при сжатии, изгибе и сдвиге в кольцевом резиновом слое и приводится к краевой задаче Гельмгольца. Задачи проектирования патрубка и расчета элементов рассмотрены в работе [2].

Гидростатическое давление в слое σ , через которое выражаются все компоненты тензоров деформации и напряжения находятся из краевой задачи:

$$\begin{aligned}\Delta_r \sigma - k^2 \sigma &= q; \\ \sigma(R_i) &= \sigma(R_e) = 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где использованы расчетная схема и обозначения доклада [1]:

$$\begin{aligned}k_{сж}^2 &= \frac{12G/K}{h_r^2}; \quad q = k_{сж}^2 \varepsilon_{z0} K; \varepsilon_{z0} = \Delta_{z0} / h_r, \\ \sigma &= s(r) \cos(\varphi); \quad k_{изг}^2 = \frac{12G/K}{h_r^2} + \frac{1}{r^2}; q = k_{сж}^2 \varepsilon_{\psi 0} K \cos(\varphi); \varepsilon_{\psi 0} = r_{\psi 0} \psi_0 / h_r.\end{aligned}$$

Для решения геометрически и физически нелинейных задачи предлагается использовать электронные средства пакета MathCad, в котором предусмотрено

численное решение дифференциальных уравнений. Краевая задача приводится к задаче Коши. Дифференциальное уравнение второго порядка приводится к системе уравнений первого порядка и строится вектор-функция y :

$y = \{y_0, y_1, y_2\}$, компоненты которой определяются так:

$$y_0 = \sigma, \quad y_1 = \frac{d\sigma}{d\rho}, \quad y_2 = \frac{d^2\sigma}{d\rho^2} = \frac{12\alpha}{\zeta^2}(y_0 - \sigma_s) - \frac{1}{\rho}y_1, \quad \sigma_s = K \frac{\Delta_z}{h_r}, \quad - \text{сжатие};$$

$$y_0 = s, \quad y_1 = \frac{ds}{d\rho}, \quad y_2 = \frac{12\alpha}{\zeta^2}(y_0 + \rho\sigma_b) + \frac{1}{\rho^2}y_0 - \frac{1}{\rho}y_1, \quad \sigma_b = K \frac{\psi_0}{\zeta}, \quad - \text{изгиб}.$$

Относительно символьной вектор-функции $D(\rho, y) = \{y_1, y_2\}$ решается краевая задача, которая с помощью функций: $v_0 := 1$ $\text{load}(x1, v) := \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix}$ $\text{score}(x2, y) := y_0 - 0$ $d\sigma := \text{sbval}(v, \rho, 1, D, \text{load}, \text{score})$ приводится к решению задачи Коши методом Рунге-Кутты [1].

При проектировании кольцевого элемента решаются нелинейные задачи с косослоем (рассмотрена ранее) и поперечной устойчивостью слоистого пакета.

Из предлагаемых трех способов анализа эффектов потери устойчивости в работе [3] деформируемых систем статическим, энергетическим и динамическим методами выберем энергетический. Статические решения дают весьма завышенные и, тем самым, неверные оценки. Энергию пакета как системы блочной структуры будем оценивать по интегральным характеристикам отдельных слоев: жесткости (податливости) сжатия, сдвига и изгиба блока – резиновый слой с тарелками (фланцем) по торцам. Расчетная схема элемента показана на рис.1.

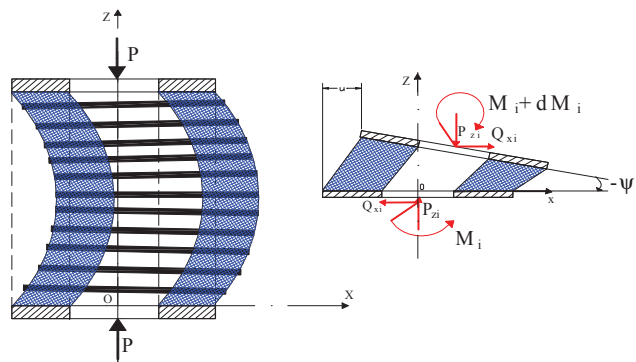


Рис.1.

Вариацию полной энергии получим, исходя из предварительно сжатого пакета по вариации смещения сдвига как возмущения несдвинутого центрально сжатого состояния пакета:

$$\mathcal{E} = W - U; \quad W = P \cdot w_\gamma; \quad U = U_z + U_x + U_\psi,$$

где $\mathcal{E}$ – полная энергия возмущенного состояния (без учета энергии предварительного сжатия), W – потенциал внешних сил, определяемый по силе сжатия на дополнительном смещении вдоль оси Oz – вариации δw_γ при вариации δf или $\delta \gamma$, возникающей при сдвиговой деформации пакета γ :

$$\gamma = \frac{f}{H_r}, \quad H_r = n_r h_r, \quad (2)$$

где f – стрела сдвига – максимальное абсолютное смещение сдвига вдоль оси Ox одного из слоев пакета в зависимости от сдвиговой формы смещений, n_r, h_r – число и толщина резиновых слоев, определяющие суммарную их толщину H_r ; потенциальная энергия деформации резины, равная работе внутренних сил на смещениях от сдвиговой деформации, взятой со знаком «–», складывается соответственно из энергии U_z, U_x, U_ψ – сжатия, сдвига и изгиба относительно осей z, x , и y (угол ψ):

$$U_z = \frac{1}{2} \sum_i C_z^{(i)} \cdot w_{\gamma,i}^2; \quad U_x = \frac{1}{2} \sum_i C_x^{(i)} \cdot \Delta u_i^2; \quad U_\psi = \frac{1}{2} \sum_i C_\psi^{(i)} \cdot \psi_i^2. \quad (3)$$

Здесь соответственно смещения отдельного i -того слоя относительно указанных осей $w_{\gamma,i}(f), \Delta u_i(f), \psi_i(f)$, $i = 1, \dots, n_r$ – выражаются в итоге как функции стрелы сдвига f , а жесткости $C^{(i)}$ – жесткости каждого слоя, в общем случае могут не быть постоянными.

Рассмотрим составляющие потенциальной энергии в виде (3) отдельно. Используем соотношения:

$$P = C_z^{(i)} w_{\gamma,i}, \quad P = C_z w_\gamma, w_\gamma = \sum_i w_{\gamma,i}, \Delta M_\psi^{(i)} = C_\psi^{(i)} \psi_i.$$

Тогда энергетические оценки примут вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_z = W - U_z &= \frac{1}{2} P \cdot w_\gamma = \frac{1}{2} \frac{P^2}{C_z}, \quad \frac{1}{C_z} = \frac{1}{C_{z,0}} \cdot W(f), \quad W(f) = \sum_i \frac{1}{C_z^{(i)}}; \\ \mathcal{E} = \mathcal{E}_z - U_x - U_\psi &= \frac{1}{2} \frac{P^2}{C_{z,0}} \cdot W(f) - \frac{1}{2} C_x^{(i)} \sum_i \Delta u_i(f)^2 - \frac{1}{2 C_\psi^{(i)}} \sum_i \Delta M_i(f)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Из вариационного принципа возможных перемещений имеем:

$$\delta \mathcal{E} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial f} \delta f = 0,$$

при независимых вариациях стрелы сдвига $\delta f = H_r \delta \gamma$ зависимость $P(f)$

$$P = (C_{z,0} \cdot C_x^{(i)} \frac{H_r^2 \sum_i \Delta \tilde{u}_i \cdot \partial \Delta \tilde{u}_i / \partial \gamma + \sum_i \Delta \tilde{M}_i \cdot \partial \Delta \tilde{M}_i / \partial \gamma}{\partial \tilde{W} / \partial \gamma})^{1/2} \quad (5)$$

сводится к определению функций $W(f), \Delta u_i(f)$ и $\Delta M_i(f)$ и их производных – от функций, приведенных к безразмерному виду (знак « $\sim$ »), по γ – безразмерному параметру сдвига с учетом соотношения (2) в виде $f = \gamma H_r$, знак Δ определяет приращение величин на высоте резинового слоя, т.е. обозначает относительные смещения тарелок при сдвиге и действующие моменты на них для каждого i -того слоя, в соотношениях (4) предположено, что жесткости сдвига $C_x^{(i)}, C_\psi^{(i)}$ у каждого слоя одинаковы. Выражение (5) для слоистых структур подобно получаемому в [3] интегральному соотношению при приведении задачи к численным вариационным

методам оценки, к примеру, силы сжатия изогнутого стержня по задаваемым формам, в данном случае – силы сжатия вдоль оси Oz по формам сдвига Δu_i вдоль оси Ox .

Таким образом, основной в данном случае является решение задачи об определении дополнительной осадки при сдвиге сжатого резинового слоя и сопутствующих характеристик. Действительно, в любой задаче об устойчивости приходится определять связь нагрузки одного направления и ортогональных ему смещений.

Алгоритм нахождения критической нагрузки сжатия будет следующим:

- определение координат новой границы сдвинутой тарели слоя;
- решение дифференциального уравнения для слоя с новой границей при вариации угловой координаты;
- расчет распределения напряжений и по нему интегральных характеристик слоя;
- нахождение аппроксимирующих функций и зависимостей жесткости пакета и моментов от стрелы сдвига;
- определение зависимости критической нагрузки от стрелы сдвига по задаваемой форме сдвига и выбор минимальной нагрузки по кривым распределения.

Возмущенное состояние сдвига определяем относительно предварительного поджатия, энергетический вклад которого в вариации функционала не учитываем. Энергетический вклад дает дополнительная осадка к первоначально возникшей, т.е. взаимное смещение торцевых фланцев элемента при введении сдвига на каждом из слоев. Форма распределения относительных сдвигов в каждом слое будет обсуждена ниже.

При сдвиге слоя происходит перераспределение напряженного состояния в соответствии с изменением граничных условий исходной краевой задачи сжатия. Это изменение учтем методом «теневого покрытия» соседних тарелей резинового слоя: снятие напряжений гидростатического сжатия, т.е. нулевые граничные условия задачи Гельмгольца в уравнении (1), задаются на новой границе, соответствующей проекции сдвинутого края тарели, ближайшего к центру, на соседнюю тарель – см. заштрихованную область на рис.3

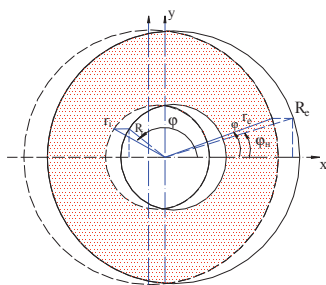


Рис.2.

При переходе к следующему слою учитывается проекция фланца самого крайнего слоя. Тем самым решается краевая задача с изменяемыми от слоя к слою в соответствии со сдвигом граничными условиями. В действительности, краевой эффект будет иметь более сложную пространственную структуру, уточнить которую можно решением 3-х мерной задачи, а не сведенной, как в данном алгоритме – интегрированием по высоте слоя, к плоской задаче.

Новые координаты границы в полярных координатах, учитывая положительное взаимное смещение тарелей на Δu , найдем из систем уравнений:

$$\begin{cases} r_e \sin \varphi = R_e \sin \varphi', \\ r_i \cos \varphi = R_i \cos \varphi' - \Delta u, \end{cases} \quad \begin{cases} r_i \sin \varphi = R_i \sin \varphi', \\ r_e \cos \varphi = R_e \cos \varphi' - \Delta u, \end{cases}$$

где r_e, r_i, φ' – наружный, внутренний радиусы и координатный угол смещенной границы, решением которых будет

$$\begin{aligned} r_e &= R_e \sqrt{1 + \beta_e^2 - 2\beta_e x_e}, \quad x_e = \cos \varphi'_e = \frac{\beta_e}{z} \left[1 + \sqrt{1 - z \left(1 + \frac{1-z}{\beta_e^2} \right)} \right], \quad \beta_e = \Delta u / R_e, \quad z = \operatorname{cosec}^2 \varphi, \\ 0 &\leq \varphi \leq \varphi_{ke}, \quad \varphi_{ke} = \pi / 2 + \beta_e / 2; \\ r_i &= R_i \sqrt{1 + \beta_i^2 - 2\beta_i x_i}, \quad x_i = \cos \varphi'_i = \frac{\beta_i}{z} \left[1 + \sqrt{1 - z \left(1 + \frac{1-z}{\beta_i^2} \right)} \right], \quad \beta_i = \Delta u / R_i, \quad z = \operatorname{cosec}^2 \varphi, \\ \varphi_{ki} &\leq \varphi \leq \pi, \quad \varphi_{ki} = \pi / 2 + \beta_i / 2. \end{aligned}$$

Здесь φ_{ke} и φ_{ki} – угловые координаты точек пересечения измененной и прежней границ по наружному – r_e и внутреннему – r_i радиусам, т.е. точки, в которых при вычислениях производится переход на начальные радиусы:

$$\begin{aligned} \rho_e &= r_e / R_e \text{ при } 0 \leq \varphi \leq \pi / 2 + \varphi_{ke}, \quad \rho_e = 1 \text{ при } \varphi > \pi / 2 + \varphi_{ke}; \\ \rho_i &= r_i / R_e \text{ при } \pi / 2 + \varphi_{ki} \leq \varphi \leq \pi, \quad \rho_i = R_i / R_e \text{ при } \varphi < \pi / 2 + \varphi_{ki}. \end{aligned}$$

Проводится расчет координат «плавающих» границ и «теневого» площади S'_k при сдвиге, к примеру, $\Delta u = \Delta x = 10$ мм. Далее, следуя алгоритму, производится решение основного дифференциального уравнения сжатия (1) с переменными наружными и внутренними границами кольцевой области для слоя с принятыми ранее геометрическими и механическими параметрами. Для каждого фиксированного значения сдвига слоя из интервалов: $\Delta u = 1, 2, \dots, 10; 10, 15, \dots, 45$ мм производится изменение угловой координаты φ в пределах $0 \dots \pi$ с шагом 12.

Для каждой координаты φ определяются вектора (по числу радиальных точек) гидростатического давления в резине – S_j , касательных напряжений $\sigma_{rz} \rightarrow T_j$ и $\sigma_{\varphi\varphi} \rightarrow Q_j$ в точках резины на границе с металлической тарелью, а в каждом векторе – максимальные значения $s(\rho_{cp})$, $[t(\rho_i), t(\rho_e)]$ и $q(\rho_{cp})$. Варьируя таким образом координату, получим поле напряжений – матрицы S, T и Q . В программе предусмотрена возможность учета «косослоя» – ненулевого начального значения взаимного угла поворота тарелей.

Наибольшие давления наблюдаются по срединному радиусу кольца (при увеличении сдвигового смещения они приближаются к наружному радиусу), а наибольшие касательные σ_{rz} по внутреннему и наружному радиусам (причем, различаются по величине: максимальное – на внутренней поверхности), $\sigma_{\varphi\varphi}$ повторяет распределение гидростатического давления. При этом, неравномерность сохраняется и по окружной координате: максимальные величины S и Q при $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$, T – при $\varphi = 0, \pi$.

Напряженное состояние определяется для последующего вычисления интегральных характеристик слоя: внутренних силовых факторов – P_z, P_x, P_y, M_ψ , а также жесткости слоя и податливости пакета в осевом ($0z$) направлении.

Приведенный алгоритм вычислений повторяется для каждого фиксированного смещения сдвига с шагом в интервалах: $\Delta u = 1, 2, \dots, 10; 10, 15, \dots, 45$ мм с целью получения векторов S_{yc} и M_ψ .

В последующих расчетах по векторам жесткости слоев, находящихся в состоянии различных сдвиговых смещений, производится кубическая сплайн-аппроксимация его функцией жесткости слоя от сдвига на примере линейного распределения сдвиговых смещений по слоям как основной формы. Задавались различные формы сдвиговых смещений (синусоидальная, квадратичная), но оказалось, что линейная форма дает

минимальное значение критической нагрузки сжатия. Требуется дополнительное исследование моментных эффектов и их влияния на изучаемые процессы.

После расчета векторов M_ψ в пределах сдвига 1,2,...10мм и m_ψ – при 10,15,...45мм строится с использованием кубической сплайн-аппроксимации график изгибающих моментов, возникающих в слое во всем диапазоне сдвиговых смещений :

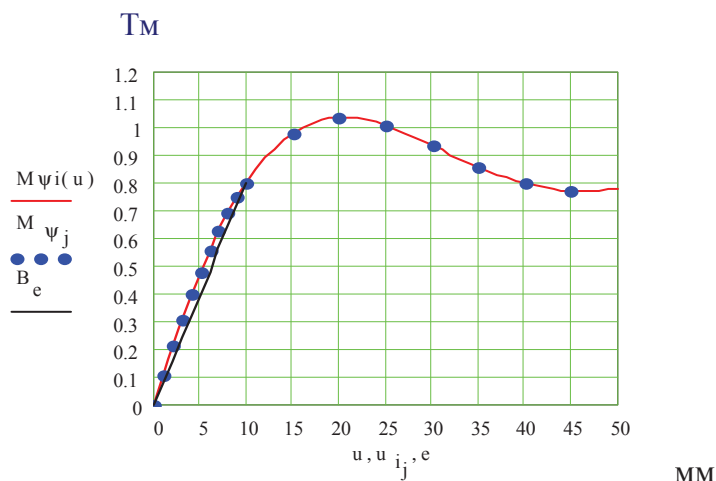


Рис. 3.

Построенный график отражает возможность линейной интерполяции на начальном участке до ~10мм, а в целом, во всем диапазоне смещений сдвига – нелинейность деформирования мягкого типа. По данной зависимости можно условно определить потерю устойчивости на кривой спада: при $\Delta u = \Delta_{ex} > 20$ мм.

Ввиду большой изгибной жесткости слоя: $C_{\psi i} = C_{\psi 0}$ и малого взаимного угла поворота ограничивающих слой тарелей, как показано, следует ожидать малый вклад изгибной деформации в потенциальную энергию слоя и элемента в целом. Для этого производится перерасчет распределения моментов, действующих на граничные тарелки каждого слоя в зависимости от их сдвигового смещения – в данном примере линейно распределенного по высоте элемента, с учетом взаимодействия соседних слоев по формуле: $\Delta M_i = M_i - M_{i-1} - M_{i+1}$. Далее вычислялась изгибная и сдвиговая составляющие потенциальной энергии деформации элемента, а также их производные, и сравнивались по величине. Численная оценка показывает, что вклад изгибной деформации весьма мал по сравнению с энергией деформации сдвига: на два порядка меньше при начальном поджатии 10%, что соответствует реальным нагрузкам, а при 1%, как принято было ранее в расчетах, – на четыре порядка. Поэтому в дальнейших исследованиях этот вклад не учитывается: он дает незначительную прибавку в величине силы сжатия по энергетическим оценкам.

На окончательном этапе расчета воспользуемся формулой (5), подставляя определенные функции податливости $W(f)$ и задаваемые формы сдвига по высоте элемента $u(f)$ для нахождения потенциальной энергии сдвига. Изгибной составляющей ввиду ее малости пренебрежем. Результирующая зависимость $P(f)$ показан на рис.4.

Анализ полученных результатов показывает, что минимального значения осевая сила сжатия достигает при линейном распределении сдвиговой деформации по высоте элемента, принятая в расчетах как основная. Минимальное значение имеет при этом и потенциальная энергия. Далее по уровням силы идут одноволновые синусоидальные и квадратичная формы по нумерации вычислений, наибольшие величины – у полуволновых форм. Таким образом, наиболее простая форма – линейная дает искомые результаты зависимостей. Характер кривых подобен нелинейному деформированию

сжатого стержня с начальной погибью, либо сжимаемому эксцентрично приложенной осевой нагрузкой.

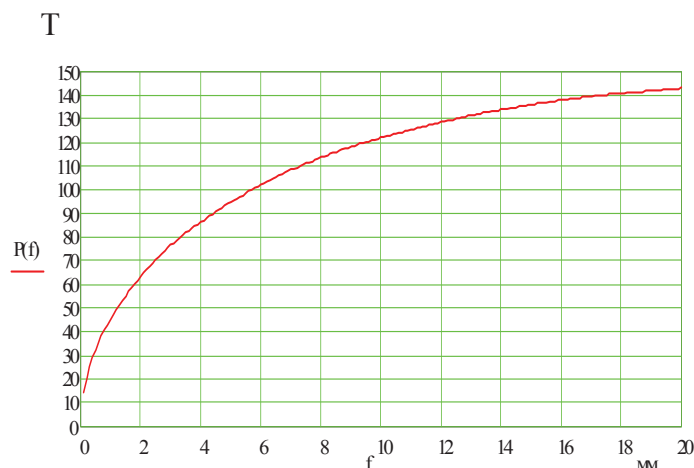


Рис.4. Зависимость осевой силы сжатия от стрелы сдвига при линейной сдвиговой форме.

Критическая сила представляется асимптотическим значением – при лавинообразном увеличении стрелы сдвига, и это происходит в данном исследовании при смещениях превышающих 20 мм, что было обнаружено на нелинейной кривой моментов по спадающей ветви (см. рис.3). Критическое значение осевой сжимающей силы для кольцевого элемента заданных параметров определим величиной порядка 140 Т. При меньших нагрузках также возможны равновесные формы сдвинутого элемента, и соотношение нагрузка-сдвиг определяются нижней кривой полученных зависимостей. Начальный сдвиг слоев может быть небольшим и определяется технологическими отклонениями. Далее при приложении сжимающей нагрузки сдвиг может возрасти, достигая равновесного состояния по полученным оценкам. Повысить нагрузки при том же сдвиге можно уменьшением толщины резинового слоя и высоты пакета – снижается податливость элемента $W(f)$ и подбором более жестких марок резин. Все это сказывается на сдвиговой жесткости, которая растет, и в результате, – на снижении виброизолирующих свойств элемента. Таким образом, предложена методика расчета и для кольцевого ТРМЭ с плоскими слоями решена задача потери поперечной устойчивости при сжатии. Построена нелинейная кривая: нагрузка – «стрела прогиба» (максимальное смещение сдвига слоя в пакете), аналогичная нагрузочной кривой потери устойчивости сжатого стержня с начальной погибью.

Литература

1. Кирюхин А.В., Тихонов В.А., Чистяков А.Г. Расчет нелинейных характеристик ТРМЭ при проектировании компенсационных патрубков. – В сб. тр. XVII Симпозиума: Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем. «DYVIS-2012». Москва-Клин. 2012. С. 96-99.
2. Кирюхин А.В., Тихонов В.А., Чистяков А.Г. Вибрационные характеристики углового компенсационного патрубка с тонкослойными эластомерными элементами // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2007, №1, С. 103-108.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967, 984 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЧАСТНЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ВДОЛЬ ВЕРТИКАЛИ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Холостова О.В.

Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия

kholostova_o@mail.ru

Аннотация. Рассматривается движение тяжелого твердого тела, одна из точек которого совершает заданные высокочастотные гармонические колебания вдоль вертикали. В рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений движения проведен анализ существования, бифуркации и устойчивости «боковых» относительных равновесий тела, для которых центр масс и точка подвеса не лежат на одной вертикали. Найдены два новых типа перманентных вращений тела вокруг вертикали, обусловленных наличием быстрых вибраций и не существующих в случае тела с неподвижной точкой. Исследован вопрос об их устойчивости.

1. Уравнения движения. Рассмотрим движение тяжелого твердого тела, предполагая, что одна из его точек O (точка подвеса) совершает заданные гармонические вибрации вдоль вертикали. Введем поступательно движущуюся систему координат $OXYZ$ с осью OZ , направленной вертикально вверх, и связанную с телом систему координат $Oxyz$, оси которой совпадают с главными осями инерции тела для точки O . Пусть амплитуда h вибраций точки подвеса мала по сравнению с характерной длиной $r_G = OG$ тела, а частота Ω велика по сравнению с характерной частотой $\sqrt{g/r_G}$. Введем малый параметр ε и будем считать, что $h/r_G = \varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll 1$), $\omega/\Omega \sim \varepsilon$, $h\Omega \sim 1$.

При помощи методов теории возмущений дифференциальные уравнения движения тела в системе координат $OXYZ$ можно преобразовать к виду, главная часть которого соответствует автономной механической системе. Приближенные автономные уравнения имеют вид модифицированных уравнений Эйлера — Пуассона [1]

$$A\dot{p} + (C - B)qr = mga + m_x, \quad B\dot{q} + (A - C)rp = mgb + m_y, \quad C\dot{r} + (B - A)pq = mgc + m_z; \quad (1)$$

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2; \quad (2)$$

$$a = z_G\gamma_2 - y_G\gamma_3, \quad b = x_G\gamma_3 - z_G\gamma_1, \quad c = y_G\gamma_1 - x_G\gamma_2. \quad (3)$$

Здесь m и A, B, C — масса тела и его главные моменты инерции для точки O ; x_G, y_G, z_G ; p, q, r ; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и m_x, m_y, m_z — проекции радиус-вектора центра масс тела, вектора его абсолютной угловой скорости, орта $\mathbf{n}$ оси OZ и вектора вибрационного момента [1] на оси связанной системы координат соответственно, причем

$$m_x = \alpha \left[x_G \left(\frac{b\gamma_2}{B} + \frac{c\gamma_3}{C} \right) - (y_G\gamma_2 + z_G\gamma_3) \frac{a}{A} \right], \quad m_y = \alpha \left[y_G \left(\frac{a\gamma_1}{A} + \frac{c\gamma_3}{C} \right) - (x_G\gamma_1 + z_G\gamma_3) \frac{b}{B} \right],$$

$$m_z = \alpha \left[z_G \left(\frac{a\gamma_1}{A} + \frac{b\gamma_2}{B} \right) - (x_G\gamma_1 + y_G\gamma_2) \frac{c}{C} \right]. \quad (4)$$

2. Исследование боковых относительных равновесий тела. Стационарные решения системы (1)-(4) вида $p = q = r = 0$, $\gamma_j = \gamma_{j0} = \text{const}$ ($j = 1, 2, 3$) соответствуют

относительным равновесиям тела. Значения величин γ_j в положениях равновесия удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$0 = mga + m_x, \quad 0 = mgb + m_y, \quad 0 = mgc + m_z. \quad (5)$$

Данная система уравнений всегда имеет два частных решения, для которых центр масс тела находится на одной вертикали с точкой подвеса, выше или ниже ее. Исследуем вопрос о существовании и устойчивости (в рамках приближенной системы) боковых положений относительного равновесия тела, для которых ось OG не вертикальна [2].

2.1. Пусть сначала центр масс тела лежит в одной из главных плоскостей инерции тела, например, Oxz (т. е. $y_G=0$). Существует два типа искомых решений системы (3)-(5). Решения первого типа описываются соотношениями

$$\gamma_2 = 0, \quad mg = \frac{\alpha}{B}(x_G\gamma_1 + z_G\gamma_3), \quad \gamma_1^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Им соответствуют равновесия, для которых плоскость Oxz , содержащая центр масс тела, вертикальна. Радиус-вектор OG составляет с вертикалью острый угол ξ , определяемый условием $\cos \xi = mgB/(\alpha r_G)$, при этом сами решения существуют при условии $\alpha > \alpha_1$, $\alpha_1 = mgB/r_G$. Решения второго типа удовлетворяют уравнениям

$$\gamma_1 = \frac{mgACx_G}{\alpha(Ax_G^2 + Cz_G^2)}, \quad \gamma_3 = \frac{mgACz_G}{\alpha(Ax_G^2 + Cz_G^2)}, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

и существуют при условии

$$\alpha > \alpha_2, \quad \alpha_2 = \frac{mgACr_G}{Ax_G^2 + Cz_G^2}.$$

В случае $\Delta = C(A-B)z_G^2 - A(B-C)x_G^2 = 0$ решения первого и второго типов сливаются, образуя семейство, определяемое условиями

$$mg = \frac{\alpha}{B}(x_G\gamma_1 + z_G\gamma_3), \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (6)$$

и существующее при выполнении неравенства

$$\alpha > \alpha_3, \quad \alpha_3 = \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{mg}{x_G} \sqrt{\frac{BC(A-B)}{A-C}}.$$

В общем случае геометрии масс твердого тела ($A > B > C$, $x_G > 0$, $y_G > 0$, $z_G > 0$) величины a , b , c в положениях относительного равновесия удовлетворяют уравнениям

$$x_Ga + y_Gb + z_Gc = 0, \quad \frac{A-B}{AB}z_Gab + \frac{B-C}{BC}x_Gbc + \frac{C-A}{AC}y_Gac = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0).$$

Исключая c и вводя обозначение $k=b/a$, получим квадратное уравнение для k

$$\frac{B-C}{BC}x_G y_G k^2 + \left(\frac{B-C}{BC}x_G^2 - \frac{A-C}{AC}y_G^2 - \frac{A-B}{AB}z_G^2 \right)k - \frac{A-C}{AC}x_G y_G = 0. \quad (7)$$

При сделанных предположениях это уравнение имеет два вещественных корня $k = k_{1,2}$ ($k_1 < 0 < k_2$). При этом стационарные значения $\gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30}$ удовлетворяют геометрическому интегралу из (6) и уравнениям

$$\begin{aligned} mg + \alpha \left(\frac{x_G \gamma_{20}}{B} k_j - \frac{x_G \gamma_{30}}{C} \frac{x_G + k_j y_G}{z_G} - \frac{y_G \gamma_{20} + z_G \gamma_{30}}{A} \right) &= 0, \\ mg k_j + \alpha \left(\frac{y_G \gamma_{10}}{A} - \frac{y_G \gamma_{30}}{C} \frac{x_G + k_j y_G}{z_G} - \frac{x_G \gamma_{10} + z_G \gamma_{30}}{B} k_j \right) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Исключая величины γ_{10} и γ_{20} , приходим к одному квадратному уравнению относительно γ_{30} . Анализ показывает, что при $0 < \alpha < \tilde{\alpha}_2$ это уравнение не имеет действительных корней, при $\tilde{\alpha}_2 < \alpha < \tilde{\alpha}_1$ оно имеет два действительных корня (для $k = k_2$), а при $\alpha > \tilde{\alpha}_1$ — четыре действительных корня (при $k = k_1$ и $k = k_2$). Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_j^2 &= \frac{m^2 g^2 A^2 B^2 w_0}{(A k_j x_G - B y_G)^2 \ell_2} \quad (j=1,2), \\ w_0 &= [A^2 B^2 (x_G^4 - 4x_G^2 y_G^2 + y_G^4) + AC(AC - 2AB + 2B^2)x_G^2 z_G^2 + C^2(A - B)^2 z_G^4] k_j^2 - \\ &\quad - 2ABx_G y_G [AB(x_G^2 - y_G^2) + C(B + C - A)z_G^2] k_j + B^2(A^2 x_G^2 + C z_G^2) y_G^2. \end{aligned}$$

Решения квадратного уравнения, в области $\alpha > \tilde{\alpha}_2$ своего существования, имеют для каждого из значений $k = k_1$ и $k = k_2$ разные знаки. Для соответствующих им относительных равновесий угол наклона оси Oz тела к вертикали острый и тупой.

2.2. Для анализа устойчивости найденных решений зададим возмущения

$$p = x_1, \quad q = x_2, \quad r = x_3, \quad \gamma_1 = \gamma_{10} + y_1, \quad \gamma_2 = \gamma_{20} + y_2, \quad \gamma_3 = \gamma_{30} + y_3$$

переменных системы (1)-(4) относительно их стационарных значений.

Характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущенного движения записывается в виде

$$\lambda^2(b_2 \lambda^4 + b_1 \lambda^2 + b_0) = 0, \quad b_2 = ABC. \quad (9)$$

В случае расположения центра масс тела в главной плоскости инерции для решений первого типа

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{\alpha}{ABC} [A^2 C^2 (x_G \gamma_{30} - z_G \gamma_{10})^2 + B(A \gamma_{10}^2 + C \gamma_{30}^2) \Delta], \\ b_0 &= \frac{\alpha^2 \Delta}{AB^2 C} (x_G \gamma_{30} - z_G \gamma_{10})^2 (A \gamma_{10}^2 + C \gamma_{30}^2). \end{aligned}$$

Для решений второго типа

$$b_1 = \frac{b_{12}\alpha^2 + b_{10}}{\alpha ABC(Ax_G^2 + Cz_G^2)^2}, \quad b_{10} = m^2 g^2 r_G^2 A^3 C^3 \Delta,$$

$$b_{12} = B\gamma_{20}^2 (Ax_G^2 + Cz_G^2)^2 [(A+C)\Delta - AC(Ax_G^2 + Cz_G^2)]$$

$$b_0 = -\frac{\gamma_{20}^2 \Delta}{A^2 BC^2} [\alpha^2 B\gamma_{20}^2 (Ax_G^2 + Cz_G^2) + m^2 g^2 A^2 C^2].$$

Для решений из семейства (6) $b_0 = 0$, а

$$b_1 = -\frac{A^2(B-C)x_G^2}{\alpha C(A-B)^2 z_G^2} [\alpha^2 x_G^2 (A-C) - m^2 g^2 BC(A-B)].$$

Во всех случаях боковых относительных равновесий тела один из коэффициентов b_0 или b_1 характеристического уравнения (8) отрицателен, и это уравнение имеет корни с положительными вещественными частями. Поэтому, на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, боковые относительные равновесия тела неустойчивы.

В общем случае геометрии масс тела коэффициенты характеристического уравнения (7) имеют довольно громоздкий вид. Преобразуем величины b_1 и b_0 , учитывая выражения для γ_{10}, γ_{20} через γ_{30} согласно равенствам (8) и выражения для k_j ($j=1, 2$) из уравнения (7):

$$b_1 = -\frac{m^2 g^2 B \sqrt{d}}{4\alpha AC(B-C)^2 (Ak_j x_G - By_G)^2 x_G^2 y_G^2} b_{11}, \quad \delta = \frac{\beta}{BCmgz_G}, \quad (10)$$

$$b_{11} = (\mp n_{21} + \sqrt{d} n_{20}) \delta^2 + (\mp n_{11} + \sqrt{d} n_{10}) \delta + (\mp n_{01} + \sqrt{d} n_{00});$$

$$b_0 = -\frac{m^4 g^4 B^2 d}{8A^2 C^2 (B-C)^4 (Ak_j x_G - By_G)^4 x_G^4 y_G^4} b_{01}, \quad (11)$$

$$b_{01} = (\mp m_{41} \sqrt{d} + m_{40}) \delta^4 - (\mp m_{31} \sqrt{d} + m_{30}) \delta^3 + (\mp m_{21} \sqrt{d} + m_{20}) \delta^2 -$$

$$- (\mp m_{11} \sqrt{d} + \sqrt{d} m_{10}) \delta + (\mp m_{01} \sqrt{d} + m_{00});$$

$$d = [A(B-C)x_G^2 - B(A-C)y_G^2 - C(A-B)z_G^2]^2 + 4AB(A-C)(B-C)x_G^2 y_G^2.$$

Коэффициенты n_{kl} и m_{kl} суть однородные функции (разных степеней) относительно параметров A, B, C и x_G, y_G, z_G . Величина β определяется из соотношения

$$\beta = \beta_* = \frac{-l_1 \pm \sqrt{D_1}}{2l_2}, \quad D_1 = 4C^2 z_G^2 [(Ak_j x_G - By_G)^2 \ell_2 \alpha^2 - m^2 g^2 A^2 B^2 w_0].$$

Пусть $k = k_1$ и выполнено условие $\alpha > \alpha_1$. Сделаем подстановку $\delta = \beta_*/(BCmgx_G)$ в выражение для b_{01} из формулы (11) (выбирая нижний знак). Величина b_{01} представляется тогда многочленом четвертой степени относительно величины $z = \sqrt{D_1}$ вида

$$b_{01} = z^2 [(p_{21} \sqrt{d} + p_{20}) z^2 \pm (p_{11} \sqrt{d} + p_{10}) z + (p_{01} \sqrt{d} + p_{00}) z]. \quad (12)$$

причем, как показано аналитически, квадратный трехчлен в (12) всегда положителен. Поэтому коэффициент b_0 из (11) отрицателен.

При $k = k_2$ (и $\alpha > \alpha_2$) исследован квадратный относительно δ трехчлен в выражении для b_{11} из формулы (10) (в которой взят верхний знак). Анализ коэффициентов величины b_{11} был проведен в пространстве безразмерных параметров $a_1 = B/A$, $a_2 = C/A$, $c_1 = y_G/x_G$, $c_2 = z_G/x_G$. Был использован аналитический и численный подходы в сочетании с построением и анализом графических изображений. Установлено, что квадратный трехчлен b_{11} во всем рассмотренном диапазоне изменения параметров всегда положителен. Поэтому коэффициент b_1 (см. (10)) характеристического уравнения отрицателен.

Таким образом, все боковые относительные равновесия тела в общем случае его геометрии масс также оказываются неустойчивыми.

3. Исследование стационарных вращений, обусловленных быстрыми вибрациями.

Система (1)-(4) может быть переписана в форме канонических дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона

$$H = \frac{(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi)(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{2AB \sin^2 \theta} + \frac{A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi}{2AB} p_\theta^2 + \\ + \frac{p_\varphi^2}{2C} + \frac{(B-A) \sin \varphi \cos \varphi (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) p_\theta}{AB \sin \theta} + \Pi_g + \Pi_v, \quad (13)$$

$$\Pi_g = mg(x_G \sin \theta \sin \varphi + y_G \sin \theta \cos \varphi + z_G \cos \theta), \quad \Pi_v = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} + \frac{c^2}{C} \right).$$

Здесь ψ , θ , φ и p_ψ , p_θ , p_φ — углы Эйлера, задающие ориентацию системы координат $Oxuz$ относительно $OXYZ$ и сопряженные с ними импульсы. Последние два слагаемые в (13) представляют собой гравитационный и вибрационный [1] потенциалы тела. Координата ψ системы циклическая, соответствующий ей импульс p_ψ постоянен.

Как и для тела с неподвижной точкой, существуют частные решения системы с гамильтонианом (13), соответствующие равномерным вращениям тела вокруг вертикали (перманентные вращения). Наличие вибраций существенно влияет и на совокупность осей перманентных вращений, и на характер устойчивости. Кроме того, имеются перманентные вращения, обусловленные наличием вибраций и невозможные для тела с неподвижной точкой. Укажем два типа таких вращений.

Пусть центр масс тела находится на одной из главных осей инерции, например, на оси Oz и при этом $A \neq B$. Существует частное решение системы с гамильтонианом (13), для которого

$$\theta = \theta_0 = \text{const}, \quad \varphi = \varphi_0 = \text{const}, \quad p_\psi = p_{\psi_0} = [(A \sin^2 \varphi_0 + B \cos^2 \varphi_0) \sin^2 \theta_0 + C \cos^2 \theta_0] \omega, \\ p_\theta = p_{\theta_0} = (A - B) \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \omega, \quad p_\varphi = p_{\varphi_0} = C \cos \theta_0 \omega. \quad (14)$$

Здесь константы θ_0 и ω задаются соотношениями

$$\cos \theta_0 = \frac{mgAB}{\sigma Cz_G}, \quad \omega = \sqrt{\frac{\sigma z_G^2}{AB}} \quad \left(\sigma \geq \frac{mgAB}{Cz_G} \right). \quad (15)$$

Данному решению отвечает коническое движение тела, при котором его ось Oz наклонена к вертикали под углом θ_0 и вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью ω . Заметим, что при отсутствии вибрации ($\sigma = 0$) данное решение не существует; в этом случае коническое движение может совершать только динамически симметричное тело в случаях Эйлера или Лагранжа.

Перечислим случаи, когда ось перманентного вращения — одна из главных осей инерции тела, например, Ox . Если центр масс тела лежит на этой оси, то такие вращения существуют как при наличии, так и при отсутствии вибраций. При $\sigma \neq 0$ имеются также перманентные вращения вокруг оси Ox при выполнении одного из следующих условий:

1) $y_G = 0$, $x_G = mgB/\sigma$ (z_G — любое); 2) $z_G = 0$, $x_G = mgC/\sigma$ (y_G — любое); 3) $B=C$, $x_G = mgB/\sigma$ (y_G, z_G — любые).

В первых двух случаях центр масс тела лежит в одной из главных плоскостей инерции тела, содержащих ось вращения Ox , при этом величина x_G фиксирована. В третьем случае тело динамически симметрично, центр масс занимает произвольное положение в плоскости, параллельной экваториальной плоскости инерции Oyz . Поворотом последней вокруг оси динамической симметрии можно добиться того, чтобы центр масс оказался в главной плоскости инерции, и свести этот случай к предыдущим. Описанным движениям отвечают следующие частные решения системы с гамильтонианом (13) (ω — угловая скорость вращения)

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad p_{\psi_0} = A\omega, \quad p_{\theta_0} = p_{\varphi_0} = 0. \quad (16)$$

3.1. О неустойчивости конического движения несимметричного тела. Для исследования устойчивости решения (14), приведем гамильтониан системы к безразмерному виду. Обезразмерим импульсы и время при помощи множителей $A\Omega_1$ и Ω_1 , где

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad \ell = \frac{A}{mz_G}, \quad (17)$$

и введем безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{A}{B}, \quad \beta = \frac{A}{C}, \quad \xi = \frac{mz_G h^2 \Omega_1^2}{2Ag}, \quad \eta = \frac{\omega}{\Omega_1}. \quad (18)$$

Параметры ξ и η характеризуют соответственно частоту вибрации точки подвеса тела и угловую скорость перманентного вращения. Параметры α и β должны удовлетворять неравенствам, следующим из неравенств треугольника для осевых моментов инерции:

$$\alpha\beta + \beta - \alpha \geq 0, \quad \alpha\beta + \alpha - \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta - \alpha\beta \geq 0.$$

В безразмерном гамильтониане введем возмущения x_1, x_2 и y_1, y_2 для координат θ, φ и безразмерных импульсов $\tilde{p}_\theta, \tilde{p}_\varphi$ при фиксированном значении $\tilde{p}_\psi$. Рассмотрим

квадратичную часть гамильтониана возмущенного движения. Характеристическое уравнение отвечающих ему линейных уравнений имеет вид

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0. \quad (19)$$

Здесь, как показывают расчеты,

$$b = -\frac{4(\alpha-1)^2(\alpha^2\xi^2 - \beta^2)^3 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0}{\alpha^5 \xi^4 \sin^2 \theta_0}.$$

В области существования конического движения, задаваемого условием $\alpha\xi > \beta$, следующим из неравенства в (15), имеем $b < 0$, и, значит, уравнение (19) имеет корень с положительной вещественной частью. Следовательно, рассматриваемое решение неустойчиво в силу теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

3.2. Исследование устойчивости перманентного вращения вокруг главной оси инерции. Решим теперь вопрос об устойчивости решения (16). Будем считать, что геометрия масс тела удовлетворяет условию 1). Используя формулы (17) и (18), в которых величина z_G заменена на x_G , введем безразмерные параметры α , β , ξ , η и обезразмерим импульсы и время при помощи множителей $A\Omega_1$ и Ω_1 . Введем также величину $s = z_G/x_G$. В силу второго условия случая 1) для рассматриваемого движения имеем соотношение $\xi = 1/\alpha$. Независимыми будем считать параметры α , β , s , η .

Введем возмущения x_1, x_2, y_1, y_2 величин $\theta, \varphi, \tilde{p}_\theta, \tilde{p}_\varphi$ при фиксированном значении $\tilde{p}_\psi = \eta$ и получим гамильтониан возмущенного движения. Достаточные условия устойчивости исследуемого движения будем искать как условия положительной определенности его квадратичной части $\tilde{H}_2$. Последние задаются системой неравенств вида

$$\eta^2 > s^2, \quad (s^2 - \eta^2\alpha)(1 - \alpha) > \alpha - \beta, \quad (s^2 - \eta^2)(1 - \alpha) > \alpha - \beta, \quad (\beta - 1)\eta^2 > \beta s^2. \quad (20)$$

Из последнего неравенства (20) сразу следует условие $\beta > 1$. Соответствующую часть плоскости α, β разделяем на области 1–3 с границами — отрезками прямых $\alpha = 1$, $\beta = 1$ и $\alpha = \beta$ (рис. 1). Введем обозначения

$$s_0^2 = \frac{(\beta-1)(\alpha-\beta)}{\alpha-1}, \quad \eta_0^2 = \frac{\beta s^2}{\beta-1}, \quad \eta_1^2 = s^2 + \frac{\alpha-\beta}{\alpha-1}. \quad (21)$$

Несложный анализ показывает, что в области 1 неравенства (20) сводятся к условиям $s < s_0$, $\eta_0 < \eta < \eta_1$. В области 2 параметр s может принимать произвольные значения, а $\eta > \eta_0$. В области 3 для случаев $s < s_0$ и $s > s_0$ имеем соответственно $\eta > \eta_1$ и $\eta > 0$.

Пусть форма $\tilde{H}_2$ не является положительно определенной. Рассмотрим отвечающую ей линеаризованную систему дифференциальных уравнений возмущенного движения. Характеристическое уравнение этой системы имеет вид (19), где

$$a = (2 - \alpha - \beta + \alpha\beta)\eta^2 - \frac{1}{\alpha}[s^2(\alpha^2 + \alpha\beta - \beta) + \beta(\alpha - \beta)],$$

$$b = [\eta^2(1 - \beta) + \beta s^2][(\eta^2 - s^2)(1 - \alpha) + \alpha - \beta]. \quad (22)$$

Дискриминант $d = a^2 - 4b$ уравнения (19) представляется в виде

$$d = d_2\eta^4 + d_1\eta^2 + d_0, \quad (23)$$

$$d_2 = (\alpha + \beta - \alpha\beta)^2, \quad d_0 = \frac{1}{\alpha^2} [s^2(\alpha + \beta - \alpha\beta) - \beta(\alpha - \beta)]^2,$$

$$d_1 = \frac{2}{\alpha} (\alpha + \beta - \alpha\beta) [s^2(\alpha^2 + \alpha\beta - 4\alpha - \beta + 2) + (\alpha - \beta)(\beta - 2)].$$

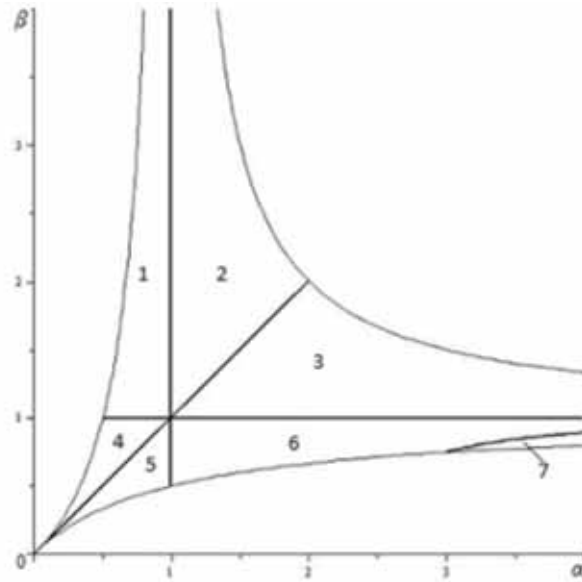


Рис.1. Разбиение на области в плоскости параметров α, β .

При выполнении условий

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d > 0 \quad (24)$$

корни $\pm i\omega_j$ ($j = 1, 2$) уравнения (19) чисто мнимые, и исследуемое движение устойчиво в линейном приближении. Таким образом, эти соотношения задают необходимые условия устойчивости. Выпишем результаты их анализа.

Все найденные выше достаточные условия устойчивости являются одновременно и необходимыми условиями. Кроме того, могут быть выполнены только необходимые условия. Для их описания добавим к величинам (21) следующие обозначения:

$$s_1^2 = \frac{(\alpha - \beta)u}{(1 - \alpha)^2(2\alpha + \beta - \alpha\beta)}, \quad s_2^2 = \frac{\alpha - \beta}{(1 - \alpha)^2}, \quad s_3^2 = \frac{\beta(\alpha - \beta)(\beta - 1)}{\alpha^2(\beta - 1)^2 + \beta(\beta - 1) + \alpha\beta(3 - 2\beta)},$$

где $u = \beta(1 - \alpha)^2 + \alpha(2 - \alpha)$. Пусть, кроме того, $\eta_{(1)}^2$ и $\eta_{(2)}^2$ ($0 < \eta_{(1)}^2 < \eta_{(2)}^2$) — вещественные корни квадратного относительно η^2 трехчлена (23) в областях существования и положительности этих корней.

К областям 1–3 добавим области 4–7 с теми же прямолинейными границами и криволинейной границей $u = 0$ (рис. 1). В области 1 только необходимые условия устойчивости определяются неравенством $\eta_1 < \eta < \eta_0$ при $s > s_0$. В области 2 все решения системы (24) составляют достаточные условия устойчивости. В области 3 только необходимые условия выполняются в интервалах $s_3 < s \leq s_0$ и $s_0 < s < s_1$ изменения параметра s и имеют соответственно вид $\eta_{(2)} < \eta < \eta_0$ и $\eta_{(2)} < \eta < \eta_1$. В области 4 эти условия задаются неравенством $\eta > \eta_1$, а величина s произвольна. В области 5 только необходимые условия устойчивости определяются интервалом $\eta > \eta_{(2)}$ при $0 < s \leq s_1$,

совокупностью двух интервалов $\eta_1 < \eta < \eta_{(1)}$ и $\eta > \eta_{(2)}$ при $s_1 < s \leq s_2$ и условием $\eta > \eta_1$ при $s > s_2$. В области 6 эти условия задаются неравенством $\eta_{(2)} < \eta < \eta_1$ при $0 < s < s_1$.

Для невыписанных значений параметров s и η , относящихся к областям 1–6, условия (24) не выполняются. В этих случаях исследуемые решения неустойчивы не только в линейном приближении, но и в нелинейной постановке. В области 7 условия (24) несовместны при любых значениях s и η , и эти решения также неустойчивы.

В тех областях, где выполнены только необходимые условия устойчивости, для ряда фиксированных значений инерционных параметров проведен нелинейный анализ устойчивости, при этом рассмотрены нерезонансный случай, случаи резонансов третьего и четвертого порядков, а также случаи вырождения гамильтониана [3].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

Литература

1. Маркеев А.П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Прикладная математика и механика, 2011, т. 75, № 2, с. 193–203.
2. Холостова О.В. Об устойчивости равновесий твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Вестник РУДН. Математика. Информатика. Физика, 2011, №2, с. 111–122.
3. Холостова О.В. Об устойчивости частных движений тяжелого твердого тела, обусловленных быстрыми вертикальными вибрациями одной из его точек // Нелинейная динамика, 2015, №1, с. 99–116.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РОТОРОВ

Цыганов А.А.¹, Шматов Д.П.², Кружаев К.В.³, Иванов А.В.⁴

¹ФГБОУ ВПО ВГТУ, Воронеж, Россия

^{1,2,4} rd-vgtu@mail.ru

³ kon3846@yandex.ru

Аннотация. Представлена установка для экспериментального исследования динамических характеристик роторов на модельных режимах и средах, позволяющая получать амплитудно-временные характеристики движения вала и нагрузки на его опоры в широком диапазоне частот вращения ротора.

Разработка и создание ракетно-космической техники поколения невозможно без применения высокооборотных турбонасосных агрегатов, поэтому актуальной является проблема анализа их вибрационного состояния и снижения амплитуд колебаний роторов. Основным источником вибрации является ротор, взаимодействующий с корпусом через тонкие слои жидкости и газа в подшипниках и уплотнениях. Вибрационные характеристики ротора, а также возмущения, передающиеся на элементы корпуса, определяются как конструкционным демпфированием, так и упругодемпфирующими свойствами этих тонких разделяющих слоев, а также внешними возмущениями, приложенными к ротору (неуравновешенность, гидравлические и газовые силы и др.). Между вибрациями ротора и силовыми характеристиками жидкости в зазорах уплотнений существует обратная связь, поэтому уплотнения и ротор представляют замкнутую динамическую систему. Динамические характеристики роторов (критические скорости, амплитуды вынужденных колебаний, границы динамической устойчивости) в существенной мере зависят от уплотнений, поэтому исследование гидродинамических сил в уплотнениях необходимы для расчета критических скоростей, оценки динамических напряжений и разработки эффективных способов стабилизации роторов. Поперечные колебания роторов во многом определяются гидродинамическими силами в уплотнениях проточной части и для их вычисления необходимо решать нелинейные уравнения нестационарного трехмерного течения жидкости при ламинарном и турбулентном режимах. Эта задача чрезвычайно сложна и не имеет однозначного решения, поэтому приходится принимать ряд упрощений, а достоверность полученных результатов проверять экспериментальным путем.

Для исследования динамических характеристик ротора на кафедре «Ракетные двигатели» ВГТУ была разработана и изготовлена специальная экспериментальная установка (рис. 1, 2), которая состоит следующих компонентов:

- имитатора ТНА;
- насоса высокого давления;
- электродвигателя;
- магистралей высокого и низкого давления;
- системы измерения и регистрации параметров.

Эксперименты выполнялись согласно составленным планам, которые определяли режимы работы установки и число опытов. Обработка результатов, проводимая с применением математических методов, позволяет получить графические и аналитические зависимости, дает возможность математического описания процесса и его математическое моделирование, разработать стратегии поиска оптимального режима, оптимальных условий протекания процесса.

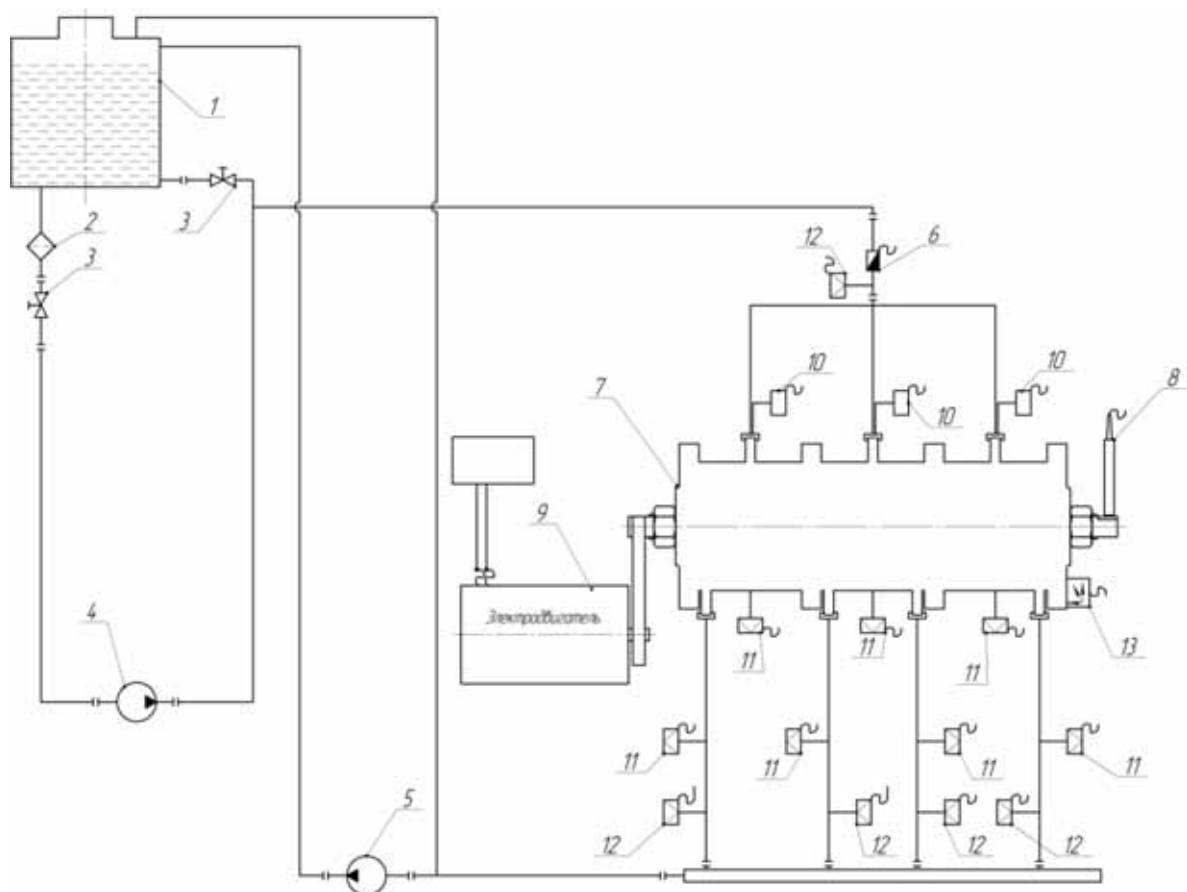


Рис. 1. Гидравлическая схема стенда

1 – гидробак; 2 – фильтр тонкой фильтрации; 3 – вентиль запорный; 4 – питающий насос; 5 – откачивающий насос; 6 – расходомер; 7 – исследуемый имитатор; 8 – вихревой преобразователь частоты вращения; 9 – электродвигатель; 10 – датчик перемещения; 11 – датчик давления; 12 – датчик температуры; 13 – датчик вибрации.



Рис. 2. Общий вид экспериментальной установки

Имитатор (рис. 3) состоит из ротора, с модельными рабочими колесами, установленного на двух опорах, корпусов и узла модельного уплотнения. В качестве опор ротора использованы шарикоподшипники. Охлаждение шарикоподшипников осуществляется расходом рабочего тела. Между опорами ротора выполнены три узла модельного уплотнения, состоящие из полуподвижных колец, поджимной втулки и резьбовой гайки. Модельное рабочее колесо и два полуподвижных кольца образуют уплотнительный зазор, одно полуподвижное кольцо поджато к торцу корпуса, другое к торцу резьбовой гайки, образуя торцовые стыки, при помощи поджимной втулки. Поджимная втулка состоит из двух частей, которые распираются в осевом направлении пружинами с усилием от 1 до 12 кг.



Рис.34. Общий вид имитатора

В качестве рабочего тела имитатора используется вода с давлениями до и после модельного уплотнения, имитирующими рабочие. Полуподвижные кольца изготовлены в нескольких вариантах:

- из стали 07X16Н6;
- из алюминия;
- из пластика ABS;
- из пластика PLA;
- из фторопласта Ф-4;
- с гладкой уплотнительной поверхностью;
- с уплотнительной поверхностью, выполненной в виде лабиринта.

Ротор, корпус имитатора, резьбовые гайки, модельные рабочие колеса изготовлены из стали 07X16Н6.

С одной стороны ротора установлен возбудитель для наведения сигналов на датчик частоты вращения 9 (рис. 1), с другой стороны имитатора на ротор установлен шкив, имеющий несколько V-образных канавок для клиновидного ремня 12 посредством которого осуществляется передача крутящего момента от электродвигателя 10. В качестве опор использованы радиально-упорные шарикоподшипники 202-го типоразмера.

Электродвигатель позволяет развивать мощность до 1 кВт, максимальная частота вращения до 50000 об/мин.

Питание и управление электродвигателя осуществляется блоком питания MASTECH HY3020E. Установка для испытаний снабжена системой аварийной защиты, позволяющей прекратить испытания при недопустимом изменении контрольных параметров. В качестве контрольных используются следующие параметры:

- частота вращения ротора;
- виброускорения имитатора.

Для оценки условий работы и определения характеристик модельного уплотнения предусмотрено измерение давления, расходов, температур, виброускорений и перемещений. Схема расположения измерительных приборов на имитаторе приведена на рис. 1.

При проведении испытаний измерение параметров производится со следующей точностью:

- давления – $\pm 1,0 \%$;
- расхода – $\pm 1,0 \%$;
- температуры – $\pm 1,0 \text{ K}$;
- перемещения – $\pm 0,2 \%$;
- частоты вращения ротора – $\pm 0,5 \%$.

Система измерения параметров основана на базе контроллера NI CompactRIO, работающего под управлением NI LabVIEW Real-Time Module, который позволяет использовать механизм сканирования (NI Scan Engine), обработчик ошибок (Fault Engine) и менеджер распределенных систем (Distributed System Manager). CompactRIO - промышленная реконфигурируемая встраиваемая система, содержащая три компонента - контроллер реального времени, реконфигурируемый программируемый массив вентилей (FPGA) и промышленные модули ввода-вывода. LabVIEW Real-Time - полнофункциональный язык программирования, представляющий множество способов разработки контроллера и помогающий создать очень гибкие и сложные системы. Контроллеры LabVIEW Real-Time используются в различных приложениях, от управления стержнями на атомной электростанции, до программно-технического тестирования систем электронного управления двигателем, адаптивного управления бурением нефтяных скважин и высокоскоростного мониторинга вибраций при диагностировании отказов.

Система управления экспериментальной установки состоит из контроллера, работающего автономно. Операции контроллера разбиты на компоненты, каждый из которых отвечает за конкретную задачу во всем приложении. На рисунке 4 показана архитектура контроллера и индивидуальные компоненты приложения управления машиной. Эти компоненты разработаны и созданы в процессе разработки экспериментальной установки для реализации управляющего приложения.

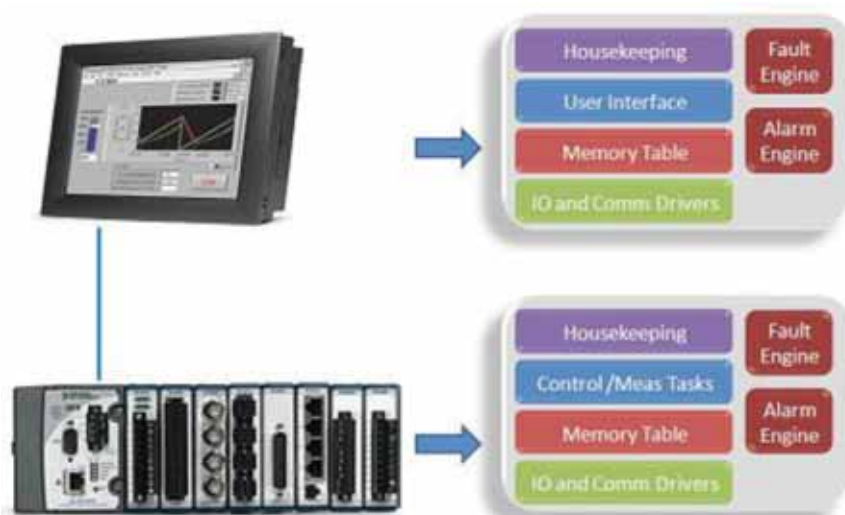


Рис. 4. Вид архитектуры локального машинного управления
Housekeeping – служебные операции, *Control/Meas Tasks* – задачи управления и измерения,
Memory Table – табличная память, *IO and Comm Drivers* – драйвера ввода-вывода и коммуникаций,
Fault Engine – обработчик ошибок, *Alarm Engine* – обработчик тревог

Испытания проводились на модельном уплотнении из фторопласта Ф-4 с гладкой уплотнительной поверхностью на различных режимах, с перепадом давления до 2 МПа и частотой вращения до 12000 об/мин.

Графические зависимости нагрузок на опоры ротора от частоты вращения и перепада давления показаны на рис. 5, 6.

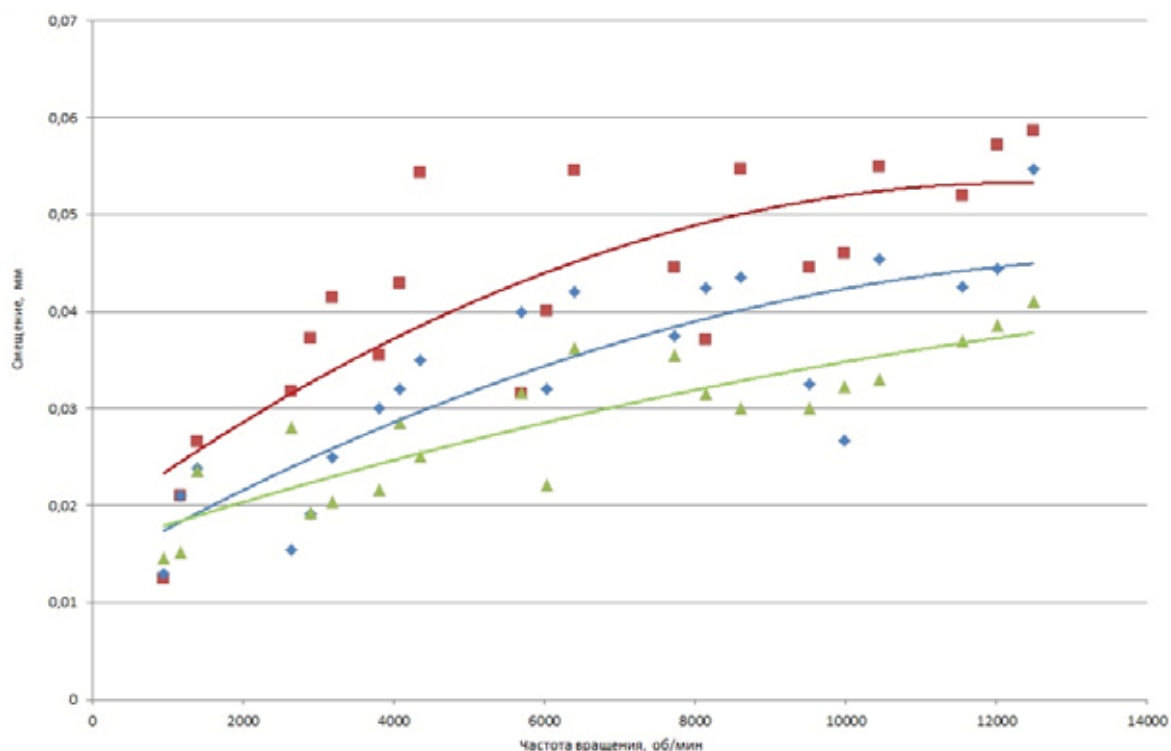


Рис. 5. Зависимость амплитуды радиального смещения ротора от частоты вращения
1 – перепад давления 0 МПа; 2 – перепад давления 0,7 МПа; 3 – перепад давления 2 МПа.

Из рисунков видно, что увеличение перепада давления на уплотнениях с полуподвижными кольцами снижают амплитуду колебания ротора, а также приводят к снижению нагрузок на опоры.

Таким образом, установка на модельных режимах и средах позволяет исследовать влияние уплотнений и их параметров, включая зазор, перепад давления, частоту вращения, на динамические характеристики роторов, получать амплитуды колебания поверхностей вала, нагрузки на его опоры и траектории движения, контролировать возможное касание роторных и статорных поверхностей уплотнения.

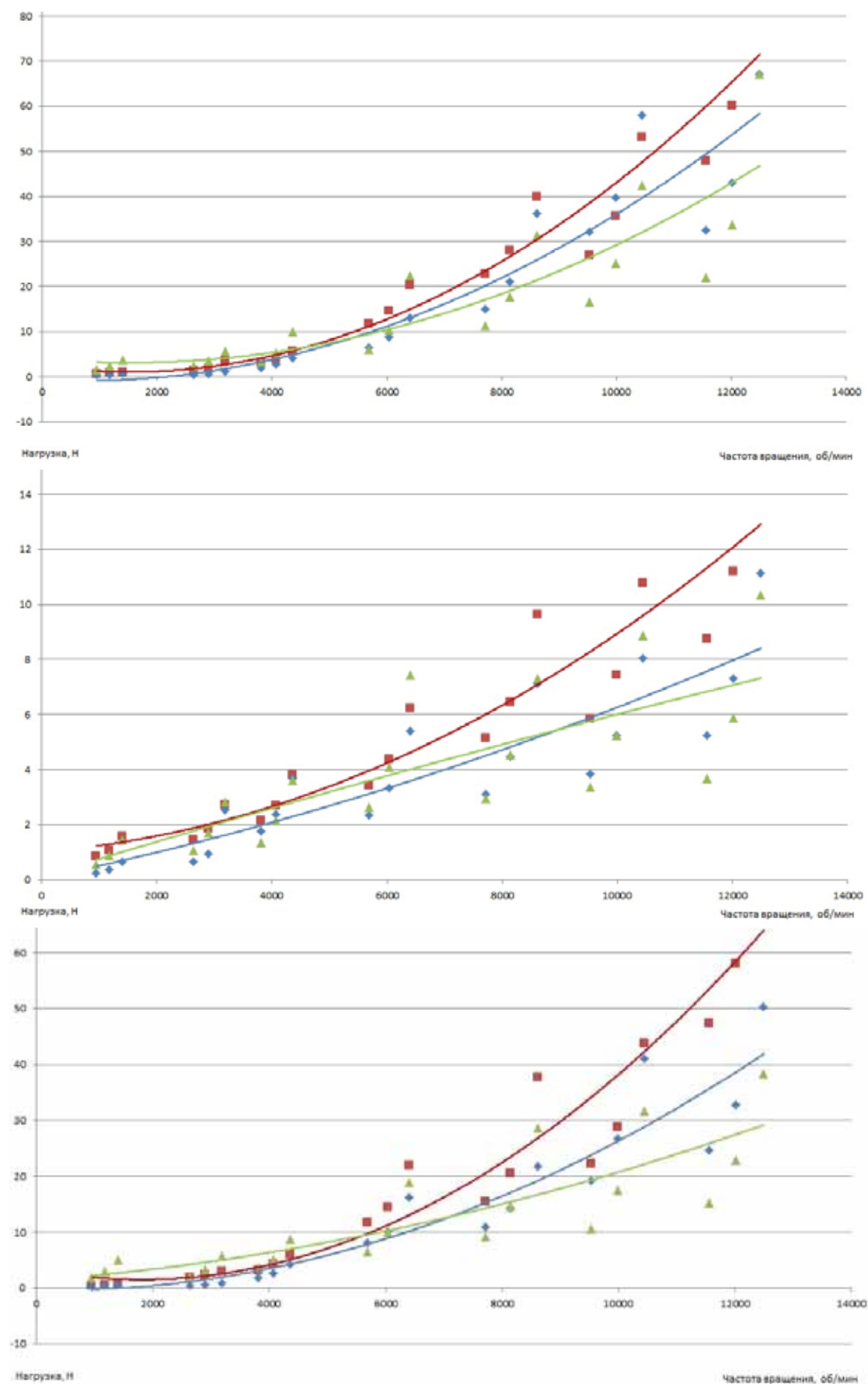


Рис. 6. Зависимость нагрузок на опоры ротора от частоты вращения
 1 – перепад давления 0 МПа; 2 – перепад давления 0,7 МПа; 3 – перепад давления 2 МПа.

Литература

1. Иванов А.В. Турбонасосные агрегаты кислородно-водородных ЖРД: монография, Воронеж: ГОУВПО "Воронежский государственный технический университет", 2011. – 283 с.
2. Геращенко Б.И. Динамика закритических роторов лопаточных машин. М.: Компания Спутник+, 2000. – 250 с.
3. Иванов А.В. Некоторые вопросы проектирования уплотнений с полуподвижными кольцами для насосов ТНА / А.В. Иванов // Разработка, производство и эксплуатация турбо-, электронасосных агрегатов и систем на их основе: труды I Международной научно-технической конференции "СИНТ'01". – Воронеж: ООО РИФ "Кварта", 2001. – С. 236 – 238.
4. Дмитренко А.И. Совершенствование уплотнений с полуподвижными кольцами для проточной части насосов ТНА ЖРД / А.И. Дмитренко, А.В. Иванов, А.Г. Кравченко // Научно-технический юбилейный сборник. КБ химавтоматики. – ИПФ "Воронеж", 2001. – С. 357 – 363.
5. Налимов В.П. - Теория эксперимента. М. «Наука», 1971.

О СТЕСНЁННЫХ УДАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ В СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Шнеерсон Е.З.

Российский государственный гидрометеорологический университет
Санкт-Петербург, Россия, damamil@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются динамические режимы в некоторых механических системах, относящихся к классу существенно нелинейных. Специфика этих систем обусловлена наличием существенно неидеальных связей, определяющих качественный характер движения, а также стеснёнными ударными взаимодействиями с трением. Исследованы многообразие типов соударений, а также условия возникновения, параметры и устойчивость стационарных многоударных режимов движения – вынужденных и автоколебательных.

Анализ нелинейных эффектов занимает центральное место в современных исследованиях механических и электромеханических систем. Подобные явления могут возникать даже в консервативных [1-3] и, тем более, в квазиконсервативных динамических системах [4, 5]. Если правые части соответствующих уравнений движения являются достаточно гладкими функциями фазовых переменных, то для анализа стационарных колебаний, переходных режимов и устойчивости применяются классические методы нелинейной механики, в том числе приближённые, основанные на тех или иных видах линеаризации.

Вместе с тем, в последние десятилетия усилиями многих исследователей достигнут значительных прогресс в изучении закономерностей динамического поведения значительно более сложных систем, относящихся к классу **существенно нелинейных**. В состав этих систем входят нелинейные звенья, обладающие разрывными характеристиками, не поддающимся непосредственной линеаризации. Отличительной особенностью таких систем является скачкообразное изменение фазовых переменных в моменты переключения. Поэтому для динамического анализа в указанных случаях применяется специфический аппарат нелинейной механики – методы припасовывания и точечных отображений, различие между которыми весьма условно [6, 7]. В цитированных работах исследуются режимы движения, сопровождающиеся «скачками» кинематических переменных, характерные для механических систем с **ударными взаимодействиями**, если динамические закономерности соударений оцениваются на основе так называемой стереомеханической модели. Отметим, что для анализа периодических виброударных режимов и их устойчивости успешно применяются не только упомянутые ранее точные методы нелинейной механики, но и модифицированный вариант метода гармонической линеаризации, специально разработанный для исследования виброударных систем [8].

В большинстве работ по указанной тематике соударение трактуется как коллинеарное, когда контактирующие элементы движутся поступательно вдоль некоторой прямой как до, так и после удара. Однако подобное модельное представление о геометрии ударного взаимодействия отнюдь не всегда отражает особенности реального соударения. Существует обширный класс механических систем с ударными парами, в которых реализуется косое, а в более сложных случаях – пространственное соударение. При этом возникают касательные ударные импульсы, для оценки которых приходится вводить те или иные допущения о характере ударного трения.

Особенности удара с трением и связанные с этим эффекты изменения или прекращения скольжения рассматривались ещё Э.Дж. Раусом, Г. Дарбу, А. Майером и др. [9-11]. Раус предложил метод графических диаграмм, позволяющий проанализировать сложную структуру пространственного соударения в рамках

концепции мгновенного удара. Развитие идеи Рауса принадлежит Е.А. Болотову [12]. Аналогичный подход к анализу удара с трением использован в работах В.Ю. Плявниекса [13] и в более поздних исследованиях иностранных авторов [14, 15]. Из разделов прикладной механики, в которых стереомеханическая модель удара с трением удара получила широкое распространение, отметим теорию вибрационного перемещения [16, 17]. В соответствующих задачах обычно предполагается, что касательный и нормальный ударные импульсы не связаны между собой, и вводится так называемый коэффициент мгновенного трения. В некоторых исследованиях косо́го удара для «независимой» оценки потерь в касательном направлении принимается гипотеза вязкого трения [18].

При рассмотрении удара с трением в рамках стереомеханической модели особое значение приобретает правильный выбор гипотезы коэффициента восстановления. Так, традиционное кинематическое определение коэффициента восстановления часто оказывается некорректным, поскольку приводит к физически абсурдным результатам [19]. Поэтому предпочтение отдаётся гипотезам динамического (силового) и энергетического коэффициентов восстановления [20]. В последнем случае при оценке «энергетического восстановления» чаще всего игнорируется эффект взаимодействия в касательном направлении [21], но иногда энергетический коэффициент восстановления определяется с учётом диссипации при «касательном» контактном процессе [22].

Рассмотрение ударных процессов в цитированных выше работах основано на предположении, что соударяющиеся тела являются **свободными**. Однако во многих случаях такой подход оказывается принципиально неприемлемым, поскольку на соударяющиеся тела наложены дополнительные удерживающие связи. Указанное свойство характеризует особый тип удара, называемый обычно **стеснённым**. Подобные задачи возникают, например, в теории бильярда (роль дополнительной связи выполняет стол) [23]. Особенности стеснённого удара должны учитываться при анализе динамики шагающих механизмов, при исследовании влияния землетрясений на различные объекты и т. п. В монографии А.П. Иванова весьма подробно рассмотрено соударение сферического маятника, имеющего одну или две закреплённые точки, с массивным препятствием [24]. Некоторые случаи стеснённого удара с трением исследованы В.К. Асташёвым и В.И. Бабицким [8].

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие теории динамических процессов в так называемых самотормозящихся механических системах (СТС), широко применяемых в современной технике. Отличительной особенностью таких систем является доминирующее влияние сил трения на происходящие в них динамические процессы. Самотормозящиеся механизмы, составляющие основу СТС, можно трактовать как своеобразные механические детекторы. Особый интерес представляет анализ динамических явлений в СТС, поскольку они характерны для современных быстроходных машин, подверженных резкопеременным нагрузкам. Специфика динамических режимов в СТС состоит в том, что в процессе движения происходит пересопряжение контактирующих поверхностей в самотормозящейся паре (например, в червячной передаче). Более того, при определённых условиях указанное пересопряжение может вообще исключать движение системы, что проявляется как **самоблокирование** (или заклинивание) за счёт специфического проявления сил трения. Аналитически динамические процессы в СТС описываются нелинейными уравнениями движения с кусочно-непрерывными (при упрощающих предположениях – с кусочно-постоянными) коэффициентами. Поэтому СТС следует рассматривать как существенно нелинейные (или, по терминологии В. И. Бабицкого – В. Л. Крупенина, сильно нелинейные) системы, не поддающиеся обычно используемой линеаризации.

Здесь следует сделать два важных уточнения. Во-первых, сильная нелинейность проявляется даже в безударных режимах движения, когда связи, наложенные на звенья системы, являются удерживающими (двусторонними) вследствие отсутствия зазоров. Во-вторых, нелинейные свойства систем рассматриваемого типа обусловлены

существенной неидеальностью указанных связей, в которых касательные реакции определяют качественный характер движения. Динамическим исследованиям самотормозящихся систем посвящены многочисленные работы В.Л. Вейца и его учеников [25-28].

Однако наиболее рельефно существенно нелинейные свойства динамических процессов в СТС проявляются при анализе ударных взаимодействий и виброударных режимов движения. Наличие дополнительных удерживающих связей, наряду с неидеальностью неудерживающей связи, является отличительным признаком соударения в ударных самотормозящихся парах, возникающих при наличии зазора. Такая специфика не позволяет непосредственно применить к рассматриваемым задачам систему гипотез, принятую для вычисления послеударных скоростей в случае свободного соударения. Пренебрежение импульсами реакций удерживающих связей при исследовании соударений, имеющих выраженный **стеснённый** характер, приводит к ошибочным выводам.

Анализ соударения звеньев самотормозящейся пары осуществлялся в рамках концепции стеснённого удара с трением на основе универсальной клиновой модели. При этом для коэффициента восстановления принимается динамическая гипотеза, а касательный и нормальный ударные импульсы предполагаются связанными коэффициентом трения скольжения (гипотеза Рауса). Показано, что такое соударение приводит к прекращению или смене направления скольжения в самотормозящейся паре при ударе. Обнаружено, что при некоторых условиях возможен эффект «сверхвосстановления» нормальной составляющей относительной скорости звеньев при ударе. Исследовано явление динамического заклинивания в беззазорных СТС, относящееся к классу парадоксов Пэнлеве. Показано, что традиционное представление о мгновенной остановке звеньев является неточным. Более глубокий анализ позволяет утверждать, что в данном случае реализуется **бесконечноударный** затухающий режим типа скользящего движения, или квазипластического удара [29]. При этом, несмотря на стереомеханическую концепцию, используемая модель соударения учитывает в неявной форме деформируемость контактирующих поверхностей.

Рассматривается также расширенный класс стеснённых соударений, когда одно из взаимодействующих звеньев имеет две степени свободы. Применительно к червячному механизму это означает, что червяк, помимо основного вращательного, имеет дополнительное осевое перемещение. Исследование показало, что учёт дополнительной степени свободы может приводить к сужению множества систем, обладающих эффектом динамического заклинивания. Влияние импульса силы трения приводит и к другим нестандартным явлениям. Например, одно из соударяющихся звеньев может **дважды** в процессе взаимодействия изменять направление своего движения. Указанное связано с тем, что соударение подразделяется на разнотипные в плане относительного скольжения звеньев интервалы, характеризующиеся различными кинематическими закономерностями. Выполнено разбиение пространства параметров на области, соответствующие законам реализации разнообразных режимов соударения.

На основе подробного исследования закономерностей стеснённого удара с трением построена теория **стационарных виброударных** движений СТС. Эти движения действительно могут возникать в многомассовых машинных агрегатах, включающих соединительные упругие звенья, самотормозящиеся пары с зазором и приводной двигатель. Показано, что при некоторых условиях в СТС не могут существовать устойчивые равновесные режимы с непрерывным контактом звеньев самотормозящей пары. В результате создаются условия для возбуждения виброударных режимов. Установлено, что с энергетической точки зрения в СТС действительно могут возникать незатухающие **виброударные автоколебания** при отсутствии внешнего периодического воздействия. При этом, вследствие специфики стеснённого соударения,

энергия колебательной системы пополняется в момент удара за счёт приводного двигателя.

Определены параметры виброударных периодических движений при помощи точного численно-аналитического метода. Эти движения не являются правильными, а складываются из периодически повторяющихся совокупностей неидентичных интервалов. Периодические режимы характеризуются значительным многообразием, отличаясь друг от друга типом соударений и их числом за период. Теоретически обосновано также существование виброударных колебаний, включающих участки квазипластических соударений.

На основе процедуры, характерной для метода гармонического баланса, получена система трансцендентных уравнений для отыскания параметров первой гармоники виброударных колебаний. Эти уравнения трансформируются применительно к тому или иному типу виброударных режимов. Показано, что в большинстве случаев приближённые методы не приводят к удовлетворительным результатам ввиду асимметрии колебательных движений и неидентичности закономерностей соударения на различных контактных поверхностях.

В заключение заметим, что обнаруженные нелинейные эффекты имеют не только теоретическое, но и прикладное значение, так как могут быть использованы при конструировании машин и механизмов виброударного типа. Вместе с тем, выполненный анализ позволяет объяснить и устранить причины возникновения выявленных режимов, если они оказываются нежелательными.

Литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 915 с.
2. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. – М.: ИЛ, 1953. – 256 с.
3. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. – М.: Мир, 1968. – 432 с.
4. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 492 с.
5. Нагаев Р.Ф. Квазиконсервативные синхронизирующиеся системы. – СПб.: Наука, 1996. – 252 с.
6. Кобринский А.Е., Кобринский А.А. Виброударные системы. – М.: Наука, 1973. – 592 с.
7. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1972. – 471 с.
8. Бабицкий В.И. Теория виброударных систем (приближённые методы). – М.: Наука, 1978. – 352 с.
9. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. – М.: Физматгиз, 1960. – 487 с.
10. Леви-Чивита Т. и Амальди У. Курс теоретической механики. Т. 2, ч. 2. – М.: ИЛ, 1951. – 555 с.
11. Раус Э.Дж. Динамика системы твёрдых тел. Т. 1. – М.: Наука, 1983. – 464 с.
12. Болотов Е.А. Об ударе двух тел при действии трения// Известия Московского инженерного училища. – 1908. – Ч. 1, вып. 2. – С. 43-55.
13. Плявниекс В.Ю. Пространственное соударение с переменным направлением скольжения// Вопросы динамики и прочности. Вып. 21. – Рига: Зинатне, 1971. – С. 37-46.
14. Bhatt V., Koechling J. Three dimensional frictional rigid body impact// ASME, J. Applied Mechanics – 1995. – V. 62, No. 4. – P. 893-898.
15. Keller J.B. Impact with Friction// Trans. ASME, J. Applied Mechanics. – 1986. – V.53, No. 1. – P. 1-4.

16. Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. – М.: Наука, 1964. – 412 с.
17. Малкин Д.Д. Косой удар и основные закономерности виброперемещения// Механика машин. Вып. 33-34. – М.: Наука, 1972. – С. 145-162.
18. Haslinger K.H., Steininger D.A. Experimental characterization of sliding and impact friction coefficients between steam generator tubes and AVB supports// J. Sound and Vibration. - 1995. – V.181, No. 5. – P. 851-871.
19. Brach R.M. Friction restitution and energy loss in planar collision// Trans. ASME, J. Applied Mechanics. – 1984. – V. 51, No. 1. – P. 164-170.
20. Нагаев Р.Ф., Аметшин И.Х. Об основной гипотезе стереомеханической теории удара// Тез. докл. XII Симпоз. «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем». – М.: ИМАШ РАН, 1998. – С.123-125.
21. Stronge W.J. Rigid body collisions with friction// Proc. Royal Soc. – London. – 1990. – Ser. A, V. 431, No. 1881. – P. 169-181.
22. Иванов А.П. Энергетика удара с трением/ ПММ. – 1992. – Т. 56, вып. 4. – С. 527 – 534.
23. Кориолис Г. Математическая теория явлений бильярдной игры. – М.: Гостехиздат, 1956. – 235 с.
24. Иванов А.П. Динамика систем с механическими соударениями. – М.: Международная программа образования, 1997. – 336 с.
25. Вейц В.Л., Мартыненко А.М. Автоколебания в механических кусочно-линейных системах// Нелинейные колебания и переходные процессы в машинах. – М.: Наука, 1972. – С. 283-294.
26. Вейц В.Л., Шнеерсон Е.З. О стеснённом ударе звеньев клинового самотормозящегося механизма// Машиноведение. – 1975. - №5. – С. 31-37.
27. Вейц В.Л., Шнеерсон Е.З. Об одной обобщённой модели ударного взаимодействия в самотормозящейся системе// Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2000. - № 1. – С. 16-22.
28. Вейц В.Л., Васильков Д.В., Гидаспов И.А., Шнеерсон Е.З. Динамика приводов технологических машин с самотормозящимися механизмами. Ч. 5. – Автоколебания в приводах с самотормозящимися механизмами. - СПб.: Изд-во СПбИМАШ, 2003. – 162 с.
29. Нагаев Р.Ф. Механические процессы с повторными соударениями. – М.: Наука, 1985. – 200 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ, НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ: ЧЕЛОВЕК – ТКАНЫЙ ЭЛЕКТРОНАГРЕВАТЕЛЬ – ВНЕШНЯЯ СРЕДА

Шульженко А.А.¹, Модестов М.Б.²

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

¹ aa_shulzhenko.01@mail.ru, ² ecometer@mail.ru

Аннотация. Использование тканых электронагревателей в некоторых медицинских изделиях и одежде позволило получить отклик организма человека на тепловое воздействие в рамках системы тканый электронагреватель – человек – внешняя среда. В данной работе сделана попытка математического описания данного явления. Представляется возможным практическое применение полученных результатов при изучении физиологических и психофизиологических особенностей человека, а также при построении систем обогрева человека с автоматическими системами управления.

В последнее время все более широкое распространение получают тканые электронагреватели, применяемые в одежде, а также в ряде других изделий с электрообогревом. Связано это, в первую очередь с тем, что тканые нагреватели обеспечивают не только повышение теплозащитных свойств, а и возможность регулирования этими теплозащитными свойствами одежды с электрообогревом в широких пределах. Кроме того, тканые нагреватели на основе хлопчатобумажных или льняных нитей пропускают воздух и влагу, что позволяет им хорошо адаптироваться к условиям, возникающим на поверхности тела человека. Как хорошо известно [1], при повышении температуры на поверхности тела человека свыше 33°C включается механизм терморегуляции, и на поверхности кожи начинает выделяться пот. Выделение пота приводит к снижению температуры на поверхности кожи. Проведенные эксперименты с ткаными нагревателями, используемыми для обогрева тела человека, показали, что в процессе выделения пота в большинстве случаев носит циклический характер, состоящий из многократного выделения и высушивания пота. При измерениях температуры на внутренней поверхности тканого нагревателя наблюдаются многократные колебания температуры. В работе [2] были сделаны попытки сформулировать подход к тому, как создается температура на поверхности тканого нагревателя, находящегося в непосредственной близости от тела человека. Были определены общие причины возникновения этого эффекта, и на основании проведенных экспериментов констатировалось, что существует возможность измерения изменений температуры с помощью термопары на поверхности тканого нагревателя в пространстве между тканым нагревателем и телом человека, но не было сделано математического описания тепловых процессов, происходящих в этом пространстве. Поэтому, с целью получения математической модели всего процесса необходимо подробно рассмотреть отдельные физические процессы, происходящие в этом пространстве при подаче теплового сигнала, сделать их описание, а так же подробно сформулировать действующие граничные условия.

Создание математической модели даст возможность: изучить степень влияния многочисленных составляющих входящих в систему: тканый электронагреватель – человек – внешняя среда; получить информацию о возможности использования различных теплоизоляционных, теплоотражающих материалов и их сочетаний при построении системы тканого электронагревателя; получить возможность оптимизации конструкции тканого электронагревателя; провести сопоставление математической модели с результатами испытаний, что позволит использовать ее для более глубокого

изучения физиологических и психофизиологических процессов, связанных с выделением пота у человека.

Рассмотрим ограничения, которые будем учитывать при построении модели.

Будем рассматривать тепловые процессы на внутренней поверхности тканого электронагревателя, между тканым нагревателем и телом человека (рис. 1).

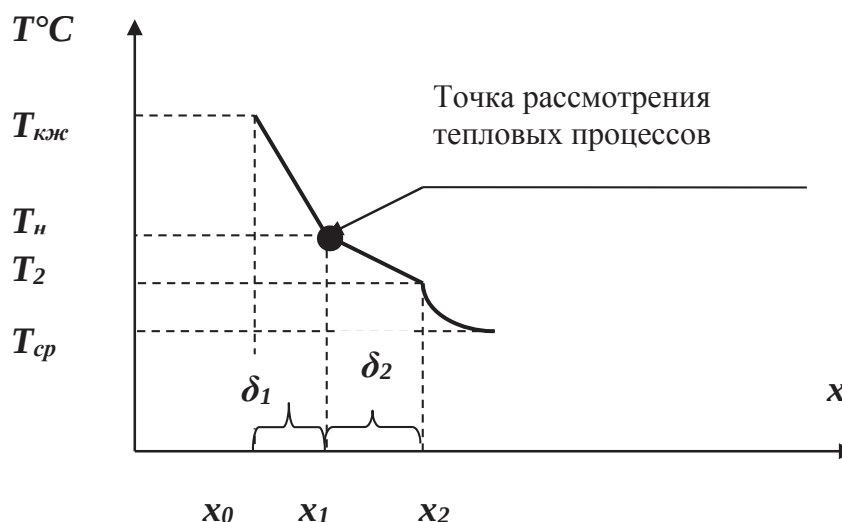


Рис.1. Расположение слоев в тонкой стенке между телом человека и внешней средой. T_n — температура в слое между телом человека и нагревателем при отключенном тканом электронагревателе; $T_{ср}$ — температура окружающей среды; $T_{кж}$ — температура на поверхности кожи человека; T_2 — температура на внешней поверхности теплоизоляционного слоя тканого электронагревателя; δ_1 — толщина слоя между телом человека и тканым электронагревателем; δ_2 — толщина теплоизоляционного слоя, расположенного на внешней поверхности тканого электронагревателя; x_1 — местонахождение тканого электронагревателя.

Пусть пространство между телом человека и нагревателем представляет собой параллелепипед, широкими гранями которого являются с одной стороны тело человека, а с другой стороны нагреватель. Расстояние между гранями — δ_1 .

Площадь обогрева участка тела человека такова, что можно считать ее плоской, тонкой стенкой. Для упрощения, пусть между нагревателем и телом человека, кроме вышеописанного слоя других слоев нет. Между внешней средой и тканым электронагревателем присутствует только один теплоизоляционный слой. Пусть толщина тканого электронагревателя $d \rightarrow 0$. Таким образом, между телом человека и внешней средой имеем тонкую стенку, состоящую из двух слоев. Расположение слоев в этой многослойной стенке показано на рис. 1.

Определим начальные и граничные условия в системе человек-внешняя среда-тканый электронагреватель.

Пусть в момент времени $t = 0$ $T(x,0) = T_n = const$, где T_n — температура по всей поверхности тканого нагревателя в начальный момент времени. Определим эту температуру.

Температура внешней среды в течение всего периода нагрева постоянна и равна $T_{ср}$. Будем полагать, что изменение температуры происходит одновременно по всей поверхности тканого электронагревателя. Будем считать, что на границе тела человека и пространства между телом человека и нагревателем действуют граничные условия первого рода. Пусть температура на поверхности кожи человека постоянна по всей поверхности тела и равна $T_{кж}$.

С другой стороны, на границе теплоизоляционного слоя нагревателя с внешней средой будут действовать граничные условия третьего рода, моделирующие конвективный теплообмен человека с окружающей средой

$$P / S = \alpha_{cp} \cdot (T_2 - T_{cp}) \quad (1)$$

P / S - мощность теплового потока с поверхности тканого электронагревателя во внешнюю среду; α_{cp} - коэффициент теплоотдачи с внешней поверхности теплоизоляционного слоя тканого электронагревателя; T_2 - температура на внешней поверхности теплоизоляционного слоя тканого электронагревателя; T_{cp} - температура внешней среды.

Нагрев человека осуществляется с помощью тканого нагревателя. Будем считать, что это пространство между телом человека и нагревателем в начальный момент времени ($t = 0$) заполнено воздухом. Это воздушное пространство на всем своем протяжении изотропно. Коэффициент теплопроводности этого пространства в начальный момент времени по всему объему этого пространства постоянен и равен $\lambda_1 = \lambda_n$.

При длительно отключенном нагревателе можно считать, что имеем установившийся температурный режим, поэтому температуру в месте нахождения нагревателя можно рассчитать, как для многослойной стенки. Тогда, согласно [3]

$$T_n = T_{cp} + (T_{кж} - T_{cp}) \cdot \left(\frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_{cp}} \right) \cdot \left(\frac{\delta_1}{\lambda_n} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_{cp}} \right)^{-1} \text{ при } t = 0, \quad (2)$$

λ_2 - коэффициент теплопроводности теплоизоляционного слоя, расположенного со стороны внешней поверхности тканого электронагревателя; α_{cp} - коэффициент теплоотдачи с внешней поверхности теплоизоляционного слоя тканого электронагревателя; λ_1 - коэффициент теплопроводности в слое между телом человека и нагревателем.

Далее будем рассматривать нестационарный тепловой процесс, и только временные характеристики.

Так как процесс изменения температуры в пространстве между телом человека и нагревателем, согласно условиям, происходит одновременно по всей плоскости нагревателя, то в этом случае можем рассматривать его только в одной точке. Для определенности будем считать, что эта точка находится на внутренней поверхности тканого электронагревателя. Так как в этой точке рассматривается тепловой процесс только во времени, то он учитывает с одной стороны влияние температуры тела, а с другой стороны теплоотдачу с поверхности теплоизоляционного слоя во внешнюю среду.

Включаем нагреватель. Температура в области нагревателя начинает расти. Происходит и нагрев воздуха в пространстве между телом человека и нагревателем. Как уже отмечалось, при достижении в этом пространстве температуры 33°C у человека включаются потовые железы, и начинает выделяться пот. В этом случае в слое между телом человека и нагревателем происходят под воздействием, в первую очередь, пота изменение сразу нескольких коэффициентов: теплопроводности, удельной массы, теплоемкости и, в целом, температуропроводности. Будем рассматривать изменение только коэффициента теплопроводности λ_1 . Определим условия, при которых происходит изменение этого коэффициента. Будем считать, что процесс заполнения потом слоя, находящегося между телом человека и нагревателем, будет происходить по всему объему, то есть в течение всего времени будет сохраняться изотропность этой среды. Будем считать, что пот в конечном итоге заполняет весь объем пространства между телом. Таким образом, под воздействием тканого электронагревателя все изменения, в том числе и пространственные, связанные с выделением и высушиванием пота, сведутся к изменению коэффициента теплопроводности во времени.

Как показывают экспериментальные данные (рис. 2) [2] закономерность изменения температуры, связанная с изменениями коэффициента теплопроводности, может быть разбита на четыре стадии.

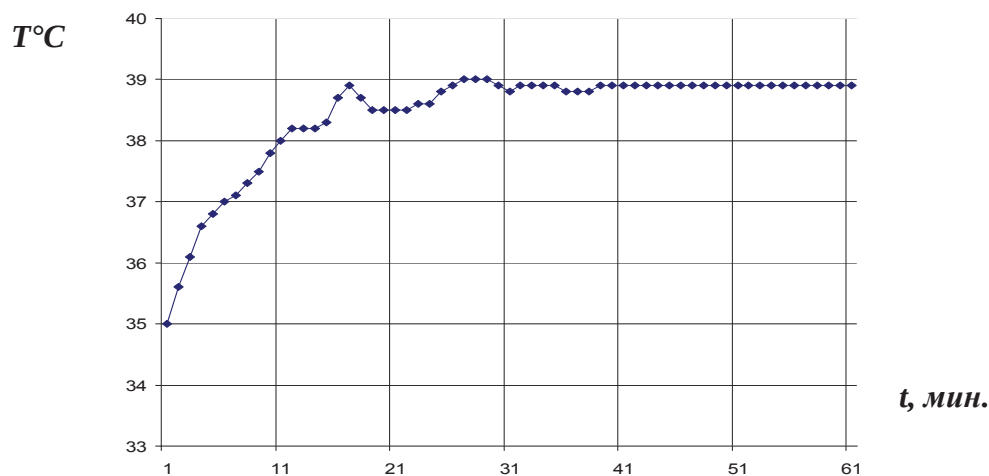


Рис. 2. Экспериментальные данные изменения температуры во времени в пространстве между телом человека и тканым электронагревателем.

Первая стадия – нагрев воздушного пространства между телом человека и тканым нагревателем от температуры T_n до температуры 33°C . В этот период коэффициент теплопроводности не изменяется $\lambda_l = \lambda_n = \text{const}$, а изменение температуры теплового источника во времени можно описать следующим образом [4]

$$T = (T_k - T_n) \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \text{ при } 0 \leq t/\tau \leq \tau_1/\tau, \quad (3)$$

T_k – максимальная температура нагрева поверхности тканого электронагревателя; T_{cp} – температура окружающей среды; τ – время, затраченное на весь процесс нагрева тканого электронагревателя; τ_1 – время, за которое происходит нагрев тканого электронагревателя до начала выделения пота; t – текущее значение времени.

Вторая стадия – появление и постепенное увеличение пота до полного заполнения всего объема пространства между телом человека и тканым электронагревателем. Согласно результатам испытаний [2], время выделения пота и заполнения пространства между телом и тканым электронагревателем занимает порядка 5 мин. Закономерность изменения коэффициента теплопроводности в этот период имеет характер

$$\lambda_1 = \lambda_n + (\lambda_k - \lambda_n) \cdot \cos(t/\tau) \text{ при } \tau_1/\tau \leq t/\tau \leq \tau_1/\tau + \pi$$

Третья стадия – высушивание пота с момента полного заполнения потом до полного высушивания пота по всему объему пространства между телом и тканым электронагревателем. В данном случае происходит испарение жидкости – пота, то есть осуществляется переход из жидкого состояния в газообразное, то есть, имеем один из вариантов задачи Стефана. Сделанные выше допущения и рассмотрение процессов только в одной точке, позволяет несколько упростить эту задачу, и рассматривать ее через призму изменения во времени коэффициента теплопроводности пространства между телом человека и тканым электронагревателем. Закономерность изменения коэффициента теплопроводности в этот период будет иметь вид

$$\lambda_1 = \lambda_n + (\lambda_k - \lambda_n) \cdot \cos(t/\tau) \text{ при } \tau_1/\tau + \pi \leq t/\tau \leq \tau_1/\tau + 2\pi$$

Согласно тем же экспериментальным данным процесс выделения и высушивания пота повторяется несколько раз. Поэтому полное выражение, описывающее изменение коэффициента теплопроводности от воздействия пота

$$\lambda_1 = \lambda_n + (\lambda_k - \lambda_n) \cdot \cos(t/\tau) \text{ при } \tau_1 / \tau \leq t/\tau \leq \tau_1 / \tau + n \cdot 2\pi \quad (4)$$

n - число циклов выделения пота.

В период прохождения второй и третьей стадий одновременно работает тканый электронагреватель

$$T = (T_k - T_n) \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \text{ при } \tau_1 / \tau \leq t/\tau \leq \tau_1 / \tau + n \cdot 2\pi, \quad (5)$$

Четвертая стадия – прекращение работы потовых желез. В этот период коэффициент теплопроводности не изменяется $\lambda_1 = \lambda_n = \text{const}$, и продолжается работа только тканого электронагревателя по закону (4)

$$T = (T_k - T_n) \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \text{ при } \tau_1 / \tau + n \cdot 2\pi \leq t \leq 1 \quad (6)$$

Тепловые процессы, происходящие в пространстве между тканым электронагревателем и человеком, можно описать, используя уравнение Фурье [5, 6]

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_1(t) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(t) \text{ при } x \in X, \quad t > 0 \quad (7)$$

ρ – плотность; c – теплоемкость; $f(t)$ – закономерность изменения температуры тканого электронагревателя.

Учитывая сделанные выше граничные условия, решение уравнения (7) можно привести к виду

$$T = T_n + K \cdot \lambda_1(t) + k \cdot f(t) \quad (8)$$

K, k - постоянные коэффициенты.

Таким образом, учитывая процессы, происходящие в точке на поверхности тканого электронагревателя и описанные (2), (3), (4), (5) и (6), уравнение (7) можно записать

$$T = T_{cp} + (T_{кж} - T_{cp}) \cdot \left(\frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_{cp}} \right) \cdot \left(\frac{\delta_1}{\lambda_n} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_{cp}} \right)^{-1} + k \cdot (T_k - T_n) \cdot (1 - e^{-t/\tau}) +$$

$$K \cdot \begin{cases} \lambda_n & \text{при } 0 \leq t/\tau \leq \tau_1 / \tau \\ (\lambda_n + (\lambda_k - \lambda_n) \cdot \cos(t/\tau)) & \text{при } \tau_1 / \tau \leq t/\tau \leq \tau_1 / \tau + n \cdot 2\pi \\ \lambda_n & \text{при } 0 \leq t/\tau \leq \tau_1 / \tau \end{cases} \quad (9)$$

Данные, полученные с помощью предлагаемой математической модели, описывающей нестационарные тепловые процессы, происходящие в области тканого электронагревателя, находящегося в непосредственной близости от поверхности тела человека, коррелируются с реальными тепловыми процессами. На рис. 2 показаны результаты испытаний нагревателя, находящегося на поверхности тела человека, а на

рис. 3 – показаны изменения температур в нагревателе, полученные с помощью построенной математической модели. Даже, несмотря на имеющиеся расхождения между реальной и математической моделями результаты, полученные с помощью данной модели, позволяют производить оценочные расчеты элементов тканых электронагревателей, предназначенных для использования в медицинской аппаратуре в качестве термодатчиков.

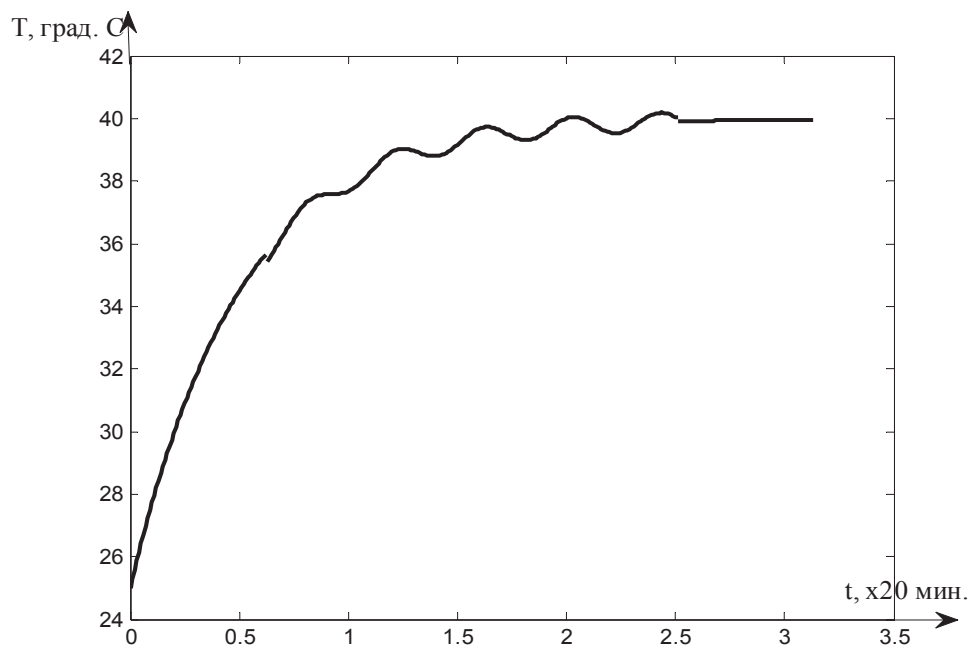


Рис. 3. Расчетные данные изменения температуры во времени в пространстве между телом человека и тканым электронагревателем, полученные по формуле (9).

Результаты данной работы могут быть использованы как специалистами в области физиологии и психофизиологии человека, так и специалистами в области медицинского приборостроения.

Литература:

1. Физиология человека. Под ред. В.М.Покровского, Г.Ф.Коротько. Сайт: <http://www.bibliotekar.ru/447/186.htm>
2. Шульженко А.А., Модестов Б.М., Модестов М.Б. Некоторые особенности теплового взаимодействия нагревателей и человека при контактном обогреве. М., Проблемы машиностроения и надежности машин, 2008, № 4, с. 97-102.
3. Кирпичев М.В., Михеев М.А., Эйгенсон Л.С. «Теплопередача», Л., «Государственное энергетическое издательство», 1940г., 291 с.
4. Кудинов В.А., Кудинов И.В. «Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности», М., Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012г., 280 с.
5. Мартинсон Л.К., Ю.И.Малов «Дифференциальные уравнения математической физики», М., Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2011г., 368 с.
6. Самарский А.А., Вабишевич П.Н. «Вычислительная теплопередача», М., Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009г., 784 с.

БЕЗРАЗМЕРНАЯ ОБРАБОТКА ДЕТАЛЕЙ В БАРАБАННОМ ГАЛТОВАТЕЛЕ НА БАЗЕ 5R МЕХАНИЗМА

Яруллин М.Г.^{1,2}, Исянов И.Р.²

¹Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева - КАИ, Казань, Россия, Yarullinmg@yahoo.com

²Казанский государственный архитектурно – строительный университет
Казань, Россия, isyanov1993@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрен механизм галтователя для безразмерной обработки поверхности небольших заготовок и деталей от заусенцев. Исследована его структура базового механизма и описан принцип работы. Приведены кинематические параметры характерной точки механизма.

Устройства и методы безразмерной обработки деталей находят широкое применение в различных отраслях промышленности, например, в машиностроении, в медицине, в ювелирном деле, и относятся к устройствам для очистки поверхностей небольших заготовок и деталей от заусенцев, окалины, формовочной земли, коррозии, загрязнений.

Существует ряд производительных методов безразмерной обработки, среди которых особенно широкое распространение получили методы безразмерной обработки деталей в среде свободных тел абразива, они позволяют производить обработку деталей со сложными поверхностями, повысить качественные показатели обрабатываемых поверхностей, а также исключить или свести к минимуму непроизводительный труд. Речь идет о таких методах безразмерной обработки в среде свободных тел абразива, как галтовка, а именно барабанная, вибрационная, гидроабразивная, магнито-абразивная, центробежная обработка и др. Достоинством большинства выше перечисленных методов является возможность обработки одновременно большого количества деталей при загрузке их навалом.

Дальнейшее развитие метода безразмерной обработки деталей сложной формы в среде свободных тел абразива имеет определенные трудности. Они связаны с недостаточной интенсификацией процесса обработки в среде свободных тел абразива и отсутствием режимов процессов обработки деталей сложной формы.

Поэтому возникает необходимость в исследовании и оптимизации технологических параметров галтователей, для повышения эффективности в целом и одновременного улучшения качества безразмерной обработки деталей путем расширения технологических возможностей устройств.

Одним из инновационных решений по безразмерной обработке деталей в среде свободных тел абразива является создание предложенной нами конструкции галтовочной установки барабанного типа на базе 5R рычажно-планетарного механизма. Плоский 5R рычажно-планетарный механизм был получен, с помощью синтеза простого четырехрычажного механизма путем добавления дополнительного звена в виде стойки (рис.1).

Не изменяя структурных параметров этого четырехрычажного механизма, но освободив звено 4 и добавив ещё одно дополнительное звено - стойку 5, можно получить двухподвижный 5R рычажно-планетарный механизм [1]. Степень подвижности, полученного механизма определяется по формуле Чебышева:

$$W = 3 \cdot (m - 1) - 2 \cdot p_1 - p_2 = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 0 = 2. \quad (1)$$

Таким образом, полученный механизм является двухподвижным и имеет сложное пространственное планетарно-качательное вращение.

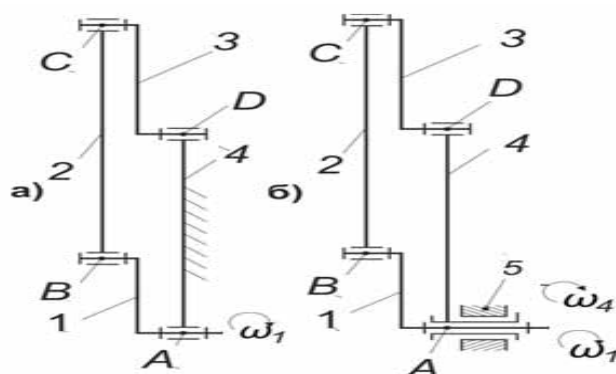


Рис. 1. Схемы для обоснования способа образования плоского 5R рычажно-планетарный механизма

Для подробного пояснения технической сущности предлагаемого нами конструкции барабанного галтователя представлена полуконструктивная (а) и кинематическая схема (б) устройства на рисунке 2.

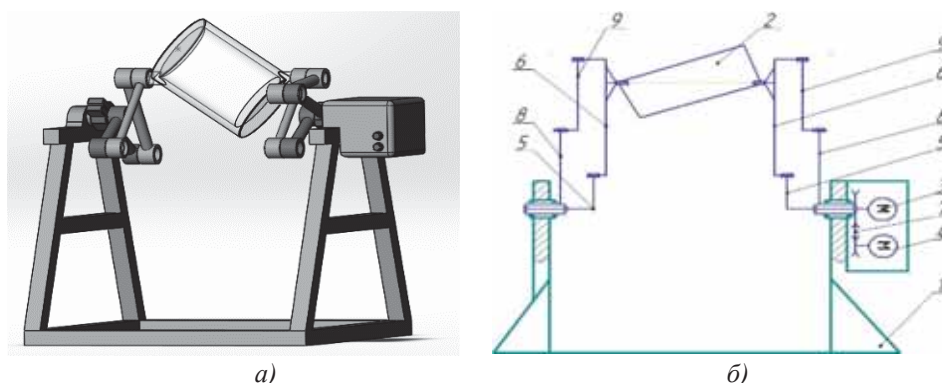


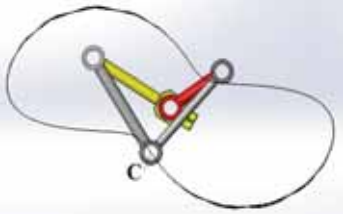
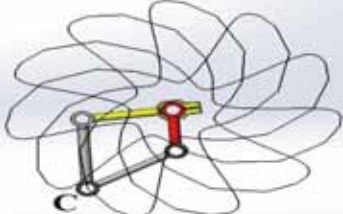
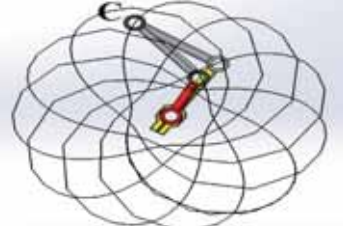
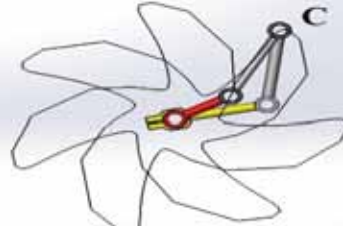
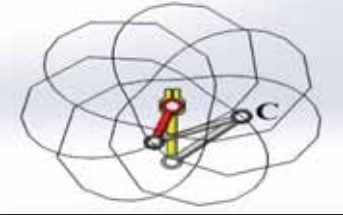
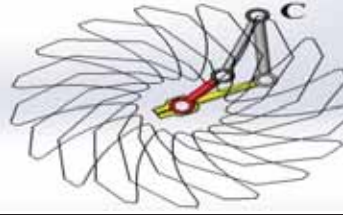
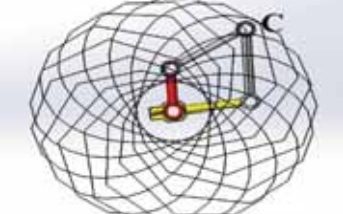
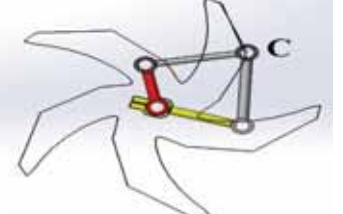
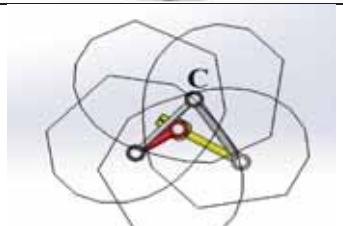
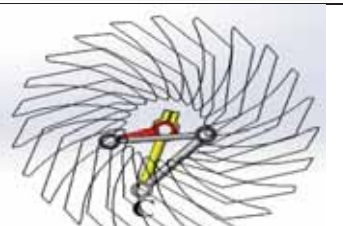
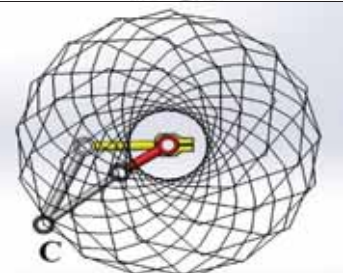
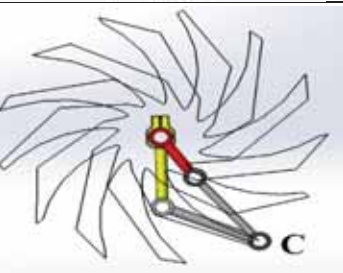
Рис. 2. Полуконструктивная (а) и кинематическая схемы (б) барабанного галтователя на базе двухподвижного рычажно-планетарного механизма

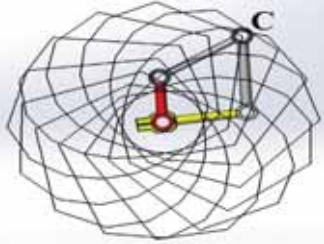
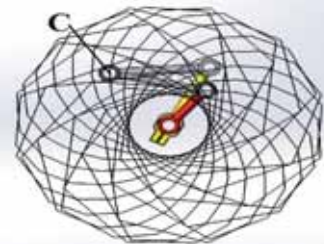
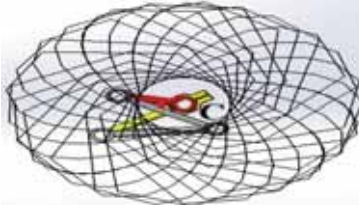
Барабанный галтователь состоит из рамы 1, барабана 2, который шарнирно соединен с двумя рычажно-планетарными механизмами, кинематически связанными с электродвигателями 3 и 4. Рычажно – планетарные механизмы состоят из ведущих кривошипов 5, ведущих стержней 8, балансиров 6, шатунов 9, соединенных шарнирно между собой, с рамой и с барабаном. Барабан выполнен в виде цилиндрической емкости, ось вращения которой пересекает ось цилиндра под определенным углом, обеспечивающим свободное инерционное вращение, получая сложное пространственное планетарно-качательное движение при разнотемповых вращениях ведущих кривошипов и стержней, тем самым производит безразмерную обработку деталей в барабане, расширяя технологические возможности галтователя с одновременным повышением качества обработки, повышая эффективность его в целом [2].

Условия работы рычажно – планетарного механизма характеризуются значительными и быстропеременными усилиями, возникающими в них при различных скоростях вращения электродвигателей. Величина и характер изменения механических нагрузок, приходящихся на эти детали, определяются на основе кинематического и динамического исследования рычажно – планетарного механизма.

Для получения кинематических параметров исследована характерная точка С, изображенная на рисунке 1. Для этого была составлена 3D модель этого устройства. На основании CAE анализа 3D модели в системе Solid Works, получена траектория движения этой точки для различных угловых скоростей ω_1 - ведущего кривошипа 5 и ω_2 - ведущего стержня 8. Траектории движения характерной точки С приведены на таблице 1.

Таблица 1. Траектории движения характерной точки С

№	Скорость вращения, мин ⁻¹ .	Траектория движения точки С	№	Скорость вращения, мин ⁻¹ .	Траектория движения точки С
1	ω_1 -20 ω_2 -20		8	ω_1 -35 ω_2 -20	
2	ω_1 -20 ω_2 -35		9	ω_1 -50 ω_2 -20	
3	ω_1 -20 ω_2 -50		10	ω_1 -65 ω_2 -20	
4	ω_1 -20 ω_2 -65		11	ω_1 -80 ω_2 -20	
5	ω_1 -20 ω_2 -80		12	ω_1 -95 ω_2 -20	
6	ω_1 -20 ω_2 -95		13	ω_1 -110 ω_2 -20	

№	Скорость вращения, мин ⁻¹ .	Траектория движения точки С	№	Скорость вращения, мин ⁻¹ .	Траектория движения точки С
7	ω_1 -20 ω_2 -110		14	ω_1 -25 ω_2 -95	
15	ω_1 -70 ω_2 -30		16	ω_1 -45 ω_2 -80	

Проведя анализ движения характерной точки С, можно сделать вывод, что если значения угловых скоростей $\omega_1 < \omega_2$ то точка С имеет более равномерную траекторию вращения по окружности.

На основании САЕ анализа 3D модели в системе Solid Works проведен подробный анализ движения характерной точки С для заданных значений угловых скоростей в интервал времени $t = 1,3$ секунды. Вращение ведущего кривошипа задается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_1 = 25$ мин⁻¹, а вращение ведущего стержня выполняется в противоположную сторону с угловой скоростью $\omega_2 = 95$ мин⁻¹. На рисунке 3 приведена траектория движения характерной точки С в интервал времени $t = 1,3$ сек.

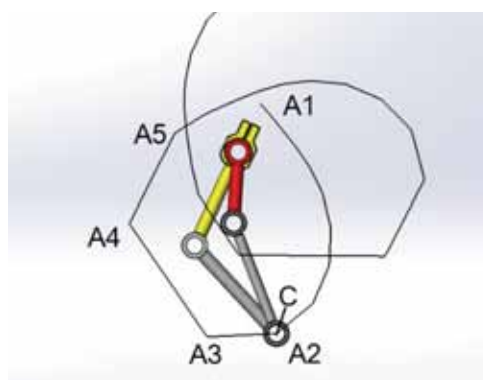


Рис. 3. Траектория движения точки С в интервал времени $t = 1,3$ сек

Движение характерной точки С проходит по сложной кривой траектории. В положении от точки А2 до точки А5 характерная точка С движется по ломанной кривой в течении промежутка времени равное 0,6 сек. В этом интервале промежутка времени происходит резкое изменение скорости и ускорения. Для наглядности на рисунке представлены графики проекции перемещения, скорости и ускорения на координатную ось (рис. 4).

Из графиков проекции перемещения, скорости и ускорения видно, что рычажно – планетарный механизм испытывает скачкообразное увеличение или уменьшение скорости и ускорения. Можно предположить, что в барабанном галтователе происходит динамическое соударение, истирание обрабатываемых деталей и свободных тел абразива под действием срезающих сил инерции выраженной формулой 2:

$$F_{ин} = m_i \cdot a_i \quad (2)$$

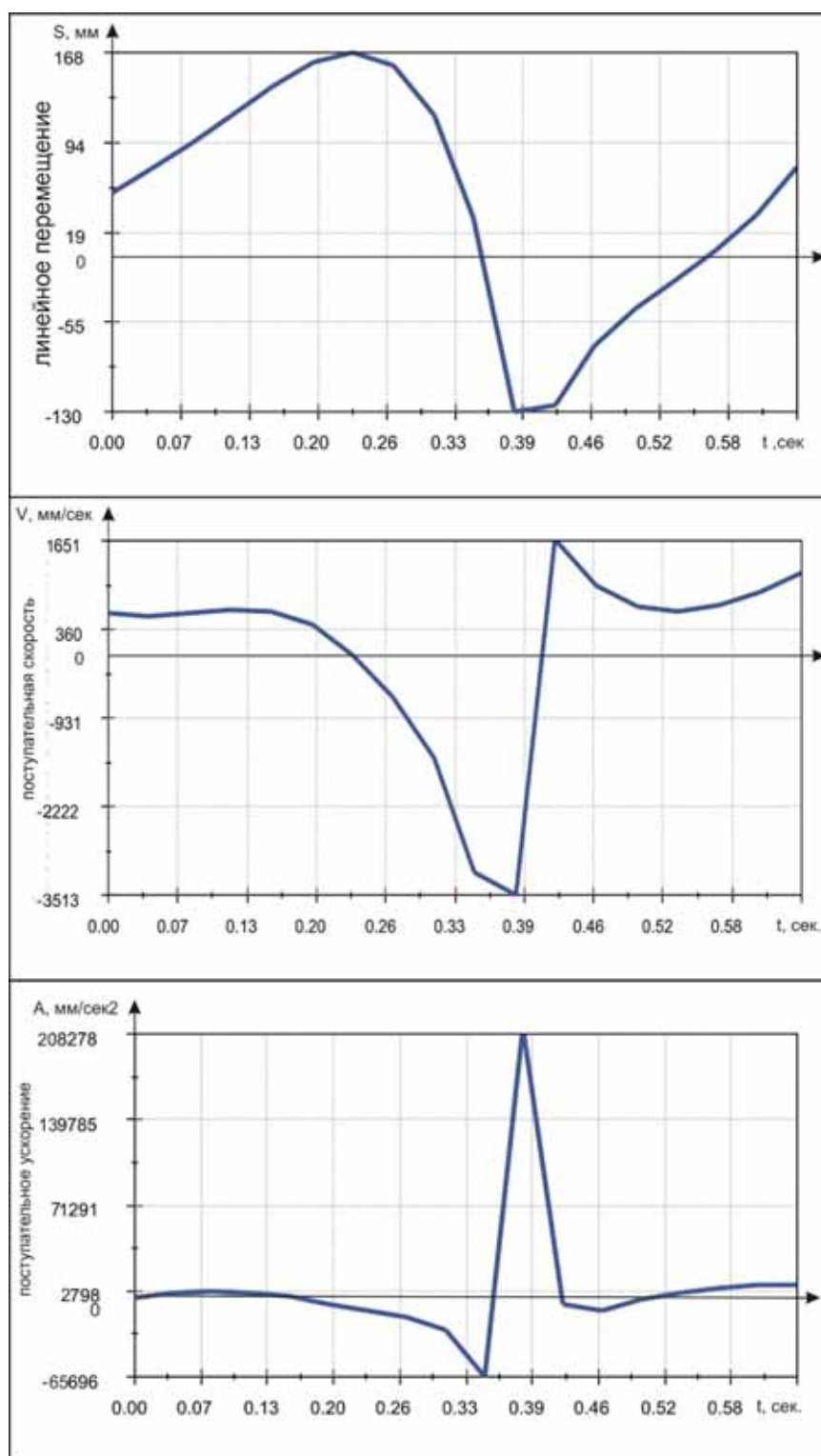


Рис. 4. Графики проекции перемещения, скорости и ускорения

где: m_i – масса i -того абразивного тела;
 a_i – поступательное ускорения i -того тела.

Из этого следует что в барабанном галтователе, выполненный на базе 5R рычажно-планетарного механизма, выполняется динамическая безразмерная обработка деталей за счет сложной траектории движения.

Литература

1. Яруллин М.Г., Мингазов. М.Р. Способ образования и синтез двух подвижных 5R-механизмов// Научные труды III-й Международной конференции «Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении». – М. Издательский дом «Спектр», 2014. – с. 380-382.
2. Яруллин М.Г., Мингазов М.Р., Исянов И.Р. Многорежимный пространственный галтователь на базе двух подвижного 5Rрычажного механизма для безразмерной обработки детали / Поиск эффективных решений в процессе создания и реализации научных разработок в российской авиационной и ракетно-космической промышленности: Международная научно-практическая конференция, 5-8 августа 2014 г.: сборник докладов. Том I. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2014. – с. 362-365.

ДЕЗИНТЕГРАТОР С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКОЙ ДРОБЛЕНИЯ

Яруллин М. Г.¹, Хабибуллин Ф.Ф.²

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.

Туполева – КАИ

Казанский государственный архитектурно – строительный университет

Казань, Россия

¹ yarullinmg@yahoo.com, ² fanil_arisk@mail.ru

Аннотация. Дробление песчинки со снятием внешней оболочки повышает ее вязущую активность и повышает прочность раствора. В статье описывается динамика процесса дробления песчинки в двухподвижном конусном дезинтеграторе. Представлено область применения и принцип работы предлагаемого устройства. Составлен кинематическая, динамическая модель процесса дробления песчинки.

Введение. Для рационального осуществления физико-химических реакций и технологических процессов целесообразно предварительно или в ходе этих процессов диспергировать вещества. Диспергация твёрдых тел (помол) уже давно превратилась в особую отрасль технологической науки, которая занимается механическими силами, необходимыми для разрушения структуры твёрдых тел, а также исследованием и конструированием рациональных для помола дезинтеграторов и мельниц. На основании тщательных исследований физико-химических свойств твёрдых веществ, обработанных в дезинтеграторах, механическая активация описывается как следствие изменений вида и количества дефектов структуры материалов. Так же известно, что, в основном, развитие их достигает некоторого максимального значения, что при продолжающемся процессе обработки часть ранее возникших дефектов исчезает. В таких случаях механическая активация может быть увеличена только путём более интенсивной обработки.

Дезинтегратора с управляемым режимом дробления. Для пояснения технической сущности предлагаемого дезинтегратора с управляемым режимом дробления представлена его структурная схема на рис. 1 и на рис.2 представлена рабочие поверхности конусов.

В дезинтегратор измельчаемый материал подается через загрузочное отверстие 15 в рабочую камеру 19, в которой идет процесс дробления, смешения и активации поверхности этого материала, как хрупкого, так и твердого. Для увеличения скорости измельчения и интенсивности, качества механоактивации материала внутренний конус 6 и внешний конус 12 вращаются в противоположенных направлениях. Измельченный материал из рабочей камеры 19 проходит в нижнюю часть корпуса 1 и через отгрузочное отверстие 16 попадает в желоб 20. В результате измельченный, смешанный активированный материал (обработанный) в рабочей камере отгружается в желоб 20 под заданным углом, превышающем угол трения материала на 5-15°, зависящим от свойств конкретного обрабатываемого материала и затем попадает в бункер 21 [1].

Основным критерием активирования является увеличение степени искажения кристаллической структуры дробленых материалов. Учитывая специфику процесса высокоскоростного удара, происходит некоторое изменение физико-механических свойств материалов, дробленых на конусном дезинтеграторе. При дроблении многократными ударами с минимальными промежутками между ними, продукт приобретает более высокую активность [2].

При ударном дроблении разрушающий эффект зависит от мощности, угловой скорости, момента, массы и его линейной скорости.

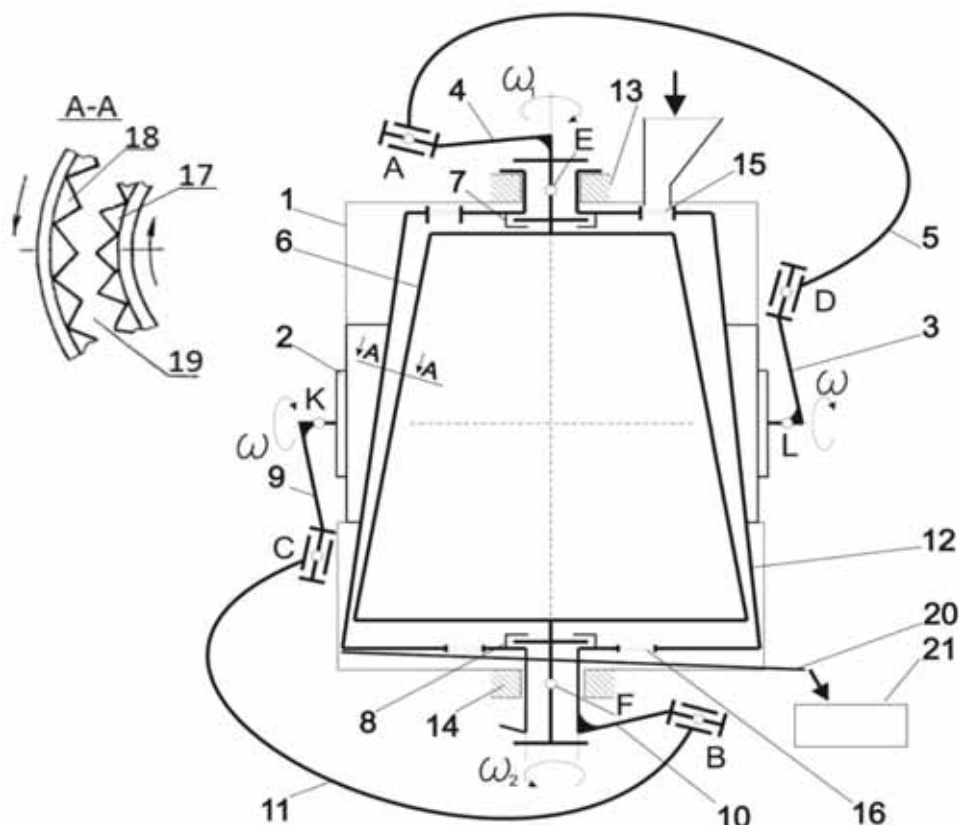


Рис. 1. Структурная схема дезинтегратора с управляемым режимом дробления
 где: 1 - корпус; 2 - шаговый двигатель; 3 - ведущий правый пространственный кривошип; 4 - ведомый правый пространственным кривошипом; 5 - правый пространственный шатун; 6 - внутренний конус; 7,8 - подшипниковые опоры внутреннего конуса; 9 - ведущий левый пространственный кривошип; 10 - ведомый левый пространственный кривошипом; 11 - левый пространственный шатун; 12 - внешний конус; 13,14 - подшипниковые опоры внешнего конуса; 15 - загрузочное отверстие; 16 - отгрузочное отверстие; 17 - зубчатое ребро внутреннего конуса; 18 - зубчатое ребро внешнего конуса; 19 - рабочая камера; 20 - желоб; 21 - бункер.

Кинетическая энергия тела в момент удара определяется по известной формуле:

$$E = \frac{mv^2}{2}, \text{ где } m - \text{масса песчинки, } v - \text{скорость песчинки.}$$

В дезинтеграторе частицы песка приобретают значительную кинетическую энергию, часть которой переходит поверхностную энергию тепла. Изменение

$$\text{кинетической энергии частиц выражается } \Delta E = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}.$$

Большая её доля идет на преодоление трения между частицами, мелющими телами поверхностями агрегата, изменению кинетической энергии материала. Таким образом, эта энергия в конечном итоге расходуется на измельчение и активацию материала. Работа разрушения [2]: $E_1 - E_2 = A$, $dA = F_{\text{раз}} ds$, где $F_{\text{раз}}$ – разрушающая сила песчинки песка; ds – толщина разрушаемого слоя песчинки.

Учитывая структуру измельчаемого материала, так же учитывая амплитуду и частоту ударов рабочих поверхностей конусов с частицами измельчаемого материала, был спроектирован привод. Этот привод содержит парадоксальный пространственный шарнирный четырехзвенник, называемый механизмом Беннетта. Парадоксальным механизмом его считают из-за того, что согласно известной формуле Сомова-Малышева подвижность этого механизма равно -2. Однако на практике механизм Беннетта

подвижен, более того, он имеет 32 модификации и его подвижность обусловлена дополнительными условиями, которые накладываются на механизм[3]:

1) длины кратчайших расстояний противолежащих звеньев равны:

а) $l_3 = l_4$, где: l_3 – длина кратчайшего расстояния между осями шарниров ведущего кривошипа; l_4 – длина кратчайшего расстояния между осями шарниров ведомого кривошипа;

б) $l_9 = l_{10}$, где: l_9 – длина кратчайшего расстояния между осями шарниров шатуна, l_{10} – длина кратчайшего расстояния между осями шарниров стойки.

2) геометрические оси противоположенных кинематических пар раздвинуты друг относительно друга на равные углы α_3 и α_9 :

а) $\alpha_3 = \alpha_4$, где: α_3 – угол скрещивание осей шарниров ведущего кривошипа, α_4 – угол скрещивание осей шарниров ведомого кривошипа;

б) $\alpha_9 = \alpha_{10}$, где: α_3 – угол скрещивание осей шарниров шатуна, α_4 – угол скрещивание осей шарниров стойки.

3) концы кратчайших расстояний звеньев совпадают,

4) выполняется равенство: $\frac{l_3}{l_4} = \pm \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_4}$.

Определение и исследование кинематических параметров дезинтегратора с пространственным приводом необходимо потому, что, во-первых, эти параметры являются факторами, влияющими на качество измельчения, активации и на искажения кристаллической решетки, во-вторых, они служат справочным материалом для определения динамической нагрузки, давлений в шарнирных узлах.

Для определения кинематических параметров дезинтегратора с пространственным приводом используем два метода: первое - определение кинематических параметров звеньев, в частности конусов уравнениями движения, второе – определение кинематических параметров построением графика движения на основании САЕ анализа 3D модели в системе Solid Works.

Для получения зависимостей угловых скорости ведомого кривошипа от положения ведущего кривошипа имеет вид [4,стр.71]:

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{-\cos\alpha_3 \cdot \sin\varphi}{1 - \sin\alpha_3 \cdot \cos\varphi}\right), \quad \gamma = \arccos\left(\frac{\cos\varphi - \sin\alpha_3}{1 - \sin\alpha_3 \cdot \cos\varphi}\right), \quad (1)$$

Как видим, угол γ не пропорционален углу φ . Дифференцируя по времени одно из выражений (1) получаем угловую скорость

$$\omega_4 = -\omega_3 \cdot \cos\alpha_3 / (1 - \sin\alpha_3 \cdot \cos\varphi). \quad (2)$$

Выражение показывает, что при $\omega_3 = \text{const}$ угловая скорость кривошипа ω_4 не постоянная величина, а зависит от положения ведущего кривошипа, т.е. от угла φ . Причем максимального значения по абсолютной величине ω_4 достигает, при $\varphi=0$ имеет вид

$$\omega_{4_{\max}} = \omega_3 \cdot \cos\alpha_3 / (1 - \sin\alpha_3) \quad (3)$$

а минимального - при $\varphi=180^\circ$, т.е.

$$\omega_{4_{\min}} = \omega_3 \cdot \cos\alpha_3 / (1 + \sin\alpha_3) \quad (4)$$

Тогда коэффициент неравности вращения ведомого кривошипа

$$\delta = (\omega_{4_{\max}} - \omega_{4_{\min}}) / \omega_{4_{\text{cp}}} = 2 \cdot \tan\alpha_3 \quad (5)$$

здесь принято, что $\omega_{4_{\text{cp}}} = \omega_3$.

Продифференцировав по времени выражение (4) получим угловое ускорение ведомого кривошипа $\varepsilon_4 = \omega_3^2 \cdot \sin\alpha_3 \cdot \cos\alpha_3 \cdot \sin\varphi / (1 - \sin\alpha_3 \cdot \cos\varphi)^2$.

Анализ полученных уравнений (1) - (5) показывает, что движение ведомого кривошипа неравномерное (рис.2). Что в свою очередь приводит к неравномерности движения рабочих органов дезинтегратора, в результате процессы диспергирования и активация будет проходить в среде с изменяющимися угловыми скоростями, угловыми ускорениями, т.е. более интенсивно.

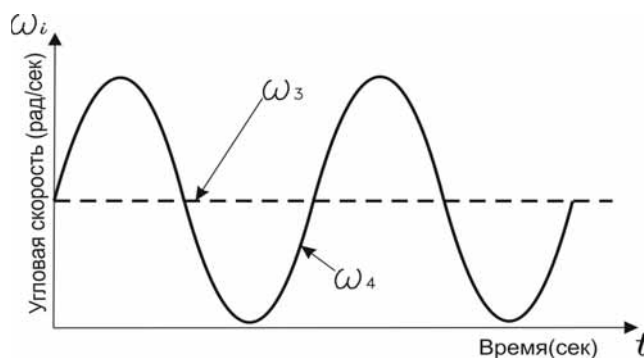


Рис.2. График изменения угловых скоростей ведомого (ω_3, ω_9) и ведущего (ω_4, ω_{10}) кривошипа.

Разработанная нами 3D модель дезинтегратора системе Solid Works и проведенный CAE анализ этой модели показывают достоверность как полученных теоретических уравнений кинематики, так и 3D модели.

В конструкции дезинтегратора привод внутреннего конуса осуществляется через параллелограмм Биннетта, а внешний конус приводится в движение от того же электродвигателя при помощи антипараллелограмма Биннетта. В результате как было показано на (рис.2) при равномерном вращении вала двигателя и ведущих кривошипов 3,9 ведомые кривошипы 4,10 вращаются неравномерно. Поскольку угловые скорости ведомых кривошипов в параллелограмме и в антипараллелограмме Биннетта противоположные кинематика рабочих конусов дезинтегратора имеет вид, представленный на (рис.3). Причем изменяя фиксированные положения ведущих кривошипов 3,9 относительно друг друга регулируется разность фаз.

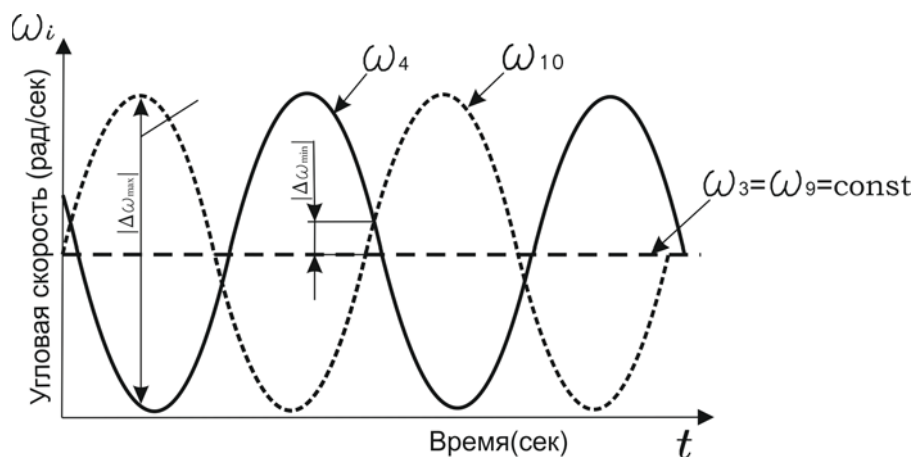


Рис.3. График изменения угловых скоростей ведущих (3,9) и ведомых (4,10) кривошипов.

Таким образом, предлагаемая конструкция дезинтегратора позволяет повышать интенсивность дробления и оптимизировать динамику работы самого устройства.

Вывод. Разрабатываемый и исследуемый дезинтегратор относится к устройствам для тонкого дробления, смешивания и механической активации материалов, в том числе с различной структурой, и может быть использовано в различных отраслях промышленности, где применяется технология дезинтеграции. Предлагаемая

конструкция дезинтегратора спроектирована как универсальный измельчитель-активатор. Достоинствами парадоксального пространственного шарнирного привода являются:

- возможность преобразовывать равномерное движение в неравномерное движение;
- возможность получение от одного электродвигателя два вращательных движения в разных направлениях;
- возможность вращательного движение конусов в разных фазах.

Литература

1. Пат. 2538389 Российская Федерация, МПК В02С2/04, В02С13/20. Дезинтегратор /Яруллин М. Г., Хабибуллин Ф.Ф., Исянов И. Р.// заявитель и патентообладатель Казанский государственный архитектурно-строительный университет (КГАСУ) № 2013125888/13 заявл. 04.06.2013, опубл. 10.12.2014 Бюл. № 34-5с.:ил.
2. Хабибуллин Ф.Ф. Моделирование динамического процесса дробления песчинки в двухподвижном конусном дезинтеграторе. / Ф.Ф. Хабибуллин, И.Р. Исянов, М.Г. Яруллин // Вибрационные технологии, мехатроника и управляемые машины: сб. науч. Ст.: в 2ч. Ч1 / редкол.: С.Ф. Яцун (отв.ред.) [и др.]; Юго-Зап. Гос.ун-т. Курск, 2014. 384с. В 41 С. 274-279 ISBN 978-5-7681-0924-0
3. Яруллин М.Г., Мингазов М.Р. Синтез структурных модификаций механизма Беннетта// Современное машиностроение. Наука и образование: материалы 4-й Международной научно-практической конференции / под ред. М.М. Радкевича и А.Н. Евграфова. – СПб.: Изд-во Политехн. Ун-та, 2014. – с. 271-280.
4. М.Г.Яруллин Трёхмерная гидродинамическая очистка изделий. Научное издание- Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2001.-175 с.