РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Институт прикладной математики
Дальневосточный федеральный университет

XXXVII
ДАЛЬНЕВОСТОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА-СЕМИНАР ИМЕНИ АКАДЕМИКА Е.В. ЗОЛОТОВА

08 сентября – 14 сентября 2013 г.
Владивосток

Сборник докладов:

Проблемы теоретической и прикладной математики, компьютерных технологий и их приложений

Владивосток
2013

УДК 517, 519, 531/539

XXXVII Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова, 08 сентября – 14 сентября 2013 г., Владивосток : сб. докл. [Электронный ресурс]. – Владивосток : Дальнаука, 2013 – 262 с.; объем 5,4 Мб; 1 опт. компакт-диск (CD-ROM).
ISBN 978-5-8044-1399-7

Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова является традиционным научным мероприятием на Дальнем Востоке России. Тематика школы предполагает обсуждение проблем математики, механики и информатики, а также их приложений. На конференции традиционно выступают ведущие ученые России с обзорными докладами, отражающими современное состояние науки в указанных направлениях. Среди участников представители различных научных центров России: из Владивостока, Хабаровска, Красноярска, Новосибирска, Москвы, Апатитов. Пленарные и секционные доклады распределены по направлениям: Математические основы моделирования; Математическое моделирование физических явлений и процессов; Компьютерные технологии; Компьютерная безопасность; Теория вероятностей и ее приложения. В работе конференции активно участвуют студенты старших курсов, аспиранты и молодые научные сотрудники дальневосточных НИИ и вузов.

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. Г.Ш. Цициашвили

Организатор конференции – Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук прикладной математики ДВО РАН.

Школа-семинар проводится при поддержке Президиума ДВО РАН и Российского фонда фундаментальных исследований, проект 13-01-06071.

ISBN 978-5-8044-1399-7

Программный комитет:

Дубинин В.Н., чл.-корр. РАН (ИПМ ДВО РАН, Владивосток) — председатель;
Тайманов И.А., академик РАН (Новосибирск, Россия);
Алексеев Г.В. д.ф.-м.н. (Владивосток, Россия);
Аносов В.Д. д.ф.-м.н. (Москва, Россия);
Артемьева И.Л. д.т.н. (Владивосток, Россия);
Воеводин В.В. чл.-корр. РАН (Москва, Россия);
Давыдов Д.В. д.э.н. (Владивосток, Россия);
Новиков А.А. д.ф.-м.н. (Сидней, Австралия);
Чеботарев А.Ю. д.ф.-м.н. (Владивосток, Россия);
Чеботарев В.И. д.ф.-м.н. (Хабаровск, Россия).

Организационный комитет:

Гузев М.А., чл.-корр. РАН (ИПМ ДВО РАН, Владивосток) – председатель;
Артемьева И.Л., д.т.н. (ИПМ ДВО РАН, Владивосток) – зам. председателя;
Цициашвили Г.Ш., д.ф.-м.н. (ИПМ ДВО РАН, Владивосток) – зам. председателя;
Святуха В.А., к.ф.-м.н. (ИПМ ДВО РАН, Владивосток) – ученый секретарь;
Степанова А.А., д.ф.-м.н. (ДВФУ, Владивосток);
Корнюшин П.Н., д.ф.-м.н. (ДВФУ, Владивосток);
Осипова М.А., к.ф.-м.н. (ИПМ ДВО РАН, Владивосток);
Жуплев А.С., (ИПМ ДВО РАН, Владивосток).

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 519.8

ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОДНЫХ ЭКОСИСТЕМ

А.И. Абакумов
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 5
E-mail: abakumov@iacp.dvo.ru

Ключевые слова: математическая модель, трофические отношения, фитопланктон, биопродуктивность

Сложности моделирования водных экосистем связаны с нехваткой и неточностью данных, а также существенной нелинейностью процессов жизнедеятельности живых организмов. Вытекающие отсюда проблемы иллюстрируются примерами моделей для экосистем и сообществ водных организмов.

Введение

Моделирование водных экосистем или их подсистем осуществляется с различной степенью детализации в зависимости от поставленных задач и доступной информации об объекте. Модель может описывать экосистему в целом или ее наиболее важные составляющие [1, 2]. Характерной особенностью биологических процессов является их нелинейность [1, 3]. Трудности построения и использования моделей во многом связаны с качественной недостаточностью и количественной неточностью данных о моделируемом объекте. На примерах моделей для водной экосистемы и ее нижних трофических уровней рассматриваются особенности моделирования живых систем [4 - 6]. Исследование трофических отношений в сообществах представляет собой многогранную проблему. Функционирование водных экосистем во многом определяется нижними трофическими уровнями. Биологическая продуктивность системы основана на продуктивности фитопланктона [2]. Изучение фитопланктона представляет собой важную и интересную задачу. Существенное значение для фитопланктона имеет его пространственное распределение, которое обладает высокой степенью неоднородности. Эта неоднородность определяется как внутри- и межвидовыми отношениями в фитопланктоне, так и условиями внешней среды. Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 11-01-98517-р_восток_а, и грантом ДВО РАН № 12-I-П15-02 по программе фундаментальных исследований Президиума РАН.

Модели сообществ водных организмов

Представлены модели трофических взаимодействий в водной экосистеме. Приведены примеры для морских экосистем, указаны достоинства и недостатки моделей. Модельное описание является глобальным, многие важные процессы описываются неточно, другие вообще не замечаются. Но такие модели позволяют проанализировать общие закономерности. Одним из способов повышения достоверности расчетов является разработка комплексов согласованных моделей для одного и того же объекта. Переход к более детальному описанию повышает достоверность моделирования и значимость количественных результатов модельных расчетов. Определяющими для экосистем являются нижние трофические уровни. Особое внимание привлекает жизнедеятельность фитопланктона. Исследуются процессы конкуренции за минеральное питание и закономерности доминирования отдельных видов в фитопланктонных сообществах [7]. Изучается жизнедеятельность фитопланктона в вертикальном одномерном столбе воды без ее направленного движения. В реальности этот столб воды в водоеме перемещается, искажается и перемешивается с другими. Все эти процессы мы оставили в стороне для анализа влияния экологических условий среды на жизнедеятельность фитопланктона. Гидрофизические эффекты в этом случае только искажают картину функционирования планктона. Оставив в стороне направленный перенос, считаем, что основную роль при перемещении веществ в воде играет диффузия. Фитопланктон и минеральные вещества пассивно перемещаются вследствие молекулярной и микротурбулентной диффузии. Микротурбулентная диффузия играет основную роль, коэффициенты турбулентной диффузии на несколько порядков больше, чем молекулярной [8, 9]. От пространственного распределения фитопланктона существенно зависит первичная продукция и биопродуктивность водоема. В свою очередь, продуктивность фитопланктона в значительной мере определяется процессом потребления минеральных веществ при строительстве растительного организма в ходе фотосинтеза [10]. Фотосинтез зависит от освещенности, точнее, фотосинтетически активной радиации (ФАР). Определенную регулирующую роль для жизненных процессов играет температура воды. Таким образом, из факторов окружающей среды мы учитываем минеральное питание, освещенность и температуру. Разнообразные модельные подходы к исследованию водных экосистем позволяют наиболее полно использовать имеющуюся экспериментальную информацию об объекте повысить качество модельных результатов.

Список литературы

1. Murray J.D. Mathematical Biology. An Introduction. Third Edition. Springer, 2002. 576 p.
2. Jorgensen S. E. Lake and reservoir management. Elsevier, 2010. 512 p.
3. Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б. Математические модели биологических продукционных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1993. 301 с.
4. Абакумов А.И., Гиричева Е.Е. Многомодельный подход к исследованию водных экосистем // Известия Самарского научного центра РАН. 2009. Т. 11, № 1(7). С. 1399 - 1403.
5. Абакумов А.И. Признаки стабильности водных экосистем в математических моделях // Труды Института системного анализа РАН. Системный анализ проблемы устойчивого развития. М.: ИСА РАН, 2010. Т. 54. С. 49 - 60.
6. Абакумов А.И., Израильский Ю.Г. Влияние условий среды на распределение фитопланктона в водоеме // Математическая биология и биоинформатика. 2012. Т. 7, № 1. С. 274 - 283.
7. Silkin V.A., Abakumov A.I., Pautova L.A., Mikaelyan A.S., Chasovnikov V.K., Lukashova T.A. Co-existence of non-native and the Black sea phytoplankton species. Invasion hypotheses discussion // Russian Journal of Biological Invasions. 2011. V. 2, n. 4. P. 256-264.
8. Chorin A.J., Marsden J.E. A mathematical introduction to fluid mechanics. Third edition. Springer, 1992. 182 p.

9. Ryabov A.B., Rudolf L., Blasius B. Vertical distribution and composition of phytoplankton under the influence of an upper mixed layer // Journal of Theoretical Biology. 2010, n. 263. P. 120-133.
10. Williams P.J.B. Phytoplankton productivity. Wiley, 2007. 386 p.

УДК 519.21

ОБ ОЦЕНКЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПРЕБЫВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В ЗАДАННОЙ ОБЛАСТИ

О.В. Абрамов
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 5
E-mail: abramov@iacp.dvo.ru

Ключевые слова: надежность, параметр, постепенный отказ, случайный процесс, техническая система, условия работоспособности.

Исследуются модели постепенных отказов технических систем. Основное внимание уделено задаче оценки вероятности пребывания случайного процесса изменения параметров системы в области, определяемой условиями работоспособности.

Одним из направлений современной теории надежности является функционально-параметрическое направление (ФП-подход). Сущность этого подхода заключается в следующем [1]. Для каждой технической системы, исходя из условий ее функционирования и эксплуатации, формулируются условия работоспособности. Обычно эти условия записываются в виде системы неравенств. В соответствии с методологией ФП-подхода процесс функционирования системы и ее техническое состояние в любой момент времени определяются конечным набором некоторых переменных – параметров системы, а все отказы есть следствие отклонений параметров от их исходных (номинальных, расчетных) значений. Формой проявления отказа является выход параметров за пределы области допустимых значений (области работоспособности). Изменения параметров, характеризующих работоспособность системы, в общем случае описываются непрерывными и нестационарными случайными процессами. Для оценки надежности системы возникает необходимость вычислять вероятность пребывания случайного процесса в области работоспособности в течение заданного времени. Известно, что любой случайный процесс $Y(t)$ можно представить в виде семейства случайных величин $\left\{Y_t \in \widetilde{T}\right\}$, где Y_t – случайная величина, наблюдаемая в момент времени t; $\widetilde{T}$ – совокупность моментов времени, или же рассматривать его как семейство функций $y_\omega(t)$ в некотором функциональном пространстве. Причем функции $y_\omega(t)$ зависят от параметра ω, характеризующего реализацию или выборочную функцию случайного процесса. Будем рассматривать случайный процесс изменения параметра $Y(t)$ как некоторую измеримую функцию, отображающую $\widetilde{T}$ в пространство Y случайных величин, определенных на вероятностном пространстве (Ω, σ, P). Множество $\widetilde{T}$ обычно называют областью определения случайного процесса, а Y – областью его значений. Значения случайной функции $Y(t)$ в точках $t \in \widetilde{T}$ являются случайными величинами, т.е. измеримыми функциями, отображающими вероятностное пространство в борелевскую прямую. Рассмотрим t-сечение пространства $Y \times \widetilde{T}$. Для данного t-сечения можно записать

$$P_t(D) = \int\limits_a^b f_t(y)dy, \tag{1}$$

где $P_t(D)$ – вероятность того, что в момент времени t параметр будет находиться в области допустимых значений $D = \{y|a \leqslant y \leqslant b\}$; $f_t(y)$ – одномерная плотность распределения случайного процесса $Y(t)$, заданная в момент времени t. Функция $P_t(D)$ – вероятностная мера множества реализаций случайного процесса $Y(t)$, значения которых в момент t принадлежат области допустимых значений. Соотношение (1) справедливо для всех сечений множества $Y \times \widetilde{T}$, определяемых точками t. Рассмотрение множеств Y_t, называемых одномерными цилиндрическими множествами, и соответствующих им одномерных плотностей распределения не позволяет в общем случае определить искомую вероятность нахождения случайного процесса в области D в течение заданного времени T, поскольку меры $P_t(D)$ на одномерных цилиндрических множествах не являются достаточно полной характеристикой случайного процесса $Y(t)$. Выделим из множества всех реализаций исследуемого случайного процесса множество S_μ таких реализаций, значения которых в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ принадлежат числовому множеству D. Значение вероятностной меры случайного процесса $Y(t)$, соответствующее этому множеству, определяется формулой

$$P(S_\mu) = \underbrace{\int\limits_a^b \cdots \int\limits_a^b}_{\mu} f_{t_1,t_2,\ldots,t_\mu}(y_{t_1}, y_{t_2}, \ldots, y_{t_\mu})dy_1 dy_2 \ldots dy_\mu, \tag{2}$$

где $f_{t_1,t_2,\ldots,t_m u}(y_{t_1}, y_{t_2}, \ldots, y_t)$ – совместная плотность распределения случайных величин, рассматриваемых в сечениях $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$, причем $t_m = T$. При достаточно большом числе t-сечений, выделенных на $[0, T]$, значение $P(S_\mu)$ можно принять равным искомой вероятности нахождения случайного процесса в области допустимых значений в течение требуемого времени T, т.е. вероятности безотказной работы объекта. Приведенные рассуждения несложно распространить на случай прогнозирования вероятности безотказной работы объекта, поведение которого описывается m параметрами. При этом необходимо рассматривать векторный случайный процесс $\mathbf{Y}(t) = \{Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_m(t)\}$. Каждому значению аргумента t случайного процесса $Y(t)$ можно поставить в соответствие множество $Y(t)$. Область допустимых значений параметров является подмножеством $Y(t)$. Мера множества D для любого t-сечения определяется выражением

$$P_t(D) = \underbrace{\int \cdots \int}_{D} f_t(y_1, y_2, \ldots y_m)dy_1 dy_2 \ldots dy_m,$$

причем

$$P_t(Y) = \underbrace{\int \cdots \int}_{Y} f_t(y_1, y_2, \ldots y_m)dy_1 dy_2 \ldots dy_m = 1.$$

Полной вероятностной характеристикой векторного случайного процесса будет его вероятностная мера, которая может быть задана с помощью $\mu \times m$-мерной функции распределения. Вероятность безотказной работы будет вычислена после μ-кратного интегрирования этой меры по множеству D. Воспользоваться соотношением (2) и тем более его многомерным аналогом при решении задач прогнозирования и управления надежностью практически не представляется возможным не только из-за трудностей математического характера, но и отсутствия необходимой исходной информации. Однако при наложении определенных ограничений на характер выборочных функций (реализаций) y_ω удается получить сравнительно простые и удобные для практического использования соотношения. Будем считать характер случайного процесса $Y(t)$ таким, что для нахождения любой его реализации в области допустимых значений в течение заданного времени необходимо и достаточно, чтобы эта реализация принадлежала области допустимых значений в ограниченном (и небольшом) числе t-сечений $Y(t)$ которые назовем *релевантными*. Изучение закономерностей необратимых изменений параметров элементов технических систем и устройств (резисторов, конденсаторов, транзисторов), в частности различных видов радиоэлектронной аппаратуры (измерительных устройств, усилительных блоков и др.) показывает, что для большинства из них принятое предположение справедливо, причем число таких сечений не превышает трех. Если удалось выделить релевантные t-сечения и определить совместную плотность распределения случайных величин, рассматриваемых в этих сечениях, то для определения надежности системы можно воспользоваться формулой (2). В докладе рассмотрены некоторые наиболее часто встречающиеся при расчетах надежности модели случайных процессов дрейфа параметров и приведены соответствующие им решения задачи оценки вероятности невыхода случайного процесса за пределы заданной области. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-08-98503 р_восток_а).

Список литературы

1. Абрамов О.В. Функционально-параметрический подход в задачах обеспечения надежности технических систем // Надежность и контроль качества. - 1999. - № 5. - С. 34-45.

УДК 517.958

ЗАДАЧИ МАСКИРОВКИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Г.В. Алексеев
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
E-mail: alekseev@iam.dvo.ru

Ключевые слова: уравнение Максвела, задача рассеяния, неоднородная среда, обратная задача, задача управления, система оптимальности

Формулируются и исследуются задачи маскировки для трехмерных уравнений Максвелла, описывающих рассеяние электромагнитных волн в однородной среде, содержащей проницаемое анизотропное препятствие Ω с частично покрытой в целях маскировки границей. С помощью оптимизационного метода указанная задача сводится к решению задачи управления. Роль управления в ней играет поверхностная проводимость покрытой части границы, входящая в импедансное граничное условие на покрытой части границы области Ω. Доказывается ее разрешимость и выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума.

Введение

В последние годы большое внимание уделяется созданию средств маскировки материальных объектов от их обнаружения с помощью электромагнитной или акустической локации. Разработке методов решения указанных задач посвящено большое количество работ. Отметим среди них работы [1, 2, 3, 4]. В математическом плане задачи маскировки заключаются в нахождении неизвестных коэффициентов для уравнений Гельмгольца или Максвелла с переменными коэффициентами путем решения соответствующих обратных задач. Однако реализовать полученные решения на практике затруднительно, даже если использовать композитные материалы (см. об этом в обзоре [4]). Более предпочтительным в плане технической реализации решений является использование альтернативного способа маскировки, основанного на покрытии материальных объектов тонким слоем определенного вещества, свойства которого характеризуются специальной функцией – граничным импедансом или граничной проводимостью. Внесение такого покрытия моделируется введением импедансного граничного условия, связывающего между собой электрическое и магнитное поля (либо звуковое давление и нормальную компоненту колебательной скорости в случае акустической локации) через граничный коэффициент, называемый поверхностным импедансом. В случае, если объект имеет неизменную формулу, задача его маскировки от обнаружения (радаром или сонаром) сводится к выбору такого покрытия, которое минимизирует рассеяную волну, возникающую при падении на объект первичной электромагнитной или акустической волны. Математически эта задача сводится к решению обратной экстремальной задачи. Роль управления в ней играет поверхностная проводимость η покрытой части границы, а в качестве функционального ограничения выступает используемая модель распространения электромагнитных или акустических волн, рассматриваемая при импедансном граничном условии. Именно эта задача рассматривается в данном докладе для двух трехмерных моделей распространения. Исследованию математических задач, возникающих при указанном способе маскировки в двумерном случае, посвящены работы [5, 6].

1. Постановка задачи

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ со связным дополнением $\Omega^c \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ и липшицевой границей Γ, состоящей из двух частей Γ_1 и Γ_2. Первая модель, на которую будем ссылаться как на модель 1, описывается соотношениями

$$\mathbf{E}_e \times \mathbf{n}|_\Gamma = 0, \mathbf{H}_e \times \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = 0, \mathbf{H}_e \times \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = -\eta(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_e \times \mathbf{n}), \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}_e - ik\mathbf{H}_e = 0,\ \mathrm{rot}\mathbf{H}_e + ik\mathbf{E}_e = 0 \text{ в } \Omega^c, \lim_{r\to\infty}(\mathbf{H}^s \times \mathbf{x} - r\mathbf{E}^s) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{E}_e = \mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^s$, где $\mathbf{E}^{inc}$ – падающая волна, $\mathbf{E}^s$ – рассеяная препятствием Ω волна, k – положительное волновое число, $\eta = \eta(\mathbf{x})$ – поверхностная проводимость покрытой части Γ_2 границы Γ, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней по отношению к Ω нормали к границе Γ, соотношение (2) описывает условие излучения Сильвера-Миллера в $\mathbb{R}^3$. Отметим, что граничное условие на Γ_2 в (2) имеет смысл модифицированного условия Леонтовича для электромагнитных волн [7]. Задача (1), (2) моделирует рассеяние электромагнитных волн препятствием Ω с частично покрытой в целях маскировки границей. Вторая модель (модель 2) описывает рассеяние электромагнитных волн в однородной среде, содержащей анизотропное проницаемое препятствие Ω с покрытой в целях маскировки частью Γ_2 границы Γ. Математически задача рассеяния заключается в нахождении электромагнитных полей $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ в Ω и $(\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e)$ в Ω^c, удовлетворяющих уравнениям (2) в области Ω^c, уравнениям

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}_i - ik\mathbf{H}_i = 0,\ \mathrm{rot}\mathbf{H}_i + ikN(\mathbf{x})\mathbf{E}_i = 0 \text{ в } \Omega, \tag{3}$$

смешанным условиям сопряжения на границе Γ, имеющим вид

$$\mathbf{E}_e \times \mathbf{n} - \mathbf{E}_i \times \mathbf{n}|_\Gamma{=}0,\ \mathbf{H}_e \times \mathbf{n} - \mathbf{H}_i \times \mathbf{n}|_{\Gamma_1}{=}0,\ \mathbf{H}_e \times \mathbf{n} - \mathbf{H}_i \times \mathbf{n}|_{\Gamma_2}{=}-\eta(\mathbf{n} \times \mathbf{E} \times \mathbf{n}), \tag{4}$$

и условию излучения Сильвера–Мюллера в (2). Здесь $N(\mathbf{x})$ – заданная в Ω матричная функция, описывающая параметры среды в Ω. Целью настоящей работы является анализ задач управления для моделей 1 и 2, возникающих при решении задач маскировки оптимизационным методом. Указанные задачи заключаются в минимизации определенного функционала качества, зависящего от состояния (электромагнитного поля) и неизвестной функции (управления), удовлетворяющих уравнениям состояния (1), (2) либо (2), (3), (4). В качестве функционала качества мы выберем один из следующих:

$$I_1(\mathbf{E}) = \|\mathbf{E} - \mathbf{E}^d\|_Q^2 \equiv \int_Q |\mathbf{E} - \mathbf{E}^d|^2 dx,\quad I_2(\mathbf{E}) = \int_{\Gamma_r} |\mathbf{E} - \mathbf{E}^d|^2 d\sigma. \tag{5}$$

Здесь функция $\mathbf{E}^d \in \mathbf{L}^2(Q)$ (либо $\mathbf{E}^d \in \mathbf{L}^2(\Gamma_r)$) моделирует поле, измеренное в некоторой подобласти $Q \subset \Omega^c$ или на границе Γ_r шара B_r радиуса r, содержащего Ω внутри себя. В случае, когда $\mathbf{E}^d = \mathbf{E}^{inc}$, функционал I_1 (либо I_2) имеет смысл квадрата среднеквадратичной интегральной нормы рассеяного поля $\mathbf{E}^s$ по Q (либо по Γ_r). В качестве управления мы выберем поверхностную проводимость η, входящую в условие (1) либо (4). Предполагая, что η является элементом пространства $H^s(\Gamma_2)$, введем следующий функционал:

$$J_j(\mathbf{E}^s, \eta) = \frac{\alpha_0}{2} I_j(\mathbf{E}^s) + \frac{\alpha_1}{2}\|\eta\|^2_{H^s(\Gamma_2)}, \quad j = 1, 2. \tag{6}$$

Здесь α_0 и α_1 – неотрицательные параметры, служащие для регулирования относительной важности каждого из слагаемых в (6). Рассматриваемые в статье задачи управления заключаются в нахождении такого управления η и отвечающего ему состояния – электромагнитного поля, решающего задачу (1), (2) либо (2), (3), (4), которые обеспечивают минимум функционалу (6).

2. Основные результаты

Рассматривая для конкретности модель 2, отметим, что первый этап решения задачи управления для данной модели состоит в сведении исходной задачи сопряжения (2), (3), (4), рассматриваемой во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, к эквивалентной задаче, рассматриваемой в ограниченной области. Для этого введем так называемый внешний оператор Кальдерона, являющийся аналогом известного оператора Дирихле–Неймана (см. [8]), используемого в подобных ситуациях для уравнения Гельмгольца. Предварительно введем ряд функциональных пространств. Обозначим через B_R шар радиуса R с центром в начале координат с границей Γ_R, содержащий Ω. Положим $\Omega_e = \Omega^c \cap B_R$. Будем использовать пространства вектор-функций $\mathbf{H}(\mathrm{rot}, \Omega_e)$, $\mathbf{H}(\mathrm{rot}, B_R)$, $\mathbf{L}^2(Q)$, $\mathbf{L}^2(\Gamma_r)$, $\mathbf{L}^2(\Gamma_2)$, $\mathbf{H}^{1/2}_T(\Gamma_R)$, $\mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma_R)$ и пространства скалярных функций $L^\infty(\Gamma_2)$, $H^s(\Gamma_2)$ с нормами $\|\cdot\|_{\mathrm{rot},\Omega_e}$, $\|\cdot\|_{\mathrm{rot},B_R}$, $\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|_{\Gamma_r}$, $\|\cdot\|_{\Gamma_2}$, $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_R}$, $\|\cdot\|_{-1/2,\Gamma_R}$, $\|\cdot\|_{L^\infty(\Gamma_2)}$ и $\|\cdot\|_{s,\Gamma_2}$ соответственно. Здесь, в частности, $\mathbf{H}^{1/2}_T(\Gamma_R)$ обозначает подпространство пространства $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_R)$, состоящее из тангенциальных на Γ_R вектор–функций из пространства $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_R)$, $\mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma_R)$ – двойственное к $\mathbf{H}^{1/2}_T(\Gamma_R)$ относительно пространства $\mathbf{L}^2_T(\Gamma_R)$. Введем пространство $\mathcal{E}^{inc} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}, \Omega_e) : \mathrm{rotrot}\mathbf{v} + k^2\mathbf{v} = 0\}$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{E}^{inc}} = \|\cdot\|_{\mathrm{rot},\Omega_e}$. Оно будет служить для описания сужений падающих полей на Ω_e. Положим $L^\infty_{\eta_0}(\Gamma_2) = \{\eta \in L^\infty(\Gamma_2) : \eta(x) \geqslant \eta_0\}$, $H^s_{\eta_0}(\Gamma_2) = \{\eta \in H^s(\Gamma_2) : \eta(x) \geqslant \eta_0\}$, $\eta_0 = \mathrm{const} > 0$, $s > 0$. Нам также потребуются пространство

$$X = X(B_R, \Gamma_2) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}, B_R) : \mathbf{v}_T \equiv \mathbf{n} \times \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_2} \in \mathbf{L}^2_T(\Gamma_2)\},$$

наделенное гильбертовой нормой $\|\mathbf{v}\|^2_X = \|\mathbf{v}\|^2_{\mathrm{rot},B_R} + \|\mathbf{v}_T\|^2_{\Gamma_2}$, и следующие пространства следов вектор-функций из пространства $\mathbf{H}(\mathrm{rot}, B_R)$:

$$\mathbf{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma_R) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma_R)^3 : \mathrm{div}_{\Gamma_R}\mathbf{v} \in H^{-1/2}(\Gamma_R)\},$$
$$\mathbf{H}^{-1/2}_{\mathrm{rot}}(\Gamma_R) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma_R)^3 : \mathrm{rot}_{\Gamma_R}\mathbf{v} \in H^{-1/2}(\Gamma_R)\}.$$

Здесь и ниже div_{Γ_R} и rot_{Γ_R} – операторы поверхностной дивергенции и поверхностного ротора на сфере Γ_R (их определения см., например, в [9, с. 276]). Поскольку Γ_R представляет собой гладкую связную компоненту границы области Ω_e, то $\mathbf{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma_R)$

и $\mathbf{H}^{-1/2}_{\mathrm{rot}}(\Gamma_R)$ образуют пару сопряженных друг к другу пространств и справедливы включения $\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{v}|_{\Gamma_R} \in \mathbf{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma_R), \mathbf{v}_T|_{\Gamma_R} \in \mathbf{H}^{-1/2}_{\mathrm{rot}}(\Gamma_R)$ для $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot}, B_R)$. Здесь вектор $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ имеет смысл единичного вектора внешней нормали к сфере Γ_R в точке $\mathbf{x} \in \Gamma_R$, $\mathbf{v}_T|_{\Gamma_R} \equiv \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{x}}|_{\Gamma_R}$ – тангенциальная компонента вектора $\mathbf{v}$ на Γ_R. Теперь мы в состоянии свести задачу (2), (3), (4) к эквивалентной задаче, рассматриваемой в ограниченной области – шаре B_R. Для этого введем внешний оператор Кальдерона $G_e : \mathbf{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma_R) \to \mathbf{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma_R)$. По определению оператор G_e отображает любой вектор $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma_R)$, заданный на Γ_R, в вектор $\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}|_{\Gamma_R}$, где вектор $\mathbf{H}$ вместе с $\mathbf{E}$ является излученным решением краевой задачи $\mathrm{rot}\mathbf{E} - ik\mathbf{H} = 0$, $\mathrm{rot}\mathbf{H} + ik\mathbf{E} = 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}_R$, $\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E} = \mathbf{g}$ на Γ_R. Известно (см. [8]), что G_e является изоморфизмом пространства $\mathbf{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma_R)$ на $\mathbf{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma_R)$, причем задача (2), (3), (4) эквивалентна следующей задаче сопряжения для электрических полей $\mathbf{E}_i$ и $\mathbf{E}_e$, рассматриваемой в шаре B_R:

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E}_i - k^2 N(\mathbf{x})\mathbf{E}_i = 0 \text{ в } \Omega, \ \mathrm{rotrot}\mathbf{E}_e - k^2\mathbf{E}_e = 0 \text{ в } \Omega_e, \tag{7}$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_e - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_i = 0 \text{ на } \Gamma, \ \mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{E}_e - \mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{E}_i = 0 \text{ на } \Gamma_1, \tag{8}$$

$$\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{E}_e - \mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{E}_i = ik\eta\mathbf{E}_e \text{ на } \Gamma_2, \tag{9}$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \mathrm{rot}\mathbf{E}_e = ikG_e(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}_e) - ikG_e(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^{inc}) + \hat{\mathbf{x}} \times \mathrm{rot}\mathbf{E}^{inc} \ \text{ на } \ \Gamma_R. \tag{10}$$

Именно дополнительное условие (10) на сфере Γ_R, содержащее оператор Кальдерона G_e, делает задачу (7)–(9) эквивалентной исходной задаче (2), (3), (4). Ниже будем ссылаться на задачу (7)–(10) как на задачу 1. Пусть $\mathbf{E}^{inc} \in \mathcal{E}^{inc}$, $\mathbf{\Phi} \in X$ – тестовая функция. Умножим первое уравнение в (7) на $\overline{\mathbf{\Phi}}|_{\Omega}$, второе уравнение в (7) – на $\mathbf{\Phi}|_{\Omega_e}$, проинтегрируем по Ω и Ω_e, применим формулы Грина и сложим. Приходим с учетом граничных условий (9), (10) к слабой формулировке задачи 1. Она состоит в нахождении функции $\mathbf{E} \in X$, равной $\mathbf{E}_i$ в Ω и $\mathbf{E}_e$ в Ω_e, из тождества

$$a_\eta(\mathbf{E}, \mathbf{\Phi}) \equiv a_0(\mathbf{E}, \mathbf{\Phi}) - ik(\eta\mathbf{E}_T, \mathbf{\Phi}_T)_{\Gamma_2} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{\Phi} \rangle \ \ \forall \mathbf{\Phi} \in X. \tag{11}$$

Здесь $a_0(\cdot,\cdot)$, $a(\eta;\cdot,\cdot)$ и $\mathbf{f}$ – полуторалинейные и антилинейная формы, определяемые формулами

$$a_0(\mathbf{E}, \mathbf{\Phi}) = \int\limits_{\Omega} (\mathrm{rot}\mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\overline{\mathbf{\Phi}} - k^2 N(\mathbf{x})\mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{\Phi}})dx + \int\limits_{\Omega_e} (\mathrm{rot}\mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\overline{\mathbf{\Phi}} - k^2\mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{\Phi}})dx +$$
$$+ik \int\limits_{\Gamma_R} G_e(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}) \cdot \overline{\mathbf{\Phi}}_T d\sigma, \ (\eta\mathbf{E}_T, \mathbf{\Phi}_T)_{\Gamma_2} = \int\limits_{\Gamma_2} \eta\mathbf{E}_T \cdot \overline{\mathbf{\Phi}}_T d\sigma, \tag{12}$$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{\Phi} \rangle = ik \int\limits_{\Gamma_R} [G_e(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^{inc}) - \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^{inc}] \cdot \overline{\mathbf{\Phi}}_T d\sigma. \tag{13}$$

Интегралы по Γ_R в (12) и (13) обозначают отношение двойственности между пространствами $\mathbf{H}^{-1/2}_{\mathrm{div}}(\Gamma_R)$ и $\mathbf{H}^{-1/2}_{\mathrm{rot}}(\Gamma_R)$. Решение $\mathbf{E} \in X$ задачи (11) назовем слабым решением задачи 1. Будем считать, что матрица $N = ((n_{ij}))$ симметрична и удовлетворяет условиям (j) $n_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $\overline{\xi} \cdot (\mathrm{Re}N(\mathbf{x})\xi) \geqslant \gamma|\xi|^2$, $\overline{\xi} \cdot (\mathrm{Im}N(\mathbf{x})\xi) \leqslant 0 \ \forall \xi \in \mathbb{C}^3$, $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$,

где $\gamma = \mathrm{const} > 0$ (условие гладкости для n_{ij} в (j) можно ослабить). Используя свойства оператора G_e, указанные в [8], можно показать, что при выполнении условий (j) к задаче (11) применима альтернатива Фредгольма. С ее помощью может быть доказана теорема. **Теорема 1.** *Пусть в дополнение к условиям (j)* $\Gamma \in C^{0,1}$, $K \subset L^{\infty}_{\eta_0}(\Gamma_2)$ *– ограниченное множество, где* $\eta_0 > 0$, *и пусть* $\eta \in K$. *Тогда для любого падающего поля* $\mathbf{E}^{inc} \in \mathcal{E}^{inc}$ *задача (11) имеет единственное решение* $\mathbf{E}_\eta \in X$, *которое удовлетворяет оценке* $\|\mathbf{E}_\eta\|_X \leqslant C_0 \|\mathbf{E}^{inc}\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot},\Omega_e)}$. *Здесь константа* C_0 *зависит от* Ω, R, k *и размера множества* K, *но не зависит от* η. Приведем теперь строгую формулировку рассматриваемой задачи управления для модели 2. Введем оператор $G : X \times K \times \mathcal{E}^{inc} \to X^*$ формулой $\langle G(\mathbf{E}, \eta, \mathbf{E}^{inc}), \Phi\rangle = a_0(\mathbf{E}, \mathbf{\Phi}) - ik(\eta \mathbf{E}_T, \mathbf{\Phi}_T)_{\Gamma_2} - \langle \mathbf{f}, \mathbf{\Phi}\rangle$ и перепишем слабую формулировку (11) задачи 1 в виде $G(\mathbf{E}, \eta, \mathbf{E}^{inc}) = 0$. Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$J(\mathbf{E}, \eta) = \frac{\alpha_0}{2} I(\mathbf{E}) + \frac{\alpha_1}{2} \|\eta\|^2_{s,\Gamma_2} \to \inf, \ \ G(\mathbf{E}, \eta, \mathbf{E}^{inc}) = 0, \ (\mathbf{E}, \eta) \in \mathbf{X} \times K. \qquad (14)$$

Здесь $I(\mathbf{E})$ – произвольный пока функционал качества, а смысл параметров α_0 и α_1 указан выше. Предположим, что выполняются условия (jj) $\Gamma \in C^{1,1}$, $\alpha_0 > 0$, $E^{inc} \in \mathcal{E}^{inc}$; $K \subset H^s_{\eta_0}(\Gamma_2)$ – непустое выпуклое замкнутое множество, где $s > 1$, $\eta_0 > 0$. Для исследования задачи управления (14) применим математический аппарат, разработанный в [9]. Основываясь на описанном аппарате, можно доказать следующие теоремы. **Теорема 2.** *Пусть в дополнение к условиям (j), (jj)* $\alpha_1 \geqslant 0$ *и* K *– ограниченное множество либо* $\alpha_1 > 0$. *Тогда существует по крайней мере одно решение* $(\hat{\mathbf{E}}, \hat{\eta}) \in X \times K$ *задачи (14) при* $I = I_j(\mathbf{E})$, $j = 1, 2$. **Теорема 3.** *Пусть при выполнении условий (j) пара* $(\hat{\mathbf{E}}, \hat{\eta}) \in X \times K$ *является решением задачи (14), где* $I = I_j(\mathbf{E})$, $j = 1, 2$. *Тогда существует единственный множитель Лагранжа* $P \in X$, *который является решением сопряженной задачи в виде уравнения Эйлера–Лагранжа*

$$a_0(\mathbf{\Phi}, \mathbf{P}) - ik(\hat{\eta}\mathbf{\Phi}_T, \mathbf{P}_T)_{\Gamma_2} = -(\alpha_0/2)\overline{\langle I'_{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{E}}), \mathbf{\Phi}\rangle} \ \forall \mathbf{\Phi} \in X, \qquad (15)$$

и выполняется вариационномое неравенство

$$\alpha_1(\hat{\eta}, \eta - \hat{\eta})_{s,\Gamma_2} + k\mathrm{Im}((\eta - \hat{\eta}); \hat{\mathbf{E}}_T, \mathbf{P}_T)_{\Gamma_2} \geqslant 0 \ \ \forall \eta \in K. \qquad (16)$$

Сопряженная задача (15) вместе с вариационным неравенством (16) и прямой задачей (11) образует систему оптимальности для задачи (14). Система оптимальности играет важную роль для изучения свойств решений задачи управления. На ее основе могут быть разработаны эффективные численные алгоритмы решения задачи (14) (о некоторых из них в случае двумерной задачи маскировки см. в [5]). Кроме того, на основе анализа системы оптимальности могут быть установлены достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решений конкретных экстремальных задач. Имея в виду последнюю цель, предположим, что функция E^{inc}, описывающая падающее поле, изменяется в некотором множестве $\mathcal{E}_{ad} \subset \mathcal{E}^{inc}$. Обозначим через $(\mathbf{E}_1, \eta_1) \in X \times K$ произвольное решение задачи (14) при $I = I_1(\mathbf{E})$, отвечающее заданным функциям $\mathbf{E}^d = \mathbf{E}^d_1$ и $\mathbf{E}^{inc} = \mathbf{E}^{inc}_1$. Через $(\mathbf{E}_2, \eta_2) \in X \times K$ обозначим решение той же задачи, отвечающее возмущенным функциям $\tilde{\mathbf{E}}^d = \mathbf{E}^d_2$ и $\tilde{\mathbf{E}}^{inc} = \mathbf{E}^{inc}_2$. Положим $M_E \equiv C_0 \sup_{\mathbf{E}^{inc} \in \mathcal{E}_{ad}} \|\mathbf{E}^{inc}\|_{\mathrm{rot},\Omega_e}$ и предположим, что выполняется условие

$$\alpha_1(1 - \varepsilon) > 3\alpha_0 C_0^2 M^0_{\mathbf{E}} M_{\mathbf{E}}, \ M^0_{\mathbf{E}} = M_{\mathbf{E}} + \max(\|\mathbf{E}^d_1\|_Q, \|\mathbf{E}^d_2\|_Q), \qquad (17)$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$ – произвольное число. Введем функцию

$$\varphi(\|\mathbf{E}^{inc}\|_{\mathrm{rot},\Omega_e}) = (a\|\mathbf{E}^{inc}\|_{\mathrm{rot},\Omega_e} + b\|\mathbf{E}^{inc}\|^2_{\mathrm{rot},\Omega_e})^{1/2},$$

где $a = 2C_0M^0_{\mathbf{E}}$, $b = C_0^2 M^0_{\mathbf{E}} M^{-1}_{\mathbf{E}}$. Справедлива следующая теорема. **Теорема 4.** *Пусть в дополнение к условиям (j) K и $\mathcal{E}_{ad} \subset \mathcal{E}^{inc}$ – ограниченные множества и пусть пара $(\mathbf{E}_l, \eta_l)$ является решением задачи (14) при $I = I_1(\mathbf{E})$, отвечающим заданным функциям $\mathbf{E}^d_l \in L^2(Q)$ и $\mathbf{E}^{inc}_l \in \mathcal{E}_{ad}$, $l = 1, 2$. Предположим, что выполняется условие (17). Тогда $\|\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\|_Q \leqslant \|\mathbf{E}^d_1 - \mathbf{E}^d_2\|_Q + \varphi(\|\mathbf{E}^{inc}_1 - \mathbf{E}^{inc}_2\|_{\mathrm{rot},\Omega_e})$ и справедливы оценки устойчивости*

$$\|\eta_1 - \eta_2\|_{s,\Gamma_2} \leqslant \sqrt{\mu_0/\varepsilon\mu_1}\Delta,\ \|\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\|_X \leqslant C_0(M_{\mathbf{E}}\sqrt{\mu_0/\varepsilon\mu_1}\Delta + \|\mathbf{E}^{inc}_1 - \mathbf{E}^{inc}_2\|_{\mathrm{rot},\Omega_e}),$$

где

$$\Delta = (1/2)\|\mathbf{E}^d_1 - \mathbf{E}^d_2\|_Q + \varphi(\|\mathbf{E}^{inc}_1 - \mathbf{E}^{inc}_2\|_{\mathrm{rot},\Omega_e}).$$

Аналогичный результат справедлив для задачи (14) при $I = I_2(\mathbf{E})$. По аналогичной схеме исследуются задачи управления для модели 1. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов ФЦП (N 14.A18.21.0353) и РФФИ (N 13-01-00313).

Список литературы

1. Долин Л.С. Изв. вузов. Раднофизика. 1961. Т. 4. С. 964–969.
2. Pendry J.B., Shurig D. and Smith D.R. // Science. 2006. V. 312. P. 1780–1782.
3. Cummer S.A., Popa B.I., Schurig D. et al. // Phys. Rev. Letters. 2008. V. 100. 024301.
4. Дубинов А.Е., Мытарева Л.А. // Успехи физ. наук. 2010. Т. 180, № 5. С. 476–501.
5. Алексеев Г.В. // ДАН. 2013. Т. 449, № 6. С. 652-656.
6. Alekseev G.V. // Applicable Analysis. 2013. DOI: 10.1080/00036811.2013.768340.
7. Леонтович М.А. Теоретическая физика. Избранные труды. М.: Наука. 1985. С. 351–355.
8. Monk P. Finite element methods for Maxwell's equations. Oxford University Press. 2003.
9. Алексеев Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир. 2010.

УДК 517.977.1

КАРЛЕМАНОВСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ОБРАТНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Амосова Е.В.
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
E-mail: leb@iam.dvo.ru

Ключевые слова: Карлемановские оценки, точная управляемость, уравнения Навье-Стокса

Введение

Теория управляемости для эволюционных уравнений в частных производных начала развиваться в 60-х годах. Ее основы были заложены в работах Ю.В.Егорова [1], Д.Рассела [2]-[3], Г.Фатторини [4]. В этих работах был разработан метод моментов, сводящий решение задачи точной управляемости к вопросам теории рядов экспонент, а также введен принцип двойственности, сводящий задачу управляемости для эволюционнго уравнения к задаче наблюдаемости для сопряженного уравнения. Далее в основном изучался случай гиперболических уравнений. В 1986 г. появилась работа Л.Ф.Хо [5], в которой были найдены достаточные условия наблюдаемости для гиперболического уравнения второго порядка методом множителей. Одновременно в работах Ж.-Л.Лионса [6] был введен гильбертов метод единственности, позволяющий получать из теоремы единственности для сопряженного уравнения существование решения задачи управляемости для исходного уравнения. В дальнейшем эти методы интенсивно развивались во многих работах. Из единственности некоторой задачи Коши для сопряженного уравнения удается выводить результаты по управляемости исходного уравнения. Одним из наиболее мощных методов доказательства единственности задачи Коши являются карлемановские оценки. После появления фундаментальных результатов Л.Хермандера [7], [8] и работ В. Исакова [9] теория карлемановских оценок развивалась в нескольких направлениях: теория карлемановских оценок в пространствах L^p, где $p \neq 2$ ([10]-[12]), терия карлемановских оценок с сингулярными весовыми функциями [13]. В последнее время в задачах точной граничной управляемости стали широко использоваться карлемановские оценки. Ж.-Л. Лионсом была выдвинута гипотеза о глобальной управляемости системой Навье-Стокса с граничнвм или локально распределенным управлением. После этой работы начали интенсивно исследоваться управляемость параболических уравнений с простейшими нелинейностями и управляемость уравнений, описывающих течение жидкости. Наиболее мощным методом доказательства точной управляемости нелинейных параболических уравнений является метод построения решения с помощью экстремальной задачи и последующего применения карлемановских оценок. Основы этого метода были заложены А.В.Фурсиковым и О.Ю. Эмануиловым в работах [14], [15]. Точная локальная управляемость системы Навье-Стокса и Буссенеска с локально распределенным управлением и граничными условиями типа проскальзывания изучена в работе [16]. Случай локально распределенного управления для системы Навье-Стокса с нулевыми граничными условиями рассмотрен в работе О.Ю. Эмануилова [17] при дополнительных ограничениях на заданную скорость. В работе [18] изучена точная управляемость уравнений Навье-Стокса и Буссинеска на торе. Задача точной локальной управляемости уравнениями Навье-Стокса описывающих движения вязкого политропного газа в одномерном случае рассмотренна Амосовой Е.В. в работе [19]. Случай граничной управляемости изучен Ervedoza S, Glass O, Guerrero S, Puel J.-P. в работе [20].

1. Постановка задачи

Рассматривается задача точной локальной управляемости уравнениями Навье-Стокса описывающих движения вязкого политропного газа в двумерном случае с условиями типа проскальзывания на границе. При решении данной задачи появилась необходимость решать задачу Неймана для обратного параболического уравнения.

1.1. Карлемановские оценки

Пусть $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\omega \subset \Omega$ — произвольная фиксированная подобласть Ω. Существует функция $\beta(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, не имеющая критических точек в $\Omega \setminus \omega'$ такая, что

$$(\nabla\beta(x) \cdot n(x)) \geqslant 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

где $n(x)$ — векторное поле внешних нормалей к $\partial\Omega$, $\omega' \subset\subset \omega$. Так как $\beta(x)$ $x \in \overline{\Omega \setminus \omega'}$ не имеет критических точек, получаем

$$\min_{x \in \overline{\Omega \setminus \omega'}} |\nabla\beta(x)| > 0.$$

Кроме того, предположим, что

$$\beta(x) \geqslant \ln 3; \quad \min_{x \in \overline{\Omega}} \beta(x) > \frac{3}{4} \max_{x \in \overline{\Omega}} \beta(x).$$

Пусть $\gamma(t) \in C^\infty(0,T)$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$0 < \gamma(t) \leqslant 1, \quad \gamma(t) = \begin{cases} t, & t \in (0, T_0), \\ T - t, & t \in (T - T_0, T), \end{cases} \qquad T_0 = \min\left\{\frac{T}{3}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Кроме того, предполагается, что $\gamma(t)$ монотонно растет при $t \in (0, T/2)$ и монотонно убывает при $t \in (T/2, T)$. Введем функции

$$\varphi(t,x) = \frac{e^{\lambda\beta(x)}}{\gamma(t)}; \quad \alpha = \alpha_\lambda(t,x) = \frac{e^{\frac{4\lambda}{3}\|\beta\|_{C(\overline{\Omega})}} - e^{\lambda\beta(x)}}{\gamma(t)},$$

где $\lambda > 0$ — параметр, а $\beta(x)$, $\gamma(t)$ — функции введенные выше.

1.2. Задача Неймана для обратного параболического уравнения

Рассмотрим обратное параболическое уравнение

$$\partial_t z + \Delta z = f_z(t,x), \quad (t,x) \in Q,$$

$$(\nabla z \cdot n) = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega, \tag{1}$$

где $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞.

Теорема 1. *Пусть z и f_z удовлетворяют соотношениям (1) и $s \geqslant -3$. Для $\lambda > \hat{\lambda}$, где $\hat{\lambda} \geqslant \lambda_0$ достаточно велико, справедлива карлемановская оценка*

$$\int\limits_Q \varphi^{2s-1}(\lambda^{-1}|\partial_t z|^2 + \sum_{i,j=1}^{2} |\partial^2_{x_i x_j} z|^2 + \lambda\varphi^2|\nabla z|^2 + \lambda^4\varphi^4|z|^2)e^{-2\alpha_\lambda}\, dxdt \leqslant$$
$$\leqslant c\int\limits_Q \varphi^{2s}|f_z|^2 e^{-2\alpha_\lambda}\, dxdt + c\int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^{2s+3}|z|^2 e^{-2\alpha_\lambda}\, dxdt,$$

где $Q^{w'} = (0,T) \times \omega'$, $c > 0$ — константа, не зависящая от f_z, z и λ.

Список литературы

1. Егоров Ю.В. Некоторые задачи теории оптимального управления // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1963. Т. 5. С. 887-904.
2. Russel D. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions// SIAM Rev. 1978. V.20. P. 639-739.
3. Russel D. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. P. 189-212.
4. Fattorini H. Boundary control of temperature distributions in a parallepipedon // ESAIM, Control Optim. Calc. Var. http://www.emath.fr/cocv. 1997. V.2. P.87-102.
5. Ho L.E. Boundary observability of the wave equation // C.R. Acad. Sci.Paris. Ser. I. 1986. V. 302. P. 443-446.
6. Lions J.-L. Controlabilite exacte et stabilization de systemes distribues. V.1. Paris: Masson, 1988.
7. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы в частных производных. М.: Мир, 1965.
8. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
9. Исаков В. О единственности решения задачи Коши // Докл. АН. СССР. 1986. Т.255. № 1. С.18-21.
10. Jerison D., Kenig C. Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrodinger operators // Ann. of Math. 1985. V.12. P. 463-494.
11. Kim Y.M. Carleman inequalities for the Dirac operator and strong unique continuation // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. N.7. P. 2103-2112.
12. Kim Y.M. Strong unique continuation of the Schrodinger operators // Bull. Korean. Math. Soc. 1994. V. 31. N.1. P. 55-60.
13. Jerison D. Carleman inequalities for the Dirac and Laplace operators and unique continuation // Adv. Math. 1986. V. 62. N.7. P. 118-134.
14. Fursikov A.V., Imanuvilov O.Yu. On controllability of certain systems simulating a flued flow // IMA. Vol. Math. Appl. 1985. V. 68. P. 149-184.
15. Fursikov A.V., Imanuvilov O.Yu. On exact boundary zero-controllability of two-dimensional Navier-Stokes equations // Acta. Appl. Math. 1994. V. 37. P. 67-76.
16. Imanuvilov O.Yu. Local exact controllability for the 2-D Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions // Lecture Notes in Phys. 1997. V. 491. P. 148-168.

17. Эмануилов О.Ю. Граничное управление полулинейными эволюциоными уравнениями // УМН. 1989. Т.44. № 6. С. 183-184.
18. Фурсиков А.В., Эмануилов О.Ю. Точная управляемость уравнений Навье-Стокса и Буссинеска // УМН. 1999. Т. 54. № 3. С.93-146.
19. Амосова Е.В. Точная локальная управляемость для уравнений динамики вязкого газа // Диф. ур. 2011. Т.47. № 12. С. 1-19.
20. Ervedoza S, Glass O, Guerrero S, Puel J.-P. Local exact controllability for the 1-D compressible Navier-Stokes equation // http://www.math.univ-toulouse.fr/ ervedoza/ Preprint 2011.

УДК 519.248:62-192+519.176

ЗАДАЧА МАЛОРАКУРСНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Д.С. Аниконов
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
Россия, 630090, Новосибирск, пр-т Коптюга, 4
E-mail: anik@math.nsc.ru

В.Г. Назаров
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7
E-mail: naz@iam.dvo.ru

Ключевые слова: уравнение переноса излучения, рентгеновская томография, дистанционное зондирование среды.

Рассматривается задача зондирования неизвестной по своему строению сплошной среды радиационным излучением. Распространение излучения в среде описывается моноэнергетическим уравнением переноса. Предполагается, что среда содержит некоторые включения (неоднородности), имеющее радиационные характеристики, отличные от аналогичных характеристик окружающей части среды. Измерения плотности потока излучения производятся на некоторой плоскости вне включений, а искомым объектом поиска являются границы проекции (тени) этих включений на плоскость измерений. Рассматривается случай, когда прямая визуализация объекта затруднительна из-за значительного рассеяния и поглощения излучения в зондируемой среде. Предлагается метод обнаружения искомых границ проекций на основе нового способа обработки измеряемой информации. Цели задачи адаптированы к проблеме зондирования придонной области мирового океана.

1. Постановка задачи и общая схема алгоритма

Проблема улучшения изображений продолжает привлекать внимание многих специалистов. К настоящему времени создано много соответствующих алгоритмов, имеющих обширные приложения. Однако во всех известных нам работах объектами исследований являются уже полученные изображения (например, фотографии) без анализа природы зондирующих сигналов. Наше исследование основывается на предварительном изучении характера проникающего излучения и выделение из него характеристики, указывающей на расположение реконструируемых линий. Особенно важно то, что мы рассматриваем излучение в произвольной среде при учете не только поглощения, но и большого уровня рассеяния, а также при возможном наличии внутренних и внешних источников излучения. Процесс переноса излучения, описывается следующим интегро-дифференциальным уравнением:

$$(\omega \cdot \nabla_r f(r,\omega)) + \mu(r) f(r,\omega) = \int\limits_{\Omega} k(r,\omega\cdot\omega') f(r,\omega') d\omega' + J(r,\omega), \tag{1}$$

где $r \in G$, $G-$ ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей класса C^1, $\Omega = \{\omega : \omega \in \mathbb{R}^3, |\,\omega\,| = 1\}$. Функция $f(r,\omega)$ есть плотность потока частиц в точке r, движущихся в направлении единичного вектора ω. Функции $\mu(r), k, J$ характеризуют среду G, в которой происходит процесс переноса излучения. При этом $\mu(r)$ есть коэффициент ослабления излучения, $k(r, \omega \cdot \omega')-$ индикатриса рассеяния, $J(r,\omega)-$ плотность внутренних источников излучения. Обозначим $d(r,\omega)$ длину пересечения луча $L_{r,\omega} = \{r + t\omega, t \geqslant 0\}$ и области G и рассмотрим граничное условие:

$$f(r - d(r,-\omega)\omega, \omega) = h(r - d(r,-\omega), \omega), (r,\omega) \in G \times \Omega, \tag{2}$$

где h означает плотность падающего (внешнего) потока на границе среды G. Для постановки нашей задачи сделаем следующие предположения. Пусть область G содержит выпуклые непересекающиеся подобласти G_1,G_3, границы которых принадлежат классу C^2 и пусть $G_2 = G \setminus \overline{G_1 \cup G_3}$. На границах областей G_i коэффициенты уравнения (1) имеют разрывы первого рода по переменной r, а для $r, \omega, \omega' \in G_j \times \Omega \times \Omega, j = 1,2,3$ функции μ, k, J равномерно непрерывны по совокупности переменных вместе со всеми своими частными производными первого порядка. Неотрицательная и ограниченная функция $h_1(r,\omega) = h(r - d(r,-\omega)\omega, \omega)$ предполагается непрерывной вместе со всеми своими первыми производными при $(r,\omega) \in G \times \Omega$. Рассмотрим горизонтальную плоскость $P = \{r = (r_1, r_2, r_3) : r_3 = 0\}$, пересекающую область G, но не имеющую общих точек с областями G_2 и G_3. Обозначим через D множество, являющееся пересечением плоскости P и области G а через D_2 и D_3 вертикальные проекции областей G_2 и G_3 на плоскость P. Настоящая работа направлена на исследование достаточно конкретной проблемы зондирования придонных объектов океана. Соответственно роль областей G_i различна. Так, область G_1 представляет собой водную часть зондируемой области, а G_2- грунтовую, которая содержит включение G_3. Будем считать, что $\overline{D_2}, \overline{D_3} \subset D$. Для определенности будем считать, что области G_2 и G_3 находятся ниже плоскости P. Ставится и исследуется следующая задача. **Задача локации.** *Найти границу ∂D_3 множества D_3, если известны значения функции $f(r, \omega_P)$ при $r \in D, \omega_P = (0,0,1)$.* Содержательный смысл этой задачи состоит в том, чтобы измеряя плотность вертикального потока излучения на горизонтальной плоскости вне неизвестного тела, обнаружить его тень на плоскости измерений. В наших терминах тенью называется множество точек пересечения лучей $L_{r,\omega_P}, r \in G_3$ и плоскости P. Заметим, что рассмотрение именно вертикальной проекции на горизонтальной плоскости производится только для простоты изложения. Аналогично можно было бы взять любую плоскость и ортогональную к ней проекцию. Для решения поставленной задачи можно использовать один из ранее обоснованных и прошедших проверку индикаторов неоднородности [2-4]:

$$I(r) = |\nabla_r^* f(r, \omega_P)|, \tag{3}$$

$$Ind(r) = \int\limits_{D'} \frac{|\nabla_y^* f(y, \omega_P)| dy}{|r - y|^{1+\alpha}}, \quad 0.5 < \alpha < 1. \tag{4}$$

Здесь $D'-$ подобласть в D такая, что $D' \supset \overline{D_3}$ и $\overline{D'} \subset D$, $\nabla_r^* f(r, \omega_P)-$ двумерный градиент следа функции $f(r,\omega_P)$ на множестве D, Поведение индикаторов (3), (4) при определенных ограничениях, существующих в настоящей работе было исследовано в [1,2]. В частности, было доказано, что $I(r), Ind(r) \to \infty$ тогда и только тогда, когда $r \to \partial D_3$. Отсюда следует единственность определения проекции (тени) D_3 на плоскость P. При численной реализации алгоритма линия ∂D_3 соответствует точкам аномально больших значений функций $I(r)$ и $Ind(r)$. В случае успешного решения поставленной задачи локации, например, с помощью индикатора неоднородности (3) для заданного направления проектирования $\omega_P = (0, 0, 1)$ мы найдем границу ∂D_3 множества D_3 и, таким образом, сможем утверждать, что область G_3 находится внутри цилиндра C_P с образующей, которая перемещается вдоль направляющей ∂D_3 параллельно вектору $\omega_P = (0, 0, 1)$. Тем самым, горизонтальные координаты области G_3 в известном смысле можно считать найденными. Однако, сказать на каком расстоянии от плоскости P находится G_3 по полученной информации о местоположении границы ∂D_3 мы не можем. Выберем теперь единичный вектор ω_Q так, чтобы он был не коллинеарен вектору ω_P и плоскость $Q-$ ортогональную вектору ω_Q. В предположениях аналогичных тем, которые делались для плоскости P, можно построить индикатор неоднородности $I(r) = |\nabla_r^* f(r, \omega_Q)|$, с его помощью найти границу проекции области G_3 на плоскость Q и далее построить цилиндр C_Q с образующей, параллельной вектору ω_Q. Нетрудно видеть, что пересечение $C_P \cap C_Q$ будет содержать область G_3 и при подходящем выборе угла между ω_P и ω_Q даст достаточно хорошее представление о пространственном положении области G_3 в $\mathbb{R}^3$.

2. Численные эксперименты

Продемонстрируем выполнение алгоритма на следующем численном эксперименте, применительно к пассивному радиационному поиску придонных включений. Для большей наглядности в подобласть G_2 было помещено еще одно включение - выпуклая ограниченная область G_4 не пересекающаяся с включением G_3. Таким образом, область G была шаром радиуса $\sigma = 30$ см с центром в начале координат. Подобласть $G_1 = \{r \in G : r_3 > -0.1\sigma\}$ и заполнялась водой, $G_2 = \{r \in G : r_3 \leqslant -0.1\sigma\}$ и заполнялась илом, G_3 был шар радиусом 0.05σ с центром в точке $(-0.05\sigma,\ -0.05\sigma,\ -0.4\sigma)$, а G_4 был трехосный эллипсоид с центром в точке $(0,\ 0,\ -0.15\sigma)$ и полуосями $l_1 = 0.1\sigma,\ l_2 = 0.15\sigma,\ l_3 = 0.05\sigma$. G_3 и G_4 заполнялись алюминием. На поверхности области G задавалось входящее в нее излучение $h(r, \omega) = 1$, которое в нашем случае можно интерпретировать как радиационный фон. Предполагается, что пассивное зондирование океана происходит на энергии 100 кЭв. Соответствующие данные для коэффициентов ослабления и рассеяния на этой энергии для воды, ила и алюминия вычислялись на основе данных из таблиц [5]. Для удобства численных расчетов в качестве D' брался квадрат со стороной 0.6σ. Он покрывался равномерной сеткой, содержащей $N_r \times N_r$ узлов, в которых численно находилось решение уравнения (1) для трех различных направлений вектора ω: $\omega_1 = (0,\ 0,\ 1),\ \omega_2 = (0.5\ ,0,\ \sqrt{3}/2),\ \omega_3 = (\sqrt{2}/2,\ 0,\ \sqrt{2}/2)$. Таким образом, ω_i образовывали с осью r_1 углы φ_i в 90, 60 и 45 градусов соответственно. Квадрат D' каждый раз позиционировался таким образом, что всегда был ортогонален ω_i, а его центр лежал в плоскости $r_3 = 0$. Мы полагали $J(r, \omega) = 0$ в области G. Для нахождения решения уравнения (1) на множестве $D' \times \omega_i$ использовалась одна из версий метода Монте-Карло, называемая методом сопряженных блужданий. Число учитываемых актов рассеяния при этом бралось 8, а число траекторий 50000. После нахождения функции $f(r, \omega_i)$ в узлах сетки вычислялась также функция $I(r)$, определяемая формулой (3). Величина N_r в расчетах равнялась 101. Результаты вычисления функции $f(r, \omega_i)$ и $I(r)$ представлены в графическом виде на рис. 1.

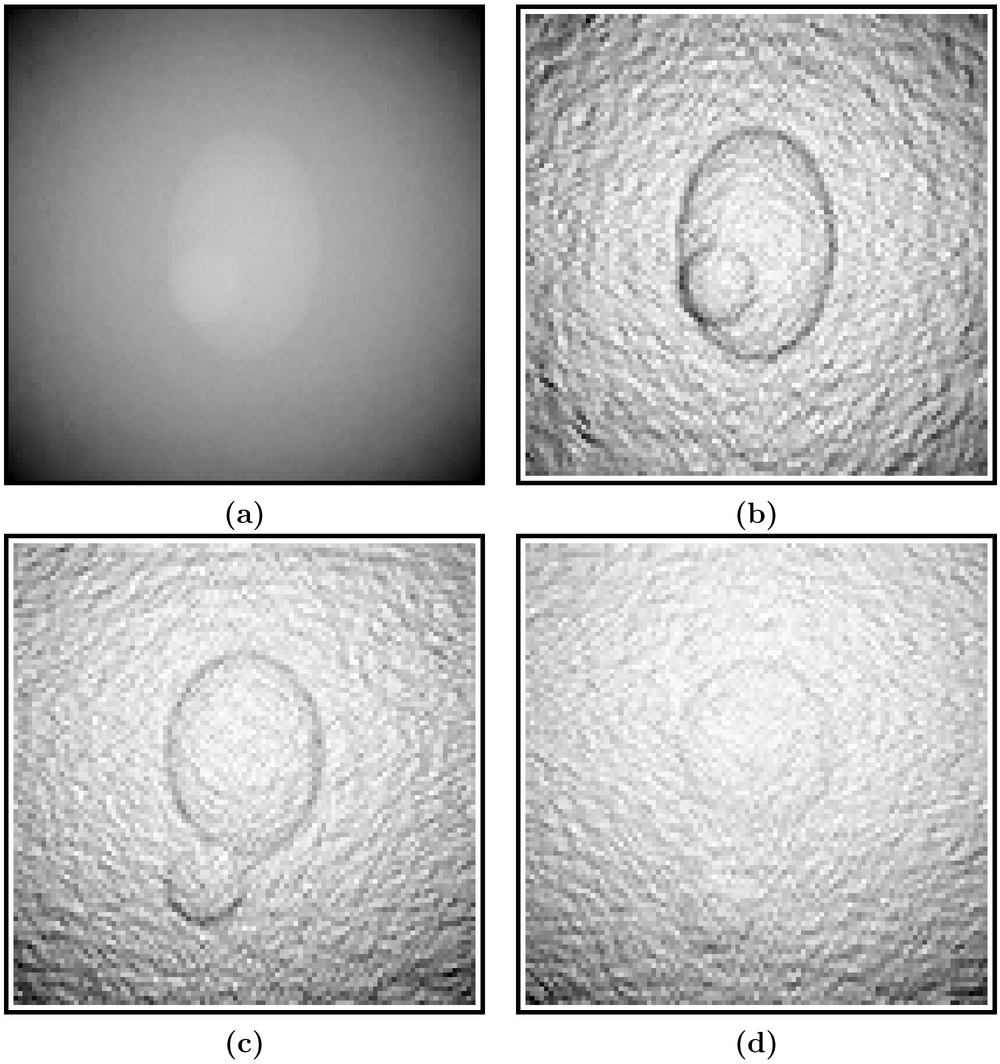


Рис. 1. Результаты численного эксперимента: **(a)** – значения функции $f(r,\omega_1)$ в узлах сетки, покрывающей квадрат D' (прямая видимость); **(b)** – значения индикатора $I(r)$ при $\varphi = 90°$; **(c)** – значения индикатора $I(r)$ при $\varphi = 60°$; **(d)** – значения индикатора $I(r)$ при $\varphi = 45°$;

Из рисунков видно, что с уменьшением угла φ_i качество реконструкции границ включений ухудшается. Это происходит потому что с уменьшением φ_i увеличивается расстояние от включений G_3, G_4 до квадрата D'. В целом, предлагаемый метод локации годится лишь для сред сравнительно небольшой оптической толщины.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 13-07-00318-а, 12-07-00689-а, 12-07-000550-а, 12-07-00302-а, 11-08-00641-а), Президиума РАН (проект 4.3 Программы № 15), ОНИТ РАН (проект 2.3 текущей Программы фундаментальных научных исследований).

Список литературы

1. Аниконов Д.С., Ковтанюк А.Е., Прохоров И.В. Использование уравнения переноса в томографии. Москва. Логос. 2000. С. 3-223.

2. Anikonov D.S., Nazarov V.G., Prokhorov I.V. Algorithm of finding a body projection within an absorbing and scattering medium. // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2011. Volume 18, Issue 8, P. 885-893.
3. Аниконов Д.С., Назаров В.Г., Прохоров И.В. Задача одноракурсного зондирования неизвестной среды. // Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т.14. №2(46). С. 9-16.
4. Аниконов Д.С., Назаров В.Г, Задача двуракурсной томографии. // ЖВМиМФ. 2012. Т.52, №3. С. 372-378.
5. Hubbell J.H., Seltzer S.M. Tables of X-ray mass attenuation coefficients and mass energy-absorption coefficients 1Kev to 20 Mev for elements Z = 1 to 92 and 48 addslional substances of dosimetric interest. // NISTIR, 5632, 1995.

УДК 519.685

ДЕКЛАРАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ И ПОИСК ПРИМЕНИМОГО МЕТОДА

И.Л. Артемьева
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
E-mail: aginor@inbox.ru

Р.А. Ескин
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690091, Владивосток, Суханова, 8
E-mail: iartemeva@mail.ru

Ключевые слова: параллельные вычисления, MPI, OpenCL, численное моделирование

В работе рассматривается декларативное представление методов численного решения задач математического моделирования и алгоритм поиска применимого метода решения по данному декларативному представлению. Предлагаемый подход декларативного описания метода решения используется в программной системе численного моделирования для параллельных вычислительных систем с расширяемым множеством методов решения.

Введение

Моделирование в современном мире применяется для широкого круга задач. На математической модели основывается компьютерная модель, представляющая физический процесс. Компьютерное моделирование реальных процессов требует большого объема вычислений, таким образом, проблема ускорения вычисления является актуальной[1]. Использование параллельных вычислений является единственным способом повышения мощности вычислительной системы. В работе [2] предложена концепция системы численного моделирования для параллельных вычислительных систем с расширяемым множеством методов решения. Ядром системы является языковой транслятор, переводящий высокоуровневую модель в код на языке программирования низкого уровня для параллельной вычислительной системы. Процесс трансляции осуществляется в три этапа: лексический и синтаксический анализ модели; анализ задачи; генерация низкоуровневого кода для параллельной вычислительной системы.

Декларативное представление метода численного решения задачи

На этапе анализа происходит переход от спецификации задачи к численной схеме решения задачи. Для сопоставления задаче метода ее решения применяется механизм преобразований. Преобразование – это декларативное представление метода решения задачи. Задача преобразования – поставить в соответствие задаче наиболее эффективный метод её решения. Преобразование состоит из контекстного условия и набора трансформаций (к одной задаче может быть применим более чем один метод решения, каждому методу соответствует своя трансформация). Контекстное условие представляет собой схему задачи. Трансформация представляет собой схему решения задачи. КУ состоит из шаблона задачи и дополнительных условий. Шаблон задачи определяет общую структуру задачи, к которой может быть применено данное преобразование. Шаблон задачи задается в виде непустого множества формул. Применимость метода решения не всегда следует только из структуры задачи – может потребоваться дополнительный анализ свойств задачи. Поэтому круг решаемых задач ограничивают также дополнительные условия. Дополнительные условия задаются в виде множества формул, истинность их конъюнкции вкупе с соответствием шаблона задачи обуславливает применимость преобразования. Задание трансформации состоит в задании функции эффективности трансформации и схемы решения. Результатом функции эффективности является вещественное положительное число; результат зависит от свойств решаемой задачи. Функция эффективности используется для выбора трансформации из набора – чем больше значение функции для конкретной задачи, тем эффективней связанная с ней схема. Схема решения представляет собой запись численной схемы решения задачи на абстрактном языке параллельного программирования, который с одной стороны, является достаточно простым, чтобы обеспечить эффективную трансляция на любой язык программирования для параллельной вычислительной системы, и, с другой стороны, обеспечивает достаточный набор средств для выражения любой параллельной численной схемы. Множество абстрактных имен функции эффективности и схемы решения должно быть подмножеством абстрактных имен контекстного условия для обеспечения применимости интерпретации контекстного условия к трансформации. Расширяемое множество методов решения в системе обеспечивается за счет наличия банка преобразований. Во время этапа анализа задачи происходит поиск и интерпретация применимого преобразования из банка преобразований, то есть выбор применимого преобразования и составление численной схемы решения из преобразования и спецификации задачи.

Поиск применимого метода решения

Выбор применимого преобразования из банка преобразований является задачей перебора – контекстное условие каждого преобразования из банка должно быть интерпретировано и сравнено со спецификацией задачи. Если сравнение после интерпретации успешно, тогда преобразование применимо. Интерпретация и сравнение производятся с использованием помеченных деревьев разбора спецификации задачи и контекстного условия. Разметка дерева содержит информацию о зависимостях между именами объектов. Например, выражение $(2 * t + x)$ это анонимный объект, зависящий от имен t и x; выражение $y(t)$ это именованный объект, зависящий от t. Структура зависимостей должна быть сохранена при поиске подстановки из пространства имен контекстного условия в пространство имен спецификации задачи. Алгоритм интерпретации и сравнения контекстного условия: Входом алгоритма является размеченное дерево разбора контекстного условия (обозначим через $treeCC$), размеченное дерево разбора спецификации задачи (обозначим через $treePS$). Выходом алгоритма является подстановка из пространства имен контекстного условия в пространство имен спецификации задачи (то есть интерпретация контекстного условия). Описание шагов алгоритма: 1 – Найти поддерево дерева $treePS$ (обозначим через R), такое что: 1) корень входит в состав R; 2) если нетерминальный узел принадлежит R, то все соседние узлы принадлежат R; 3) структура R соответствует $treeCC$. 2 – Найти все возможные подстановки из множества имен КУ во множество имен формулы. Обозначим через P множество всех возможных подстановок. 3 – Взять подстановку p из P и сравнить $treePS$ с $treeCC$ после применения подстановки p. Если деревья совпадают, то алгоритм завершился успешно, p – выход алгоритма. 4 – Если в P больше нет элементов, то алгоритм завершился не успешно. Шаг 2 алгоритма может быть сведен к задаче поиска изоморфизма графа (задача относится к классу NP). Множество имен спецификации задачи вместе с зависимостями представляют собой ориентированный граф (имена – вершины, зависимости между именами - дуги). Граф-изоморфизм с вершинами - именами из контекстного условия – представляет собой подстановку из множества имен контекстного условия во множество имен спецификации задачи. Как только интерпретация контекстного условия найдена, возможен переход к схеме решения задачи. Это осуществляется путем применения найденной подстановки имен к одной из трансформаций преобразования. По найденной схеме решение производится генерация низкоуровневого кода для параллельной вычислительной системы. В качестве целевых интерфейсов для параллельной реализации предлагается применять стандарты MPI (MessagePassingInterface) и OpenCL (OpenComputingLanguage). Это позволит эффективно использовать ресурсы как традиционных кластерных систем (MPI), так и ресурсы графических ускорителей (OpenCL), абстрагируясь от деталей каждой отдельно взятой архитектуры.

Список литературы

1. В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
2. Eskin R., Artemieva I. Numerical simulation system for parallel computing // Proceedings of Second International Conference "Cluster Computing"(Ukraine, Lviv, June 3-5, 2013) http://hpc-ua.org/cc-13/files/proceedings/15.pdf

УДК 517.95

МАСКИРОВКА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ ЧЕРЕЗ ИМПЕДАНСНОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Байдин А.В.
Дальневосточный Федеральный Университет
Россия, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8
E-mail: thulf.m@gmail.com

Ключевые слова: Уравнение Гельмгольца, смешанная задача сопряжения, граничная проводимость, импеданс, задача управления, разрешимость.

Рассматриваются задачи управления для двумерной модели электромагнитного поля, описывающей рассеяние электромагнитных волн в неограниченной однородной среде, содержащей проницаемое диэлектрическое препятствие с частично покрытой (в целях маскировки) границей. Роль управления играет функция, входящия в импедансное граничное условие на границе. Доказывается разрешимость как исходной задачи сопряжения для двумерного уравнения Гельмгольца, так и задач управления. Выводятся системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума.

Введение

В настоящее время актуальными являются задачи, связанные с маскировкой материальных тел от электромагнитной и акустической локации. Начиная с пионерской работы J. Pendry et al. [1], разработке теоретических и численных методов решения указанных задач посвящено большое количество работ. Отметим среди них работу [2], в которой эффект маскировки достигается за счет выбора параметров среды, заполняющей маскировочную оболочку, путем решения соответствующей обратной задачи для уравнений Максвелла или модели акустики. Необходимым условием существования маскировочных оболочек является анизотропия среды, заполняющей данную оболочку. Техническая реализация такого метода маскировки связана со значительными техническими трудностями. Можно предложить несколько способов преодоления этих трудностей. Первый способ состоит в аппроксимации точных решений рассматриваемой задачи маскировки приближенными решениями, которые допускают относительно простую техническую реализацию. Еще один способ состоит в использовании альтернативного метода маскировки материальных объектов, основанного на покрытии их специальными материалами. В частности, объекты, представляющие собой идеальные проводники, покрывают тонким слоем высокопоглощающего вещества, тогда как диэлектрики, наоборот, покрывают тонким слоем высокопроводящего вещества. Математически внесение такого покрытия моделируется введением так называемого импедансного граничного условия, связывающего между собой электрическое и магнитное поля через граничный коэффициент, называемый поверхностным импедансом либо поверхностной проводимостью. В случае, когда объект имеет неизменную форму, задача его маскировки сводится к выбору параметров покрытия, обеспечивающих выполнение определенных свойств для рассеянных волн, возникающих при падении на объект первичных электромагнитных волн. В математическом плане эта задача сводится к решению обратной экстремальной задачи, где роль управления играет поверхностная проводимость покрытой части границы, а в качестве функционального ограничения выступает используемая модель рассеяния электромагнитных волн, рассматриваемая при импедансном граничном условии. Именно эта задача рассматривается в данной работе для двумерной модели, описывающей рассеяние электромагнитных волн в неограниченной однородной среде, содержащей анизотропное приницаемое препятствие с покрытой границей. Для акустических волн обоснование физической подоплеки данного подхода можно найти в [3]. Близкая задача управления импедансом в случае внешней краевой задачи для 2-D уравнения Гельмгольца рассмотрена в [4]. Для электромагнитных волн задачи управления импедансом для трехмерных уравнений Максвелла, рассматриваемых в ограниченной области, изучены в [5, 6].

1. Разрешимость исходной задачи сопряжения

1.1. Формулировка задачи

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ со связным дополнением $\Omega^c = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega}$ и границей Γ. Задача рассеяния электромагнитных волн в однородной среде, содержащей неоднородное проницаемое диэлектрическое препятствие цилиндрической формы бесконечной длины с сечением Ω и покрытой (в целях маскировки) границей в случае, когда падающая волна распространяется в направлении, перпендикулярном оси цилиндра, а магнитное поле поляризовано в этом направлении (E-поляризация), сводится к нахождению функций v в Ω и $u = u^{inc} + u^s$ в Ω^c, удовлетворяющих уравнениям

$$\Delta v + k^2\delta(x)v = 0 \text{ в } \Omega, \quad \Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } \Omega^c, \tag{1}$$

$$v - u = 0, \ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} = i\eta(x)u \text{ на } \Gamma, \tag{2}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0 \text{ где } r = |x|. \tag{3}$$

Здесь u^{inc} — падающая волна, u^s — рассеянная волна, η — поверхностная проводимость на границе Γ, k — волновое число, $\delta(x)$ — индекс рефракции диэлектрического препятствия Ω, i — мнимая единица, n — единичный вектор внешней по отношению к Ω нормали к границе Γ, $\frac{\partial v}{\partial n}$ — нормальная производная функции v на Γ. Второе уравнение в (2) имеет смысл модифицированного условия Леонтовича для E-поляризованных электромагнитных волн. (4) — условие излучения Зоммерфельда в двумерном случае.

1.2. Функциональные пространства

Будем предполагать ниже, что выполняются следующие условия: (i) Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ со связным дополнением Ω^c и с границей $\Gamma \in C^{0,1}$. Пусть B_R — круг радиуса R, содержащий Ω. Γ_R — граница этого круга. Положим $\Omega_e = \Omega^c \cap B_R$. Ясно, что Ω_e — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega_e = \Gamma \cup \Gamma_R$. Поскольку Γ является одновременно границей области Ω и частью границы $\partial\Omega_e = \Gamma \cup \Gamma_R$ области Ω_e, будем использовать два оператора следа на Γ: "внутренний" оператор следа $\gamma_i|_\Gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ и "внешний" $\gamma_e|_\Gamma : H^1(\Omega_e) \to H^{1/2}(\Gamma)$. Будем использовать пространства $H^1(\Omega)$, $H^1(\Omega_e)$, $H^{1/2}(\Gamma)$, $H^{1/2}(\Gamma_R)$ с нормами $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, $\|\cdot\|_{1,\Omega_e}$, $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$, $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_R}$ соответственно. Для описания проводимости η введем пространства $L^\infty_{\eta_0}(\Gamma) = \{\eta \in L^\infty(\Gamma) : \eta(x) \geqslant \eta_0\}$ и $H^s_{\eta_0}(\Gamma) = \{\eta \in H^s(\Gamma) : \eta(x) \geqslant \eta_0\}$, $\eta_0 = \mathrm{const} > 0, s > 0$. Также наряду с пространством $H^1(\Omega)$ будем рассматривать его подпространство $H^1(\Delta, \Omega) = \{v : v \in H^1(\Omega),\ \Delta v \in L^2(\Omega)\}$, наделенное нормой $\|v\|^2_{H^1(\Delta,\Omega)} = \|v\|^2_{1,\Omega} + \|\Delta v\|^2_\Omega$. Хорошо известно (см. [7, с.31]), что для любой функции $u \in H^1(\Delta, \Omega)$ существует первый след $\gamma_1 v \equiv \frac{\partial v}{\partial n}|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Точно так же для любой функции $u \in H^1(\Delta, \Omega_e)$ существует первый след $\gamma_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega_e} \in H^{-1/2}(\partial\Omega_e)$ и его сужения $\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ и $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_R} \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$. Введем пространство $\mathcal{H}^{inc} \equiv \mathcal{H}^{inc}(\Omega_e) = \{v \in H^1(\Omega_e) : \Delta v + k^2 v = 0 \text{ в } \mathcal{D}'(\Omega_e)\}$, служащее для описания падающих волн. Ясно, что $\mathcal{H}^{inc} \subset H^1(\Delta, \Omega_e)$. Следовательно, для любой падающей волны $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$ существует след (нормальная компонента) $\frac{\partial u^{inc}}{\partial n}|_{\Gamma_R} \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$. Введем гильбертово пространство $V = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega_e)$ с нормой $|[U]|^2 = \|v\|^2_{1,\Omega} + \|u\|^2_{1,\Omega_e}$ Для произвольной пары функций $p \in H^1(\Omega)$, $p_e \in H^1(\Omega_e)$ положим $P = (p, p_e) \in V$. Рассмотрим оператор "скачка" $\gamma_e : V \to H^{1/2}(\Gamma_e)$ через границу Γ_e формулой $\gamma_e P = [P]|_{\Gamma_e} \equiv p_e|_{\Gamma_e} - p|_{\Gamma_e}$ для $P \equiv (p, p_e) \in V$. Введем также ядро $X = \mathrm{Ker}\gamma \equiv \{P = (p, p_e) \in V : \gamma P \equiv p_e|_\Gamma - p|_\Gamma = 0\}$. Так как оператор $\gamma : V \to H^{1/2}(\Gamma)$ непрерывен в силу условия $\Gamma \in C^{0,1}$, то ядро X само является гильбертовым пространством по норме $\|\cdot\|_X \equiv |[\cdot]|$.

1.3. Разрешимость краевой задачи и оценки решений

Введем отображение Дирихле–Неймана $T : H^{1/2}(\Gamma_R) \to H^{-1/2}(\Gamma_R)$, которое ставит в соответствие каждой функции $g \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ функцию $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$, где $\tilde{u}$ — решение внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца $\Delta\tilde{u} + k^2\tilde{u} = 0$ в $\Omega^c \backslash \overline{B}_R$ с условием $\tilde{u}|_{\Gamma_R} = g$. Известно, что $T \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R), H^{-1/2}(\Gamma_R))$, (см., например, [8]). Задача (1)–(4), рассматриваемая на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, эквивалентна задаче (1)–(2), рассматриваемой в круге B_R при следующем граничном условии для рассеянного поля u^s на Γ_R:

$$\frac{\partial u^s}{\partial n} = Tu^s \quad \text{на } \Gamma_R. \tag{4}$$

Умножим уравнения (1) на произвольную тестовую функцию $\Phi \in X$, проинтегрируем, применим формулы Грина и сложим два уравнения. С учетом граничных условий (2), (4) запишем результат в виде

$$a^\eta(U, \Phi) \equiv a_0(U, \Phi) - a_\eta(U, \Phi) - a_\delta(U, \Phi) = \langle f, \Phi\rangle \quad \forall \Phi \in X. \tag{5}$$

Здесь $U = (u, v) \in X$. a_0, a_η, a_δ и f — полуторалинейные и антилинейная формы, определяемые формулами

$$
\begin{aligned}
&a_0(U,\Phi) = \int\limits_{\Omega} \nabla\overline{\Phi}\cdot\nabla U \mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega_e} \left(\nabla\overline{\Phi}\cdot\nabla U - k^2\overline{\Phi}U\right)\mathrm{d}x - \int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi}TU\mathrm{d}\sigma,\\
&a_\eta(U,\Phi) = i(\eta U,\Phi)_\Gamma \equiv i\int\limits_{\Gamma} \eta\overline{\Phi}U\mathrm{d}\sigma, \quad a_\delta(U,\Phi) = k^2(\delta U,\Phi) \equiv k^2\int\limits_{\Omega} \delta\overline{\Phi}U\mathrm{d}x,\\
&\langle f,\Phi\rangle = -\int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi}Tu^{inc}\mathrm{d}\sigma + \int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi}\frac{\partial u^{inc}}{\partial n}\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Решение $U \in X$ задачи (6) назовем слабым решением задачи 1. Используя свойства оператора T, теорему о следах и теоремы вложения можно показать, что к задаче (6) применима альтернатива Фредгольма. С её помощью может быть доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть при выполнении условий (i), $\delta \in L^\infty_+(\Omega)$, $\eta \in K \subset L^\infty_{\eta 0}$, где K — произвольное непустое ограниченное множество, где $\eta_0 > 0$. Тогда для любого падающего поля $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$ задача (6) имеет единственное решение $U_\lambda \in X$, которое удовлетворяет следующей оценке с константой C_0, не зависящей от η.*

$$
\|U_\lambda\|_X \leqslant C_0\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e} \quad \forall\eta \in K. \tag{7}
$$

2. Постановка и исследование задачи управления

Задача управления заключаются в минимизации определенного функционала качества, зависящего от состояния (волнового поля U) и неизвестной функции (управления), удовлетворяющей уравнениям состояния, имеющим вид слабой формулировки (6) задачи 1. В качестве управления выступает проводимость η, а в качестве функционала качества выберем один из следующих:

$$
I_1(U) = \|U - u^d\|^2_Q = \int\limits_Q |U - u^d|^2 dx, \ I_2(U) = \|U - u^d\|^2_{\Gamma_r} = \int\limits_{\Gamma_r} |U - u^d|^2 d\sigma. \tag{8}
$$

Здесь $Q \subset \Omega_e$ — подобласть области Ω_e, Γ_r — граница круга B_r радиуса $r < R$ такого, что $\Omega \subset B_r$, функция u^d моделирует заданное волновое поле в области Q или на Γ_r. В частном случае, когда $u^d = u^{inc}$, функционал I_1 (либо I_2) имеет смысл квадрата средне-квадратичной интегральной нормы рассеяного поля u^s по Q (либо по Γ_R).

2.1. Разрешимость задачи управления

Положим $J(U,\eta) = (\alpha_0/2)I(U) + (\alpha_1/2)\|\eta\|^2_{s,\Gamma}$. Будем предполагать, что выполняются следующие условия: (j) $\Gamma \in C^{1,1}$; $\alpha_0 > 0$; $K \subset H^s_{\eta 0}(\Gamma)$ — непустое выпуклое замкнутое множество, где $s > 1/2$, $\eta_0 > 0$. Введем оператор $G : X \times K \times \mathcal{H}^{inc} \to X^*$ формулой $\langle G(U,\eta,u^{\rm inc}),\Phi\rangle = a_0(U,\Phi) - i(\eta U,\Phi)_\Gamma - (\delta U,\Phi)_\Omega - \langle f,\Phi\rangle$ и перепишем слабую формулировку (6) задачи 1 в виде уравнения $G(U, \eta, u^{inc}) = 0$. Рассмотрим следующую задачу условной минимизации:

$$J(U, \eta) = \frac{\alpha_0}{2} I(U) + \frac{\alpha_1}{2} \|\eta\|^2_{s,\Gamma} \to \inf, \;\; G(U, \eta, u^{inc}) = 0, \; (U, \eta) \in X \times K. \tag{9}$$

Здесь $I : X \to \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал качества. Обозначим через $Z_{ad} = Z_{ad}(u^{inc}) = \{(U, \eta) \in X \times K : G(U, \eta, u^{\text{inc}}) = 0, J(U, \eta) < \infty\}$ множество допустимых пар для задачи (10). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть при выполнении условий (i), (j), $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$, Z_{ad} — непустое множество, и пусть $\alpha_0 > 0; \alpha_1 \geqslant 0$, K — ограниченное множество, либо $\alpha_1 > 0$. Тогда задача (10) имеет по крайней мере одно решение $(U, \eta) \in X \times K$ при $I = I_k$, $k = 1, 2$.*

2.2. Вывод системы оптимальности

Дальнейшее исследование задачи управления (10) состоит в установлении достаточных условий на исходные данные, обеспечивающих единственность и устойчивость ее решения. Для этого будем использовать, подход, разработанный в [9, 10] для уравнений магнитной гидродинамики. Он основан на выводе и анализе системы оптимальности, описывающей необходимые условия экстремума для задачи (10). В результате получим следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть при выполнении условий (i), (j) пара $(\hat{U}, \hat{\eta}) \in X \times K$ является решением задачи (10), причем функционал I непрерывно дифференцируем по U в точке $\hat{U}$. Тогда существует единственный ненулевой множитель Лагранжа $P \in X$, который удовлетворяет комплексному уравнению Эйлера-Лагранжа (11), а также справедлив принцип минимума, эквивалентный вариационному неравенству (12).*

$$a_0(\Psi, P) - a(\delta\Psi, P) - i(\hat{\eta}\Psi, P)_\Gamma = -\frac{\alpha_0}{2} \overline{\langle I'_U(\hat{U}), \Psi\rangle} \; \forall \Psi \in X. \tag{10}$$

$$\alpha_1(\hat{\eta}, \eta - \hat{\eta})_{s,\Gamma} - \mathrm{Re}[i((\eta - \hat{\eta})\hat{U}, P)_\Gamma] \geqslant 0 \;\; \forall \eta \in K. \tag{11}$$

Прямая задача (6), тождество (11), имеющее смысл сопряженной задачи для сопряженного состояния $P \in X$, и вариационное неравенство (12) образуют *систему оптимальности* для задачи управления (10), описывающую необходимые условия экстремума.

Заключение

В работе была получена система оптимальности, которую можно использовать для исследования единственности и устойчивости решений конкретных экстремальных задач, а также при разработке численного алгоритма решения поставленной экстремальной задачи и для исследования его сходимости. Простейший алгоритм получается, если для нахождения решения системы оптимальности применить метод простой итерации. В результате получим итерационный алгоритм, n-я итерация которого состоит в нахождении величин U_n, P_n и η_{n+1} при заданном η_n путем последовательного решения следующих задач:

$$a_0(U_n,\Phi)-a_{\eta_n}(U_n,\Phi)-a_\delta(U_n,\Phi)=\langle f,\Phi\rangle \quad \forall\Phi\in X,$$
$$a_0(\Psi,P_n)-a(\delta\Psi,P_n)-i(\eta_n\Psi,P_n)_\Gamma=-\tfrac{\alpha_0}{2}\overline{\langle I'_U(U_n),\Psi\rangle} \quad \forall\Psi\in X,$$
$$\alpha_1(\eta_{n+1},\eta-\eta_{n+1})_{s,\Gamma}-\mathrm{Re}[i((\eta-\eta_{n+1})U_n,P_n)_\Gamma]\geqslant 0 \quad \forall\eta\in K,$$

Исследованию единственности и устойчивости экстремальных задач, построению численных алгоритмов, исследованию их сходимости и анализу численных экспериментов будет посвящены дальнейшие исследования автора.

Список литературы

1. Pendry J.B., Shurig D. and Smith D.R. Controlling Electromagnetic Fields// Science. 2006. V. 312. P. 1780–1782.
2. Алексеев Г.В., Романов В.Г. Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики // Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т. 14, № 2, С. 1–6.
3. Бобровницкий Ю.И. Научные основы акустического стелса// ДАН. 2012. Т. 442, № 1. С. 41–44.
4. Alekseev G.V. Cloaking via impedance boundary condition for 2–D Helmholtz equation// Appl. Anal. 2013. V. 93, N 5.
5. Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В. Теоретический анализ экстремальных задач граничного управления для уравнений Максвелла// Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т. 14, № 1. С. 3–16.
6. Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В., Романов В.Г. Оценки устойчивости решений задач граничного управления для уравнений Максвела при смешанных граничных условиях// ДАН. 2012. Т. 447, № 1 . С. 7–12.
7. Алексеев Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. Москва. Научный Мир, 2010.
8. Melenk J.M., Sauter S. Convergence analysis for finite element discretizations of the Helmholtz equation with Dirichlet–to–Neumann boundary conditions// Math. Comp. 2010. V. 79. P. 1871–1914.
9. Алексеев Г.В. Задачи управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики// ДАН. 2004. Т. 395, № 3. С. 322–325.
10. Алексеев Г.В., Терешко Д.А. О задаче идентификации для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49, № 10. С. 1796–1811.

УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МГД ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Р.В. Бризицкий
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
E-mail: mlnwizard@mail.ru

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, смешанные условия

Доказывается глобальная разрешимость краевой задачи для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости, рассматриваемых при неоднородном условии Дирихле для скорости и смешанных граничных условиях для магнитного поля.

Введение

Сравнительный анализ инженерной и математической литературы по электромагнетизму показывает, что математические результаты не всегда соответствуют требованиям технических приложений. Например, при моделировании реальных электромагнитных устройств один из смежных фрагментов устройства может быть диэлектриком, а другой – идеальным проводником. Это приводит к необходимости постановки смешанных граничных условий для магнитного или электрического поля (см. [1]), а в математической литературе обычно избегают их рассмотрения. В [1] впервые доказана разрешимость задач магнитостатики при смешанных граничных условиях для магнитного поля, когда на одной части границы задается нормальная компонента магнитного поля, на другой – тангенциальная компонента. Однородные условия такого вида как раз и описывают ситуацию, когда один участок границы – идеальный проводник, а другой – идеальный диэлектрик. При этом не предполагалось, что открытые участки границы с разными граничными условиями, в свою очередь, не могут иметь общую границу. Таких упрощающих предположений нет и в данной работе. Так же в [1] исследованы аналогичные задачи электростатики. При изучении задач магнитной гидродинамики (МГД) при смешанных граничных условиях для магнитного поля мы существенно используем результаты [1] о компактности вложений соболевских пространств и вытекающие из них обобщенные неравенства коэрцитивности, а так же ортогональные разложения пространства $\mathbf{L}^2(\Omega)$, обобщающие результаты [4] и [5] на случай более реалистичных предположений. С их помощью в данной работе получены новые априорные оценки и обоснована корректность используемых слабых формулировок. Перейдем к постановке краевой задачи.

1. Постановка начально-краевой задачи

В ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^3$ с границей Γ, состоящей из двух частей Γ_1 и Γ_2, рассматривается следующая краевая задача для стационарных уравнений магнитной гидродинамики:

$$\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \varkappa \operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H} = \mathbf{f},\ \ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\nu_1\operatorname{rot}\mathbf{H} - \rho_0^{-1}\mathbf{E} + \varkappa\mathbf{H}\times\mathbf{u} = \nu_1\mathbf{j},\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0,\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma,\ \ \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_1} = 0,\ \mathbf{H}\times\mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{0},\ \ \mathbf{E}\times\mathbf{n}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей Γ, $\mathbf{u}, \mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ – векторы скорости и напряженностей магнитного и электрического полей, $p = P/\rho_0$, где P – давление, $\rho_0 = \text{const}$ – плотность, $\varkappa = \mu/\rho_0$, $\nu_1 = 1/\rho_0\sigma$, ν и σ – постоянные коэффициенты вязкости и проводимости, μ – магнитная проницаемость, $\mathbf{j}$ – вектор плотности сторонних токов, $\mathbf{g}$ – определенная на Γ функция. Ниже на задачу (1)–(1) при заданных функциях $\mathbf{f}, \mathbf{j}, \mathbf{g}$ будем ссылаться как на задачу 1. Все величины, входящие в (1)–(1), считаются размерными, причем уравнения модели записаны в системе СИ. Физически граничные условия (1) отвечают ситуации, когда участок Γ_1 границы Γ является идеальным проводником, а участок $\Gamma_2 \subset \Gamma$ – идеальный диэлектрик. Насколько известно авторам, уравнения МГД ранее не рассматривались при граничных условиях (1). Отметим что некоторые из изученных ранее краевых задач являются частными случаями задачи 1. Например, в статьях [6, 7] доказана глобальная разрешимость стационарных уравнений МГД в случае, когда на всей границе задается нормальная компонента магнитного поля и тангенциальная компонента электрического поля. В [8] аналогичные результаты получены при задании тангенциальной компоненты магнитного поля на всей границе. Указанные краевые задачи рассматривались при условии Дирихле для скорости и к ним можно прийти, полагая поочередно Γ_1=$\emptyset$ и Γ_2=$\emptyset$. В [9, 10] исследованы стационарные уравнения МГД при смешанных граничных условиях для скорости. Так же отметим постановку не стандартных граничных условий для магнитного поля в работе [11]. Основной целью нашей статьи является доказательство глобальной разрешимости задачи 1.

2. Функциональные пространства и результаты

Как и в [6], будем использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$, $H^0(D) \equiv L^2(D)$, где D обозначает область Ω или ее подмножество Q либо границу Γ. Соответствующие пространства вектор-функций будем обозначать через $\mathbf{H}^s(D)$ и $\mathbf{L}^2(D)$. Нормы и скалярные произведения в пространствах $H^s(Q)$, $H^s(\Gamma)$ и их векторных аналогах будем обозначать через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $\|\cdot\|_{s,\Gamma}$ и $(\cdot,\cdot)_{s,Q}$, $(\cdot,\cdot)_{s,\Gamma}$. Скалярные произведения и нормы в $L^2(Q)$ и $\mathbf{L}^2(Q)$ либо в $L^2(\Gamma)$ и $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)_Q$ и $\|\cdot\|_Q$ либо $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ и $\|\cdot\|_\Gamma$. При $Q = \Omega$ полагаем $\|\cdot\|_Q = \|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)_Q = (\cdot,\cdot)$. Через $\|\cdot\|_1$ и $|\cdot|_1$ будем обозначать норму и полунорму в $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Будем использовать пространства следов $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{1/2}(\Gamma_0)$ функций из $H^1(\Omega)$, где Γ_0 – часть границы Γ. Наряду с пространством $H^{1/2}(\Gamma_0)$ будем использовать его подпространство $H_0^{1/2}(\Gamma_0)$, состоящее из тех и только тех функций $v \in H^{1/2}(\Gamma_0)$, для которых продолжение нулем на всю границу Γ принадлежит пространству $H^{1/2}(\Gamma)$. Через $H^s(\Gamma,\Gamma_0)$ обозначим подпространство функций из $H^s(\Gamma)$, состоящее из функций $v\in H^s(\Gamma)$, равных нулю на Γ_0. Отношение двойственности между пространством X и двойственным X^* будем обозначать через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ либо просто $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Будем предполагать, что выполняются условия (i) Ω – конечносвязная ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma\in C^{1,1}$, причем открытые участки Γ_1 и Γ_2 границы Γ удовлетворяют условиям: $\Gamma_1,\Gamma_2\in C^{1,1}$, $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\emptyset$, $\Gamma=\overline{\Gamma}_1\cup\overline{\Gamma}_2$; $\Gamma_1=\cup_{i=1}^n\Gamma_i$, $\Gamma_2=\cup_{j=1}^m\Gamma_j$. (ii) Ω – конечно-связная область в $\mathbb{R}^3$: и существуют непересекающиеся многообразия (“разрезы”) $\Sigma_i\in C^2$, $i=1,2,...,N$ такие, что область $\tilde\Omega=\Omega\backslash\bigcup_{i=1}^N\Sigma_i$ односвязна и липшицева. Пусть $\mathcal{D}(\Omega)$ - пространство бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций, $H_0^1(\Omega)=$ пополнение $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$, $\mathbf{H}_0^1(\Omega)=H_0^1(\Omega)^d$, $\mathbf{V}=\{\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega):\mathrm{div}\mathbf{v}=0\}$, $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)=\mathbf{H}_0^1(\Omega)^*$, $L_0^2(\Omega)=\{p\in L^2(\Omega):(p,1)=0\}$. В дополнение к введенным выше пространствам будем использовать пространства $\mathbf{H}(\mathrm{rot},\Omega)=\{\mathbf{v}\in\mathbf{L}^2(\Omega):\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\in\mathbf{L}^2(\Omega)\}$, а также подпространства $\mathbf{H}_T^1(\Omega)\subset\mathbf{H}^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)\subset\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, состоящие из тангенциальных на Γ векторов из пространств $\mathbf{H}^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ соответственно, и двойственные пространства $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)=\mathbf{H}_0^1(\Omega)^*$, $\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)^*$. Как и в [1], введем следующие (конечномерные) пространства:

$$\mathcal{H}(T,N)=\{\mathbf{h}\in\mathbf{L}^2(\Omega):\mathrm{div}\mathbf{h}=0,\ \mathrm{rot}\mathbf{h}=0 \text{ в } \Omega,\ \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_1}=0,\ \mathbf{h}\times\mathbf{n}|_{\Gamma_2}=0\},$$
$$\mathcal{H}(N,T)=\{\mathbf{h}\in\mathbf{L}^2(\Omega):\mathrm{div}\mathbf{h}=0,\ \mathrm{rot}\mathbf{h}=0 \text{ в } \Omega,\ \mathbf{h}\times\mathbf{n}|_{\Gamma_1}=0,\ \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_2}=0\}.$$

Положим

$$\mathbf{V}_{T,N}=\{\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1(\Omega):\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0 \text{ в } \Omega,\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_1}=0,\ \mathbf{v}\times\mathbf{n}|_{\Gamma_2}=\mathbf{0}\}\cap\mathcal{H}(T,N)^\perp.$$

Пусть в дополнение к (i), (ii) выполняются условия: (iii) $\Gamma\in C^2$, $\Gamma_1,\Gamma_2\in C^2$. Одним из основных результатов является **Лемма 2.1.** *При выполнении условий (i)–(iii) существует константа δ_1, зависящая от Ω и Γ_1, с которой выполняется неравенство*

$$\|\mathrm{rot}\,\mathbf{\Psi}\|^2\geqslant\delta_1\|\mathbf{\Psi}\|_1^2\quad\forall\mathbf{\Psi}\in\mathbf{V}_{T,N}. \tag{4}$$

Пусть в дополнение к условиям (i)–(iii) выполняются условия (iv) $\mathbf{f}\in\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, (v$'$) $\mathbf{j}\in\mathbf{L}^2(\Omega)$. Умножим первое уравнение в (1) на $\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, проинтегрируем по Ω и применим формулы Грина. Получим

$$\nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v})+((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u},\mathbf{v})-\varkappa(\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H},\mathbf{v})-(\mathrm{div}\,\mathbf{v},p)=\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle\ \forall\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{5}$$

Точно так же умножим первое уравнение в (11) на $\mathrm{rot}\,\mathbf{\Psi}$, где $\mathbf{\Psi}\in\mathbf{V}_{T,N}$, и проинтегрируем по области Ω. Учитывая в силу формулы Грина и условия $\mathbf{E}\times\mathbf{n}=\mathbf{0}$ на Γ_1, что

$$(\mathbf{E},\mathrm{rot}\mathbf{\Psi})=\langle\mathbf{E}\times\mathbf{n},\mathbf{\Psi}\rangle_{\Gamma_1}=0\ \ \forall\mathbf{\Psi}\in\mathbf{V}_{T,N},$$

приходим к тождеству

$$\nu_1(\mathrm{rot}\,\mathbf{H},\mathrm{rot}\,\mathbf{\Psi})+\varkappa(\mathrm{rot}\,\mathbf{\Psi}\times\mathbf{H},\mathbf{u})=\nu_1(\mathbf{j},\mathrm{rot}\,\mathbf{\Psi})\ \ \forall\mathbf{\Psi}\in\mathbf{V}_{T,N}. \tag{6}$$

Складывая (5) и (6), получаем

$$\nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v})+\nu_1(\mathrm{rot}\,\mathbf{H},\mathrm{rot}\,\mathbf{\Psi})+((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u},\mathbf{v})-(\mathrm{div}\,\mathbf{v},r)+\varkappa(\mathrm{rot}\,\mathbf{\Psi}\times\mathbf{H},\mathbf{u})-$$

$$-\varkappa(\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H},\mathbf{v})=\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle+\nu_1(\mathbf{j},\mathrm{rot}\,\mathbf{\Psi})\ \forall(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)\times\mathbf{V}_{T,N}, \tag{7}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u}=0 \text{ в } \Omega,\quad \mathbf{u}=\mathbf{g} \text{ на } \Gamma. \tag{8}$$

В результате пришли к *слабой формулировке* задачи 1. Она заключается в нахождении тройки $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{V}_{T,N} \times L_0^2(\Omega)$ из (7), (8). Отметим, что при выполнении условий (i)–(iii) не удается доказать разрешимость задачи (9) без дополнительных условий на исходные данные. А именно, вместо (v$'$) пусть выполняется более жесткое условие (v) $\mathbf{j} \in \operatorname{rot} \mathbf{V}_{T,N}$. Для вектора скорости достаточно потребовать (vi) $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma) : \mathbf{g}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}$. Рассматривая сужение (7) на подпространство $V_{0T} \equiv \mathbf{V} \times \mathbf{V}_{T,N}$, заключаем, что пара $(\mathbf{u}, \mathbf{H})$ удовлетворяет тождеству

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + \nu_1(\operatorname{rot} \mathbf{H}, \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \varkappa[(\operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi} \times \mathbf{H}, \mathbf{u}) - (\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}, \mathbf{v})] =$$

$$= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle + \nu_1(\mathbf{j}, \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}) \ \ \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi}) \in V_{0T}. \tag{9}$$

Лемма 2.2. *Пусть выполняются условия (i)-(vi) и пусть* $(\mathbf{u}, \mathbf{H}) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{V}_{T,N}$ *– решение задачи (8), (9). Тогда существуют такие функции* $p \in L_0^2(\Omega)$ *и* $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$*, что* $\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}$*, тройка* $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p)$ *удовлетворяет тождеству (7), а четверка* $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, \mathbf{E})$ *удовлетворяет уравнениям (11) почти всюду в* Ω *и уравнениям (1) в следующем смысле:*

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \varkappa \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ в } (\mathcal{D}'(\Omega))^3, \ \ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega. \tag{10}$$

Теорема 2.1. *При выполнении условий (i)–(vi) существует слабое решение задачи* 1 $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{V}_{T,N} \times L_0^2(\Omega)$ *и справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}\|_1 \leqslant M_{\mathbf{u}}, \ \ \|\mathbf{H}\|_1 \leqslant M_{\mathbf{H}}, \tag{11}$$

где $M_{\mathbf{u}}$*,* $M_{\mathbf{H}}$ *– положительные неубывающие функции исходных данных задачи* 1*:* $\mathbf{f}, \mathbf{j}$ *и* $\mathbf{g}$. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00313-а и 12-01-31288) и грантов ДВО РАН (проекты 12-I-П17-03 и 12-III-А-03-038).

Список литературы

1. Fernandes P., Gilardi G. Magnetostatic and electrostatic problems in inhomogeneous anisotropic media with irregular boundary and mixed boundary conditions // Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 1997. V. 7. P. 957–991.
2. Auchmuty G., Alexander J.S. Finite energy solutions of mixed 3d div-curl systems // Quarterly of applied mathematics. 2006. V. 64, N 2. P. 335-357
3. Auchmuty G. The main inequality of 3d vector analysis // Math Modelling & Methods in Appl. Sciences. 2004. V. 14. P. 79–103.
4. Girault V., Raviart P.A. Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
5. Valli A. Orthogonal decompositions of $\mathbf{L}^2(\Omega)^3$. Preprint UTM 493. Department of Mathematics. University of Toronto. Galamen 1995.
6. Алексеев Г.В. Разрешимость задач управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, $\mathcal{N}$ 2. С. 243–262.
7. Алексеев Г.В. Задачи управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики // Докл. РАН. 2004. Т. 395, N 3. С. 322–325.
8. Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В. Разрешимость смешанной задачи для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости // Дальневост. мат. журн. 2002. Т. 3, N 2. С. 285–301.
9. Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В. Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости со смешанными граничными условиями // Дальневост. мат. ж. 2003. Т.4. N 1. С. 108 - 126.
10. Бризицкий Р.В., Терешко Д.А. О разрешимости краевых задач для стационарных уравнений магнитной гидродинамики с неоднородными смешанными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, N 2. С. 239–250.
11. Schotzau D. Mixed finite element methods for stationary incompressible magnetohydrodynamics // Numer. Math. 2004. V. 96. P. 771–800.

УДК 519.853.6:519.642.3

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ДВОЙСТВЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ СТАБИЛИЗАТОРОМ

А.С. Величко
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 5
E-mail: vandre@dvo.ru

Ключевые слова: регуляризация, условная оптимизация, численные методы, параллельный алгоритм

В работе рассматриваются подходы теории и численных методов для экстремальных задач, используемые для решения задач регуляризации с недифференцируемыми стабилизирующими функционалами. Для возникающих задач квадратичной оптимизации с линейными ограничениями использованы численные методы, в том числе параллельные, основанные на двойственной постановке оптимизационной задачи и нелинейном методе Якоби. Предлагаемый подход используется для решения некорректных задач регуляризации большой размерности для интегрального уравнения Фредгольма 1 рода, которая в частности возникает в задаче восстановления гравитационного поля Земли в математической геофизике.

Введение

В работах Васина В.В., Агеева А.Л. [1, 2] рассматривается метод регуляризации для решения некорректно поставленной задачи для операторного уравнения $Au = f$. Классическая тихоновская регуляризация не всегда позволяет с приемлемым качеством восстановить истинное решение, поскольку функционалы, содержащие норму пространства Соболева, могут обладают сильным регуляризующим эффектом, что приводит к заглаживанию тонкой структуры решения. Восстановление решений с высокой степенью точности в частности требует мелкой сетки, что вызывает необходимость решать задачи большой размерности. Небольшие значения параметра регуляризации вызывают неустойчивость численных методов решения возникающих задач оптимизации. Использование стабилизирующих функционалов другого типа приводит к необходимости решать оптимизационные задачи с недифференцируемым функционалом, особенности поиска решений которых являются предметом данной работы.

1. Методы регуляризации и задачи оптимизации

1.1. Регуляризация для уравнения Фредгольма

В качестве примеров использования данного подхода в работах [3, 4] рассматривалось интегральное уравнения Фредгольма $\int\limits_a^b K(t,s)u(s)\,ds = y(t)$, для которого возникает задача безусловной недифференцируемой оптимизации

$$\min_{\{u_j\}}\Big\{\sum_{i=1}^{m} h_m\Big[\Big|\sum_{j=1}^{n} h_n K(t_i,s_j)u_j - y_i\Big| + \Big(\sum_{j=1}^{n} h_n K(t_i,s_j)u_j - y_i\Big)^2\Big] + \alpha h_n \sum_{j=1}^{n} u_j^2\Big\}. \quad (1)$$

где h_n, h_m – шаги сетки, α – параметр регуляризации, здесь и далее для краткости обозначений $u_j = u(s_j), y_i = y(t_i)$. Классическая тихоновская регуляризация предполагает решение квадратичной задачи безусловной оптимизации

$$\min_{\{u_j\}}\Big\{\sum_{i=1}^{m} h_m\Big(\sum_{j=1}^{n} h_n K(t_i,s_j)u_j - y_i\Big)^2 + \alpha h_n \sum_{j=1}^{n} u_j^2\Big\}. \quad (2)$$

1.2. Задача условной оптимизации

В работах Васина В.В., Еремина И.И. [5, 6] использовались субградиентные, проксимальные методы и методы решения систем неравенств с помощью проективных методов. Данные численные методы зачастую подвержены медленной скорости сходимости, а для задач большой размерности эта проблема усиливается. С другой стороны, альтернативой использования специальных методов негладкой оптимизации для решения задач (1)-(2) может служить их предварительное эквивалентное преобразование к задачам квадратичной оптимизации с линейными ограничениями, для которых существуют эффективные численные методы [7]. Для задачи (1) возможно ее представление в виде:

$$\min_{\{u_j,w_i\}}\Big\{h_m\sum_{i=1}^{m} w_i + h_m\sum_{i=1}^{m} w_i^2 + \alpha h_n \sum_{j=1}^{n} u_j^2\Big\}$$

с линейными ограничениями

$$w_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} hK(t_i,s_j)u_j - y_i, w_i \geqslant -\Big(\sum_{j=1}^{n} hK(t_i,s_j)u_j - y_i\Big).$$

Данный прием не является универсальным, а обусловлен наличием задачи именно на минимум оптимизируемого функционала.

2. Двойственное представление задачи, численные методы и алгоритмы

2.1. Двойственная постановка

Следуя [8], представим последнюю задачу, для краткости записанную в виде $\min\limits_x\{(1/2)x'Qx + c'x, Ax \leqslant b\}$, в двойственной постановке $\min\limits_p\{(1/2)p'Dp + d'p, p \geqslant 0\}$. Здесь $D = AQ^{-1}A', d = b + AQ^{-1}c$ и для оптимальных решений прямой и двойственной постановки задачи выполняется соотношение $x* = -Q^{-1}(c + A'p*)$.

2.2. Параллельный алгоритм

Идея параллельного алгоритма для решения двойственной задачи основана на модификации нелинейного метода Якоби для задачи оптимизации, в котором на шаге $(s+1)$ параллельно решается k одномерных квадратичных подзадач. Значение k равно размерности двойственной переменной – вектора p. Подзадачи формируются, когда i принимает значения от 1 до k, и принимают вид $\min\{(1/2)p^{(i)}Dp^{(i)} + d'p^{(i)},\ p_i \geqslant 0\}$, где $p^{(i)} = (p_1^s, \ldots, p_i, \ldots, p_k^s)$. Особенностью параллельного алгоритма является то, что на шаге $(s+1)$ вектор $p^{s+1} = (p_1^s, \ldots, p_{i*}, \ldots, p_k^s)$ определяется из условия $i* = \underset{i}{\operatorname{argmin}}\{(1/2)p^{(i)}Dp^{(i)} + d'p^{(i)}\}$.

2.3. Вычислительные эксперименты

Параллельный алгоритм для многопроцессорной вычислительной архитектуры с распределенной памятью реализован на языке Matlab и Octave [9] с использованием библиотеки функций интерфейса передачи сообщений MPI в реализации 'OpenMPI' [10] и пакета 'OpenMPI Extension for Octave' [11]. Расчеты проводятся на многопроцессорном вычислительном комплексе Центра коллективного пользования Дальневосточного отделения РАН во Владивостоке «Дальневосточный вычислительный ресурс» [12]. В численных расчетах ядро $K(t,s)$ уравнения Фредгольма выбиралось в виде $\frac{H}{(t-s)^2+H^2}$, где $H = 10$, что приводит к числу обусловленности для матрицы с элементами $K(t_i, s_i)$ порядка 10^{16}. Модельные решения были представлены функцией $u(s) = \frac{10}{4\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{s^2}{32}\} + \frac{10}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{(s-4)^2}{2}\}$ на отрезке [-10,10]. Значения правой части уравнения Фредгольма $y(t)$ брались не с использованием решения интегрального уравнения, а по аппроксимационной формуле для интеграла в узлах t_i, когда берутся значения $u(s_j)$ по истинной (наперед заданной) функции $u(s)$ в узлах сетки s_j. Параметр регуляризации α выбирался равным 10^{-6}. На рис. 1 показано восстановление модельного решения с помощью решения рассматриваемой оптимизационной задачи, на рис. 2 – с помощью классической тихоновской регуляризации. Величина «ускорения» R_n параллельного алгоритма определяется как отношение

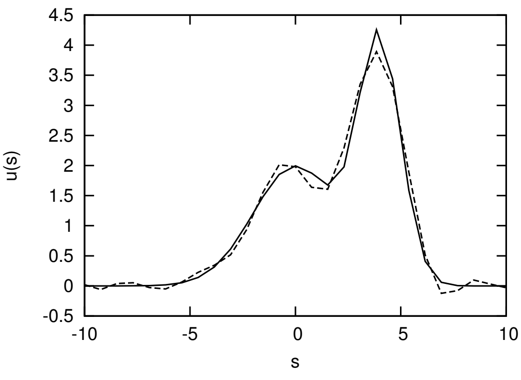


Рис. 1.

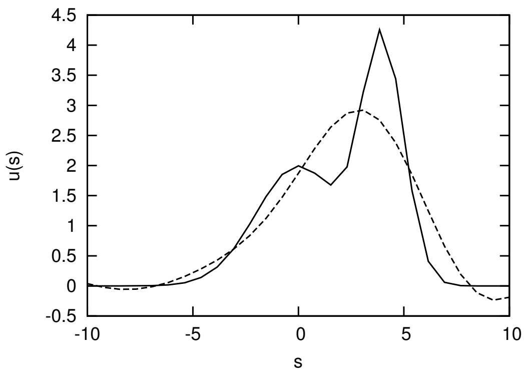


Рис. 2.

времени выполнения алгоритма на одном процессоре к времени выполнения алгоритма на n параллельных процессорах. В соответствии с закона Амдала без учета сетевых межпроцессорных обменов $R_n = \frac{n}{(n-1)a+1}$, где a – доля непараллельного кода алгоритма. При «идеальном» распараллелеливании процесса вычислений $a = 0$, и тогда $R_n = n$ [8]. Для рассматриваемого в данной работе параллельного алгоритма на рис. 3 сплошной линией показан график фактического ускорения (speedup), пунктирной линией – аппроксимация теоретической зависимости для R_n с оценкой для доли непараллельного кода алгоритма $a = 0,04$.

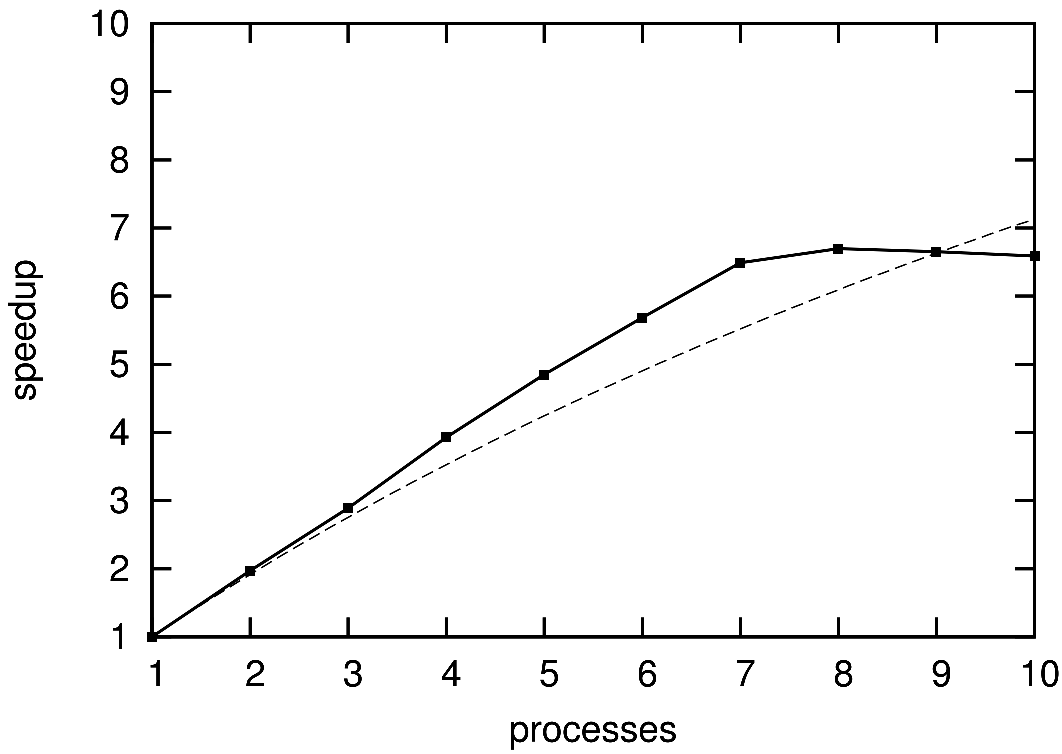


Рис. 3.

Список литературы

1. Васин В.В. Устойчивая аппроксимация негладких решений некорректно поставленных задач // ДАН. 2005. Т. 402, № 5. С. 586-589.
2. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург : Наука, 1993. 262 с.
3. Vasin V.V., Korotkii M.A. Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functionals // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2007. Vol. 15, No 8. P. 853-865.
4. Васин В.В., Сережникова Т.И. Регулярный алгоритм аппроксимации негладких решений для интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 2. С. 15-23.
5. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейровского типа. Теория и приложения. Москва, Ижевск : НИЦ РХД, 2005.
6. Васин В.В. Итерационные процессы фейеровского типа в некорректных задачах с априорной информацией // Известия высших учебных заведений. Математика. 2009. №2. С. 3-24.
7. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М.: МЦНМО, 2010. 274 с.
8. Bertsekas D.P, Tsitsiklis J.N. Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods. Athena Scientific, 1997.
9. GNU Octave. http://www.octave.org.
10. OpenMPI. http://www.open-mpi.org.
11. OpenMPI Extension for Octave. http://octave.sourceforge.net/openmpi_ext/index.html.
12. Центр коллективного пользования ДВО РАН «Дальневосточный вычислительный ресурс». http://www.cc.dvo.ru.

УДК 004.42

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ НА ПАНОРАМНЫХ СНИМКАХ

А.В. Войцеховский
Дальневосточный Федеральный Университет
Россия, 690091, Владивосток, Суханова 8
E-mail: artvc@myopera.com

Ключевые слова: компьютерное зрение, панорамные снимки, определение параметров движения, определение пространственных характеристик

Введение

В современном мире очень часто появляются задачи автоматического слежения за местностью. Они относятся к классу задач компьютерного зрения. В этой работе рассматривается проблема определения параметров движения объектов на панорамных снимках акваторий, полученные стационарными поворотными камерами. Для решения проблемы анализа снимков требовалось найти и разработать алгоритмы, которые позволяют выяснить пространственные параметры движения объектов, анализируя имеющуюся серию панорамных снимков. Целью работы стало создание основанного на этих алгоритмах программного средства, которое анализирует снимки местности, определяет движущиеся объекты и их характеристики: расстояние до них, географические координаты, скорость и направление движения, приблизительные размеры, а также строит горизонтальный снимок местности для каждой фотографии камеры.

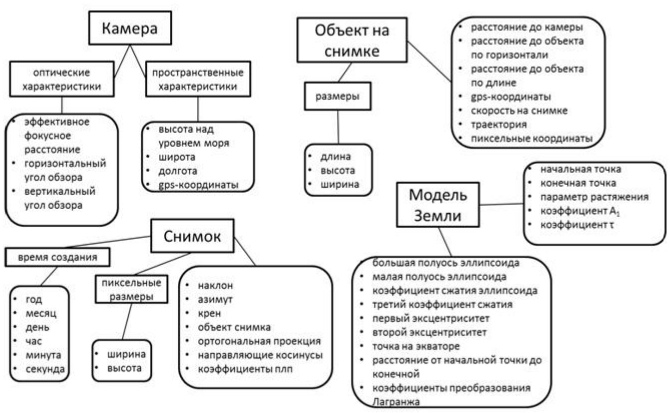


Рис. 1. Структура объектов предметной области

1. Анализ предметной области

В качестве ресурсов для разработки имеются панорамные снимки территорий и акваторий, полученные стационарными поворотными камерами, подключенными к сетям передачи данных. В процессе анализа предметной области были выделены следующие объекты: камера, объект на снимке, снимок и модель Земли. С помощью языка онтологий были формализованы приведенные объекты и описана их структура и связи.

2. Алгоритмы

Перед началом анализа изображения к нему применяется алгоритм бинаризации. Используется адаптивная пороговая бинаризация, т.к. на снимках могут быть различные тона в зависимости от погодных условий. Для выделения объектов на снимках применяется алгоритм построения скелета объект [1]. Благодаря нахождению скелетов с помощью алгоритма восьми масок, скелеты объектов получаются связными взвешенными графами. Это позволяет находить объект на разных снимках, даже если он изменяет свое направление относительно предыдущего положения. Для определения расстояния до объекта используются коэффициенты прямого линейного преобразования. С помощью них становится возможным соотносить мировые координаты и координаты изображения. Также для этого требуется знать одну мировую координату точки на снимке, или высоту камеры [2, 3]. Необходимо иметь данные об оптических характеристиках камеры: вертикальный и горизонтальный углы обзора и фокусное расстояние. Для определения географических координат объекта используется адаптированный метод Гельмерта [4]. Этот метод по известным широте и долготе начальной точки, заданному азимуту и дистанции до конечной точки находит ее широту и долготу. Система должна преобразовывать наклонные снимки, которые создаются береговыми стационарными поворотными камерами, в горизонтальные. В фотограмметрии это решается с помощью метода трансформирования координат [5, с. 67].

3. Проектирование и реализация

3.1. Проект

Составлена архитектурно-контекстная диаграмма программного средства (рис. 2). Архитектурно-контекстная диаграмма представляет схему взаимодействия компонентов системы между собой, а так же схему взаимодействия пользователя с системой.

3.2. Средства реализации

В качестве языка реализации выбран C++, так как C++ программы отличаются высокой производительностью. Для разработки модуля анализа изображений используется библиотека компьютерного зрения OpenCV 4.4. Она содержит средства для доступа к данным изображений, преобразования их в различные форматы. Включая в себя большое множество различных операций преобразования цифровых снимков библиотека исключает необходимость реализации многих функций, ускоряя разработку. так же преимуществом OpenCV является использование оттестированных и оптимизированных функции обработки цифровых снимков. В качестве СУБД выбран MySQL 5.6. Причиной выбора стала поддержка MySQL реляционной модели данных. Так как в базе данных не предполагается хранить больших объемов информации, то MySQL полностью подходит для реализации данного программного средства. В результате была спроектирована система, которая использует перечисленные методы для определения параметров движения объектов на серии панорамных снимков. На реальных снимках опробованы алгоритмы бинаризации, выделения и сравнения скелетов объектов.

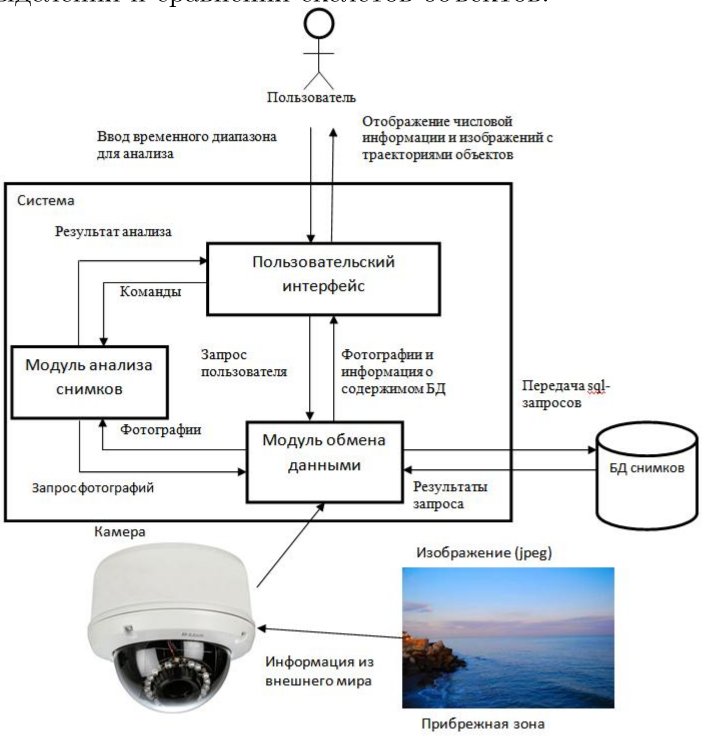


Рис. 2. Архитектурно-контекстная диаграмма

Список литературы

1. Выделение и анализ скелетов объектов на цветных снимках. http://swsys.ru/index.php?page=article&id=2198.
2. R. A. Holman, T. C. Lippmann, P. V. O'Neill, and K. Hathaway, "Video estimation of subaerial beach pro?les" // Marine Geology. 1991. Vol. 97, P. 225–231.
3. R. A. Holman, A. H. Sallenger, Jr., T. C. Lippmann, and J. W. Haines, "The application of video image processing to the study of nearshore processes" // Oceanography. 1993. Vol. 6, P. 85, P. 78–85
4. Charles F. F. Karney Algorithms for geodesics SRI International / 201 Washington Rd, Princeton, NJ 08543-5300, USA, P. 43–46.
5. Назаров А.С. Фотограмметрия: учебное пособие для студентов вузов. Мн.: ТетраСистемс, 2006. 368с.

УДК 51-76:57.03

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАНКТОННОГО СООБЩЕСТВА С УЧЕТОМ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЗООПЛАНКТОНА

Е.Е. Гиричева
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 5
E-mail: evg.giricheva@yandex.ru

Ключевые слова: математическое моделирование, трофические взаимодействия

В работе моделируется взаимодействие фитопланктона и зоопланктона в вертикальном столбе воды. Динамика сообщества рассматривается с учетом активных перемещений популяции зоопланктона, обусловленных суточной вертикальной миграцией и таксисом.

Введение

При моделировании взаимодействия планктонного сообщества необходимо учитывать неоднородность распределения популяций по глубине. Перемещение особей связано с пассивным движением, вызванным диффузией, а также активными перемещениями зоопланктона. Они могут быть обусловлены различными причинами, среди которых суточные вертикальные миграции и таксис. Зоопланктон совершает суточные перемещения, поднимаясь ночью к поверхности, а днем опускаясь на глубину. Это связано с уходом в светлое время суток от хищников [1,2,3,4,5]. Таксис - это активные перемещения хищника в направлении жертвы. В работе рассматривается взаимодействие популяций планктона под влиянием активных вертикальных перемещений зоопланктона. Исследуется влияние суточных миграций и таксиса на распределение популяций в вертикальном столбе воды и динамику их биомассы.

1. Описание модели

Рассмотрим модель взаимодействия фитопланктона (P) и зооплантона (Z) с учетом биогенов (N) в верхнем перемешанном слое воды. Пассивные перемещения компонентов описываются турбулентной диффузией с коэффициентами D_1, D_2, D_3. Активное движение зоопланктона по глубине представлено суточными миграциями со скоростью $v(t,x)$ и таксисом - $\frac{\partial}{\partial x}(w(t,x)Z\frac{\partial P}{\partial x})$, который описывается в соответствии с предположением о пропорциональности скорости перемещения хищника градиенту плотности популяции жертв [6,7,8,]. Изменение плотности биомассы компонент опишем системой дифференциальных уравнений типа "реакция-адвекция-диффузия":

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} & = & D_1\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + Q_1(N_0 - N_1) + \beta(m_P P + m_Z Z + \gamma Z^2) - \frac{\mu_P N}{K_N+N}P; \\ \frac{\partial P}{\partial t} & = & D_2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\mu_P N}{K_N+N}P - \frac{\mu_Z P}{K_P+P}Z - (m_P + Q_2)P; \\ \frac{\partial Z}{\partial t} & = & D_2\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - v(t,x)\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(w(t,x)Z\frac{\partial P}{\partial x}) + \\ & & +\frac{\mu_Z P}{K_P+P}Z - \gamma Z^2 - (m_Z + Q_3)Z. \end{cases} \quad (1)$$

Изменение концентрации биогенов в каждой точке области происходит за счет подтока и одтока вещества со скоростью Q_1, реминерализации отмершей органики с коэффициентом β и потребления фитопланктоном, описываемого функцией Михаэлиса-Ментен с параметрами: μ_P - максимальная скорость роста фитопланктона и K_N - константа полунасыщения фитопланктона по биогенам. Увеличение биомассы фитопланктона происходит в процессе фотосинтеза при участии биогенов, а убыль - в результате выедания зоопланктоном (функция Холлинга с параметрами: μ_Z - максимальная скорость выедания зоопланктоном фитопланктона и K_P - константа полунасыщения зоопланктона), естественной смертности (m_P - удельная смертность) и вымывания из рассматриваемой области со скоростью Q_2. Биомасса зоопланктона растет за счет выедания фитопланктона и убывает из-за естественной смертности (m_Z - удельная смертность), выедания рыбами и другими организмами, не учтенными в модели, а также внутривидовой конкуренции (с удельной скоростью γ) и вымывания со скоростью Q_3. В качестве пространственной области будем рассматривать отрезок [0,1].Граничные условия означают изолированность рассматриваемого трофического сообщества:

$$\frac{\partial N}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial N}{\partial x}(t,1) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial P}{\partial x}(t,1) = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial Z}{\partial x}(t,1) = 0.$$

2. Численные расчеты

Время измеряем в сутках, все моделируемые компоненты рассматриваются в единицах азота: $mmol\ N\ m^{-3}$. Исходя из литературных данных [9,10], определяются значения основных параметров системы (1):

$$\begin{aligned} &\beta = 0.2, \quad \alpha = 0.75, \quad \gamma = 0.3, \\ &K_N = 0.5, \quad K_P = 1, \quad m_P = 0.08, \quad m_Z = 0.02, \\ &Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0.01, \quad N_0 = 10, \\ &\bar{\mu}_P = 1, \quad \mu_Z = 0.5. \end{aligned}$$

Неоднородность распределения фитопланктона по глубине учтем, определив коэффициент роста как функцию глубины:

$$\mu_P = \bar{\mu}_P e^{-\delta x}.$$

Для численного решения задачи (1) использована неявная конечноразностная схема второго порядка точности по x и первого по t. Полагаем, что зоопланктон находится у поверхности первые 4 часа суток, затем в течение 8 часов опускается на глубину и через 4 часа вновь в течение 8 часов поднимается к поверхности. Рассмотрим следующие варианты поведения зоопланктона. *Вариант 1.* Таксис только ночью, хищничество - весь день. *Вариант 2.* И таксис, и хищничество - только ночью.

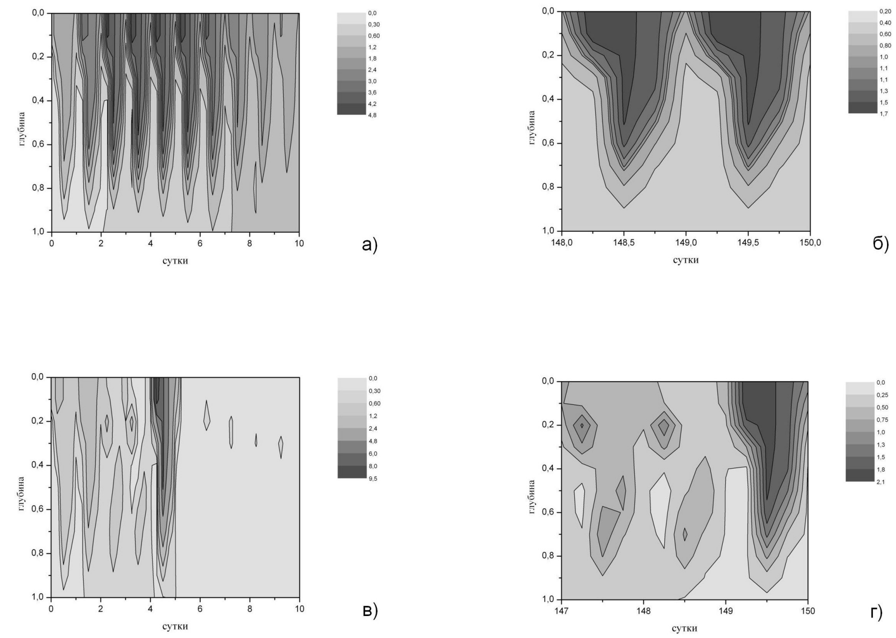


Рис. 1. Распределение зоопланктона: а), б) - вариант 1, в), г) - вариант 2

Вариант 1 демонстрирует периодический режим (рис. 1а), 1б)). Включение режима питания лишь в ночные часы дестабилизирует систему (рис. 1в, 1г)). Колебания биомассы зоопланктона непериодичны. Такой вариант питания вызывает колебания и биомассы фитопланктона.

Заключение

Суточные миграции зоопланктона, а также таксис и режим питания могут оказывать влияние как на саму популяцию, так и на сообщество фитопланктона. Пространственные перемещения увеличивают популяцию зоопланктона, но сокращают популяцию фитопланктона. Работа поддержана грантом ДВО РАН по программе "Информационные, управляющие и интеллектуальные технологии и системы"фундаментальных исследований Президиума РАН, проект № 12-I-П15-02, и грантом ДВО РАН конкурса интеграционных проектов с СО РАН, проект № 12-II-СО-01М-010 ДВО РАН.

Список литературы

1. Ringelberg, J. The photobehaviour of Daphnia spp. as a model to explain diel vertical migration in zooplankton // Biological Reviews. 1999. Vol. 74. P. 397-423.
2. Haney, J.F. Environmental control of diel vertical migration behavior // Archiv f?ur Hydrobiologie. 1993. Vol. 39. P. 1-17.
3. Dagg, M.J. et al. Vertical migration and feeding behavior of Calanus pacificus females during a phytoplankton bloom in Dabob Bay, U.S. // Limnol. Oceanogr. 1997. Vol. 42. P. 974-980.
4. Dini, M.L, Carpenter, S.R. Fish predators, food availability and diel vertical migration in Daphnia // J. Plankton Res. 1992. Vol. 14. P. 359-377.

5. Nesbitt, L.M et al.. Opposing predation pressures and induced migration responses in Daphnia // Limnol. Oceanogr. 1996. Vol.41. P. 1306-1311.
6. Kareiva, P., and G. Odell. Swarms of predators exhibit "preytaxis"if individual predators use arearestricted search // American Naturalist. 1987. Vol. 130. P.233-270.
7. Turchin, P. Quantitative analysis of movement: measuring and modeling population redistribution in animals and plants. Sinauer Associates, Sunderland, Massachusetts. 1998.
8. Березовская, Ф.С., Карев, Г.П. Бифуркации бегущих волн в популяционных моделях с таксисом // Успехи физических наук. 1999. Т.169, Вып. 9. С. 1011-1024.
9. Charria, G. et al. Importance of Dissolved Organic Nitrogen in the North Atlantic Ocean in sustaining primary production: a 3D modeling approach // Biogeosciences. 2008. Vol.5. P. 1437-1455.
10. Calbet, A. Phytoplankton growth, microzooplankton grazing, and carbon cycling in marine systems / Calbet A. , Landry M.R. // Limnol. Oceanogr. 2004. Vol. 49. P. 51-57.

УДК 681.5.015

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА С НЕРЕГУЛЯРНЫМ ИЗМЕРЕНИЕМ ВЫХОДА

А.А. Гончаров
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 5
E-mail: antalg@mail.ru

Г.Б. Диго
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 5
E-mail: bernatsk@iacp.dvo.ru

Н.Б. Диго
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 5
E-mail: digo@iacp.dvo.ru

А.Ю. Торгашов
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 5
E-mail: torgashov@iacp.dvo.ru

Ключевые слова: импульсная характеристика, рекуррентное оценивание, нерегулярное измерение выхода объекта управления, запаздывание.

Рассматривается задача идентификации объекта управления с нерегулярным измерением выхода, характеризуемым его переменной задержкой. Для поиска зависимости между входными и выходной переменными объекта управления используется импульсная характеристика. Проблема наличия помех на выходе решается с помощью рекуррентного оценивания импульсной характеристики.

Введение

На стадиях создания и эксплуатации систем управления по-прежнему актуальна проблема построения эффективных моделей объектов технических, технологических, экономических или социальных процессов [1]. В условиях неопределенности это связано с преодолением таких трудностей, как учет неизвестного времени запаздывания входных сигналов, нерегулярность измерения выхода, отсутствие сведений о структуре модели. Зачастую они препятствуют успешному применению регрессионного анализа [2-4], и приходится подбирать или разрабатывать методы, успешно преодолевающие возникающие трудности. При решении задач стабилизации многомерных динамических объектов с запаздыванием (ректификационные колонны установок первичной переработки нефти и др.), в которых число управляющих воздействий и управляемых переменных может достигать нескольких десятков, находят широкое применение системы управления на основе прогнозирующих моделей. Очевидно, что их эффективность напрямую зависит от качества применяемых алгоритмов идентификации, которые должны обеспечивать минимальную ошибку прогноза в условиях нерегулярных измерений выхода. В отличие от известных постановок задач идентификации приходится работать в условиях различных частот квантования входных и выходных переменных. Это соответствует распространенной реальной ситуации, когда выход объекта (например, показатель качества производимого продукта технологического процесса) измеряется нерегулярно, а значения других технологических переменных доступны на каждом такте управления. Кроме того, могут быть неизвестны структура и параметры модели объекта. В докладе обсуждается подход к решению задач идентификации систем управления с учетом неопределенности структуры и параметров модели объекта, нерегулярности измерений выхода для многомерных линейных динамических объектов с запаздыванием.

1. Постановка и анализ задачи

Рассматривается многомерный линейный динамический объект с запаздыванием с неопределенными структурой и параметрами модели объекта, нерегулярным измерением выхода. Пример доступных для измерения значений выхода приведен на рис. 1. Ставится задача разработки алгоритма, обеспечивающего учет динамических свойств объекта при нерегулярном измерении выхода. Для преодоления проблем, связанных с нерегулярностью измерений выхода, модель объекта может быть найдена в виде конечной импульсной характеристики, а для учета зашумленности входов и помех на выходе может использоваться рекуррентное оценивание импульсной характеристики.

2. Определение импульсной характеристики

Непрерывная линейная стационарная система может быть описана с помощью импульсной характеристики (импульсной переходной функции) $h(\tau)$ следующим образом:

$$y(t) = \int_0^n h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau, \qquad (1)$$

где u, y - входящее и выходящее воздействия системы, n - глубина модели, длина импульсной характеристики. Глубина модели должна быть такой, чтобы импульсная переходная функция приблизительно достигала устойчивого значения. Для дискрет-

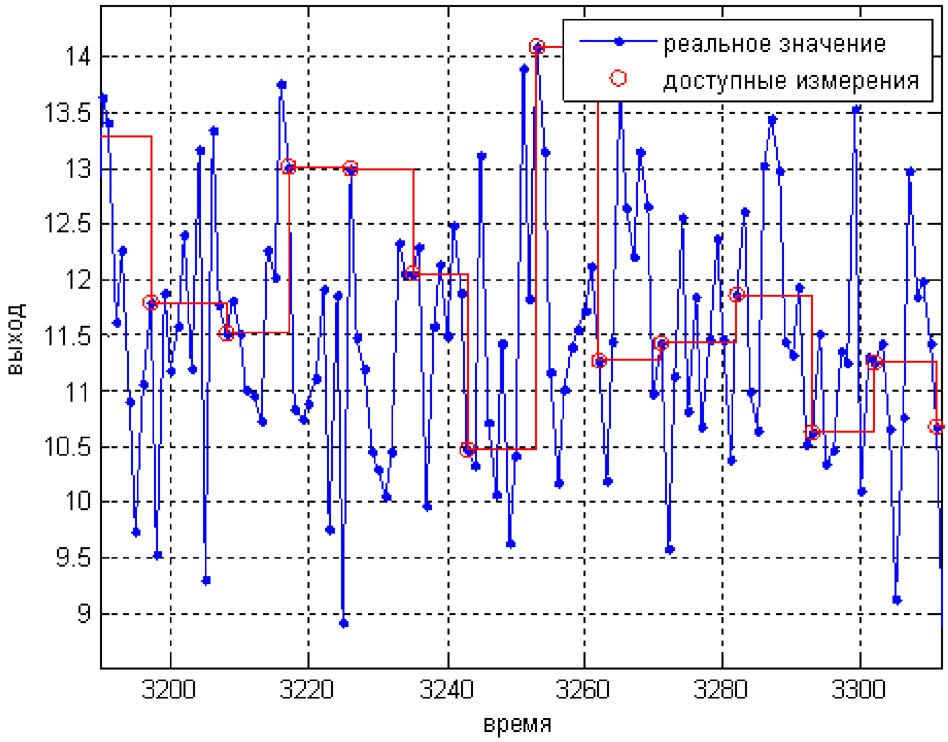


Рис. 1. Доступные для измерения значения выхода

ных систем уравнение (1) записывается в виде:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} h(k)\, u(t-k) \tag{2}$$

и предполагается, что

$$h(k) = 0 \text{ при } k < 0,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty,$$
$$\lim_{k\to\infty} h(k) = 0$$

При наличии шума уравнение (2) запишется в виде:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} h(k)\, u(t-k) + v(t) \tag{3}$$

Шум на выходе предполагается аддитивным, компоненты $v(t)$ при различных измерениях выхода независимы. В случае нескольких входов $u_1, u_2, \ldots, u_N$ и одном выходе уравнение (3) примет вид:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n_1} h_1(k)\, u_1(t-k) + \sum_{k=0}^{n_2} h_2(k)\, u_2(t-k) + \cdots + \sum_{k=0}^{n_N} h_N(k)\, u_N(t-k) + v(t) \tag{4}$$

Без учета шума уравнение (4) запишем в виде:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n_1} h_1(k)\, u_1(t-k) + \sum_{k=0}^{n_2} h_2(k)\, u_2(t-k) + \cdots + \sum_{k=0}^{n_N} h_N(k)\, u_N(t-k) \tag{5}$$

Обозначим за $\mathbf{h} = [h_1(0), \ldots, h_1(n_1), \ldots, h_N(0), \ldots, h_N(n_N)]^T$ вектор, объединяющий импульсные характеристики, вносящие вклад от каждого входного воздействия, за $\mathbf{u} = [u_1(t), \ldots, u_1(t-n_1), \ldots, u_N(t), \ldots, u_N(t-n_N)]^T$ - вектор, объединяющий соответствующие, из уравнения(5), $\mathbf{h}$ значения входных воздействий. Уравнение (5) перепишется в виде:

$$y = \mathbf{u}^T \mathbf{h} \tag{6}$$

Количество коэффициентов в векторе $\mathbf{h}$ равно $\sum\limits_{k=1}^{N} n_k$, соответственно, при наличии $\sum\limits_{k=1}^{N} n_k$ измерений выхода y уравнение (6) можно записать в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{h}, \tag{7}$$

где $\mathbf{Y}$ - вектор, содержащий измерения выхода y, а $\mathbf{U}$ - матрица, содержащая измеренные входы $\mathbf{u}$, соответствующие определенному выходу y из (5). Из (7)можно найти $\mathbf{h}$:

$$\mathbf{h} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{Y} \tag{8}$$

Полученные значения импульсных характеристик верны при отсутствии шумов, но в реальных условиях такая ситуация встречается очень редко. Для преодоления проблемы зашумленности и более точной оценки импульсных характеристик используется рекуррентное оценивание [5]. За начальное условие для рекуррентного оценивания принимается значение $\mathbf{h}$, полученное из (8). По последующим измеренным значениям выхода $y_i = y_i(t)$ и соответствующим ему входам $\mathbf{u}_i = [u_1(t), \ldots, u_1(t-n_1), \ldots, u_N(t), \ldots, u_N(t-n_N)]^T$, не участвовавшим в определении $\mathbf{h}$ из (8), получаем уравнение модели объекта в блочном виде [6]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{i-1} \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{i-1} \\ \mathbf{u}_i^T \end{bmatrix} \mathbf{h}_{i+1}$$

и в итоге алгоритм рекуррентного оценивания имеет вид:

$$\mathbf{P}_i = \left(\mathbf{U}_{i-1}^T \mathbf{U}_{i-1}\right)^{-1}$$

,

$$\mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_i \mathbf{u}_i \left(\mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{u}_i + 1\right)^{-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{P} \tag{9}$$

,

$$\mathbf{h}_{i+1} = \mathbf{h}_i + \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{u}_i \left(y_i - \mathbf{u}_i^T \mathbf{h}_i\right) \tag{10}$$

Формулы (9)-(10) позволяют вычислить новую оценку параметров $\mathbf{h}_{i+1}$, если заданы: a) предыдущие оценки параметров $\mathbf{h}_i$ и оценки $\mathbf{P}_i$; b) новая информация об измерениях $\mathbf{u}_i^T$, y_i. На рис. 2 представлен результат применения описанного алгоритма определения импульсной характеристики, смоделированной в системе MATLAB. Для получения выборок входящих воздействий и выхода использовался объект управления, описывающийся уравнением:

$$y = \frac{0.1813}{z - 0.1887} u_1 + \frac{1.984}{z - 0.7165} u_2$$

Помехи на выходе генерировались случайным образом из диапазона от 0 до 1. Глубина модели для импульсных характеристик от обоих входов $n = 40$. В реальных условиях глубина модели заранее неизвестна, но при выборе n больше реального значения, значения импульсной характеристики вычисляются с той же точностью, но с большими временными затратами на вычисления. Значения выхода, вычисленного без использования рекуррентного оценивания, с помощью уравнения (8) представлены на рис. 3.

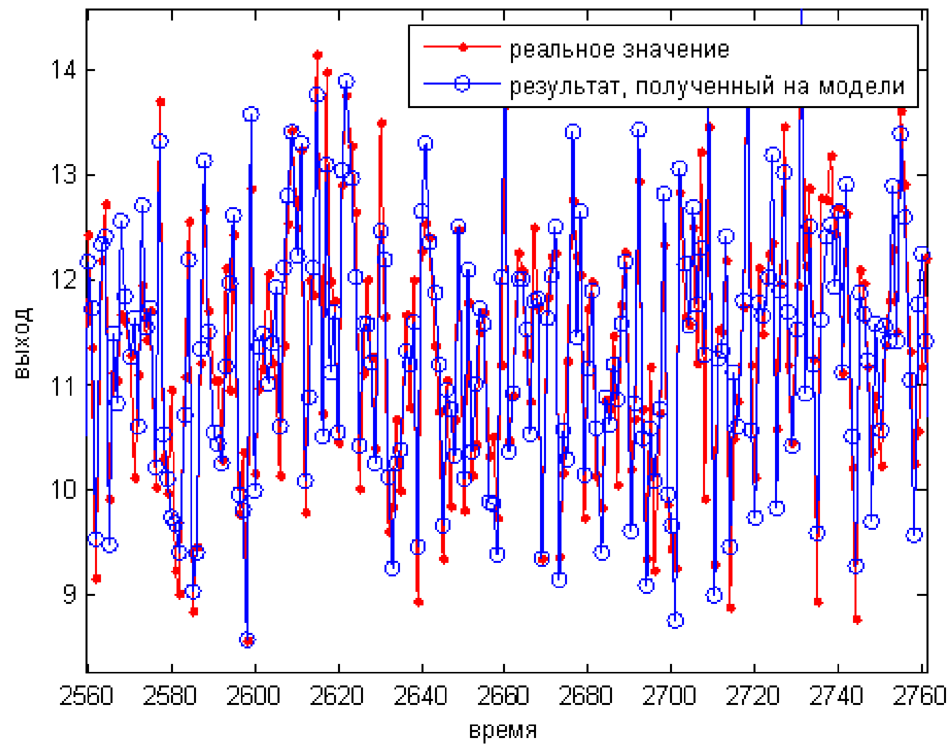


Рис. 2. Результат применения описанного алгоритма

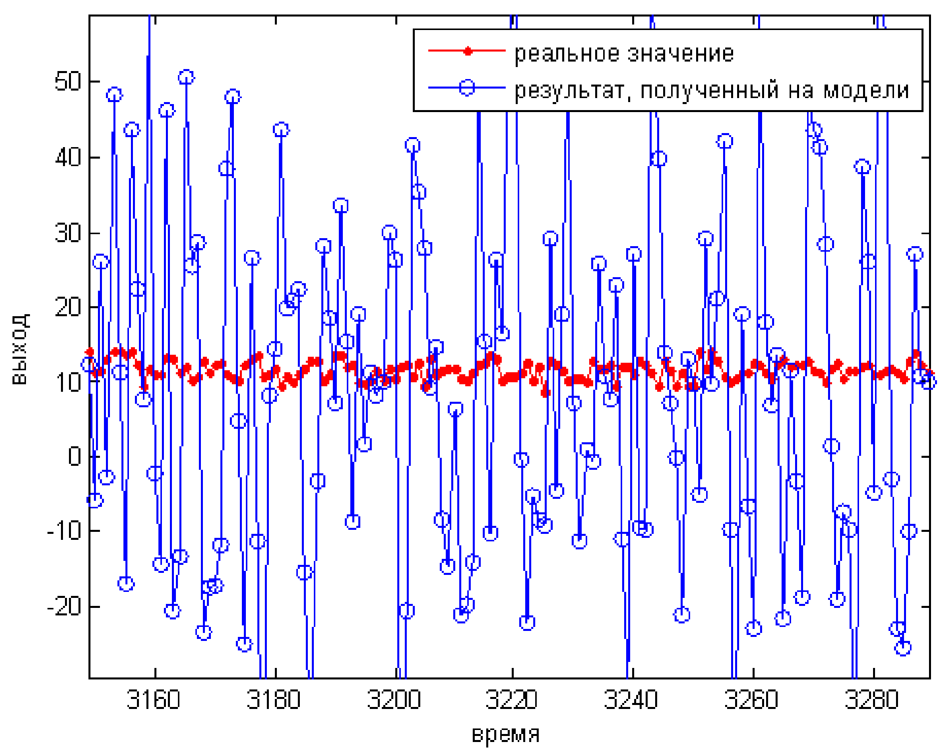


Рис. 3. Значения выхода, вычисленного без использования рекуррентного оценивания

Заключение

Предложенная процедура оценивания импульсной характеристики может быть легко реализована в реальных условиях. В используемом алгоритме идентификации отсутствует необходимость применять специальные тестовые сигналы, а достаточно наличия результатов пассивного эксперимента. В дальнейшем планируется распространение предложенного алгоритма на случай влияния внешних неизмеряемых возмущений различного типа.

Список литературы

1. Дилигенская А.Н. Идентификация объектов управления. - Самара: Самарский государственный технический университет, 2009. 136с.
2. Бокс Д., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. - М.: Мир, 1974. Вып. 1. 406с.
3. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 1979, 302с.
4. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. - М.: Наука, 1966. 190с.
5. Сейдж Эндрю П., Мелса Джеймс Л. Идентификация систем управления. - М.Наука, 1974. 248с.
6. Кафедра «Автоматика и телекоммуникации». Опорный конспект по курсу «Моделирование и идентификация объектов систем автоматики». - Донецк: Донецкий Государственный Технический Университет, 2007. 31с.

УДК 51-76

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛИ МИКРОБИОЛОГИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Г.В. Гренкин
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690950, Владивосток, Суханова 8
E-mail: glebgrenkin@gmail.com

Ключевые слова: фитопланктон, математическая модель, дифференциальные уравнения, равновесные решения, СЛАУ, метод Гаусса

В работе рассматривается математическая модель, описывающая динамику численности сообщества видов фитопланктона, конкурирующих за питательные вещества. Модель представляет собой систему дифференциальных уравнений. Описан алгоритм поиска равновесных решений системы дифференциальных уравнений. Описан алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений для случая, когда матрица системы может быть квадратной вырожденной либо прямоугольной.

Введение

Фитопланктон составляет основу жизни в водоемах. Биопродуктивность водной экосистемы определяется продукцией фитопланктона. Изучение фитопланктона позволяет понять наиболее масштабные процессы в экосистемах. В свою очередь, фитопланктон в наибольшей степени зависит от питательных минеральных веществ (биогенов). При изучении состояния и функционирования фитопланктона важную роль в настоящее время играют данные дистанционных методов зондирования поверхности морей и океанов. В частности, искусственные спутники Земли позволяют получить данные о содержании минеральных веществ и хлорофилла в поверхностном слое. Данные о хлорофилле дают возможность оценить содержание фитопланктона и дать грубую оценку первичной продукции. Данные о минеральных веществах (на основе азота, фосфора, кремния и других химических элементов), составляющих материальную основу для построения растительных организмов в процессе фотосинтеза, дают возможность оценить характеристики продукционных процессов фитопланктона. На этом этапе полезны математические модели динамики численностей (биомасс) основных видов фитопланктонного сообщества. В данной работе рассматривается математическая модель, описывающая динамику численности сообщества видов фитопланктона, конкурирующих за питательные вещества. Подобные математические модели используются также в описании динамики микробных культур в лабораторных экспериментах. Модель представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений. Рассматриваются уравновешенные стационарные решения, далее называемые равновесиями. Оказывается, что эти решения достаточно подробно характеризуют фазовый портрет системы дифференциальных уравнений. Разработана программная система, в которой реализован предложенный в [1] алгоритм поиска равновесий. Разработан модуль для решения СЛАУ методом Гаусса для случая, когда матрица системы может быть квадратной вырожденной или прямоугольной.

1. Математическая модель

В модели выделены биологические виды фитопланктона и группы минеральных питательных веществ. Фитопланктон представлен m видами, их концентрации в среде обозначены y_i для вида i. Минеральное питание растительных организмов разбивается на n групп сходных веществ (на основе азота, фосфора, кремния и т.п.). Питательные вещества предполагаются не взаимозаменяемыми. Содержание веществ типа j в среде обозначается z_j, их содержание в клетке вида i обозначается через q_{ij}. Эту величину называют клеточной квотой. В водоеме в летний период фитопланктон обитает в верхней части столба воды, выше скачка температуры и плотности, называемого термоклином. Минеральные питательные вещества поступают снизу под влиянием процессов разной природы, с такой же скоростью содержимое верхней части водного столба в силу несжимаемости воды выбывает из наблюдаемой зоны. В этом случае можно использовать данную модель, усредняя все характеристики по пространству. Концентрации фитопланктона и биогенов будем измерять в г/м^3, внутриклеточные концентрации питательного вещества в $\frac{\text{г вещества}}{\text{г сырой массы фитопланктона}}$, а время в сутках. Для живого организма та или иная стратегия деятельности определяется не только окружающей средой, но и его состоянием. Внутреннее состояние организма можно характеризовать по-разному. В нашем случае как индикатор предлагается использовать внутриклеточное содержание питательных веществ на основе минеральных соединений во внешней среде — клеточную квоту q_{ij}. Потребление пищи микроорганизмами осуществляется с удельной скоростью $v_{ij}(z_j, q_{ij})$, а рост биомассы происходит с удельной скоростью $\mu_{ij}(q_{ij})$ при возможном ограничении, сформулированном как принцип «узкого места» Либиха. Этот принцип считается дискуссионным, но в ряде ситуаций он лучше других объясняет процессы роста биомассы вида. Скорость роста отдельного вида, согласно принципу Либиха, ограничена скоростью роста наименее производительного субстрата (биогена). Модель динамики масс компонентов системы приобретает форму

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dt} = \left(\min\limits_{j=1,\ldots,n} \mu_{ij}(q_{ij}) - D\right) y_i, \\ \dfrac{dz_j}{dt} = D(z_j^{(0)} - z_j) - \sum\limits_{i=1}^{m} v_{ij}(z_j, q_{ij}) y_i, \\ \dfrac{dq_{ij}}{dt} = v_{ij}(z_j, q_{ij}) - q_{ij} \cdot \min\limits_{j=1,\ldots,n} \mu_{ij}(q_{ij}) \end{cases} \tag{1}$$

для $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Через D обозначена скорость протока вещества в системе, через $z_j^{(0)}$ — содержание минеральных питательных веществ во входящем потоке. Конкретизация функций модели (1) в приложениях осуществляется на основе формулы М. Друпа для удельной скорости роста организмов:

$$\mu_{ij}(q_{ij}) = \mu_{ij}^{(0)} \left(1 - \frac{\underline{q}_{ij}}{q_{ij}}\right).$$

Через $\underline{q}_{ij}$ и $\overline{q}_{ij}$ обозначены нижние и верхние границы для внутриклеточной концентрации питательных веществ. Удельные скорости минерального питания в зависимости от содержания веществ во внешней среде определяются формулой

$$v_{ij}(z_j, q_{ij}) = \overline{v}_{ij}(q_{ij}) \frac{z_j}{k_{ij} + z_j},$$

где функция $\overline{v}_{ij}(q_{ij})$ имеет предложенный С. Йоргенсеном вид:

$$\overline{v}_{ij}(q_{ij}) = v_{ij}^{(0)} \frac{\overline{q}_{ij} - q_{ij}}{\overline{q}_{ij} - \underline{q}_{ij}}.$$

В статье [2] модель (1) применяется для анализа фитопланктонных сообществ Черного моря.

2. Поиск равновесных решений

Для исследования равновесий рассмотрим обобщение модели (1). Вместо конкретных формульных представлений функций модели потребуем от них выполнения следующих свойств: (*) функцию $\mu_{ij}(q_{ij})$ предполагаем строго возрастающей по q_{ij}, а функцию $v_{ij}(z_j, q_{ij})$ — строго возрастающей по z_j и строго убывающей по q_{ij}; указанные функции предполагаются непрерывно дифференцируемыми в своих областях определения. Равновесные решения (y^*, z^*, q^*) системы (1) находим из системы уравнений

$$\begin{cases} \left(\min\limits_{j=1,\ldots,n} \mu_{ij}(q_{ij}^*) - D\right) y_i^* = 0, \\ D(z_j^{(0)} - z_j^*) - \sum\limits_{i=1}^{m} v_{ij}(z_j^*, q_{ij}^*) y_i^* = 0, \\ v_{ij}(z_j^*, q_{ij}^*) - q_{ij}^* \cdot \min\limits_{j=1,\ldots,n} \mu_{ij}(q_{ij}^*) = 0. \end{cases}$$

Отметим, что нас интересуют только неотрицательные равновесные решения. Если $y_i^* > 0$, то $\min\limits_{j=1,\ldots,n} \mu_{ij}(q_{ij}^*) = D$. Из третьего уравнения

$$v_{ij}(z_j^*, q_{ij}^*) - q_{ij}^* \cdot D = 0.$$

Поскольку функция $v_{ij}(z_j^*, q_{ij})$ строго убывает по q_{ij}, а функция $q_{ij} \cdot D$ строго возрастает по q_{ij}, то из уравнения $v_{ij}(z_j, q_{ij}) - q_{ij} \cdot D = 0$ можно однозначно определить q_{ij}: $q_{ij} = \widetilde{q}_{ij}(z_j)$. **Утверждение 1.** *Функция $\widetilde{q}_{ij}(z_j)$ строго возрастает.* Введем функцию $\widetilde{\mu}_{ij}(z_j) = \mu_{ij}(\widetilde{q}_{ij}(z_j))$. Функция $\widetilde{\mu}_{ij}(z_j)$ строго возрастает. Определим матрицу $\overline{Z} = (\overline{z}_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ из условия $\overline{z}_{ij} = \widetilde{\mu}_{ij}^{-1}(D)$. **Утверждение 2.** *Условие $\min\limits_{j=1,\ldots,n} \mu_{ij}(q_{ij}^*) = D$ эквивалентно следующему условию: $\forall j : z_j^* \geqslant \overline{z}_{ij}, \exists j_0 : z_{j_0}^* = \overline{z}_{ij_0}$.* **Следствие.** *Если $y_i^* > 0$, то $\forall j : z_j^* \geqslant \overline{z}_{ij}, \exists j_0 : z_{j_0}^* = \overline{z}_{ij_0}$.* Обозначим $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Выберем множество $I_* \subset I$ таких i, для которых $y_i^* > 0$. Для каждого $i \in I_*$ выполняется условие $\forall j : z_j^* \geqslant \overline{z}_{ij}, \exists j_0 : z_{j_0}^* = \overline{z}_{ij_0}$. Обозначим $z'_j = \max\limits_{i \in I_*} \overline{z}_{ij}$. Справедливо утверждение: $\forall j : z_j^* \geqslant z'_j, \forall i \in I_* \ \exists j_i : z_{j_i}^* = z'_{j_i}$. Обозначим $J_* = \{j_i : i \in I_*\}$ — множество j, для которых $z_j^* = z'_j$. Для каждого множества $I_*, I_* \subset I$ определяем отображение $\varphi : I_* \to \{J' : J' \subset J\}$ следующим образом: $\varphi(i) = \{j : \overline{z}_{ij} = z'_j\}$. Далее выбираем множество J_* таким образом, чтобы $\forall i \in I_* \exists j \in J_* : j \in \varphi(i)$. Потребуем, чтобы для всех i, j выполнялось неравенство $\overline{z}_{ij} > 0$. Выбрав множества I_* и J_* (нужно перебрать все возможные варианты), решаем систему соотношений:

$$\begin{cases} y_i^* > 0,\ i \in I_*, \\ y_i^* = 0,\ i \in I \setminus I_*, \\ z_j^* = z_j',\ j \in J_*, \\ z_j^* \geqslant z_j',\ j \in J \setminus J_*, \\ \sum\limits_{i \in I_*} \widetilde{q}_{ij}(z_j^*) y_i^* = z_j^{(0)} - z_j^*,\ j \in J. \end{cases} \tag{2}$$

В этой системе мы фиксируем значения $z_j^*, j \in J_*$ и получаем СЛАУ относительно y_i^*: $\sum\limits_{i \in I_*} \widetilde{q}_{ij}(z_j^*) y_i^* = z_j^{(0)} - z_j^*, j \in J_*$. Решив эту СЛАУ, найдем y_i^*. Подставляем y_i^* в уравнения $\sum\limits_{i \in I_*} \widetilde{q}_{ij}(z_j^*) y_i^* = z_j^{(0)} - z_j^*, j \in J \setminus J_*$ и находим отсюда значения $z_j^*, j \in J \setminus J_*$ (слева стоит строго возрастающая функция от z_j^*, а справа — строго убывающая функция от z_j^*, поэтому можно применить метод дихотомии). Затем проверяем неравенства $z_j^* \geqslant z_j', j \in J \setminus J_*$. Значения q_{ij}^* можно найти следующим образом: $q_{ij}^* = \widetilde{q}_{ij}(z_j^*)$. Условие

$$\forall i\ \exists j : \mu_{ij}(q_{ij}^*) \leqslant D$$

является необходимым и достаточным для локальной асимптотической устойчивости найденного равновесного решения [1].

3. Решение СЛАУ с матрицей общего вида методом Гаусса

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3}$$

Требуется найти все решения данной системы либо определить, что она несовместна (не имеет решений). Вначале система (3) при помощи элементарных преобразований приводится к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_{j_1} + a'_{1,j_2}x_{j_2} + a'_{1,j_3}x_{j_3} + \ldots + a'_{1,j_r}x_{j_r} + a'_{1,j_r+1}x_{j_r+1} + \ldots + a'_{1,n}x_n = b'_1, \\ x_{j_2} + a'_{2,j_3}x_{j_3} + \ldots + a'_{2,j_r}x_{j_r} + a'_{2,j_r+1}x_{j_r+1} + \ldots + a'_{2,n}x_n = b'_2, \\ \ldots \\ x_{j_r} + a'_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \ldots + a'_{r,n}x_n = b'_r, \\ 0 = b'_{r+1}, \\ \ldots \\ 0 = b'_m. \end{cases}$$

Процесс преобразования системы (3) к ступенчатому виду называется прямым ходом метода Гаусса. Переменные $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ называются главными переменными, все остальные переменные называются свободными. Если хотя бы одно число $b'_i \neq 0$, где $i > r$, то система несовместна. Пусть $b'_i = 0$ для всех $i > r$. Рассмотрим обратный ход метода Гаусса. Перенесем свободные переменные в правые части уравнений. Получим

$$\begin{cases} x_{j_1} + a'_{1,j_2}x_{j_2} + a'_{1,j_3}x_{j_3} + \ldots + a'_{1,j_r}x_{j_r} = b'_1 - a'_{1,j_r+1}x_{j_r+1} - \ldots - a'_{1,n}x_n, \\ \qquad x_{j_2} + a'_{2,j_3}x_{j_3} + \ldots + a'_{2,j_r}x_{j_r} = b'_2 - a'_{2,j_r+1}x_{j_r+1} - \ldots - a'_{2,n}x_n, \\ \qquad \ldots \\ \qquad x_{j_r} = b'_r - a'_{r,j_r+1}x_{j_r+1} - \ldots - a'_{r,n}x_n. \end{cases}$$

Придадим свободным переменным произвольные значения, а значения главных переменных найдем по формуле

$$x_{j_i} = b'_i - \sum_{j=j_r+1}^{n} a'_{ij}x_j - \sum_{k=i+1}^{r} a'_{i,j_k}x_{j_k}, i = 1, 2, \ldots, r.$$

Рассмотрим прямой ход метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу. Сначала находим в 1-м столбце максимальный по модулю элемент (главный элемент). Если все элементы 1-го столбца равны 0, то переменная x_1 уже исключена, переходим к исключению переменной x_2. Если же не все элементы 1-го столбца равны 0, то меняем местами 1-ю строку и строку, в которой находится главный элемент, а затем исключаем переменную x_1 из 2-го, 3-го, $\ldots$, m-го уравнений, домножая 1-е уравнение на коэффициенты $a_{i,1}$ и вычитая его из всех остальных уравнений. После исключения переменной x_1 аналогичным образом исключаем переменные x_2, x_3 и т.д. Разработан модуль на языке программирования C++ для решения СЛАУ методом Гаусса в случае, когда матрица системы может быть квадратной вырожденной или прямоугольной.

4. Решение системы дифференциальных уравнений

Требуется численно найти решение системы (1). В правых частях нескольких уравнений системы присутствует функция минимума, которая является непрерывной во всех точках, но в некоторых точках может не иметь производной. В связи с этим для численного решения системы необходимо использовать численные методы, не использующие производных правых частей уравнений, например, метод Эйлера. Для примеров система (1) решалась и методом Эйлера, и при помощи стандартного решателя Wolfram Mathematica 8, но результаты полностью совпали. Разработана программная система на языке программирования C++, в которой реализован описанный алгоритм поиска равновесных решений. Программу можно скачать на сайте http://group22x.narod.ru/grenkin/. Отметим, что система может иметь и континуальное множество равновесий (в случае, когда СЛАУ имеет бесконечно много решений).

Список литературы

1. Абакумов А. И., Пак С. Я. Сосуществование видов в микробном сообществе. Модельное исследование // Информатика и системы управления. 2012. № 3(33). С. 15–24.

2. Силкин В. А., Абакумов А. И., Паутова Л. А., Микаэлян А. С., Часовников В. К., Лукашева Т. А. Сосуществование черноморских и чужеродных видов в фитопланктоне северо-восточной части Черного моря. Анализ гипотез вселения // Российский журнал биологических инвазий. 2011. № 3. С. 24–35.

УДК 539.37+514

ОТ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К НЕЕВКЛИДОВОЙ МОДЕЛИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В ОПИСАНИИ ЗОНАЛЬНОЙ ДЕЗИНТЕГРАЦИИ ГОРНЫХ ПОРОД

М.А. Гузев
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
E-mail: guzev@iam.dvo.ru

Ключевые слова: горные породы, зональная дезинтеграция, дефекты структуры, неевклидова геометрия

Представлены результаты экспериментальных исследований явления зональной дезинтеграции горных пород и указана недостаточность классической модели для описания этого явления. Рассматривается расширение этой модели, основанное на введении неевклидова геометрического параметра, совпадающего со скалярной кривизной тензора Римана. Показано, что построенное решение в линейном приближении позволяет выполнить моделирование осцилляционного поведения поля напряжений вокруг круглой выработки.

1. Экспериментальные исследования

Классические представления о деформировании и разрушении горных пород вокруг подземных выработок достаточно хорошо описаны в рамках различных моделей механики сплошной среды [1]. Основные закономерности сводятся здесь к двум центральным положениям: на контуре выработки возникает концентрация напряжений, которая, при превышении предела прочности, что соответствует сильно сжатому состоянию горной породы, приводит к разрушению пород контура и образованию одной зоны неупругих деформаций. В последнем случае максимум нормальных тангенциальных напряжений располагается на границе упругой и неупругой областей, а сама эта граница во времени может перемещаться вглубь массива. Большинство экспериментальных результатов XX века находилось в полном соответствии с указанной теоретической картиной. Однако проведенные в 70-е годы натурные исследования поведения горных пород в массиве показали, что закономерности деформирования и разрушения сильно сжатых горных пород могут отличаться от классических: изменение физических свойств горных пород в массиве этой области носят осцилляционный периодический характер. Это фиксировалось исследователями в разных странах примерно в это же время. Существование периодической изменчивости физических свойств пород вокруг подземных горных выработок, по-видимому, впервые установлено в 1972 году в работе В.А. Борисовца [2]. Он указал, что наблюдается образование 3–5 периодов изменчивости свойств горных пород при длине периода 1,5–2 м. Несколько позднее изучение таких физических свойств горных пород, как электросопротивление и плотность, было проведено В.Н. Опариным геофизическими методами вокруг капитальных выработок на глубине до 1 км в г. Норильске [3]. В результате было установлено периодическое распределение физических свойств горных пород, указано на повторение зонами трещин контура выработок, а также на уплотненный характер промежуточных зон. В работах А.Ф. Морозова [4] исследование электросопротивления пород вокруг одиночной подготовительной выработки, пройденной в осадочных породах на глубине 950 м, дополнялось прямым исследованием трещинной структуры перископическим методом. Периодическое распределение техногенных трещин в массиве впереди очистного забоя установлено в ЮАР на глубине 2300 м в работе G.R. Adams, A.J. Jager в 1980 году [5]. В исследованиях, проведенных перископическим методом, установлено наличие, по крайней мере, четырех зон трещин шириной 0,3–1,3 м, разделенных промежуточными, относительно ненарушенными зонами. Таким образом, зональный характер формирования различного рода периодических трещинных структур в массиве вокруг выработок надежно установлен экспериментально, но среди специалистов по построению геомеханических моделей он до сих пор вызывает дискуссии. Это заставляет исследовать наблюдаемые закономерности, а также разрабатывать новые математические модели для описания геомеханической среды.

2. Выбор модели

Выбор способа описания горных пород в сильно сжатом состоянии определяется тем обстоятельством, что они проявляют способность как к упругому деформированию (неразрушенные части массива), так и к разрушению. С макроскопической точки зрения описание явления зональной дезинтеграции горных пород, естественно, должно основываться на уравнениях механики сплошных сред и на принципах неравновесной термодинамики. Степень детализации такого подхода зависит от необходимости акцентировать внимание на разные особенности рассматриваемого явления. Как мы указывали выше, характерной особенностью напряженно-деформированного состояния сильно сжатых пород является наличие периодических осцилляционных структур. Поскольку в рамках классической модели нельзя описать наличия периодических осцилляционных структур, то необходимо модифицировать модель. С физической точки зрения формирование зон разрушения зависит от степени поврежденности горной породы, например, наличия пор, трещин и других дефектов внутреннего строения среды. Однако классическая теория не учитывает этот факт, поэтому следует использовать новые идеи и методы, чтобы выполнить моделирование поведения горной породы, в частности, ввести дополнительные параметры модели. В [6, 7] было показано, что в качестве таких параметров можно использовать неевклидовы геометрические характеристики, которые в математике определяют отличие внутренней геометрии рассматриваемого объекта от геометрии евклидова пространства. Первая неевклидова модель сплошной среды [8] для описания распределения поля напряжений вокруг подземных выработок была сформулирована в рамках неравновесной термодинамики. Покажем, как получить основные уравнения неевклидовой модели сплошной среды на основе классического вариационного принципа. Напомним, что в механике подземных сооружений [1] массив рассматривается как невесомая среда, ослабленная полостью, моделирующей круглую закрепленную выработку в условиях всестороннего сжатия P_∞. Задача о распределении поля напряжений вокруг выработки формулируется в стационарной постановке и компоненты напряжений σ_{ij} удовлетворяют уравнению равновесия $\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$. В линейном приближении плоские компоненты тензора напряжений даются формулами:

$$\sigma_{rr}(r) = P_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right), \qquad \sigma_{\varphi\varphi}(r) = P_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right), \tag{1}$$

из которых видно, что классическое решение является монотонной функцией, не позволяя моделировать периодические осцилляционные структуры. Задача может быть сформулирована следующим образом: как минимально изменить классическую модель, чтобы описать волнообразное поведение компонент тензора напряжений? Хорошо известно, что, в состоянии термического равновесия, уравнения равновесия классической теории можно получить из условия, что деформации тела минимизирует свободную энергию Гельмгольца $\int F(A_{ij})dV$, где A_{ij} являются компонентами тензора деформации. Моделирование поведения горной породы явным образом требует введение неевклидовых параметров для описания внутреннего механического состояния материала. С математической точки зрения отличие евклидовой геометрии от неевклидовой геометрии определяется тензором Римана. Тогда естественное расширение модели упругого континуума связано с учетом тензора Римана в свободной энергии в качестве дополнительного параметра. В качестве иллюстрации данного подхода рассмотрим плоский случай. Для него скалярная кривизна R является единственным инвариантом тензора Римана и условие евклидовости сводится к требованию $R = 0$. В линейном приближении скалярная кривизна дается формулой

$$R = 2\left[\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^1 \partial x^1}\right],$$

где ε_{ij} определяют метрический тензор $g_{ij} = \delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij}$ внутренней геометрии материала, при этом условие евклидовости тождественно удовлетворяется для тензора малых деформаций $A_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial U_i}{\partial x^j} + \dfrac{\partial U_j}{\partial x^i}\right)$. Минимальное расширение классической модели связано с переходом к свободной энергии $\int F(A_{ij}, \varepsilon_{ij}, R)dV$ [9]. Условие минимизации энергии приводит к системе уравнений для компонент напряжений σ_{ij} и тензора ε_{ij}. Чтобы использовать полученные соотношения, необходимо выбрать свободную энергию, например, в виде $F = F_A + F_\varepsilon + F_{A\varepsilon} + F_R$, где F_A и F_ε зависят от A_{ij} и ε_{ij}, и $F_{A\varepsilon}$ характеризует взаимодействие полей A_{ij} и ε_{ij}. функция F_R зависит от скалярного параметра R. По аналогии с классической моделью мы предполагаем, чтоF_A и F_ε определяются первым и вторым инвариантом своих тензорных аргументов, а $F_{A\varepsilon}$ зависит от произведения первых инвариантов тензоров A_{ij} и ε_{ij}. Опуская вычисления, приведем результат для задачи о распределении поля напряжений вокруг круглой выработки:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= P_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + (C + B - A)\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{C}{r}\frac{\partial R}{\partial r}, \\
\sigma_\theta &= P_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) + (C + B)\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{C}{r}\frac{\partial R}{\partial r},
\end{aligned} \tag{2}$$

где A, B, C феноменологические параметры. Из (1) – (2) видно, что поле напряжений равно сумме упругого и дополнительного полей. Последнее определяется параметром неевклидовости R, уравнение для которого совпадает с классическим уравнением Гельмгольца: $\Delta R + \gamma R = 0$. Радиально симметричное решение этого уравнения представляется через функции Бесселя и Неймана нулевого порядка: $R = a_1 J_0(r\sqrt{\gamma}) + b_1 N_0(r\sqrt{\gamma})$. Эти функции определяют волновое поведение поля напряжений. Работа выполнен при поддержке РФФИ, грант №11-01-00357.

Список литературы

1. Булычев Н. С. Механика подземных сооружений. М.: Недра, 1994. 382 с.
2. Борисовец В.А. Неоднородности волнового характера в породах вблизи выработок, сооружаемых буровзрывным способом// Шахтное строительство. 1972. № 9. С. 7–11
3. Опарин В. Н., Тапсиев А. П. О некоторых закономерностях трещинообразования вокруг горных выработок// В сб.: Горные удары, методы оценки и контроля удароопасности массива горных пород. Фрунзе: Илим, 1979, С. 342–349
4. Зборщик М. П., Морозов А. Ф. Механизм разрушения слоистых пород и взаимодействие их с крепью полевых подготовительных выработок// II Всесоюз. конф. Проблемы механики подземных сооружений: Тез.докл. Тула: ТПИ, 1982, С. 110–112
5. Adams G.R., Jager A.J. Petroscopic observation of rock fracturing ahead of stop faces in deep-level gold mines// J. South African Inst. Mining and Metallurgy. 1980. V. 80. No 6. P. 204–209.
6. Kondo K. On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding// Proc. Jpn Nat. Congr. Appl. Mech. Tokyo. 1953. V. 2. P. 41–47.
7. Bilby B. A., Bullough R., Smith E. Continues distributions of dislocations: a new application of the methods of non - Riemannian geometry// Proc. Roy. Soc. 1955. V. 231. P. 263–273.
8. Myasnikov V.P., Guzev M.A. Thermo-mechanical model of elastic-plastic materials with defect structures// Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2000. V. 33. P. 165–171.
9. Гузев М.А. Структура кинематического и силового поля в Римановой модели сплошной среды// ПМТФ. 2011. Т. 52. № 5. С. 39-48.

УДК 539.3

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПОЛОГО ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Дац Е.П.
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 5
E-mail: dats@iacp.dvo.ru

Мокрин С.Н.
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690000, Владивосток, Суханова 8
E-mail: murashkin@iacp.dvo.ru

Мурашкин Е.В.
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 5
E-mail: murashkin@iacp.dvo.ru

Ключевые слова: пластичность, упругость, теплопроводность, темпера-туные напряжения, остаточные напряжения

Работа посвящена изучению процессов формирования необратимых деформаций металлических изделий вследствие влияния на них высоких градиентов температур. Решена задача о нагреве на одной из граничных поверхностей и процессе последующего охлаждения термоупругопластического полого цилиндра . Указаны необходимые и достаточные условия возникновения и развития зон необратимого деформирования, разгрузки и повторного пластического течения.

Введение

Различные технологические процессы термомеханической обработки металлоизделий (сварки, изготовлении композиционных материалов и др.), связаны с локальным нагревом материала до высокой температуры. Температурные напряжения, возникающие вследствие перепада температур, в значительной степени определяют поведение многих современных конструкций. Потребность в материалах, которые могли бы успешно функционировать при таких высоких уровнях температуры, является одной из наиболее актуальных и трудных задач, определяющих лицо современной техники. Трудность усугубляется тем, что помимо высоких уровней температуры, в рабочих условиях напряжённое состояние может выйти на предел текучести. Следствием этого является процесс зарождающегося пластического течения в окрестности нагрева. Изучению вопросов моделирования необратимого деформирования материалов в условиях неизотермических процессов посвящены, например, работы [1, 3, 4, 2]. Проблема определения поля перемещений в теории идеального упругопластического тела впервые была рассмотрена Д.Д. Ивлевым [5]. Была показана возможность вычисления перемещений в статически определимых задачах теории идеальной пластичности и указаны условия, когда данная возможность осуществляется. Указанный способ вычисления перемещений используется и для решения поставленной задачи.

1. Модель термоупругопластической среды

Материал цилиндра считаем упругопластическим, подчиняющимся математической модели типа Прандтля–Рейса [1, 2] в которой деформации e_{ij} полагаются малыми и принимается их аддитивное разложение на упругую e_{ij}^e и пластическую e_{ij}^p составляющие

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1}$$

Уровень и распределение упругих деформаций и температуры в шаре задают напряжения в нем, определяемые согласно закону Дюгамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - m\theta)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \quad \theta = T(x_i, t) - T_0 \tag{2}$$

Здесь λ, μ — параметры Ламе, $m = 3\alpha K$, K — модуль всестороннего сжатия материала, α — коэффициент линейного температурного расширения материала, $T(x_i, t)$ — текущая температура. Начало процесса пластического течения в материале свяжем с выполнением условия пластичности в форме Треска–Сен Венана [2]

$$f(\sigma_{ij}, \theta) = \max|\sigma_i - \sigma_j| - 2k(\theta) = 0 \tag{3}$$

где σ_i — главные напряжения, $k(\theta)$ — предел текучести материала при заданной температуре. Далее в расчетах для $k(\theta)$ принимается простейшая линейная зависимость $k(\theta) = k_0 - \beta\theta$, в которой k_0 — предел текучести материала при комнатной температуре, β — теплофизическая постоянная материала, задающая степень падения предела текучести с повышением температуры и определяемая на основе экспериментальных данных. В условиях принимаемого принципа максимума Мизеса [2] поверхность (3) становится пластическим потенциалом, следствием которого является ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \xi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \xi = \sqrt{\varepsilon_{kl}^p \varepsilon_{lk}^p} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{nm}} \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

Если к соотношениям (1) – (4) добавить локальные следствия законов сохранения (уравнение движения и уравнение баланса внутренней энергии) и постулировать закон теплопроводности, например, в форме Фурье, то получим замкнутую математическую модель деформирования.

2. Температурные напряжения полого цилиндра

Рассмотрим бесконечно длинный полый цилиндр, свободный от внешних нагрузок при начальной температуре T_0. Внешняя поверхность поддерживается при постоянной начальной температуре. На внутренней поверхности температура повышается до некоторого максимального значения T_m, причем процесс роста температуры считается достаточно медленным для того, чтобы пренебречь скоростью распространения тепла в материале цилиндра. Такой процесс деформирования связан с краевыми условиями

$$\theta(a) = \theta_k, \quad \theta(b) = 0, \quad \sigma_{rr}(a) = 0, \quad \sigma_{rr}(b) = 0 \tag{5}$$

В условиях цилиндрической симметрии решением стационарного уравнения теплопроводности при граничных условиях (5) будет функция

$$\theta(r) = \theta_k \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} \tag{6}$$

Интегрирование уравнения равновесия в случае термоупругого деформирования материала цилиндра приводит к следующим зависимостям для напряжений и перемещений

$$\begin{gathered} u(r) = mw^{-1}F(a,r) + (r^2 - a^2)r^{-1}c_1 + c_2 r^{-1} \\ \sigma_{rr}(r) = -2\mu r^{-1}u(r) + wc_1 \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = 2\mu r^{-1}u(r) + \lambda c_1 - 2\mu m w^{-1}\theta(r) \end{gathered} \tag{7}$$

$$F(x,y) = 0.25\theta_k \left(x^2 - y^2 - 2x^2\ln(x/b) + 2y^2\ln(y/b)\right)/\ln(a/b)$$

Неизвестные интегрирования можно определить из краевых условий (5). При определенном уровне ($\theta_k = \theta_1$) на внутренней поверхности цилиндра выполняется условие пластичности

$$|\sigma_{rr}(a) - \sigma_{\theta\theta}(a)| = 2k(\theta(a)) \tag{8}$$

что свидетельствует о начале пластического течения в окрестности внутренней поверхности. В процессе увеличения температуры область пластического течения растет, что означает необходимость интегрировать уравнение равновесия как в области термоупругого деформирования, где перемещения и напряжения вычисляются по формулам (7), так и в области течения. Для определения полей перемещений и напряжений в зоне необратимого деформирования воспользуемся методом предложенным Д. Д. Ивлевым в [5]. Интегрированием уравнения равновесия можно определить напряжения в зоне пластического течения. С другой стороны, обратив закон Дюгамеля–Неймана (2) можно получить выражения для упругих деформаций. Воспользовавшись условием пластической несжимаемости, как следствием ассоциированного закона пластического течения (4) и условия пластичности Треска–Сен Венана (3), и подставив полученные упругие деформации получим уравнение для определения перемещений в зоне необратимого деформирования

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right) - \frac{m}{g}\frac{d\theta}{dr} + \frac{2k}{gr} + \frac{1}{g}\frac{dk}{dr} = 0$$

решением которого определим перемещения и, следом, напряжения

$$\begin{gathered} u(r) = m(gr)^{-1}F(a,r) - rg^{-1}G(a,r) + c_3 r^{-1} \\ \sigma_{rr}(r) = -2G(a,r) \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = -2G(a,r) - 2k(r) \\ G(x,y) = k_0 \ln(y/x)\left(1 + \theta_k\beta\ln(\sqrt{xy}/b)/\ln(a/b)\right) \end{gathered} \tag{9}$$

Постоянные интегрирования теперь следует определять не только по краевым условиям (5), но и учитывая условия непрерывности параметров напряженно-деформированного состояния на упругопластической границе, которую можно определить найдя корень уравнения

$$\frac{m\mu F(a_1, b) + (\mu a_1^2 + b^2 g)G(a, a_1)}{\mu g(b^2 - a_1^2)} - \frac{m}{2w}\theta(a_1) + \frac{k(a_1)}{2\mu} = 0 \tag{10}$$

При дальнейшем увеличении температуры до значения ($\theta_k = \theta_2$) возможно ситуация когда условие текучести (8) может выполнится на внешней поверхности, но с противоположным знаком. При ($\theta_k > \theta_2$) границы обоих пластических течений движутся навстречу друг другу по мере увеличения параметра θ_k.Теперь уравнения равновесия следует интегрировать в трех областях, откуда получим выражения для напряжений и перемещений в области внешнего пластического течения ($b_1 \leqslant r \leqslant b$)

$$\begin{gathered} \sigma_{rr}(r) = 2G(b_1, r) + c_4 \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = 2G(b_1, r) + 2k(r) + c_4 \\ u(r) = m(gr)^{-1}F(b_1, r) + rg^{-1}G(b_1, r) + c_4(r^2 - b_1^2)(2gr)^{-1} + c_5 r^{-1} \end{gathered} \tag{11}$$

в области термоупругого деформирования ($a_1 \leqslant r \leqslant b_1$) согласно соотношениям (7) и в области внутреннего пластического течения ($a \leqslant r \leqslant a_1$) по формулам (9). Неизвестные интегрирования, как и прежде, найдем по краевым условиям (5) и условиям равенства напряжений и перемещений на упругопластических границах a_1, b_1. Границы областей необратимого деформирования a_1 и b_1 определяются решением системы уравнений

$$\begin{gathered} \begin{cases} 2c_2 w\mu - m\mu\theta(a_1)a_1^2 + k(a_1)wa_1^2 = 0 \\ 2c_2 w\mu + (4\mu^2 mF(a_1, b_1) - m\mu\theta(b_1) - k(b_1)w)b_1^2 = 0 \end{cases} \\ c_2 = \frac{a_1^2(m\mu F(a_1, b_1) + (a_1^2\mu + gb_1^2)G(a, a_1) - b_1^2 wG(b_1, b))}{\mu g(b_1^2 - a_1^2)} \end{gathered} \tag{12}$$

При достижении заданного уровня температуры ($\theta_k = \theta_3$) начнем уменьшать температуру на внутренней поверхности, тем самым начав процесс разгрузки тела. В области обратимого деформирования ($a_1 \leqslant r \leqslant b_1$) перемещения и напряжения вычисляются зависимостями (7). В областях с накопленными необратимыми деформациями ($a \leqslant r \leqslant a_1$) и ($b_1 \leqslant r \leqslant b$) зависимости для перемещений и напряжений весьма громоздки и поэтому не будем приводить их в этом сообщении, отметим лишь что процесс получения необходимых формул вполне аналогичен описанному ранее для областей пластического течения. Упругие деформации можно вычислить через известные накопленные необратимые и полные, зависящие от перемещений. Подставляя полученные выражения для упругих деформаций в закон Дюгамеля–Неймана и затем в уравнение равновесия придем к уравнению для определения перемещений. Оказывается, что если уровень накопленных необратимых деформаций достаточно высок на граничной поверхности может произойти выход на условие пластичности, что будет означать начало повторного пластического течения. А значит, уравнение равновесия придется интегрировать независимо в четырех областях, учитывая при этом непрерывность параметров напряженно-деформированного состояния на границах раздела этих областей.

Заключение

Построенное решение позволяет прогнозировать уровень остаточных напряжений полого цилиндра при тепловом воздействии на него. По результатам численного счета можно получить распределения перемещений и напряжений по толщине деформируемого материала. Указаны возможности определения критической температуры нагрева при которой начнется пластическое течение. Найдена максимальная температура нагрева при которой уровня накопленных необратимых деформаций не хватит для возникновения повторного пластического течения в окрестности внутренней граничной поверхности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (МК-776.2012.1) и гранта РФФИ (мол_а_вед 12-01-33064).

Список литературы

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 520 с.
2. *Мелан Э., Паркус Г.* Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. 168 с.
3. *Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
4. *Качанов Л. М.* Упругопластическое равновесие неравномерно нагретых толстостенных цилиндров, находящихся под действием внутреннего давления // Журнал технической физики. 1940. № 10(14). С. 1167–1172.
5. *Ивлев Д. Д.* К определению перемещений в задаче Л. А. Галина // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21, Вып. 5. С. 716–718.
6. *Ульянцев В. П., Макаров А. Ф.* Упругопластическое деформирование цилиндра при неравномерном нагреве // Пластичность машиностроительных материалов. Тула: Приокское кн. изд-во, 1987. С. 102–113.
7. *Ульянцев В. П., Макаров А. Ф.* Влияние неравномерного температурного поля на деформирование цилиндров // Проблемы технологии машиностроения. Тула: Изд-во ТулПИ, 1991. С. 35–41.
8. *Шорр Б. Ф.* К расчету неравномерно нагретых цилиндров в упругопластической области // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. 1960. № 6. С. 57–62.

УДК 51:519.8 + 612.53/59:612.57

RIA-ТЕХНОЛОГИИ В ЗАДАЧАХ АВТОСЕГМЕНТАЦИИ МЕДИЦИНСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

А.В. Дороничева
Вычислительный центр ДВО РАН
Россия, 680063, Хабаровск, Ким Ю Чена 65
E-mail: dreamfox@list.ru

С.З. Савин
Вычислительный центр ДВО РАН
Россия, 680063, Хабаровск, Ким Ю Чена 65
E-mail: savin.sergei@mail.ru

А.А Соколов
Вычислительный центр ДВО РАН
Россия, 680063, Хабаровск, Ким Ю Чена 65
E-mail: lw.sokolov@gmail.com

Ключевые слова: сегментация, медицинские изображения, алгоритм оконтуривания, КАД, качество медицинских изображений

Рассмотрены проблемы установки и интеграции сложных комплексов программных обеспечений по обработке медицинских изображений. На базе анализа данной ситуации реализуется более легкая в интеграции автоматизированныя система с использованией новейших информационных технологий с использованием веб - среды для анализа и сегментирования DICOM - изображений.

Введение

Стремительное развитие цифровых методов обработки медицины в целом. Бурное развитие современных систем медицинской диагностики приводит к постоянному увеличению количества цифровых изображений , получаемых в различных медицинских учреждениях. Для эффективного использования в диагностическом процессе информации, компьютерных и телекоммуникационных систем и сетей задает облик настоящих и будущих медицинских технологий и всейэти изображения должны быть оперативно проанализированы, количественно оценены и правильно интерпретированы. Одной из актуальных задач по развитию компьютерных технологий в медицинской диагностике становится обработка и экспертная оценка различных изображений: улучшение качества изображения, восстановление поврежденных изображений, распознавание отдельных элементов и пр.. Распознавание патологических процессов является одной из наиболее важных задач обработки медицинских изображений методами компьютерной автоматизированной диагностики (КАД-анализ). Сложность проблемы состоит в том, что существующие КАД-приложения плохо адаптированы к нуждам пользователей - врачам онкологам, радиологам и пр. Эти проблемы представляют еще большее значение при использовании в радионуклидной диагностике средств облачных вычислений.

1. Тенденции развития программных комплексов

Обычно инсталляция и сопровождение программных комплексов на ПК пользователя вызывает определённые сложности – загрузка и установление обновлений, расширений и других компонентов, настройка интерфейса и несовместимость с ОС или аппаратной составляющей. Другой проблемой является невозможность использования ПО сразу на нескольких ПК пользователя. У пользователя есть только одна установленная копия используемого программного обеспечения, которую можно использовать только на одном ПК [3]. В последние годы для создания Интернет-приложений наметилась тенденция к переходу от стандартных HTML/JavaScript/CSS технологий к платформам, позволяющим запускать в среде веб-браузера программы, по внешнему виду и функциям не отличающиеся от оконных (desktop) приложений. Подобные технологии предоставляют богатые возможности по использованию интернета как инструмента для информационного развития науки, бизнеса, здравоохранения и образования. Реализация КАД–систем с использованием сравнительно новых технологий RIA позволяет решить сразу две вышеописанные проблемы. Rich Internet Application (RIA) представляет собой третье поколение клиентских технологий для web-приложений. Для пользователя RIA очень удобны в использовании, так как отсутствует необходимость в установке таких приложений на компьютер. Для запуска приложения достаточно пройти на web-страницу, на которой реализован вход в программу. Благодаря этому мы можем запускать свое программное обеспечение на любом ПК или портативном устройстве с установленным браузером и доступом к среде Интернет. Таким образом, реализуемое программное обеспечение с максимально возможной дружелюбностью позволит врачу – диагносту произвести в любое время анализ и сегментирование медицинских изображений пациента на предмет опухоли в организме человека, находясь вне медицинского учреждения посредством портативного устройства с выходом в среду Интернет.

2. Решение задач КАД-анализа с использованием Microsoft Silverlight

Для реализации задач КАД-анализа используется среда разработки Microsoft Silverlight. Silverlight предоставляет графическую систему, схожую с Windows Presentation Foundation, и объединяет мультимедиа, графику, анимацию и интерактивность в одной программной платформе. Приложения Silverlight используют управляемый код .NET, язык разметки Extensible Application Markup Language (XAML) и язык разметки на основе XML. Возможности Silverlight позволяют реализовать графический 3D рендеринг при помощи GPU и построение 3D – тел; разрешить полный доступ к клавиатуре при работе в полноэкранном режиме; реализовать программный доступ к локальной папке с документами пользователя; произвести манипулирование над растровыми и векторными изображениями. Более того возможна интеграция Silverlight с HTML и JavaScript, что позволяет реализовать более гибкое решение. Задача распознавания медицинских изображений разбивается на ряд более простых задач, одной из которых является программный вывод dicom-изображения на экран ПК или другого мобильного устройства. Используем для этого технологию HTML5. Для загрузки изображений dicom–формата необходим исполняющий код javascript, благодаря которому создается отображение информации на экране, например как на рис.1.

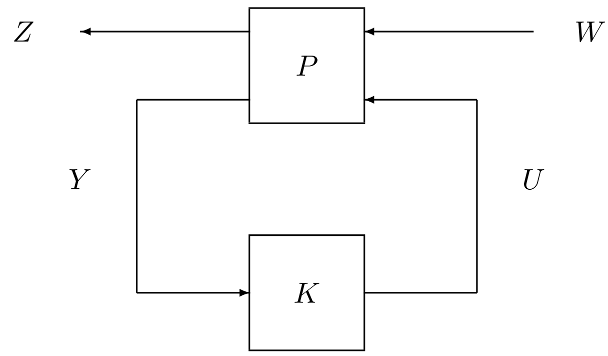


Рис. 1. Отображение dicom-изображения в браузере

Таким образом, можно организовать анализ и обработку медицинских изображений врачом – диагностом с помощью любого мобильного устройства с доступом в Интернет, используя технологии RIA. В частности, разработана экспертная система радионуклидной диагностики, способная функционировать в режиме on-line.

Список литературы

1. Бурков С. М., Гостюшкин В. В., Косых Н. Э., Литвинов К. А., Савин С. З., Свиридов Н. А. Проблемы использования CAD – систем при анализе медицинских изображений // Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления: материалы международной науч.-практ. конф., г.Хабаровск, 4-6 октября 2011 г. Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2011. 345 с.
2. Косых Н.Э., Смагин С.И., Гостюшкин В.В., Савин С.З., Литвинов К.А. Система автоматизированного компьютерного анализа медицинских изображений // Информационные технологии и вычислительные системы. № 3, 2011. С.51-60.
3. Смагин С.И., Михайлов К.В., Кривошеев И.А., Савин С.З. О технологии создания интерактивных информационных систем // Информатика и системы управления. № 1(27), 2011. С.115-120.
4. NET DICOM Library. Software Programming for Medical Applications. http://dicomiseasy.blogspot.com.es/2012/12/part-19-of-dicom-standard.html
5. HTML5 DICOMViewer: Firsttry. http://kile.stravaganza.org/blog/post/html5-dicom-viewer-first-try

УДК 629.7

ВОПРОСЫ МУЛЬТИПЛИКАЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОМУ КОНТУРУ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

А.П. Ерохин
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, г.Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4
E-mail: a-erokhin@yandex.ru

Ю.И. Денискин
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, г.Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4
E-mail: Yury.Deniskin@mai.ru

Ключевые слова: авиационные конструкции; теоретический контур; параметрическая модель; система геометрического моделирования; конструктивно-силовая схема; электронная модель детали

Рассмотрены вопросы построения параметрических моделей авиационных конструкций с учетом мультипликации по теоретическому контуру. Предложена схема использования вспомогательной геометрии, позволяющая избежать сбоев перестроения геометрии при мультипликации моделей.

При проектировании авиационных конструкций построение геометрических моделей деталей, содержащих поверхности теоретического контура (ТК), представляет собой достаточно трудоемкий и длительный процесс. В настоящее время проектирование с использованием параметрических геометрических моделей считается основным методом повышения эффективности автоматизированного проектирования машиностроительных изделий. Однако, в настоящее время окончательно не решена проблема использования параметрических геометрических моделей на стадии рабочего проектирования авиационных конструкций. В частности, особый интерес представляет параметризация геометрических моделей деталей, содержащих криволинейные поверхности ТК летательного аппарата (ЛА). Построение электронной модели каждой такой детали в системе геометрического моделирования (СГМ) само по себе трудоемко ввиду сложности ее формы. Помимо этого, в одном агрегате могут присутствовать многочисленные группы деталей рассматриваемого типа, имеющих между собой значительную степень конструктивного и геометрического подобия (например стрингера, пояса нервюр и т. п.). Различия в форме деталей таких групп вызваны в основном изменением формы ТК по размаху и хорде агрегата и вызванным им изменением строительной высоты. Параметрическая модель одной из группы таких деталей позволила бы получить модели остальных деталей простым изменением значения требуемых параметров. Это снизит трудоемкость построения электронных моделей всех деталей данной группы прямо пропорционально числу входящих в группу деталей. Современные СГМ предоставляют широкие возможности параметризации моделей, однако их реализации применительно к моделям деталей, имеющих выход на ТК, препятствует существенная методическая проблема. В общем случае параметризованные модели, как правило, строятся в начале координат, а их расположение в конструкции изделия определяется размещением в соответствующей сборочной единице. Поскольку рассматриваемые модели привязаны к ТК, их следует строить сразу по их месту в конструкции. Построение других моделей группы, связано с изменением значений параметров и положения исходной модели в пространстве. При изменении положения модели в пространстве в соответствии с ТК и параметризации требуется обеспечить сохранение геометрических построений. В докладе рассматриваются общие подходы к мультипликации по теоретическому контуру параметрических моделей авиационных конструкций. Отмечается, что при выполнении электронных моделей деталей (ЭМД) авиационных конструкций, в качестве вспомогательной геометрии используется т. н. электронная мастер-геометрия соответствующих частей изделия. Электронная мастер-геометрия изделия (ЭМГ) содержит все данные, определяющие размеры, форму, конструктивно-силовую схему, взаимное расположение составных частей изделия, схему конструктивно-технологического членения, трассировку систем управления и коммуникаций. В частности в состав ЭМГ входят: - базовые и строительные плоскости ЛА и его главных составных частей; - поверхности теоретического контура (ТК); - базовые и строительные плоскости и оси силового набора (нервюр, лонжеронов стрингеров и т.п.). Вводится понятие "привязка". Привязкой называется геометрический элемент вспомогательной геометрии, служащий размерной базой для геометрической модели детали. Для рассматриваемого класса деталей привязками будут в первую очередь оси силового набора и поверхности ТК. Определение привязок при выполнении электронной модели производится путем импорта соответствующих геометрических элементов из ЭМГ в ЭМД. Таким образом, построение модели начинается с определения привязок. Мультипликация моделей осуществляется между осевыми плоскостями и поверхностями конструктивно-силовой схемы (КСС) крыла, расположенными в пространстве дискретно. То есть при мультипликации требуется изменение части привязок. Показано, что причина сбоев перестроения геометрии заключается в замене привязок. Следовательно, требуется найти способ избежать их замены при изменении положения модели в конструкции. Отмечается следующая закономерность задания осей КСС: дискретно расположенные в пространстве оси силового набора задаются параллельным смещением с определённым шагом плоскостей от некоторой исходной плоскости. Эта закономерность позволяет перейти от дискретного к непрерывному способу определения осевых элементов, используемых в качестве привязок. Для этого предлагается использовать в качестве привязок не сами оси силового набора, а элементы, служащие для них размерными базами. В этой связи вводится термин "базовые привязки". Тогда привязки модели можно получать построением внутри модели на основе имеющихся базовых привязок, а не импортировать из мастер-геометрии. Такая схема определения привязок позволит обойтись без их замены при изменении положения модели. Достаточно будет изменить численное значение параметра, определяющего положение привязки относительно базовой привязки. Разработанная схема определения привязок модели позволит избежать сбоев перестроения геометрических элементов при изменении положения модели в конструкции агрегата. Кроме этого она позволит получить модель, у которой параметризуется не только форма, но и положение в пространстве. Таким образом, на основе данной схемы возможна разработка методики построения параметрических моделей авиационных конструкций с учетом мультипликации по теоретическому контуру. Ожидается, что такая методика позволит устранить вышеописанные трудности построения параметрических моделей. Разработка такой методики позволит снизить трудоемкость построения электронных моделей групп геометрически подобных деталей прямо пропорционально числу деталей в группе.

Список литературы

1. Кандаулов В. М. Проектирование семейств сложных машиностроительных изделий на основе паттернов - автореферат дисс. ... канд. техн. наук : 05.13.12 / В. М. Кандаулов. - Ульяновск, 2012.
2. Викулин Ю. Ю. Параметрическое моделирование поверхности адаптивного крыла с гибкими обшивками : автореферат дисс. ... канд. техн. наук : 05.01.01 / Ю. Ю. Викулин. - М., 2005. - 23 с.
3. Ерин А. Реальная параметризация // САПР и графика. 2007. - №4. - с. 38-46.
4. Василевский Е. Т., Гребенников А. Г., Ефремов А. Ю., Ефремова Н. В. Метод интегрированного проектирования, конструирования и моделирования высокоресурсного фитингового стыка крыла с центропланом самолета транспортной категории // Открытые информационные и компьютерные технологии. 2010. - №46. с. 277-293.
5. ГОСТ 2.052-2006 ЕСКД Электронная модель изделия. Общие положения. - Введен 01.09.2006 - М.: Стандартинформ, 2007. - 12 с.

УДК 574.34:575.174.4

ЭВОЛЮЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДВУХВОЗРАСТНОЙ ПОПУЛЯЦИИ. ОТБОР ПО ПРИСПОСОБЛЕННОСТЯМ В РЕПРОДУКТИВНОЙ ГРУППЕ.

О.Л. Жданова
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 5
E-mail: axanka@iacp.dvo.ru

Ключевые слова: математическая модель, эволюция, полиморфизм, естественный отбор, колебания, устойчивость, популяция, возрастная структура.

В рамках эколого-генетического подхода детально рассматриваются механизмы наследования адаптивных признаков в популяции, состоящей из двух возрастных классов. В результате моделирования получены новые результаты, дополняющие интуитивное представление об эволюции структурированной популяции.

Введение

Динамическая теория популяций традиционно рассматривается как смежный раздел теоретической популяционной биологии и популяционной биофизики (напр., [1–3]). Основной проблемой, рассматриваемой в рамках динамической теории, является описание природы и объяснение механизмов колебательной (квазипериодической и хаотической) динамики популяций. Эта проблема примыкает к важной прикладной задаче, состоящей в разработке оптимальной стратегии эксплуатации промысловых видов (или оптимизации промысла). Из смысла рассматриваемых задач понятно, что теоретическая популяционная экология изучает динамику лимитированных популяций, развивающихся в условиях ограниченных жизненных ресурсов. С 30-х годов прошлого столетия активно развивается математическая популяционная генетика, которая является другой ветвью популяционной динамической теории. Построено и изучено множество моделей эволюционных изменений генетической структуры популяции. При этом особенности динамики численности популяции, как правило, не рассматриваются, т.к. численность считается либо достаточно большой (фактически, бесконечной, - в детерминистических моделях), либо постоянной (при изучении генетического дрейфа). Объединение популяционно- экологического и популяционно-генетического подходов определило два типа проблем, которые могут быть рассмотрены в рамках эколого-генетической теории. Во-первых, это естественное продолжение изучения роли эволюционных факторов (в первую очередь, естественного отбора) в формировании динамики генетической структуры и численности популяций, живущих в условии ограниченности жизненных ресурсов. Развитие этих идей получило продолжение во многих работах, и было сформулировано в виде концепции K-r-отбора (напр., в [4-6]). Во-вторых, это необходимость анализа последствий промысла, поскольку эксплуатируе-мые популяции находятся в других экологических условиях относительно неэксплуатируемых; в результате чего условия естественного отбора и приспособленности генотипических групп могут измениться из-за промысловых воздействий [7]. Вместе с тем, многие свойства популяции определяются особенностями ее возрастной структуры. Глубокое понимание результатов действия внутрипопуляционных механизмов самоорганизации в структурированной популяции необходимо для дальнейшего исследования того, что происходит с биологической популяцией при изменении факторов внешней среды (например, промысле); тем более, что многие ценные промысловые виды имеют сложную возрастную структуру. Для моделирования динамики таких популяций разработаны и активно используются матричные модели [8-15 и др.], которые позволяют детально описать возрас-тную структуру популяции и определить ее роль и значение в поддержа-нии и эволюции популяционных циклов [16-19]. Исследование изменений в генетической структуре и поведении численности структурированной популяции, связанных с действием эволюционных факторов (в первую очередь, естественным отбором), на данный момент остается слабо проработанным. В ходе представленной работы продолжается исследование эволюции структурированной популяции. Рассматривается достаточно простая модельная ситуация, когда популяцию составляют две возрастные группы и один из ее экологических параметров определяется генетически с учетом Менделевских законов наследования. Такой более детальный модельный подход позволяет заглянуть внутрь эволюционных процессов и выявить ряд неочевидных внутренних свойств, присущих эволюции структурированной популяции, которые остаются неосвещенными в рамках экологического моделирования.

1. Модель эволюции двухвозрастной популяции

Рассмотрим двухвозрастную популяцию [20], в которой выживаемость особей репродуктивной группы, определяется генетически. Предположим, что адаптивный параметр c кодируется одним диаллельным локусом с аллеломорфами A и a; в популяции наблюдается панмиксия гамет (с равной гаметопродукцией для всех генотипов). Естественный отбор действует на половозрелых особей, а именно дифференцирует выживаемость особей репродуктивного возраста при переходе к следующему сезону размножения. Поставим в соответствие каждому генотипу (AA, Aa и aa) по коэффициенту c_{AA}, c_{Aa} и c_{aa}, характеризующему выживаемость половозрелых особей соответствующего генотипа при переходе к следующему сезону размножения, и будем называть эти коэффициенты приспособленностью соответствующего генотипа (или выживаемостью этого генотипа репродуктивной группы). Этих предположений достаточно, чтобы получить следующую систему уравнений, связывающих численности возрастных классов и генетический состав популяции в последовательных поколениях:

$$\begin{cases} x_{n+1} = wy_n \\ y_{n+1} = x_n(1-x_n) + \bar{c}_n y_n \\ q_{n+1} = p_{AA,n} + \dfrac{1}{2} p_{Aa,n} \\ p_{AA,n+1} = \dfrac{x_n(1-x_n)q_n^2 + y_n c_{AA} p_{AA,n}}{x_n(1-x_n) + \bar{c}_n y_n} \\ p_{Aa,n+1} = \dfrac{2x_n(1-x_n)q_n(1-q_n) + y_n c_{Aa} p_{Aa,n}}{x_n(1-x_n) + \bar{c}_n y_n} \end{cases} \tag{1}$$

где x и y - это численность неполовозрелой и репродуктивной возрастной группы, соответственно; w - репродуктивный потенциал популяции; q – частота аллеля A в младшей возрастной группе, p_{AA} и p_{Aa} - частоты генотипов AA и Aa в репродуктивной части популяции, $\bar{c}$ - средняя выживаемость репродуктивной группы при переходе к следующим сезонам размножения: $\bar{c}_n = (c_{AA} - c_{aa})p_{AA,n} + (c_{Aa} - c_{aa})p_{Aa,n} + c_{aa}$. Заметим, что введение естественного отбора на более поздней стадии жизненного цикла приводит к усложнению модели, т.е. к добавлению еще одного уравнения (относительно модели двухвозрастной популяции с отбором по приспособленностям зародышей). Поскольку естественный отбор нарушает равновесие Харди-Вайнберга в репродуктивной части популяции, полное описание эволюции генетической структуры популяции в одних только частотах аллелей становится невозможным и возникает необходимость вводить уравнения, описывающие динамику уже генотипических частот в старшей возрастной группе.

2. Результаты исследования

Проведенное исследование устойчивости стационарных точек модели (1) позволило заключить, что генетический состав популяции определяется взаимным расположением выживаемостей половозрелых особей c_{ij}, а динамический режим величиной репродуктивного потенциала w вместе с коэффициентом $\bar{c}$. Генетический состав популяции, а именно, будет ли она полиморфной или мономорфной, в большей степени зависит от соотношения выживаемостей гетерозиготы (c_{Aa}) и гомозигот (c_{AA}, c_{aa}). Также выживаемости генотипов, присутствующих в популяции, определяют среднюю выживаемость репродуктивной группы $\bar{c}$, и уже эта величина вместе с репродуктивным потенциалом (w) определяет тип режима динамики численности популяции. Можно ожидать, что как и в предыдущем случае (модель двухвозрастной популяции с отбором по приспособленностям зародышей), при достаточной величине репродуктивного потенциала (w) рост средней выживаемости репродуктивной группы ($\bar{c}$) приведет к возникновению колебаний численности и (если популяция полиморфна) генетического состава популяции. Вопрос о том, как именно происходит увеличение $\bar{c}$, не является тривиальным. Рассматриваемая модель демонстрирует как минимум два различных эволюционных сценария изменения динамики популяции, обусловленных ростом выживаемости генотипов. Так рост средней выживаемости репродуктивной группы $\bar{c}$ способен дестабилизировать динамику численности популяции, при этом генетический состав может флуктуировать (рис. 1а) или наоборот стабилизироваться (рис. 1б).

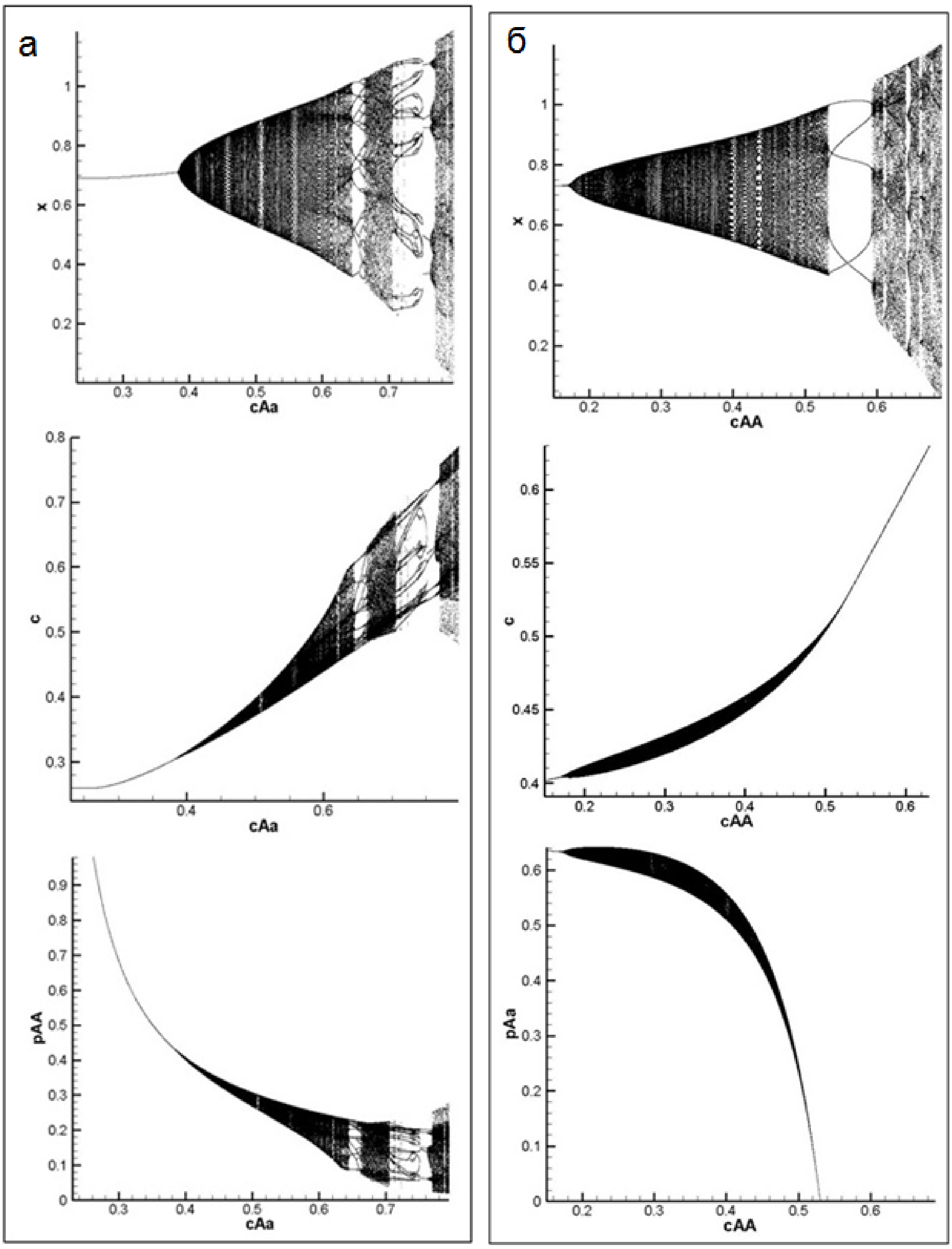


Рис. 1. Распределение численности младшего возрастного класса (x), средней выживаемости ($\bar{c}$) и частоты генотипа (AA – (а) и Aa –(б)) репродуктивной группы в предельных траекториях системы (1) с изменением бифуркационного параметра c_{Aa} (а) и c_{AA} (б).

3. Заключение

В работе рассматривается эволюция двухвозрастной популяции, при этом большее внимание уделяется моделированию механизмов наследования адаптивных популяционных характеристик. Разработана модель динамики генетической структуры и численности для популяции с отбором по выживаемостям в репродуктивной группе. Эта модель вместе с аналогом, где моделируется отбор по приспособленностям зародышей, позволяет глубже понять эволюционные процессы, протекающие в структурированной популяции. Проведенное исследование в целом подтверждает результаты предыдущих исследований, которые изучали только динамику численности двухвозрастной популяции. Действительно, увеличение репродуктивного потенциала w и выживаемости c сопровождается усложнением динамики численности популяции. Однако эволюционный рост самих этих параметров может быть немонотонным, со значительными флуктуациями. Рассматриваемые модели допускают существенное разнообразие динамики генетической структуры двухвозрастной популяции. При этом увеличение средней выживаемости репродуктивной группы может как дестабилизировать, так и привести к стабилизации динамики генетического состава популяции. Исследование проведено при частичной поддержке РФФИ (грант №11-01-98512) и ДВО РАН в рамках программы Президиума РАН (проекты № 12-I-П28-02, 12-I-П15-02, 12-II-СО-06-019, 12-06-007, 13-III-В-01I-002).

Список литературы

1. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985.
2. Волькенштейн М. В. Биофизика. М.: Наука, 1988.
3. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. Введение в теоретическую биофизику. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
4. Rougharden J. Density dependent natural selection // Ecology. 1971. Vol. 52. P. 453-468.
5. Charlesworth B. Selection in density-regulated populations // Ecology. 1971. Vol. 52. P. 469-474.
6. Евдокимов Е.В. Проблемы регулярного поведения и детерминированного хаоса в основных моделях популяционной динамики (Теория и эксперимент): автореферат дис. д-ра. биол. наук. Красноярск, 1999.
7. Фрисман Е.Я., Жданова О.Л., Колбина Е.А. Влияние промысла на генетическое разнообразие и характер динамического поведения менделевской лимитированной популяции // Генетика. 2010. Т. 46, № 2. С. 272-281.
8. Leslie P.H. On the use of matrices in certain population mathematics // Biometrika. 1945. Vol. 33. P. 183–212.
9. Leslie P.H. Some further notes on the use of matrices in population mathematics // Biometrika. 1948. Vol. 35. P. 213–245.
10. Lefkovitch L.P. The study of population growth in organisms grouped by stages. Biometrics. 1965. Vol. 21. P. 1–18.
11. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
12. Логофет Д.О. К теории матричных моделей динамики популяций с возрастной и дополнительными структурами // Журнал общей биологии. 1991. Т. 52, № 6. С. 793-804.
13. Логофет Д.О. Три источника и три составные части формализма популяции с дискретной стадийной и возрастной структурами // Математическое моделирование. 2002. Т. 14, № 12. С. 11-22.

14. Caswell H. Matrix population models: Construction, analysis and interpretation, 2nd Edition. Sunderland, Massachusetts: Sinauer Associates, 2001.
15. Логофет Д.О., Белова И.Н. Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13., №4. С. 145-164.
16. Hastings A. Age dependent dispersal is not a simple process: density dependence, stability and chaos // Theoretical Population Biology. 1992. Vol. 41, № 3. P. 388–400.
17. Lebreton J.D. Demographic models for subdivided populations: the renewal equation approach // Theoretical Population Biology. 1996. Vol. 49, № 3. P. 291–313.
18. Kooi B.W., Kooijman S.A.L.M. Discrete event versus continuous approach to reproduction in structured populations dynamics // Theoretical Population Biology. 1999. Vol. 56, № 1. P. 91–105.
19. Жданова О.Л., Фрисман Е.Я. Нелинейная динамика численности популяции: влияние усложнения возрастной структуры на сценарии перехода к хаосу // Журнал общей биологии. 2011. Т. 72, №3. С. 214–228.
20. Фрисман Е.Я, Скалецкая Е.И. Странные аттракторы в простейших моделях динамики численности биологических популяций // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1994. Т. 1., Вып. 6. С. 988–1008.

УДК 517.958

МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕТВЯЩИХСЯ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

А.С. Жуплев
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690091, Владивосток, Суханова, 8
E-mail: zhuplev@gmail.com

Ключевые слова: Алгоритмы Монте-Карло, уравнение переноса излучения, метод максимального сечения

В работе рассматриваются модификация метода максимального сечения для решения стационарного уравнения переноса излучения в трехмерной неоднородной среде. Модификация основана на применении метода Монте-Карло к суммированию ряда Неймана для решения уравнения переноса. Идея модификации основана на использовании ветвящихся цепей Маркова. Проводится численное сравнение этих алгоритмов.

Введение

Не смотря на многолетнюю историю, использование метода максимального сечения продолжает привлекать внимание специалистов, как с точки зрения его обоснования, так и с точки зрения его приложений [1-3]. Причем, это касается не только теории переноса излучения, но и теории управления, массового обслуживания и др.. Одним из универсальных способов уменьшения дисперсии в задачах суммирования рядов Неймана, в том числе и для решения уравнения переноса, является использование ветвящихся марковских цепей [4]. В настоящее время такой подход активно применяется в различных задачах вычислительной математики и математической физики [5-7]. В данной работе проводится численное сравнение метода максимального сечения с использованием ветвящихся траекторий с ветвлением в узлах фиктивного и истинного рассеяния частиц с традиционными методами максимального сечения для стационарного уравнения переноса излучения.

1. Постановка задачи

Рассматривается стационарное монохроматическое уравнение переноса излучения следующего вида [8-10]

$$\omega \cdot \nabla_r f(r,\omega) + \mu(r) f(r,\omega) = \mu_s(r) \int\limits_{\Omega} P(r, \omega \cdot \omega') f(r,\omega') d\omega' + J(r,\omega), \tag{1}$$

где $r = (r_1, r_2, r_3) \in G$, G – выпуклая ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$, $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$, Ω – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$. В уравнении (1) функция $f(r, \omega)$ интерпретируется как плотность потока частиц в точке r в направлении ω, функция $J(r, \omega)$ описывает распределение внутренних источников излучения в среде, $\mu(r)$, $\mu_s(r)$ – называются коэффициентами полного ослабления и рассеяния, а функция $P(r, \omega \cdot \omega')$ – индикатрисой рассеяния. Для характеристики неоднородности среды G, в которой изучается процесс переноса излучения, обычно вводится в рассмотрение некоторое разбиение G_0 области G [10]. Множество G_0 является объединением конечного числа областей

$$G_0 = \bigcup_{i=1}^{p} G_i, \quad G_i \cap G_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

таких, что $\overline{G}_0 = \overline{G}$. Области G_i можно интерпретировать как некоторые части неоднородной среды G, заполненные i-м веществом. Относительно геометрии множества G_0 традиционно предполагается выполнения свойства обобщенной выпуклости [13,14]. Согласно этому свойству любой луч $L_{r,\omega} = \{r + t\omega, t \geqslant 0\}$, исходящий из точки $r \in G_0$ в направлением $\omega \in \Omega$ пересекает ∂G_0 в конечном числе точек. Все функции μ, μ_s, J, P, – неотрицательные, $\mu_s(r) \leqslant \mu(r)$, функция $P(r, \omega \cdot \omega')$ удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{\Omega} P(r, \omega \cdot \omega') d\omega' = 1.$$

Обозначим

$$\Gamma^{\pm} = \{(z, \omega) \in \partial G \times \Omega : \quad L_{z, \mp\omega} \cap G_0 \neq \emptyset\}$$

и присоединим к уравнению (1) граничное условие

$$f(\xi, \omega) = h(\xi, \omega), \quad (\xi, \omega) \in \Gamma^-. \tag{2}$$

Неотрицательная функция $h(\xi, \omega) \in C_b(\Gamma^-)$ описывает входящий в среду G поток излучения. Введем обозначения $d(r, \omega)$ есть расстояние от точки $r \in \overline{G}$ до границы $\partial G = \overline{G} \setminus G$ в направлении ω

$$(\overline{L} f)(r, \omega) = \omega \cdot \nabla_r f(r, \omega) + \overline{\mu} f(r, \omega), \quad \overline{\mu} = \sup_{r \in G_0} \mu(r),$$

$$(\overline{S} f)(r, \omega) = \mu_s(r) \int_{\Omega} P(r, \omega \cdot \omega') f(r, \omega') d\omega' + (\overline{\mu} - \mu(r)) f(r, \omega).$$

Тогда уравнение (1) можно переписать в следующем виде

$$\overline{L} f = \overline{S} f + J, \tag{3}$$

Под решением прямой задачи (1),(2) будем понимать функцию $f(r, \omega)$, которая удовлетворяет соотношениям

$$(\overline{L} f)(r, \omega) = (\overline{S} f)(r, \omega) + J(r, \omega), \quad (r, \omega) \in G_0 \times \Omega,$$

$$f(\xi, \omega) = h(\xi, \omega), \quad (\xi, \omega) \in \Gamma^-.$$

2. Ряд Неймана для нахождения решения краевой задачи

Введём функции, называемые оптическими расстояниями [9, 10]

$$\tau(r,\omega) = \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \mu(r - t\omega)dt, \quad \tau(r,\omega,t) = \int\limits_0^{t} \mu(r - t'\omega)dt',$$

Поскольку $\mu_s(r) \leqslant \mu(r)$, то решение уравнения (2) может быть найдено в виде ряда Неймана

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} (\overline{AS})^m \overline{f}_0, \tag{4}$$

где

$$\overline{f}_0(r,\omega) = h(r - d(r,-\omega)\omega, \omega) \exp(-\overline{\mu} d(r,-\omega)) + (\overline{A}J)(r,\omega)$$

$$(\overline{A}\phi)(r,\omega) = \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\overline{\mu}t)\phi(r - t\omega, \omega)dt.$$

Ряд (4) равномерно сходится со скоростью $\overline{q}^m$, где

$$\overline{q} = \|\overline{AS}\| \leqslant \sup_{(r,\omega)\in G_0\times\Omega} \left(\frac{\overline{\mu} - \mu(r) + \mu_s(r)}{\overline{\mu}} \left(1 - e^{-\overline{\mu}d(r,-\omega)}\right)\right)$$

3. Метод Монте-Карло

Опишем модификацию вычисления суммы ряда (4), которая соответствуют методу максимально сечения с использованием ветвящихся марковских цепей. Пусть M – число членов усеченного ряда Неймана (4), а N – число моделируемых траекторий, тогда для решения f можно использовать следующую оценку

$$f(r,\omega) \approx f_M(r,\omega), \tag{5}$$

$$f_{msb}(r,\omega) = \frac{1}{\overline{\mu}} \left(1 - \exp(-\overline{\mu} d(r,-\omega))\right) \times$$
$$\times \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left[\mu_s(r^n) f_{m-1}(r^n, \widetilde{\omega}^n) + (\overline{\mu} - \mu(r^n)) f_{m-1}(r^n, \omega^n)\right], \tag{6}$$

где $m = 1,\dots,M$ и $f_0(r,\omega) = \overline{f}_0(r,\omega)$. В (19) точки r^n определяются следующей формулой

$$r^n = r - \omega t_n, \tag{7}$$

где t_n — реализация случайной величины, распределенной на отрезке $[0, d(r,-\omega)]$ с плотностью

$$\frac{\overline{\mu} \exp(-\overline{\mu}t)}{1 - \exp(-\overline{\mu} d(r,-\omega))}. \tag{8}$$

Для определения вектора ω используем следующие расчетные формулы. Пусть α — равномерно распределенная случайная величина на $[0,1]$. Тогда, при

$$\alpha \geqslant \frac{\overline{\mu} - \mu(r)}{\overline{\mu} - \mu(r) + \mu_s(r)} \tag{9}$$

$$\widetilde{\omega} = Qv \tag{10}$$

где

$$v = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sqrt{1-\nu^2} \\ \sin(\varphi)\sqrt{1-\nu^2} \\ \nu \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$Q = \begin{cases} \begin{pmatrix} \dfrac{\omega_x\omega_z}{\sqrt{1-\omega_z}} & -\dfrac{\omega_y}{\sqrt{1-\omega_z}} & \omega_x \\ \dfrac{\omega_y\omega_z}{\sqrt{1-\omega_z}} & \dfrac{\omega_x}{\sqrt{1-\omega_z}} & \omega_y \\ -\sqrt{1-\omega_z} & 0 & \omega_z \end{pmatrix}, & \omega_z \neq 1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \omega_z = 1 \end{cases} \tag{12}$$

а при

$$\alpha_{n,i} < \frac{\overline{\mu} - \mu(r)}{\overline{\mu} - \mu(r) + \mu_s(r)} \tag{13}$$

$$\omega^{n,i} = \omega. \tag{14}$$

В матрице (12) угол φ есть реализация равномерно распределенной на промежутке $[0, 2\pi)$ случайной величины, а ν реализация случайной величины распределенной плотностью вероятности $P(r, \nu)$, $\nu \in [-1, 1]$.

4. Численные эксперименты

Оценка работоспособности и точности работы алгоритмов производилась на ряде численных экспериментов. Для эксперимента были реализованы три метода Монте-Карло. Первый (ms) — стандартный метод максимального сечения, также описан в [12], Второй способ (msb) — метод максимального сечения, с использованием ветвящихся марковских цепей., третий (s) — стандартный способ, описан в [12], второй и третий — методы Монте-Карло с использованием алгоритма максимального сечения. Во всех экспериментах область G представляет собой шар единичного радиуса с центром в начале координат. Решение уравнение переноса $f(r, \omega)$ находится в точке $r = (0.5, 0.5, 0.5)$, $\omega = (1.0, 1.0, 0.0)$. Разбиение G_0 области G состоит из объединения конечного числа шаров (включений). $G_i = r : |r - r_i| < R_i, \quad i = 2, \ldots, p$ и множества постоянными характеристиками μ_1, μ_{s1}, и множества $G_1 = G \setminus \left(\bigcup\limits_{i=2}^{p} \overline{G_i}\right)$ некоторым количеством включений (также в виде шара) с постоянными характеристиками μ_k, μ_{sk}. Коэффициенты μ, μ_s внутри G_i постоянны и равны соответственно μ_i и $\mu_{s,i}$, $i = 1, \ldots, p$. Количество членов ряда Неймана M в каждом эксперименте варьируется с целью анализа качества работы. Тестирование производилось на аналитических примерах и вычисления осуществлялись на персональном компьютере с процессором Intel Core i7 (3.40 GHz) и 8Гб оперативной памяти. В каждом эксперименте находились относительная погрешность, дисперсия оценки и время (в микросекундах), затраченное на выполнение алгоритмов. Опуская зависимость от переменых (r, ω, N, M) через f_s, f_{ms} и f_{msb} будем обозначать статистические оценки для суммы f рядов Неймана для соответствущего метода решения уравнения переноса. Через $\varepsilon_m s$, Df_{ms}, $s(f_{ms})$, ε_{msb}, Df_{msb}, $s(f_{msb})$, ε_s, Df_s, $s(f_s)$ обозначим относительную погрешность приближенного решения, дисперсию оценки и трудоемкость соответствующего метода Монте-Карло. Согласно [11], произведение $D\xi$ случайной величины ξ на среднее время t расчета одного выборочного значения ξ называется *трудоемкостью* и является критерием оценки качесва алгоритма. Сравнение алгоритмов проводилось на аналитическом примере, который соответствует релеевскому рассеянию в среде. Результаты численного эксперимента для 10-ти включений в области приведены в таблице 1. В этом эксперименте коэффициенты ослабления и рассеяния имели следующие значения: $\mu(r) = 4$, $\mu_s(r) = 2$ в основной среде, и $\mu(r) = 2$, $\mu_s(r) = 1$ – во включениях. Количество траекторий предполагалось равным $N = 10^6$.

Таблица 1. таблица 1

M	ε_{ms}	$Df_m s$	$s(f_{ms})$	ε_{msb}	Df_{msb}	$s(f_{msb})$	ε_s	Df_s	$s(f_s)$
3	10.6620	0.2265	4.0990	10.6658	0.2266	4.1709	10.6641	0.2266	24.8816
4	4.9321	0.1016	2.4253	4.9436	0.1019	2.5116	4.9369	0.1017	14.9792
5	2.1570	0.0753	2.2660	2.1536	0.0755	2.3066	2.1641	0.0754	13.8580
6	0.8698	0.0725	2.6121	0.8775	0.0725	2.6476	0.8651	0.0723	15.8910
7	0.3311	0.0740	3.0932	0.3199	0.0738	3.1556	0.3154	0.0737	18.8537
8	0.1101	0.0752	3.5767	0.1053	0.0752	3.6965	0.1226	0.0753	22.0282
9	0.0437	0.0759	4.0746	0.0307	0.0758	4.1839	0.0332	0.0761	25.0274
10	0.0102	0.0761	4.5371	0.0016	0.0761	4.7024	0.0066	0.0760	27.7672

5. Заключение

В работе проведен сравнительный анализ алгоритмов. Анализ таблицы 1 показывает, что при одинаковом количестве членов ряда Неймана методы максимального сечения проигрывают в точности. Данная проблема широко известна, поскольку скорость сходимости ряда Неймана для методов максимального сечения меньше. Данная проблема исчезает при уменьшении вариации коэффициента $\mu(r)$ в области G. При одном и том же M методы максимального сечения, в целом выигрывают по трудоёмкости (являются более экономичными). Это особенно проявляется в ситуации, когда структура неоднородной среды усложняется, и количество включения увеличивается. В частности, уже при 10-ти включениях методы максимального сечения выигрывают более чем в 2 раза.

Список литературы

1. Михайлов Г.А., Аверина Т.А. // Алгоритм "максимального сечения"в методе Монте-Карло / Доклады Академии наук. 2009. Т. 428, Вып. 2. С. 163-165.
2. Аверина Т.А. // Методы статистического моделирования неоднородного пуассоновского ансамбля / Сиб. журн. вычисл. матем. 2009. Т. 12, Вып. 4. С. 361-374.
3. Аверина Т.А., Михайлов Г.А. // Алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских ансамблей / Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2010. Т. 50, Вып. 6. С. 1005-1016.
4. Ермаков С.М. // Метод Монте-Карло в вычислительной математике / Санкт-Петербург. Бином. Лаборатория знаний. 2009.
5. Бреднихин С.А., Медведев И.Н., Михайлов Г.А. // Оценка параметров критичности ветвящихся процессов методом Монте-Карло / Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, Вып. 2. С. 362-374.
6. Медведев И.Н., Михайлов Г.А. // Исследование весовых алгоритмов метода Монте-Карло с ветвлением / Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, Вып. 3. С. 441-452

7. Kovtanyuk A.E., Prokhorov I.V. // A boundary-value problem for the polarized-radiation transfer equation with Fresnel interface conditions for a layered medium / Journal of Computational and Applied Mathematics. 2011. P. 2006-2014.
8. Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др. // Метод Монте-Карло в атмосферной оптике / 1976. Новосибирск. Наука.
9. Гермогенова Т.А. // Локальные свойства решений уравнения переноса. / 1986. М. Наука.
10. Аниконов Д.С., Ковтанюк А.Е., Прохоров И.В. // Использование уравнения переноса в томографии / 2000. Москва. Логос.
11. Соболь И.М. // Численные методы Монте-Карло. / 1973. М.: Наука.

УДК 519.248:62-192+519.176

КОМПЬЮТЕРНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ КОНТЕКСТОВ

А.А. Зуенко
Институт информатики и математического моделирования технологических процессов Кольского научного центра РАН
Россия, 184209, Апатиты, Ферсмана, 24А
E-mail: zuenko@iimm.kolasc.net.ru

А.Я. Фридман
Институт информатики и математического моделирования технологических процессов Кольского научного центра РАН
Россия, 184209, Апатиты, Ферсмана, 24А
E-mail: fridman@iimm.kolasc.net.ru

Ключевые слова: концептуальное моделирование, ситуационное управление, контекстно-ориентированный подход, интеллектуальные базы данных.
Представлена интеллектуальная технология ситуационного моделирования сложных организационно-технических систем, использующая контекстно-ориентированный подход к управлению ограничениями, которые характеризуют объект исследования. Технология позволяет решать с единых позиций задачи стратегического планирования и оперативного управления в таких системах, а также обеспечивает автоматизацию контроля корректности процесса моделирования.

Введение

На одной из предшествующих Школ-Семинаров имени академика Е.В. Золотова была представлена [1] система ситуационного концептуального моделирования (ССКМ), которая предназначена для сопоставительного анализа ситуаций, складывающихся на объекте исследования, и синтеза стратегий управления структурой объекта с учетом предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР) [2]. В настоящем докладе предлагается контекстно-ориентированный подход к управлению ограничениями, которые характеризуют объект исследования на различных стадиях моделирования. Это позволяет сократить перебор вариантов в ходе моделирования, за счет чего повышается эффективность и оперативность принятия решений по управлению гибкими дискретными системами в условиях меняющейся обстановки. Оперативный анализ контекстов дает возможность унифицировать контроль ошибок при описании пользователем структуры иерархической модели, подключении расчетных модулей и некорректном обращении к данным.

1. Основы концептуального моделирования

Принципиальная неполнота знаний о сложных системах как объектах исследования существенно ограничивает применимость классических аналитических моделей и требует использования интеллектуальных технологий и методов имитационного моделирования. Ситуация усложняется, если объект характеризуется структурной динамикой, которая может быть обусловлена как внутренними, так и внешними возмущающими воздействиями. При этом ставится задача обеспечения устойчивого функционирования (минимальной деградации) системы под действием возмущений различной природы [3]. Наиболее подходящей средой для решения подобных задач представляются системы моделирования на основе декларативной концептуальной модели предметной области. Например, ядром ССКМ является иерархическая концептуальная модель (ИКМ) пространственных динамических объектов (в частности, промышленно-природных комплексов (ППК)), предназначенная для декларативного задания и оценки различных альтернатив управленческих решений. ССКМ обеспечивает автоматизацию всех этапов моделирования таких объектов на основе совместной логико-аналитической обработки информации от ИКМ и интегрированных с ней геоинформационной и экспертной систем. Для использования ИКМ необходимо представить ППК в виде иерархии объектов (составных частей исследуемого ППК), отображающей организационную и пространственную структуру ППК, с каждым из объектов может быть связан набор процессов, которые описывают процедуры преобразования подмножества данных, входных по отношению к рассматриваемому процессу, в другое их подмножество, именуемое выходным. Данные характеризуют состояние системы. Они используются при реализации процессов, являются результатами их выполнения. Выполнение любого процесса изменяет данные и соответствует переходу системы из одного состояния в другое [1]. При наличии концептуальной модели, открытой для оперативной модификации, самостоятельную проблему составляет автоматизация контроля корректности процесса моделирования с учетом контекстных ограничений (например, на доступные ресурсы, их значения, на структуру модели, временные ограничения и т.п.), которые характеризуют предметную область, выбранные управленческие альтернативы, текущий шаг имитации и т.д. С целью исключения ошибок, обусловленных человеческим фактором, целесообразно возложить контроль корректности процесса моделирования на саму систему моделирования. Кроме того, управление сложными организационно-техническими объектами связано с анализом большого объема информации о характеристиках этих объектов и требует использования интеллектуальных методов снижения трудоемкости такого анализа. Тематике концептуального моделирования объектов различной природы посвящено много публикаций (см., например, [2, 4 - 6]). Системы концептуального моделирования изначально использовались для проектирования программных комплексов [4], затем область их применения пополнилась исследованиями организационно-технических объектов, в частности, природно-промышленных комплексов [2]. Основная цель создания подобных программных систем состоит в автоматизации всех этапов работы с ИКМ. Кратко поясним отличие ИКМ от простых вычислительных моделей [5], определяемых как совокупность переменных и частичных отношений между ними. Простые вычислительные модели позволяют эффективно синтезировать вычислительные процессы на основе заданных отношений лишь для простых ациклических последовательностей обработки.

Для автоматизации более сложных вычислений используются расширенные вычислительные модели, содержащие дополнительные механизмы управления (операторы цикла, условного перехода и т.п.). К числу современных вариантов реализации таких моделей можно отнести модели PowerSim. Один из самых существенных недостатков простых вычислительных моделей и их расширений заключается в том, что они описывают только способы преобразования данных (например, [7, 8]) и не позволяют производить структурную декомпозицию данных и процессов их обработки, поэтапно уточняя процесс преобразований. Далее рассмотрим ИКМ как средство преодоления этого недостатка. ИКМ представляют собой надстройку над простой или расширенной вычислительной сетью в том смысле, что на множествах процессов (функций) и потоков данных (переменных) дополнительно устанавливаются иерархические отношения "часть-целое". Это дает возможность, с одной стороны, поэтапно уточнять описание предметной области, а с другой стороны, - автоматически контролировать согласованность описаний исследуемого процесса на различных уровнях декомпозиции, анализируя различного рода структурные ограничения. На уровне интерпретации ИКМ обычно представляются двудольным ориентированным графом, в котором выделены два типа вершин: объекты (данные) и функции (процессы обработки данных). Дуги связывают объектные и функциональные вершины. Входящие в вершину-функцию дуги соотносят с ней объекты, которые выступают в качестве входных аргументов для функции, исходящие - указывают на объекты, в которые должна производиться запись вырабатываемых функцией результатов. Каждой объектной вершине сопоставляются тип и значение. С каждой функциональной вершиной связаны целое число, играющее роль приоритета, и тип. В рамках ССКМ на основе типизации элементов ИКМ исследуемого объекта разработаны процедуры проверки ее корректности (полнота, связность, разрешимость и т.д.). В результате, у пользователя имеется возможность оперативно (по мере уточнения знаний) вносить изменения в ИКМ или создавать модели различных объектов, а затем автоматически проверять их корректность. Однако в существовавших ранее системах концептуального моделирования все проверки корректности модели были жестко "зашиты"в специализированных программных процедурах, поэтому возникало несоответствие между "открытым"декларативным представлением ИКМ, допускающим оперативную модификацию ее структуры и подключение новых элементов из вычислительной среды, и процедурным вводом ограничений в систему. В частности, при переходе от одной предметной области к другой отсутствовала возможность "наращивать"набор ограничений для проверки корректности модели. Другими словами, основной недостаток рассматриваемого класса программных систем - "жесткая фиксация"ограничений в коде программы. Особенно остро этот недостаток систем концептуального моделирования стал ощущаться при переходе от задач синтеза компьютерных программ к задачам моделирования сложных организационно-технических систем, характеризующихся структурной динамикой, где появилась необходимость контроля корректности процесса имитации и выработки координирующих управляющих воздействий при детектировании возмущений. Для комплексного решения обозначенных проблем авторами предложен контекстно-ориентированный подход к управлению ограничениями в системах на основе ИКМ. Применение подхода позволяет оперативно активировать требуемые в текущий момент ограничения и, соответственно, значительно сократить перебор при анализе параметров ИКМ, а также дает возможность организовать контроль корректности всего процесса моделирования в рамках парадигмы "программирование в ограничениях". Реализация подхода проиллюстрирована на примере ССКМ.

2. Контекстное управление ограничениями

Понятие "контекст"используется в лингвистике, теории перевода, системном программном обеспечении (контекст задачи/процесса, контекст запроса), при изучении формальных языков и грамматик (контекстно-свободные и контекстно-зависимые языки), а также при разработке систем поддержки принятия решений [9]. В рамках информационных технологий контекст определяется как информация, конкретизирующая описание ситуации, в которой находится в данный момент исследуемый объект. В общем случае контекст позволяет определить, какая информация релевантна той или иной ситуации (для решения той или иной задачи). Учитывая направленность на интеллектуализацию технологий, контекст включает в себя не только информацию, но и знания, актуальные в текущей задаче. В ССКМ постановка задачи моделирования происходит поэтапно и начинается с описания исследуемой модели и интересующей ситуации с помощью концептов, принятых в системе моделирования. На уровне интерпретации ситуация - это фрагмент дерева ИКМ, дополненный значениями переменных модели. Исходной ситуацией называется конечный список фактов, вводимый пользователем при постановке задачи моделирования. На основе анализа исходной ситуации встроенная в ССКМ экспертная система (задавая при необходимости дополнительные вопросы пользователю) доопределяет исходную ситуацию до полной ситуации, которой соответствует связный фрагмент модели, возможно, включающий некоторые альтернативы. Достаточная ситуация получается из соответствующей ей полной ситуации путем выбора альтернатив, предпочтительных по результатам классификации ситуаций. Достаточные ситуации должны быть предварительно классифицированы по структурам реализации исследуемой системы и упорядочены внутри каждого класса по критерию доминирования вклада одного из скалярных критериев качества объекта, на котором находится ЛПР, в обобщенный критерий качества этого объекта. Контекстно-ориентированный подход к управлению ограничениями в ССКМ основывается на следующей классификации ограничений: 1) ограничения, которые описывают конструкции, допустимые в системе моделирования - ограничения системы моделирования; 2) ограничения, характерные для элементов (типов элементов) модели, которые используются в исследуемой предметной области - ограничения предметной области; 3) ограничения, присущие элементам (типам элементов), которые входят в данный фрагмент модели (ситуацию) - ограничения фрагмента модели; 4) ограничения на значения переменных, формируемые в процессе имитации в рамках заранее выбранного фрагмента модели - ограничения этапа имитации. Программно контекстно-ориентированное управление ограничениями осуществляется на уровне семантического интерфейса реляционных баз данных (БД) ССКМ. Разработанный семантический интерфейс реляционной БД обеспечивает возможность декларативного ввода в систему ограничений, контролирует корректность взаимодействия блоков модели, обеспечивая возможность отслеживать действия блоков модели над общими данными на основе анализа гибко модифицируемых и оперативно подгружаемых предметно-ориентированных ограничений. Применение реляционных баз данных обусловливается необходимостью сопровождать открытую модель предметной области и обеспечивать точность реализации запросов, как в фактографических информационных системах. Эти аспекты работы подробно освещены в [10]. Перечислим некоторые достоинства контекстно-ориентированного управления ограничениями в системах концептуального моделирования. 1. Возможность активировать только те контекстные ограничения, которые актуальны для исследуемой в текущий момент модели предметной области. Это позволяет гибко перенастраивать и оперативно анализировать как ограничения, общие для всего класса допустимых моделей, так и специфичные для конкретной предметной области (фрагмента модели, шага имитации), способствуя уменьшению трудоемкости решения задач. 2. На основе анализа контекстов на этапе построения модели обеспечивается более детальный контроль корректности ее структуры, состава и правильности подключения расчетных модулей. 3. На этапе имитации путем сопоставления незапланированных запросов и контекстных ограничений отслеживаются некорректные обращения к БД системы моделирования. Трансляция контекстных ограничений в запросы к БД системы моделирования обеспечивает возможность контролировать корректность данных моделирования путем оценки результатов запросов. Реляционная БД системы моделирования - это конечное множество таблиц, состоящих из схемы и конкретных данных, где схема - конечный набор атрибутов, причем каждому атрибуту соответствует множество значений, называемое доменом. Задача оценки запроса (точнее, конъюнктивного запроса) над БД соответствует конкретному примеру задачи удовлетворения ограничений [11]. Для ускорения исполнения запросов к БД они предварительно преобразуются с целью сужения области поиска за счет анализа внутренней структуры запроса. Такой анализ также сводится к решению задачи удовлетворения ограничений. Применение контекстно-ориентированного подхода к обработке ограничений позволило объединить преимущества ситуационного концептуального моделирования и программирования в ограничениях (constraints programming), а также реализовать эти преимущества при решении задач моделирования. Далее кратко обсуждаются особенности интеллектуальной технологии ситуационного концептуального моделирования сложных нестационарных объектов с иерархической структурой, использующей методы контекстно-ориентированного управления ограничениями и ориентированной на решение с единых позиций задач стратегического планирования, оперативного управления, а также автоматизации контроля корректности процесса моделирования.

3. Особенности предлагаемой технологии моделирования

Основные отличия методов контекстно-ориентированного управления при решении задач поддержки принятия решений в ССКМ от проблематики работ [4, 9] таковы: - в ходе классификации ситуаций необходимо подтвердить или опровергнуть гипотезу о соответствии поведения моделируемой системы и ее текущей модели. Если выявлено несоответствие, то нужно принять решение о выборе новой текущей модели из заданного набора моделей, отображающих различные возможные варианты изменения структуры моделируемой системы. Изменения могут быть вызваны как штатными, так и нештатными воздействиями на систему, в последнем случае требуется дополнительно определить меры по минимизации ущерба на основе известных методов [12]; - после выбора текущей модели требуется выявить предпочтения ЛПР по тенденции будущего поведения системы и предложить ему вариант(ы) изменения существующей структуры системы, в максимальной степени реализующие эти предпочтения, а также при необходимости провести имитацию предложенных вариантов. Другими словами, система моделирования должна обладать средствами оперативной (в процессе имитации) реконфигурации структуры модели для обеспечения ее катастрофоустойчивости [8]. Процедура инкрементного ситуационного моделирования с применением представленного контекстного подхода состоит из перечисленных ниже этапов [12]. 1. Мониторинг ситуации на моделируемой системе по обобщенному критерию качества [2] объекта, на котором находится ЛПР. 2. Детектирование изменений с учетом контекстных ограничений в целях выявления подобъекта, являющего первопричиной проблемы. 3. Классификация ситуации на проблемном объекте. 4. Выявление класса желательных ситуаций на этом объекте с точки зрения ЛПР. 5. Анализ чувствительности с целью поиска точек воздействия. 6. Выработка управляющих решений (с учетом контекстов). 7. Корректировка контекстов для поддержания их релевантности по отношению к текущей ситуации. При невозможности выбора единственной структуры на этапе выработки управляющих решений, имеющиеся альтернативы могут исследоваться в имитационном режиме согласно сценариям, представляющим собой последовательность достаточных ситуаций и определяющим конкретный вариант расчета. Описанные этапы моделирования обеспечивают решение задач стратегического и оперативного планирования. При стратегическом планировании в данном случае вырабатывается последовательность переключений между альтернативными вариантами структуры исследуемого объекта в зависимости от складывающейся на данном объекте обстановки. Задача же оперативного управления сводится к формированию управляющих воздействий внутри выбранной структуры при возникновении возмущений. Представленная интеллектуальная технология позволяет производить поиск аналогий при не полностью определенных ситуациях, исследовать вопросы координации управления с учетом организационной структуры объекта, автоматизировать генерацию моделей для решения новых задач управления объектом на основе частных моделей, созданных экспертами для составных частей объекта. Для обработки информации будут использоваться разрабатываемые с участием авторов матрицеподобные структуры и методы их логико-семантического анализа [13].

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 13-07-00318-а, 12-07-00689-а, 12-07-000550-а, 12-07-00302-а, 11-08-00641-а), Президиума РАН (проект 4.3 Программы № 15), ОНИТ РАН (проект 2.3 текущей Программы фундаментальных научных исследований).

Список литературы

1. Фридман А.Я., Фридман О.В. Ситуационное моделирование иерархической многоцелевой системы // Труды Всероссийской конференции "XXXV-ая Дальневосточная Математическая Школа-Семинар имени академика Е.В. Золотова"(Владивосток, 31 августа - 5 сентября 2010 г.). С. 892-898.

2. Фридман А.Я. Ситуационный подход к моделированию промышленно-природных комплексов и управлению их структурой. // Труды IV международной конференции "Идентификация систем и задачи управления". Москва, 25-28 января 2005 г. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова, Москва: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова, 2005 г. С. 1075-1108.
3. Boris Sokolov, Dmitry Ivanov, Alexander Fridman. Situational Modelling for Structural Dynamics Control of Industry-Business Processes and Supply Chains // Intelligent Systems: From Theory to Practice. SCI 299, / Vassil Sgurev, Mincho Hadjiski, Janusz Kacprzyk (Eds.). London: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. P. 279-308.
4. Бржезовский А.В. и др. Синтез моделей вычислительного эксперимента. СПб: Наука, 1992. 231 с.
5. Тыугу Э.Х. Концептуальное программирование. М.: Наука, 1984. 255 с.
6. Охтилев М.Ю., Соколов Б.В., Юсупов Р.М. Интеллектуальные технологии мониторинга и управления структурной динамикой сложных технических объектов. М.: Наука, 2006. 410 с.
7. Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. Лекции по теории сложных систем. М.: Сов.радио, 1993. 439 с.
8. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1993. 344 с.
9. Smirnov A., Levashova T., Shilov N. Context-Driven Decision Support for Megadisaster Relief // Journal of Emergency Management. Prime National Publishing Corporation, September/October, 2006. Vol. 4-5. P. 51-56.
10. Зуенко, А.А., Фридман А.Я. Контекстный подход в системах сопровождения открытых моделей предметной области // Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. №3. С.41-51.
11. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный подход, 2-е изд. М.: Издательский дом "Вильямс 2006. 1408 с.
12. Фридман А.Я., Фридман О.В., Зуенко А.А. Ситуационное моделирование природно-технических комплексов. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2010. 436 с.
13. Кулик Б.А., Зуенко А.А., Фридман А.Я. Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний. - СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 235 с.

УДК 517.58

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Д.Б. Карп
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
E-mail: dmkrp@yandex.ru

Ключевые слова: гипергеометрические функции, неравенства, вполне монотонные функции

В статье найдены условия полной монотонности обобщенной гипергеометрической функции вида ${}_qF_q$, доказана монотонность отношения таких функций со сдвинутыми параметрами, установлены двусторонние неравенства и лог-выпуклость по параметрам для этой функции. Кроме того, доказана логарифмическая полная монотонность функции ${}_{q+1}F_q$ при естественных ограничениях на параметры. В работе также приводится одна гипотеза и одна нерешенная задача.

Введение

В работах [6, 8] нами был получен ряд представлений, неравенств, свойств таблицы Паде и других результатов для обобщенной гипергеометрической функции типа ${}_{q+1}F_q$, которая является частным случаем функции [2, 11]

$$
{}_pF_q\left(\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\middle|\, z\right) = {}_pF_q\,(A;B;z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n\cdots(b_q)_n n!}z^n, \tag{1}
$$

где $A=(a_1,a_2,\ldots,a_p)$ и $B=(b_1,b_2,\ldots,b_q)$ - векторы параметров, а через $(a)_0=1$, $(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)$, $n\geqslant 1$, обозначен восходящий факториал. Ряд в (1) сходится во всех комплексной плоскости при $p\leqslant q$ и в единичном круге, когда $p=q+1$. В последнем случае сумма ряда обладает аналитическим продолжением в во всю комплексную плоскость с разрезом по лучу $[1,\infty)$. Основным инструментом исследований в [6, 8] служит обобщенное представление Стилтьеса

$$
{}_{q+1}F_q\left(\begin{matrix}\sigma, A\\B\end{matrix}\middle|\, -z\right) = \int\limits_0^1 \frac{d\rho(s)}{(1+sz)^{\sigma}}, \tag{2}
$$

где $d\rho$ - положительная мера, с плотностью (12). Подробности можно найти в [6, Theorem 2]. В статьях [4, 5, 9] среди прочего нами был доказан ряд утверждений о свойствах функций вида ${}_qF_q$, включая логарифмическую выпуклость и вогнутость по параметрам, неравенства для логарифмической производной и для определителей Турана. При этом отправной точкой для получения этих результатов служило представление (1). В данной заметке мы выведем некоторые свойства функции ${}_qF_q$ опираясь представление этой функции преобразованием Лапласа меры $d\rho$. Кроме того, во второй части работы будут представлены некоторые новые факты о полной монотонности функции ${}_{q+1}F_q$.

1. Неравенства для функции ${}_qF_q$

Нам понадобится частный случай G-функции Мейера, который можно определить интегралом

$$G^{q,0}_{p,q}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\dots,a_p\\ b_1,\dots,b_q\end{matrix}\right):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(b_1+s)\dots\Gamma(b_q+s)}{\Gamma(a_1+s)\dots\Gamma(a_p+s)}z^{-s}ds, \tag{3}$$

где $c>-\min(\Re b_1,\Re b_2,\dots,\Re b_q)$. В силу соотношения $\Gamma(\overline{z})=\overline{\Gamma(z)}$, функция $G^{q,0}_{p,q}$ действительнозначна, когда все параметры a_i, b_i и аргумент z действительны. Наиболее подробно об определении G-функции Мейера и более общей H-функции Фокса можно прочитать в [10, Chapters 1 and 2]. В данной работе мы будем использовать два свойства функции $G^{q,0}_{q,q}$, которые сформулируем в виде лемм. Определим

$$\psi:=\sum_{k=1}^{q}(b_k-a_k). \tag{4}$$

Лемма 1. *Положим $\Re(\psi)>0$. Тогда*

$$G^{q,0}_{q,q}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}B\\ A\end{matrix}\right)=0\quad\textit{при}\quad x>1. \tag{5}$$

Эта лемма доказана нами в [6, Lemma 1]. Формула (5) встречается и ранее в [15, формула (8.2.2.2)], но при более сильных ограничениях на параметры. В дальнейшем нам понадобится понятие мажоризации (см. [13, Definition A.2]).

Определение 1. *Будем говорить что вектор $A=(a_1,\dots,a_q)$ слабо мажорирует вектор $B=(b_1,\dots,b_q)$ сверху (записывается как $B\prec^W A$), если выполнены неравенства*

$$\begin{gathered}0<a_1\leqslant a_2\leqslant\dots\leqslant a_q,\quad 0<b_1\leqslant b_2\leqslant\dots\leqslant b_q,\\ \sum_{i=1}^{k}a_i\leqslant\sum_{i=1}^{k}b_i\quad\textit{для}\quad k=1,2\dots,q.\end{gathered} \tag{6}$$

Если дополнительно $\psi(=\sum_{i=1}^{q}(b_i-a_i))=0$, то вектор A мажорирует вектор B или $B\prec A$.

Следующая лемма, основанная на результате Альцера [1, Theorem 10], доказана нами в [6, Lemma 2].

Лемма 2. *Положим $\psi>0$ и $B\prec^W A$. Тогда при всех $0<s<1$ справедливо неравенство*

$$G^{q,0}_{q,q}\left(s\,\middle|\,\begin{matrix}B\\ A\end{matrix}\right)\geqslant 0. \tag{7}$$

Следующее представление для функции ${}_qF_q$ играет основную роль в этой заметке.

Лемма 3. *Положим* $\Re a_i > 0$ *для* $i = 1, \dots, q$ *и* $\Re\psi > 0$. *Тогда имеет место представление:*

$$ {}_qF_q\left(\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\,\middle|\, -z\right) = \prod_{i=1}^{q} \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)} \int_0^1 \frac{1}{s} G^{q,0}_{q,q}\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} B \\ A \end{matrix}\right) e^{-zs} ds. \qquad (8) $$

Доказательство этой леммы повторяет *mutatis mutandis* доказательство достаточности в [6, Theorem 2]. Представление (8) было ранее найдено в книге Киряковой [11] при более жестких ограничениях на параметры при помощи последовательного дробного интегрирования. Напомним, что бесконечно дифференцируемая на $(0, \infty)$ функция f называется вполне монотонной, если $(-1)^k f^{(k)}(x) \geqslant 0$ для всех целых неотрицательных k и любых $x > 0$ [17, Definition 1.3]. Согласно классической теореме Бернштейна, полная монотонность на $(0, \infty)$ равносильна тому, что f является преобразованием Лапласа неотрицательной меры [17, Theorem 1.4].

Теорема 1. *Пусть* $B \prec^W A$. *Тогда функция*

$$ x \to {}_qF_q\left(\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\,\middle|\, -x\right) $$

вполне монотонна на $(0, \infty)$.

Доказательство получается комбинацией Лемм 1,2 и 3 при $\psi > 0$. При $\psi = 0$ последовательность коэффициентов

$$ \left\{ \prod_{i=1}^{q} \frac{(a_i)_n}{(b_i)_n} \right\}_{n \geqslant 0} $$

также является последовательностью моментов неотрицательной меры согласно теореме Альцера [1, Theorem 10].

Теорема 2. *Пусть* $B \prec^W A$. *Тогда функция*

$$ f_\mu(x) := \frac{ {}_qF_q\left(\begin{matrix} A+\mu \\ B+\mu \end{matrix}\,\middle|\, -x\right) }{ {}_qF_q\left(\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\,\middle|\, -x\right) } $$

монотонно убывает на $\mathbf{R}$ *при каждом фиксированном* $\mu > 0$.

Доказательство теоремы 2.

Положим сначала $\psi > 0$. С учетом формулы [15, 8.2.2.15]

$$ G^{q,0}_{q,q}\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} B+\mu \\ A+\mu \end{matrix}\right) = s^\mu G^{q,0}_{q,q}\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} B \\ A \end{matrix}\right), \qquad (9) $$

непосредственным вычислением убеждаемся, что неравенство $f'_\mu(x) < 0$ равносильно неравенству

$$ \int_0^1 q(s)p(x;s)ds \int_0^1 h(s)p(x;s)ds < \int_0^1 q(s)h(s)p(x;s)ds \int_0^1 p(x;s)ds, $$

где

$$ p(x;s) = \frac{e^{-xs}}{s} G^{q,0}_{q,q}\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} B \\ A \end{matrix}\right), \qquad q(s) = s^\mu, \qquad h(s) = s. $$

Последнее неравенство справедливо согласно неравенству Чебышева [14, Chapter IX, formula (1.1)], поскольку $p(x;s)$ неотрицательна, а q и h монотонно возрастают на $(0,1)$. Результат распространяется на случай $\psi = 0$ по непрерывности.

Теорема 3. *Пусть $B \prec^W A$. Тогда справедливы неравенства*

$$\exp\left\{x\prod_{i=1}^{q}\frac{a_i}{b_i}\right\} < {}_qF_q\left(\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\middle| x\right) < \exp(x), \qquad x>0 \tag{10}$$

$$\exp\left\{x\prod_{i=1}^{q}\frac{a_i}{b_i}\right\} < {}_qF_q\left(\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\middle| x\right) < 1, \qquad x<0. \tag{11}$$

Доказательство теоремы 3.

Из асимптотической формулы [2, 16.11.7] для функции ${}_qF_q$ следуют соотношения

$$f_\mu(x) = \frac{\Gamma(a_1+\mu)}{\Gamma(a_1)}\prod_{i=1}^{q}\frac{\Gamma(b_i+\mu)\Gamma(a_i)}{\Gamma(a_i+\mu)\Gamma(b_i)}x^{-\mu}(1+o(1)), \qquad x\to\infty$$

и

$$f_\mu(x) = \prod_{i=1}^{q}\frac{\Gamma(b_i+\mu)\Gamma(a_i)}{\Gamma(a_i+\mu)\Gamma(b_i)}(1+o(1)), \qquad x\to-\infty$$

Здесь $f_\mu(x)$ определена в Теореме 2 и принято во внимание, что $a_1=\min(a_1,a_2,\ldots,a_q)$ по условию теоремы. Тогда по Теореме 2

$$f_\mu(0)=1<f_\mu(x)<\prod_{i=1}^{q}\frac{\Gamma(b_i+\mu)\Gamma(a_i)}{\Gamma(a_i+\mu)\Gamma(b_i)}=f_\mu(-\infty), \qquad x<0$$
$$f_\mu(\infty)=0<f_\mu(x)<1=f_\mu(0), \qquad x>0.$$

Далее, поскольку

$$\frac{d}{dx}{}_qF_q\left(\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\middle| x\right)=\prod_{i=1}^{q}\frac{a_i}{b_i}{}_qF_q\left(\begin{matrix}A+1\\B+1\end{matrix}\middle| x\right),$$

приведенные неравенства при $\mu=1$ можно переписать в виде

$$\prod_{i=1}^{q}\frac{a_i}{b_i}<\frac{d}{dx}\left[\log{}_qF_q\left(\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\middle| x\right)\right]<1, \qquad x>0,$$
$$0<\frac{d}{dx}\left[\log{}_qF_q\left(\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\middle| x\right)\right]<\prod_{i=1}^{q}\frac{a_i}{b_i}, \qquad x<0.$$

Интегрирование этих неравенств от 0 до x приводит к утверждению теоремы.
Замечание. Неравенства снизу в (10), (11) впервые получены Люком [12, Theorem 16] другим способом и при более сильных ограничениях $b_i\geqslant a_i$, $i=1,2,\ldots,q$. При таких же ограничениях в указанной статье Люка содержатся также неравенства сверху, которые лучше неравенств сверху в (10), (11). Неравенство сверху в (11) почти тривиально. Это связано с отсутствием нетривиальной оценки снизу для $f_\mu(x)$ при положительных x. Задача поиска такой оценки представляется поэтому интересной. Численные эксперименты свидетельствуют в пользу следующей гипотезы.
Гипотеза 1. При $x>0$ и $B\prec^W A$ справедлива следующая оценка снизу

$$\frac{1}{(1+\alpha x)^\mu}<f_\mu(x), \qquad \alpha=\left\{\frac{\Gamma(a_1+\mu)}{\Gamma(a_1)}\prod_{i=1}^{q}\frac{\Gamma(b_i+\mu)\Gamma(a_i)}{\Gamma(a_i+\mu)\Gamma(b_i)}\right\}^{-1/\mu}.$$

Теорема 4. *Положим $\psi>0$ и $B\prec^W A$. Тогда функция*

$$\mu\to{}_qF_q\left(\begin{matrix}A+\mu\\B+\mu\end{matrix}\middle| -x\right)$$

логарифмически выпукла на $(0,\infty)$ при любом фиксированном $x\in\mathbf{R}$.

Доказательство теоремы 4.

Действительно, представление (8) в сочетании с равенством (9) показывает, что функция из формулировки теоремы является интегралом от функции s^μ по неотрицательной мере. Утверждение теоремы теперь следует из того, что $\mu\to s^\mu$ лог-выпукла и интегрирование по неотрицательной мере сохраняет лог-выпуклость.

2. О полной монотонности функции ${}_{q+1}F_q$

Функция $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ называется логарифмически вполне монотонной, если $(-1)^k[\log f(x)]^{(k)}\geqslant 0$ при $k=1,2,\ldots$ или, другими словами, если функция $-(\log f)'$ вполне монотонна [3]. Класс логарифмически вполне монотонных функций строго у́же класса вполне монотонных функций и совпадает с классом функций, представляющая мера которых в теореме Бернштейна является бесконечно делимой [3, 16, 17]. Из представления (2) непосредственно следует, что функция ${}_{q+1}F_q(\sigma,A;B;-x)$ вполне монотонна на $(0,\infty)$, когда $B\prec^W A$ и $\sigma>0$. Этот факт можно дополнить следующим.

Теорема 5. *Пусть $B\prec^W A$ и $0<\sigma\leqslant 1$. Тогда функция $x\to x^{-\sigma}{}_{q+1}F_q(A;B;-1/x)$ логарифмически вполне монотонна на $(0,\infty)$.*

Доказательство теоремы 4.

Имеет место следующее представление

$$x^{-\sigma}{}_{q+1}F_q(\sigma,A;B;-1/x)=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int\limits_{[0,\infty)}e^{-ux}u^{\sigma-1}\left\{\int\limits_{[0,1]}e^{-ut}d\rho(t)\right\}du,$$

где $d\rho$ - положительная мера с плотностью (12). Далее, согласно [16, Th. 51.4] распределение бесконечно делимо если оно имеет лог-выпуклую плотность. Функция $u^{\sigma-1}\int\limits_{[0,1]}e^{-ut}d\rho(t)$ лог-выпукла при $0<\sigma\leqslant 1$, поскольку оба сомножителя лог-выпуклы (второй сомножитель вполне монотонный, а значит и лог-выпуклый). Таким образом, $x^{-\sigma}{}_{q+1}F_q(\sigma,A;B;-1/x)$ - преобразование Лапласа бесконечно делимой меры, а значит логарифмически вполне монотонно.

Утверждение Теоремы 5 ставит следующий вопрос: можно ли ослабить условия $B\prec^W A$ и $\sigma>0$, если потребовать лишь полной монотонности функции $x^{-\sigma}{}_{q+1}F_q(\sigma,A;B;-1/x)$ без требования логарифмически полной монотонности. Для изучения этого вопроса следующая лемма оказывается полезной.

Лемма 4. *Пусть $d\tau(s)$ - знакопеременная мера с носителем в $[0,\infty)$. Если $\int\limits_{[0,t)}d\tau(s)\geqslant 0$ при всех $t>0$, то $\int\limits_{[0,\infty)}e^{-xs}d\tau(s)\geqslant 0$ при всех $x>0$.*

Доказательство леммы получается интегрированием по частям. Мы опускаем детали. При $\psi>0$ мера $d\rho(s)$ в (2) имеет вид [6, Theorem 2]

$$d\rho(s)=\prod_{i=1}^{q}\frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)}G^{q,0}_{q,q}\left(s\,\middle|\,\begin{matrix}B-1\\A-1\end{matrix}\right)ds. \tag{12}$$

Тогда, по Лемме 4, вопрос о полной монотонности $x^{-\sigma}{}_{q+1}F_q(\sigma,A;B;-1/x)$ сводится к вопросу о неотрицательности интеграла $\int_0^x d\rho(s)$ при $x\in(0,1)$. Формула [15, 1.16.2.1] дает

$$\int\limits_0^x G^{q,0}_{q,q}\left(s\,\middle|\,\begin{matrix}B-1\\A-1\end{matrix}\right)ds=G^{q,1}_{q+1,q+1}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}1,B\\A,0\end{matrix}\right).$$

Вопрос о неотрицательности функции в правой части этого равенства эквивалентен вопросу об ограничениях на параметры A и B, гарантирующих, что последовательность

$$\prod_{i=1}^{q}\frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)}\int\limits_0^1 x^nG^{q,1}_{q+1,q+1}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}1,B\\A,0\end{matrix}\right)dx=\frac{1}{n+1}\left\{1-\prod_{k=1}^{q}\frac{(a_k)_{n+1}}{(b_k)_{n+1}}\right\},\quad n=0,1,\ldots,$$

является последовательностью моментов Хаусдорфа.

Список литературы

1. H. Alzer, On some inequalities for the gamma and psi functions, Mathematics of Computation, Volume 66, Number 217(1997), 373–389.
2. R.A. Askey and A.B. Olde Daalhuis, Generalized Hypergeometric Functions and Meijer G-Function, Chapter 16, pp.403–419, NIST Handbook of Mathematical Functions (edited by F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark), Cabridge University Presss, 2010.
3. C. Berg, Integral Representation of Some Functions Related to the Gamma Function, Mediterranean Journal of Mathematics, 1 (2004), 433–439.
4. S.I. Kalmykov and D.B. Karp, Log-concavity for series in reciprocal gamma functions and applications, Integral Transforms and Special Functions, article in press, 2013.
5. S.I. Kalmykov and D.B. Karp, Log-convexity and log-concavity for series in gamma ratios and applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 406(2013), 400–418.
6. D. Karp and E. Prilepkina, Hypergeometric functions as generalized Stieltjes transforms, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 393, Issue 2(2012), 348–359.
7. D. Karp and E. Prilepkina, Generalized Stieltjes functions and their exact order, Journal of Classical Analysis, 2012, Volume 1, Number 1(2012), 53–74.
8. D. Karp and S.M. Sitnik, Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function, Journal of Approximation Theory 161(2009), 337–352.
9. D. Karp and S.M. Sitnik, Log-convexity and log-concavity of hypergeometric-like functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 364(2010), 384–394.
10. A.A. Kilbas, M. Saigo, H-transforms and applications, Analytical Methods and Special Functions, Volume 9, Chapman & Hall/CRC, 2004.
11. V.S. Kiryakova, Generalized Fractional Calculus and Applications, Pitman Research Notes in. Math. Series No. 301, Longman Group UK Ltd., 1994.
12. Y. L. Luke, Inequalities for generalized hypergeometric functions, Journal of Approximation Theory, 5(1972), 41–65.
13. A.W. Marshall, I. Olkin and B.C. Arnold, Inequalities: Theory of Majorization and Its applications, second edition, Springer, 2011.
14. D.S. Mitrinović, J.E. Pecarić, A.M. Fink, Classical and new inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, 1993.
15. A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov and O.I. Marichev Integrals and series, Volume 3: More Special Functions, Gordon and Breach Science Publishers, 1990.
16. K. Sato, Lévy processes and infinitely divisible distributions, Cambridge University Press, 1999.
17. R.L. Schilling, R. Song Z. Vondraček, Bernstein Functions. Theory and Applications, Walter de Gruyter, Studies in Mathematics, 37, 2010.

УДК 621.3

ДИАГНОСТИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

П.В. Кац
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 5
E-mail: pkatz@dvo.ru

Н.В. Киншт
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 5
E-mail: kin@dvo.ru

Ключевые слова: диагностика электрических цепей, отождествление параметров

Одной из актуальных задач является диагностика электрических цепей. В данной статье рассматривается один из методов диагностики, использующий отождествление однотипных параметров схемы. Такое отождествление позволяет выделить неизвестные из уравнения в явном виде, что заметно снижает трудоемкость вычислений.

Одним из подходов к диагностике электрических цепей (ЭЦ) явилось представление диагностируемой ЭЦ в виде многополюсника с (частично) доступными узлами, параметры которого подлежат определению. В качестве диагностической модели ЭЦ примем ее матрицу контурных сопротивлений – $\mathbf{Z}_k$, и, соответственно, основное уравнение для анализа электрического режима имеет вид:

$$\mathbf{Z}_{\text{K}}\Delta\mathbf{I} = \Delta\mathbf{E},$$

где $\Delta\mathbf{I} = col[I_1 \dots I_m]$ – вектор (изменения) контурных токов,
$\Delta\mathbf{E} = col[U_1 \dots U_m]$ – вектор (изменения) контурных источников напряжений,
$\mathbf{Z}_{\text{K}} = \begin{bmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix}$ – квадратная матрица контурных сопротивлений. Для восстановления этой матрицы необходимо провести n экспериментов, варьируя источники напряжения и измеряя токи ветвей. В ряде задач диагностирования ЭЦ имеется возможность отождествить некоторые из искомых параметров между собой.

Так, применительно к интегральным микросхемам (ИМС) можно принять гипотезу о том, что в рамках одной схемы некоторые неизвестные параметры равны либо пропорциональны между собой. Здесь предполагается, что элементы, изготовленные в ходе единого технологического процесса, будут иметь сходные характеристики, хотя различные партии элементов могут иметь отличия. В этом случае количество неизвестных, и, соответственно, количество необходимых измерений (или режимов) сокращается. Возможности такой процедуры рассмотрим на примере диагностирования нелинейной ЭЦ с применением кусочно-линейной аппроксимации характеристик её нелинейных элементов. При выполнении условий разрешимости такая задача сведется к нахождению всех токов и напряжений. Для примера диагностирования выберем ИМС (рис. 1), построенную на принципе транзисторно-транзисторной логики (ТТЛ). Испытания данной схемы представляют собой измерение её доступных

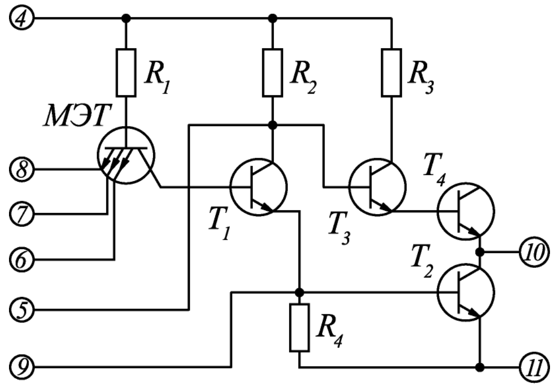


Рис. 1. Схема ТТЛ

параметров режима в определенных стандартных включениях. А именно: измерение входных токов и выходных напряжений при подаче на вход 1 или 0. Для дальнейших расчетов вводится схема замещения транзистора, приведенная на рис. 2. На

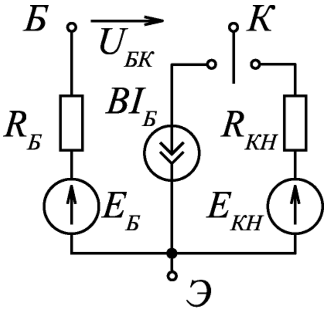


Рис. 2. Схема замещения транзистора

схеме замещения введены следующие обозначения:
$E_{\text{КН}}, R_{\text{КН}}$ – эквивалентные ЭДС и динамическое сопротивление в схеме замещения цепи коллектор-эмиттер в режиме насыщения,
B – статический коэффициент усиления,
$E_{\text{Б}}, R_{\text{Б}}$ – ЭДС и динамическое сопротивление в цепи база-эмиттер в режиме малых либо больших токов. Режимы работы данной схемы описываются следующими уравнениями:
$U_{\text{КЭ}} = E_{\text{КН}} + R_{\text{КН}} I_{\text{К}}, I_{\text{К}} \leqslant B I_{\text{К}}$ – режим насыщения,
$U_{\text{КЭ}} \geqslant E_{\text{КН}} + R_{\text{КН}} I_{\text{К}}, I_{\text{К}} = B I_{\text{К}}$ – активный режим (включает в себя режим отсечки). Для примера выберем состояние ИМС, когда на все три логических входа подается высокий уровень сигнала. После некоторых преобразований, схема замещения примет следующий вид: Известными считаем следующие параметры элементов

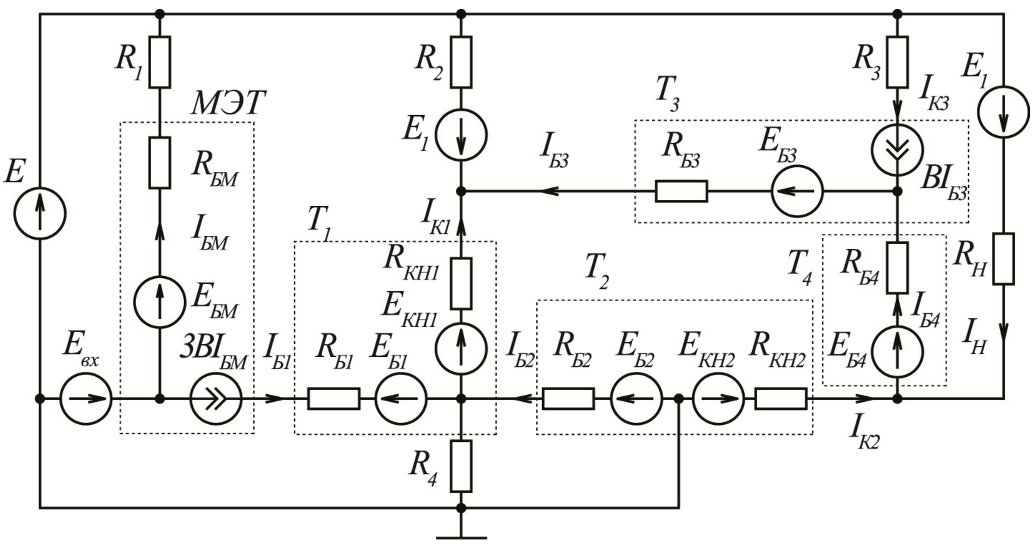


Рис. 3. Схема ТТЛ с эквивалентным замещением транзисторов

ЭЦ:

$$R_1 = 4\text{ кОм}; R_2 = 1.6\text{ кОм}; R_3 = 130\text{ Ом}; R_4 = 1\text{ кОм};$$
$$E_1 = 5\text{ В}; E_{\text{вх}} = 4\text{ В}; R_{\text{Н}} = 1\text{ В}; B = 100; B_{\text{инв}} = 0.05;$$
$$E_{\text{БМ}} = E_{\text{Б1}} = E_{\text{Б2}} = E_{\text{Б3}} = E_{\text{Б4}} = E_{\text{Б}} = 0.7\text{ В};$$
$$E_{\text{КН1}} = E_{\text{КН2}} = E_{\text{КН}} = 0.1\text{ В}.$$

Составим матрицу контурных сопротивлений системы с учетом управляемых источников тока:

$$\mathbf{Z}_{\text{К}} = \begin{bmatrix} R_1 + R_{\text{БМ}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3B_{\text{инв}}R_4 & \begin{array}{c} R_2 + R_{\text{КН1}} + \\ +R_4 \end{array} & R_2 & -R_4 & 0 \\ 0 & R_2 & \begin{array}{c} R_2 + R_{\text{Б3}} + \\ +R_{\text{Б4}} + R_{\text{Н}} + \\ +BR_{\text{Б4}} + BR_{\text{Н}} \end{array} & 0 & -R_{\text{Н}} \\ -3B_{\text{инв}}R_4 & -R_4 & 0 & R_{\text{Б2}} + R_4 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{\text{Н}} - BR_{\text{Н}} & 0 & R_{\text{КН2}} + R_{\text{Н}} \end{bmatrix},$$

где R_n – сопротивление соответствующих элементов. Основываясь на принципе отождествления параметров активных элементов в рамках одной схемы допустим, что параметры транзисторов одинаковы. Это дает возможность получить следующие соотношения:

$$R_{\text{КН1}} = R_{\text{КН2}} = R_{\text{КН}};\ 3R_{\text{БМ}} = R_{\text{Б1}} = R_{\text{Б2}} = R_{\text{Б3}} = R_{\text{Б4}} = R_{\text{Б}}$$

. Далее представим матрицу $\mathbf{Z}_{\text{К}}$ в следующем виде:

$$\mathbf{Z}_{\text{К}} = \mathbf{Z_0} + R_{\text{Б}}\mathbf{A}_1 + B\mathbf{A}_2 + B_{\text{инв}}\mathbf{A}_3 + R_{\text{КН}}\mathbf{A}_4 + BR_{\text{Б}}\mathbf{A}_5,$$

где $\mathbf{Z}_0$ – матрица известных сопротивлений,
$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5$ – матрицы вхождения неизвестных в общую матрицу контурных сопротивлений. Таким образом, получим основное уравнение в виде:

$$(\mathbf{Z_0} + R_{\text{Б}}\mathbf{A}_1 + B\mathbf{A}_2 + B_{\text{инв}}\mathbf{A}_3 + R_{\text{КН}}\mathbf{A}_4 + BR_{\text{Б}}\mathbf{A}_5)\Delta\mathbf{I} = \Delta\mathbf{E}$$

Для нахождения пяти неизвестных из этого уравнения в общем случае требуется проведение пяти численных экспериментов, однако в данном случае, как будет показано ниже, достаточно и одного. Для примера расчета реакции контурных токов проведем два эксперимента, изменив входное напряжение, и получив соответствующие реакции контурных токов:

$$\Delta\mathbf{E}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \Delta\mathbf{I}_\text{К}=Z_\text{К}^{-1}\Delta\mathbf{E}=\begin{bmatrix}4.84\cdot10^{-5} & 2.42\cdot10^{-5}\\ -1.09\cdot10^{-6} & -5.45\cdot10^{-7}\\ 3.56\cdot10^{-8} & 1.78\cdot10^{-8}\\ 4.41\cdot10^{-6} & 2.20\cdot10^{-6}\\ 3.36\cdot10^{-6} & 1.68\cdot10^{-6}\end{bmatrix}.$$

Преобразуем основное уравнение таким образом, чтобы неизвестные остались в левой части равенства:

$$\mathbf{A_1}\Delta IR_\text{Б}+\mathbf{A_2}\Delta IB+\mathbf{A_3}\Delta IB_\text{инв}+\mathbf{A_4}\Delta IR_\text{КН}+\mathbf{A_5}\Delta IBR_\text{Б}= \\ =\mathbf{E}-\mathbf{Z}_0\Delta I$$

Подставив имеющиеся числовые значения, получим:

$$\begin{bmatrix}1.61\cdot10^{-5} & 8.07\cdot10^{-6}\\ 0 & 0\\ 7.11\cdot10^{-8} & 3.56\cdot10^{-8}\\ 4.41\cdot10^{-6} & 2.20\cdot10^{-6}\\ 0 & 0\end{bmatrix}R_\text{Б}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 3.56\cdot10^{-5} & 1.78\cdot10^{-5}\\ 0 & 0\\ -3.56\cdot10^{-5} & -1.78\cdot10^{-5}\end{bmatrix}B+$$
$$+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0.15 & 0.07\\ 0 & 0\\ -0.15 & -0.07\\ 0 & 0\end{bmatrix}B_\text{инв}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1.09\cdot10^{-6} & -5.45\cdot10^{-7}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}R_\text{КН}+$$
$$+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 3.56\cdot10^{-8} & 1.78\cdot10^{-8}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}BR_\text{Б}=\begin{bmatrix}6.45\cdot10^{-3} & 3.23\cdot10^{-3}\\ 7.19\cdot10^{-3} & 3.59\cdot10^{-3}\\ 5.01\cdot10^{-3} & 2.50\cdot10^{-3}\\ -5.50\cdot10^{-3} & -2.75\cdot10^{-3}\\ 3.32\cdot10^{-3} & -1.66\cdot10^{-3}\end{bmatrix}.$$

Из полученных данных видно, что было достаточно проведения единственного эксперимента. В результате получим следующие значения параметров элементов:

$$R_\text{Б}=400\ \text{Ом}; R_\text{КН}=70.08\ \text{Ом}; B=93.39; \\ B_\text{инв}=0.05; BR_\text{Б}=37356\ \text{Ом}.$$

Подводя итог, следует отметить, что принцип отождествления позволяет сократить число неизвестных параметров с девяти до пяти. Это позволяет решить задачу с помощью меньшего количества тестовых измерений и сократить количество требуемых вычислений. Далее, сравнивая полученные значения с ожидаемыми, можно определить, в каком состоянии находится диагностируемая ЭЦ.

Список литературы

1. Кинчт Н. В., Герасимова Г. Н., Кац М. А. Диагностика электрических цепей. М.: Энергоатомиздат, 1983. – 192 с.
2. Бутырин П. А., Васьковская Т. А. Диагностика электрических цепей по частям. Теоретические основы и компьютерный практикум: Учебное пособие. М.: Издательство МЭИ, 2003. – 112 с.
3. Кинчт Н. В., Кац М. А., Петрунько Н. Н. О двух концепциях в теории диагностики электрических цепей. Электричество, № 9, 2012.

УДК 517.54

О ГРАНИЧНОМ ИСКАЖЕНИИ ПРИ КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

В.Ю. Ким
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8
E-mail: kimv@mail.primorye.ru

Ключевые слова: конденсаторы, конформная емкость, мероморфные функции, однолистные функции, граничное искажение, угловая производная.

Методами теории потенциала доказывается теорема о граничном искажении при отображении голоморфными однолистными в круге функциями.

Пусть функция f голоморфна и однолистна в круге $U = \{z : |z| < 1\}$, $f(0) = 0$, $f(U) \subset U$ и для всех точек z некоторого компакта E на окружности $|z| = 1$ существуют угловые пределы $f(z)$, $|f(z)| = 1$. Следующее неравенство восходит к работам Комату [1] и Померенке [2]:

$$\operatorname{cap} f(E) \geqslant |f'(0)|^{-1/2} \operatorname{cap} E.$$

Здесь $\operatorname{cap}(\cdot)$ означает логарифмическую емкость. Известно, что $\operatorname{cap} E = \lim_{n\to\infty} d_n(E)$, где $d_n(E)$ – n-ый диаметр E:

$$d_n(E) = \max_{z_k, z_l \in E} \left\{ \prod_{k=1}^{n} \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} |z_k - z_l| \right\}^{\frac{1}{n(n-1)}}, \quad n \geqslant 2.$$

В данном сообщении устанавливается неравенство, из которого вытекает, в частности, что, если модуль угловой производной f ограничен сверху на множестве E константой M, то

$$d_n(f(E)) \geqslant \frac{d_n(E)}{|f'(0)|^{\frac{n}{2(n-1)}} M^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Список литературы

1. Y. Komatu Über eine Verschärfung des Löwnerschen Hilfssatzes // Proc. Imperial Acad. Japan. 1942. Vol. 18, no. 7 P. 354–359.
2. Ch. Pommerenke Boundary behaviour of conformal maps. Berlin. Springer-Verlag. 1992.

УДК 539.37+514

ОБОБЩЕННЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАК АСИМПТОТИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ

В.Ю. Королев
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 52, 2-й учебный корпус, ВМК
E-mail: ms@cs.msu.su

Ключевые слова: гамма-распределения, асимптотические аппроксимации

В докладе в качестве более гибкой альтернативы часто (и успешно) применяемым в практических исследованиях обобщенным гиперболическим распределениям рассматривается класс обобщенных дисперсионных гамма-распределений и дается теоретическое обоснование использованию его представителей в качестве асимптотических аппроксимаций при решении практических задач.

В статье [1] введено семейство *обобщенных дисперсионных гамма-распределений.* Функции распределения этого семейства имеют вид

$$W(x; a, \sigma, \nu, \kappa, \delta) = \int\limits_0^\infty \Phi\left(\frac{x - au}{\sigma\sqrt{u}}\right) f(u; \nu, \kappa, \delta) du, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения, а $f(u; \nu, \kappa, \delta)$ – плотность обобщенного гамма-распределения,

$$f(x; \nu, \kappa, \delta) = \begin{cases} \dfrac{|\nu|}{\delta\Gamma(\kappa)} \Big(\dfrac{x}{\delta}\Big)^{\kappa\nu - 1} \exp\Big\{ -\Big(\dfrac{x}{\delta}\Big)^{\nu}\Big\}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{2}$$

с параметрами $\nu \in \mathbb{R}$, κ, $\delta \in \mathbb{R}^+$, отвечающими соответственно за *степень, форму и масштаб*, где $\Gamma(\kappa)$ – эйлерова гамма-функция. Семейство обобщенных гамма-распределений (2), описанное в работе [2], включает в себя практически все наиболее популярные абсолютно непрерывные распределения, сосредоточенные на неотрицательной полупрямой. В докладе приводится общая теорема о необходимых и достаточных условиях сходимости распределений сумм случайного числа независимых одинаково распределенных случайных величин к однопараметрическим сдвиг-масштабным смесям нормальных законов. В качестве следствия получены необходимые и достаточные условия сходимости распределений случайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин к обобщенным дисперсионным гамма-распределениям. Для частного случая – специальных случайных блужданий с непрерывным временем, порожденных обобщенными дважды стохастическими пуассоновскими процессами, – приведены оценки скорости этой сходимости.

Указанные предельные теоремы позволяют обосновать многие популярные модели неоднородных хаотических процессов, протекающих в сложных системах, имеющие вид дисперсионно-сдвиговых смесей нормальных законов типа (1). При этом смешивающее обобщенное гамма-распределение в модели (1) естественно связывается с флуктуациями интенсивностей потоков информативных событий. Основываясь на описываемых в докладе аналитических и асимптотических свойствах представителей семейства обобщенных гамма-распределений и предельных теоремах для сумм независимых случайных величин как теоретико-вероятностной формализации принципа неубывания неопределенности в сложных системах [3], можно утверждать, что семейство обобщенных дисперсионных гамма-распределений является *практически* универсальным для многих прикладных задач.

Список литературы

1. *Королев В. Ю., Соколов И. А.* Скошенные распределения Стьюдента, дисперсионные гамма-распределения и их обобщения как асимптотические аппроксимации // Информатика и ее применения, 2012. Т. 6. Вып. 1. С. 2–10.
2. *Stacy E. W.* A generalization of the gamma distribution // Annals of Mathematical Statistics, 1962. Vol. 33. P. 1187–1192.
3. *Gnedenko B. V., Korolev V. Yu.* Random Summation: Limit Theorems and Applications. – Boca Raton: CRC Press, 1996.

УДК 681.3.06+519.68

ОБ ОПЕРАТОРЕ ТРАНСЛЯЦИИ

С.В. Крутикова
ВЦ ДВО РАН
Россия, 680000, Хабаровск, Ким Ю Чена 65
E-mail: KrutikovaSV@gmail.com

А.А. Каширин
ВЦ ДВО РАН
Россия, 680000, Хабаровск, Ким Ю Чена 65
E-mail: elomer@mail.ru

Е.Р. Кириченко
ВЦ ДВО РАН
Россия, 680000, Хабаровск, Ким Ю Чена 65
E-mail: Kirichenko@ccfebras.ru

Ключевые слова: интегральные уравнения, быстрые методы, оператор трансляции, FMM

В статье описывается реализация метода граничных интегральных уравнений с использованием быстрых методов семейства FMM (Fast Multipole Method). Особое внимание уделено реализации оператора трансляции. Рассматриваются прямой метод вычисления коэффициентов и интегральная форма оператора трансляции.

Введение

Научные вычисления являются сложной прикладной задачей, требующей различного рода программно - прикладных средств и большого опыта. Но для решения реальных практических задач также требуются и быстрые алгоритмы, способные обеспечивать требуемую точность решения за приемлемое время. Среди подобных задач выделим задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца. Одним из методов, успешно применяемых для ее решения, является метод граничных интегральных уравнений. Была поставлена и решена задача реализации данного метода с использованием быстрых методов решения семейства FMM (Fast Multipole Method) [1] в параллельной среде исполнения на кластере ВЦ ДВО РАН [2].

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с ортогональной системой координат $ox_1x_2x_3$. Пусть в этом пространстве имеется замкнутая поверхность Γ, разделяющая его на внутреннюю область Ω_i и внешнюю область $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{\Omega}_i$. Сформулируем исходную внешнюю задачу Дирихле. [3] **Задача 1.** Найти функцию $u_e(x) \in H^1(\Omega_e)$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца

$$\Delta u_e + k_e^2 u_e = 0, \quad x \in \Omega_e, \tag{1}$$

граничному условию

$$\gamma u_e(x) = f(x), \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

и условию излучения на бесконечности

$$\partial u_e/\partial |x| - ik_e u_e = o(|x|^{-1}), \quad |x| \to \infty. \tag{3}$$

Здесь $\Delta = \nabla^2$ — оператор Лапласа, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, k_e — волновое число, $\mathrm{Im}(k_e) \geqslant 0$, γu — след на Γ функции u из $H^1(\Omega_e)$,$f \in H^{1/2}(\Gamma)$ — известная функция. Решение задачи 1 будем искать в виде потенциала простого слоя

$$u_e(x) = (S_e q_e)(x) \equiv \langle G_e(x, \cdot), q_e \rangle_\Gamma, \quad x \in \Omega_e, \tag{4}$$

$$G_e(x, y) = \exp(ik_e|x - y|)/(4\pi|x - y|). \tag{5}$$

Ядром данного интегрального оператора являются фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, поэтому u_e удовлетворяет уравнению (1) и условию излучения (3). Эта функция будет решением задачи 1, если подобрать плотность q_e так, чтобы u_e удовлетворяла граничному условию (2). Таким образом, задача 1 сводится к граничному тождеству

$$\langle S_e q_e, \mu \rangle = \langle f, \mu \rangle_\Gamma \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{6}$$

Оператор в левой части (6) представляет собой интегральный оператор Фредгольма I рода со слабой особенностью в ядре. Применяемый метод численного решения представляет собой развитие методики, предложенной и впервые апробированной в работе [4]. Кратко опишем общую схему его реализации. Построим покрытие поверхности Γ системой $\{\Gamma_m\}_{m=1}^M$ окрестностей узловых точек $x'_m \in \Gamma$, лежащих внутри сфер радиусов h_m с центрами в x'_m, и обозначим через $\{\varphi_m\}$ подчиненное ему разбиение единицы. В качестве φ_m будем использовать функции

$$\varphi_m(x) = \varphi'_m(x) \left(\sum_{k=1}^{M} \varphi'_k(x) \right)^{-1}, \qquad \varphi'_m(x) = \begin{cases} \left(1 - r_m^2/h_m^2\right)^3, & r_m < h_m, \\ 0, & r_m \geqslant h_m, \end{cases}$$

где $x \in \Gamma$, $r_m = |x - x'_m|$, $\varphi_m \in C^1(\Gamma)$ при $\Gamma \in C^{r+\beta}$, $r + \beta > 1$. Приближенные решения будем искать на сетке $\{x_m\}$,

$$x_m = \frac{1}{\bar{\varphi}_m} \int_\Gamma x \varphi_m d\Gamma, \quad \bar{\varphi}_m = \int_\Gamma \varphi_m d\Gamma,$$

узлами которой являются центры тяжестей функций φ_m. Будем предполагать, что для всех $m = 1, 2, \ldots, M$ выполняются неравенства

$$0 < h' \leqslant |x_m - x_n|, \ \ m \neq n, \ \ n = 1, 2, \ldots, M,$$
$$h' \leqslant h_m \leqslant h, \ \ h/h' \leqslant q_0 < \infty,$$

где h, h' – положительные числа, зависящие от M, q_0 не зависит от M. Вместо заданной на Γ неизвестной функции q будем искать обобщенную функцию $q\delta_\Gamma$, действующую по правилу

$$(q\delta_\Gamma, \eta)_{\mathbb{R}^3} = \langle q, \eta \rangle_\Gamma \quad \forall \eta \in H^1(\mathbb{R}^3).$$

Приближать эту функцию будем выражением

$$q\,(x)\,\delta_{\Gamma}\,(x) \approx \sum_{n=1}^{M} q_n \bar{\varphi}_n \psi_n(x),$$

где q_n – неизвестные коэффициенты, $\psi_n(x) = (\pi\sigma_n^2)^{-3/2} \exp\left(-(x-x_n)^2/\sigma_n^2\right)$, $\sigma_n^2 = 0.5\bar{\varphi}_n$. После того, как решение уравнения найдено, для восстановления решения функции u в точке $y \in \Omega_e$ достаточно посчитать сумму следующего вида:

$$u(y) = \sum_{n=1}^{M} G(y, x_n) \cdot \bar{\varphi}_n \cdot q_n, \quad x_n \in \Gamma. \tag{7}$$

Наиболее ресурсоемкой частью вычислений при решении интегральных уравнений является матрично-векторное умножение. В этом случае, необходимо заменять его на более экономичную схему, которая бы учитывала конкретные особенности задачи. Подобное решение предлагают быстрые методы. Для восстановления решения краевой задачи по уже известным решениям интегральных уравнений используют семейство методов FMM.

2. Описание метода

Особенностью метода Single level FMM является появление *оператора трансляции*, необходимого для вычисления взаимодействия между блоками. С помощью данного метода сумму (7) можно посчитать в виде:

$$u(y_\beta) = \sum_{x_\alpha \in R_n^+} Q_\alpha G(y_\beta - x_\alpha) + \sum_{x_{n*}^{(s)}} u_n(y_\beta), \quad y_\beta \in R_n. \tag{8}$$

Здесь

$$u_n(y) = \sum_{n'=0}^{p-1} \sum_{m'=-n'}^{n'} C_{n'}^{(nm)m'} R_{n'}^{m'}(y - y_{m*}^{(r)}), \quad n = 1, \ldots, K_s. \tag{9}$$

Коэффициенты $C_{n'}^{(nm)m'}$ могут быть найдены с использованием *оператора трансляции $S|R$ типа* [1]:

$$C_{n'}^{(nm)m'} = (S|R)(t_{nm}) C_{n'}^{(n)m'}, \quad t_{nm} = y_{m*}^{(r)} - x_{n*}^{(s)}.$$

3. Оператор трансляции

Для решения уравнения Гельмгольца коэффициенты оператора трансляции будем искать в виде разложения функций $S_n^m(\mathbf{t})$:

$$(S|R)_{n'n}^{m'm}(\mathbf{t}) = \sum_{n''=0}^{\infty} \sum_{m''=-n''}^{n''} (s|r)_{n''n'n}^{m''m'm}(\mathbf{t}) S_{n''}^{m''}(\mathbf{t}). \tag{10}$$

Коэффициенты $(s|r)$ назовем структурными коэффициентами трансляции. Существуют несколько способов реализации вычислений оператора трансляции: прямой метод, в интегральной форме, диагонализация оператора трансляции и некоторые другие [5]. В рамках данной статьи рассматриваются первые два метода.

3.1. Прямой метод вычисления оператора трансляции

Структурные коэффициенты $(s|r)^{m''m'm}_{n''n'n}$ будем находить численно. Не вдаваясь в подробности, отметим, что они связаны с *коэффициентами Клебша-Жордана* [6] или *символом Вигнера* [1]. Символ Вигнера может быть посчитан как

$$E\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m \\ j_1 & j_2 & j \end{pmatrix} = 4\pi\left[\frac{4\pi}{(2j+1)(2j_1+1)(2j_2+1)}\right]^{1/2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\times\int\limits_0^{\pi} Y_j^m(\theta,\varphi)Y_{j_1}^{m_1}(\theta,\varphi)Y_{j_2}^{m_2}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta. \quad (11)$$

С учетом этих определений можем найти структурные коэффициенты трансляции с использованием символа Вигнера:

$$(s|r)^{m''m'm}_{n''n'n} = \left[\frac{(2n+1)(2n'+1)(2n''+1)}{4\pi}\right]^{1/2} i^{n'+n''-n} E\begin{pmatrix} m & -m' & -m'' \\ n & n' & n'' \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Подставляя данные соотношения в (10) найдем значения коэффициентов трансляции. При численном расчете коэффициентов трансляции данным методом сложность вычислений составит $O(p^4)$, где p – число слагаемых при аппроксимации. Поэтому прямой метод вычисления коэффициентов трансляции на практике не используется.

3.2. Метод вычисления оператора трансляции в интегральной форме

С помощью данного метода можно найти коэффициенты оператора трансляции по формуле

$$(S|R)^{mm'}_{nn'}(\mathbf{t}) = \sum_{n''=0}^{p}(2n''+1)i^{n''}h_{n''}(k\mathbf{t})i^{n-n'}\int\limits_{S_u} P_n\left(\frac{\mathbf{t}\cdot\mathbf{s}}{t}\right)Y^{m'}_{n'}(\mathbf{s})Y^{-m}_{n}(\mathbf{s})dS(\mathbf{s}). \quad (13)$$

Метод вычисления коэффициентов оператора трансляции в интегральной форме является более быстрым по сравнению с прямым методом. Его сложность составляет $O(p^3)$. Поэтому данный метод пригоден к использованию на практике. Существует ряд методов, позволяющих высчитывать коэффициенты трансляции быстрее, например, метод диагонализации трансляций, имеющий асимптотическую сложность $O(p^2)$ [5]. Однако применимость подобных методов не всегда оправдана.

4. Результаты работы

Важным аспектом работы является оператор трансляции в методе SLFMM, так как именно на его вычисление расходуются основные ресурсы программы. Реализованные методы FMM выполняются несколько медленее исходного метода при одинаковой погрешности. Данный факт отображен на рис. 1. Рассмотрим рис. 1. Видим, что время вычислений в значительной степени зависит от выбора метода реализации оператора трансляции. При вычисление коэффициентов прямым методом скорость работы программы примерно в 1.5 раза ниже, чем в случае с интегральной

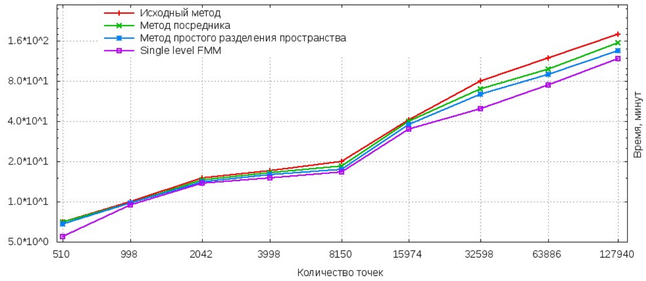


Рис. 1. Сравнение скорости вычислений

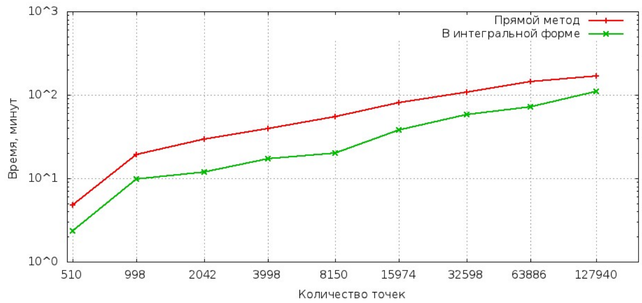


Рис. 2. Сравнение скорости вычислений при различных методах реализации оператора трансляции

формой оператора. Расчеты для графиков были выполнены на сетке внешней области, в качестве волнового числа выбиралось $k = 20$. Теперь сравним погрешность вычислений при одинаковой скорости расчетов:

Таблица 1. Погрешности вычислений задачи 1, волновое число k=4

Число точек	**Исходный метод**	**FMM**
510	2.757E-003	4.642E-002
998	3.936E-004	1.965E-002
2042	1.402E-004	6.157E-003
3998	4.672E-005	2.964E-003
8150	2.190E-005	1.268E-004
15974	6.521E-006	4.579E-005
32598	7.953E-007	2.064E-006
63886	4.943E-007	5.138E-007
127940	2.308E-007	2.173E-007

Заключение

В данной работе изучались и сравнивались между собой различные модификации быстрых методов семейства Fast Multipole Method, а также способы реализации оператора трансляции в методе Single Level FMM. В ходе работы была создана программа на языке C++, содержащая набор функций для работы с задачами акустики при известных значениях интегралов и плотностей вспомогательных источников в точках дискретизации. В методе Single Level FMM реализовано вычисление оператора трансляции прямым методом и в интегральной форме. На основе сравнения скоростей вычислений данными методами сделан вывод о целесообразности использования оператора трансляции в интегральной форме. Полученная программа создает основу для решения краевых задач для уравнения Гельмгольца методом MLFMM, более быстрым по сравнению с изученными в ходе работы методами. Его реализация планируется в дальнейшем.

Список литературы

1. Duraiswami R., Gumerov N. Fast Multipole Methods for Helmholtz equation in three dimensions. M.: Un. Maryland.-2008.-546 c.
2. Основные сведения о вычислительном кластере. http://hpc.febras.net/node/10
3. Каширин А.А., Смагин С.И. О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.-2012.-Т. 52.-№ 8.-С. 1492-1505.
4. Смагин, С.И. Численное решение интегрального уравнения I рода со слабой особенностью для плотности потенциала простого слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1988. – №11. – С. 1663-1673.
5. Rokhlin V. Diagonal Forms of Translation Operators for the Helmholtz Equation in Three Dimensions. M.:Appl. Comput. Harmon. Anal.-1993.-93 c.
6. Stein S. Addition theorems for spherical wave functions. M.:Appl. Math. - 1961

УДК 530.182:574.34

БАССЕЙНЫ ПРИТЯЖЕНИЯ КЛАСТЕРОВ В МОДЕЛЯХ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПОПУЛЯЦИЙ

М.П. Кулаков
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
Россия, 679016, Биробиджан, Шолом-Алейхема 4
E-mail: k_matvey@mail.ru

Ключевые слова: метапопуляция, система глобально-связанных отображений, синхронизация, мультистабильность, кластер, бассейн притяжения

Для изучения феномена кластеризации, возникающего в моделях пространственно-временной динамики неоднородных популяций или метапопуляций, предложена методика выделения бассейнов притяжения некоторых фаз кластеризации. Для чего использован показатель близости пространственного распределения плотности популяции по ареалу в T-момент времени с начальным распределением популяции. В качестве оценки близости или меры близости начального и достигаемого состояния системы предложено использовать коэффициент детерминации.

Введение

В математической популяционной биологии хорошо изучена динамика локальных популяций, описываемых моделями с непрерывным и дискретным временем. Возникающие колебания численности в них объясняются внутрипопуляционными процессами, связанными с плотностно-зависимым лимитированием роста численности, периодическим характером действия внешних факторов, а так же межвидовыми взаимодействиям (конкуренция, отношения типа «хищник-жертва», симбиоз и т.п.). Реальные биологические популяции, обычно, пространственно распределены по своему ареалу и представлены взаимодействующими локальными группами особей, обменивающихся мигрантами, и образуют, так называемые, метапопуляции. Механизмы формирования нерегулярного и периодического поведения метапопуляции оказываются существенно сложнее, чем отдельной изолированной популяции, и в большей степени определяются географической структурой ареала и миграционным взаимодействием. Для количественного описания динамики подобным образом устроенных популяций удобно пользоваться богатым аппаратом нелинейной динамики и математического моделирования. В качестве простейшей модели пространственной динамики таких популяций предлагается использовать системы связанных логистических отображений, демонстрирующих переход к хаосу через удвоение периода [1-3]. Каждый элемент такой популяции при этом может быть связан с некоторыми другим либо диссипативно, либо инерциально. В первом случае, особи мигрируют в промежутках между сезонами размножения, а эмигранты ничем не отличаются от местных особей и сразу начинают участвовать в процессах размножения, не зависимо от того, когда происходило расселение: до периода размножения, либо после него. Во втором случае, особи мигрируют из одной локальной популяции в другую в обход процессам размножения и гибели, а эмигранты становятся неотличимы от местных особей и начинают участвовать в размножении лишь через сезон. Такие системы характеризуются наличием эффектов мультистабильности, синхронизации, перемежаемости и кластеризации. Наличие этих феноменов очень интересно, но значительно осложняет возможность применения таких математических моделей для описания динамики реальных популяций и, в частности, затрудняет возможность идентификации параметров. Целью данной работы является моделирование пространственно-временной динамики популяций животных и исследование закономерностей кластеризации в системах связанных отображений.

1. Модели пространственной динамики метапопуляции

Пронумеруем в каком либо порядке каждую локальную популяцию от 1 до N и обозначим через $x_n^{(i)}$ численность в i-м $(i = 1, 2, \dots, N)$ очаге в дискретный момент времени n. В случае диссипативной миграционной связи каждой локальной популяции уравнения пространственной динамики распределенной популяционной популяции (метапопуляции) можно записать в виде системы глобально-связанных отображений:

$$x_{n+1}^{(i)} = \sum_{j=1}^{N} m_{i,j} f\left(x_n^{(j)}\right) \quad (i = 1,\ 2, \dots, N), \tag{1}$$

где $m_{i,j} \geqslant 0$ $(i \neq j)$ – коэффициент миграции особей из j-й популяции в i-ю, $m_{i,i} = 1 - \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{N} m_{j,i}$ $(j \neq i,\ i = 1, 2, \dots, N)$ равен доле не эмигрировавших из i-й популяции особей, $f(x)$ – функция локального воспроизводства. Если популяции связанны инерциально, то уравнения их пространственной динамики имеют вид:

$$x_{n+1}^{(i)} = f\left(m_{i,i} \cdot x_n^{(i)}\right) + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} m_{i,j} x_n^{(j)} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \tag{2}$$

В качестве функция локального воспроизводства использовалась унимодальная зависимость запас-пополнение Рикера: $f\left(x^{(i)}\right) = a^{(i)} \cdot x^{(i)} \cdot e^{-x^{(i)}}$, где $a^{(i)}$ – репродуктивный потенциал i-й популяции, то есть скорость её максимально возможного годового воспроизводства в отсутствии лимитирования. Матрица $M = (m_{i,j})$ называется матрицей миграционной связи или просто матрицей миграции, которая помимо интенсивностей миграционных потоков между локальными очагами содержит косвенно информацию о способе разбиения метапопуляции и нумерации её локальных популяций (субпопуляций). Далее рассматривается полностью симметричный случай систем (1) и (2), т.е. при равенстве репродуктивных потенциалов каждой локальной популяции $a = a^{(1)} = a^{(2)} = \ldots = a^{(N)}$ и равенстве коэффициентов миграции. Последнее означает, что все не диагональные элементы матрицы, которые не равны нулю, равны $m = const$. Диагональный элемент матрицы миграции по-прежнему равен $m_{i,i} = 1 - \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{N} m_{j,i}$ $(i = 1, 2, \dots, N,\ j = 1, 2, \dots, N)$, таким образом, что под знаком суммы стоят либо m либо ноль. В случае если локальная популяция связана максиму с четырьмя своими ближайшими соседями, то $0 \leqslant m \leqslant 0.25$. В противном случае некоторые диагональные элементы матрицы M окажутся отрицательными.

2. Кластеры и их бассейны притяжения

Как известно [1-3] реализуемые в системах (1) и (2) режимы пространственной динамики зависит не только от соотношения параметров a и m, но так, же и начального распределения особей популяции по ареалу, т.е. начальных значений фазовых переменных $x_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. При этом различным наборам $x_0^{(i)}$ могут соответствовать различные динамические режимы или аттракторы – такое явление называют мультистабильностью. Частным случаем этого явления для систем глобально-связанных отображений является явление кластеризации – образование групп фазовых переменных динамической системы (численности субпопуляций в каждом очаге) по группам – кластерам, в пределах которых динамика фазовых переменных синхронна. Каждому такому кластеру соответствует свой бассейн притяжения. На рис. 1 приведены примеры пространственной динамики популяции, описываемой системой (1), с ареалом квадратной формы состоящей из 36 локальных очагов, на котором продемонстрировано образование (рис. 1 *а*) двух кластеров, (рис. 1 *б*) одного кластера в центре и (рис. 1 *в*) ситуации, когда число кластеров равно числу локальных популяций и динамика каждой субпопуляции оказывается противофазной с рядом стоящими. Слева на рис. 1, высота столбцов показывает численности каждой субпопуляции в фиксированный момент времени, справа, изображена та же динамика в различные моменты времени, в зависимости от номера субпопуляции. В данном примере каждая локальная популяция колеблется с циклом длины 2, что отмечено в виде двух графиков ($n = \tau$ и $n = \tau + 1$). Рассмотрим

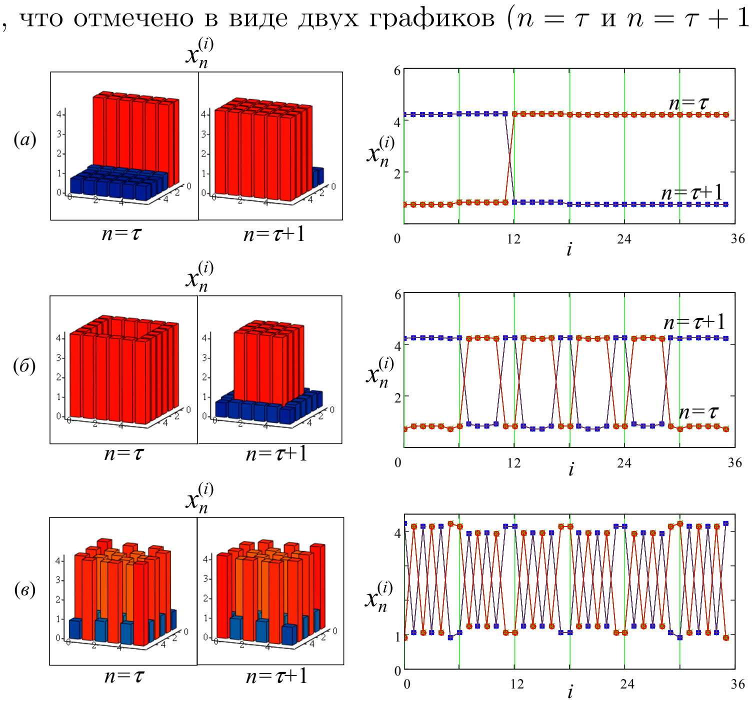


Рис. 1. Пример пространственной динамики популяции, описываемой системой (1) при $a = 12$ и $m = 0.025$

простейший случай кластеризации – образование двух кластеров (так называемая упорядоченная фаза кластеризации). Пусть первый кластер состоит из k, а второй соответственно из $N-k$ субпопуляций, таким образом, что динамика каждой субпопуляции в пределах кластеров

$$\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)}\right\} \text{ и } \left\{x_n^{(k)}, x_n^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(N)}\right\} \ (\text{при} n \to \infty) \tag{3}$$

будет синхронна (как минимум с захватом частоты и фазы) со всеми находящимися в нем популяциями. То есть динамика $x_n^{(1)}$ попарно синхронна с каждым, составляющим этот кластер, элементом $x_n^{(i)}$ $(i = 2, 3, \ldots, k)$, а $x_n^{(k+1)}$ синхронен каждому $x_n^{(i)}$ $(i = k+2, k+3, \ldots, N)$, но между собой $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(k+1)}$ не синхронны. Для определения является ли данный кластер устойчивым достаточно проследить эволюцию динамики системы (1) или (2) в зависимости он начального распределения особей по ареалу, т.е. начальных значений фазовых переменных $x_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Если зафиксировать ее достаточно близкую, к какому либо из возможных для данной системы кластеров, то после серии итераций траектория останется в пределах этого кластера, либо покинет его. Это покажет, настолько удачно была выбрана эта точка и какому бассейну она принадлежит. С другой стороны, не имеет значения из какой части бассейна притяжения её брать (быть может, кроме границы бассейна) – траектория системы сойдется к данному кластеру, т.е. выбор начальной точки оказывается достаточно произвольным. Тогда если знать, какие фазы кластеризации возможны для данной системы и данной размерности, то можно попытаться определить области устойчивости возможных кластеров в параметрическом пространстве и построить их бассейны притяжения. Рассмотрим эволюцию системы отображения (1) из начальной точки вида:

$$\mathbf{x}_0 = \left\{X_0 = x_0^{(1)} = \ldots = x_0^{(k)},\ Y_0 = x_0^{(k+1)} = \ldots = x_0^{(N)} | X_0 \neq Y_0\right\}, \tag{4}$$

которая по своему виду близка к кластеру вида (3). После $\tau > 0$ итераций образ точки (4) будет $\mathbf{x}_\tau = \left\{x_\tau^{(1)}, x_\tau^{(2)}, \ldots, x_\tau^{(N)}\right\}$, полученные фазовые переменные могут образовать кластеры вида (3) и тогда можно говорить, что точка $\mathbf{x}_0$ выбрана из бассейна притяжения данного кластера, либо будет получены другие кластеры другого размера и числа заполнения. Тогда, что бы построить бассейны притяжения данного кластера можно оценить близость начального $\mathbf{x}_0$ и достигаемого пространственного распределения $\mathbf{x}_\tau$. В качестве такой удобно воспользоваться коэффициент детерминации:

$$r_n^2 = r^2\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n\right) \quad (n = \tau, \tau+1, \ldots, \tau+d), \tag{5}$$

где $\mathbf{x}_0$ соответствует набору фазовых переменных в начальный момент времени, а $\mathbf{x}_n$ соответствует наборам после $\tau, \tau+1, ..., \tau+d$ итераций, взятым на устойчивом аттракторе, а d – максимальная длина цикла, достигаемая одной из фазовых переменных. В случае квазипериодической динамики достаточно рассмотреть набор $\mathbf{x}_n$ на одном полном обороте фазовой кривой. В результате вычисления (5) будет получено d оценок r_n^2, из которых выбирается самый минимальный:

$$R^2 = \min r_n^2. \tag{6}$$

В случае если, полученный коэффициент R^2 достаточно близок к 1, то достигаемая системой (1) динамика в каждый момент времени с точностью до постоянного множителя совпадает с начальным своим состоянием и при данных значениях параметров данный режим существует, а значит, что данная начальная точка принадлежит бассейну притяжения подобных кластеров. Если же он близок нулю, то между этими состояниями нет сходства, и для данных значений параметров данной фазы кластеризации не существует, либо начальная точка не принадлежит бассейну таких кластеров. Рассмотрим полученные таким образом бассейны притяжения для модельного ареала квадратной формы и $N = 36$. Зафиксируем кластер в виде (4) и будем варьировать значения $X_0 = x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = \ldots = x_0^{(18)}$ и $Y_0 = x_0^{(19)} = x_0^{(20)} = \ldots = x_0^{(36)}$, вычисляя минимальный коэффициент детерминации (6). На рис. 2 показана карта величины R^2 на плоскости (X_0, Y_0), где черному цвету соответствует очень близкое к нулю ее значение, белым областям, где R^2 очень близок к 1. Для примера на рис. 2 так же показаны примеры возникающих кластеров. На рис. 2 *д* показаны кластеры подобные изначально заданному кластеру $\left\{X_0 = x_0^{(1)} = \ldots = x_0^{(18)}, Y_0 = x_0^{(19)} = \ldots = x_0^{(36)}\right\}$, в динамике которых отмечается захват частоты и фазы, однако полного равенства амплитуд не наблюдается. В областях, отмеченных на рис. 2 *а* оттенками серого формирование таких кластеров оказывается не возможным и реализуются другие их виды, отличающиеся разным числом заполнения (рис. 2 *б-г*) и даже разным числом самых кластеров (рис. 2 *в*). Надо отметить, что наиболее информативно полными являются бассейны

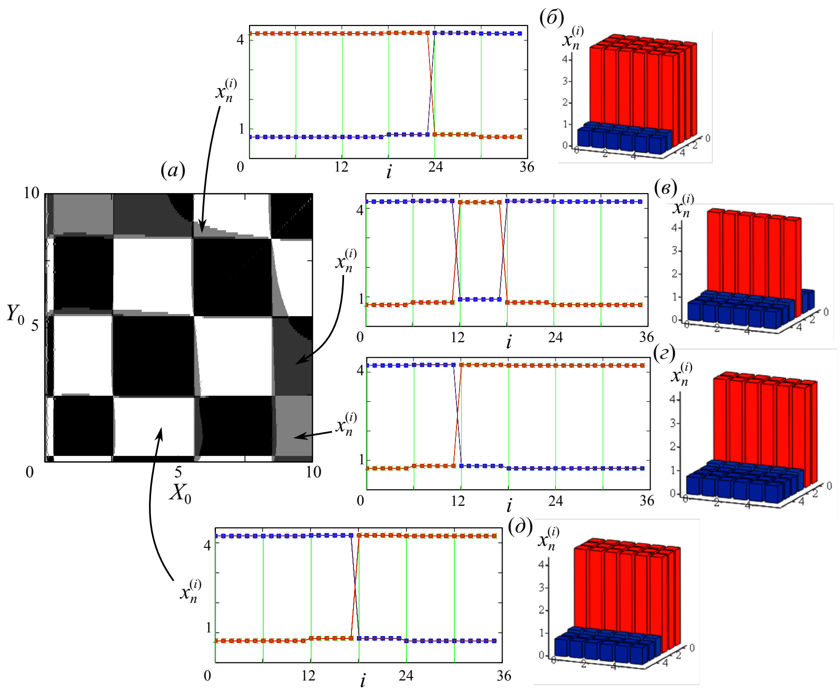


Рис. 2. (*а*) Бассейны притяжения кластеров, (*б*)-(*г*) кластеры, возникающие в них при $a = 12$ и $m = 0.025$

полностью синхронных режимов динамики, показанные черным цветом на рис. 2 *a*. Эти области при фиксированных значениях параметров модели оказываются инвариантны относительно фиксируемого в данной методике кластера $\mathbf{x}_0 = \{X_0, Y_0\}$, относительно которого и прослеживается близость начального $\mathbf{x}_0$ и достигаемого пространственного распределения $\mathbf{x}_\tau$. Бассейны притяжения всех возможные фаз кластеризации могут быть получены как попарное пересечение дополнений областей фазового пространства, в которых реализуется та или иная фаза кластеризация.

Выводы

Рассмотрен простейший случай, когда образуются две группировки рядом стоящих локальных популяций или кластеров. Показано, что в случае равенства двух этих кластеров, их бассейны притяжения (т.е. области фазового пространства в которых реализуются эти фазы кластеризации) совпадают с бассейнами притяжения противофазного режима в системе из двух связанных логистических отображений, рассмотренных ранее [2]. Бассейн притяжения полностью синхронной динамики всех локальных очагов в этом случаи полностью совпадает с аналогичной областью в системе из двух связанных логистических отображений. *Исследования проведены при финансовой поддержке РФФИ (региональный проект 11-01-98512-р_восток_а) и ДВО РАН (конкурсные проекты 12-I-П28-02, 12-II-СО-06-019, 12-II-СУ-06-007).*

Список литературы

1. Безручко Б.П., Прохоров М.Д. Селезнев Е.П. Виды колебаний, мультистабильность и бассейны притяжений аттракторов симметрично связанных систем с удвоением периода // Изв. вузов, ПНД, Том 10, № 10. – 2002 г. – с 47 – 67.
2. Кулаков М.П., Фрисман Е.Я. Синхронизация 2-циклов в системе симметрично связанных популяций, запас–пополнение в которых описывается функцией Рикера // Изв. вузов, ПНД. 2010, Т. 18, № 6, С. 25-41. 1974. № 5. С. 82-94.
3. Kaneko K. Clustering, coding, switching, hierarchical, ordering, and control in network of chaotic elements // Physica D. 1990. Vol. 41, № 2, p. 137-172.

УДК 574.34, 530.182

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ СИНХРОНИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ ЧИСЛЕННОСТЕЙ МИГРАЦИОННО-СВЯЗАННЫХ СООБЩЕСТВ В СИСТЕМЕ «РЕСУРС-ПОТРЕБИТЕЛЬ»

Е.В. Курилова
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
Россия, 679016, Еврейская АО, г. Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, д.4
E-mail: katkurilova@mail.ru

Ключевые слова: синхронизация колебаний, фазовый портрет

Для изучения основных закономерностей развития взаимосвязанных сообществ, заселяющих соседние регионы, представлена модификация математической модели динамики численности двух сообществ типа «ресурс-потребитель», связанных миграциями потребителя. Проведено исследование полученной модели, выполнено качественное описание поведения модели, определены условия синхронизации колебаний рассматриваемых сообществ, изучено влияние миграционного взаимодействия между сообществами на динамику каждой популяции.

Введение

С начала 20 века активно развивается динамическая теория биологических популяций, в рамках которой исследуются закономерности изменения численности особей взаимодействующих биологических видов, в частности, условия возникновения устойчивых колебаний. Для описания динамики таких популяций необходимо использовать нелинейные модели, учитывающие основные факторы их развития (рождаемость, смертность, межвидовые взаимодействия, миграция). Первое глубокое математическое исследование моделей биологических сообществ, включающих в себя несколько популяций различных видов, и изучение закономерностей динамики их взаимодействия дано в работе Лотки-Вольтерра. Основная особенность этой модели состоит в том, что на основе очень упрошенных представлений о закономерностях развития биологических систем, было выведено заключение о качественном характере поведения таких сообществ - о наличии в системе колебаний плотности популяций [2]. Продолжением исследований порожденных работами Вольтера и Лотка являются модели, полученные включением в исходную различных дополнительных факторов: эффект насыщения хищника, ограниченность ресурсов жертвы и хищника даже при избытке жертвы и т.п.

1. Модель миграционно-связанных сообществ

Работа посвящена определению условий синхронизации колебаний численности сообществ, особи которых заселяют соседние регионы, а так же изучению влияния миграционного взаимодействия между сообществами на динамику каждой популяции. Исследование основывается на модели Базыкина [1], являющейся одним из продолжений работ Вольтерра. В рассмотрение при этом вводятся два новых по отношению к исходной модели фактора: нелинейный характер размножения популяции жертвы при малых плотностях популяции, насыщение хищника, внутривидовая конкуренция в популяции жертвы, вызываемая ограниченностью ресурсов и миграция хищника:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1\frac{K-x_1}{K} - \frac{bx_1y_1}{1+Ax_1} \\ \dot{y}_1 = -cy_1 + \frac{dx_1y_1}{1+Ax_1} + my_2 - my_1 \\ \dot{x}_2 = ax_2\frac{K-x_2}{K} - \frac{bx_2y_2}{1+Ax_2} \\ \dot{y}_2 = -cy_2 + \frac{dx_2y_2}{1+Ax_2} + my_1 - my_2 \end{cases} \tag{1}$$

где a- скорость размножения популяции жертвы в отсутствии хищника, $f = a/K$ - коэффициент внутривидовой конкуренции жертв (самолимитирование), b- удельная скорость потребления популяцией хищника популяции жертвы при единичной плотности обеих популяций, c- естественная смертность хищника d/b- коэффициент переработки потребленной хищником биомассы жертвы в собственную биомассу, A- коэффициент насыщения хищника, m - коэффициент миграции хищника. В исходной записи система (1) содержит семь независимых параметров. Заменой переменных: $x = \frac{c}{d}u$, $y = \frac{a}{b}v$, $t = \frac{\tau}{a}$ приходим к системе уравнений с четырьмя параметрами:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1 - \frac{u_1v_1}{1+\alpha u_1} - \varepsilon u_1^2 \\ \dot{v}_1 = -\gamma v_1 + \frac{\gamma u_1v_1}{1+\alpha u_1} + \beta v_2 - \beta v_1 \\ \dot{u}_2 = u_2 - \frac{u_2v_2}{1+\alpha u_2} - \varepsilon u_2^2 \\ \dot{v}_2 = -\gamma v_2 + \frac{\gamma u_2v_2}{1+\alpha u_2} + \beta v_1 - \beta v_2 \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha = \frac{Ac}{d}$ - коэффициент насыщения хищника, $\varepsilon = \frac{c}{Kd}$ - коэффициент самолимитирования (конкуренция жертв), $\gamma = \frac{c}{a}$ - относительная скорость роста, равная отношению скорости гибели хищника и скорости прироста жертвы, $\beta = \frac{m}{a}$ – –относительная доля миграции, равная отношению доли мигрантов хищника и скорости прироста жертвы.

2. Исследование синхронизации колебаний численности

Система (2) состоит из двух подсистем идентичных модели Базыкина, связанных между собой коэффициентом миграции потребителя. Выберем фиксированные значения параметров $\varepsilon = 0.12$, $\alpha = 0.45$, $\gamma = 0.5$, которые соответствуют решениям подсистем, лежащим на предельном цикле. Сравним поведение этих двух траекторий (циклов) на плоскостях (u_1, v_1) и (u_2, v_2) при изменении параметра связи β. Рассмотрим следующие начальные условия: $u_1(0) = 0.153$, $v_1(0) = 1.080$, $u_2(0) = 6.764$, $v_2(0) = 0.772$, соответствующие максимальным и минимальным значениям численности жертвы u на предельных циклах системы (2). В случае, когда рассматриваемые сообщества слабо связаны друг с другом (относительная доля миграции

$\beta = 0.005$ системы (2)) синхронизация колебаний наступает через временя $t = 1800$ (103.5 периодов для первого сообщества и 102 периода для второго). На языке нелинейной динамики говорят о различной длине переходного процесса к устойчивому синхронному состоянию [3]. В системе устанавливаются стационарные колебания, соответствующие движению фазовой точки вдоль предельно цикла (рис. 1). Значения системы на фазовых портретах обоих сообществ, начиная с указанного момента времени, совпадают, что так же указывает на полную синхронизацию. Точкой синего (красного) цвета на рис. 1 обозначены начальные условия, черного цвета – значение системы в рассматриваемый момент времени. Стрелками указано направление движения по фазовой кривой. С течением времени моментальные значения

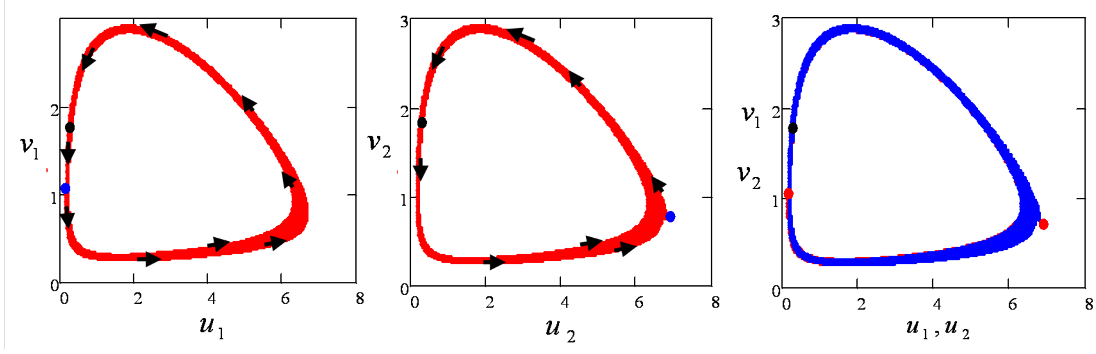


Рис. 1. Фазовый портрет системы (2) при $\beta = 0.005$

численности особей и фазы колебаний сближаются, разность фаз стремится к нулю (точки фазовой кривой начинают двигаться по одной траектории), при этом, разность моментальных амплитуд через указанный промежуток времени падает до нуля (рис. 2). Возникает полная взаимная синхронизация колебаний, то есть, рассматриваемые сообщества в равной степени воздействуют друг на друга и взаимно подстраивают свои ритмы. На графиках, соответствующих фигурам Лиссажу видно, что из асинхронного режима развитие сообществ переходит в квазипериодический, затем колебания через указанный промежуток времени начинают синхронизироваться, графики приближаются и сливаются с прямой, которая является биссектрисой угла и соответствует полной синхронизации колебаний (рис. 3). С увеличением значений параметра связи синхронизация наступает намного раньше. Очень сильная связь стремиться сделать состояния обоих осцилляторов идентичными. В процессе увеличения относительной доли миграции, можно выделить предельное значение ($\beta = 0.4$), в котором синхронизация наступает максимально быстро (на втором периоде (рис. 4)), при переходе через это значение количество периодов достижения синхронизации увеличивается. Фигуры Лиссажу соответствует ситуации, когда частоты и периоды колебаний через небольшой промежуток времени ($t = 25$) полностью совпадают - наступает полная взаимная синхронизация (биссектриса угла на фазовом портрете (рис. 5)). В этом случае полная взаимная синхронизация колебаний наблюдается уже на втором периоде колебаний, т.е. фазовые портреты полностью совпадают через отрезок времени $t = 25$. Через указанный период времени две траектории сливаются в одну и только спустя время $t = 60$ получившаяся кривая приближается к предельному циклу и сливается с ним (рис. 6).

3. Выводы

Таким образом, показано, что введение коэффициента миграции в модель Базыкина типа «ресурс-потребитель», который является параметром связи между двумя

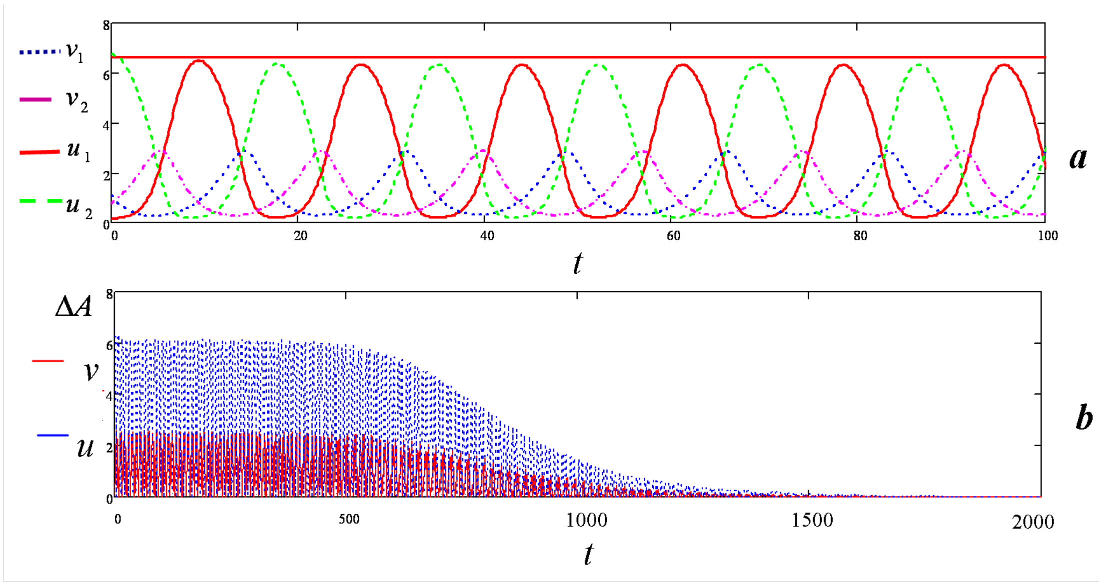


Рис. 2. *a) динамика системы (2) при* $\beta = 0.005$*, b) разности моментальных амплитуд двух не связанных сообществ*

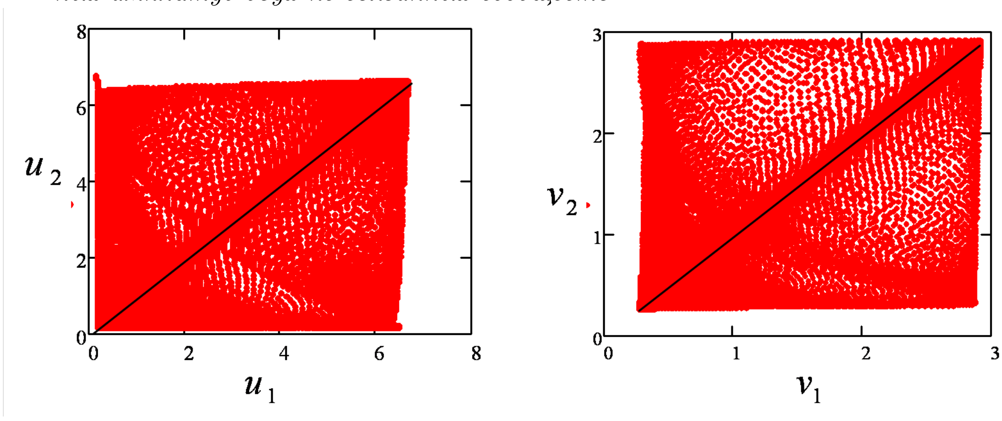


Рис. 3. Фигуры Лиссажу системы (2) при $\beta = 0.005$

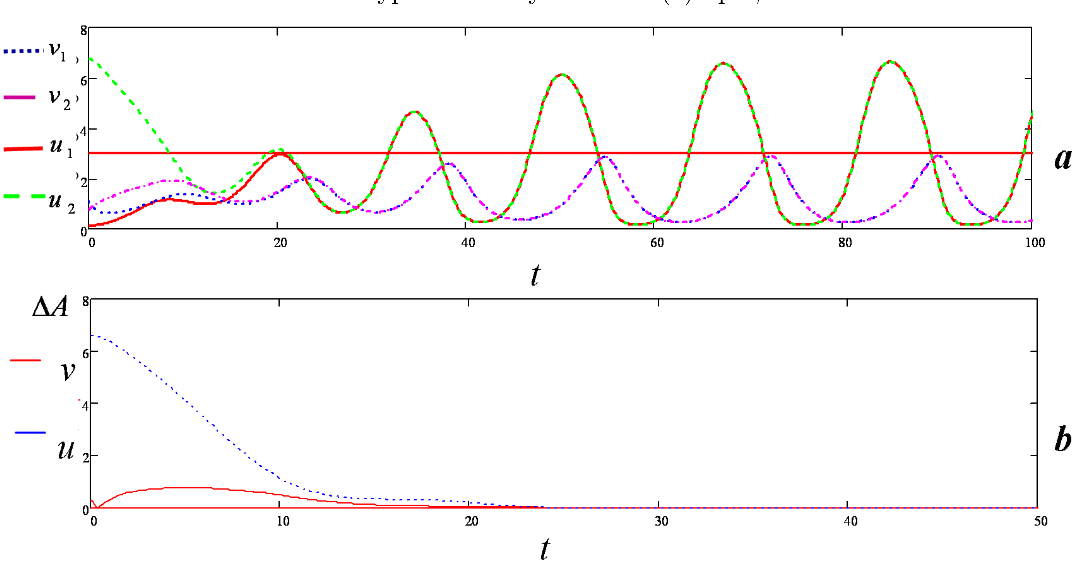


Рис. 4. *a) динамика системы (2) при* $\beta = 0.4$*, b) график разности моментальных амплитуд двух рассматриваемых сообществ*

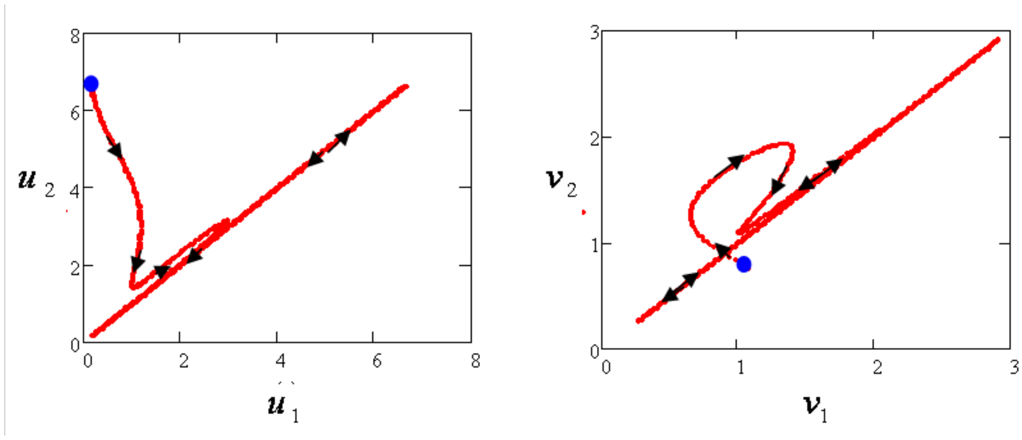


Рис. 5. Фигуры Лиссажу системы (2) при $\beta = 0.4$

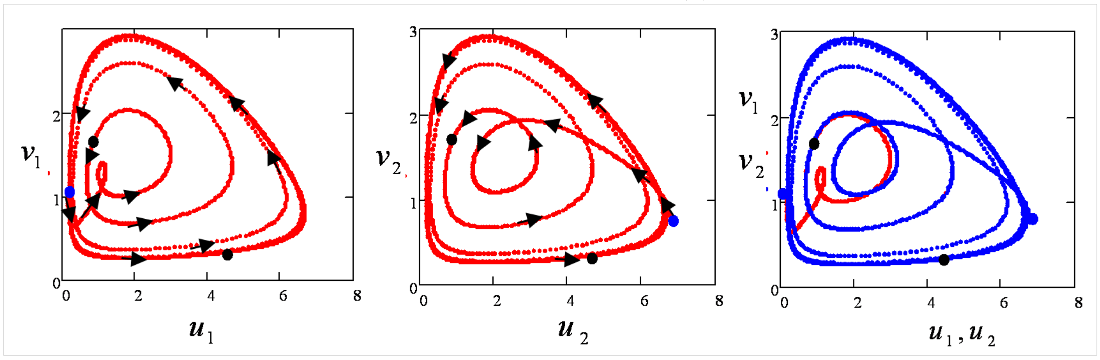


Рис. 6. Фазовый портрет системы (2) при $\beta = 0.4$

подобными соседними сообществами, приводит к синхронизации колебаний рассматриваемых систем. От величины данного коэффициента зависит скорость синхронизации этих систем (с увеличением значений β синхронизация наступает быстрее). Найдено максимальное значение относительной доли миграции, соответствующее наиболее быстрой синхронизации колебаний рассматриваемых сообществ, при переходе через которое время достижения полной синхронизации увеличивается. *Исследования проведены при финансовой поддержке РФФИ (региональный проект 11-01-98512-р_восток_а).*

Список литературы

1. Базыкин А.Д.. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М., Наука, 1985.- 181с.
2. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии. Москва-Ижевск, ИКИ, 2003, -184 с.
3. Пиковский А. Розенблюм М. Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. Пер.с англ. А.С. Пиковского, М.Г.Розенблюма.-М. ТЕХНОСФЕРА, 2003.-496с.

УДК 519.2

О ПРОБЛЕМАХ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ МОМЕНТОВ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРХНЕЙ ЛЕСТНИЧНОЙ ВЫСОТЫ

Т.В. Лазовская
ВЦ ДВО РАН
Россия, 680000, Хабаровск, Ким-Ю-Чена, 65
ИПММ ФГБОУ ВПО "СПбГПУ"
Россия, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29
E-mail: tatianala@list.ru

С.В. Нагаев
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
Россия, 630090, Новосибирск, Коптюга, 4
E-mail: nagaev@math.nsc.ru

Ключевые слова: метод моментов, лестничная высота, непрерывная дробь, формула Бруно, уравнение Фробениуса, числа произвольной точности

Рассматривается задача приближенного вычисления моментов и функции распределения верхней лестничной высоты. Предложены алгоритмы для вычисления моментов по формулам из [5], в том числе поиска решений уравнения Фробениуса. Для восстановления функции распределения применяется метод П.И. Чебышева, основанный на непрерывных дробях. Решается проблема вычислений с произвольной точностью.

О методе моментов

Пусть известны и конечны первые $2m$ моментов $b_k = \int\limits_a^b x^k f(x)\,dx$, $k=0,1,\dots,2m-1$, вероятностного распределения с плотностью $f(x)$. В работе [1] П.Л. Чебышев получает решение для задачи приближенного вычисления соответствующей функции распределения

$$F(v) = \int\limits_a^v f(x)dx, \quad a < v < b.$$

Введем вспомогательные понятия. Непрерывной дробью будем называть выражение вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}\,, \tag{1}$$

где $a_0,\ a_1,\ \ldots$ – конечная или бесконечная последовательность. Конечная непрерывная дробь

$$\frac{V_n}{W_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

называется n-ой (порядка n) подходящей дробью для непрерывной дроби (1). При этом V_n называют числителем, а W_n – знаменателем n-й подходящей дроби. В работах [1] – [3] П.Л.Чебышев раскладывает функцию $\sum_{k=0}^{2m-1} \frac{b_k}{z^{k+1}}$ в непрерывную J-дробь с подходящими дробями специального вида

$$\frac{\varphi_k(z)}{\psi_k(z)} = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 + \dots + \cfrac{1}{\alpha_k z + \beta_k}}}\,,$$

где $\alpha_i,\ \beta_i$ – вещественные числа. Рассматривая для каждого фиксированного v функции аргумента z

$$\Phi_0(z) = \varphi_m(z)Z(z) - \varphi_{m-1}(z), \quad \Phi_1(z) = \psi_m(z)Z(z) - \psi_{m-1}(z), \tag{2}$$

$$Z(z) = (z-v)\gamma + \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}, \tag{3}$$

где

$$\gamma = \max\left\{ \frac{1}{a-v}\left(\frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right), \frac{1}{b-v}\left(\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right)\right\}, \tag{4}$$

П.Л.Чебышев доказал, что

$$\left| F(v) - \mathcal{E}_{a-0}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} \right| < \frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}, \tag{5}$$

под $\mathcal{E}_{a-0}^{v} g(z)$ подразумевается сумма вычетов функции $g(z)$ в особых точках, принадлежащих интервалу $[a, v)$. Таким образом, имеем следующую схему приближенного вычисления функции распределения: найти функции $\Phi_i(z)$ по формулам (2) – (4), затем корни многочлена $\Phi_1(z)$ и сумму вычетов из (5). Числитель и знаменатель подходящих дробей вычисляются по формулам из теоремы 7.15 книги [6],

$$\psi_n(z) = \frac{1}{H_n^{(1)}} \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n-1} & b_n & \cdots & b_{2n-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}, \tag{6}$$

где

$$H_n^{(1)} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n-1} & b_n & \cdots & b_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad n = 1,\, 2,\, \ldots\,. \tag{7}$$

$$\varphi_n(z) = \psi_n(z)\Big(\frac{b_0}{z} + \frac{b_1}{z^2} + \cdots + \frac{b_{2n-1}}{z^{2n}} + \frac{\gamma_{2n}^{(n)}}{z^{2n+1}} + \cdots\Big). \tag{8}$$

Вычисления

В результате мы получили для каждой точки $a \leqslant v \leqslant b$ формулу для восстановления в ней функции распределения

$$F(v) \approx \mathcal{E}_{a-0}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} = \sum_{a \leqslant x < v} \frac{\Phi_0(x)}{\Phi_1'(x)} + \frac{1}{2} \frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)} \tag{9}$$

с абсолютной погрешностью, оцениваемой величиной $\frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}$. Прежде, чем применять описанную схему к вычислению функции распределения верхней лестничной высоты, необходимо решить задачу вычисления моментов этой случайной величины. Для этого был разработан алгоритм и написан код на языке программирования *Fortran* для вычисления n-мерного вектора решений уравнения Фробениуса $x_1 + 2x_2 + \ldots + x_n = n$ в целых неотрицательных числах. Были составлены программы, реализованные на языках Fortran, C++ и в математическом пакете, для счета значений производных сложной функции по формуле Бруно

$$\frac{d^m}{dt^m} g\Big(f(t)\Big) = m! \sum_{\{jk_j\}_1^m} g^{(\nu_m)}(y)\big|_{y=f(t)} \prod_{j=1}^{m} \left[\frac{1}{k_j!} \left(\frac{f^{(j)}(t)}{j!} \right)^{k_j} \right], \tag{10}$$

где $\nu_m = k_1+k_2+\cdots+k_m$, а суммирование производится по наборам решений уравнения Фробениуса порядка m [8]. Используя (10), в [5] получена формула вычисления моментов лестничных высот Z_+ для шага с распределением $N(0, \sigma^2)$, которая при $\sigma = 1$, $m > 0$ имеет вид

$$b_{m+1} \equiv \mathbf{E} Z_+^{m+1} = \frac{(m+1)!}{\sqrt{2}} \sum_{\{jk_j\}_1^m} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{k_j!} \left(\frac{g_j}{j!} \right)^{k_j} \right). \tag{11}$$

Явный вид для величин g_j выводится из работы В.И. Лотова [7]

$$g_i = -(i-1)! \frac{\cos\frac{\pi i}{4}}{2^{i-1} i \pi^{i/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{i/2}}, \quad i \geqslant 3; \tag{12}$$

$$g_1 = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}, \quad K : \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{m}} = 2\sqrt{n} - K + O(\frac{1}{\sqrt{n}}); \tag{13}$$

$$g_2 = \frac{1}{4}.$$

Приближенные значения функции распределения верхней лестничной высоты в случае стандартного нормального распределения шага были найдены для 16 и 26 вычисленных моментов в равноотстоящих точках. В каждом случае посчитаны теоретические границы абсолютных погрешностей, график которых изображен на рис. 1.

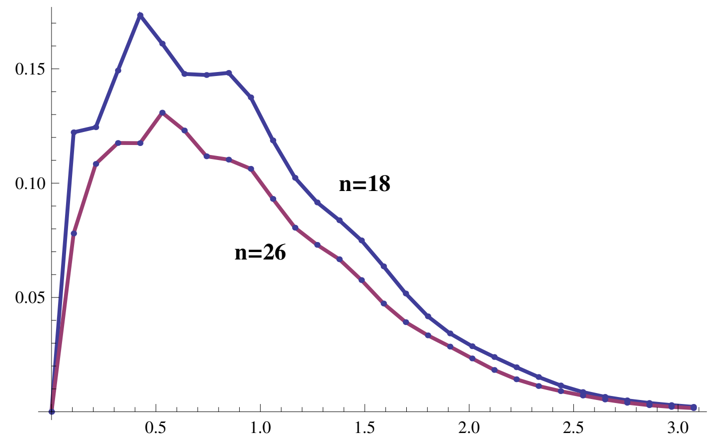


Рис. 1. Границы погрешностей

Как видно, уменьшение границ погрешности происходит довольно медленно. В работе [4] Н.Я. Сонин показал, что для восстановления функции распределения нормальной случайной величины характер убывания погрешности примерно равен $1/n$, где n - число известных моментов. Следовательно, чтобы уменьшить ее до 0.05, требуется вычислить около 400 моментов. При этом, с увеличением порядка повышается ресурсоемкость вычислений, как для нахождения наборов решений соответствующих уравнений Фробениуса, так и вычислений определителей из формул (6) – (8). Для последующих высокопроизводительных расчетов на кластере был написан алгоритм вычисления моментов исследуемого распределения на языке программирования Fortran, но, оказалось, что метод Чебышева чувствителен к количеству значащих цифр и полученные корни многочлена $\Phi_1(z)$ не удовлетворяли следующим свойствам, доказанным в [3]. Все корни должны быть вещественными и чередоваться с корнями для функций, полученных при меньшем числе известных моментов. Стандарт Fortran поддерживает формат не более, чем двойной расширенной точности, что недостаточно. Использовать числа произвольной точности с плавающей запятой и целые числа с любым числом значащих цифр позволяет библиотека MPIR для языка программирования C++ [9]. С ее помощью был разработан новый алгоритм для вычисления моментов с высокой точностью с учетом особенностей библиотеки и использованием решений уравнений Фробениуса, полученных ранее. Моменты высоких порядков снова требуют высокопроизводительных вычислений, соответственно, необходимо использовать библиотеку MPIR на кластере и портировать программу для LINUX-платформы.

Список литературы

1. *Tchébycheff P.* Sur les valeurs limites des integrales. – Journ. de math. pures et appl. 1874, II serie, XIX, p. 157-160. (Русский перевод А.М. Ляпунова в Собр. соч. П.Л. Чебышева под ред. А.А. Маркова и Н.Я. Сонина. Том II. СПб. 1907. С. 183-185.)
2. *Чебышев П.Л.* О представлении предельных величин интегралов посредством интегральных вычетов. – Приложение к LI тому Записок Импер. Акад. наук, №4. СПб. 1885.
3. *Чебышев П.Л.* Об интегральных вычетах, доставляющих приближенные величины интегралов. – Приложение к LV тому Записок Импер. Акад. наук, №2. СПб. 1887.

4. *Сонин Н.Я.* О точности определения предельных величин интегралов. – Записки Импер. Акад. наук. 1892, т. 69, кн.1, с. 1-30.
5. *Нагаев С.В.* Точные выражения для моментов лестничных высот. – Сибирский математический журнал. 2010, т. 51, № 4, с. 848-870.
6. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985.
7. *Lotov V.I.* On some boundary crossing problems for Gaussian random walks. – Ann. Probab. 1996, v. 24, no. 4, p. 2154-2171.
8. *Roman S.* The Formula of Faa di Bruno. – Amer. Math. Monthly. 1980, 87, p. 805-809.
9. *T. Granlund, the GMP Development Team* The Multiple Precision Integers and Rationals Library. – Edition 2.6.0, 2012.

УДК 517.95

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ АКУСТИКИ НА ОСНОВЕ ПАКЕТА FREEFEM++

О.С. Ларькина
Дальневосточный Федеральный Университет
Россия, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8
E-mail: larkina-olga@rambler.ru

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, задача рассеяния, неоднородная среда, обратная задача.

В данной работе рассматривается задача маскировки материального тела, ставится задача сопряжения, вводится слабая формулировка. Разрабатывается алгоритм решения прямой задачи при помощи пакета FreeFem.

Введение

В последнее время появляется все больше работ, в которых исследуются свойства нерассеивающих, или как их еще называют – маскировочных, оболочек (см. например [1, 2, 3]). В указанных работах доказано существование таких оболочек и установлено, что необходимым условием их существование является анизотропия исходной среды. Поскольку невозможно построить такую оболочку на практике [4], то логично заменить задачу точной маскировки материального тела на задачу приближенной маскировки для модели акустики изотропной неоднородной среды. В математическом плане последняя задача сводится к обратной экстремальной задаче для указанной модели акустики. Необходимой частью решения экстремальной задачи является рассмотрение прямой задачи сопряжения. В данной работе разрабатывается алгоритм решения задач рассеяния звуковых волн на анизотропном препятствии. Для решения использован метод конечных элементов (МКЭ), на его основе разработан алгоритм, проведены вычислительные эксперименты в случае, когда препятствие представляет собой нерассеивающую оболочку.

1. Краткие сведения об уравнениях акустики анизотропной среды

Рассмотрим область Ω пространства $\mathbb{R}^3$, заполненную жидкой анизотропной средой. Хорошо известно (см., например, [2]), что уравнения распространения звуковых волн в такой среде описываются соотношениями

$$\nabla p = -i\omega\rho_0\tilde{\rho}(\mathbf{x})\mathbf{v} + \rho_0\tilde{\rho}\,\mathbf{F}, \quad -i\omega p = \lambda_0\lambda(\mathbf{x})\mathrm{div}\,\mathbf{v}. \tag{1}$$

Ниже нас будет интересовать случай, когда среда является однородной и изотропной вне некоторой ограниченной области Ω, так что $\lambda(\mathbf{x}) = 1$, $\tilde{\rho}(\mathbf{x}) = I$ в области $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. Замыкание $\overline{\Omega}$ такой области Ω будем называть носителем анизотропности среды, а саму среду, занимающую все пространство $\mathbb{R}^3$, будем называть локально анизотропной. Как обычно в акустике, исключим колебательную скорость v из уравнений (1). Для этого, применим обратный тензор ρ^{-1} и оператор div к первому уравнению в (1). Будем иметь

$$\operatorname{div}(\rho^{-1}\nabla p) = -i\omega\rho_0 \operatorname{div}\mathbf{v} + \rho_0 \operatorname{div}\mathbf{F} = -\frac{\omega^2\rho_0}{\lambda_0\lambda}p + \rho_0 \operatorname{div}\mathbf{F}. \tag{2}$$

Введем величины

$$c_0 = \sqrt{\lambda_0/\rho_0}, \quad k_0 = \omega/c_0, \quad k_0^2 = \frac{\omega^2\rho_0}{\lambda_0}, \quad f = -\rho_0 \operatorname{div}\mathbf{F}. \tag{3}$$

Учитывая (3), перепишем (2) в виде следующего уравнения

$$Lp \equiv \operatorname{div}(\rho^{-1}\nabla p) + \frac{k_0^2}{\lambda}p = -f, \tag{4}$$

описывающего по построению распределение поля p звукового давления в неоднородной анизотропной среде в пространстве $\mathbb{R}^3$. На само уравнение (1) ниже мы будем ссылаться как на *обобщенное уравнение Гельмгольца*. Наряду с величиной λ будем использовать величину $\eta = 1/\lambda$, обратную к λ. (Будем ссылаться на нее как на индекс рефракции). С использованием η уравнение (1) можно переписать в виде

$$Lp \equiv \operatorname{div}(\rho^{-1}\nabla p) + k_0^2\eta p = -f. \tag{5}$$

Ниже мы будем рассматривать случай, когда область анизотропии Ω имеет вид сферического слоя с внутренней и внешней границами Γ_i и Γ_e (см. рис. 1). Будем предполагать, как в [2], что в сферической системе координат r, θ, φ пара $\tilde{\rho}$ и λ зависит только от r, причем тензор $\tilde{\rho}$ является диагональным и имеет вид $\tilde{\rho} = \operatorname{diag}(\rho_1, \rho_2, \rho_2)$. Здесь функция $\rho_1(r)$ характеризует изменение плотности в направлении изменения переменной r, тогда как $\rho_2(r)$ характеризует изменение плотности в ортогональных направлениях (см. [2], где используются обозначения $\rho_1 = \rho_r$, $\rho_2 = \rho_\varphi = \rho_\theta$). Ниже на четверку $(\Omega, \rho_1, \rho_2, \lambda)$ будем ссылаться как на *анизотропную акустическую оболочку*. Отметим, что уравнение для давления p должно выполняться во всех точках $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, в которых параметры ρ_1, ρ_2 и λ обладают определенной гладкостью (например, $\rho_1 \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $\rho_2 \in C^0(\mathbb{R}^3)$, $\lambda \in C^0(\mathbb{R}^3)$). Если же в пространстве $\mathbb{R}^3$ присутствует поверхность S, на которой некоторые из функций ρ_1 и ρ_2 либо их производные терпят разрыв, то в точках поверхности S должны выполняться условия непрерывности звукового поля $(p, \mathbf{v})$, имеющие вид

$$[p]_S = 0, \quad [\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}]_S \equiv [(\rho^{-1}\nabla p)\cdot\mathbf{n}]_S = 0. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности S, $[p]_S$ (либо $[\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}]_S$) обозначает скачок давления p (либо нормальной компоненты $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$) через поверхность S.

2. Существование нерассеивающей оболочки в $\mathbb{R}^3$

Пусть $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : a < |\mathbf{x}| < b\}$, где a и b — положительные числа. В работе [3] показано, что если выбрать непрерывную на полуоси $[0, \infty)$ функцию

$g(\zeta) \in C^0[0,\infty) \cap C^1[a,b] \cap C^2(a,b)$, удовлетворяющую дополнительным условиям

$$g(\zeta) = \zeta, \quad \zeta \in [0,a] \cup [b,\infty); \quad g'(\zeta) > 0, \quad a \leqslant \zeta \leqslant b. \tag{7}$$

то она будет порождать в области $\Omega = \{(\zeta,\theta,\varphi) : a < \zeta < b\}$ анизотропную и неоднородную акустическую среду с параметрами $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_2$ и $\hat{\lambda}$, определяемыми по функции g формулами

$$\hat{\rho}_1(\zeta) = \frac{1}{g'(\zeta)}, \quad \hat{\rho}_2(\zeta) = \frac{\zeta^2 g'(\zeta)}{g^2(\zeta)}, \quad \hat{\lambda}(\zeta) = \frac{\zeta^2}{g^2(\zeta) g'(\zeta)}, \quad \zeta \in [a,b]. \tag{8}$$

Таким условиям (3) удовлетворяет, например, функция

$$g(\zeta) = \begin{cases} \zeta, & \zeta \in [0,a] \cup [b,\infty), \\ c_1 + c_2\zeta^2, & a \leqslant \zeta \leqslant b, \end{cases}$$

где

$$c_1 = \frac{ab}{a+b}, \quad c_2 = \frac{1}{a+b},$$

Отвечающая данной среде оболочка $(\Omega, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \hat{\lambda})$ не изменяет во внешности Ω_e падающее поле давлений p^{inc}, создаваемое любым допустимым источником $(Q,f) \in F_{ad}$, где $f \in \mathcal{D}'_0(\mathbb{R}^3;\Omega_e)$ – произвольная обобщенная функция с носителем $Q \equiv \operatorname{supp} f$, расположенным в Ω_e. Это означает, что построенная указанным образом оболочка $(\Omega, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \hat{\lambda})$ не рассеивает падающее поле любого допустимого первичного источника, расположенного вне области Ω. Следовательно, ее невозможно обнаружить путем акустической локации с помощью падающего поля, создаваемого внешним компактно распределенным источником.

3. Постановка задачи сопряжения. Предварительные результаты

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ область Ω, удовлетворяющую следующему условию: (i) Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ типа шарового слоя с внутренностью Ω_i, внешностью Ω_e^∞ и криволинейной в общем случае липшицевой границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, состоящей из двух компонент: внутренней Γ_1 и внешней Γ_2. Будем предполагать, что области Ω и Ω_e^∞ заполнены жидкими средами и пусть ρ и η – заданные функции в Ω, имеющие смысл плотности среды и индекс рефракции в области Ω, $\rho_e = \text{const}$ и $c_e = \text{const}$ – постоянные плотность среды и скорость звука в $\Omega_i \cup \Omega_e^\infty$, p, p_i и p_e – звуковое давление в Ω_i, Ω и Ω_e^∞ соответственно. Введем постоянное волновое число $k = \omega/c_e$, где ω – угловая частота. Граница Γ_i считается абсолютно жесткой. Предположим, что во внешности Ω_e^∞ области Ω возникло поле p^{inc}. Поскольку область Ω является препятствием для поля p^{inc}, то падение этого поля на Ω приводит к появлению в области Ω входящего поля p, а в области Ω_e – появления рассеянного поля p^s. Задача определения полей p в Ω и p^s в Ω_e^∞ играет важную роль в теоретической акустике. Математически она сводится к задаче нахождения полей p_i в Ω_i, p в Ω и $p_e = p^{inc} + p^s$ в Ω_e^∞ из следующих соотношений:

$$\Delta p_i + k^2 p_i = 0 \text{ в } \Omega_i, \operatorname{div}(\rho^{-1}\nabla p) + k^2\eta p = -f \ \text{ в } \ \Omega, \ \Delta p_e + k^2 p_e = 0 \ \text{ в } \ \Omega_e, \tag{9}$$

$$p = p_e, \ \ (\rho^{-1}\nabla p)\cdot n = \frac{\partial p_i}{\partial n} \ \text{ на } \Gamma_e; \ \ p = p_i, \ (\rho^{-1}\nabla p)\cdot n = \frac{\partial p_i}{\partial n} \ \text{ на } \ \Gamma_i, \tag{10}$$

$$\frac{\partial p^s(\mathbf{x})}{\partial r} - ikp^s(\mathbf{x}) = o(r^{-1}) \quad \text{при} \;\; r = |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{11}$$

Здесь, в частности, f – плотность объемных источников в Ω, (11) имеет смысл условия излучения Зоммерфельда в $\mathbb{R}^3$. Введем шар B_R радиуса R с границей Γ_R, содержащий Ω. Положим $\Omega_e = \Omega^c \cap B_R$. Для произвольной пары функций $p \in H^1(\Omega), p_e \in H^1(\Omega_e)$ положим $P = (p, p_e)$. Введем в рассмотрение гильбертово пространство $V = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega_e)$, состоящее из пар $P = (p, p_e)$ с нормой $|[P]|^2 = \|p\|^2_{1,\Omega} + \|p_e\|^2_{1,\Omega_e}$. Мы закончим этот раздел сведением исходной задачи сопряжения (1)–(11) к эквивалентной краевой задаче, рассматриваемой в ограниченной области B_R. С этой целью введем отображение Дирихле–Неймана $T : H^{1/2}(\Gamma_R) \to H^{-1/2}(\Gamma_R)$, ставящее в соответствие каждой функции $g \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ функцию $\partial\tilde{u}/\partial\nu \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$, где $\tilde{u}$ – решение внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в $\Omega_e^\infty \backslash B_R$ с условием $u|_{\Gamma_R} = g$. Отметим, что задача (1)–(11) эквивалентна краевой задаче (1), (3), рассматриваемой в ограниченной области $\Omega \cup \Omega_e$ при следующем граничном условии для p^s:

$$\frac{\partial p^s}{\partial n} = Tp^s \text{ на } \Gamma_R. \tag{12}$$

Для краткости на последнюю задачу будем ссылаться как на задачу 1.

4. Сведение задачи 1 к слабой формулировке. Разрешимость задачи сопряжения

Теперь мы можем свести задачу 1 к слабой формулировке. Введем гильбертово пространство $V = H^1(B_R)$ комплексных функций с нормой $\|S\|_V = \|S\|_{H^1(B_R)}$. Пусть $S \in V$ — произвольная функция. Отметим, что S имеет следы $S|_{\Gamma_e} \in H^{1/2}(\Gamma_e)$, $S|_{\Gamma_i} \in H^{1/2}(\Gamma_i)$ и $S|_{\Gamma_R} \in H^{1/2}(\Gamma_R)$. Умножим уравнение $L_0 p_i = 0$ на $\overline{S}|_{\Omega_i}$, уравнение $Lp = 0$ на $\overline{S}|_{\Omega}$, уравнение $L_0 p = 0$ на $\overline{S}|_{\Omega_e}$. Далее проинтегрируем по Ω_i, Ω, Ω_e соответственно и, используя формулы Грина и соотношения $p_e = p^{inc} + p^s$ в Ω_e и $\partial p^s/\partial n = Tp$ на Γ_R, сложим полученные тождества и учитывая граничные условия (3), получим:

$$a_\eta(P, S) = F(S) \equiv \langle f^{inc}, S\rangle + \int_\Omega \rho^{-1} f\overline{S} dx \;\; \forall S \in X. \tag{13}$$

Здесь $a : X \times X \to \mathbb{C}$ и $F : X \to C$ – полуторалинейная и антилинейная формы, определяемые формулами

$$a(P, S) = \int_{\Omega_i} (\nabla p_i \cdot \nabla\overline{S} - k_0^2 p_i \overline{S}) d\mathbf{x} + \int_\Omega \left((\rho^{-1}\nabla p) \cdot \nabla\overline{S} - k_0^2 \eta p \overline{S}\right) d\mathbf{x} +$$
$$+ \int_{\Omega_e} (\nabla p_e \cdot \nabla\overline{S} - k_0^2 p_e \overline{S}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_R} T(P)\overline{S} d\sigma, \tag{14}$$

$$F(S) = \langle f^{inc}, S\rangle + \int_\Omega \rho^{-1} f\overline{S} dx, \langle f^{inc}, S\rangle = -\int_{\Gamma_R} Tp^{inc}\overline{S} d\sigma + \int_{\Gamma_R} \frac{\partial p^{inc}}{\partial n}\overline{S} d\sigma. \tag{15}$$

Решение $P \in X$ задачи (5) будем называть слабым решением задачи 1. Задача (5) представляет собой слабую формулировку исходной задачи сопряжения. Важной

проблемой является разработка эффективного численного алгоритма решения задачи 1. В настоящей работе мы применим для этого метод конечных элементов. МКЭ удобен тем, что в мире имеется большое количество пакетов программ, основанных на использовании МКЭ. Один из таких пакетов – FreeFem++(см. [6]) и предполагается использовать в настоящей работе. Разработанный на основе МКЭ численный алгоритм мы будем применять для нахождения поля, рассеянного на препятствии Ω в том случае, когда параметры оболочки отвечают нерассеивающей оболочке, построенной в разд. 2. При этом в качестве падающей волны мы будем брать поле точечного источника, расположенного вне области Ω .
Удобно взять точечный источник, расположенный в точке $\mathbf{x}_0 = (0, 0, z_0)$, $z_0 > b$, где b – радиус внешней оболочки Поле данного источника описывается формулой

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}.$$

Ясно, что это поле не зависит от угла φ, поэтому решение исходной задачи сопряжения также не зависит от φ. Таким образом, она становится двумерной и ее следует рассматривать в плоскости r, θ. Это упрощает как сам процесс численного решения с помощью пакета FreeFem++, так и выдачу результатов. Теперь следует: 1. Ввести полученные выражения, отвечающие нерассеивающей оболочке, в пакет FreeFem++. 2. Задать основные параметры сетки на Σ_i и Σ_R, выбирая число узлов равным 40, 80 или 160. 3. Провести расчеты для указанных значений N и выдать значения решения в сравнении со значениями, полученными теоретически.

5. Заключение

В данной работе была выведена слабая формулировка исходной задачи сопряжения и доказана разрешимость задачи 1. Предложен и исследован алгоритм решения прямой задачи в пакете FreeFem++. Дальнейшему изучению особенностей FreeFem++ и анализу численных расчетов будет посвящена отдельная работа автора.

Список литературы

1. S.A. Cummer, D. Schurig One path to acoustic cloaking // New J. Phys. 2007. V. 9. 45.
2. Cummer S.A., Popa B.I., Schurig D. et al. Scattering theory derivation of a 3D acoustic cloaking shell// Phys. Rev. Letters. 2008. V. 100. P. 024301.
3. Алексеев Г.В., Романов В.Г. Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики// Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 6, № 2, С. 1–6.
4. Дубинов А.Е., Мытарева Л.А. Маскировка материальных тел методом волнового обтекания // Успехи физ. наук. 2010. Т. 180, № 5. С. 475–501.
5. Alekseev G.V. Cloaking via impedance boundary condition for the 2-D Helmholtz equation // Applicable Analysis. 2013. V. 93,№ 5. P. 1–15.
6. http://www.freefem.org/ff++/index.htm
7. 6. Г.В. Алексеев, Р.В. Бризицкий, В. Г. Романов Оценки устойчивости решений задач граничного управления для уравнения Максвелла при смешанных граничных условиях // Доклады Академии наук, 2012, Т. 447, № 1. С. 7–12

УДК 004.252, 004.074.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ РАБОТЫ ПАМЯТИ В NUMA-УЗЛАХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО КЛАСТЕРА

Д.В. Леонтьев
Дальневосточный Федеральный Университет
Россия, 690950, Владивосток, Суханова, 8
E-mail: devozh@dvo.ru

Г.В. Тарасов
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио, 5
E-mail: george@dvo.ru

Д.И. Харитонов
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио, 5
E-mail: demiurg@dvo.ru

Ключевые слова: архитектура вычислительных систем, неоднородный доступ к памяти, производительность вычислительных систем

В работе рассматриваются вопросы производительности работы оперативной памяти вычислительной системы с неоднородной архитектурой памяти. Описывается алгоритм тестирования и структура разработанных тестов. Проводится сравнительный анализ скорости работы памяти для вычислительного кластера на базе узлов с AMD и Intel процессорами, построенными по архитектуре NUMA.

Введение

Последние годы рост производительности вычислительных систем достигается наращиванием количества вычислительных ядер. Это могут быть как ядра процессоров общего назначения, так и специфические (легковесные) ядра графических ускорителей и ядра сопроцессоров специального назначения. Разнообразие многоядерных архитектур накладывает отпечаток на структуру оперативной памяти вычислителя. В современных вычислительных узлах подсистема оперативной памяти имеет сложную многоуровневую архитектуру, включающую непосредственно микросхемы памяти (DRAM), контроллеры доступа к памяти из процессора, промежуточную кэш-память между ядрами процессора и контроллером, регистры вычислительного ядра. Если элементы архитектуры выстроить в порядке возрастания времени доступа к соответствующему уровню со стороны вычислительного ядра, то разница между максимальным и минимальным временем доступа может составлять десятки и сотни тактов. Так, доступ к регистрам обычно происходит за 1 такт работы процессора, доступ к микросхемам памяти по разным оценкам составляет 50-100 тактов [1, 2]. С увеличением количества вычислительных ядер (процессоров) в рамках вычислительного узла разработчики аппаратного обеспечения вынуждены находить оригинальные решения, позволяющие уменьшить влияние разницы в скорости доступа и обеспечить необходимый показатель производительности выполнения команд. Однако, в реальных вычислительных задачах ситуация может обстоять несколько иначе. Игнорирование частных архитектурных особенностей, заложенных разработчиками в заданную вычислительную систему, может привести к значительному падению производительности и эффективности прикладной программы. Поэтому задача исследования этих частных характеристик вычислительных систем является актуальной и практически значимой. В данной работе основное внимание уделяется исследованию производительности подсистемы памяти на NUMA-узлах вычислительного кластера. В первой части работы описывается методика измерений тех или иных характеристик памяти. Во второй части описываются результаты измерений этих характеристик на узлах вычислительного кластера ЦКП “Дальневосточный Вычислительный Ресурс” ДВО РАН.

1. Алгоритм измерений

Алгоритм измерение скорости работы той или иной подсистемы компьютера достаточно простой. Нужно составить такую функцию в программе, которая бы задействовала заданные возможности вычислительной системы. Перед вызовом этой функции и по окончанию ее работы замерить время (например, астрономическое или относительное время). По разнице этих значений с заданной точностью определить соответствующую частную характеристику. Несмотря на явную простоту всего процесса, есть несколько требований, которые увеличивают сложность работы. Первое требование — для формирования измерительной нагрузки необходимо использовать такие инструменты, которые доступны рядовому пользователю, и которые могут использоваться в прикладных программах. Другими словами, нет необходимости использовать специфический платформозависимый код. Понятно, что оптимизацию этого кода можно довести до совершенства и получить пиковые характеристики, которые уже известны по спецификации имеющегося оборудования. Авторов прежде всего интересует производительность памяти при использовании стандартных библиотек, доступных рядовому пользователю. Для работы с памятью в работе использовалось две библиотеки:

- Стандартная библиотека GNU libc
- библиотека libnuma

Второе требование состоит в том, чтобы исследовать производительность работы памяти в многопоточном режиме при пиковых нагрузках на процессор. Таким образом, можно эмулировать работу вычислительного приложения работающего с большими объемами памяти. Третьим требованием является работа в реальных условиях. То есть не создается никаких специальных условий для измерительной функции.

Измерения проводятся в условиях реальной работы операционной системы с учетом непредсказуемых задержек, связанных с работой планировщика процессов. Данное требование приводит к тому, что достоверно и точно нельзя измерить значение времени работы исследуемой функции. Всегда будет некоторый разброс времени. Учитывая это требование, в алгоритм вводится блок статистического анализа результатов измерений, позволяющий оценить их достоверность. Используется три критерия оценки достоверности:

1. Критерий Пирсона (Хи-квадрат).

2. Разброс результатов измерений не превышает двух процентов значения измеряемой величины. Если разброс времени был больше, то пытаемся применить третий критерий.

3. Третий критерий — это на гистограмме частот можно выделить интервал шириной более 80 %, который удовлетворяет критерию Пирсона.

Таким образом, общий алгоритм измерения времени организован следующим образом. Задается некоторое начальное число итераций выполнения измеряемой функции и объявляется первый раунд измерений. Выполняется раунд измерений, который состоит из цикла запусков измеряемой функции. По окончанию раунда производится статистический анализ результатов измерений в соответствии с описанными выше критериями. Если по какому-то из трех критериев будет признано, что результаты измерений положительными, то процедура прекращается и среднее значение за все итерации текущего раунда объявляется результатом измерений. В противном случае запускается следующий раунд, который состоит в увеличении числа итераций в два раза. Алгоритмически задано, что может происходить не больше шести раундов измерений. Если за все шесть раундов не удается добиться выхода на какой-либо критерий, результаты следует повторить измерения сначала.

2. Результаты измерений

Описанный алгоритм реализован в виде программного средства на языке C++. В работе на данный момент подготовлено три группы тестов:

1. однопоточная запись в общий массив памяти (порядка 80% общего размера доступной памяти) блоками по k мегабайт;

2. многопоточная запись в общий массив память блоками по 500МБ N количеством потоков при: а) отключенной привязке к ядру; б) включенной привязке потока к процессору; в) включенной привязке потока к ядру;

3. копирование данных из памяти одного NUMA-узла в другой блоками размером по 500МБ.

Описанные тесты запускались на узлах вычислительного кластера центра коллективного пользования “Дальневосточный Вычислительный Ресурс” ДВО РАН. Использовалось два типа узла:

1. Стандартный расчетный узел (AMD). Имеет четыре 12-ядерных процессора AMD Opteron 6164HE с частотой 1.7 ГГц (кэш L1 = 12 x 128 КБ (64+64), L2 = 12 x 512 КБ, L3 = 2 x 6 МБ).

2. Гибридный расчетный узел (Intel). Имеет два 4-ядерных процессора Intel Xeon L5609 с частотой 1.87 ГГц (кэш L1 = 4 x 64 КБ (32+32), L2 = 4 x 256 КБ, L3 = 12 МБ).

Были получены следующие основные результаты

2.1. Первая группа тестов

Первая группа тестов предназначена для оценки производительности работы памяти при последовательной записи одним потоком. Результаты измерений показаны на рисунке 1 (шкала по оси OY является логарифмической; диапазон значений от 10 мкс до 1 с реального времени). Видно, что гибридный вычислительный узел в среднем на 25 % быстрее стандартного вычислительного узла. Более того на объемах блоков не превышающих размер кэш-памяти L3 (0.5, 1, 3 МБ) процессор Intel показал двукратное ускорение по сравнение с процессором AMD. Полученные результаты сравнивались с широко известной утилитой тестирования памяти memtest86+ [3], которая также показала, что подсистема памяти на узлах с процессором Intel работает в два раза быстрее, чем на узлах с процессором AMD. Учитывая, что конфигурация памяти на обоих узлах является практически одинаковой (у Intel модули памяти работают даже на меньшей частоте DDR3-1066 против DDR1333 у AMD), то можно сделать вывод, что контроллер памяти у процессора Intel более производительный.

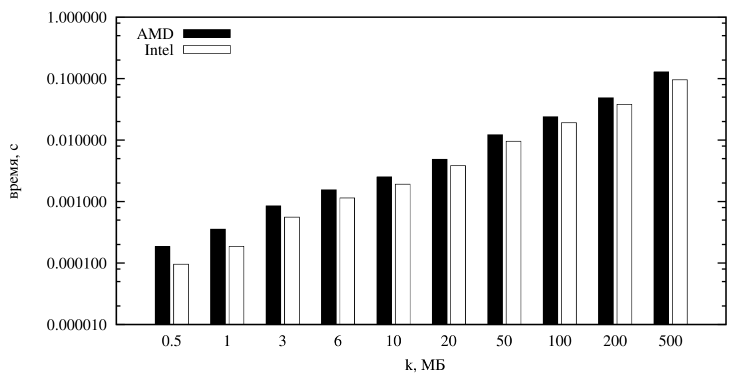
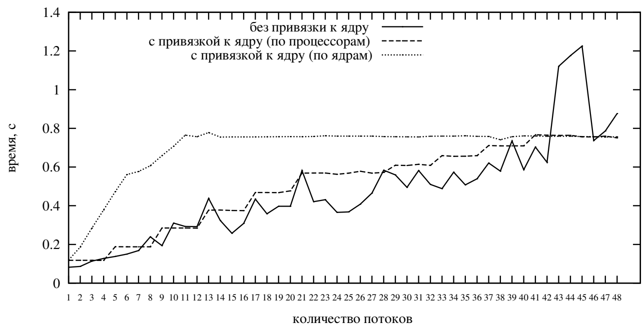


Рис. 1. Производительность блочной записи в память

2.2. Вторая группа тестов

Второй группой тестов измерялась производительность при выполнении различным количеством параллельных потоков последовательной записи произвольных данных в память. Результаты измерений показаны на рисунке 2. Левый график отображает производительность память на узле с процессорами AMD, правый на узле с процессорами Intel. Тестирование проводилось для трех режимов диспетчеризации потоков. Тонкой пунктирной линией отображается режим, когда привязка потока осуществляется по ядрам, то есть сначала выделялись ядра одного процессора, потом второго и т.д. Видно, что насыщение в этом режиме наступает тогда, когда полностью задействован один процессор (12 ядер). Дальнейшее увеличение числа потоков не оказывает влияния на скорость записи данных, так как каждый процессор обладает собственными каналами доступа к памяти. Толстым пунктиром показан режим, когда привязка поток осуществляется по процессорам, то сначала выделяет первое ядро первого процессора, потом первое ядро второго процессора и т.д. по кругу. Видно, что насыщение в этом режиме идет плавно, ступеньками по четыре потока. То есть каждые следующие четыре потока (на каком-либо процессоре) добавляют нагрузки на работу подсистемы памяти. И сплошной линией показан режим, когда привязка вообще не осуществлялась. Операционная система сама выбирала оптимальное распределение потоков по ядрам в соответствии с их нагрузкой. Видно, что этот график не имеет какой-либо периодичности за исключением постепенного нарастания времени с увеличением числа потоков. Интересно отметить, что при отсутствии привязки производительность работы памяти возросла (за меньшее время потоки записывают такой же объем данных). Практически аналогичная картина наблюдается для процессора Intel. За исключением того, что режим без привязки ядра не превысил по производительности другие режимы.



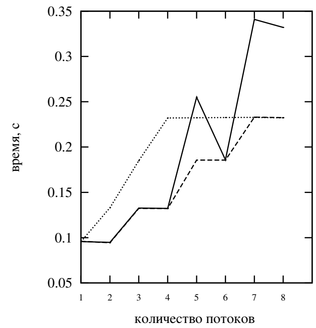


Рис. 2. Производительность параллельной записи (AMD и Intel)

2.3. Третья группа тестов

Третьей группой тестов измерялась производительность передачи данных между памятью различных NUMA-узлов. Граф связности NUMA-узлов показан на рисунке 3. Слева вычислительный узел с процессорами AMD, справа с Intel. Кружком показан один NUMA-узел (включая собственную память узла). Числом внутри NUMA-узла показано количество ядер данного узла. Пунктирной линией сгруппированы NUMA-узлы, которые образуют один физический процессор. В данной группе тестировались все возможные варианты передачи данных. С помощью библиотеки libnuma осуществлялась привязка кода к заданному NUMA-узлу i и выделялся блок памяти размер 500 МБ на узле j. После чего выполнялся алгоритм измерений, который состоял в копировании из памяти узла i в память узла j блока указанного размера. Тесты были проведены для всех возможных пар вершин графа (включая петли). Основные результаты сведены в таблицу 1.

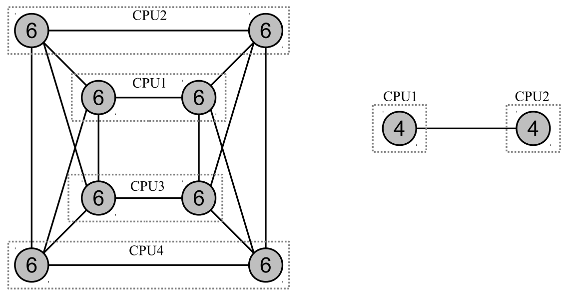


Рис. 3. Производительность параллельной записи (AMD и Intel)

Таблица 1. Пример расположения таблицы

Узел на базе процессора	min t, c	max t, c
AMD	0.119	$0,262$
Intel	0.129	0.180

Заключение

С помощью разработанных алгоритмов выполнено тестирование работы некоторых частных характеристик оперативной памяти узлов вычислительного кластера ЦКП “ДВВР” ДВО РАН. Обнаружено, что доступ к памяти в узлах с процессорами Intel работает быстрее, хотя по своим внутренним характеристикам эта память медленней. Минимальное время у AMD получилось меньше примерно на 10 %, но по средним результатам он проигрывает почти на 25 %. Данный результат следует связывать с существенно большим количеством ядер и связей в архитектуре NUMA. Также было установлено, что накладные расходы на взаимодействие процессоров между собой составляет у AMD более 200 %, у Intel — всего 71 %.

Список литературы

1. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. — СПб.: БХВ-Петербург, 2002. — 608 с.: ил.
2. Urlich Drepper. What Every Programmer Should Know About Memory [Электронный ресурс] // Linux Weekly News [Офиц. сайт]. URL: http://lwn.net/Articles/259710/ (дата обращения: 25.05.2013).
3. Memtest86 — And Advanced Memory Diagnostic Tool [Офиц. сайт]. URL: http://www.memtest.org/ (дата обращения: 15.05.2013).

УДК 519.23

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОЛОЖЕНИЯ И МАСШТАБА НА ОСНОВЕ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В.Н. Лиховидов
Школа естественных наук ДВФУ
Россия, 690695, Владивосток, Октябрьская 27
E-mail: V.Likhovidov@forexschool.ru

А.А. Бурдинский
Школа естественных наук ДВФУ
Россия, 690695, Владивосток, Октябрьская 27
E-mail: aleks-burdinsk@yandex.ru

Ключевые слова: оценки параметров положения и масштаба, эмпирическая функция распределения, состоятельность и асимтотическая нормальность оценок, асимптотическая дисперсия

Введение

Предложен метод построения оценок параметров сдвига и масштаба для вероятностных распределений, в котором непосредственно используется эмпирическая функция распределения (ЭФР). Доказана состоятельность и асимптотическая нормальность полученных таким образом оценок, выведены выражения для их асимптотической дисперсии, исследованы свойства оценок для выборок конечной длины.

1. Оценки параметров масштаба и положения на основе ЭФР

Рассмотрим семейство вероятностных распределений вида:

$$F(x) = F_0\left(\frac{x-a}{b}\right). \tag{1}$$

$F_0(x)$ - некоторая полностью известная функция распределения. Параметры a и b (a - параметр положения ($-\infty < a < \infty$), b - параметр масштаба ($b > 0$)) предполагаются неизвестными и их оценки должны быть построены на основе повторной выборки - последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с общей функцией распределения $F(x)$. Эмпирическая функция распределения определяется равенством:

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n}|\{k : X_k \leqslant x\}|. \qquad (2)$$

Известно, что $\hat{F}(x)$ является состоятельной асимптотически нормальной оценкой для $F(x)$; ЭФР при $n \to \infty$ сходится к броуновскому мосту ([1], [2]):

$$\hat{F}(x) \to F(x) + \frac{w_0\,(F(x))}{\sqrt{n}}. \qquad (3)$$

Выберем некоторый набор “уровней” $Y_1, Y_2, \ldots, Y_M (Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_M, M > 2)$. Заменяя в (1) функцию распределения $F(x)$ ее эмпирической оценкой $\hat{F}(x)$, запишем (приближенное) равенство:

$$F_0\left(\frac{Y_i - a}{b}\right) \cong \hat{F}(Y_i).$$

Предполагая $F_0(x)$ монотонно возрастающей, запишем:

$$\frac{Y_i - a}{b} = F_0^{-1}(\hat{F}_n(Y_i)) = g_i,$$

где F_0^{-1} - функция, обратная к F_0, и обозначено для краткости $g_i = F_0^{-1}(\hat{F}(Y_i))$, получаем соотношения $\frac{Y_i - a}{b} = g_i$, которые преобразуем в систему равенств:

$$a + bg_i - Y_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Значения a, b наилучшим образом удовлетворяющие этой системе, ищем методом наименьших квадратов

$$\sum_{i=1}^{M}(a + bg_i - Y_i)^2 \to min,$$

и решая соответстувующую систему двух линейных уравнений, получаем решение в явном виде:

$$\hat{b} = \frac{\overline{Yg} - \overline{Y}\,\overline{g}}{\overline{g^2} - (\overline{g})^2}, \quad \hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{g}. \qquad (4)$$

Здесь введены условные обозначения вида

$$\overline{Z} = \tfrac{1}{M}\textstyle\sum_{i=1}^{M} Z_i, \quad \text{например}, \overline{g^2} = \tfrac{1}{M}\textstyle\sum_{i=1}^{M} g_i^2.$$

2. Статистические свойства оценок

Асимптотические свойства оценок сформулированы в виде теоремы. ***Теорема 1***. Предположим, что функция распределения $F(x)$ непрерывно дифференцируема, причем плотность $p(x) = F'(x)$ не обращается в 0 в выбранных точках $Y_1, Y_2, \ldots, Y_M : p(Y_i) > 0$. Тогда оценки параметров масштаба и положения, определяемые формулой (4) являются состоятельными, т.е. при $n \to \infty$

$$P\left\{|b - \hat{b}| > \epsilon\right\} \to 0 \quad (\forall \epsilon > 0),$$

(аналогично для a) и асимптотически нормальными оценками: при $n \to \infty$ распределение оценки $\hat{b}$ имеет вид $\aleph\left(b, \frac{\sigma_b^2}{n}\right)$, соответственно для оценки $\hat{a}$ асимптотичесое распределение есть нормальное распределение $\aleph\left(a, \frac{\sigma_a^2}{n}\right)$. Асимптотические дисперсии этих оценок могут быть представлены в виде:

$$\sigma_b^2 = \textstyle\sum_{i,j=1}^{M} f_i^b f_j^b \sigma_{ij}, \quad \sigma_a^2 = \sum_{i,j=1}^{M} f_i^a f_j^a \sigma_{ij}, \qquad (5)$$

где
$$f_i^b = \frac{b^2}{MS_Y^2}\frac{(Y_i-\overline{Y})}{p_0(Y_i)}, \quad f_i^a = \frac{b}{Mp_0(Y_i)}\left(\frac{(Y_i-\overline{Y})(Y_i-a)}{S_Y^2}-1\right), \tag{6}$$

S_Y^2 обозначает $S_Y^2 = \overline{Y^2} - (\overline{Y})^2$, а матрица $\{\sigma_{ij}\}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} &\sigma_i^2 = \sigma_{ii} = F(Y_i)(1-F(Y_i)),\\ &\sigma_{ij} = F(Y_i)(1-F(Y_j)), i<j,\\ &\sigma_{ij} = F(Y_j)(1-F(Y_i)), i>j. \end{aligned} \tag{7}$$

Идея доказательства теоремы представлена в Приложении.

3. Исследование свойств оценок

Для иллюстрации свойств полученных оценок были выбраны три типа распределений: распределение Гаусса, Коши и Лапласа. Функция распределения $F(x)$ и соответствующая ей плотность $p(x) = F'(x)$ при значениях параметров масштаба и положения равных a, b получаются из “стандартных” распределений $F_0(x), p_0(x)$, соответствующих $a = 0, b = 1$ в соответствии с формулой (1). Уровни Y_i выбирались разделенными равными значениями вероятности: $F(Y_i) = i/(M+1)$, то есть, вероятности всех интервалов (Y_{i-1}, Y_i) одинаковые и равны $1/(M+1)$; например, при $M = 3$ каждая вероятность будет равна 1/4. Поскольку распределения здесь симметричны относительно 0, то при таком выборе уровней Y_i будет $\overline{Y} = 0$, а значит $S_Y^2 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} Y_i^2$ и формулы для дисперсии приобретают вид:

$$\sigma_b^2 = \frac{b^4}{M^2 S_y^2}\sum_{i,j=1}^{M}\frac{Y_iY_j\frac{i}{M+1}\left(1-\frac{j}{M+1}\right)}{p_0(Y_i)p_0(Y_j)}.$$

Все вычисления проводились в пакете MatLab с использованием встроенных функций. Характер зависимости асимптотической дисперсии от числа уровней M представлен на рисунке 1. Кроме асимптотических свойств исследовались также свой-

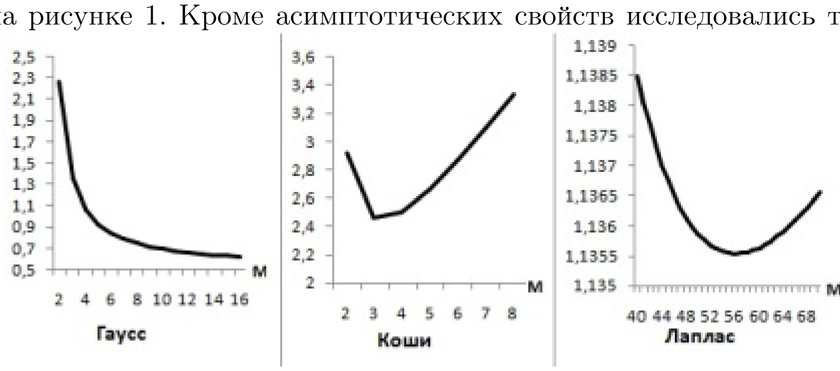


Рис. 1. Зависимость дисперсии от количества уровней M

ства распределений оценок $\hat{a}, \hat{b}$ для выборок конечной длины ($n < \infty$). Рассмотрен частный случай двух уровней ($M = 2$), когда $\hat{a} = (Y_2g_1 - Y_1g_2)/(g_1-g_2), \hat{b} = (Y_1-Y_2)/(g_1-g_2)$. Здесь также учитывалась вероятность вырождения оценок (при $M = 2$ оценки не существуют если одна из $g_i = \pm\infty$ или $g_1 = g_2$). Совместное распределение $\hat{F}(Y_1)$ и $\hat{F}(Y_2)$ может быть записано в виде:

$$p_{ij} = P\left(\hat{F}(Y_1) = \frac{i}{n}, \hat{F}(Y_2) = \frac{j}{n}\right) = \frac{n!F^i(Y_1)(F(Y_2)-F(Y_1))^{(j-i)}}{i!(j-i)!(n-j)!(1-F(Y_2))^{(n-j)}}$$

для $i = 0, \dots, n; j = i \dots n$; с нулевой вероятностью $p_{ij} = 0$ для всех остальных пар i, j. Имея такое распределение мы можем получить совместное распределение для двух случайных переменных $g_1 = F_0^{-1}(\hat{F}(Y_1))$, $g_2 = F_0^{-1}(\hat{F}(Y_2))$, и затем вывести распределение для случайной величины $\hat{b} = (Y_1 - Y_2)/(g_1 - g_2)$ - оценки параметра масштаба для $M = 2$. Набор возможных значений $\hat{b}$ определяется соответствующим набором значений $\hat{F}(Y_1)$ и $\hat{F}(Y_2)$. На рисунке 2 представлена аппроксимация плотностей распределения вероятностей оценки параметра масштаба для распределения Коши с истинными значениями параметров $a = 0$ и $b = 1$ (длина выборки n равна соответственно 20 и 100). Вероятности получить вырожденную оценку в этих случаях равны соответственно $6,34 * 10^{-3}$ и $6,41 * 10^{-13}$.

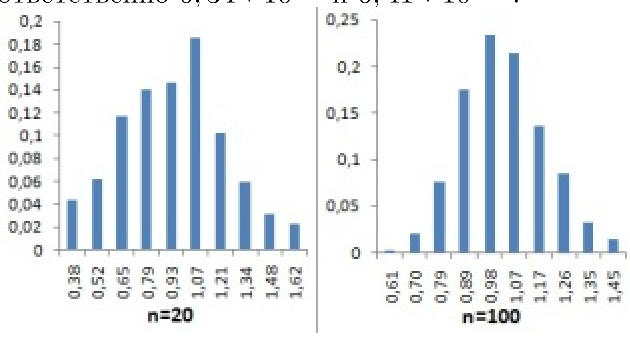


Рис. 2. Аппроксимация плотностей распределения вероятностей $\hat{b}$

Заключение

Предложен простой в вычислительном отношении универсальный метод построения оценок параметров положения и масштаба для вероятностных распределений. Выведенные формулы и реализованные алгоритмы позволяют исследовать свойства оценок для разных типов распределений, а также при нарушении условий Теоремы (например, при засорении экспериментальной выборки). Полезным свойством оценок является наличие в них параметров ("уровней"), которые находятся в распоряжении пользователя. Благодаря возможности выбора таких параметров в алгоритме, оценки могут быть полезны во многих прикладных задачах, связанных со статистическим анализом наблюдений и управлением.

Список литературы

1. Боровков А. А. Математическая статистика. М.: Наука, 1984.
2. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
3. Закс Ш. Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975.

Приложение

К доказательству теоремы. Броуновский мост $w_0(t)$ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$Ew_0(t_i)w_0(t_j) = t_i(1 - t_j), 0 < t_i < t_j < 1, \tag{8}$$

что следует из представления $w_0(t) = w(t) - tw(t)$, где $w(t)$ - стандартный винеровский процесс, у которого сечения имеют совместное нормальное распределение с нулевым математического ожидания $Ew(t_i) = 0$ и ковариационной функцией $Ew(t_i)w(t_j) = min(t_i, t_j)$. Асимптотические распределения для оценок $\hat{a}, \hat{b}$ могут быть получены на основе Теоремы об асимптотической нормальности функции от случайных величин ([1]): если случайные величины $\xi_{ni}, i = 1, 2, \ldots, M$ имеют совместное асимптотическое нормальное M-мерное распределение, со средним вектором $m_1, \ldots, m_M$ и ковариационной матрицей: $\{\sigma_{ij}\}$, $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$, а $f(\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk})$ - заданная дифференцируемая функция, тогда распределение случайной величины $(f(\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk}) - f(m_1, \ldots, m_M))/(\sigma/\sqrt{n})$ стремится при $n \to \infty$ к стандартному нормальному $\aleph\,(0,1)$. Здесь обозначено

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{M} f_i f_j \sigma_{ij}, \quad f_i = \frac{\partial f(m_1, \ldots, m_M)}{\partial m_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Следует положить $\xi_{ni} = \hat{F}(Y_i)$. Тогда получаются необходимые соотношения для асимптотических математических ожиданий $m_i = E(\xi_{ni}) = F(Y_i)$ и формулы для асимптотической ковариационной матрицы, если применить Теорему об асимптотической нормальности к функции

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_M) = \frac{\overline{Yg} - \overline{Y}\,\overline{g}}{\overline{g^2} - \overline{g}^2}. \tag{9}$$

Поскольку асимптотически $g(m_i) = g(F(Y_i)) = F_0^{-1}(F_0((Y_i - a)/b)) = (Y_i - a)/b$, то имеем

$$f(m_1, \ldots, m_M) = \frac{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} Y_i \frac{Y_i - a}{b} - \overline{Y}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\frac{Y_i - a}{b}}{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(\frac{Y_i - a}{b})^2 - (\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\frac{Y_i - a}{b})^2} = b\frac{\overline{Y^2} - (\overline{Y})^2}{\overline{Y^2} - (\overline{Y})^2} = b.$$

Это и означает, что при $n \to \infty$ распределение оценки $\hat{b}$ есть $\aleph\left(b, \frac{\sigma_b^2}{n}\right)$, а значит, $\hat{b}$ сходится к b по вероятности, и $\hat{b}$ - состоятельная асимптотически нормальная оценка. Для функции f из (9) величины f_i, принимают вид:

$$f_i = b^2 g'(m_i)/(MS_y^2)(Y_i - \overline{Y}).$$

Поскольку g - обратная функция к функции распределения, то ее производная $g'(m_i) = 1/(p_0(Y_i))$, отсюда и следует выражение для асимптотической дисперсии оценки $\hat{b}$ в виде формулы (5), (6). Аналогичным образом, доказывается несмещенность и асимптотическая нормальность для оценки $\hat{a}$.

УДК 517.958

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ НЕРАССЕИВАЮЩЕЙ ОБОЛОЧКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ

А.В. Лобанов
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
E-mail: alekslobanov1@mail.ru

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, задача рассеяния, неоднородная среда, обратная задача, единственность, оценки устойчивости.

Исследуются обратные задачи для уравнения Гельмгольца, описывающего акустическое рассеяние на трехмерном включении. С помощью оптимизационного метода указанные задачи сводятся к обратным экстремальным задачам, в которых роль управлений играют переменный индекс рефракции и плотность граничных источников звукового поля. Излагаются некоторые результаты, полученные при ее теоретическом и практическом исследовании.

Введение

В последние годы большое внимание уделяется исследованию обратных задач для моделей акустического и электромагнитного рассеяния на неоднородных включениях. С помощью оптимизационного метода указанные задачи сводятся к обратным экстремальным задачам для указанных моделей. К необходимости решения такого типа задач приводят, в частности, задачи маскировки материальных объектов в жидких средах (см., например, [1, 2, 3, 4]). В цитируемых работах доказано существование маскировочных оболочек, причем установлено, что необходимым условием их существования является условие анизотропии исходной среды. Поскольку реализовать полученные решения на практике пока не представляется возможным (см. подробнее об этом в обзоре [5]), то естественной альтернативой к такому подходу выступает замена задачи точной маскировки материального тела задачей приближенной маскировки для модели акустики изотропной неоднородной среды. В математическом плане последняя задача сводится к обратной экстремальной задаче. В качестве функционального ограничения в ней выступает используемая модель рассеяния акустических волн, а роль функционала качества может играть квадрат нормы рассеянного искомой оболочкой поля. В данной работе рассматривается близкая обратная экстремальная задача для трехмерной модели акустического рассеяния.

1. Постановка задачи сопряжения

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ область Ω, удовлетворяющую следующему условию: (i) Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ типа шарового слоя с внутренностью Ω_i, внешностью Ω_e^∞ и криволинейной в общем случае липшицевой границей $\Gamma_i \cup \Gamma_e$, состоящей из двух компонент: внутренней Γ_i и внешней Γ_e. Области Ω и Ω_e^∞ заполнены жидкими средами с разными плотностями, $\rho = \mathrm{const}$ и $\rho_e = \mathrm{const}$, p и p_e – звуковое давление в Ω и Ω_e^∞ соответственно. Границу Γ_i будем считать абсолютно жесткой. Предположим, что во внешности Ω_e^∞ области Ω возникло поле p^{inc}. Поскольку область Ω является препятствием для поля p^{inc}, то падение этого поля на Ω приводит к появлению в области Ω входящего поля p, а в области Ω_e – появления рассеянного поля p^s. Задача определения полей p в Ω и p^s в Ω_e^∞ играет важную роль в теоретической акустике. Математически она сводится к задаче нахождения поля p в Ω и внешнего поля $p_e = p^{inc} + p^s$ в Ω_e^∞ путем решения следующей задачи сопряжения:

$$\Delta p + k^2 \eta p = -f \ \text{ в } \ \Omega, \ \Delta p_e + k^2 p_e = 0 \ \text{ в } \ \Omega_e^\infty, \tag{1}$$

$$p = p_e, \ \ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{\rho_e}\frac{\partial p_e}{\partial n} \ \text{ на } \Gamma_e, \ \ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = g \ \text{ на } \ \Gamma_i, \tag{2}$$

$$\frac{\partial p^s(\mathbf{x})}{\partial r} - ikp^s(\mathbf{x}) = o(r^{-1}) \quad \text{при } \ r = |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{3}$$

Здесь k – постоянное волновое число, $\eta = \eta(x)$ – переменный индекс рефракции в Ω, f – плотность объемных источников в Ω, (3) имеет смысл условия излучения Зоммерфельда в $\mathbb{R}^3$, функция g описывает плотность поверхностных источников звукового поля на внутренней границе Γ_i области Ω, которая играет роль поверхностной антенны, являющейся источником дополнительного звукового поля в области Ω. Введем шар B_R радиуса R с границей Γ_R, содержащий Ω. Положим $\Omega_e = \Omega_e^\infty \cap B_R$. Ниже будем использовать пространства $H^1(\Omega)$, $H^1(\Omega_e)$, $L^2(\Omega)$, $L^2(Q)$, $L^2(\Gamma_i)$, $L^2(\Gamma_r)$, $H^{1/2}(\Gamma_R)$, $H^{-1/2}(\Gamma_R)$, $H^s(\Omega), s > 0$ и $L^\infty(\Omega)$ с нормами $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, $\|\cdot\|_{1,\Omega_e}$, $\|\cdot\|_\Omega$, $\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|_{\Gamma_i}$, $\|\cdot\|_{\Gamma_r}$, $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_R}$, $\|\cdot\|_{-1/2,\Gamma_R}$, $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ и $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ соответственно. Здесь $Q \subset \Omega_e$ – произвольное открытое подмножество, $\Gamma_r \subset \Omega_e$ – сфера радиуса $r < R$, содержащая Ω. Положим $L^\infty_{\eta_0}(\Omega) = \{\eta \in L^\infty(\Omega) : \eta \geqslant \eta_0 > 0 \text{ в } \Omega\}$. Также введем пространство $H^1(\Delta, \Omega_e) = \{v \in H^1(\Omega_e) : \Delta v \in L^2(\Omega_e)\}$, наделенное нормой $\|v\|^2_{H^1(\Delta,\Omega_e)} = \|v\|^2_{1,\Omega_e} + \|\Delta v\|^2_{\Omega_e}$, и пространство $\mathcal{H}^{inc} = \big\{v \in H^1(\Delta,\Omega_e) : \Delta v + k^2 v = 0 \text{ в } \Omega_e\big\}$. Последнее служит для описания сужений падающих волн на область Ω_e. Для произвольной пары функций $p \in H^1(\Omega), p_e \in H^1(\Omega_e)$ положим $P = (p, p_e)$. Введем в рассмотрение гильбертово пространство $V = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega_e)$, состоящее из пар $P = (p, p_e)$ с нормой $||[P]||^2 = \|p\|^2_{1,\Omega} + \|p_e\|^2_{1,\Omega_e}$, и оператор “скачка” $\gamma_e : V \to H^{1/2}(\Gamma_e)$ через границу Γ_e формулой $\gamma_e P = [P]|_{\Gamma_e} \equiv p_e|_{\Gamma_e} - p|_{\Gamma_e}$ для $P \equiv (p, p_e) \in V$. Введем также ядро $X = \mathrm{Ker}\,\gamma_e \equiv \{P = (p, p_e) \in V : \gamma_e P = 0\}$.

2. Сведение к эквивалентной краевой задаче в ограниченной области

Сведем задачи (1)–(3) к эквивалентной краевой задаче, рассматриваемой в ограниченной области B_R. Введем отображение Дирихле–Неймана $T : H^{1/2}(\Gamma_R) \to H^{-1/2}(\Gamma_R)$, где $\tilde{u}$ – решение внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца

$\Delta u + k^2 u = 0$ в $\Omega_e^\infty \backslash B_R$ с условием $u|_{\Gamma_R} = h$. Задача (1)–(3) эквивалентна краевой задаче (1), (2), рассматриваемой в ограниченной области $\Omega \cup \Omega_e$ при следующем граничном условии для p^s:

$$\frac{\partial p^s}{\partial n} = Tp^s \text{ на } \Gamma_R. \qquad (4)$$

Для краткости на последнюю задачу будем ссылаться как на задачу 1.

3. Разрешимость задачи сопряжения

Пусть $S \in X$ – произвольная функция. Умножим первое уравнение в (1), рассматриваемое в области Ω, на $\overline{S}/\rho$, второе уравнение в (1), рассматриваемое в Ω_e, – на $\overline{S}/\rho_e$, где $S \in X$, проинтегрируем по Ω либо по Ω_e и применим формулу Грина по Ω либо по Ω_e. Складывая полученные тождества и используя два последних граничных условия в (2), приходим к следующему тождеству:

$$a_\eta(P,S) = \langle F, S\rangle \equiv \langle f^{inc}, S\rangle + \rho^{-1}\int\limits_\Omega f\overline{S}dx + \int\limits_{\Gamma_i} g\overline{S}d\sigma \ \ \forall S \in X. \qquad (5)$$

Здесь $a_\eta : X \times X \to \mathbb{C}$ и $F : X \to \mathbb{C}$ – полуторалинейная и антилинейная формы, определяемые формулами

$$a_\eta(P,S) = a_0(P,S) + a(\eta; P, S), \ \ a(\eta; P, S) = -k^2\rho^{-1}\int\limits_\Omega \eta P\overline{S}dx, \qquad (6)$$

$$a_0(P,S) = \rho^{-1}\int\limits_\Omega \nabla P\cdot\nabla\overline{S}dx + \rho_e^{-1}\int\limits_{\Omega_e}(\nabla P\cdot\nabla\overline{S} - k^2P\overline{S})dx - \rho_e^{-1}\int\limits_{\Gamma_R} T(P)\overline{S}d\sigma, \qquad (7)$$

$$\langle f^{inc}, S\rangle = -\rho_e^{-1}\int\limits_{\Gamma_R} Tp^{inc}\overline{S}d\sigma + \rho_e^{-1}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{\partial p^{inc}}{\partial n}\overline{S}d\sigma. \qquad (8)$$

Решение $P \in X$ задачи (5) будем называть слабым решением задачи 1.

4. Основные результаты

Основной целью является анализ обратных экстремальных задач для модели (1). Эти задачи состоят в минимизации определенных функционалов качества, зависящих от состояния (акустического поля $P = (p, p_e) \in X$) и неизвестных функций (управлений), удовлетворяющих уравнению состояния (5). В качестве управлений выберем функции η и g. Основное отличие между ними состоит в том, что η имеет смысл распределенного, причем мультипликативного, управления, нелинейно входящего в уравнение состояния (5), тогда как g является граничным управлением типа плотности источников, линейно входящим в (5). Будем предполагать, что управления η и g могут изменяться в некоторых множествах K_1 и K_2, причем выполняются следующие условия: (j) $K_1 \subset H^s_{\eta_0}(\Omega) = \{\eta \in H^s(\Omega) : \eta \geqslant \eta_0 > 0\}$, $s > 3/2$, $K_2 \subset L^2(\Gamma_i)$ – непустые выпуклые замкнутые множества; $f \in L^2(\Omega)$ – заданные функции. Полагая $K{=}K_1 \times K_2$, $u = (\eta, g)$, введем оператор $G : X \times K \times \mathcal{H}^{inc} \to X^*$ формулой $\langle G(P, u, p^{inc}), S\rangle = a_\eta(P, S) - F(S)$ и запишем слабую формулировку (5) задачи 1 в виде уравнения $G(P, u, p^{inc}) = 0$. Пусть $I : X \to \mathbb{R}$ — произвольный (пока) функционал качества. Рассмотрим экстремальную задачу

$$J(P,u) \equiv \frac{\alpha_0}{2}I(P) + \frac{\alpha_1}{2}\|\eta\|^2_{s,\Omega} + \frac{\alpha_2}{2}\|g\|^2_{\Gamma_I} \to \inf, \ \ (P,u) \in X\times K, \ \ G(P,u,p^{inc}) = 0. \qquad (9)$$

Здесь α_0, α_1 и α_2 – неотрицательные параметры. В качестве функционала качества будем рассматривать один из следующих:

$$I_1(P) = \|P - p^d\|_Q^2 = \int\limits_Q |P - p^d|^2 dx, \;\; I_2(P) = \int\limits_{\Gamma_r} |P - p^d|^2 d\sigma. \tag{10}$$

Здесь функция $p^d \in L^2(Q)$ (либо $p^d \subset L^2(\Gamma_r)$) моделирует измеренное в некоторой подобласти $Q \subset \Omega_e$ или на сфере $\Gamma_r \subset \Omega_e$ распределение акустического поля. При $p^d = p^{inc}$ функционал I_1 (либо I_2) имеет смысл квадрата L^2 – нормы рассеяного поля p^s по Q (либо по Γ_r). Введем множество $Z_{ad} = \{(P, u) \in X \times K : G(P, u, p^{inc}) = 0, J(P, u) < \infty\}$ допустимых пар (P, u) для задачи (9). Справедливы следующие теоремы. **Теорема 1.** *Пусть при выполнении условий (i), (j), $p^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$, $I : X \to \mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу функционал, множество Z_{ad} не пусто, $\alpha_0 > 0$, причем $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ и функционал I ограничен снизу либо $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, а K_1 и K_2 – ограниченные множества. Тогда задача (9) имеет по крайней мере одно решение $(P, u) \in X \times K$.* **Теорема 2.** *Пусть при выполнении условий (i), (j) пара $(\hat{P}, \hat{u}) \in X \times K$ является решением задачи (9), причем функционал I непрерывно дифференцируем по P в точке $\hat{P}$. Тогда существует единственный ненулевой множитель Лагранжа $R \in X$, который удовлетворяет комплексному уравнению Эйлера-Лагранжа*

$$a_0(\Psi, R) + a(\hat{\eta}; \Psi, R) = -(\alpha_0/2)\overline{\langle I'_P(\hat{P}), \Psi\rangle} \;\forall \Psi \in X, \tag{11}$$

и справедлив принцип минимума, эквивалентный вариационным неравенствам

$$\alpha_1(\hat{\eta}, \eta - \hat{\eta})_{s,\Omega} + \mathrm{Re} a(\eta - \hat{\eta}; \hat{P}, R) \geqslant 0 \;\; \forall \eta \in K_1, \tag{12}$$

$$\alpha_2(\hat{g}, g - \hat{g})_{\Gamma_i} - \mathrm{Re}((g - \hat{g}), R)_{\Gamma_i} \geqslant 0 \;\forall g \in K_2. \tag{13}$$

Прямая задача (5), тождество (11), имеющее смысл сопряженной задачи для сопряженного состояния $R \in X$, и вариационные неравенства (12), (13) образуют *систему оптимальности* для задачи управления (9). Она описывает необходимые условия экстремума для задачи (9). Доказательство приведенных выше теорем см. [15]. В настоящей момент разрабатывается численный алгоритм решения рассматриваемой задачи, основанный на использовании построенной системе оптимальности и пакета FreeFem++ [16] предназначенного для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных. Анализу сходимости алгоритма и обсуждение результатов вычислительных экспериментов будет посвящена отдельная статья автора.

Список литературы

1. S.A. Cummer, D. Schurig One path to acoustic cloaking // New J. Phys. 2007. V. 9. P. 45.
2. Cummer S.A., Popa B.I., Schurig D. et al. Scattering theory derivation of a 3D acoustic cloaking shell// Phys. Rev. Letters. 2008. V. 100. P. 024301.
3. Романов В.Г. Обратная задача дифракции для уравнений акустики // Доклады АН. 2010. Т. 431, С. 319-322.
4. Алексеев Г.В., Романов В.Г. Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики// Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15, № 2. С. 1–6.
5. Дубинов А.Е., Мытарева Л.А. Маскировка материальных тел методом волнового обтекания // Успехи физ. наук. 2010. Т. 180, № 5. С. 475–501.

6. Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В. Теоретический анализ экстремальных задач граничного управления для уравнений Максвелла // Сиб. журн индустр. матем. 2011. Т. 14, № 1. С. 3–16.
7. Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В., Романов В.Г. Оценки устойчивости решений задач граничного управления для уравнений Максвела при смешанных граничных условиях // Доклады АН. 2012. Т. 447, № 1 . С. 7–12.
8. Алексеев Г.В. Оптимизация в задачах маскировки материальных тел методом волнового обтекания // Доклады АН. 2013. Т. 449, № 6. С. 1–5.
9. Alekseev G.V. Cloaking via impedance boundary condition for the 2-D Helmholtz equation // Applicable Analysis. 2013. DOI:10.1080/00036811.2013.768340.
10. Beilina L., Klibanov M.V., A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem // SiAM J. Sci. Comp. 2008. V. 31. P. 478–509.
11. Beilina L., Klibanov M.V. A new approximate mathematical model for global convergence for a coefficient inverse problem with backscattering data // J. Inverse Ill-Posed Problems. 2012. V. 20. P. 513–565.
12. Colton D., Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. 2nd Edition. Springer-Verlag. Berlin. 2013.
13. Алексеев Г.В. Задачи управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики // Доклады АН. 2004. Т. 395, № 3. С. 322–325.
14. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука.
15. http://www.freefem.org/.

УДК 519.688

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНОГО УДЕРЖАНИЯ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ

Н.В. Малявин
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690091, Владивосток, Октябрьская 27
E-mail: nikitamalyavin@gmail.com

Ключевые слова: математическое моделирование, компьютерное моделирование, плазма, токамак, Current hole, метод конечных элементов, FreeFem++

Рассматриваются стационарная и нестационарная модели магнитного удержания плазмы в токамаке. Исследуются возможности пакета для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных на основе метода конечных элементов FreeFem++. Проведены компьютерное моделирование и визуализация процесса с использованием FreeFem++.

Введение

Перспективы развития энергетики XXI века в настоящее время связывается с решением проблемы управляемого термоядерного синтеза. Теоретические и практические исследования в этой области ведутся с 50-х годов прошлого века. Первые экспериментальные результаты с положительным КПД были получены в Китае в 2007 году [1]. Существует несколько подходов к осуществлению управляемого термоядерного синтеза, но наиболее хорошо исследованным и перспективным является синтез с использованием Токамака. Токамак (тороидальная камера с магнитными катушками) - тороидальная установка для удержания плазмы с помощью магнитных полей [2]. Цель данной работы – компьютерное моделирование состояния плазмы в Токамаке на основе метода конечных элементов. В качестве моделей, описывающих состояние плазмы, рассматриваются стационарная и нестационарная модели. В качестве стационарной модели взята модель равновесия Соловьёва на основе уравнения Грэда-Шафранова [3]. Нестационарная модель основана на упрощённой модели магнитной гидродинамики для случая цилиндрической симметрии. В рамках проведённого моделирования исследуется явление, известное в литературе как “Current Hole” [4]: с течением времени плотность тока в центре полоидального сечения токамака принимает значения близкие к нулю. Программная реализация метода конечных элементов осуществляется с помощью открытого пакета FreeFem++ [5]. Изучается возможность использования параллельных вычислений в пакете FreeFem++ при численной реализации изучаемых задач.

1. Стационарная модель равновесия Соловьёва

В этой части изучается модель равновесия Соловьёва на основе уравнения Грэда-Шафранова. В силу осевой симметрии в тороидальной плоскости и, как следствие, инвариантности вдоль угла θ, достаточно рассматривать полоидльное сечение токамака – область Ω (рис. 1). Таким образом, можно записать уравнение Грэда-Шафранова в декартовых координатах $\{R, Z\}$ в следующем виде:

$$-R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}\right) - \frac{\partial^2\psi}{\partial Z} = R^2\frac{dp}{d\psi} + F\frac{dF}{d\psi}, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где p - давледие плазмы, F - тороидальный ток, ψ - магнитный поток. Имеют место следующие равенства:

$$\begin{cases} p'(\psi) = \alpha = const, \\ F(\psi)F'(\psi) = \beta = const \end{cases} \tag{2}$$

Описывая полоидальное сечение тора, выразим соотвестсвующие декартовы координаты:

$$\begin{cases} R = R_0 + ax = R_0\left(1 + \varepsilon x\right), \\ Z = ay, \end{cases} \tag{3}$$

где $\varepsilon = \frac{a}{R_0}$. Теперь уравнение Грэда-Шафранова (1) вместе с (2) может быть выражено в следующем виде:

$$-\frac{1}{a^2}\left((1+\varepsilon x)div\frac{\nabla\psi}{1+\varepsilon x}\right) = \left(\alpha R_0^2(1+\varepsilon x)^2 + \beta\right). \tag{4}$$

Мы получили уравнение, известное как “уравнение Соловьёва”, выраженное в декартовых координатах $\{x, y\}$.

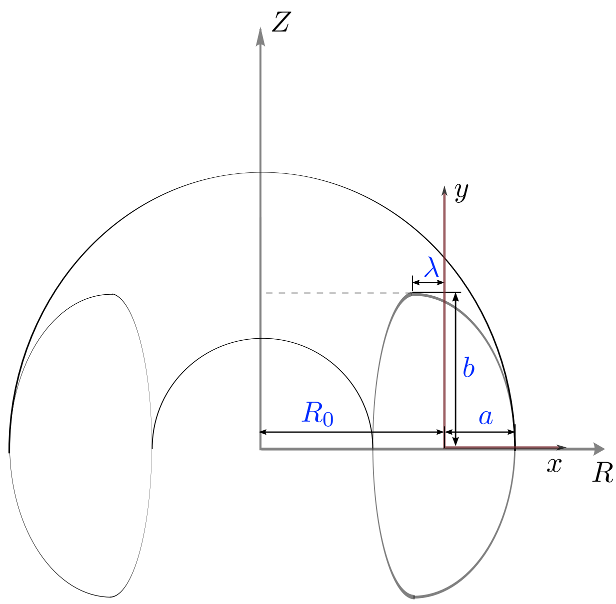


Рис. 1. Координатная система и обозначения: R_0 - тороидольный радиус, a, b - диаметры по осям x и y, λ - параметр триангуляции

2. Нестационарная модель состояния плазмы. Явление "Current Hole"

2.1. Постановка модели

Рассматривая цилиндрический случай ($\varepsilon = 0$), имеем следующую модель [6, 8]:

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial t} = [\psi, \phi] + \eta(J - J_c), \\ \frac{\partial\omega}{\partial t} = [\omega, \phi] + [\psi, J] + \nu\Delta\omega, \\ J = \Delta\psi, \\ \omega = \Delta\phi, \end{cases} \tag{5}$$

где $[\cdot,\cdot]$ - пуассоновы скобки:

$$[a, b] = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x}$$

В системе (5), по сравнению со стационарной моделью, добавлено три новых параметра: ϕ - потенциал скорости, J - плотность тороидального тока, ω - завихрённость плазмы.

2.2. Численное решение

Для численного интегрирования модели с помощью FreeFem++, дискретизируем модель по оси времени t. Далее воспользуемся схемой Кранка-Николсона. В случае однородного дифференциального уравнения первой степени $\frac{\partial u}{\partial t} = F(u)$, численное решение будет иметь вид:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\delta t} = \frac{F(u_n) + F(u_{n+1})}{2}. \tag{6}$$

Теперь, как и в [7], вспомнив о том, что

$$F(u_{n+1}) - F(u_n) \approx \frac{\partial F}{\partial u}(u_n)\delta u,$$

выразим $F(u_{n+1})$ и подставим в (6). Получим:

$$\left(1 - \frac{\delta t}{2}\frac{\partial F}{\partial u}(u_n)\right)\delta u = \delta t F(u_n).$$

Запишем теперь схему Кранка-Николсона для системы (5). Обозначим

$$\delta\psi = \psi_{n+1} - \psi_n,\ \delta\phi = \phi_{n+1} - \phi_n,\ \delta J = J_{n+1} - J_n,\ \delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n. \tag{7}$$

Пусть известны значения неизвестных функций $X = \{\psi, \phi, J, \omega\}$ в момент времени t_n. Найдём их значения в момент времени $t_{n+1} = t_n + \delta t$

$$\begin{cases} \frac{\delta\psi}{\delta t} = [\psi_n + \frac{1}{2}\delta\psi, \phi_n + \frac{1}{2}\delta\phi] + \eta(J_n + \frac{1}{2}\delta J - J_c), \\ \frac{\delta\phi}{\delta t} = [\omega_n + \frac{1}{2}\delta\omega, \phi_n + \frac{1}{2}\delta\phi] + [\psi_n + \frac{1}{2}\delta\psi, J_n + \frac{1}{2}\delta J] + \nu\Delta(\omega_n + \frac{1}{2}\delta\omega), \\ \delta J = \Delta(\delta\psi), \\ \delta\omega = \Delta(\delta\phi), \end{cases} \tag{8}$$

Полагая, что слагаемыми вида $\frac{1}{4}[\delta u, \delta v], u, v \in X$ можно пренебречь в силу их малости, преобразуем систему к следующему виду:

$$\begin{cases} \delta\psi + \frac{\delta t}{2}[\phi_n, \delta\psi] - \frac{\delta t}{2}[\psi_n, \delta\phi] - \frac{\delta t}{2}\eta\delta J = [\psi_n, \phi_n] + \eta(J_n - J_c), \\ \frac{\delta t}{2}[J_n, \delta\psi] - \frac{\delta t}{2}[\omega_n, \delta\phi] - \frac{\delta t}{2}[\psi_n, \delta J] + \delta\omega + \frac{\delta t}{2}[\phi_n, \delta\omega] - \frac{\delta t}{2}\nu\Delta\omega = \\ \qquad = [\omega_n, \psi_n] + [\psi_n, J_n] + \nu\Delta\omega_n, \\ \Delta\delta\psi + \delta J = 0, \\ \Delta\delta\phi + \delta\omega = 0; \end{cases} \tag{9}$$

Система (9) в итоге реализуется в пакете FreeFem++.

3. Вычислительные эксперименты

3.1. Стационарная модель: уравнение Соловьёва в D-образной области

В этом разделе будем сравнивать численное решение, полученное в пакете FreeFem++ с аналитическим решением уравнения Соловьёва (4) [3], которое, полагая, что параметр триангуляции $\lambda = 0$, может быть записано в следующем виде:

$$\psi(x,y) = 1 - \left(x - \frac{\varepsilon}{2}(1-x^2)\right)^2 - \left(\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)(1+\varepsilon x)^2\right)\left(\frac{a}{b}y\right)^2. \tag{10}$$

Следуя [6], параметры α, β были выбраны в виде:

$$\alpha = \frac{4(a^2+b^2)\varepsilon + a^2(2\lambda - \varepsilon^3)}{2R_0^2\varepsilon a^2 b^2},$$
$$\beta = 0.$$

В вычислениях также были использованы параметры: $\varepsilon = 0.3$, $R_0 = 5/3$, $a = 0.5$, $b = 0.7$, что даёт $\alpha \approx 4.35$. D-образная форма сечения задаётся следующим образом:

$$\partial\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}: \ x \in [-1,1], \ y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{1 - (x - \frac{\varepsilon}{2}(1-x^2))^2}{(1 - \frac{\varepsilon^2}{4})(1+\varepsilon x)}}\right\} \tag{11}$$

На рисунке 2 представлены результаты вычислений: точное значение магнитного потока ψ_{ex}, приближённое значение ψ, их производные по оси x. Ошибка при мощности сетки $N_\Omega = 255$, определённая как относительная разность

$$E(\psi) = \frac{\|\psi - \psi_{ex}\|_{L^2}}{\|\psi_{ex}\|_{L^2}} \approx 0.000728738.$$

3.2. Моделирование эффекта “Current Hole” на основе нестационарной модели

Система (5) моделирует нестационарное поведение функции плотности тока J. Для замыкания системы были добавлены однородные граничные условия; в начальный момент времени функция плотности тока является решением уравнения Грэда-Шафранова (1), ток J принимает значения J_c, остальные функции принимают

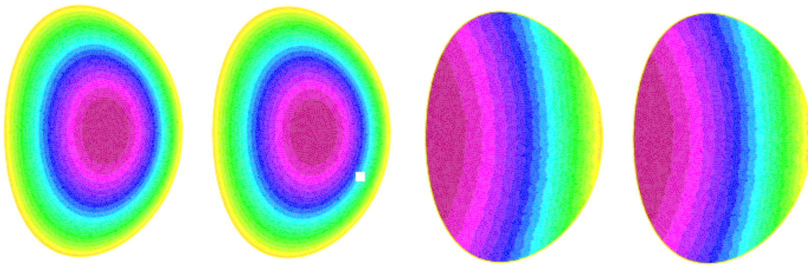


Рис. 2. Численное и точное решения уравнения Соловьёва слева направо: точное решение ψ_{ex}, численое решение ψ, производные $\frac{\partial \psi_{ex}}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$

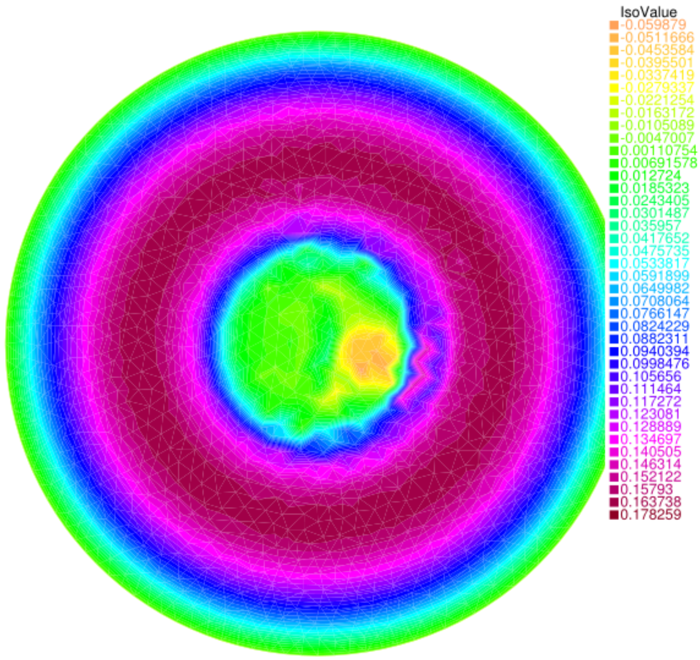


Рис. 3. Функция плотности тока в момент времени $t = 4000$ сек

нулевые значения. В поставленной задаче вычисления исходная плотность тока была выбрана как [6]:

$$J_c = 0.2(1 - r^4) - 0.2666(1 - r^2)^8, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Вязкость $\nu = 10^{-6}$, сопротивление $\eta = 10^{-5}$. Граница $\partial\Omega$ является окружностью радиуса 1:

$$\partial\Omega = \{(x, y),\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]\}.$$

На рис. 3 представлена фунция плотности тока в момент времени $t = 4000$ сек, полученная на основе схемы Кранка-Николсона в пакете FreeFem++. Вычисления проводились с шагом $\delta t = 1$ сек.

Список литературы

1. К.В.Брушлинский, В.В.Савельев. Магнитные ловушки для удержания плазмы. Мат. Моделирование, Т. 11, N 5, 1999, с. 3-36.
2. http://www.femto.com.ua/articles/part_2/4106.html - Токамак - статься из Физической энциклопедии.

3. L. S. Soloviev, in: M. A. Leontovich (Ed.). Reviews of Plasma Physics, 6, New York, Consultant Bureau, 1975, p. 257.
4. B. Despres, R. Sart. Reduced resistive MHD with general density I: Model and stability results. 2010.
5. http://www.freefem.org/ff++/index.htm - FreeFem++ Website.
6. D. Biskamp. Nonlinear magnetohydrodynamics. Cambridge University Press, 1997.
7. C. Hirstch. Numerical computations of internal and external flows, Fundamentals of numerical discretization, vol. 1, John Willey & Sons, 1988.
8. O. Czarny, G Huysmans. Bezier surfaces and finite elements for mhd simulations. Journal of computational physics, V. 227, N. 16, 2008, p. 7423-7445.

УДК 517.95

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ МАСКИРОВКИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ ДЛЯ МОДЕЛИ H-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

П. Р. Месенев
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690950, Владивосток, Суханова 8
E-mail: ox1omon@gmail.com

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, краевая задача, импеданс, задача управления, граничное управление, разрешимость

Рассматривается задача управления для двумерной модели электромагнитного поля, описывающей рассеяние электромагнитных волн в неограниченной однородной среде, содержащей неоднородное тело с покрытой специальными материалами границей. Внесение покрытия моделируется с помощью импедансного граничного условия. Роль управления в рассматриваемой задаче играет поверхностный импеданс. Доказано существование решения задачи управления и выведена система оптимальности.

1. Введение

Задача маскировки материальных тел от средств электромагнитной локации стала актуальной с момента установки первых радиолокационных станций. В наше время большой популярностью пользуются математические задачи, возникающие при разработке технологий и материалов, позволяющих скрывать материальные объекты. Необходимо отметить работы [1, 2], посвященные разработке теоретических и численных алгоритмов решения подобных задач. В приведенных работах эффект маскировки достигается за счет выбора параметров неоднородной анизотропной среды, заполняющей маскировочную оболочку, путем решения соответствующей обратной задачи для уравнений Максвелла или уравнения Гельмгольца с переменными коэффициентами. Заметим, что техническая реализация решений, полученных в этих статьях, связана со значительными техническими трудностями. Одним из способов преодоления этих трудностей является использование специального покрытия, которое математически моделируется введением импедансного граничного условия, связывающего между собой электрическое и магнитное поля через граничный коэффициент, называемый поверхностным импедансом, или поверхностной проводимостью. Математически эта задача сводится к решению обратной экстремальной задачи, где роль управления играет поверхностный импеданс, а в качестве функционального ограничения выступает используемая модель рассеяния электромагнитных волн, рассматриваемая при импедансном граничном условии. Целью данной работы является разработка численного алгоритма решения этой задачи для двумерной модели, описывающей рассеяние электромагнитных волн в неограниченной однородной среде, содержащей анизотропное проницаемое препятствие с покрытой границей в случае H-поляризованных электромагнитных волн. Для акустических волн обоснование физической подоплеки данного подхода можно найти в [3]. Близкая задача управления импедансом в случае внешней краевой задачи для 2-D уравнения Гельмгольца рассмотрена в [4]. Для электромагнитных волн задачи управления импедансом для трехмерных уравнений Максвелла, рассматриваемых в ограниченной области, изучены в [5, 6].

2. Функциональные пространства

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ со связным дополнением $\Omega^c = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega}$ и границей Γ. Задача рассеяния электромагнитных волн в однородной изотропной среде, содержащей неоднородное проницаемое препятствие, сводится к нахождению функций v в Ω и $u = u^{inc} + u^s$ в Ω^c, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\nabla \cdot A\nabla v + k^2 v = 0 \ \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\Delta u + k^2 u = 0 \ \text{ в } \Omega^c, \tag{2}$$

$$v - u = -i\eta\frac{\partial u}{\partial n}, \ \frac{\partial v}{\partial n_A} - \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \Gamma, \tag{3}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0 \ \text{ где } r = |x|. \tag{4}$$

Здесь u^{inc} – падающая волна, u^s – рассеянная волна, η – поверхностная проводимость границы Γ, k – волновое число, ($k^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2$, где ω – угловая частота, ε_0 и μ_0 – постоянные электрическая и магнитная проницаемости), n – единичный вектор внешней по отношению к Ω нормали к границе Γ, $A = ((a_{ij})), \quad i,j = 1,2$ – заданная в Ω матричная функция, описывающая параметры среды в Ω, $\partial v/\partial n_A$ – конормальная производная функции v на Γ [7, 8, 9]. Будем предполагать ниже, что выполняются следующие условия: (i) Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ со связным дополнением Ω^c и с границей $\Gamma \in C^{0,1}$; (ii) $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $\mathrm{Re}(\xi \cdot A(x)\xi) \geqslant \gamma|\xi|^2$, $\mathrm{Im}(\overline{\xi} \cdot A(x)\xi) \leqslant 0 \ \forall \xi \in \mathbb{C}^2, \ \forall x \in \overline{\Omega}, \ \gamma = \mathrm{const} > 0$. Пусть B_R – круг радиуса R, содержащий Ω, $\Omega_e = \Omega^c \cap B_R$. Ясно, что Ω_e – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega_e = \Gamma \cup \Gamma_R$, так что Γ является границей области Ω и частью границы $\partial\Omega_e = \Gamma\cup\Gamma_R$ области Ω_e. С учетом этого обстоятельства будем использовать ниже два оператора следа на Γ: "внутренний" оператор следа $\gamma|_\Gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ и "внешний" $\gamma_e|_\Gamma : H^1(\Omega_e) \to H^{1/2}(\Gamma)$. Будем использовать пространства $H^1(\Omega)$, $H^1(\Omega_e)$, $H^{1/2}(\Gamma)$, $H^{1/2}(\Gamma_R)$ с нормами $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, $\|\cdot\|_{1,\Omega_e}$, $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$, $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_R}$ соответственно. Введем пространства $L^\infty_{\lambda_0}(\Gamma) = \{\lambda \in L^\infty(\Gamma) : \lambda(x) \geqslant \lambda_0\}$ и $H^s_{\lambda_0}(\Gamma) = \{\lambda \in H^s(\Gamma) : \lambda(x) \geqslant \lambda_0\}$, $\lambda_0 = \mathrm{const} > 0, s > 0$. Они будут служить для описания величины λ, обратной к проводимости η. Введем гильбертово пространство $X = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega_e)$ с нормой

$$|[U]|^2 = \|v\|^2_{1,\Omega} + \|u\|^2_{1,\Omega_e} \ \ \forall U = (v,u) \in X. \tag{5}$$

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}^{inc} \equiv \mathcal{H}^{inc}(\Omega_e) = \{v \in H^1(\Omega_e) : \Delta v + k^2 v = 0 \text{ в } \mathcal{D}'(\Omega_e)\}$, служащее для описания падающих волн. Для любой падающей волны $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$ существует след (нормальная компонента) $\partial u^{inc}/\partial n|_{\Gamma_R} \in H^{-1/2}(\partial\Gamma_R)$.

3. Разрешимость исходной задачи сопряжения

Введем отображение Дирихле–Неймана $T : H^{1/2}(\Gamma_R) \to H^{-1/2}(\Gamma_R)$, которое ставит в соответствие каждой функции $g \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ функцию $\partial\tilde{u}/\partial n \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$, где $\tilde{u}$ – решение внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца $\Delta\tilde{u} + k^2\tilde{u} = 0$ в $\Omega^c \backslash \overline{B}_R$ с условием $\tilde{u}|_{\Gamma_R} = g$. Известно, что $T \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R), H^{-1/2}(\Gamma_R))$, (см., например, [10]). Пусть при выполнении условий (i), (ii) $\Phi \in X$ – произвольная тестовая функция, $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$. Умножив уравнения (1)-(2) на функцию $\overline{\Phi}|_\Omega$, где $\Phi \in X$, проинтегрируем по Ω, применим формулы Грина и сложим два уравнения. Введем функцию $U \in X$, равную $v(x)$ в Ω и $u(x)$ в Ω_e. Используя U и обозначение $[\Phi] = \Phi_e|_\Gamma - \Phi_i|_\Gamma$ для скачка функции Φ через Γ, запишем результат в виде

$$a^\lambda(U, \Phi) \equiv a_0(U, \Phi) - a_\lambda(U, \Phi) = \langle f, \Phi\rangle \quad \forall \Phi \in X. \tag{6}$$

Введеные в (6) полуторалинейные и антилинейная формы определяются формулами

$$a_0(U, \Phi) = \int\limits_\Omega \left(\nabla\overline{\Phi} \cdot A\nabla U - k^2\overline{\Phi}U\right) dx + \int\limits_{\Omega_e} \left(\nabla\overline{\Phi} \cdot \nabla U - k^2\overline{\Phi}U\right) dx - \int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi}TU d\sigma, \tag{7}$$

$$a_\lambda(U, \Phi) = i(\lambda[U], [\Phi])_\Gamma = i\int\limits_\Gamma \lambda[\overline{\Phi}][U] d\sigma,$$

$$\langle f, \Phi\rangle = -\int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi}Tu^{inc} d\sigma + \int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi}\frac{\partial u^{inc}}{\partial n} d\sigma. \tag{8}$$

Решение $U \in X$ задачи (6) назовем слабым решением задачи 1. Используя свойства оператора T, теорему о следах и теоремы вложения можно показать, что к задаче (6) применима альтернатива Фредгольма. С её помощью может быть доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть при выполнении условий (i), (ii), $\lambda \in L^\infty_{\lambda_0}(\Gamma)$ – произвольная функция, где $\lambda_0 > 0$. Тогда: (1) оператор $A_\lambda : X \to X^*$ является изоморфизмом; (2) для любого падающего поля $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$ задача (6) имеет единственное решение $U_\lambda \in X$, которое удовлетворяет оценке*

$$\|U_\lambda\|_X \leqslant C_\lambda \|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}, \ \ C_\lambda = C_3\tilde{C}_\lambda,$$

где константа C_λ зависит от Ω, k, R, матрицы A и λ.

4. Постановка и разрешимость задачи управления

Одной из наших целей является исследование обратной экстремальной задачи для рассматриваемой модели рассеяния волн. Эта задача заключаются в минимизации определенного функционала качества, зависящего от состояния (волнового поля U) и неизвестной функции (управления), удовлетворяющих уравнениям состояния, имеющим вид слабой формулировки (6) задачи (1)–(4). В качестве управления мы выберем импеданс λ, а в качестве функционала качества выберем один из следующих:

$$I_1(U) = \|U - u^d\|^2_Q = \int\limits_Q \|U - u^d\|^2 dx, \ I_2(U) = \|U - u^d\|^2_{\Gamma_r} = \int\limits_{\Gamma_r} |U - u^d|^2 d\sigma. \tag{9}$$

Здесь $Q \subset \Omega_e$ – подобласть области Ω_e, Γ_r – граница круга B_r радиуса $r < R$ такого, что $\Omega \subset B_r$, функция u^d моделирует заданное волновое поле в области Q или на Γ_r. В частном случае, когда $u^d = u^{inc}$, функционал I_1 (либо I_2) имеет смысл квадрата средне-квадратичной интегральной нормы рассеяного поля u^s по Q (либо по Γ_R). Пусть выполняется условие: (j) $\Gamma \in C^{1,1}$; $\alpha_0 > 0$; $K \subset H^s_{\lambda_0}(\Gamma)$ – непустое выпуклое замкнутое множество, где $s > 1/2$, $\lambda_0 > 0$. Введем оператор $G : X \times K \times \mathcal{H}^{inc} \to X^*$ формулой $\langle G(U, \lambda, u^{\rm inc}), \Phi\rangle = a_0(U, \Phi) - i(\lambda[U], [\Phi])_\Gamma - \langle f, \Phi\rangle$ и перепишем слабую формулировку (6) задачи 1 в виде уравнения $G(U, \lambda, u^{inc}) = 0$. Рассмотрим следующую задачу условной минимизации:

$$J(U, \lambda) = \frac{\alpha_0}{2} I(U) + \frac{\alpha_1}{2}\|\lambda\|^2_{s,\Gamma} \to \inf, \;\; G(U, \lambda, u^{inc}) = 0, \;\; (U, \lambda) \in X \times K. \tag{10}$$

Здесь $I : X \to \mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу функционал качества. Обозначим через $Z_{ad} = Z_{ad}(u^{inc}) = \{(U, \lambda) \in X \times K : G(U, \lambda, u^{\rm inc}) = 0, J(U, \lambda) < \infty\}$ множество допустимых пар для задачи (10). Основываясь на аппарате книг [11, 12] , можно доказать следующие теоремы

Теорема 2. *Пусть при выполнении условий (i), (ii), (j), $I : X \to \mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу функционал, $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$, причем Z_{ad} – непустое множество, и пусть $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geqslant 0$ и K – ограниченное множество, либо $\alpha_1 > 0$ и функционал I ограничен снизу. Тогда задача (10) имеет по крайней мере одно решение $(U, \lambda) \in X \times K$.*

Теорема 3. *Пусть при выполнении условий (i), (ii), (j) пара $(\hat{U}, \hat{\lambda}) \in X \times K$ является решением задачи (10), причем функционал I непрерывно дифференцируем по U в точке $\hat{U}$. Тогда существует единственный ненулевой множитель Лагранжа $P \in X$, который удовлетворяет комплексному уравнению Эйлера-Лагранжа*

$$a_0(\Psi, P) - i(\hat{\lambda}[\Psi], [P])_\Gamma = -(\alpha_0/2)\overline{\langle I'_U(\hat{U}), \Psi\rangle} \;\forall \Psi \in X \tag{11}$$

и справедлив принцип минимума, эквивалентный вариационному неравенству

$$\alpha_1(\hat{\lambda}, \lambda - \hat{\lambda})_{s,\Gamma} - \mathrm{Re}[i((\lambda - \hat{\lambda})[\hat{U}], [P])_\Gamma] \geqslant 0 \;\; \forall \lambda \in K. \tag{12}$$

Прямая задача (6), тождество (11), имеющее смысл сопряженной задачи для сопряженного состояния $P \in X$, и вариационное неравенство (12) образуют *систему оптимальности* для задачи управления (10), описывающую необходимые условия экстремума.

5. Заключение

В работе была сформулирована обратная задача для двумерной модели рассеяния электромагнитных волн и получена система оптимальности, которую можно использовать для исследования единственности и устойчивости решений конкретных экстремальных задач, а также при разработке численного алгоритма решения поставленной экстремальной задачи и исследовании его сходимости. Простейший алгоритм получается, если для нахождения решения системы оптимальности применить метод простой итерации. В результате мы получим итерационный алгоритм, n-я итерация которого состоит в нахождении величин U_n, P_n и λ_{n+1} при заданном λ_n путем последовательного решения следующих задач:

$$a^{\lambda_n}(U_n, \Phi) = \langle f, \Phi\rangle \quad \forall \Phi \in X,$$

$$a_0(\Psi, P_n) - i(\lambda_n[\Psi], [P_n])_\Gamma = -\alpha_0(\Psi, U_n - u^d)_Q \ \forall \Psi \in X,$$
$$\alpha_1(\lambda_n, \lambda_{n+1} - \lambda_n)_{s,\Gamma} - \mathrm{Re}[i((\lambda_{n+1} - \lambda_n)[U_n], [P_n])_\Gamma] \geqslant 0 \ \ \forall \lambda \in K.$$

Исследованию единственности и устойчивости решений экстремальных задач, построению численных алгоритмов, исследованию их сходимости и анализу численных экспериментов будет посвещена дальнейшая работа автора. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта ФЦП (госконтракт N 14.A18.21.0353) и проекта "Фундаментальные задачи механики сплошной среды и теории переноса"Министерства образования и науки РФ.

Список литературы

1. Pendry J.B., Shurig D. and Smith D.R. Controlling Electromagnetic Fields// Science. 2006. V. 312. P. 1780–1782.
2. Алексеев Г.В., Романов В.Г. Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики // Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т. 14, № 2, С. 1–6.
3. Бобровницкий Ю.И. Научные основы акустического стелса// ДАН. 2012. Т. 442, № 1. С. 41–44.
4. Alekseev G.V. Cloaking via impedance boundary condition for 2–D Helmholtz equation// Appl. Anal. 2013. V. 93, N 10.
5. Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В. Теоретический анализ экстремальных задач граничного управления для уравнений Максвелла// Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т. 14, № 1. С. 3–16.
6. Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В., Романов В.Г. Оценки устойчивости решений задач граничного управления для уравнений Максвела при смешанных граничных условиях// ДАН. 2012. Т. 447, № 1 . С. 7–12.
7. Ильинский А.С., Кравцов В.В, Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа. 1991. 224 с.
8. Леонтович М.А. Исследования по распространению радиоволн // ЖЭТФ. 1948. Т. 2. С. 5.
9. Зоркаль С.М., Conna M.C. Локационные задачи теории распространения волн (дифракция и фокусировка). Новосибирск. Изд-во НГУ. 2003.
10. Melenk J.M., Sauter S. Convergence analysis for finite element discretizations of the Helmholtz equation with Dirichlet–to–Neumann boundary conditions// Math. Comp. 2010. V. 79. P. 1871–1914.
11. Алексеев Г.В. Задачи управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики// ДАН. 2004. Т. 395, № 3. С. 322–325.
12. Алексеев Г.В., Терешко Д.А. О задаче идентификации для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49, № 10. С. 1796–1811.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЛЬШИХ НЕОБРАТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ МАТЕРИАЛОВ СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ

Е.В. Мурашкин
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 5
E-mail: murashkin@iacp.dvo.ru

Ключевые слова: ползучесть, пластичность, упругость, большие деформации

Предложены способы модельного учета вязких свойств материалов в условиях больших деформаций. Построена модель больших упругоползучепластических деформаций. Указан реологический механизм залечивания микродефектов сплошности вязкоупругопластических материалов за счет всестороннего сжатия в условиях значительных эксплуатационных нагрузок по типу «нагрузка-разгрузка».

Введение

Теория пластического течения подразумевает разделение полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие. Из-за невозможности опытного измерения таких составляющих в отличие от полных деформаций, данное разделение оказывается произволом конструктора математической модели. Именно такой произвол является главной причиной существующего разнообразия в построениях моделей больших упругопластических деформаций. Отметим в этой связи лишь некоторые работы отечественных авторов [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Впервые геометрически корректная математическая модель больших упругопластических деформаций была построена в 1969 году [8], в которой разделение деформаций на обратимые и необратимые было связано с предположении о соответствии каждому деформированному состоянию единственного состояния разгрузки, когда обратимые деформации отсутствуют во всем продеформированном теле. Добиться этого, оставаясь в рамках упругопластической модели, возможно [5] предельным разделением тела на части и снятия усилий с границ таких бесконечно малых элементов тела. В то же время такой подход остается доминирующим при построении моделей больших упругопластических деформаций [1, 5]. Другой геометрически и термодинамически непротиворечивый подход к построению модели предложил В.П.Мясников [3], в котором в соответствии с формализмом неравновесной термодинамики определение обратимых и необратимых деформаций следовало из формулировки для них дифференциальных уравнений переноса. Вариант конкретизации источников и потоковых слагаемых в уравнении изменения (переноса) обратимых и необратимых деформаций был предложен в [4]. Рассматривался только случай идеальной пластичности. Обобщения на случай учета вязкости при пластическом течении были даны в [7]. Реологические эффекты в других моделях больших упругопластических деформаций рассматривались в [1, 6]. Здесь проведем обобщение модели [4] на случай учета нелинейной вязкости деформируемой среды как в случае ее пластического течения, так и при разгрузке, и при деформировании, предваряющем течение.

1. Модель больших упругоползучепластических деформаций

Полагаем, что наряду с температурой (энтропией) параметрами состояния деформируемого тела являются обратимые и необратимые деформации. Компоненты последних в прямоугольной системе пространственных координат Эйлера обозначим через e_{ij} и p_{ij} соответственно. Постулируем уравнения изменения (переноса) для данных составляющих полных деформаций в форме

$$\begin{gathered}\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2}\left((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + \right. \\ \left. + e_{ik}(\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj})\right), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} = \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj}. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь обозначено:

$$\begin{gathered}\frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right), \\ r_{ij} = w_{ij} + z_{ij}\left(e_{ij}, \varepsilon_{ij}\right), \quad w_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} - v_{j,i}\right), \end{gathered} \tag{2}$$

В записи уравнений переноса для тензоров e_{ij} и p_{ij} наряду с естественными требованиями их симметрии принято условие обращения тензора p_{ij} в ноль при отсутствии источника ($\gamma_{ij} = 0$) в изменении данного тензора; согласно второму равенству из (1) компоненты p_{ij} тензора необратимых деформаций изменяются в таком случае также, как если бы тело (или система координат) поворачивалась как жесткое целое ($Dp_{ij}/Dt = 0$). Данное условие заставляет [4] ввести объективную производную специального вида (в (2) она записана для произвольного тензора n_{ij}). При этом источником в уравнениях изменения компонент e_{ij} тензора обратимых деформаций оказывается тензор с компонентами $\varepsilon_{ij} - \gamma_{ij}$. Если бы в тензоре вращения r_{ij} отсутствовала нелинейная добавка $r_{ij} = w_{ij}$ ($z_{ij} = 0$), то введенная объективная производная по времени совпадала бы с производной Яумана [9]. Таким образом, требование геометрической корректности при формулировке уравнений изменения тензоров обратимых e_{ij} и необратимых p_{ij} деформаций в предположении осуществимости процесса с неизменным тензором необратимых деформаций при $\gamma_{ij} = 0$ приводит к достаточно простым уравнениям (1). Разделение полных деформаций Альманси d_{ij} на составляющие следует из (1) и (2) в форме

$$\begin{gathered} d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - 0.5e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}, \\ d_{ij} = 0.5\left(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{i,k}u_{k,j}\right) \end{gathered} \tag{3}$$

В (3) u_i — компоненты вектора перемещений точек деформированной среды. Согласно (3) в качестве тензора обратимых деформаций следовало бы выбрать тензор

$s_{ij} = e_{ij} - 0.5e_{ik}e_{kj}$, так как при $p_{ij} = 0$ имеем $d_{ij} = s_{ij}$. Введение в рассмотрение тензора e_{ij} вызвано не только относительной простотой в записи для него уравнения переноса (1), но и в простоте записи с таким тензором аналога формулы Мурнагана [4]. Формула Мурнагана в нелинейной теории упругости следует из записи закона сохранения энергии

$$\rho\frac{de}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ji} \tag{4}$$

В (4) e — плотность распределения внутренней энергии, q_j — компоненты вектора потока тепла, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши. В качестве термодинамического потенциала будем использовать свободную энергию с плотностью распределения $\Psi = e - sT$, где s — плотность распределения энтропии, T — температура. Примем еще одно допущение о том, что термодинамический потенциал $\Psi = \Psi(T, e_{ij})$, то есть не зависит от необратимых деформаций p_{ij}. Данное положение может быть спорным, но его принятие позволяет получить наиболее простую замкнутую модель деформирования материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами. В условиях принятия данной гипотезы из (4) следует [4]

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial e_{ik}}\left(\delta_{kj} - e_{kj}\right), \quad W = \rho_0^{-1}\Psi \tag{5}$$

$$\rho T\frac{ds}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij}\gamma_{ji} \tag{6}$$

Таким образом обратимые деформации задают консервативный механизм деформирования: по известным таким деформациям определяются, как и в классической среде Прандтля-Рейса, напряжения, если только упругий потенциал $W = W(e_{ij})$ определен (ρ_0 — плотность среды в свободном ее состоянии). Диссипативный механизм деформирования задается источником в правой части уравнения баланса энтропии (6), который определяется скоростями γ_{ij} накопления необратимых деформаций. Заметим, что (5) непосредственно переходит в известную в нелинейной теории упругости формулу Мурнагана при отсутствии необратимых деформаций ($p_{ij} \equiv 0$)

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial d_{ik}}\left(\delta_{kj} - 2d_{kj}\right) \tag{7}$$

Далее будет использоваться аналог формулы Мурнагана (5), переписанный для случая несжимаемой среды

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}\left(\delta_{kj} - e_{kj}\right), \text{ при } p_{ij} \neq 0. \tag{8}$$

В качестве упругого потенциала изотропной и несжимаемой среды будем использовать разложение

$$\begin{gathered} W = W(J_1, J_2) = (\alpha - \mu)J_1 + \alpha J_2 + \beta J_1^2 - \xi J_1 J_2 - \chi J_1^3, \\ J_1 = s_{jj}, \quad J_2 = s_{ij}s_{ji}, \quad s_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} \end{gathered} \tag{9}$$

В (9) параметр среды μ отождествляется с модулем сдвига, α, β, ξ, χ — упругие модули более высокого порядка. Поскольку при $p_{ij} \equiv 0$ инварианты J_1, J_2 совпадают с инвариантами тензора деформаций Альманси d_{ij}, а первый инвариант d_{jj} последнего тензора неположителен, второй $d_{ik}d_{kj}$ неотрицателен, то в (9) выбраны знаки минус с тем, чтобы все упругие постоянные среды были положительными.

Считаем, что вязкие свойства среды проявляются с самого начала процесса деформирования. Соответствующий диссипативный механизм деформирования зададим, введя потенциал $V = V(\sigma_{ij})$ в форме

$$
\begin{gathered}
V(\sigma_{ij}) = B\Sigma^n (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \\
\Sigma = \sqrt{1.5 \left\{(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2\right\}}, \\
\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{jj} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений, B, n — постоянные материала. Инвариант Σ тензора напряжений с точностью до постоянного множителя совпадает с октаэдрическим напряжением (интенсивностью напряжений). Для источника γ_{ij} в уравнении (1) изменения (переноса) необратимых деформаций, считая последние деформациями ползучести, полагаем

$$
\gamma_{ij} = \varepsilon^v_{ij} = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}}. \tag{11}
$$

Таким образом γ_{ij} отождествляется с тензором скоростей деформаций ползучести ε^v_{ij}, а диссипативный потенциал выбран в форме степенного закона ползучести Нортона [10, 11]. Очевидно, что выбор закона Нортона в форме (10) и (11) является только одной из возможностей. Возможен выбор любого иного закона ползучести. Записанные выше соотношения составляют замкнутую математическую модель изотермического деформирования. Конкретизация данной модели с помощью задания потенциалов $W(e_{ij})$ и $V(\sigma_{ij})$, связанная с зависимостями (9) и (10), выбрана в качестве возможной, не запрещающей другие в том числе и усложняющие математическую модель. Когда напряженное состояние в некоторых точках деформируемой среды достигает поверхности нагружения, диссипативный механизм деформирования в окрестностях таких точек меняется — начинается пластическое течение. С целью конкретизации последующего принимаем, что поверхностью нагружения в пространстве главных напряжений является цилиндрическая поверхность Мизеса с уравнением

$$
f(\sigma_{ij}) = \tau_{ij}\tau_{ji} - \frac{8}{3}k^2 = 0, \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma, \tag{12}
$$

В (12) k — постоянная материала (предел текучести). Согласно (12) вязкими свойствами материала в условиях его пластического течения пренебрегается. Если учет таких свойств необходим, то следует соответственно усложнить условия текучести (12) так, как это было проделано, например, в [7] или иным возможным способом. Принимая условия принципа максимума Мизеса [11], формулируем ассоциированный закон пластического течения

$$
\gamma_{ij} = \varepsilon^p_{ij} = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda > 0 \tag{13}
$$

В областях пластического течения γ_{ij} отождествляется со скоростями пластических деформаций. Отмечаем, что (12) и (13) задают простейшую конкретную модель течения, которая может при необходимости уточняться. Для того, чтобы учесть влияние вязких свойств на пластическое течение вместо (12) можно, например, использовать условие пластичности в форме, обобщающей условие Треска [13]

$$
\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max|\varepsilon^p_m| \tag{14}
$$

Здесь ε^p_m — главные компоненты тензора скоростей пластических деформаций, η — коэффициент вязкости. Также возможно учесть упрочнение среды в процессе ее пластического течения, например заданием поверхности нагружения в форме, предлагаемой в [14]

$$\left(\tau_{ij} - cp_{ij} - \eta\varepsilon_{ij}^{p}\right)\left(\tau_{ji} - cp_{ji} - \eta\varepsilon_{ji}^{p}\right) = \frac{8}{3}k^2 \qquad (15)$$

где c — параметр, характеризующий проявление эффекта Баушингера. В [15] на примере одиночного дефекта сплошности (микропора, микротрещина) в среде с упругими и пластическими свойствами и допускающей большие деформации было показано, что неучёт реологических свойств среды приводит к эффекту "приспосабливаемости" среды к нагрузкам по типу "нагрузка - разгрузка". В таком случае размеры дефекта после каждой разгрузки оказываются одинаковыми, неизменным остается и уровень и распределение остаточных напряжений в окрестности дефекта. Если учитывать вязкость среды только при её пластическом течении [15], то с ростом циклов размеры дефекта будут возрастать, что задает степень роста поврежденности и снижение усталостной прочности. Известен противоположный эффект, когда за счет предварительной квазистатической обработки материала значительным гидростатическим давлением его усталостная прочность возрастает, что объясняется [16] явлением "залечивания" микродефектов в условиях ползучести материала. Таким образом учет реологических свойств материала выводит из парадоксальной ситуации приспосабливаемости к циклическим нагрузкам по типу "нагрузка - разгрузка". В [17] предпринималась попытка объяснения упрочнения материала при таких нагрузках, когда до стадии пластического течения и при разгрузке свойства материала моделировались тензорно-линейным уравнением вязкоупругости. Оказалось, что действительно на каждом шаге цикла нагружения и разгрузки размеры дефекта уменьшаются, как и уровень остаточных напряжений. Однако, количественная оценка данного эффекта оказалась незначительной. Связываем это с тем, что свойства ползучести материала и релаксации напряжений в нем не могут подчиняться тензорно-линейной связи напряжений со скоростями деформаций [18]. Построенная здесь математическая модель больших деформаций в отличие от используемой в [17] базируется на нелинейном законе ползучести (10) и (11) и потому предоставляет возможность оценить эффект залечивания микродефектов сплошности.

Заключение

Предложен подход к моделированию процессов ползучести и релаксации напряжений в процессе накопления материалом больших необратимых деформаций. Предложенная модель может быть применена для оптимизации технологических процессов в смысле снижения уровня остаточных напряжений и описания механизмов "залечивания" дефектов сплошности для повышения эксплуатационных свойств готовых металлоизделий.

Список литературы

1. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев.: Наукова думка. 1987. 232 с.
2. Быковцев Г.И., Шитиков А.В. Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 1. С. 59 - 62.
3. Мясников В.П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8 – 13.

4. Буренин А.А, Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях.// ДАН 1996.Т. 347, № 2. С.199-201.
5. Чернышов А.Д. Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 120 – 128.
6. Роговой А.А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // Прикл. мех. и техн. физ. 2005. Т. 46, № 5. С. 138 – 149.
7. Ковтанюк Л.В., Шитиков А.В. О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // Вестник ДВО РАН. 2006. № 4. С. 87 – 93.
8. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans ASME: J. Appl. Mech. 1969. 36, № 1. P. 1 – 6.
9. Коробейнков С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2000. 262 с.
10. Никитенко А.Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. — Новосибирск: НГАСУ, 1997. — 278с.
11. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. — М.: МГИУ, 2007. — 264с.
12. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука. 1966. 232 с.
13. Знаменский В.А., Ивлев Д.Д. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочнолинейных потенциалах // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 114 - 118
14. Спорыхин А.А. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. — Воронеж: Из-во ВГУ, 1997 — 360с.
15. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 2. С. 316 – 325.
16. Горелов В.И. Исследование влияний высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов // Прикл. механика и техн. физика. 1984. № 5. С. 157 – 158.
17. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мурашкин Е.В. Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала // Прикл. механика и техн. физика. 2006. Т. 47, № 2. С. 110 – 119.
18. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966. — 752 с.

УДК 519.7+519.8

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.О. О
Дальневосточный федеральный университет,
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690091, Владивосток, Октябрьская 27,
Россия, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7
E-mail: ovioy@list.ru

Ключевые слова: интервальные задачи, оптимальное управление, эволюционные задачи, уравнение теплопроводности

Рассмотрена эволюционная интервальная задача стартового управления в гильбертовом пространстве. Вводится понятие субуниверсального решения и в качестве приложения приведен пример интервальной задачи управления одномерным уравнением теплопроводности.

1. Субниверсальное решение эволюционной интервальной задачи стартового управления

Рассмотрим вещественные гильбертовы пространства V и H такие, что $V \subset H \subset V'$, с плотным компактным вложением $V \subset H$. Здесь V' — пространство, двойственное к V. Обозначим, соответственно, через $\|\cdot\|$ и $|\cdot|$ нормы в V и H, а через $((\cdot,\cdot))$ и $(\cdot,\cdot)$ — соответствующие скалярные произведения. Для постановки эволюционной задачи определим переменную t (время), $t \in (0,T)$, где $T < +\infty$. Введем теперь пространство $L^2(0,T;V)$ функций $t \to y(t)$, отображающих интервал $(0,T)$ в пространство V, измеримых и таких, что

$$\left(\int_0^T \|y(t)\|^2 dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Аналогично определяются пространства $L^2(0,T;H)$, $L^2(0,T;V')$. Для функции $y \in L^2(0,T;V)$ можно определить производную $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ в смысле теории распределений [4]. Рассмотрим пространство

$$W(0,T) = \{y \mid \ y \in L^2(0,T;V), \ \ \dot{y} \in L^2(0,T;V')\}.$$

Это пространство снабженное нормой:

$$\|y\|_{W(0,T)} = \left(\int_0^T \|y(t)\|_V^2 dt + \int_0^T \|\frac{dy}{dt}\|_{V'}^2 dt)^{1/2}\right)$$

становится гильбертовым [[6], гл.1]. Заметим, что, если $y \in W(0,T)$, то $y \in C([0,T];H)$ Пусть $A : V \to V'$ — линейный непрерывный оператор со свойствами, заданными в главе 2(стр. **??**). Рассмотрим динамическую управляемую интервальную систему:

$$\begin{cases} \dot{y} + aAy = 0, \quad 0 < t < T, \\ y\mid_{t=0} = u, \quad u \in H, \end{cases} \tag{1}$$

в которой начальное состояние u играет роль управления. Под решением задачи (1) понимаем функцию $y \in W(0,T)$. Пусть $a \in [a_1, a_2]$ — неопределенный коэффициент из замкнутого интервала

$$0 < a_1 \leqslant a \leqslant a_2. \tag{2}$$

Задача оптимального управления состоит в минимизации следующего функционала:

$$\frac{1}{2} \mid y\mid_{t=T} - y_d \mid^2 + \frac{N}{2} \mid u \mid^2 \to inf, \quad u \in H, \tag{3}$$

на решениях задачи Коши (1). Здесь $N > 0$, y_d — заданный элемент из пространства H. Используя базис пространств H и V, решение задачи (1) можно записать в виде

$$y(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-a\lambda_j t} u_j w_j. \tag{4}$$

Здесь $\{w_j\}$ полная ортонормированная в H система собственных элементов оператора A, $Aw_j = \lambda_j w_j$, $j = 1, 2, ...$ $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ...$; $u_j = (u, w_j)$ — коэффициенты Фурье элемента $u \in H$. Тогда задачу (3) мы можем свести к интервальной задаче минимизации функционала, зависящего только от $\{u_j\}_1^\infty$. Получаем:

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \Big((e^{-2a\lambda_j T} + N) u_j^2 - 2e^{-a\lambda_j T} u_j y_{d_j} + y_{d_j}^2 \Big) \to inf. \tag{5}$$

Здесь $u_j = (u, w_j)$, $\quad y_{d_j} = (y_d, w_j)$ — коэффициенты Фурье элементов u, y_d. Определим для задачи (3), (5) понятия минимума, точки минимума и укажем процедуры их нахождения. Число a из интервала (3) будем называть *допустимым*. Заметим, что для каждого допустимого a минимум функционала J достигается на элементе

$$\widehat{u} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{a\lambda_j T} y_{d_j}}{1 + e^{2a\lambda_j T} N} w_j, \tag{6}$$

при этом соответствующее значение функционала равно

$$J(\widehat{u}) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\frac{y_{d_j}^2}{1 + e^{2a\lambda_j T} N} - y_{d_j}^2 \Big).$$

Как видно, минимум $J(\widehat{u})$ зависит от неопределенного параметра a и при $a_2 \leqslant a \leqslant a_1$ принимает значения $J_1 \leqslant J(\widehat{u}) \leqslant J_2$, где

$$J_i = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\frac{y_{d_j}^2}{1 + e^{2a_i\lambda_j T} N} - y_d^2 \Big), \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

Субуниверсальным значением параметра a назовем число $\hat{a}$, которое соответствует минимуму $J(\widehat{u}) = \widehat{J}$, совпадающему с серединой отрезка

$$\widehat{J} = \frac{1}{2}(J_1 + J_2).$$

Так как $J(\widehat{u})$ монотонно возрастает по a, тогда при любой допустимой реализации неопределенного параметра a отклонение минимума $J(\widehat{u})$ от $\widehat{J}$ будет наименьшим:

$$\min_{J_1 \leqslant \widehat{J} \leqslant J_2} \max_{a \in [a_1, a_2]} |J(\widehat{u}) - \widehat{J}| = \frac{1}{2}(J_2 - J_1).$$

Субниверсальным оптимальным управлением задачи (1) – (5) назовем элемент $\hat{u} \in H$, который определяется выражением (6) при $a = \hat{a}$. Учитывая уравнение (4) под субуниверсальным оптимальным состоянием в интервальной задаче (1) – (3) будем понимать функцию

$$\hat{y}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\hat{a}\lambda_j t} \hat{u}_j w_j, \quad t \in (0, T). \tag{8}$$

где $\hat{u}$ — субуниверсальное оптимальное состояние задачи (3), (5). Пару $\{\hat{u}, \hat{y}\}$ назовем субуниверсальным решением задачи (1) – (3). Таким образом, искомое $a = \hat{a}$ является единственным корнем уравнения

$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{y_{d_j}^2}{1 + e^{2a\lambda_j T} N} - y_d^2 \right) = \widehat{J}.$$

Отсюда получим уравнение для нахождения параметра $\hat{a}$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_{d_j}^2}{1 + e^{2\hat{a}\lambda_j T} N} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(2 + e^{2a_1\lambda_j T} N + e^{2a_2\lambda_j T} N) y_{d_j}^2}{2(1 + e^{2a_1\lambda_j T} N)(1 + e^{2a_2\lambda_j T} N)} \right). \tag{9}$$

Из монотонности по $\hat{a}$ левой части уравнения (9) вытекает следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $y_d \in H$, $\quad 0 < a_1 < a_2$. Существует единственное субуниверсальное оптимальное управление для интервальной задачи (1) – (3), определяемое выражением*

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\hat{a}\lambda_j T} y_{d_j}}{1 + e^{2\hat{a}\lambda_j T} N} w_j, \tag{10}$$

где $\hat{a}$ — решение уравнения (9).

2. Эволюционная интервальная задача стартого управления для одномерного уравнения теплопроводности

Рассмотрим интервальную задачу управления для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} y_t = a y_{xx}, \quad x \in (0; 1), \quad t \in (0; T); \\ y\,|_{x=0;1} = 0, y\,|_{t=0} = u(x). \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $a \in [a_1, a_2]$ — неопределенный коэффициент. Через y_t, y_{xx} обозначим частные производные $y(x, t)$ функции по t и x. Задача оптимального управления состоит в минимизации следующего функционала:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left((y(x, T) - y_d(x))^2 + N u^2(x) \right) dx \to inf, \quad u \in L^2(0, 1), \tag{12}$$

на решениях краевой интервальной задачи (11). Здесь $N > 0$, $y_d(x)$ — заданная функция из пространства $L^2(0, 1)$. Задача (11) естественным образом сводится к задаче Коши для уравнения с операторным коэффициентом вида (1). Пусть $V = H_0^1(0,1)$ — пространство Соболева, состоящее из функций v, принадлежащих вместе с производной v_x, классу $L^2(0,1)$ и равных нулю на границе. Положим $H = L^2(0,1)$. Нормы в пространствах H и V определяется следующим образом: $|v|^2 = \int_0^1 v^2 dx, \|v\|^2 = \int_0^1 v_x^2 dx$. Оператор $A : V \to V'$ определяется с помощью равенства:

$$(Ay, z) = (y_x, z_x), \quad \forall y, z \in V. \tag{13}$$

Субуниверсальным решением задачи оптимального управления (11), (12) назовем субуниверсальное решение, соответствующей задачи (1) – (5). Отметим, что собственные функции оператора A, образующие базис пространств H и V, имеют вид: $w_j(x) = \sqrt{2}sin(\pi jx)$, собственные значения $\lambda_j = (\pi j)^2$, $j = 1, 2\ldots$.

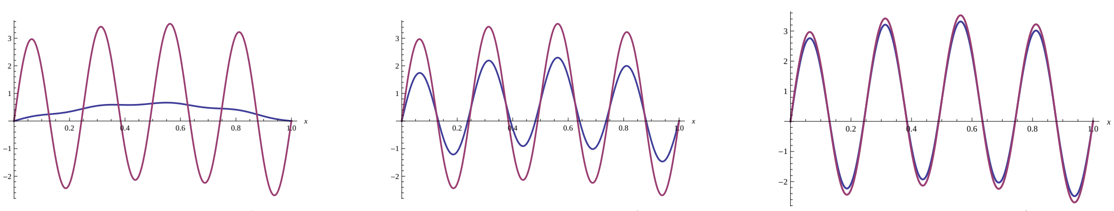
Теорема 2. *Пусть $y_d \in H$, $0 < a_1 < a_2$. Тогда существует единственное субуниверсальное решение задачи (11), (12):*

$$\hat{u}(x) = \sqrt{2}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\hat{a}\lambda_j T} y_{d_j}}{1 + e^{2\hat{a}\lambda_j T} N} sin(\pi jx), \quad \hat{y}(x,t) = \sqrt{2}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\hat{a}\lambda_j T} e^{\hat{a}\lambda_j t} y_{d_j}}{1 + e^{2\hat{a}\lambda_j T} N} sin(\pi jx), \tag{14}$$

где $\hat{a}$ — решение уравнения (9).

Рассмотрим примеры решения интервальной задачи (11), (12) с заданной функцией $y_d = \sin \pi x + 2 \sin 8\pi x$ и $T = 1$, для различных значениях весового параметра N и различных длинах интервала неопределенности.

Пример 1. Пусть $a_1 = 1, a_2 = 1.1$. На Рис. 1 приведены графики целевой функции y_d и универсального оптимального состояния y_* при различных значениях параметра N.

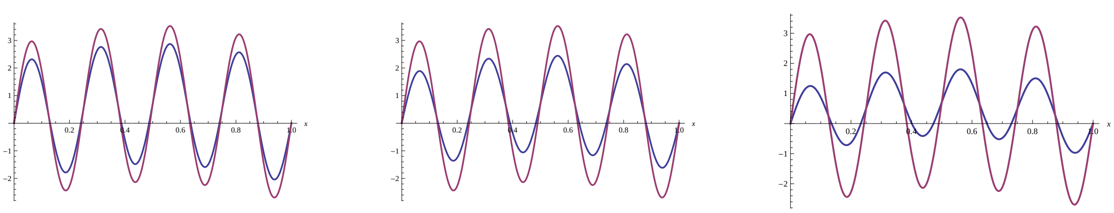


$N = 10^{-1}$ $\qquad$ $N = 10^{-3}$ $\qquad$ $N = 10^{-4}$

Рис. 1. Функции y_* и y_d при различных N.

Указанные графики иллюстрируют эффект уменьшения влияния неопределенности на универсальное оптимальное состояние за счет уменьшения весового параметра N. Интересно заметить, что при уменьшении N, значение функционала (12) уменьшается с 1.98525 до 0.146783.

Пример 2. Пусть $a_1 = 1, N = 10^{-4}$. На Рис. 2 приведены графики целевой



$a_2 = 1.4$ $\qquad$ $a_2 = 1.6$ $\qquad$ $a_2 = 10$

Рис. 2. Функции y_* и y_d при различных a_2.

функции y_d и универсального оптимального состояния y_* при различных значениях параметра a_2.

Рассмотренные примеры показывают существенное влияние величины интервала неопределенности $(a_2 - a_1)$ на качество универсального состояния, в частности, на его близость к целевой функции, при этом значение функционала (12) увеличивается с 0.461699 до 1.05251. Все расчеты проводились в среде Mathematica 8.0.

Список литературы

1. О В.О. Минимизация интервальной квадратичной функции в гильбертовом пространстве // Сборник материалов XXXVI Дальневосточной Математической Школы-Семинара имени академика Е.В. Золотова, Владивосток, 4-10 сентября 2012г. с.175-181.
2. О В.О. Интервальная задача оптимального управления в гильбертовом пространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики 2013, том 53, № 4, с. 26-32;
3. Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. // М.: Наука, 2006.151 с.
4. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. // Изадательство «Мир», 1972. 416 с.
5. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. // 2-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 384 с.
6. Lions J.-L., Magenes E. Problemes aux limites non homogenes et applications. // v.1, 2,3. — Paris,1968. 384 с. (Русский перевод первого тома: Неоднородные граничные задачи и их приложения, изд-во «Мир», М., 1971.) Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. // М.: Наука, 1965. 332 с.

УДК 51-76:57.087

ОЦЕНКА ПРОДУКТИВНОСТИ ЯПОНСКОГО МОРЯ ПО СПУТНИКОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

С.Я. Пак
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 5
E-mail: packsa@iacp.dvo.ru

Ключевые слова: спутниковые данные, динамика хлорофилла, освещенность, температура, критерий Фишера, ассимиляционное число, первичная продукция

Работа посвящена разработке методов анализа спутниковой информации с целью построения аналитической зависимости концентрации хлорофилла как основного показателя продуктивности от состояния внешней среды. Предложена и апробирована базовая модель годовой динамики хлорофилла, параметры которой уточнены с помощью методов регрессионного анализа. Выполнен прогнозный расчет, проведено сравнение с данными дистанционных наблюдений. На основании литературных данных о региональных характеристиках водной среды построены годовые оценки продуктивности Японского моря.

Введение

Ставится задача оценки объема первичной продукции (ПП) (здесь и далее речь идет о поверхностном слое воды) по спутниковой информации. Объект исследования – Японское море, наблюдаемый участок со 127° по 142° восточной долготы и с 34° по 47° северной широты. Методы дистанционного зондирования позволяют получить данные о концентрации хлорофилла «а», с которой тесно связан объем первичной продукции. Многие исследователи придерживаются концепции прямо пропорциональной зависимости одного показателя от другого. Кроме того, дистанционные измерения дают возможность фиксировать характеристики самой среды, такие как температура, освещенность, флуоресценция и некоторые др. От них, помимо насыщения биогенными элементами, зависит концентрация хлорофилла в биомассе фитопланктона (Лупян и др., 2012). Работа поддержана грантом ДВО РАН, проект 09-1-П2-02 по программе фундаментальных исследований Президиума РАН.

1. Материалы и методы

Интерпретация спутникового сигнала качественно представляет собой равнопромежуточные пространственные проекции концентраций хлорофилла, фотосинтетически активной (ф/а) радиации и температуры в поверхностном слое воды.

Данные за четыре года, с 2008 по 2011 усреднены помесячно. Для анализа числовых массивов были использованы методы регрессионного анализа, критерий Фишера, критерий χ-квадрат, а также – графическая визуализация, как исходной информации, так и данных, полученных в результате моделирования динамики концентрации хлорофилла. Для построения прогнозных расчетов использованы численные методы решения дифференциальных уравнений, включая тригонометрическое интерполирование и аппроксимацию кусочно-линейными функциями. Параметры, используемые в модели, получены путем построения регрессионной зависимости показателей хлорофилла от освещенности водной поверхности и температуры воды.

2. Анализ данных

На первом этапе проанализированы данные за период с 2008 по 2010 гг. Проведено пространственное усреднение помесячных данных о концентрации хлорофилла, об освещенности водной поверхности и температуре воды. Визуальное представление говорит о зависимости концентраций фитопланктона (mg/m^3) от сезонных колебаний ф/а радиации ($Ein \cdot m^{-2}day^{-1}$) (Ein - Эйнштейн, единица измерения, означающая моль фотонов) и температуры (°C) в течение всего вегетативного периода на протяжении трех лет. Поэтому в качестве модельной предложена функция, выражающая скорость первичного продуцирования, вида:

$$\tilde{V}(t) = \bar{\mu}_t P(I_t)T(\theta_t) - E(y_t) \tag{1}$$

где y_t - концентрация хлорофилла в (mg/m^3), $\bar{\mu}_t$ - максимальная возможная скорость роста массы хлорофилла при некоторой оптимальной температуре θ_0, также зависящая от t, $P(I(t),t)$– функция зависимости скорости роста y_t от показателя освещенности $I(t)$ и от момента времени t, $T(\theta(t),t)$ - соответствующая зависимость от температуры. $E(y_t)$ - функция элиминации хлорофилла, которая может происходить из-за выедания фитопланктона хищниками, в первую очередь, зоопланктоном и других факторов (Абросов Боголюбов, 1988) . Фактические показатели скорости роста помесячно определили, как отношение изменения средней массы фитопланктона за последующий месяц к усредненному показателю его концентрации в текущем месяце: $V_{fact.}(t) = \frac{y_{t+1}-y_t}{y_t}$. Тогда значение максимальной скорости роста хлорофилла определятся из условия минимизации функционала: $F = \sum\limits_{k=1}^{N} \left(V^{(k)}_{fact.}(t) - \tilde{V}^{(k)}(t)\right)^2$. Верхний индекс ($k$) соответствует тому, что наблюдаемый показатель усреднен по k-ому из N географических квадратов, на которые условно разбит наблюдаемый участок. Для оценки качества регрессионных значений функции $\bar{\mu}_t$ провели сравнение динамики изменения усредненной массы наблюдаемого хлорофилла и величины $\tilde{y}_t$, полученной в ходе численного решения дифференциального уравнения:

$$\dot{\tilde{y}}_t = \bar{\mu}_t P(I_t)T(\theta_t)\tilde{y}_t - E(\tilde{y}_t) \tag{2}$$

Приемлемое согласование $\tilde{y}_t$ с наблюдаемой концентрацией хлорофилла y_t позволило использовать значения максимальных скоростей первичного продуцирования, полученных в результате регрессионного анализа наблюдений за период с 2008 по 2010 гг., в качестве основы для составления прогнозного расчета на 2011 год. Графическое представление (Рис.1) свидетельствует о том, что «модельная» динамика средней концентрации хлорофилла не противоречит литературным данным о ее сезонных изменениях (Моисеев, 1989), (Алексанин и др.,2012).

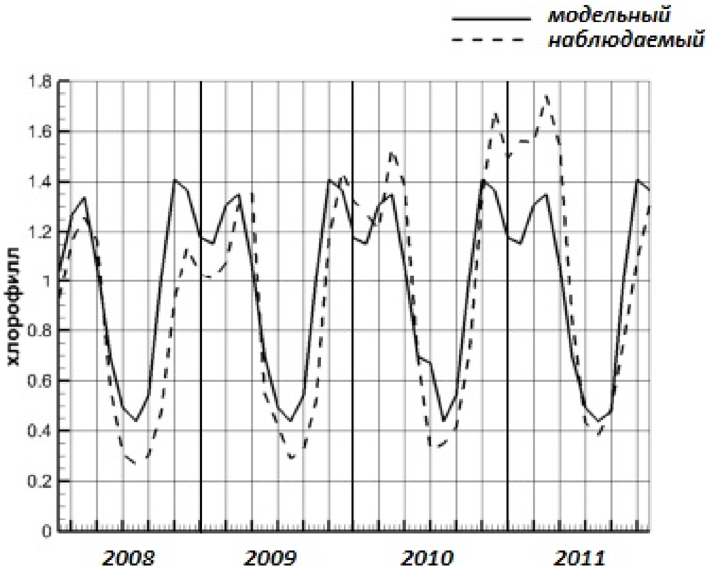


Рис. 1. Сравнительная динамика наблюдаемой и моделируемой концентрации хлорофилла (mg/m^3) в Японском море за четырехлетний период (данные усреднены помесячно и по пространству).

3. Статистическая оценка результатов

Считая усредненный по месяцу показатель хлорофилла отдельной вариантой, рассмотрели четыре временных ряда по количеству наблюдаемых лет. Критерий Фишера, представляющий собой отношение межгрупповой дисперсии к внутригрупповой, позволяет оценить, насколько значима гипотеза о различии в динамике концентрации хлорофилла в пределах одного года по сравнению с другим. В результате получили значение F-критерия, равное 1.313, что значительно меньше предельного критериального значения (F=2.82 при уровне значимости P=0.05 и F=4.26 при P=0.01). Следовательно, межгодовые различия в динамике хлорофилла, а, значит, и в сезонных характеристиках – несущественны. Считая 2008-2011 гг. климатически схожими, на основании критерия χ-квадрат оценили, что расхождение величины , полученной в результате численного решения уравнения (2), по сравнению с ожидаемым среднемноголетним помесячным распределением концентрации хлорофилла также нельзя считать статистически значимым.

4. Первичная продукция

Объем первичной продукции может быть вычислен в виде произведения концентрации хлорофилла на ассимиляционное число. Значение последнего рассматривается как региональный показатель, зависящий от комплекса благоприятствующих факторов (Звалинский и др., 2005). Такой подход позволяет построить точечные оценки объема годовой первичной продукции, основанные на данных спутниковых наблюдений, усредненных по каждому месяцу текущего года (Рис.2).

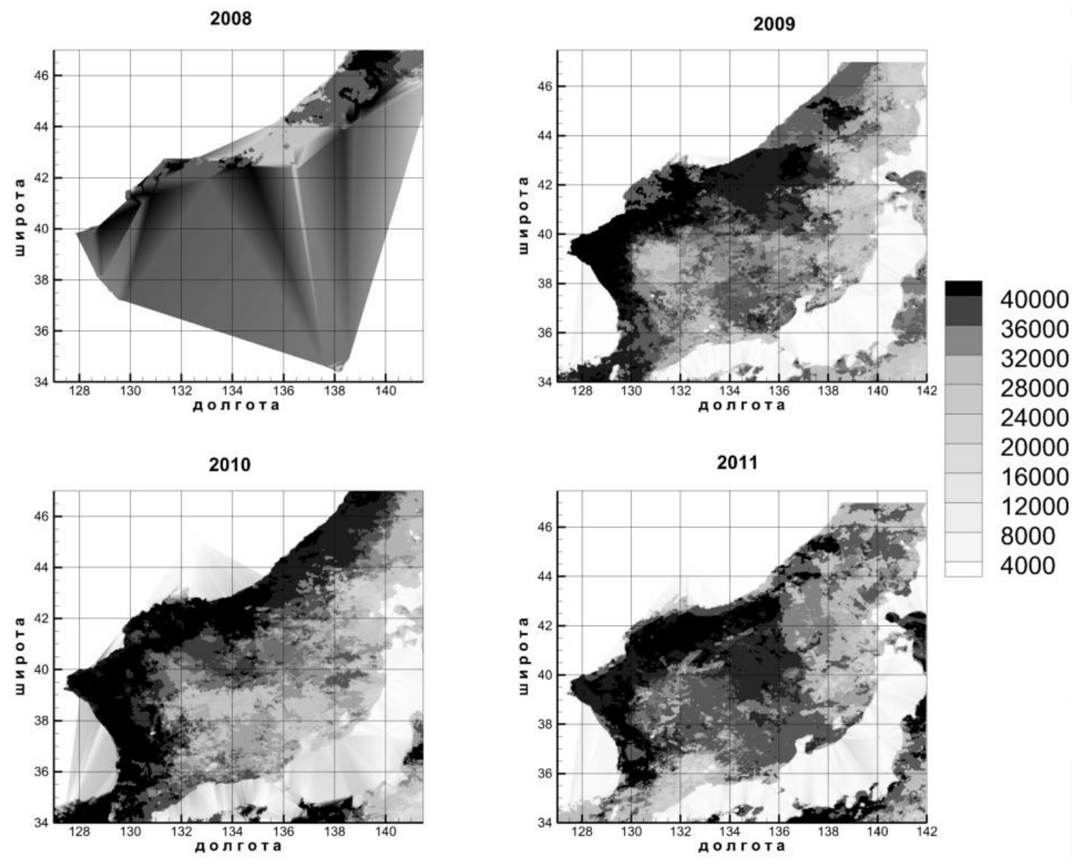


Рис. 2. Сравнительная динамика наблюдаемой и моделируемой концентрации хлорофилла (mg/m^3) в Японском море за четырехлетний период (данные усреднены помесячно и по пространству).

Поскольку доминирующими в видовом составе Японского моря являются диатомовые (Алексанин и др.,2012), и именно они составляют основную долю суммарной биомассы, благоприятным фактором является температурный диапазон, к которому толерантны данные виды фитопланктона, то есть от 4 до 15 градусов Цельсия (Насибулина и др., 2012). Кроме того, одной из наиболее значимых предпосылок интенсивности роста фитопланктона, а стало быть, и увеличения объема первичной продукции, является достаточное количество минерального питания. Совокупность этих двух факторов является определяющей при выборе значения ассимиляционного числа.

5. Выводы и результаты

- Анализ данных спутниковых наблюдений участка со 127° по 142° восточной долготы и с 34° по 47° северной широты, покрывающего Японское море, исключая береговую часть, позволяют сделать следующие выводы:
  - средние концентрации хлорофилла в поверхностном слое воды изменя-

ются в зависимости от сезона. Эти изменения носят периодический характер от года к году.

– характер изменения средних показателей хлорофилла не претерпевает существенных различий в смысле годовой динамики при условии, что соответствующие показатели среды, а именно освещенность и температура, также носят стабильный характер годовых колебаний.

- Предложен и апробирован модельный характер зависимости средней концентрации хлорофилла в поверхностном слое воды от показателей освещенности и температуры.

- Параметры модели уточнены на основе данных спутниковых наблюдений за 2008-2010 гг. На их основе составлен прогнозный расчет динамических изменений концентрации хлорофилла на следующий годовой период.

- На основе литературных данных о выборе ассимиляционного числа по региональному признаку, сделан оценочный расчет первичной продукции по данным спутниковых наблюдений за четырехлетний период с 2008 по 2011 год.

- Проведено статистическое оценивание полученных числовых результатов, которое позволяет рассматривать предложенный модельный подход в качестве основы для построения адекватных оценок показателей процесса фотосинтетической активности и первичного продуцирования на основе спутниковой информации.

Список литературы

1. Лупян Е.А., Саворский В.П., Шокин Ю.И., Алексанин А.И., Назиров Р.Р., Недолужко И .В., Панова О.Ю. Современные подходы и технологии организации работы с данными дистанционного зондирования Земли для решения научных задач. Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2012. Т.9.№5.С.21-44.
2. Абросов Н.С., Боголюбов А.Г. Экологические и генетические закономерности сосуществования и коэволюции видов. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988. - 333 с.
3. Моисеев П.А. Биологические ресурсы Мирового океан // М.: Агропромиздат, 1989, 368 с.
4. Алексанин А.И., Ким В., Орлова, Т.Ю., Стоник И.В., Шевченко О.Г. Фитопланктон залива Петра Великого и задача его дистанционного зондирования // Океанология. 2012. Т. 52, №2, С. 239-250.
5. Звалинский В.И., Недашковский А.П., Сагалаев С.Г., Тищенко П.Я., Швецова М.Г. Биогенные элементы и первичная продукция в эстуарии реки Раздольной (Амурский залив Японского моря) // Биология моря. 2005, Т.31, №2, С.107-116.
6. Насибулина Б.М., Курочкина Т.Ф., Шаплыгина Ю.Н. Оценка запасов планктонных и донных ценозов как кормовых ресурсов в водоемах дельты Волги // Естественные науки .2012. №2(39).
7. Йоргенсен С.Е. Управление озерными системами. М.: Агропромиздат, 1985.
8. Helen S. Findlay, Andrew Yool, Marianna Nodale, Jonathan W. Pitchford. Modelling of autumn plankton bloom dynamics // J. Plankton Res. February 2006 Vol.28 (2), P. 209-220. doi: 10.1093/plankt/fbi114.
9. Kyung-Ae Park, Ji-Eun Park, Min-Sun Lee and Chang-Keun Kang. Comparison of Composite Methods of Satellite Chlorophyll-a Concentration Data in the East Sea. Korean Journal of Remote Sensing, Vol.28, No.6, 2012, P.635-651.

10. M. A. Mustapha, S. Sei-Ichi, and T. Lihan. Satellite-measured seasonal variations in primary production in the scallop-farming region of the Okhotsk Sea // ICES Journal of Marine Science Vol.66(7), P. 1557-1569. doi: 10.1093/icesjms/fsp142.
11. Michael J. Sauer, C. S. Roesler, P. J. Werdell, A. Barnard. Under the hood of satellite empirical chlorophyll a algorithms: revealing the dependencies of maximum band ratio algorithms on inherent optical properties. 2012 / Vol. 20, No. 19 / OPTICS EXPRESS.
12. Ryabov A.B., Rudolf L., Blasius B. Vertical distribution and composition of phytoplankton under the influence of an upper mixed layer // Journal of Theoretical Biology. 2010, 263, p. 120-133.
13. Xiao-Gang Xing, Dong-Zhi Zhao, Yu-Guang Liu, Jian-Hong Yang, Peng Xiu1, Lin Wang. An Overview of Remote Sensing of Chlorophyll Fluorescence. Ocean Science Journal, Vol. 42, No. 1, P.49-59. 2007.
14. Y. Tanaka, H. Mano. Functional traits of herbivores and food chain efficiency in a simple aquatic community model // Ecological Modelling 237– 238 (2012) 88–100.

УДК 627.157

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ РУСЛОВОГО ПРОЦЕССА

И.И. Потапов
ВЦ ДВО РАН
Россия, 680000, ул. Ким Ю Чена, 65
E-mail: potapovii@rambler.ru

К.С. Снигур
ВЦ ДВО РАН
Россия, 680000, ул. Ким Ю Чена, 65
E-mail: snigur_ks@rambler.ru

Ключевые слова: русловые процессы, математическое моделирование, каверна, данные наносы

Предложена одномерная по пространству русловая математическая модель. Модель включает в себя: стационарное уравнения движения водного потока, определенное в рамках приближения мелкой воды, неравновесное уравнение переноса взвешенных наносов, уравнение баланса наносов, определяющее эволюцию геометрии донной поверхности. В модели использована оригинальная равновесная формула движения влекомых наносов, учитывающая влияние морфологии дна, физико-механических и гранулометрических параметров донного материала на процесс транспорта влекомых наносов. Формула не содержит в себе феноменологических параметров. В качестве верификации модели рассмотрена задача об изменении геометрии поперечной русловой прорези при движении над ней гидродинамического потока. Выполнено сравнение полученных решений с экспериментальными данными и расчетами других авторов.

Введение

В работе предложена одномерная русловая математическая модель, учитывающая транспорт донного материала во влекомом и взвешенном состоянии. В отличие от аналогичных моделей других авторов [1, 2, 3, 4], предложенная модель не содержит в себе феноменологических параметров связанных с морфологическим процессом. Все используемые в модели феноменологические константы относятся к гидравлической части модели и модели транспорта взвешенных наносов. В качестве транспортного уравнения влекомых наносов используется формула предложенная в работе [5]. Формула учитывает влияние морфологии дна, физико-механических и гранулометрических параметров донного материала на процесс транспорта влекомых наносов. Достоинством данной формулы является отсутствие в ней феноменологических параметров. В качестве верификации модели рассмотрена задача об изменении геометрии поперечной русловой прорези при движении над ней гидродинамического потока. Выполнено сравнение полученных решений с экспериментальными данными и расчетами других авторов.

1. Математическая формулировка задачи

Предложенная математическая модель руслового потока включает в себя: - уравнение мелкой воды [6]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U^2}{2\ g}+\eta\right)+\frac{\tau}{gH\rho_w}=0, \quad Q=U\ H; \tag{1}$$

- уравнение переноса взвешенных наносов [2, 7]

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial SU}{\partial x}=\alpha\frac{W}{H}(S_*-S); \tag{2}$$

- уравнение Эйснера [5]

$$(1-\varepsilon)\rho_s\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial x}=-\alpha\frac{W}{H}(S_*-S). \tag{3}$$

Математическая постановка (1) - (3) замыкается начальными условиями

$$\zeta(x,0)=\zeta_0(x), \quad S(x,0)=S_*(x) \tag{4}$$

и граничными условиями

$$\zeta(L,t)=\frac{\partial \zeta}{\partial x}=J, \quad G(0,t)=G^0, \quad H(L,t)=H^0. \tag{5}$$

Здесь x,t – пространственная и временная координата соответственно, U – осредненная по глубине скорость потока, H – глубина потока, Q – расход потока, $\eta=H+\zeta$ – уровень свободной поверхности, ζ – уровень донной поверхности, τ – придонные касательные напряжения, ρ_w – плотность воды, ρ_s – плотность песка, g – ускорение свободного падения, S – средняя субстанциальная мутность (находимая путем осреднения мутности по живому сечению потока без учета скорости течения), S_* – транспортирующая способность потока, $W=67.7\dfrac{(\rho_s-\rho_w)d}{\rho_w}$ – гидравлическая крупность [8], d – диаметр частиц, ε – пористость донного материала, G – удельный массовый расход влекомых наносов, J – основной уклон донной поверхности, G^0 – удельный массовый расход влекомых наносов на входе в расчетную область, H^0 –глубина потока на выходе из расчетной области. Транспортирующая способность потока S_* зависит от скорости течения воды U, глубины H и гидравлической крупности W, а так же от условия взмучивания-осаждения донных частиц [7]

$$S_*=\begin{cases} 0.2\dfrac{U^3}{WgH}, & W<u_* \\ 0, & W\geqslant u_* \end{cases}, \quad u_*=\sqrt{\frac{\tau}{\rho_w}}. \tag{6}$$

Для определения напряжений гидравлического сопротивления потоку τ используется формула Шези [9]

$$\tau=\rho_w g\frac{U^2}{C^2}, \qquad C=\frac{1}{n_s}H^{\frac{1}{6}}, \tag{7}$$

в которой коэффициент шероховатости n_s выражается как

$$n_s=\frac{H^{\frac{2}{3}}\sqrt{J}}{U}.$$

Поток влекомых наносов G определяется по формуле Петрова [5]

$$G = G_0\ \tau^{\frac{3}{2}} \left[(1-\chi) - \frac{1}{\tan\varphi\ \cos\gamma} \left(1 - \frac{\chi}{2}\right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right], \tag{8}$$

$$G_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s\ m\ (1-\chi)}{\kappa\sqrt{\rho_s}(\rho_s - \rho_w) g \tan\varphi \cos\gamma}, \quad m = \begin{cases} 1, & \chi \leqslant 1 \\ 0, & \chi > 1 \end{cases},$$

$$\chi = \sqrt{\frac{\tau_*}{\tau}}, \qquad \tau_* = \frac{3}{8} \frac{\kappa^2 d(\rho_s - \rho_w) g \tan\varphi \cos\gamma}{c_x}, \tag{9}$$

где τ_* – критическое придонное касательное напряжение, φ – угол внутреннего трения частиц, c_x – лобовое сопротивление частиц, γ – острый угол между нормалью к поверхности дна и вертикальной линией, $\kappa = 0.4$ – постоянная Кармана.

2. Алгоритм решения задачи

Задача (1) - (9) решается с помощью метода конечных разностей. Построим явную двухслойную по времени и симметричную по пространству разностную схему. Воспользуемся равномерной сеткой по пространству с узлами $x_i = i\Delta x,\ i = 0..N$ и шагом $\Delta x = \frac{L}{N-1}$, на которой определены основные неизвестные величины H, U, S, ζ. Используется также вспомогательная сетка по пространству с узлами $x_{i+\frac{1}{2}} = (i+0.5)\Delta x,\ 0 \leqslant i \leqslant N-1$, на которой определены вспомогательные неизвестные величины τ, χ, G_0, G. Сетка по времени состоит из слоев $t_n = n\Delta t,\ n = 0..N_t$ с шагом $\Delta t = \frac{T}{N_t - 1}$, где N_t – количество временных слоев, T – характерное время наболюдения. Индекс временного слоя $n+1$ опускается там, где это не вызывает противоречий. Для решения задачи был предложен следующий алгоритм:

1. Вводим параметры гидродинамики и донного материала;
2. Устанавливаем начальные условия для ζ и H из (4);
3. Начиная с $(N-1)$-ого и заканчивая 1-ым пространственным узлом выполняем решение задачи гидродинамики методом обратного хода [10]:
   (a) Исходя из условия $H_N = H^0$, вычисляем глубину на предыдущем пространственном узле по формуле
   $$H_{i-1} = H_i + \Delta x \frac{\dfrac{\zeta_i - \zeta_{i-1}}{\Delta x} + \lambda Fr_i}{1 - Fr_i \left(1 - \dfrac{3\lambda\Delta x}{2H_i}\right)} \quad Fr_i = \frac{U_i^2}{gH_i}, \quad \lambda = \frac{g}{C^2}; \tag{10}$$
   (b) Зная постоянный по области расход потока, вычисляем скорость потока в том же узле
   $$U_{i-1} = \frac{Q}{H_{i-1}}. \tag{11}$$
4. Для решения русловой части модели вычисляем значения параметров $\tau_{i+\frac{1}{2}}$, $\tau_{*i+\frac{1}{2}}$, $\chi_{i+\frac{1}{2}}$ по следующим формулам
   $$\tau_i = \rho_w g \frac{U_i^2}{C_i^2}, \quad \chi_i = \sqrt{\frac{\tau_{*i}}{\tau_i}}, \quad \tau_{*i} = \frac{3}{8} \frac{\kappa^2 d(\rho_s - \rho_w) g \tan\varphi \cos\gamma_i}{c_x}, \tag{12}$$
   $$\cos\gamma_i = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + (\zeta_{i+1} - \zeta_i)^2}},$$
   $$\tau_{i+\frac{1}{2}} = 0.5(\tau_i + \tau_{i+1}), \quad \tau_{i-\frac{1}{2}} = 0.5(\tau_i + \tau_{i-1}),$$
   $$\chi_{i+\frac{1}{2}} = 0.5(\chi_i + \chi_{i+1}), \quad \chi_{i-\frac{1}{2}} = 0.5(\chi_i + \chi_{i-1});$$

5. Вычисляем текущую транспортирующую способность потока

$$S_{*i}^{n+1} = \begin{cases} 0.2\dfrac{(U_i^n)^3}{WgH_i^n}, & W < u_* \\ 0, & W \geqslant u_* \end{cases}, \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_{i-\frac{1}{2}}^n}{\rho_w}}; \tag{13}$$

6. Вычисляем среднюю субстанциальную мутность в узлах сетки расчетной области с использованием схемы бегущего счета [7, 10]

$$S_i^{n+1} = \frac{S_i^n + U_i^{n+1}\dfrac{\Delta t}{\Delta x}S_{i-1}^{n+1} + \Delta t\dfrac{W}{H_i^{n+1}}(S_{*i}^{n+1} - S_i^n)}{1 + U_i^{n+1}\dfrac{\Delta t}{\Delta x}}; \tag{14}$$

7. Вычисляем значения массового удельного расхода влекомых наносов в узлах сетки расчетной области по формулам

$$G_{0_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3}\frac{\rho_s\ m\ (1 - \chi_{i+\frac{1}{2}})}{\kappa\sqrt{\rho_s}(\rho_s - \rho_w)g\tan\varphi\cos\gamma}, \quad m = \begin{cases} 1, & \chi_{i+\frac{1}{2}} \leqslant 1 \\ 0, & \chi_{i+\frac{1}{2}} > 1 \end{cases}, \tag{15}$$

$$G_{i+\frac{1}{2}} = G_{0_{i+\frac{1}{2}}}\ \tau_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left[(1 - \chi_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{\tan\varphi\ \cos\gamma_i}\left(1 - \frac{\chi_{i+\frac{1}{2}}}{2}\right)\frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{\Delta x}\right];$$

8. Расчитываем уровень донной поверхности в узлах сетки расчетной области

$$\zeta_N = \zeta_{N-1} + \Delta x\ J, \tag{16}$$

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \frac{\Delta t}{\rho_s(1 - \varepsilon)}\left(\frac{G_i^n - G_{i-1}^n}{\Delta x} - \frac{W}{H_i^n}(S_{*i}^n - S_{i+1}^n)\right);$$

9. Повторяем действия алгоритма с п.3 до п.8, пока не дойдем до последнего временного узла, то есть пока не выполнится условие $n + 1 = N_t$.

3. Результаты исследований

В качестве примера применимости модели в русловых расчетах была рассмотрена задача об изменении геометрии поперечной русловой прорези при движении над ней гидродинамического потока. Геометрия расчетной области, физико-механические и гранулометрические параметры задачи были взяты из работы [11]: $L = 30$, $H = 0.39$, $U = 0.5$, $d = 0.00017$, $J = 0.0002$, $\varphi = 22$, $c_x = 0.5$, $\varepsilon = 0.3$, $W = 0.01$, $\rho_s = 2610$, $\rho_w = 1000$, $\alpha = 0.6$. Результаты моделирования по предложенной модели с использованием алгоритмов [10, 7] приведены на рис.1, где кривые 1-3 определяют геометрию русловой прорези в различные моменты времени. Геометрия донной поверхности определенная по экспериментальным данным [11] представлена на рис.1 точечными можествами 4,5. Результаты моделирования по гравитационной двумерной модели [11] представлены пунктирными кривыми 6,7. Из сравнения графиков видно, что отклонение расчетных данных по предложенной модели и модели [11] от экспериментальных данных достигает 25 (%). Но в целом по области каверны согласование решения полученного по предложенной модели лучше, различие с экспериментальными данными не превышает 5 (%) что близко к систематической точности экспериментальных данных. Основное рассогласование расчетных и экспериментальных данных наблюдается на участке напорного склона каверны. Причем данное рассогласование является характерным для обеих численных решений, и может быть объяснено одномерностью гидродинамической модели потока не учитывающей явления рециркуляции потока в каверне.

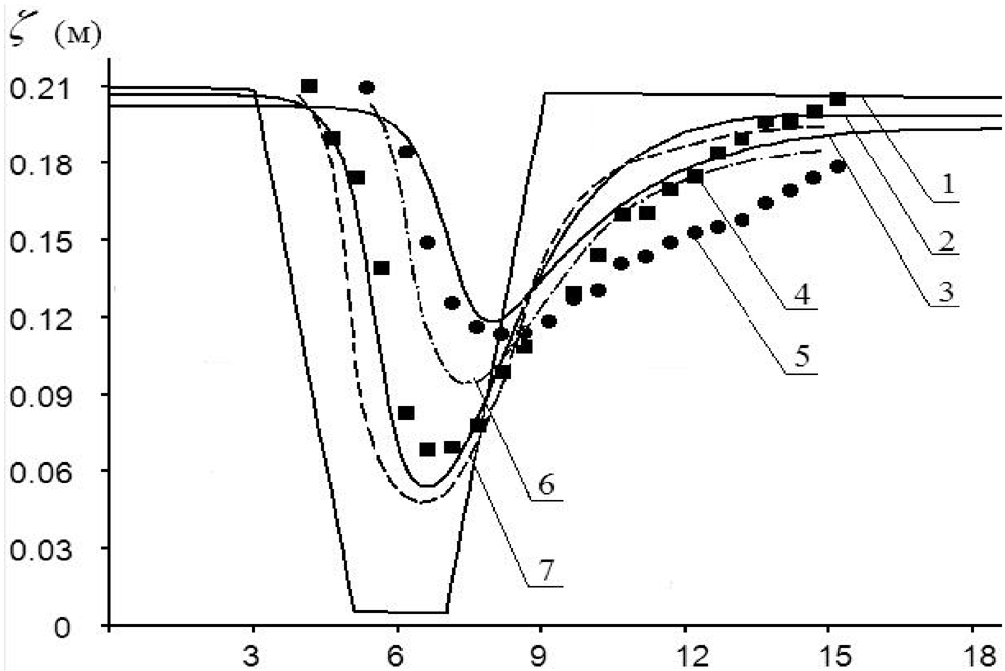


Рис.1 . Сравнение экспериментальных и расчетных данных

4. Заключние

Предложена математическа модель руслового потока. Рассмотрена задача описывающая деформирование поперечной русловой прорези для песчаного дна канала. Получено в среднем хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных, максимальное отклонение расчетных от экспериментальных данных не превышает 13%, что близко к систематической точности экспериментальных данных.

Список литературы

1. Гончаров В.Н. Динамика русловых потоков. — Л.: Гидрометеоиздат, 1962. 367 с.
2. Караушев А. В. Теория и методы расчета речных наносов: Монография - Л.: Гидрометеоиздат., 1977 - 272 с.
3. Bagnold R.A. An approach to the sediment transport problem from general physics// U.S. Geological Survey Professional Paper 422-I. 1966. 37 p.
4. Шуляк Б.А. Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости. М.: Наука, 1971.
5. Петров П.Г. Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости// ПМТФ. 1991. № 5. С. 72 - 75.
6. Картвелишвили Н. А. Потоки в недеформируемых руслах. — Л.: Гидрометеоиздат, 1973. 279 с.
7. Белолипецкий В.М., Генова С. Н. Вычислительный алгоритм для определения динамики взвешенных и донных наносов в речном русле// Вычислительные технологии. Т. 9, № 2. 2004. С. 9-25.
8. Потапов И. И. Математическая модель развития речного берега// препринт № 176. Хабаровск: ВЦ ДВО РАН. 2012. 22 с.
9. Гришанин К.В. Устойчивость русел рек и каналов. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
10. Потапов И.И., Снигур К.С. Анализ деформаций несвязного дна канала в нижнем бьефе гидроузла// Вычислительные технологии. 2011. Т. 16. № 4. С. 114-119.
11. Kerssens P.J.M., van Rijn L. C., Modeling for non-steady suspended sediment transport // Report, Project engeneers Delft Hydraulics laboratory, Delft, the Netherlands. 1977. 8 p.

УДК 532.5.032

ОБ АСИММЕТРИИ БЕРЕГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОТОКАХ

И.И. Потапов
Вычислительный центр ДВО РАН
Россия, 680000, г. Хабаровск, Ким Ю Чена, 65
E-mail: potapovii@rambler.ru

М.А. Щекачева
Вычислительный центр ДВО РАН
Россия, 680000, г. Хабаровск, Ким Ю Чена, 65
E-mail: margaritaworks@yandex.ru

Ключевые слова: береговые деформации, криволинейное русло реки.

Предлагается математическая модель деформации криволинейного русла реки с постоянным радиусом. Численно исследовано влияние радиуса реки на характер изменения поперечного донного профиля. Выполнено сравнение численных данных с экспериментальными. Задача решалась конечно-разностным методом. При расчете придонных напряжений учитывалась поправка на осреднение скоростей. Полученные результаты сравнивались с натурными данными, полученными Розовским И.Л. [1]. В результате получено хорошее согласование с экспериментальными данными [2].

Список литературы

1. Розовский И.Л. Движение воды на повороте открытого русла. - Киев: Изд-во АН УССР, 1957.
2. Потапов И.И., Щекачева М.А. Определение скорости размыва берегового склона в реках с песчаным дном// Вестник удмуртского университета. 2011. Вып. 4 с. 116-120.

УДК 517.53

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ НЕЙМАНА В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Е.Г. Прилепкина
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
E-mail: pril-elena@yandex.ru

Ключевые слова: емкость Робена, функция Неймана, функция Робена, теорема искажения, трансфинитный диаметр

Рассмотрены некоторые применения функции Неймана в геометрической теории функций. Приведены теоремы искажения для однолистных функций, заданных в круге и кольце. Установлено новое представление емкости Робена в терминах интеграла Дирихле линейной комбинации функций Неймана.

Введение

Понятия функций Грина и Неймана возникают естественным образом при решении уравнений с частными производными. Функция Грина является конформным инвариантом и поэтому широко используется в геометрической теории функций. Функция Неймана применяется в меньшей степени. Цель настоящего доклада - продемонстрировать роль функции Неймана в исследовании однолистных отображений. Напомним определение обобщенной функции Неймана [1]. Рассмотрим сперва жорданову область $B \subset \mathbf{C}_z$, ограниченную конечным числом аналитических кривых. Пусть $\varphi(z)$ вещественная непрерывная функция на ∂B, такая, что

$$\int\limits_{\partial B} \varphi(z) = -2\pi.$$

Обозначим для $\zeta \in B$ через $N_{B,\varphi}(z;\zeta)$ функцию от $z \in \overline{B}$, удовлетворяющую условиям: 1)$N_{B,\varphi}(z;\zeta)$ гармоническая в $B \setminus \{\zeta\}$ и дифференцируема на ∂B; 2) $N_{B,\varphi}(z;\zeta) + \log|z-\zeta|$ гармоническая в окрестности $\zeta \neq \infty$ и в случае $\zeta = \infty$ гармонической в окрестности ζ является функция $N_{B,\varphi}(z;\zeta) - \log|z|$; 3) $\frac{\partial N_{B,\varphi}(z;\zeta)}{\partial n} = \varphi(z)$ на ∂B, где производная берется по внешней нормали к B. *Обобщенной функцией Неймана* $N_B(z,\zeta)$ области B с полюсом в точке ζ назовем любую функцию, удовлетворяющую условиям 1)-3) для каких-нибудь граничных значений $\varphi(z)$. Пусть теперь $B-$ произвольная конечносвязная область сферы $\overline{\mathbf{C}}_z$ без изолированных граничных точек, обобщенную функцию Неймана для этой области определим с помощью конформного и однолистного отображения f на жорданову область, ограниченную аналитическими кривыми, по формуле

$$N_B(z,\zeta) = N_{f(B)}(f(z); f(\zeta)).$$

В области B выберем совокупность точек $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ и определим необходимые в дальнейшем константы

$$N_{kl}(B) := N_B(z_k, z_l), \qquad k \neq l,$$
$$N_{kl}(B) := \lim_{z \to z_k} (N_B(z; z_k) + \log|z - z_k|), \qquad k = l, \qquad z_k \neq \infty,$$
$$N_{kl}(B) := \lim_{z \to z_k} (N_B(z; z_k) - \log|z|), \qquad k = l, \qquad z_k = \infty$$

В случае $B = \overline{\mathbf{C}}_z$ полагаем

$$N_{kl}(\overline{\mathbf{C}}_z) := -\log|z_k - z_l|, \text{ если } k \neq l,\ z_k \neq \infty,\ z_l \neq \infty,$$
$$N_{kl}(\overline{\mathbf{C}}_z) := 0 \text{ в противном случае.}$$

Как показано в [1], две обобщенные функции Неймана $N_B^1(z,\zeta)$ и $N_B^2(z,\zeta)$ связаны соотношением $N_B^2(z,\zeta) = N_B^1(z,\zeta) + h(z) + c(\zeta)$, где $h(z)$ и $c(\zeta)$ некоторые функции. Таким образом, имеем $N_{kl}^2(B) = N_{kl}^1(B) + h(z_k) + c(z_l)$. Пусть для вещественных чисел $\{\delta_k\}_{k=1}^n$ выполняется

$$\sum_{k=1}^n \delta_k = 0,$$

тогда две обобщенные функции Неймана связаны равенством

$$\sum_{k,l=1}^n \delta_k \delta_l N_{kl}^1(B) = \sum_{k,l=1}^n \delta_k \delta_l N_{kl}^2(B).$$

Следовательно, квадратичная форма $\sum\limits_{k,l=1}^n \delta_k \delta_l N_{kl}(B)$ остается постоянной и это позволяет выбирать наиболее удобный с практической точки зрения способ построения обобщенной функции Неймана. **Пример 1.** Пусть $U := \{z : |z| > 1\}$– внешность единичного круга, ζ – конечная точка U. Классическая функция Неймана в этом случае хорошо известна и имеет вид

$$N_U(z,\zeta) = -\log|(z-\zeta)(1 - z\overline{\zeta})|.$$

Константы $N_{kl}(U)$ для точек $\{z_k\}_{k=1}^n$ равны

$$N_{kl}(U) = -\log|z_k - z_l||1 - z_k\overline{z_l}|,\ k \neq l$$
$$N_{kl}(U) = -\log(|z_k|^2 - 1),\ k = l.$$

Пример 2. Пусть $K(R) := \{z : 1 < |z| < R\}$– концентрическое круговое кольцо, ζ– вещественная точка кольца. Нетрудно убедиться, что при вещественных ζ на действительной оси производная по нормали от функции $N_U(z,\zeta) = -\log|(z-\zeta)(1-z\overline{\zeta})|$ равна нулю. Пусть теперь функция $w = G(z) \equiv G(z; R)$ конформно и однолистно отображает кольцо $K(R)$, $R < \infty$, на внешность круга $|w| > 1$ с разрезом по вещественной положительной полуоси от некоторой точки $P(R)$ до ∞ так, что $G(R; R) = P(R)$. Тогда в качестве обобщенной функции Неймана кольца $K(R)$ с полюсом в вещественной точке ζ можно выбрать функцию

$$N_{K(R)}(z,\zeta) = -\log\left|(G(z) - G(\zeta))(1 - \overline{G(z)}G(\zeta))\right|.$$

Соответственно константы $N_{kl}(K(R))$ для вещественной совокупности точек $\{z_k\}_{k=1}^n$ равны

$$N_{kl}(K(R)) = -\log|(G(z_k) - G(z_l))(1 - G(z_k)G(z_l))|,\ k \neq l,$$
$$N_{kl}(K(R)) = -\log\left|G'(z_k)(G(z_k)^2 - 1)\right|,\ k = l.$$

Заметим, что функцию Греча можно представить в виде

$$G(z;R) = \tau \mathrm{sn}^2 \left(\left(\frac{i}{\pi} \log(zR) + 1 \right) \mathbf{K}(\tau); \tau \right),$$

где $\tau = \tau(R) = 1/P(R)$ — решение уравнения

$$\log R = \frac{\pi}{2} \mathbf{K} \left(\sqrt{1-\tau^2} \right) / \mathbf{K}(\tau),$$

$\mathbf{K}(\tau)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем τ, $\mathrm{sn}(\cdot;\tau)$ — эллиптическая функция Якоби.

1. Теоремы искажения

В этом параграфе приведены теоремы искажения, основой доказательства которых служит асимптотическая формула для емкости обобщенного конденсатора [1]. Пионерские исследования в этом направлении были выполнены Гречем и Тейхмюллером. Систематическому применению подобных асимптотических формул посвящены работы Дубинина, Солынина, Асеева, Кузьминой, Емельянова, Поммеренке и многих других авторов. Введем величину

$$r(B, z_1, z_2) = \exp(N_{21}(B) + N_{12}(B) - N_{11}(B) - N_{22}(B)),$$

где константы $N_{kl}(B)$, $k,l = \overline{1,2}$, определены для двух различных точек $\{z_1, z_2\}$ области B. Из вышесказанного следует, что $r(B,z_1,z_2)$ не зависит от выбора обобщенной функции Неймана $N_B(z,\zeta)$. Назовем $r(B,z_1,z_2)$ *радиусом Неймана области B относительно точек z_1, z_2*. **Теорема 1**. *Пусть B– конечносвязная область без изолированных граничных точек либо $B = \overline{\boldsymbol{C}}_z$, область D удовлетворяет тем же условиям и пусть функция $f(z)$ мероморфна и однолистна в B, $f(B) \subset D$. Тогда для любых различных точек $z_k \in B$, $k = 1,...,n$ и любых вещественных чисел δ_k, $k = 1,...,n$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k = 0$, справедливо неравенство*

$$\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(B) \geqslant \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(D) - \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \log|f'(z_k)|,$$

где константы $N_{kl}(B)$, $N_{kl}(D)$, $k,l = \overline{1,n}$, вычислены для совокупности точек $\{z_k\}_{k=1}^n$, $\{f(z_k)\}_{k=1}^n$ соответственно. Применяя теорему 1 в случае $n = 2$, $\delta_1 = -\delta_2 = 1$, $D = \overline{\mathbf{C}}_z$, получим **Следствие 1.** *Если $f(z)$ мероморфна и однолистна в B, то для любых точек z_1, $z_2 \in B$ справедливо неравенство*

$$\frac{|f'(z_1)f'(z_2)|}{|f(z_1) - f(z_2)|^2} \geqslant r(B, z_1, z_2).$$

В случае, когда B совпадает с единичным кругом, полученное неравенство эквивалентно известному неравенству Фана:

$$\frac{|f'(z_1)||f'(z_2)|}{|f(z_1) - f(z_2)|^2} \geqslant \frac{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}{|(z_1 - z_2)(1 - \overline{z_1} z_2)|^2}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}(R)$, класс функций f, мероморфных и однолистных в кольце $K(R)$, для которых множество $f(K(R))$ значений $f(z)$ в $K(R)$ лежит в области $U := \{|w| > 1\}$ и которые отображают окружность $|z| = 1$ на себя. Полагая в теореме 1 $n = 2$, $\delta_1 = -\delta_2 = 1$, $B = K(R)$, $D = U$, получим **Следствие 2.** *Пусть*

$f(z) \in \mathfrak{M}(R)$, z_1, z_2— вещественные точки кольца $K(R)$, отличные от полюсов. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{|f'(z_1)f'(z_2)|}{|f(z_1)-f(z_2)|^2}\frac{(|f(z_1)|^2-1)(|f(z_2)|^2-1)}{|1-\overline{f(z_1)}f(z_2)|^2} \geqslant \frac{|G'(z_1)G'(z_2)|}{|G(z_1)-G(z_2)|^2}\frac{(G(z_1)^2-1)(G(z_2)^2-1)}{(1-G(z_1)G(z_2))^2}.$$

Применяя емкостной подход и симметризацию, в работе [2] были получены неравенства с участием производной Шварца $S_f(z) = f'''(z)/f'(z) - (3/2)(f''(z)/f'(z))^2$ для функций класса $\mathfrak{M}(R)$. Приведем две теоремы, дополняющие указанные результаты. **Теорема 2**. *Если $f(z) \in \mathfrak{M}(R)$, то для любого положительного $z \in K(R)$ справедливо неравенство*

$$\mathrm{Re}S_f(z) \geqslant S_G(z).$$

Теорема 3. *Пусть $f(z) \in \mathfrak{M}(R)$. Тогда для любого положительного $z \in K(R)$ выполняется*

$$\mathrm{Re}S_f(z) - S_G(z) \geqslant 6\left(\frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|^2-1} - \frac{|G'(z)|^2}{G(z)^2-1}\right) \geqslant 0.$$

Подробное доказательство теорем 1-3 опубликовано в [3].

2. Емкость Робена и функция Неймана

Естественным обобщением понятия логарифмической емкости является емкость Робена. Остановимся на определении. Пусть Ω — конечносвязная область на комплексной сфере $\overline{\mathbf{C}}$ без вырожденных граничных точек, содержащая бесконечность и пусть Γ — замкнутое подмножество $\partial\Omega$, состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент. В этом случае определена функция Робена $g_\Omega(z,\infty,\Gamma)$ области Ω и множества Γ с полюсом в бесконечности. Для аналитической жордановой области $g(z) := g_\Omega(z,\infty,\Gamma)$ определяется условиями: $g(z)$ вещественнозначная непрерывная на $\overline{\Omega}$, непрерывно дифференцируемая на $\overline{\Omega}\setminus(\Gamma)$, гармоническая в $\Omega\setminus\{\infty\}$ и такая, что $g(z)=0$ при $z\in\Gamma$, $\partial g/\partial n = 0$ при $z \in \partial\Omega\setminus(\Gamma)$, причем $g(z) - \log|z|$ — гармоническая функция в окрестности бесконечности (символ $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к границе). Для произвольной конечносвязной области Ω полагаем по определению $g_\Omega(z,\infty,\Gamma) := g_{f(\Omega)}(f(z),\infty,f(\Gamma))$. Здесь $f(z)$ однолистное конформное отображение области Ω на аналитическую жорданову область, причем бесконечность отображается в бесконечность. Емкостью Робена называется величина

$$cap_\Omega\Gamma := e^{-W(\Gamma)},$$

где

$$W(\Gamma) = \lim_{z\to\infty}\left(g_\Omega(z,\infty,\Gamma) - \log|z|\right)$$

и в качестве Ω вновь рассматривается связная компонента дополнения к E, содержащая бесконечность. Если $\Gamma = \partial\Omega$, то функция Робена совпадает с функцией Грина, а емкость Робена — с логарифмической емкостью. Для области Ω определим двухполюсную функцию Неймана $n_\Omega(z,\zeta,\infty)$ с полюсами ζ и ∞ соотношением

$$n_\Omega(z,\zeta,\infty) = N_\Omega(z,\zeta) - N_\Omega(z,\infty) + C,$$

где константа C выбирается таким образом, чтобы $n_\Omega(z,\zeta,\infty) + \log|z|$ стремилась к 0 при $z\to\infty$. В работе [4] введено понятие трансфинитного диаметра множества относительно произвольной полуметрики. Под полуметрикой на множестве $X \subset R^n$ мы будем понимать вещественнозначную неотрицательную функцию на квадрате

$X \otimes X$, удовлетворяющую аксиоме симметричности $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ и тождества $\rho(x,x) = 0$. Согласно этому определению, мы не требуем выполнения неравенства треугольника. Трансфинитным диаметром множества E относительно полуметрики ρ называется величина

$$D(E,\rho) := \lim_{n\to\infty} [\sup_{(z_1,\dots,z_n)\in E^n} \prod_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n\\ i\neq j}} \rho(z_i,z_j)]^{\frac{1}{n(n-1)}}.$$

Теорема 4. *Пусть Ω конечносвязная область и ее граница состоит из конечного числа непересекающихся кусочно-аналитических кривых $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$, $A := C_1 \cup C_2 \dots \cup C_k$, $B := C_{k+1} \cup C_{k+2} \dots \cup C_n$ и пусть $\hat{\Omega}$ область, ограниченная B и содержащая Ω. Тогда емкость Робена множества A относительно Ω совпадает с трансфинитным диаметром A относительно полуметрики*

$$\rho(z,\zeta) = e^{-n_{\hat{\Omega}}(z,\zeta,\infty)},$$

то есть

$$cap_{\Omega}A = D(A,\rho).$$

Доказательство данной теоремы основано на результатах работ [5], [6]. Вычисляя функцию Неймана внешности единичного круга U, мы получим **Следствие 3**. *Предположим, что $E \subset U$ компактно и его внешняя граница $\partial_e E$ состоит из конечного числа непересекающихся кусочно-аналитических кривых. Тогда справедливо равенство*

$$cap_{U\setminus E}\partial_e E = D(E,\rho),$$

где $\rho(z,\zeta) = \left|(z-\zeta)(1-\overline{\zeta}z)/(z\overline{\zeta})\right|$. Пусть $Z = \{z_k\}$, $k = 1,\dots,n$ набор некоторых точек $z_k \in A$. Введем потенциальную функцию

$$u_n = u_n(z;Z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} n_{\hat{\Omega}}(z,z_k;\infty).$$

Обозначим через $\hat{\Omega}_r$ область $\hat{\Omega}$ с выброшенными достаточно малыми кругами с центрами в точках z_k радиуса r, и через $I(v,B)$ интеграл Дирихле функции v по области B,

$$I(v,\ B) := \iint\limits_{B} |\nabla v|^2 dxdy.$$

Следующая теорема устанавливает связь между емкостью Робена и интегралом Дирихле потенциальной функции. **Теорема 5.** *Пусть Ω конечносвязная область и ее граница состоит из конечного числа непересекающихся кусочно-аналитических кривых $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$, $A = C_1 \cup C_2 \dots \cup C_k$, $B = C_{k+1} \cup C_{k+2} \dots \cup C_n$ и пусть $\hat{\Omega}$ область, ограниченная B и содержащая Ω. Тогда*

$$cap_{\Omega}A = \lim_{n\to\infty} exp(-\lambda_n),$$

где

$$\lambda_n = \inf_{\Upsilon} \lim_{r\to 0} \left(\frac{1}{2\pi} I(u_n,\hat{\Omega}_r) + \left(1+\frac{1}{n}\right)\log r\right)$$

Список литературы

1. Karp D., Prilepkina E. Reduced modules with free boundary and its applications // Annales Academi Scient. Fen., V.34, 2009. P. 353-378.

2. Дубинин В.Н., Прилепкина Е. Г. Теоремы искажения для функций, мероморфных и однолистных в круговом кольце // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 2. С. 193-207.
3. Прилепкина Е.Г. Теоремы искажения для однолистных функций в многосвязных областях// Дальневосточный математический журнал. 2009. Т.9, №1,2. С. 140-149.
4. Асеев В. В., Лазарева О. А. Трансфинитный диаметр и модули конденсаторов в полуметрических пространствах // Дальневосточный математический журнал. 2004. Т.5, №1. С. 12-21
5. Duren P., Pfaltzgraff J., Thurman E. Physical interpretation and further properties of Robin capacity // Алгебра и анализ. 1997. Т.9, № 3. С. 211–219.
6. Farcas B., Nagy B. Transfinite diameter, Chebyshev constant and energy on locally compact spaces // Potential Analysis, 2008. V. 28, №3, P. 241-260.

УДК 519.248:62-192+519.176

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА АКУСТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ МОРСКОГО ДНА ГИДРОЛОКАТОРОМ БОКОВОГО ОБЗОРА

И.В. Прохоров
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
E-mail: prh@iam.dvo.ru

А.А. Сущенко
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690950, Владивосток, ул. Суханова, 8
E-mail: sushchenko_aa@student.dvfu.ru

Ключевые слова: обратные задачи, теория переноса, случайно-неоднородные среды, задача акустического зондирования

В работе рассматривается проблемы математического моделирования процесса гидролокационной съемки морского дна с помощью гидролокатора бокового обзора. Исследования осуществляются для кинетической модели распространения звука при следующих ограничениях: используется приближение однократного рассеяния; передающая антенна является точечной и излучает линейно частотно модулированный сигнал; приемная антенна обладает узкой диаграммой направленности. Для функции, описывающей измеряемый сигнал на носителе гидролокатора бокового обзора, получена явная формула, содержащая два слагаемых, первое из которых определяется отражающими свойствами морского дна, а второе обусловлено рассеянием в воде и является шумом в задачах картографии. На основе полученной формулы проведен анализ влияния рассеяния в среде на соотношение сигнал/шум в зависимости от дальности зондирования.

Для простоты будем предполагать, что процесс распространения гидролокационных сигналов происходит в среде G, которая заполняет все пространство $\mathbb{R}^3$ и состоит из двух зон G_1 и G_2. При этом область

$$G_2 = \{\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3 : r_3 < -l\}, \quad l > 0,$$

интерпретируется как донная часть океана, а область

$$G_1 = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : r_3 > -l\} \setminus \gamma_a(t),$$

как его водная часть за вычетом некоторой поверхности $\gamma_a(t)$, на которой размещены излучающая и принимающая антенны. Место положение всех точек множества $\gamma_a(t)$ зависит от времени следующим образом:

$$\gamma_a(t) = \{\mathbf{r} + t\mathbf{V}, \mathbf{r} \in \gamma_a(0)\}, \quad \mathbf{V} = (0, V, 0), \quad V = |\mathbf{V}| = \text{const},$$

где поверхность $\gamma_a(0)$ представляет собой достаточно малую прямоугольную часть плоскости $r_2 = 0$, центр симметрии которой расположен в начале координат. Таким образом, поверхность $\gamma_a(t)$ перемещается в пространстве с постоянной скоростью $\mathbf{V}$ вдоль оси r_2. Распространение акустических волн в случайно-неоднородной среде может быть описано уравнением переноса излучения [1-3]

$$\left(\frac{1}{v(\mathbf{r})}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k}\cdot\nabla_r + \mu(\mathbf{r},\nu)\right) f(\mathbf{r},\mathbf{k},t,\nu) =$$
$$= \sigma(\mathbf{r},\nu)\int\limits_{\Omega} p(\mathbf{k}',\mathbf{k},\nu) f(\mathbf{r},\mathbf{k}',t,\nu)d\mathbf{k}', \quad (1)$$

где волновой вектор $\mathbf{k}$ принадлежит единичной сфере $\Omega = \{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^3 : |\mathbf{k}| = 1\}$. Функция $f(\mathbf{r},\mathbf{k},t,\nu)$ интерпретируется как плотность потока энергии волны в момент времени t в точке $\mathbf{r}$, распространяющейся в направлении $\mathbf{k}$ и с частотой $\nu \in I = [\nu_{min},\nu_{max}]$. Величины μ, σ называются коэффициентами затухания (ослабления) и рассеяния, а p — индикатрисой рассеяния. Величина σ зависит от флуктуаций плотности среды $\rho(\mathbf{r})$ и ее сжимаемости $\kappa(\mathbf{r})$. Скорость распространения звуковой волны выражается формулой $v(\mathbf{r}) = v_i = (\rho_i\kappa_i)^{-1/2}$, $\mathbf{r}\in G_i$, где ρ_i,κ_i - плотность и сжимаемость среды в отсутствие флуктуаций. В момент времени $t = 0$ источники звука в среде отсутствуют и начальное условие имеет вид

$$f(\mathbf{r},\mathbf{k},0,\nu) = 0, \quad (\mathbf{r},\mathbf{k},\nu)\in G\times\Omega\times I. \quad (2)$$

Ограничимся случаем, когда отражающие свойства дна на границе раздела $\gamma_d = \{\boldsymbol{\zeta}\in\mathbb{R}^3 : \zeta_3 = -l\}$ определяются диффузным отражением [3]

$$f^-(\boldsymbol{\zeta},\mathbf{k},t,\nu) = \frac{\sigma_d(\boldsymbol{\zeta})}{4\pi}\int\limits_{\Omega} f^+(\boldsymbol{\zeta},\mathbf{k}',t,\nu)d\mathbf{k}', \quad \boldsymbol{\zeta}\in\gamma_d, \quad (3)$$

где

$$f^{\pm}(\boldsymbol{\zeta},\mathbf{k},t,\nu) = \lim_{\varepsilon\to+0} f(\boldsymbol{\zeta}\mp\varepsilon\mathbf{k},\mathbf{k},t,\nu)$$

и функция $\sigma_d(\boldsymbol{\zeta})$ является коэффициентом отражения поверхности γ_d и описывает степень неоднородности дна океана. На множестве $\gamma_a(t)$ задаются граничные условия:

$$f^-(\boldsymbol{\zeta},\mathbf{k},t,\nu) = h(\boldsymbol{\zeta},\mathbf{k},t,\nu), \quad (\boldsymbol{\zeta},\mathbf{k},t,\nu)\in\gamma_a(t)\times\Omega\times[0,T]\times I, \quad (4)$$

$$\int\limits_{\Omega} S_a(\mathbf{k})f^+(\boldsymbol{\zeta},\mathbf{k},t,\nu)d\mathbf{k} = H(\boldsymbol{\zeta},t,\nu), \quad (\boldsymbol{\zeta},\mathbf{k},t,\nu)\in\gamma_a(t)\times\Omega\times[0,T]\times I, \quad (5)$$

где функция $h(\boldsymbol{\zeta},\mathbf{k},t,\nu)$ имеет смысл плотности потока энергии передающей антенны, величины $H(\boldsymbol{\zeta},t,\nu)$ и $S_a(\mathbf{k})$ определяют величину интенсивности в приемной антенне и ее диаграмму направленности. При $\mathbf{k}\in\{\mathbf{k} = (k_1,k_2,k_3)\in\Omega : k_1 > 0\}$ функция $S_a(\mathbf{k})$ определяет диаграмму направленности "по правому борту", а при $\mathbf{k}\in\{\mathbf{k} = (k_1,k_2,k_3)\in\Omega : k_1 < 0\}$ — "по левому". Рассмотрим следующую задачу гидролокации морского дна. Определить функцию $\sigma_d(\boldsymbol{\zeta})$ из уравнения (1), начального и граничных условий (2)-(5), если функции μ,σ,p,H,h,S_a известны. Поскольку объемное рассеяние в среде превосходит донное рассеяние на 3-5 порядков [4], то можно ограничиться случаем, когда в среде G_1 учитывается только однократное рассеяние. Также будем предполагать, что $\mu = \mathrm{const}, \sigma = \mathrm{const}$, $p = 1/4\pi$, а передающая антенна является точечной и линейно частотно модулированной (ЛЧМ)[5,6]. Пусть Δt — длительность сигнала, $\Delta\nu = \nu_{max} - \nu_{min}$ — ширина полосы частот и

$$\nu_0 = \frac{\nu_{max}+\nu_{min}}{2}, \quad b = \frac{\Delta\nu}{\Delta t}$$

несущая частота и скорость изменения сигнала. Тогда функция h, описывающая источник ЛЧМ-сигнала, может быть записана в виде:

$$h(\boldsymbol{\zeta},\mathbf{k},t,\nu)=\frac{b\,\delta(\zeta_3)\delta(\zeta_2-Vt)s_a(\mathbf{k})}{|\mathbf{n}(\boldsymbol{\zeta})\cdot\mathbf{k}|}\sum_{i=0}^{m}\chi(t-t_i)\delta(\nu-(\nu_0+b(t-t_i)),\quad \zeta_1=0,\quad (6)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $\mathbf{n}(\zeta)$ – вектор нормали к поверхности $\gamma_a(t)$, s_a – диаграмма направленности передающей антенны, t_i – центральный момент времени из интервала $[-\Delta t/2+t_i,t_i+\Delta t/2]$ испускания i–го импульса $(\Delta t\leqslant t_{i+1}-t_i)$ и

$$\chi(t-t_i)=\begin{cases}1, & -\Delta t/2\leqslant t-t_i\leqslant\Delta t/2;\\ 0, & |t-t_i|>\Delta t/2;\end{cases}.$$

Далее для простоты будем предполагать, что $s_a=1$ и $S_a(\mathbf{k})=\delta(k_2)$, то есть передающая антенна обладает широкой диаграммой направленности, а приемная антенна — узко направленной в горизонтальной плоскости $(k_2=0)$. Для всех точек $\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{V}t$ можно получить следующее соотношение

$$H(\mathbf{V}t,t,\nu)=\int\limits_{\Omega}S_a(\mathbf{k})f^{+}(\mathbf{V}t,\mathbf{k},t,\nu)d\mathbf{k}=H_\gamma(\mathbf{V}t,t,\nu)+H_G(\mathbf{V}t,t,\nu),\qquad (7)$$

где

$$H_\gamma(\mathbf{V}t,t,\nu)=\frac{l\chi\left(\frac{\nu-\nu_0}{b}\right)}{4\pi(1-V^4/v^4)}\sum_{i=1}^{m(t)}\frac{\exp(-2\mu\tau_i)\sigma_d(\boldsymbol{\zeta}_1(\tau_i),Vt)}{\tau_i^2|\boldsymbol{\zeta}_1(\tau_i)|},\qquad (8)$$

$$H_G(\mathbf{V}t,t,\nu)=\frac{\sigma\chi\left(\frac{\nu-\nu_0}{b}\right)}{4\pi(1+V^2/v^2)}\sum_{i=1}^{m(t)}\frac{\exp(-2\mu\tau_i)}{\tau_i}\arccos\left(\frac{l}{\tau_i(1-V^2/v^2)}\right),\qquad (9)$$

где $m(t)=j$, если $t_j-\Delta t/2<t<t_{j+1}-\Delta t/2$,

$$\tau_i=\tau_i(t,\nu)=\frac{v}{2}\left(t-t_i-\frac{\nu-\nu_0}{b}\right),\quad \boldsymbol{\zeta}_1(\tau_i)=\pm\sqrt{\tau_i^2\left(1-\frac{V^2}{v^2}\right)^2-l^2}.$$

Слагаемое H_γ описывает нерассеянную часть принимаемого сигнала и несет в себе информацию о характеристиках дна. Напротив, слагаемое H_G отвечает шумовому сигналу, вызванному случайными флуктуациями среды. Так как $V^2/v^2\ll 1$ и $\tau_j\ll\tau_i$, $i<j$, то из (8),(9) для всех ζ_1, удовлетворяющих неравенствам $v\Delta t/4\leqslant\sqrt{\zeta_1^2+l^2}\leqslant v(t_{j+1}-t_j-\Delta t/2)/2$:

$$H_{j,\gamma}(\zeta_1)=H_\gamma\left(\mathbf{V}\left(t_j+\frac{2\sqrt{\zeta_1^2+l^2}}{v}\right),t_j+\frac{2\sqrt{\zeta_1^2+l^2}}{v},\nu_0\right)=$$
$$=\frac{l\exp(-2\mu\sqrt{\zeta_1^2+l^2})}{4\pi(\zeta_1^2+l^2)|\zeta_1|}\sigma_d\left(\zeta_1,\mathbf{V}\left(t_j+\frac{2\sqrt{\zeta_1^2+l^2}}{v}\right)\right),\qquad (10)$$

$$H_{j,G}(\zeta_1)=H_G\left(\mathbf{V}\left(t_j+\frac{2\sqrt{\zeta_1^2+l^2}}{v}\right),t_j+\frac{2\sqrt{\zeta_1^2+l^2}}{v},\nu_0\right)=$$
$$=\frac{\sigma\exp(-2\mu\sqrt{\zeta_1^2+l^2})}{4\pi\sqrt{\zeta_1^2+l^2}}\arccos\left(\frac{l}{\sqrt{\zeta_1^2+l^2}}\right),\qquad (11)$$

Функция $H_{j,\gamma}(\zeta_1)/H_{j,G}(\zeta_1)$ характеризует зависимость соотношения сигнал/ шум

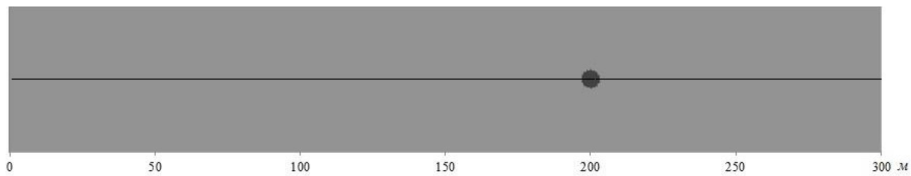


Рис. 1. Схематическое изображение функции $\sigma_d(\zeta_1, \zeta_2)$

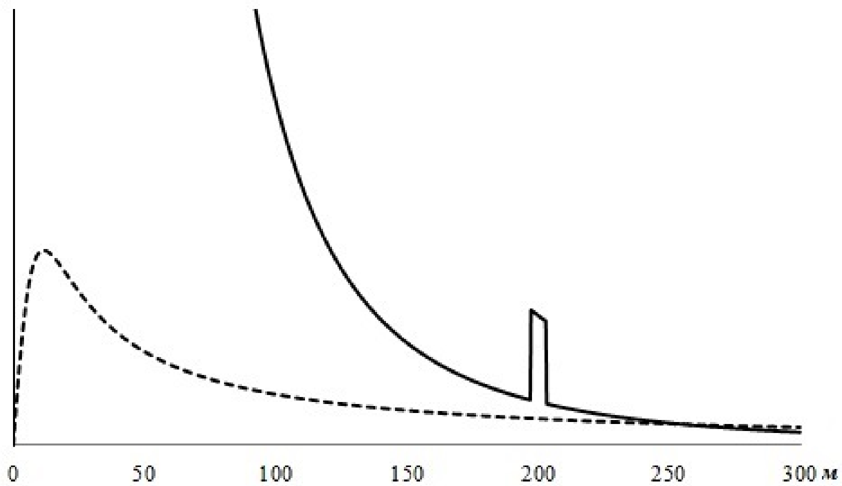


Рис. 2. Графики функций $H_{j,\gamma}$ (сплошная линия) и $H_{j,G}$ (пунктирная линия) при $\sigma = 10^{-5}$

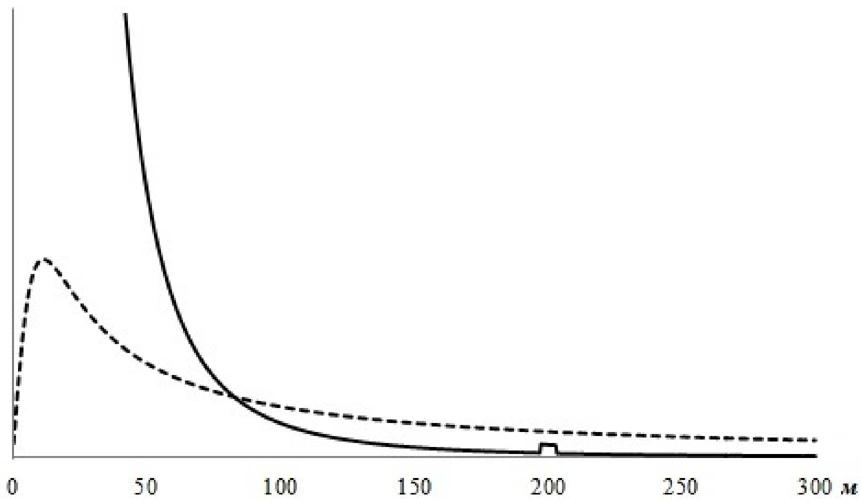


Рис. 3. Графики функций $H_{j,\gamma}$ и $H_{j,G}$ при $\sigma = 10^{-4}$

на частоте ν_0 в j-ой полосе зондирования по переменной ζ_1, равной дальности зондирования. Для анализа функций $H_{j,\gamma}$ и $H_{j,G}$ были проведены численные эксперименты при следующих значениях характеристик среды и излучателя [4-6]: $l = 10$м, $\nu_0 = 80$кГц; $\Delta\nu = 10$кГц; $t_{j+1} - t_j = 0.4$с; $\Delta t = 0.2$мс; $v = 1500$м/с; $V = 1$м/с;

$$\sigma_d(\zeta_1, \zeta_2) = \begin{cases} 3 \cdot 10^{-1}, & (\zeta_1 - 200)^2 + (\zeta_2 - 25)^2 \leqslant 3^2; \\ 1 \cdot 10^{-1}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На рисунке 1 дано схематическое распределение функции $\sigma_d(\zeta_1, \zeta_2)$ для $\zeta_1 > 0$ и выделена j-ая линия зондирования.

На рисунке 2 при $\mu = \sigma = 10^{-5}$м$^{-1}$ приведены графики функций $H_{j,\gamma}(\zeta_1)$, $H_{j,G}(\zeta_1)$. На рисунке 3 приведены те же самые графики при $\mu = \sigma = 10^{-4}$м$^{-1}$. Анализ рисунков 2,3 показывает, что когда коэффициент рассеяния в океане меньше коэффициента отражения дна на четыре порядка, то полезный сигнал $H_{j,\gamma}$, пришедший с расстояния 250 метров, сопоставим с рассеянным $H_{j,G}$. Если же величины σ и σ_d отличаются на три порядка, то равенство сигналов $H_{j,\gamma}$ и $H_{j,G}$ наблюдается на расстоянии менее 100 метров. А при $\zeta_1 = 300$м функция $H_{j,G}$ превосходит $H_{j,\gamma}$ на порядок.

Список литературы

1. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981.
2. Bal G., Kinetics of scalar wave fields in random media //Wave Motion, 2005. Vol. 43. P. 132-157.
3. Прохоров И.В., Золотарев В.В., Агафонов И.Б. Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане // Дальневосточный математический журнал. 2011. Т. 11. №1. С. 76-87.
4. Андреева И.Б. Сравнительные оценки поверхностного, донного и объемного рассеяния звука в океане // Акустический журнал. 1995. Т. 41. №5. С. 699–705.
5. Матвиенко Ю.В., Воронин В.А., Тарасов С.П. и др. Пути совершенствования гидроакустических технологий обследования морского дна с использованием автономных необитаемых подводных аппаратов //Подводные исследования и робототехника. 2008. Т. 2(8). С. 4–15.
6. Агеев А.Л., Игумнов Г.А., Костоусов В.Б., Агафонов И.Б., Золотарев В.В., Мадисон Е.А. Синтезирование апертуры многоканального гидролокатора бокового обзора с компенсацией траекторных нестабильностей //Подводные исследования и робототехника. 2012. Т. 2(14). С. 13–26.

УДК 539.371

ТЕХНОЛОГИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Садовский В.М.
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Россия, 660036, Красноярск, Академгородок, ИВМ СО РАН 50/44
E-mail: E-mail: sadov@icm.krasn.ru

Ключевые слова: параллельные вычисления, структурно неоднородные среды.

Для анализа процессов распространения волн напряжений и деформаций в средах с микроструктурой (горных породах, сыпучих и пористых материалах, жидких кристаллах) разработаны математические модели, численные алгоритмы и программные приложения, ориентированные на многопроцессорные вычислительные системы кластерной архитектуры. Разное сопротивление материалов растяжению и сжатию учитывается в рамках феноменологического подхода на основе обобщенного реологического метода. Для учета вращательных степеней свободы частиц микроструктуры материала применяется теория моментного континуума Коссера. Численная реализация возникающих систем дифференциальных уравнений и неравенств в частных производных основывается на методах расщепления по пространственным переменным и по физическим процессам в сочетании с разностной схемой Годунова. Программирование выполнено на алгоритмическом языке Fortran-90 с применением библиотеки обмена сообщениями MPI (MessagePassingInterface). Для графической обработки результатов используются компьютерные системы типа Tecplot.

УДК 004.42

СИСТЕМА АНАЛИЗА ТАМОЖЕННЫХ РИСКОВ

М.А. Скаржинец
Дальневосточный Федеральный Университет
Россия, 690091, Владивосток, Суханова 8
E-mail: powerlord@inbox.ru

Ключевые слова: риск, таможенные риски, система управления рисками

Введение

Российская таможенная служба играет важную роль в регулировании внешней торговли страны. Ее основной задачей является обеспечение соблюдения мер таможенно-тарифного регулирования, а также создание условий, способствующих ускорению товарооборота через таможенную границу. При постоянно растущем внешнеторговом обороте ни одна страна не смогла бы создать таможенную службу, позволяющую проводить тотальный контроль внешнеторговых операций без особого вреда для внешней торговли. Учитывая это, таможенные службы вынуждены осуществлять таможенный контроль на основе выборочности. С целью оптимизации этого процесса разрабатываются различные системы управления рисками (СУР). В России концепция таможенного контроля с применением СУР была утверждена лишь в 2003 году. СУР, применяемая в Российской таможне, основана на использовании профилей рисков, и, за время применения СУР, таможенная служба накопила достаточно большую базу статистики нарушений таможенных процедур (НТП). Информация, хранящаяся в ней, содержит сведения о декларируемом товаре, декларанте, совершённом правонарушении и др. Но на данный момент эта информация хранится на бумажных носителях в неформализованном виде, что препятствует её дальнейшей компьютерной обработке. Из этого следует, что в существующей программной реализации СУР не используются автоматически результаты применения СУР, т.е. отсутствуют элементы самообучения системы. Для компьютерной обработке статистики НТП требуется формализовать сам протокол НТП и дать возможность вносить его в электронную базу данных. Задачей моего исследования стала разработка программной системы, позволяющей на основе статистики НТП, и данных, полученных от декларанта, вычислить вероятность нарушения декларантом таможенного законодательства.

1. Анализ предметной области

В процессе исследования были выделены и формализованы основные объекты предметной области «декларирование товаров и транспортных средств»: товар, транспортное средство, декларант, декларация (поданная декларация) и протокол НТП (Сведения о нарушении). В данном контексте под объектом «Декларация» понимается объект, содержащий сведения из всех документов, поданных декларантом. Формализация проводилась на языке онтологии. ER-модель предметной области представлена на рис. 1. Для выделенных в процессе анализа объектов были постро-

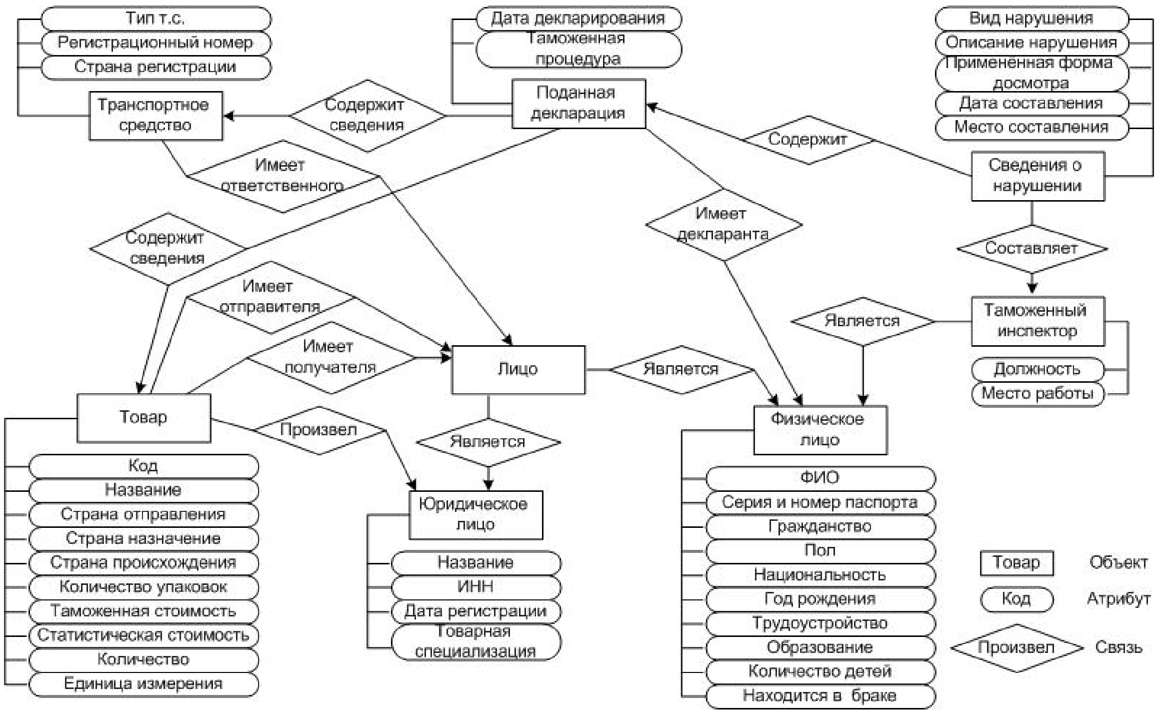


Рис. 1. ER-модель ПО

ены связи, позволяющие по данным, поданным декларантом, выявить наиболее вероятные нарушения, вероятность нарушения, и рекомендуемую форму таможенного досмотра. Наиболее вероятные нарушения состоят из: – Нарушений, характерных для декларанта и транспортного средства, т.е. из уже совершённых декларантом (для транспортного средства - совершенных с использованием этого транспортного средства) нарушений. – Возможных нарушений для товара и транспортного средства. При этом в БД производится поиск объектов «Поданная декларация», связанных с объектом «Сведения о нарушении», по характеристикам: код товара, тип транспортного средства. Вероятность нарушения является частотой с точки зрения статистики и определяется как отношение числа деклараций с выявленным фактом данного нарушения к общему числу деклараций. Вероятность характерных нарушений определяется отношением количества совершённых нарушений к числу деклараций, поданных данным декларантом (для транспортного средства - поданных с указанием этого транспортного средства). Рекомендуемой формой таможенного досмотра для конкретного нарушения будет являться форма досмотра, при использовании которой было выявлено больше всего таких нарушений.

2. Проектирование и реализация

Для реализации системы была выбрана клиент-серверная архитектура. На рис. 2 представлена схема взаимодействия модулей системы: Прототип системы реа-

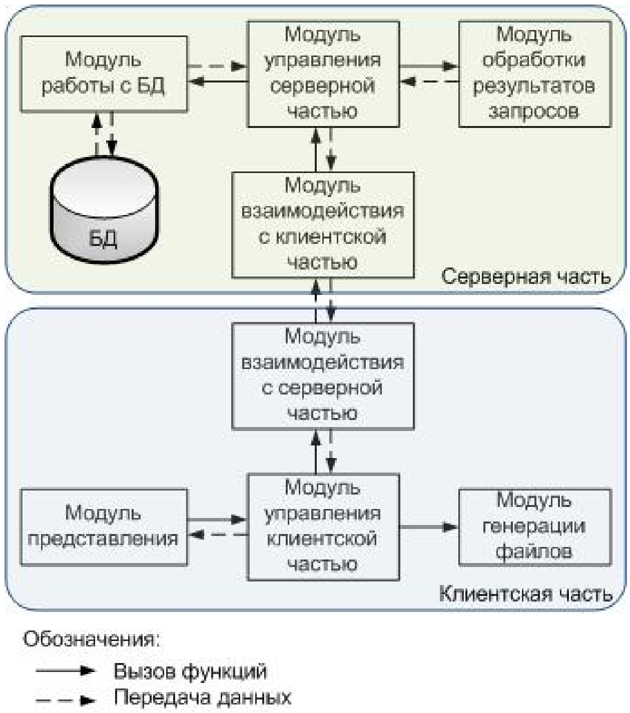


Рис. 2. Схема взаимодействия модулей

лизован с использованием языка Java. Разработка данной системы проводилась в рамках выполнения дипломной работы, в дальнейшем планируется провести более подробный анализ объектов предметной области и связей между ними, усложнить алгоритм определения вероятности нарушения.

Список литературы

1. Таможенный кодекс таможенного союза.http://www.consultant.ru.
2. Кодекс Российской Федерации об административных правонарушениях http://www.garant.ru.
3. О применении системы управления рисками в некоторых странах – членах ВТО. http://rudocs.exdat.com.
4. Левченко В.Н. Этапы анализа рисков // Теория и практика общественного развития. – 2012. – Вып. 7.
5. Приказ ГТК РФ от 30 марта 2004 г. N 395 "Об утверждении Инструкции о совершении таможенных операций при декларировании товаров в электронной форме".http://www.garant.ru.

УДК 517.95

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОБРАТНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ-РЕАКЦИИ

О.В. Соболева
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
E-mail: soboleva22@mail.ru

Ключевые слова: уравнение диффузии-реакции, коэффициентные обратные задачи, массобомен, массоперенос, численный алгоритм

В работе исследована обратная экстремальная задача для стационарного уравнения диффузии-реакции, рассматриваемого в ограниченной области с условием Дирихле на границе. Доказана разрешимость указанной задачи, построена система оптимальности, на основе которой разработан алгоритм численного решения обратной задачи, основанный на методе Ньютона. Проведены вычислительные эксперименты, показавшие эффективность предложенного алгорима. Показано влияние параметров входящих в модель, на точность численного решения посталенной задачи.

1. Введение

Важную роль в приложениях играют обратные задачи для моделей тепломассопереноса. Они заключаются в восстановлении неизвестных плотностей граничных или распределенных источников либо коэффициентов, входящих в дифференциальные уравнения или граничные условия модели по дополнительной информации о решении исходной краевой задачи. Хорошо известно, что изучение обратных задач можно свести к исследованию соответствующих экстремальных задач при определенном выборе минимизируемого функционала качества. На этом пути возникают обратные экстремальные задачи, для исследования которых можно применять хорошо разработанные методы условной минимизации. Описанию данного подхода для моделей тепломассопереноса посвящены монографии [1]–[3] и ряд статей, из которых отметим здесь [4]–[8]. Отметим также работы [9]–[11], в которых аналогичный подход применяется для решения обратных задач для моделей тепловой конвекции. Целью настоящей работы является численный анализ решений обратных экстремальных задач для линейной модели массопереноса оприсываемой стационарным уравнением диффузии-реакции с переменным коэффициентом диффузии, рассматриваемой в ограниченной области при условии Дирихле на границе Г.

2. Постановка прямой задачи

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ задачу нахождения концентрации φ (загрязняющего) вещества из соотношений

$$-\mathrm{div}(\lambda \nabla \varphi) + k\varphi = f,\ \varphi|_\Gamma = \psi. \tag{1}$$

Здесь $\lambda \equiv \lambda(\mathbf{x}) > 0$ – коэффициент диффузии, зависящий от точки $\mathbf{x} \in \Omega$, $k \equiv k(\mathbf{x}) \geqslant 0$ – величина, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций, $f(\mathbf{x})$ – плотность объемных источников, $\psi(\mathbf{x})$ – заданная на Γ функция. Ниже при анализе краевой и экстремальной задач использовались функциональные пространства Соболева $H^s(D)$ и $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω, либо границу Γ, либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$. Через $\|\cdot\|_s$, $|\cdot|_s$ будем обозначать норму и полунорму в $H^s(\Omega)$. Через $\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|_{1,Q}$ и $(\cdot,\cdot)_Q$, $(\cdot,\cdot)_{1,Q}$ будем обозначать нормы и скалярные произведения соответственно в пространствах $L^2(Q)$ и $H^1(Q)$. Отношение двойственности между пространством X и двойственным к нему X^* будем обозначать через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ либо просто $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Положим $H^s_{\lambda_0}(\Omega) = \{\lambda \in H^s(\Omega) : \lambda \geqslant \lambda_0\}$, где $\lambda_0 = \mathrm{const} > 0$, $L^2_+(\Omega) = \{k \in L^2(\Omega) : k \geqslant 0 \ \text{ в } \ \Omega\}$. Через $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ обозначим оператор следа, через $\gamma_r^{-1} : H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ – непрерывный правый обратный оператор к γ, с которым выполняется соотношение $\gamma \circ \gamma_r^{-1}\psi = \psi$ для всех $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Отметим, что в силу теоремы о следах выполняется неравенство $\|\gamma_r^{-1}\psi\|_1 \leqslant C_\Gamma\|\psi\|_{1/2,\Gamma}$ для всех $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, где константа C_Γ зависит от Γ, но не зависит от ψ. Подробно о введенных пространствах см. в [3, гл. 1]. Предположим, что выполняются условия (i) $\Gamma \in C^{0,1}$, $k \in L^2_+(\Omega)$; (ii) $f \in L^2(\Omega)$; (iii) $\lambda \in H^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $\lambda_0 > 0$, $s > d/2$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Введем пространство $\mathcal{T} = H^1_0(\Omega) \equiv \{\eta \in H^1(\Omega) : \eta = 0 \text{ на } \ \Gamma\}$. Хорошо известно, что $\mathcal{T}$ – гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_\mathcal{T} = \|\cdot\|_1$, эквивалентной полунорме $|\cdot|_1$ в силу неравенства Фридрикса–Пуанкарé $|\eta|_1^2 \geqslant \delta_1\|\eta\|_1^2$ для всех $\eta \in \mathcal{T}, \delta_1 = \mathrm{const} > 0$. Через $\mathcal{T}^* \equiv H^{-1}(\Omega)$ обозначим пространство, двойственное к $\mathcal{T}$ относительно пространства $L^2(\Omega)$. Введем билинейные формы $\tilde{a}_\lambda, a_\lambda : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ с помощью формул

$$\tilde{a}_\lambda(\varphi,\eta) = (\lambda\nabla\varphi, \nabla\eta) = \int\limits_\Omega \lambda\nabla\varphi\cdot\nabla\eta d\mathbf{x},\ \ a_\lambda(\varphi,\eta) = (\lambda\nabla\varphi,\nabla\eta) + (k\varphi,\eta). \tag{2}$$

Умножим уравнение в (1) на функцию $h \in \mathcal{T}$ и проинтегрируем по Ω. Используя формулу Грина (см. [3, с. 128]) и обозначения (2), приходим к слабой формулировке задачи (1). Она заключается в нахождении функции $\varphi \in H^1(\Omega)$ из условий

$$a_\lambda(\varphi, h) \equiv (\lambda\nabla\varphi,\nabla h) + (k\varphi, h) = (f, h),\ \varphi|_\Gamma = \psi. \tag{3}$$

Слабым решением задачи (1) назовем функцию $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую (3). Из [3] вытекает

Теорема 1. *Пусть при выполнении условия (i) $\lambda \in H^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $\lambda_0 > 0$, $s > d/2$. Тогда: 1) билинейная форма $a_\lambda : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ непрерывна и коэрцитивна на $\mathcal{T}$ с константой $\lambda_* = \delta_1\lambda_0$; 2) для любой пары функций $(f,\psi) \in L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$ задача (3) имеет единственное решение $\varphi \in H^1(\Omega)$ и справедлива оценка $\|\varphi\|_1 \leqslant C_\lambda(\|f\| + \|\psi\|_{1/2,\Gamma})$ с константой $C_\lambda = \lambda_*^{-1}\max[1, (\lambda_* + \gamma_0\|\lambda\|_s + \gamma_1\|k\|)C_\Gamma]$; 3) оператор $(A_\lambda,\gamma) : X \to Y$, $X = H^1(\Omega)$, $\ Y = (\mathcal{T}^*, H^{1/2}(\Gamma))$, $\langle A_\lambda\varphi, h\rangle = (\lambda\nabla\varphi,\nabla h) + (k\varphi, h)\ \forall\varphi \in H^1(\Omega)$, $h \in \mathcal{T}$, осуществляет изоморфизм пространств X и Y.*

3. Обратная задача

Предположим, что в задаче (1) кроме концентрации φ также неизвестны коэффициент диффузии λ и граничная функция ψ, и их требуется определелить вместе с решением φ, используя заданные значения φ_d концентрации φ в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$. Для исследования данной обратной задачи мы применим оптимизационный метод, в соответствии с которым указанная задача сводится к решению соответствующей задачи управления. Следуя данному методу, разобъем множество исходных данных задачи (1) на две группы: группу фиксированных данных, куда внесем неизменяемые функции k и f, и группу двух распределенных управлений, куда внесем функции λ и ψ. Предположим, что управления λ и ψ могут изменяться во множествах K_1 и K_2, удовлетворяющих условиям (j) $K_1 \subset H^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $\lambda_0 > 0$, $s > d/2$, $K_2 \subset H^{1/2}(\Gamma)$ – непустые выпуклые замкнутые множества. Полагая $K = K_1 \times K_2$, $u = (\lambda, \psi)$, введем оператор $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \times L^2(\Omega) \to Y \equiv \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma)$, действующий по формулам

$$\langle F_1(\varphi, \lambda), h\rangle = \langle A_\lambda \varphi, h\rangle - (f, h) \equiv a_\lambda(\varphi, h) - (f, h)\ \forall h \in \mathcal{T},\ F_2(\varphi, \psi) = \varphi|_\Gamma - \psi. \quad (4)$$

Пусть $I : X \to \mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу функционал качества, μ_0, μ_1, μ_2 – неотрицательные параметры. Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$J(\varphi, u) \equiv \frac{\mu_0}{2} I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|_s^2 + \frac{\mu_2}{2}\|\psi\|^2_{1/2,\Gamma} \to \inf, \quad F(\varphi, u) = 0, \quad (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K. \quad (5)$$

В качестве функционала качества будем использовать следующий слабо полунепрерывный снизу функционал (см. например, [3])

$$I_1(\varphi) = \|\varphi - \varphi_d\|^2_Q = \int\limits_Q |\varphi - \varphi_d|^2 d\mathbf{x} \equiv \int\limits_\Omega r(\varphi - \tilde{\varphi}_d)^2 d\mathbf{x}. \quad (6)$$

Здесь $\varphi_d \in L^2(Q)$ – заданная в Q функция, $r = \chi_Q$ – характеристическая функция множества Q, $\tilde{\varphi}_d \in L^2(\Omega)$ – функция, равная φ_d в Q и 0 вне Q. Введем множество $Z_{ad} = \{(\varphi, u) \in X \times K : F(\varphi, u) = 0,\ J(\varphi, u) < \infty\}$ допустимых пар (φ, u) для задачи (7). Предположим в дополнение к (j), что выполняется условие (jj) $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$ и K_1, K_2 – ограниченные множества либо $\mu_l > 0$, $l = 0, 1, 2$, и функционал I ограничен снизу.

Теорема 2. *Пусть $I : X \to \mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу функционал качества и выполняются условия (i), (ii), (j), (jj), причем множество Z_{ad} не пусто. Тогда задача (7) имеет по крайней мере одно решение $(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K$.*

Теорема 3. *Пусть при выполнении условий (i), (ii), (j), $\mu_0 > 0$, $\mu_l > 0$ либо $\mu_0 > 0$, $\mu_l \geqslant 0$ и K_l – ограниченные множества, $l = 1, 2$. Тогда задача (7) при $I = I_1$, имеет по крайней мере одно решение $(\varphi, u) \in X \times K$.*

Выведем необходимые условия оптимальности для задачи (7). Для этого воспользуемся экстремальным принципом в гладко-выпуклых экстремальных задачах [12]. Обозначим через $Y^* = \mathcal{T} \times H^{-1/2}(\Gamma)$, где $H^{-1/2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)^*$, двойственное пространство к пространству $Y = \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma)$. В соответствии с общей теорией экстремальных задач [12] введем в рассмотрение множитель Лагранжа $y^* = (\eta, \zeta) \in Y^*$, где элемент $\eta \in \mathcal{T}$ имеет смысл "сопряженной" концентрации, и лагранжиан $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times K \times H^{1/2}(\Gamma) \times Y^* \to \mathbb{R}$ формулой

$$\mathcal{L}(\varphi, u, y^*) \equiv J(\varphi, u) + \langle y^*, F(\varphi, u, \psi)\rangle_{Y^* \times Y} \equiv \quad (7)$$

$$\equiv (\mu_0/2)I(\varphi) + (\mu_1/2)\|\lambda\|_s^2 + (\mu_2/2)\|\psi\|_{1/2,\Gamma}^2 + \langle F_1(\varphi,\lambda),\eta\rangle_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}} + \langle\zeta, F_2(\varphi,\psi)\rangle_\Gamma.$$

Из линейности оператора F по λ и ψ и из выпуклости множества K вытекает, что множество $F(\varphi,K) = \{y = F(\varphi,u) \in Y, u \in K\}$ является выпуклым подмножеством в Y для любой функций $\varphi \in X$. Кроме того, производная Фреше $F'_\varphi(\hat\varphi,\hat u)$ в каждой точке $(\hat\varphi,\hat u) \in H^1(\Omega)\times K\times H^{1/2}(\Gamma)$, где $\hat u = (\hat\lambda,\hat\psi)$, имеет вид

$$F'_\varphi(\hat\varphi,\hat u) = (F'_{1\varphi}(\hat\varphi,\hat\lambda), F'_{2\varphi}(\hat\varphi,\hat\psi)) = (\hat A,\gamma),\ \ \hat A = (\hat\lambda\nabla\varphi,\nabla h) + (k\varphi,h). \tag{8}$$

Так как оператор (8) является изоморфизмом в силу теоремы 2, то из [12, c. 79] вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Пусть при выполнении условий теоремы 3 пара* $(\hat\varphi,\hat u) \in H^1(\Omega)\times K$ *является элементом, на котором достигается локальный минимум в задаче (7), и пусть функционал* $I(\cdot): X \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируем по* φ *в точке* $\hat\varphi$. *Тогда существует единственный множитель Лагранжа* $y^* = (\eta,\zeta) \in \mathcal{T}\times H^{-1/2}(\Gamma)$ *такой что справедливо уравнение Эйлера-Лагранжа* $\mathcal{L}'_\varphi(\hat\varphi,\hat u,y^*) = 0$ *в* X^*, *эквивалентное тождеству*

$$\langle\hat A\tau,\eta\rangle_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}} + \langle\zeta,\tau\rangle_\Gamma \equiv (\hat\lambda\nabla\tau,\nabla\eta) + (k\tau,\eta) + \langle\zeta,\tau\rangle_\Gamma = -(\mu_0/2) < I'_\varphi(\hat\varphi),\tau > \ \ \forall\tau\in X, \tag{9}$$

и выполняется принцип минимума

$$\mathcal{L}(\hat\varphi,\hat u,y^*) \leqslant \mathcal{L}(\hat\varphi,u,y^*)\ \forall u\in K. \tag{10}$$

Прямая задача (3), "сопряженная" задача (9) и принцип минимума (9) образуют систему оптимальности, описывающую необходимые условия минимума для задачи (7).

4. Численное решение обратной задачи

Для простоты рассмотрим случай, когда минимум используемого функционала качества достигается во внутренней точке множества K. В этом случае принцип минимума (9) эквивалентен тождеству

$$(\mu_1\hat\lambda + \nabla\hat\varphi\nabla\eta,\lambda) + (\mu_2\hat\psi,\psi)_\Gamma - \langle\zeta,\psi\rangle_\Gamma = 0. \tag{11}$$

Перепишем (3), (9) и (11) в виде следующего операторного уравнения:

$$\Phi(\varphi,\eta,\lambda,\psi) = 0. \tag{12}$$

Здесь $\Phi: X\times K\times Y^* \to Y\times H^1(\Gamma)^*\times K^*$. Для численного решения уравнения (12) применим итерационный алгоритм, основанный на методе Ньютона. Он состоит из следующих этапов: **0**. Выбирается начальное приближение φ_0, η_0, λ_0, ψ_0 для искомого решения $(\varphi,\eta,\lambda,\psi)$ задачи (12). Полагается $n=0$. **1**. Вычисляется элемент $(\tilde\varphi,\tilde\eta,\tilde\lambda,\tilde\psi)$ как решение уравнения

$$\Phi'(\varphi_n,\eta_n,\lambda_n,\psi_n)(\tilde\varphi,\tilde\eta,\tilde\lambda,\tilde\psi) = -\Phi(\varphi_n,\eta_n,\lambda_n,\psi_n). \tag{13}$$

2. Пересчитываются значения искомых величин $\varphi,\eta,\lambda,\psi$ по формулам

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \tilde\varphi,\ \ \eta_{n+1} = \eta_n + \tilde\eta,\ \ \lambda_{n+1} = \lambda_n + \tilde\lambda,\ \ \psi_{n+1} = \psi_n + \tilde\psi.$$

3. Проверяется условие выхода из цикла $\|\varphi_{n+1}-\varphi_n\| \equiv \|\varphi_{n+1}-\varphi_n\|_{L^2(\Omega)} < 10^{-8}$. Если оно не выполняется, то n увеличивается на 1 и осуществляется переход к этапу 1.

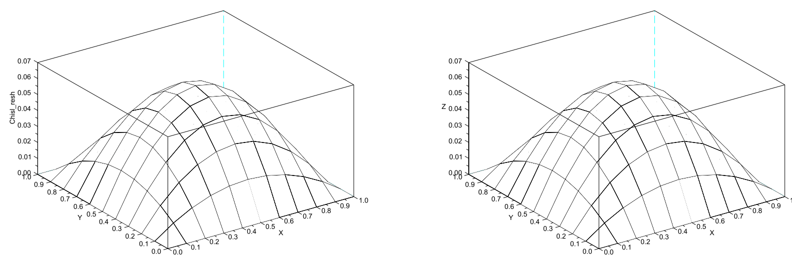


Рис. 1. График восстановленной (слева) и аналитически заданной (справа) концентрации вещества

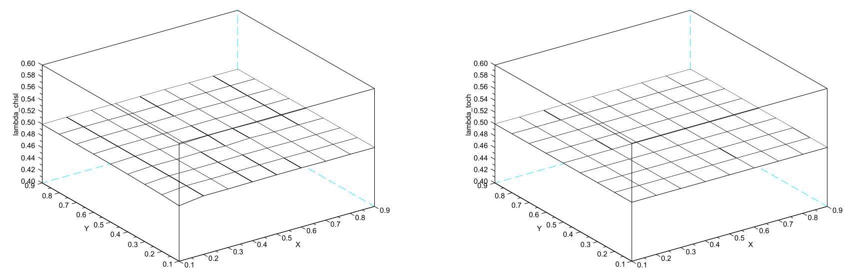


Рис. 2. График восстановленной (слева) и аналитически заданной (справа) функции λ

Расмотрим случай, когда концентрацию вещества можно описать аналитической функцией, коэффициент λ-const, а функция $\psi = 0$. На рис. 1 слева представлен график значений функции φ полученных в результате решения обратной задачи, а справа – график аналитического решения. На рис. 2 аналогичным образом представлены графики восстанавливаемого коэффициента λ.

5. Выводы

В данной работе была исследована обратная экстремальная задача для стационарного уравнения диффузии-реакции (1), рассматриваемого в ограниченной области с условиями Дирихле на границе. Доказана разрешимость указанной задачи, построена система оптимальности. Разработан численный алгоритм решения данной задачи, основанный на методе Ньютона. С использованием пакета Scilab [13] проведены вычислительные эксперименты, подтвердившие эффективность предложенного алгорима. Анализ результатов численных экспериментов позволил выявить влияние параметров модели на точность искомого решения. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов ФЦП (N 14.A18.21.0353) и РФФИ (N 12-01-31288-мол_а, 13-01-00313).

Список литературы

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М.:Наука. 1988. 286 с.
2. *Самарский А.А., Вабишевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 480 с.
3. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости, Владивосток: Дальнаука. 2008.

4. *Алексеев Г.В.* Единственность и устойчивость в коэффициентных обратных экстремальных задачах для стационарной модели массопереноса // Докл. АН. 2007. Т. 416. N. 6. С. 750-753.
5. *Алексеев Г.В.* Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 6. С. 1055–1076.
6. *Алексеев Г.В., Соболева О.В., Терешко Д.А.* Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // Прикл. мех. техн. физ. 2008. Т. 49. N 4. С. 24–35.
7. *Соболева О.В.* Алексеев Вахитов Соболева Обратные экстремальные задачи для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции // Дальневост. матем. журн. 2010. Т. 10, № 2. С. 170-184.
8. *Вахитов И.С.* Обратная задача идентификации неизвестного коэффициента в уравнении диффузии-реакции // Дальневост. матем. журн. 2010. Т. 10, № 2. С. 93-105.
9. *Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Наймарк Б.М., Цепелев И.А.* Трехмерное численное моделирование обратной задачи тепловой конвекции // Журн. вычислит. матем. матем. физ. 2003. Т. 43, №4. С. 614–626
10. *Исмаил-заде А.Т., Короткий А.И., Цепелев И.А.* Трехмерное численное моделирование обратной ретроспективной задачи тепловой конвекции на основе метода квазиобращения // Журн. вычислит. матем. матем. физ. 2006. Т. 46, №12. С. 2277–2288.
11. *Короткий А.И., Цепелев И.А.* Прямые и обратные задачи динамики высоковязкой жидкости // Автоматика и телемеханика. 2007. №5. С. 84–96.
12. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука. 1974. 480 с.
13. http://www.scilab.org

УДК 517.95

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИМПЕНДАНСОМ В ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ МАСКИРОВКИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ ОТ АКУСТИЧЕСКОЙ ЛОКАЦИИ

В.В. Соснов
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690950, Владивосток, Суханова 8
E-mail: megachuhancer@gmail.com

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, краевая задача, импеданс, задача управления, граничное управление, разрешимость

Рассматривается задача управления для двумерного уравнения Гельмгольца в неограниченной области с покрытой специальными материалами границей. Внесение покрытия моделируется с помощью импедансного граничного условия. Роль управления в рассматриваемой задаче играет поверхностный импеданс. Доказано существование решения задачи управления и выведена система оптимальности.

Введение

В настоящее время большое количество работ посвящается исследованию задач математической физики, связанных с созданием средств маскировки материальных объектов от электромагнитной или акустической локации. В ряде работ (см., например, [1, 2] и ссылки к этим работам) эффект маскировки обеспечивается выбором параметров неоднородной анизотропной среды, заполняющей маскировочную оболочку, путём решения соответствующей обратной задачи для уравнений Максвелла или уравнения Гельмгольца с переменными коэффициентами. Однако техническая реализация данного способа маскировки связана со значительными техническими трудностями [3]. Возможны несколько способов преодоления этих трудностей. Один из способов заключается в аппроксимации точных решений исследуемой задачи маскировки приближенными решениями, которые допускают относительно простую техническую реализацию. Другой альтернативный способ маскировки заключается в покрытии маскируемых материальных объектов специальными материалами. Внесение такого покрытия моделируется введением импедансного граничного условия, связывающего между собой звуковое давление и нормальную компоненту колебательной скорости через граничный коэффициент, называемый поверхностным импедансом. Математически, это — задача управления, заключающаяся в нахождении поверхностного импеданса, при котором поле, рассеянное маскируемым объектом, минимально. В данной работе рассматривается эта задача в двумерном случае с импедансным граничным условием на всей границе рассматриваемой области. Физические основы данного подхода можно найти в [4, 5].

1. Прямая задача

1.1. Постановка краевой задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная односвязная область с липшицевой границей Γ, $\Omega^c \equiv \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega}$, n — нормальный вектор, ориентированный наружу, определённый почти всюду на Γ. Хорошо известно, что двумерная прямая задача рассеяния акустических волн описывается двумерным уравнением Гельмгольца

$$\triangle u + k^2 u = 0 \text{ в } \Omega^c, \tag{1}$$

в данном случае с импедансным граничным условием, моделирующим покрытие границы области специальными материалами:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ik\lambda u = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{2}$$

Здесь $u = u^{inc} + u^s$, где u^{inc} — падающая волна, u^s — рассеянная препятствием Ω волна, λ — поверхностный импеданс границы Γ , k — положительное волновое число. Кроме того, рассеянная волна u^s должна удовлетворять условию излучения Зоммерфельда на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0. \tag{3}$$

Прямая задача рассеяния (1)–(3) сформулирована и исследована в [7], где доказана единственность решения в случае $\lambda = \text{const} > 0$. Эта задача рассматривается в неограниченной области, поэтому она непригодна для численного решения. Далее будет показано, что эту задачу можно свести к эквивалентной задаче в ограниченной области.

1.2. Функциональные пространства

Введём некоторые функциональные пространства, которые будут использоваться в дальнейшем. Введём круг B_R радиуса R, содержащий Ω, положим $\Omega_e = \Omega^c \cap B_R$. Ω_e — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega_e = \Gamma \cup \Gamma_R$, где $\Gamma_R = \partial B_R$. Будем использовать обычное пространство Соболева $H^1(\Omega_e)$, состоящее из комплекснозначных или вещественнозначных скалярных функций, заданных в Ω_e, и пространства следов, $H^{1/2}(\partial\Omega_e)$ и $H^{1/2}(\Gamma_0)$, где Γ_0 — часть $\partial\Omega_e$. Помимо $H^{1/2}(\Gamma_0)$ будем использовать его подпространство $H_0^{1/2}(\Gamma_0)$, состоящее из таких и только таких функций $v \in H^{1/2}(\Gamma_0)$, продолжение нулем $\tilde{v}$ которых на всю границу $\partial\Omega_e$ принадлежит $H^{1/2}(\partial\Omega_e)$. Обозначим через $H^{-1/2}(\Gamma_0)$ пространство $H_0^{1/2}(\Gamma_0)^*$, сопряжённое к $H_0^{1/2}(\Gamma_0)$. Нормы в пространствах $H^1(\Omega_e)$, $H^{1/2}(\Gamma_0)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_0)$ обозначим через $\|\cdot\|_{1,\Omega_e}$, $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_0}$ и $\|\cdot\|_{-1/2,\Gamma_0}$. Пусть Q — произвольное подмножество в Ω_e. Скалярные произведения и нормы в $L^2(Q)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)_Q$ и $\|\cdot\|_Q$ соответственно. В случае $Q = \Omega_e$ полагаем $\|\cdot\|_{\Omega_e} = \|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)_{\Omega_e} = (\cdot,\cdot)$. Скалярные произведения и нормы в $L^2(\Gamma_0)$ обозначим через $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_0}$ и $\|\cdot\|_{\Gamma_0}$. Положим $L^\infty_{\lambda_0}(\Gamma) = \{\lambda \in L^\infty(\Gamma) : \lambda(x) \geqslant \lambda_0 \text{ на } \Gamma\}$, $H^s_{\lambda_0}(\Gamma) = \{\lambda \in H^s(\Gamma) : \lambda(x) \geqslant \lambda_0 \text{ на } \Gamma\}$. Определим следующее подпространство $H^1(\Omega_e)$: $H^1(\Delta,\Omega_e) = \{v : v \in H^1(\Omega_e),\ \Delta\, v \in L^2(\Omega_e)\}$, наделённое нормой

$$\|v\|^2_{H^1(\Delta,\Omega_e)} = \|v\|^2_{1,\Omega_e} + \|\Delta v\|^2.$$

Известно [6], что для любой функции $u \in H^1(\Delta, \Omega_e)$ существует первый след $\gamma_1 u := \partial u/\partial n|_{\partial\Omega_e} \in H^{-1/2}(\partial\Omega_e)$ и сужение первого следа $\partial u/\partial n|_{\Gamma_R} \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$. Для описания падающих полей введём пространство

$$\mathcal{H}^{inc} = \mathcal{H}^{inc}(\Omega_e) := \{v \in H^1(\Omega_e) : \Delta v + k^2 v = 0 \text{ в смысле распределений}\}.$$

Ясно, что $\mathcal{H}^{inc} \subset H^1(\Delta, \Omega_e)$. Поэтому для любого падающего поля $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$ существуют следы (нормальные компоненты) $\partial u^{inc}/\partial n$ и $\partial u^{inc}/\partial n|_{\Gamma_R}$. Более того, из теорем о следах следует, что выполнены следующие оценки:

$$\|v\|_\Gamma \leqslant C_1\|v\|_{H^1(\Omega_e)}, \|v\|_{1/2,\Gamma_R} \leqslant C_1\|v\|_{H^1(\Omega_e)} \ \forall v \in H^1(\Omega_e),$$
$$\|\frac{\partial v}{\partial n}\|_{-1/2,\Gamma_R} \leqslant C_1\|v\|_{H^1(\Omega_e)} \ \forall v \in \mathcal{H}^{inc}. \qquad (4)$$

Здесь и далее C_1, C_2, ... обозначают константы, зависящие от Ω, R и, может быть, k

1.3. Задача в ограниченной области

Известно [7, 8], что задача (1)–(3) может быть сведена к эквивалентной задаче, но рассматриваемой уже в ограниченной области $\Omega_e = \Omega^c \cap B_R$. С этой целью вводится отображение Дирихле-Неймана $T : H^{1/2}(\Gamma_R) \to H^{-1/2}(\Gamma_R)$. По определению оператор T отображает любую функцию $h \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ в функцию $\partial\tilde{u}/\partial n \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$, где $\tilde{u}$ решение внешней задачи Дирихле для оператора Гельмгольца $\Delta\tilde{u} + k^2\tilde{u} = 0$ в $\Omega^c \backslash \overline{B}_R$ во внешности B_R с условием $\tilde{u}|_{\Gamma_R} = h$. Хорошо известно, что $T \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R), H^{-1/2}(\Gamma_R))$, причём $\|T\| = \|T\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R), H^{-1/2}(\Gamma_R))} \leqslant C_2$ [9]. Более того, существует оператор $T_0 \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R), H^{-1/2}(\Gamma_R))$, такой что $T - T_0$ является компактным оператором, действующим из $H^{1/2}(\Gamma_R)$ в $H^{-1/2}(\Gamma_R)$, $\|T_0\| \leqslant C_2'$ и $\langle T_0 v, v\rangle_{\Gamma_R} \leqslant 0$ для любого $v \in H^{1/2}(\Gamma_R)$. Задача (1)–(3), рассматриваемая в неограниченной области, эквивалентна задаче (1), (2), рассматриваемой в ограниченной области Ω_e при следующем граничном условии для рассеянного поля u^s на Γ_R:

$$\partial u^s/\partial n = T u^s \text{ на } \Gamma_R. \qquad (5)$$

Будем ссылаться на задачу (1), (2), (5) как на задачу 1.

1.4. Вариационная формулировка

Пусть $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$. Умножим уравнение (1) на функцию $\overline{\phi}$ где $\phi \in H^1(\Omega_e)$, проинтегрируем по Ω_e и применим формулу Грина. Будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_e} (\nabla u \cdot \nabla\overline{\phi} - k^2 u\overline{\phi})dx = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}\overline{\phi} d\sigma + \int\limits_{\Gamma_R} \frac{\partial u}{\partial n}\overline{\phi} d\sigma \ \forall\phi \in H^1(\Omega_e) \qquad (6)$$

где $\overline{\phi}$ обозначает комплексно сопряжённую к ϕ функцию. Используя граничное условие (2), соотношение $u = u^i + u^s$ и (5) имеем

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}\overline{\phi} d\sigma = -ik\int\limits_{\Gamma} u\overline{\phi} d\sigma, \ \int\limits_{\Gamma_R} \frac{\partial u}{\partial n}\overline{\phi} d\sigma = \int\limits_{\Gamma_R} Tu\overline{\phi} d\sigma - \int\limits_{\Gamma_R} Tu^{inc}\overline{\phi} d\sigma + \int\limits_{\Gamma_R} \frac{\partial u^{inc}}{\partial n}\overline{\phi} d\sigma. \qquad (7)$$

Здесь и далее интегралы по Γ_R обозначают отношение двойственности между пространствами $H^{1/2}(\Gamma_R)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_R)$. Учитывая (7) перепишем (6) в виде

$$a_\lambda(u, \phi) = \langle f, \phi\rangle \ \ \forall\phi \in H^1(\Omega_e), \quad \langle f, \phi\rangle = -\int\limits_{\Gamma_R} Tu^{inc}\overline{\phi} d\sigma + \int\limits_{\Gamma_R} \frac{\partial u^{inc}}{\partial n}\overline{\phi} d\sigma. \qquad (8)$$

Здесь $a_\lambda(u,\phi) := a_0(u,\phi) + ik(\lambda u,\phi)_\Gamma$ где $a_\lambda(\cdot,\cdot)$ и $(\lambda\cdot,\cdot) : H^1(\Omega_e)\times H^1(\Omega_e)\to\mathbb{C}$ полуторалинейные формы, где

$$a_0(u,\phi) := \int\limits_{\Omega_e} \nabla u\cdot\nabla\overline{\phi}d\sigma - k^2\int\limits_{\Omega_e} u\overline{\phi}d\sigma - \int\limits_{\Gamma_R} Tu\overline{\phi}d\sigma,\ (\lambda u,\phi)_\Gamma := \int\limits_{\Gamma}\lambda u\overline{\phi}d\sigma. \tag{9}$$

Назовём решение $u\in H^1(\Omega_e)$ задачи (8) слабым решением задачи 1. Пусть $\lambda\in L^\infty_{\lambda_0}(\Gamma)$, $\lambda_0>0$. Используя классические теоремы о следах, теоремы вложения и (4), имеем

$$|\langle f,\phi\rangle| \leqslant (\|T\|\|u^{inc}\|_{1/2,\Gamma_R} + \|\frac{\partial u^{inc}}{\partial n}\|_{-1/2,\Gamma_R})\|\phi\|_{1/2,\Gamma_R} \leqslant \\ \leqslant C_3\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}\|\phi\|_{H^1(\Omega_e)}\ \forall\phi\in H^1(\Omega_e),$$

$$|a_0(u,\phi)| \leqslant (1+k^2)\|u\|_{H^1(\Omega_e)}\|\phi\|_{H^1(\Omega_e)} + \|T\|\|u\|_{1/2,\Gamma_R}\|\phi\|_{1/2,\Gamma_R} \leqslant \\ \leqslant C_4\|u\|_{H^1(\Omega_e)}\|\phi\|_{H^1(\Omega_e)}\ \forall\phi\in H^1(\Omega_e),$$

$$|k(\lambda u,\phi)_\Gamma| \leqslant C_4\|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma)}\|u\|_{H^1(\Omega_e)}\|\phi\|_{H^1(\Omega_e)}\ \forall u\in H^1(\Omega_e),\ \phi\in H^1(\Omega_e). \tag{10}$$

Из этих оценок следует, что формы f and a_λ непрерывны на $H^1(\Omega_e)$ и

$$\|f\|_{H^1(\Omega_e)^*} \leqslant C_3\|u^{inc}\|_{1,\Omega},\ \|a_\lambda\| := \|a_\lambda\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_e),H^1(\Omega_e)^*)} \leqslant C_4(1+\|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma)}) \tag{11}$$

где $H^1(\Omega_e)^*$ — сопряжённое к $H^1(\Omega_e)$ пространство. Отметим, что полуторалинейная форма a_λ определяет линейный оператор $A_\lambda : H^1(\Omega_e)\to H^1(\Omega_e)^*$, действующий по формуле

$$\langle A_\lambda u,\phi\rangle := a_\lambda(u,\phi)\ \ \forall u\in H^1(\Omega_e),\ \phi\in H^1(\Omega_e) \tag{12}$$

и вариационная формулировка (8) для $u\in H^1(\Omega_e)$ эквивалентна операторному уравнению

$$A_\lambda u = f,\ f\in H^1(\Omega_e)^*. \tag{13}$$

Основываясь на свойствах формы a_λ и оценках (11), можно показать, что к задаче (8) применима альтернатива Фредгольма, и что оператор A_λ, определённый в (12), является изоморфизмом. Положим $\tilde{C}_\lambda = \|A_\lambda^{-1}\|$, где $A_\lambda^{-1} : H^1(\Omega_e)^*\to H^1(\Omega_e)$ – обратный оператор для A_λ. Тогда из (11) следует

Теорема 1. *Пусть $\lambda\in L^\infty_{\lambda_0}(\Gamma)$, $\lambda_0>0$. Тогда: (1) оператор $A_\lambda : H^1(\Omega_e)\to H^1(\Omega_e)^*$, определённый в (12), является изоморфизмом; (2) для любого падающего поля $u^{\mathrm{inc}}\in\mathcal{H}^{\mathrm{inc}}$ задача (8) имеет единственное решение $u\in H^1(\Omega_e)$, которое удовлетворяет оценке $\|u\|_{H^1(\Omega_e)}\leqslant C_\lambda\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}$, $C_\lambda = C_3\tilde{C}_\lambda$.*

2. Задача управления

2.1. Постановка и разрешимость задачи управления

Сформулируем теперь задачу управления. Роль управления в данной задаче играет импеданс λ, изменяющийся в некотором множестве K, а в качестве функционала стоимости, который нужно минимизировать, будем использовать один из следующих:

$$I_1(u) = \int\limits_Q |u-u_d|^2dx,\ \ I_2(u) = \int\limits_{\Gamma_r} |u-u_d|^2d\sigma. \tag{14}$$

Здесь и ниже $Q \subset \Omega_e$ – произвольная подобласть, Γ_r – граница круга B_r радиуса $r < R$, такого, что $\Omega \subset B_r$. Предположим, что выполняются условия: (j) $\Gamma \in C^{1,1}$; $\mu_0 > 0$; $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$; $K \subset H^s_{\lambda_0}(\Gamma)$ – непустое выпуклое замкнутое множество, где $s > 1/2$, $\lambda_0 > 0$. Отметим, что при $s > 1/2$ (если $\Gamma \in C^{1,1}$) имеет место непрерывное компактное вложение $H^s(\Gamma) \subset L^\infty(\Gamma)$. Это влечёт за собой следующие оценки:

$$\|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma)} \leqslant C_s\|\lambda\|_{s,\Gamma} \;\; \forall\lambda \in H^s(\Gamma),\; \|\lambda\|_{s,\Gamma} := \|\lambda\|_{H^s(\Gamma)}. \tag{15}$$

Здесь константа C_s зависит от $s > 1/2$ и Ω. Введём оператор $G : H^1(\Omega_e)\times K\times\mathcal{H}^{inc} \to H^1(\Omega_e)^*$ формулой $\langle G(u,\lambda,u^{inc}),\phi\rangle = a_\lambda(u,\phi) - \langle f,\phi\rangle$ и перепишем слабую формулировку (8) задачи 1 в виде уравнения $G(u,\lambda,u^{inc}) = 0$. Рассмотрим следующую задачу условной минимизации:

$$J(u,\lambda) = \frac{\mu_0}{2}I(u) + \frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|^2_{s,\Gamma} \to \inf,\;\; G(u,\lambda,u^{inc}) = 0,\; (u,\lambda) \in H^1(\Omega_e)\times K. \tag{16}$$

Здесь $I : H^1(\Omega_e) \to \mathbb{R}$ слабо полунепрерывный снизу функционал стоимости, μ_0, μ_1 – неотрицательные параметры, служащие для регулирования относительной важности каждого из слагаемых. Введём множество

$$Z_{ad}=\{(u,\lambda) \in H^1(\Omega_e)\times K : G(u,\lambda,u^{\rm inc}) = 0, J(u,\lambda)<\infty\}$$

– допустимое множество пар для (16). Справедлива следующая теорема существования решения задачи (16).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (j), $I : H^1(\Omega_e) \to \mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу функционал и Z_{ad} – непустое множество. Также пусть $\mu_1 \geqslant 0$ и K – ограниченное множество, либо $\mu_1 > 0$ и функционал I ограничен снизу. Тогда задача (16) имеет по крайней мере одно решение $(u,\lambda) \in H^1(\Omega_e)\times K$.*

Отметим, что теорема 2 верна для обоих функционалов I_1 и I_2, так как они являются слабо полунепрерывными снизу. Более того, Z_{ad} непусто для каждого из них в силу условий (j) и теоремы 1. Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (j), $\mu_1 > 0$ или $\mu_1 \geqslant 0$ и K – ограниченное множество. Тогда задача управления (16) имеет по меньшей мере одно решение $(u,\lambda) \in H^1(\Omega_e)\times K$ для $I = I_j$, $j = 1,2$.*

2.2. Система оптимальности

Следующий этап исследования задачи управления (16) заключается в выводе системы оптимальности, описывающей необходимые условия экстремума. Он осуществляется по схеме, описанной в [10] и приводит к следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть при выполнении условий (j) пара $(\hat{u},\hat{\lambda}) \in H^1(\Omega_e)\times K$ является решением задачи (16), где $I = I_j(u)$, $j = 1,2$. Тогда существует единственный ненулевой множитель Лагранжа $p \in H^1(\Omega_e)$, который удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа*

$$a_0(\phi,p) + ik(\hat{\lambda}\phi,p)_\Gamma = -(\mu_0/2)\overline{\langle I'_u(\hat{u}),\phi\rangle}\;\forall\phi \in H^1(\Omega_e) \tag{17}$$

и вариационному неравенству:

$$\mu_1(\hat{\lambda},\lambda-\hat{\lambda})_{s,\Gamma}+\mathrm{Re}[ik((\lambda-\hat{\lambda})\hat{u},p)_\Gamma] \geqslant 0\;\;\forall\lambda \in H^1(\Omega_e). \tag{18}$$

Заключение

В работе рассмотрена задача управления для уравнения Гельмгольца в двумерном случае с импедансным граничным условием на границе рассматриваемой области, заключающаяся в нахождении такого поверхностного импеданса, при котором поле, рассеяное препятствием, минимально. Доказана теорема существования решения этой задачи управления, выведена система оптимальности. В дальнейшем планируется исследовать единственность и устойчивость решений задачи управления, построить численный алгоритм решения этой задачи, исследовать его сходимость и провести численные эксперименты.

Список литературы

1. Алексеев Г.В., Романов В.Г. Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики // Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т. 14, № 2. С. 1–6.
2. Cummer S.A., Popa B.I., Schurig D. et al. Scattering theory derivation of a 3D acoustic cloaking shell // Phys. Rev. Letters. 2008. V. 100, P. 024301.
3. Дубинов А.Е., Мытарева Л.А. Маскировка материальных тел методом волнового обтекания // Успехи физ. наук. 2010. Т. 180, № 5. С. 475–501.
4. Бобровницкий Ю.И. Научные основы акустического стелса // ДАН. 2012. Т. 442, № 1. С. 41–44.
5. Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томилина Т.М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акустический журнал. 2010. Т.56. №2. С.147-151.
6. V. Girault and P.A. Raviart. Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
7. Алексеев Г.В. Оптимизация в задачах маскировки материальных тел методом волнового обтекания // ДАН. 2013. Т. 449, №6, С. 1-5.
8. Alekseev G.V. Cloaking via impedance boundary condition for the 2-D Helmholtz equation // Applicable Analysis, 2013
9. D. Colton and R. Kress. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, Springer-Verlag, Berlin, 1998. Мир, 1983. С. 177-277.
10. Алексеев Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики, Научный мир, Москва, 2010

УДК 519.688

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ УЛУЧШЕНИЯ КАЧЕСТВА ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

А.А. Сущенко
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690091, Владивосток, Октябрьская 27
E-mail: fon_shtirlits@mail.ru

А.Е. Ковтанюк
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690091, Владивосток, Октябрьская 27
E-mail: ankov@imcs.dvgu.ru

Ключевые слова: компьютерное моделирование, подводная робототехника, интерполяционные формулы, MPI

Предлагается параллельный алгоритм метода двойной фильтрации улучшения качества гидроакустических изображений. Исследуется эффективность предложенного алгоритма.

Введение

К настоящему времени на базе Института проблем морских технологий ДВО РАН создан ряд автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА), прошедших государственную сертификацию в соответствии со стандартом ISO-9001. С их помощью решается целый ряд задач: картографирование дна, обзорно-поисковые работы, мониторинг участков дна и мониторинг состояния подводных сооружений (трубопроводов, кабель-трасс и т.д.). Подобные работы ведутся уже более 40 лет, и до сих пор актуальной является проблема обработки и улучшения качества изображений, полученных с гидролокатора бокового обзора (ГБО) АНПА. Известно, что гидроакустический канал является весьма специфическим вследствие нестационарности рефракционных и иных физических эффектов, что проявляется в виде многолучевости, интерференции и может приводить не только к сильным искажениям получаемого изображения, но и к его полной потере. Изображение, полученное ГБО, имеет множество дефектов в виде импульсных шумов и низкоамплитудных помех (белого шума). В работах [1,2] предложен метод двойной фильтрации улучшения качества гидроакустических изображений, полученных с ГБО АНПА. Алгоритм основывается на теории интерполяции функций с финитным спектром [3].

Рис. 1. Пример гидроакустического изображения

Применение интерполяционных формул для функций с финитным спектром оправдано для решения задачи восстановления гидроакустических изображений, так как спектр сигнала от ГБО сосредоточен в ограниченном диапазоне частот. Проведенные численные эксперименты с реальными данными [1,2] на основе метода двойной фильтрации продемонстрировали заметное улучшение качества гидроакустических изображений по сравнению с традиционным медианным методом. На рисунке 1 представлен пример гидроэхолокационного изображения морского дна с дополнительным импульсным шумом. На рисунке 2 – результат его обработки на основе метода двойной фильтрации. Как правило, обработка данных, полученных с АНПА, осу-

Рис. 2. Обработка изображения методом двойной фильтрации

ществляется в лабораторных условиях. В среднем изображения, полученные ГБО, занимают от 100 до 200 Мбайт и нередко доходит до 1 Гбайт. Время, затрачиваемое на обработку изображения с помощью метода двойной фильтрации, значительно превышает время обработки, осуществляемой медианным методом. В связи с этим актуальным является программная реализация метода двойной фильтрации на основе параллельного вычислительного алгоритма. Восстанавливаемый объект - это изображение, которое для удобства использования средствами программы переводиться в двумерный массив. Далее каждый столбец массива проходит специальную обработку (непосредственно метод двойной фильтрации) и записывается в выходной файл-изображение. Для данного метода существует несколько подходов перевода последовательного алгоритма в параллельный. 1-ый способ: передача главным процессором одного столбца из массива для обработки методом двойной фильтрации n дочерними процессорами. Модель первого способа изображена на рисунке 3. Время

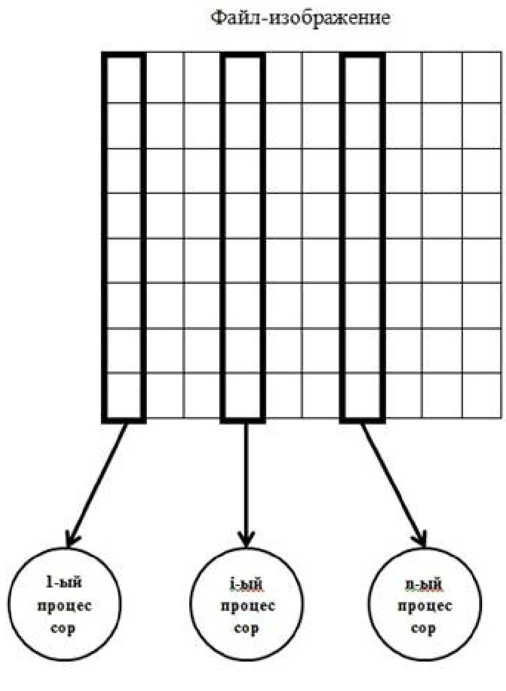


Рис. 3. Модель 1-го способа

на обработку изображения разным числом процессоров изображено на рисунке 4. Из рисунка 4 видно, что уменьшение времени при увеличении числа процессоров

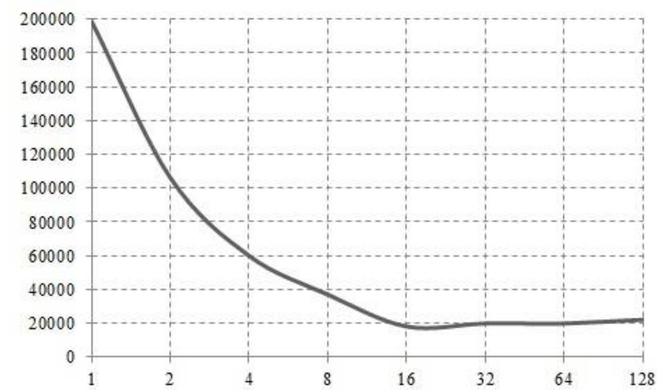


Рис. 4. График зависимости времени обработки изображения (мс) от числа процессоров

происходит только до $n = 16$ узлов. Дальнейшее увеличение числа процессоров приводит к увеличению времени. Таким образом, при использовании более 16 процессоров для 1-го способа перевода последовательного алгоритма в параллельный эффективность утрачивается. При выполнении алгоритма больше времени тратиться на передачу данных от главного процесса дочерним и обратно, чем на выполнение метода двойной фильтрации каждым дочерним процессором. На основе полученных результатов необходимо предложить другой вариант решения проблемы. Для этого можно обобщить 1-ый способ. 2-ой способ: передача главным процессором группы из m столбцов массива для обработки методом двойной фильтрации n дочерними процессорами. Модель второго способа представлена на рисунке 5. Для использова-

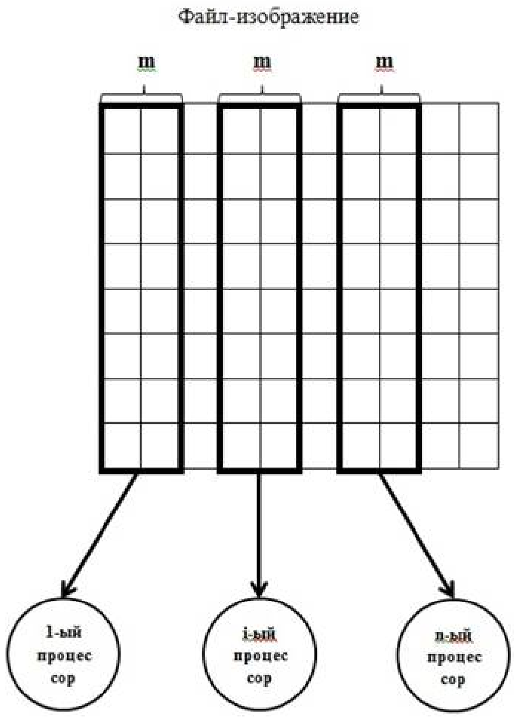


Рис. 5. Модель 2-го способа

ния 2-го способа перевода последовательного алгоритма в параллельный необходимо установить зависимость между числом процессоров, числом передаваемых каждому процессору столбцов и временем выполнения программы. Таким образом, необходимо найти такое число m передаваемых столбцов дочернему процессору, при котором время на пересылку массива данных будет много меньше времени выполнения обработки данного массива методом двойной фильтрации. В эксперименте использовались следующие значения: число процессоров $n = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$, число блоков $m = \{2, 4, 8\}$. На графике отмечен рост производительности с увеличением числа процессоров до 16 узлов для всех m. Дальнейшее увеличение числа узлов дает рост только для $m = \{2, 8\}$. При $n = 64$ наблюдается увеличение времени выполнения алгоритма в сравнении со значением при $n = 32$. Минимальное значение времени t выполнения алгоритма при $n = 128, m = 2 : t = 24320$. Тем не менее, при $n = 16, m = 2 : t = 24790$. Следовательно, эксперимент с меньшим числом процессоров показал схожий результат с экспериментом, выполненном на 128 процессорах. Таким образом, оптимальное число процессоров $n = 16$ и оптимальное количество столбцов изображения для передачи дочерним процессорам $m = 2$. Авторами разработан параллельный вычислительный алгоритм, реализующий метод двойной фильтрации улучшения качества гидроакустических изображений. Осуществлена программная реализация алгоритма на языке C++ с использованием технологии параллельных вычислений MPI. Проведен анализ зависимости скорости выполнения алгоритма от количества используемых вычислительных ядер. Сделана оценка эффективности разных способов перевода последовательного алгоритма в параллельный. Численные эксперименты проведены на кластере Дальневосточного федерального университета. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-98521) и Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России", (госконтракты 16.740.11.0456, 14.740.11.1000).

Список литературы

1. А.Е. Ковтанюк, А.А. Сущенко, И.Б. Агафонов, В.В. Золотарев. Интерполяционные методы в задаче улучшения качества гидроакустических изображений // Технические проблемы освоения мирового океана. Материалы 4-й Всероссийской научно-технической конференции, 3-7 октября 2011 г., Владивосток. С. 284-288.
2. А.Е. Ковтанюк, А.А. Сущенко, И.Б. Агафонов, В.В. Золотарев. Улучшение качества гидроакустических изображений методом двойной фильтрации // Подводные исследования и робототехника. №2(12). 2011. С. 31-37
3. Алексеев Г.В. Обратные задачи излучения волн и теории сигналов. Владивосток: Изд-во ДВГУ, 1991.

УДК 517.968

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЕПОЛНОЙ КРЕСТОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

М.Ю. Талтыкина
Вычислительный центр ДВО РАН
Россия, 680000, Хабаровск, Ким-Ю-Чена 65
E-mail: taltykina@yandex.ru

А.А. Каширин
Вычислительный центр ДВО РАН
Россия, 680000, Хабаровск, Ким-Ю-Чена 65
E-mail: elomer@mail.ru

Ключевые слова: задачи Дирихле, уравнение Гельмгольца, быстрые методы, мозаично-скелетонный алгоритм, неполная крестовая аппроксимация

Рассматриваются быстрые методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений с плотно заполненными матрицами, аппроксимирующих интегральные уравнения задачи Дирихле. С целью снижения времени работы программы, предназначенной для решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, предлагается использовать мозаично-скелетонный алгоритм на основе неполной крестовой аппроксимации. Приведены результаты экспериментов, демонстрирующие эффективность предлагаемого метода.

Введение

Задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца являются классическими задачами математической физики. Аналитические решения таких задач могут быть найдены лишь в случае простейших областей. Вследствие этого, большое развитие получили методы их численного решения. Численное решение предполагает предварительное построение дискретного аналога исходной задачи. При его построении необходимо учитывать, что искомые решения зависят от трех пространственных переменных и при больших действительных волновых числах являются быстро осциллирующими функциями. Кроме этого, решения внешних краевых задач отыскиваются в неограниченных областях, где должны удовлетворять условиям излучения на бесконечности. Отмеченные свойства приводят к тому, что дискретные аналоги задач Дирихле, построенные методами конечных элементов или конечных разностей, предъявляют весьма высокие требования к ресурсам компьютера. С вычислительной точки зрения более эффективной представляется дискретизация исходных задач, сформулированных в виде эквивалентных им граничных интегральных уравнений. В этом случае неизвестные функции отыскиваются на компактных границах областей, что особенно важно при численном решении внешних краевых задач, так как при этом существенно понижается их вычислительная сложность. Численное решение интегральных уравнений приводит к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Вычислительная сложность их решения прямыми методами имеет оценку $O(n^3)$, где n – порядок СЛАУ. Однако свойства получаемых матриц таковы, что использование для поиска приближенных решений обобщенного метода минимальных невязок (GMRES) [1] позволяет понизить эту сложность до $O(n^2)$. Но даже в этом случае требования к ресурсам компьютера остаются высокими. Эта проблема стимулировала развитие быстрых методов. Называя метод «быстрым», обычно имеют в виду, что его сложность составляет $o(n^2)$ при $n \to \infty$. После нахождения приближенных решений интегральных уравнений решения исходных задач при помощи интегральных представлений достаточно просто восстанавливаются в любой точке пространства.

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с ортогональной системой координат $ox_1x_2x_3$. Пусть в этом пространстве имеется произвольная замкнутая липшицева поверхность Γ, разделяющая его на внутреннюю область Ω_i и внешнюю область $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}_i$ [3].

Проблема 1. *(внешняя задача Дирихле для уравнения Гельмгольца). Найти функцию $u_e(x) \in H^1(\Omega_e)$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца*

$$\Delta u_e + k_e^2 u_e = 0, \quad x \in \Omega_e, \tag{1}$$

граничному условию

$$\gamma u_e(x) = f(x), \tag{2}$$

и условию излучения на бесконечности

$$\partial u_e / \partial |x| - i k_e u_e = o\left(|x|^{-1}\right), \quad |x| \to \infty. \tag{3}$$

Здесь k — волновое число, $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ — известная функция,

$$H^1(\Omega_e) = \{u : ||u||^2_{H^1(\Omega_e)} = ||u||^2_{H(\Omega_e)} + ||\nabla u||^2_{H(\Omega_e)} < \infty\},$$
$$H^{1/2}(\Gamma) = \{u : ||u||_{H^{1/2}(\Gamma)} = \inf_{\gamma\nu = u} ||\nu||_{H^1(\Omega_e)} < \infty\}.$$

Теорема 1. *Для любой функции $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ существует единственное решение внешней задачи 1 из пространства $H^1(\Omega_e)$.*

Решение задачи 1 будем искать в виде потенциала простого слоя

$$u_e(x) = (S_e q_e)(x) \equiv \langle G_e(x, \cdot), q_e \rangle_\Gamma, \quad x \in \Omega_e, \tag{4}$$

Ядром интегрального оператора (4) является фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, поэтому функция u_e удовлетворяет уравнению (1) в соответствующей области и условию излучения на бесконечности (3). Эта функция будет решением задачи 1, если подобрать плотность q_e так, чтобы u_e удовлетворяла граничному условию (2). Таким образом, задача 1 сводится к граничному тождеству

$$\langle S_e q_e, \mu \rangle_\Gamma = \langle f, \mu \rangle_\Gamma \ \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathrm{Im}(k_e) > 0$ *или* k_e^2 *не является собственным значением задачи*

$$\Delta u + k_e^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i, \qquad \gamma u = 0. \tag{6}$$

Тогда уравнение (5) корректно разрешимо в пространстве $H^{-1/2}(\Gamma)$ *и формула (4) дает решение задачи 1.* [4]

2. Описание метода

Численное решение интегральных уравнений приводит к системам линейных алгебраических уравнений с плотно заполненными матрицами. Существуют методы приближенного быстрого матрично-векторного умножения для таким матриц. Метод считается быстрым, если его сложность составляет $o(n^2)$, где n — размерность матрицы. Возможность построения быстрого метода может быть основана на обнаружении и использовании некоторой особенности возникающих плотных матриц. В качестве особенности можно выделять в матрице блоки, для которых может быть построена малоранговая аппроксимация. Рассмотрим следующие известные методы построения быстрых алгоритмов:

- мультипольные разложения;
- кластеризация граничных элементов;
- интерполяция на регулярную (иерархическую) сетку;
- мозаично-скелетонный метод.

Первые три метода являются операторными или безматричными, то есть матрица в явном виде не участвует в операции умножения. Поскольку операторные методы построения аппроксимаций основаны на специальном представлении исходного оператора, для их практического применения в расчетах требуется переработка всех этапов алгоритма, начиная от процедуры дискретизации и заканчивая обработкой результата решения линейной системы. С вычислительной точки зрения более привлекательными являются методы, использующие непосредственно блоки аппроксимируемой матрицы. К таким методам относится, например, мозаично-скелетонный алгоритм. Для его применения надо изменить лишь процедуру построения матрицы системы и операцию матрично-векторного умножения. Рассмотрим основные этапы мозаично-скелетонного алгоритма.

1. Построение дерева кластеров
2. Построение списка блоков
3. Аппроксимация блоков.

На этапе построения дерева кластеров погрузим область Ω_i в куб со стороной α и, поделив, каждое ребро куба пополам, разделим его на 8 подкубов. Проделывая такую же операцию с подкубами, получим *иерархическое разбиение* исходного куба. По дереву кластеров, матрица разбивается на иерархический набор блоков разного размера, каждый из которых отвечает взаимодействию кластеров. Блоки, отвечающие взаимодействию достаточно удаленных друг от друга кластеров точек («дальняя» зона), могут быть приближены матрицей малого ранга. Блоки, полученные взаимодействием рядом лежащих точек, определяют «ближнюю» зону. Для каждого блока $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ решается задача поиска малоранговой аппроксимации

$$||A - UV^T|| \leqslant \varepsilon, \tag{7}$$

причем ранг матрицы UV^T должен быть существенно меньшим, чем ее размеры. Задача малоранговой аппроксимации может быть решена разными способами, например, на основе метода Гаусса с выбором ведущего элемента по некоторому шаблону. В работе [2] изложен метод, где в качестве такого шаблона выбирается строка и столбец. Задача состоит в том, чтобы получить приближение матрицы A другой матрицей $\tilde{A}_r$, являющейся суммой r одноранговых матриц $u_p v_p^T/max\ A$ (называемых также скелетонами) по формуле (8)

$$\tilde{A}_k = \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{u_\alpha v_\alpha^T}{\max A(i_k, j_k)}, \tag{8}$$

где u — строка матрицы A, v — столбец матрицы A, $max\ A$ — элемент, стоящий на пересечении u и v. Аппроксимация, построенная по формуле (8), называется неполной крестовой аппроксимацией. Аппроксимация является достаточно точной, если выполняется условие

$$(n-k)||u_k v_k^T||_F \leqslant \varepsilon ||\tilde{A}_k||_F. \tag{9}$$

Для проверки критерия 9 не требуется знать всех элементов матрицы A, а достаточно только вычисленных k столбцов и строк.

3. Численные эксперименты

В работе [5] дано теоретическое обоснование существования малоранговых аппроксимации для осцилляционных ядер интегральных уравнений, в частности, для фундаментального решения уравнения Гельмгольца. Программа, использующая мозаично-скелетонный алгоритм, написана на языке Fortran 95 на основе готовой программы, предназначенной для решения краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца. Блоки «дальней» зоны аппроксимируются неполной крестовой аппроксимацией с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$. Блоки «ближней» зоны считаются точно. В качестве итерационного алгоритма решения СЛАУ используется GMRES. Аппроксимация «дальней» зоны и расчет «ближней» происходит один раз до начала итерации GMRES. Умножение на каждой итерации делится на два этапа. Блоки «ближней» зоны умножаются на вектор обычным матрично-векторным умножением. Блоки «дальней зоны» для умножения на вектор используют специальную функцию, учитывающую специфику хранения таких блоков. Данная функция требует $2n$ арифметических операции для умножения блока размерностью $n \times n$ на вектор размера

n. Мозаично-скелетонный алгоритм сравнивается с исходной программой, где матрица считается построчно на каждой итерации GMRES и умножается на вектор обычным матрично-векторным умножением. Задача 1 сформулирована в виде интегрального уравнения на границе области Γ, где Γ – единичная сфера с центром в начале координат. Граничное условие:

$$f(x) = \exp(ikx_3), \quad x \in \Gamma. \tag{10}$$

Волновое число равно 1. На рис. 1 приведен график зависимости времени выполнения программ от размерности матриц.

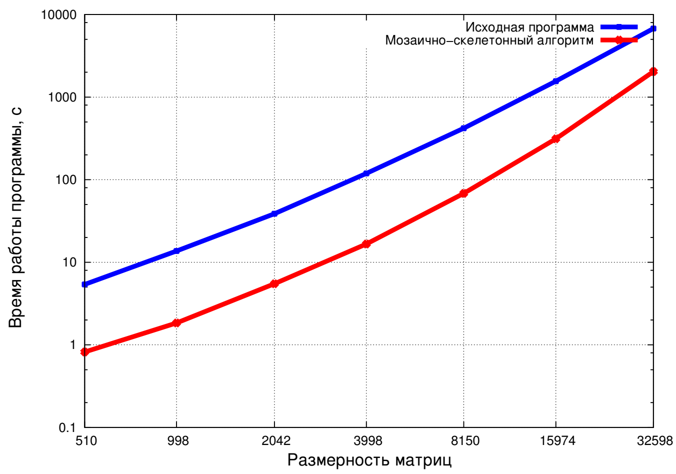


Рис. 1. Время выполнения программы

Красным цветом показаны результаты работы мозаично-скелетонного алгоритма, синим — исходной программы. По результатам численных экспериментов для данной задачи получено ускорение (в среднем в 4 раза) в работе программы. Оценкой правильности работы алгоритма является сравнение погрешностей вычисления плотностей интегральных уравнений. В таблице 1 приведены значения погрешностей вычисления плотностей. Оба метода удовлетворяют необходимой точности расчета плотностей.

Таблица 1. Таблица погрешностей вычисления плотностей

Размерность матриц	Исходная программа	Мозаично-скелетонный алгоритм
510	$9.905 \cdot 10^{-3}$	$9.905 \cdot 10^{-3}$
998	$4.978 \cdot 10^{-3}$	$4.98 \cdot 10^{-3}$
2042	$2.407 \cdot 10^{-3}$	$2.41 \cdot 10^{-3}$
3998	$1.221 \cdot 10^{-3}$	$1.222 \cdot 10^{-3}$
8150	$5.959 \cdot 10^{-4}$	$5.959 \cdot 10^{-4}$
15974	$3.031 \cdot 10^{-4}$	$3.032 \cdot 10^{-4}$
32598	$1.486 \cdot 10^{-4}$	$1.49 \cdot 10^{-4}$

На рисунке 2 показано время умножения «ближней» и «дальней» зон на вектор. Время умножения «ближней» зоны имеет сложность $O(n^2)$, время умножения «дальней» зоны растет почти линейно. Этот результат существенно экономит время на каждой итерации GMRES. Итак, можно сделать вывод, что применение мозаично-скелетонного алгоритма на основе неполной крестовой аппроксимации эффективно для решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца.

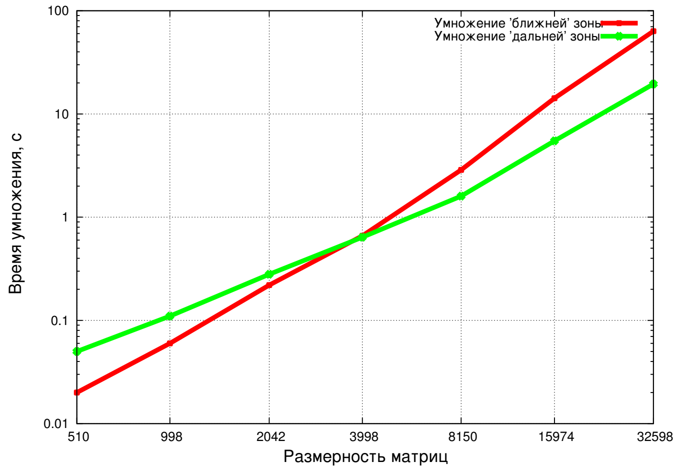


Рис. 2. Зависимость времени умножения от размерности матриц

Список литературы

1. Saad Y., Schultz M. GMRES: a general minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems // SIAM J. Sci Stat. Comput. 1986. V. 7, № 3. P. 856-869.
2. Савостьянов Д.В. Быстрая полилинейная аппроксимация матриц и интегральные уравнения: дис. канд. физ.-мат. наук. Москва, 2006. 144 с.
3. Каширин А.А., Смагин С.И. О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 52, № 8, 2012. С. 1492–1505.
4. McLean W. Strongly elliptic systems and boundary integral equations. M.: Cambridge University Press, 2000. 372 c.
5. Горейнов С.А. Мозаично-скелетонные аппроксимации матриц, порожденных асимптотически гладкими и осцилляционными ядрами // Матричные методы и вычисления. М.: ИВМ РАН, 1999. С. 42-76.

УДК 517.95

ЧИСЛЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРАНИЧНОГО ПОТОКА ТЕПЛА ПО ВЕКТОРУ СКОРОСТИ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Д.А. Терешко
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
E-mail: ter@iam.dvo.ru

Ключевые слова: вязкая теплопроводная жидкость, задачи управления

Для нестационарной модели вязкой теплопроводной жидкости в приближении Обербека-Буссинеска формулируется задача условной минимизации функционала качества, зависящего как от слабого решения исходной начально-краевой задачи, так и от потока тепла на части границы, играющего роль управления. Выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума первого порядка. Предлагается численный алгоритм решения задачи граничного управления, основанный на итерационном процессе решения прямых и обратных по времени начально-краевых задач, входящих в нелинейную систему оптимальности.

Введение

Одна из важных задач прикладной гидродинамики связана с проблемой создания течений требуемой конфигурации за счет выбора значений вектора скорости, температуры либо потока тепла на некоторых участках границы области [1-3]. Учет тепловых эффектов добавляет определенные трудности при теоретическом и численном анализе рассматриваемых задач управления. За последние двадцать лет опубликован целый ряд работ, посвященных теоретическому исследованию задач управления для нестационарной модели тепловой конвекции (см., например, [4-9]). При этом практически нет публикаций, представляющих результаты сложных вычислительных экспериментов в данном направлении. Это связано с тем, что нелинейность используемой математической модели и специфические особенности задач условной минимизации приводят к значительным проблемам при численном решении соответствующих задач управления. В последние годы достигнут определенный прогресс при решении задач управления для стационарных уравнений теплопереноса в вязкой жидкости. Так, в работах [10-12] разработаны численные алгоритмы решения задач граничного управления для стационарной модели тепловой конвекции. Кроме того, в этих работах представлены результаты вычислительных экспериментов, связанных с минимизацией завихренности потока, уменьшением силы лобового сопротивления и устранением застойных зон за обтекаемым телом и в углах канала за счет выбора потока тепла и вектора скорости на определенных участках границы. Целью данного исследования является разработка алгоритма и проведение вычислительных экспериментов по решению задачи управления для нестационарной модели вязкой теплопроводной жидкости. Физический смысл данной задачи связан с восстановлением граничных значений потока тепла по измеренному на некотором множестве наблюдений вектору скорости.

1. Постановка начально-краевой задачи

В ограниченной области Ω с границей Γ рассматривается начально-краевая задача

$$
\begin{gathered}
\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = -\beta T\mathbf{G} \text{ в } Q, \ \ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } Q,\\
\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \text{ в } \Omega, \ \ \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Sigma,\\
T_t + \mathbf{u}\cdot\nabla T - \lambda\Delta T = f \text{ в } Q, \ T|_{t=0} = T_0 \text{ в } \Omega,\\
T = \psi \text{ на } \Sigma_D, \ \lambda\frac{\partial T}{\partial n} = \chi \text{ на } \Sigma_N,
\end{gathered}
$$

описывающая процесс распространения тепла в вязкой жидкости. Здесь $\mathbf{u}$, p и T – вектор скорости, давление и температура жидкости (искомые функции), ν=const>0 – коэффициент кинематической вязкости, β – объемный коэффициент теплового расширения, $\mathbf{G}$ – вектор ускорения свободного падения, λ=const>0 – коэффициент температуропроводности, f – объемная плотность источников тепла, $\mathbf{g}$, ψ и χ – некоторые функции, $\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $Q = \Omega \times (0, t_{max})$, $\Sigma = \Gamma \times (0, t_{max})$, $\Sigma_D = \Gamma_D \times (0, t_{max})$, $\Sigma_N = \Gamma_N \times (0, t_{max})$. Ниже в задачах управления течения вязкой жидкости с требуемыми свойствами будут формироваться за счет оптимального выбора граничных значений потока тепла χ на соответствующих участках границы области. Слабая формулировка данной начально-краевой задачи заключается в нахождении тройки $(\mathbf{u}, p, T)$ как решения следующей системы:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^{t_{max}} \left[(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) - (p, \operatorname{div}\mathbf{v}) + (\beta T\mathbf{G}, \mathbf{v})\right] dt = 0,\\
\int\limits_0^{t_{max}} \left[(T_t + \mathbf{u}\cdot\nabla T, \, S) + \lambda(\nabla T, \nabla S) - (f, S) - (\chi, S)_{\Gamma_N}\right] dt = 0,\\
\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } Q, \ \ \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Sigma, \ \ T = \psi \text{ на } \Sigma_D,\\
\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \text{ в } \Omega, \ \ T|_{t=0} = T_0 \text{ в } \Omega,
\end{gathered}
$$

которую для краткости будем записывать в виде операторного уравнения

$$
F(\mathbf{u}, p, T, \chi) = 0.
$$

2. Задачи управления

Для данной модели формулируется задача условной минимизации функционала качества, зависящего как от слабого решения исходной начально-краевой задачи, так и от граничной функции χ, играющей роль управления. С математической точки зрения рассматриваемая задача граничного управления сводится к следующей экстремальной задаче:

$$
J(\mathbf{u}, \chi) = \int\limits_0^{t_{max}} \int\limits_{\Omega_d} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_d|^2 d\Omega \, dt + \frac{\mu}{2} \int\limits_0^{t_{max}} \int\limits_{\Gamma_N} \chi^2 d\Gamma dt \to \inf,
$$

$$F(\mathbf{u}, p, T, \chi) = 0.$$

Здесь $\mathbf{u}_d$ – заданное на множестве наблюдений Ω_d поле скорости, μ – положительная константа, имеющая смысл параметра регуляризации. На основе методов исследования экстремальных задач из работ [1-3] выведена система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума первого порядка. В дифференциальной форме записи она состоит из следующих связанных между собой трех частей: 1) прямой начально-краевой задачи для скорости $\mathbf{u}$, давления p и температуры T:

$$\begin{gathered}
\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = -\beta T\mathbf{G} \text{ в } Q, \;\; \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } Q,\\
\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \text{ в } \Omega, \;\; \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Sigma,\\
T_t + \mathbf{u}\cdot\nabla T - \lambda\Delta T = f \text{ в } Q,\\
T|_{t=0} = T_0 \text{ в } \Omega, \;\; T = \psi \text{ на } \Sigma_D, \;\; \lambda\frac{\partial T}{\partial n} = \chi \text{ на } \Sigma_N;
\end{gathered}$$

2) обратной по времени задачи для сопряженной скорости $\mathbf{q}$, сопряженного давления σ и сопряженной температуры θ:

$$\begin{gathered}
-\mathbf{q}_t - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{q} + (\nabla\mathbf{u})^t\mathbf{q} - \nu\Delta\mathbf{q} + \nabla\sigma = I_{\Omega_d}(\mathbf{u}_d - \mathbf{u}) - \theta\nabla T \text{ в } Q,\\
\operatorname{div}\mathbf{q} = 0 \text{ в } Q, \;\; \mathbf{q}|_{t=t_{max}} = 0 \text{ в } \Omega, \;\; \mathbf{q} = \mathbf{0} \text{ на } \Sigma,\\
-\theta_t - \mathbf{u}\cdot\nabla\theta - \lambda\Delta\theta = -\beta\mathbf{G}\cdot\mathbf{q} \text{ в } Q,\\
\theta|_{t=t_{max}} = 0 \text{ в } \Omega, \;\; \theta = 0 \text{ на } \Sigma_D, \;\; \frac{\partial\theta}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma_N;
\end{gathered}$$

3) условия оптимальности, связывающего между собой управление χ и сопряженную температуру θ:

$$\chi = \frac{\theta}{\mu} \text{ на } \Sigma_N.$$

Основная проблема численного решения указанной системы оптимальности связана с тем, что сопряженная задача для сопряженного состояния (множителей Лагранжа) представляет собой в отличие от прямой начально-краевой задачи параболическую систему с обратным временем. Разработан численный алгоритм решения рассматриваемых задач граничного управления, основанный на итерационном процессе решения прямых и обратных по времени начальных краевых задач, входящих в нелинейную систему оптимальности.

Алгоритм

Шаг 0. Выбираем начальное приближение для управления χ_0 на Σ_N. Полагаем $n = 0$. Шаг 1. Решение прямой задачи для $(\mathbf{u}_n, p_n, T_n)$ в Q. Шаг 2. Решение сопряженной задачи для $(\mathbf{q}_n, \sigma_n, \theta_n)$ в Q. Шаг 3. Вычисление нового значения управления

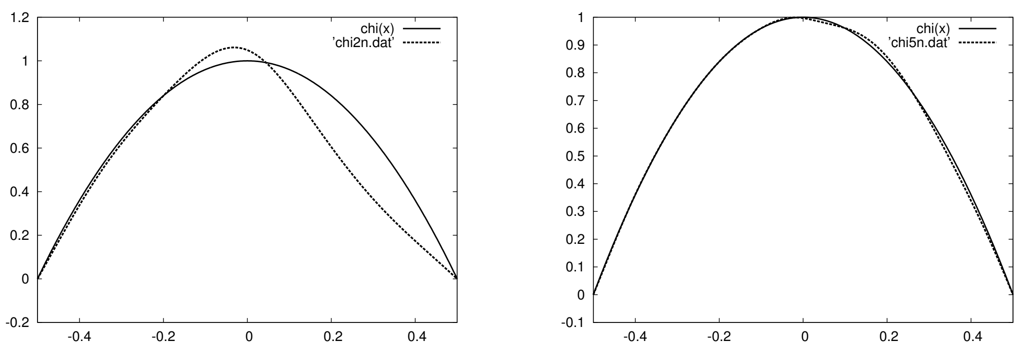
$$\chi_{n+1} = \theta_n/\mu \text{ на } \Sigma_N.$$

Шаг 4. Если условие выхода из цикла $\|T_n - T_{n-1}\|/\|T_n\| < 10^{-8}$ не выполняется, то полагаем $n := n+1$ и переходим на шаг 1. Отметим, что на шаге 2 решается начально-краевая задача для сопряженного состояния в противоположном по времени направлении, начиная со значений для сопряженной скорости $\mathbf{q}$ и сопряженной температуры θ, заданных в конечный момент времени $t = t_{max}$. Рассмотрим численное решение экстремальной задачи на примере конвективного течения вязкой теплопроводной жидкости в единичном квадрате $\Omega = \{(x, y) : \; -0.5 < x, y < 0.5\}$, вызванного нагревом правой границы. Безразмерное время t изменяется от 0 до 1. На нижней, левой и верхней границе задано однородное условие Дирихле для температуры $T = 0$. На всех четырех участках границы задано условие прилипания для скорости $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Основной целью вычислительных экспериментов является установление зависимости точности решения обратной задачи от выбора параметра регуляризации μ и множества наблюдений Ω_d. В качестве исходного потока тепла на правой границе была выбрана функция $\chi_d(y) = 1 - 4y^2$, независящая от времени. Предполагая, что в области нет источников тепла ($f = 0$), сначала решаем начально-краевую задачу в безразмерных переменных при числе Прандтля $\mathrm{Pr} = 7$ и числе Рэлея $\mathrm{Ra} = 10^5$. Полученные при этом поля скорости и температуры обозначим через $\mathbf{u}_d$ и T_d. Для численного решения начально-краевых задач методом конечных элементов использовался свободно распростроняемый пакет программ freeFEM++. Чтобы оценить точность решения экстремальной задачи в зависимости от выбранных параметров алгоритма, будем рассматривать в определенные моменты времени следующие относительные ошибки:

$$E_{\mathbf{u}} = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|}{\|\mathbf{u}_d\|}, \quad E_\chi = \frac{\|\chi - \chi_d\|_{\Gamma_N}}{\|\chi_d\|_{\Gamma_N}}, \quad E_T = \frac{\|T - T_d\|}{\|T_d\|}.$$

Значения этих ошибок в момент времени $t = 0.5$ для случая $\Omega_d = \{(x, y) : \ -0.5 < x < 0.5,\ y < 0\}$ в зависимости от параметра регуляризации μ представлены в следующей таблице:

μ	$E_{\mathbf{u}}$	E_χ	E_T
10^{-1}	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$3.5 \cdot 10^{-1}$	$2.2 \cdot 10^{-1}$
10^{-2}	$3.2 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-1}$	$8.2 \cdot 10^{-2}$
10^{-3}	$8.2 \cdot 10^{-3}$	$8.1 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$
10^{-4}	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-2}$	$8.1 \cdot 10^{-3}$
10^{-5}	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$



(a) (b)

Рис. 1. Исходный и вычисленные потоки тепла

Хорошо видно, что при уменьшении параметра регуляризации μ все относительные ошибки убывают. Графики исходного и вычисленного в процессе решения обратной задачи потоков тепла на правой границе $\chi_d(y)$ и $\chi(y)$ в момент времени $t = 0.5$ при $\mu = 10^{-2}$ (a) и $\mu = 10^{-5}$ (b) показаны на Рис. 1. Легко заметить, что более точное совпадение имеет место при $y < 0$, т.е. на участке, прилегающем к множеству наблюдений Ω_d. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00313) и грантов ДВО РАН (проекты 12-I-П17-03 и 12-III-А-03-038).

Список литературы

1. Gunzburger M.D. Perspectives in Flow Control and Optimization. Philadelphia: SIAM, 2003. 261 p.
2. Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.
3. Алексеев Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир, 2010. 412 с.
4. Abergel F., Temam R. On some control problems in fluid mechanics // Theoret. Comput. Fluid Dyn. 1990. Vol. 1. P. 303-325.
5. Zabaras N., Yang G.Z. A functional optimization formulation and implementation of an inverse natural convection problem // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1997. Vol. 144. P. 245-274.
6. Li S., Wang G. The time optimal control of the Boussinesq equations // Numer. Funct. Anal. Optim. 2003. Vol. 24. P. 163-180.
7. Bärwolff G., Hinze M. Optimization of semiconductor melts // Z. Angew. Math. Mech. 2006. Vol. 86. P. 423-437.
8. Boldrini J.L., Fernandez-Cara E., Rojas-Medar M.A. An optimal control problem for a generalized Boussinesq model: the time dependent case // Rev. Mat. Complut. 2007. Vol. 20. P. 339-366.
9. Hinze M., Mattes U. Optimal and model predictive control of Boussinesq approximation // Int. Series Numer. Math. 2007. Vol. 155. P. 149-174.
10. Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Экстремальные задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Прикл. мех. техн. физ. 2010. Т. 51, № 4. С. 72-84.
11. Alekseev G., Tereshko D., Pukhnachev V. Boundary control problems for Oberbeck-Boussinesq model of heat and mass transfer // Advanced Topics in Mass Transfer / Ed. by Mohamed El-Amin. Rijeka: Intech, 2011. P. 485-512.
12. Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Двухпараметрические экстремальные задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Журн. вычисл. матем. матем. физ. 2011. Т. 51, № 9. С. 1645-1664.

УДК 511.41

ТРЕХМЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ ПО ВОРОНОМУ И МИНКОВСКОМУ

Устинов А.В.
Институт прикладной математики ДВО РАН (хабаровское отделение)
Россия, 680000, Хабаровск, Дзержинского 54
E-mail: E-mail: ustinov@iam.khv.ru

Ключевые слова: многомерные цепные дроби.

Существуют две геометрические интерпретации классических цепных дробей, допускающие естественное обобщение на многомерный случай. В первой интерпретации, принадлежащей Клейну, цепная дробь отождествляется с выпуклыми оболочками (полигонами Клейна) множеств точек целочисленной решетки, лежащих в двух смежных углах (1895–1896). Вторая интерпретации, которая была независимо предложена Вороным и Минковским, основана на понятиях локального минимума решетки, минимальной системы векторов и экстремального параллелепипеда (1896). В двумерном случае вершины полигонов Клейна могут быть отождествлены с локальными минимумами, однако, начиная с размерности 3, геометрические интерпретации Клейна и Вороного–Минковского становятся различными. В докладе планируется рассказать о трехмерных цепных дробях Вороного–Минковского и о некоторых задачах, которые возникают при их изучении.

УДК 519.248:62-192+519.176

ЭРГОДИЧНОСТЬ ЖИДКОСТНОЙ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Г.Ш. Цициашвили
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
E-mail: guram@iam.dvo.ru

Ключевые слова: эргодичность, система массового обслуживания, жидкостная модель, асимптотические формулы

Для вероятностных моделей систем обслуживания в случайной среде, к которым, в частности сводятся системы с гистерезисной стратегией управления, узловые вопросы эргодичности как правило получили решения в виде только достаточных, а не необходимых и достаточных условий (критериев эргодичности). Значимость критериев эргодичности в том, что с их помощью можно вычислить пропускную способность систем массового обслуживания. В настоящей работе вопросы получения критериев эргодичности решаются для жидкостной модели одноканальной системы массового обслуживания в случайной среде. Эти критерии основаны на редукции данной системы к классической цепочке Линдли. Наряду с критериями эргодичности приводятся асимптотические формулы и предельные теоремы для жидкостных моделей обслуживания в случайной среде в случае большой загрузки.

Введение

Математическим моделям систем и сетей массового обслуживания в случайной среде уделяется большое внимание в теории массового обслуживания (см., например, [1, с. 76] и содержащиеся в статье ссылки) в связи с обилием разнообразных приложений к транспортным моделям [2, с. 430-432, 438], системам с гистерезисной стратегией управления [3], [4с. 24, 25]. Детерминированные модели технических систем с гистерезисной стратегией управления (периодические системы близкие к разрывным) рассмотрены в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных [5-7]. Однако наличие малого параметра в этих моделях не позволяет получать обозримые формулы для решений возникающих уравнений. Это связано с достаточно сложным поведением решений (наличием нескольких погранслоев) в окрестностях точек с разрывами. В то же время для вероятностных моделей систем обслуживания в случайной среде узловые вопросы эргодичности как правило получили решения в виде только достаточных, а не необходимых и достаточных условий (критериев эргодичности) [1, теорема 1, формула (2)]. Значимость критериев эргодичности в том, что с их помощью можно вычислить пропускную способность систем массового обслуживания [8]. Поэтому работа в данном направлении остается актуальной, несмотря на обилие результатов в которых даются формулы и алгоритмы вычисления предельных распределений в данных системах. В настоящей работе вопросы получения критериев эргодичности решаются не усилением известных результатов по расчету предельных распределений для систем обслуживания в случайной среде, а построением достаточно общих стохастических моделей этих систем обслуживания, которые удобно сводить к известным теоремам эргодичности для одноканальных моделей обслуживания типа цепочки Линдли [9, с. 20-36]. В рамках этого подхода рассматриваются жидкостные модели обслуживания [10, с. 3-5], [11, с. 8-12], для которых определяется количество жидкости в системе в моменты изменения режима ее функционирования. Наряду с критериями эргодичности приводятся асимптотические формулы и предельные теоремы для жидкостных моделей обслуживания в случайной среде в случае большой загрузки.

1. Жидкостная одноканальная модель обслуживания в случайной среде

Рассмотрим следующую жидкостную модель одноканальной системы массового обслуживания. Разобьем неотрицательную полуось $t \geqslant 0$ на полуинтервалы $[T_0, T_1),\ T_0 = 0,\ T_1 = T_0 + t_0,\ [T_1, T_2),\ T_2 = T_1 + t_1, \ldots$ Здесь независимые случайные величины $t_0, t_1, \ldots,$ имеют распределение $G(t) = P(t_n < t),\ t \geqslant 0,\ n \geqslant 0,$ сосредоточенное на положительной полуоси, причем $Mt_n < \infty$. Предположим, что на полуинтервале $[T_{n-1}, T_n),\ n > 0$, в некий резервуар закачивается жидкость с интенсивностью $a_n > 0$ и выкачивается жидкость с интенсивностью $b_n > 0$, если объем жидкости больше нуля. Если объем жидкости равен нулю, то при $a_n < b_n$ интенсивность оттока жидкости становится равной интенсивности ее притока a_n, причем начальное количество жидкости в системе равно $w_0 \geqslant 0$. Далее будем предполагать, что разности $(a_n - b_n),\ n \geqslant 0$, характеризующие случайное поведение среды, в которой находится одноканальная система обслуживания, образуют последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин (п.н.о.р.с.в.), имеющих конечное математическое ожидание: $M|a_n - b_n| < \infty$, причем случайные последовательности $(a_n - b_n),\ n \geqslant 0$, и $t_n,\ n \geqslant 0$, независимы. Обозначим $W(t),\ t \geqslant 0$, объем жидкости, содержащийся в емкости в момент времени t. Функция $W(t)$ является ломаной с точками перегиба $T_n,\ n \geqslant 0$. Эта функция напоминает виртуальное время ожидания в одноканальной системе обслуживания, но не идентична ей. Пусть $w_n = W(T_n),\ n \geqslant 0$, тогда в силу сделанных предположений объем жидкости $w_{n+1} = W(T_{n+1})$ в резервуаре в момент T_{n+1} удовлетворяет равенству

$$w_{n+1} = (w_n + \xi_n)^+,\ \ n \geqslant 0,\ \text{где } d^+ = \max(0, d). \tag{1}$$

В силу теоремы эргодичности для цепочки Линдли $w_n,\ n \geqslant 0$, [9, §3, теорема 7] необходимым и достаточным условием ее эргодичности является неравенство

$$M\xi_n = Mt_n M(a_n - b_n) < 0. \tag{2}$$

Замечание 1. Приведенный выше критерий эргодичности справедлив и при более общем предположении о стационарности в узком смысле случайной последовательности $\xi_n,\ n \geqslant 0$.

2. Асимптотический анализ жидкостной одноканальной системы обслуживания при большой загрузке

Приведенные выше результаты позволяют перенести известные асимптотические формулы для системы Линдли на жидкостную одноканальную модель обслуживания в случайной среде. Так, если

$$c = |M\xi_n| \to 0,\ d = D\xi_n = const,$$

то при перечисленных выше условиях на случайные величины $t_n, a_n - b_n$ (см., также [9, гл. 1, формулы (57), (58)], [13]) имеем следующую асимптотическую формулу для предельного распределения цепи Маркова $w_n,\ n > 0$: для любого $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(w_n > x/|c|) \sim \exp(-2x/d),\ |c| \to 0.$$

С уточнениями этих результатов можно ознакомиться в работах [9, с. 65-67], [14, гл. III]. Указанные результаты основаны на диффузионной аппроксимации последовательности времен ожидания $w_n,\ n > 0$, в одноканальной системе обслуживания. В заключение остановимся на случае, когда $c \to 0,\ d = d(c)$. Предположим, что случайные величины ξ_n удовлетворяют следующим условиям. Имеется последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $\Delta_n,\ n \geqslant 0$,

$$M\Delta_n = 0,\ D\Delta_n = f,\ M|\Delta_n|^3 < \infty,$$

такая, что $\xi_n = -\varepsilon + \varepsilon^\gamma \Delta_n,\ n \geqslant 0$ и значит $c = -\varepsilon,\ d = f\varepsilon^{2\gamma} = f|c|^{2\gamma}$. Определим случайную величину $W_\gamma = W_\gamma(\varepsilon)$ равенством

$$\lim_{n\to\infty} P(w_n > x) = P(W_\gamma > x),\ x > 0.$$

Тогда в силу [15, теорема 1] при $\varepsilon \to 0$ справедливы следующие соотношения:

$$W_\gamma \to +\infty,\ 0 \leqslant \gamma < 1/2;\ W_\gamma \to 0,\ \gamma > 1/2;\ P(W_\gamma > x) \to \exp(-2x/f),\ \gamma = 1/2.$$

Список литературы

1. Дудин А.Н., Клименок В.И. Расчет характеристик однолинейной системы обслуживания, функционирующей в синхронной случайной среде// Автоматика и телемеханика. 1997. Вып. 1. С. 74-84.
2. Афанасьева Л.Г., Руденко И.В. Системы обслуживания $GI|G|\infty$ и их приложения к анализу транспортных моделей// Теория вероятностей и ее применения. 2012. Вып. 3. С. 427-452.
3. Гайдамака Ю.В., Зарипова Э.Р., Самуйлов К.Е. Модели обслуживания вызовов в сети сотовой подвижной связи. Учебно-методическое пособие. М.: РУДН. 2008.
4. Самочернова Л.С, Петров Е.И. Оптимизация системы массового обслуживания с гистерезисной стратегией управления однотипным резервным прибором// Известия Томского политехнического университета. 2011. Т. 319. Вып. 5.
5. Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.С. Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным// 1955. ДАН СССР. Т. 102, вып. 5. С. 889-891.
6. Понтрягин Л.С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных// 1957. Изв. АН СССР. Сер. мат. Т. 21, вып 5. С. 605-626.

7. Мищенко Е.Ф. Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных// 1957. Изв. АН СССР. Сер. мат. Т. 21, вып 5. С. 627-654.
8. Цициашвили Г.Ш. Параметрическая и структурная оптимизации пропускной способности сети массового обслуживания// Автоматика и телемеханика, 2007, вып. 7, с. 64-73.
9. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука. 1971.
10. Рыбко А.Н., Столяр А.Л. Об эргодичности случайных процессов, описывающих функционирование открытых сетей массвого обслуживания// Проблемы передачи информации. 1992. Том 28, выпуск 3. С. 3–26.
11. Адаму А., Гайдамака Ю.В., Самуйлов А.К. К анализу состояния буфера пользователя одноранговой сети с потоковым трафиком// T-comm - Телекоммуникации и транспорт. 2011. Вып 7. С. 8-12.
12. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука. 1989.
13. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука. 1969.
14. Боровков А.А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука. 1980.
15. Цициашвили Г.Ш. Исследование почти детерминированных систем массового обслуживания// ДВ мат. сборник. 1997. Вып. 3. С. 17-22.

УДК 519.248:62-192+519.176

АСИМПТОТИКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СВЯЗНОСТИ ПАР ВЕРШИН ГРАФА

Г.Ш. Цициашвили
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
E-mails: guram@iam.dvo.ru

М.А. Осипова
ДВФУ
Россия, 690091, Владивосток, ул. Суханова 8
E-mail: mao1975@list.ru

Ключевые слова: кратчайший путь, вероятность связности, вычислительная сложность

Для графов с низконадежными ребрами построена асимптотика вероятности связности любой пары его вершин. Параметрами полученного соотношения являются характеристики кратчайших путей графа. Для вычисления этих характеристик разработаны модификации классических алгоритмов. На основе полученных результатов был проведен вычислительный эксперимент, который продемонстрировал преимущества предложенных алгоритмов.

Введение

Для случайных графов с низконадежными рёбрами построен удобный в реализации алгоритм вычисления вероятности связности любой пары его вершин на основе доказанного асимптотического соотношения. Для параметров полученного соотношения (характеристик кратчайших путей) разработаны модификации классических алгоритмов. Особенностью предлагаемых алгоритмов является тот факт, что в них не требуется перечислять кратчайшие пути между узлами, а лишь определять их количество. Еще одним существенным фактором упрощения вычислений является рассмотрение графов с ограниченным диаметром, которые в последние годы вызывают большой теоретический и практический интерес. Проведенный вычислительный эксперимент подтвердил быстродействие построенной процедуры для вероятности связности по сравнению с методом Монте-Карло.

1. Основные результаты

Рассмотрим неориентированный связный простой граф G с множеством узлов U и множеством рёбер V. Предположим, что каждое ребро v графа G с вероятностью $p(v)$ работоспособно, причём все ребра функционируют независимо. Обозначим $D(i,j)$ минимальное число ребер в путях, соединяющих узлы i,j графа G, а

$C(i,j)$ число путей с $D(i,j)$ рёбрами. Для вероятности связности $P_{ij}(G)$ узлов i,j графа G доказаны следующие утверждения. **Теорема 1.** Если $p(v)=h,\ v\in V$, то

$$P_{ij}(G)\sim C(i,j)h^{D(i,j)},\ h\to 0. \tag{1}$$

Следствие 1. Если $p(v)=h,\ v\in V$, то

$$\min_{1\leqslant i,j\leqslant n} P_{ij}(G)\sim Ch^{D},\ h\to 0,$$
$$D=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} D(i,j),\ C=\min_{(i,j):\, D(i,j)=D} C(i,j).$$

Для нахождения всех элементов матриц $||D(i,j)||_{i,j=1}^{n},\ ||C(i,j)||_{i,j=1}^{n}$ асимптотической формулы (1) были построены модификации известных в теории графов алгоритмов (в том числе Флойда-Стейнберга). Такая процедура является более экономичной, чем последовательное определение элементов этих матриц, имеет вычислительную сложность $O(n^3\ln n)$ для матрицы $||D(i,j)||_{i,j=1}^{n}||$ и $O(n^4)$ для матрицы $||C(i,j)||_{i,j=1}^{n}$. Зная матрицу $||D(i,j)||_{i,j=1}^{n}$, можно вычислить диаметр D графа G. Для сетей с ограниченным диаметром D сложность вычисления матриц $||D(i,j)||_{i,j=1}^{n},\ ||C_s(i,j)||_{i,j=1}^{n}$ составляет $O(n^3)$ арифметических операций.

2. Результаты вычислительного эксперимента

На основе построенного алгоритма для вероятности связности любой пары вершин графа был проведён вычислительный эксперимент. Зададим граф G матрицей смежности:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Полагаем, что работоспособность его рёбер $p(v)=h=0.01$. Используя модифицированные алгоритмы, вычислим:

$$||D(i,j)||_{i,j=1}^{6}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad ||C(i,j)||_{i,j=1}^{6}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Результаты вычислений вероятностей связности пар вершин $P_{ij}(G),\ 1\leqslant i,j\leqslant 6$, по формуле (1) и методом Монте-Карло, обозначим их $P_{ij}^{*}(G),\ 1\leqslant i,j\leqslant 6$, при 10^6 числе реализаций представлены ниже:

$$||P_{ij}(G)||_{i,j=1}^{6}=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}01 & 0{,}0002 & 0{,}01 & 0{,}0002 & 0{,}01\\ 0{,}01 & 1 & 0{,}01 & 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}01\\ 0{,}0002 & 0{,}01 & 1 & 0{,}01 & 0{,}0001 & 0{,}0001\\ 0{,}01 & 0{,}0002 & 0{,}01 & 1 & 0{,}01 & 0{,}0002\\ 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0{,}0001 & 0{,}01 & 1 & 0{,}01\\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}0001 & 0{,}0002 & 0{,}01 & 1 \end{pmatrix},$$

$$||P^*_{ij}(G)||^6_{i,j=1}=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}01035 & 0{,}000203 & 0{,}010027 & 0{,}000192 & 0{,}010205 \\ 0{,}01035 & 1 & 0{,}010001 & 0{,}000198 & 0{,}000095 & 0{,}009764 \\ 0{,}000203 & 0{,}010001 & 1 & 0{,}010083 & 0{,}000094 & 0{,}000103 \\ 0{,}010027 & 0{,}000198 & 0{,}010083 & 1 & 0{,}010051 & 0{,}000208 \\ 0{,}000192 & 0{,}000095 & 0{,}000094 & 0{,}010051 & 1 & 0{,}009973 \\ 0{,}010205 & 0{,}009764 & 0{,}000103 & 0{,}000208 & 0{,}009973 & 1 \end{pmatrix}.$$

Время счета по формуле (1) составило 10 секунд, методом Монте-Карло - 6 часов. Полученные по асимптотическому анализу вероятности связности узлов случайных графов результаты опубликованы в работах [1-3]. Авторы болагодарят А.С. Лосева за большую помощь в проведении вычислительных экспериментов.

Список литературы

1. Цициашвили Г.Ш., Лосев А.С. Связность планарного графа с высоконадежными ребрами// Прикладная дискретная математика. 2012. Вып. 3. С. 103-107.
2. Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А., Лосев А.С. Асимптотика вероятности связности графа с низконадежными ребрами// Прикладная дискретная математика. 2013. Вып. №1. С. 93-98.
3. Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А., Лосев А.С. Асимптотические формулы для вероятностей связности случайных графов// Автоматика и вычислительная техника. 2013. Вып. 2. С. 22-28.

УДК 519.214

О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАУССОВЫМ ЗАКОНОМ

В.И. Чеботарев
Вычислительный центр ДВО РАН
Россия, 680000, Хабаровск, Ким Ю Чена, 65
E-mail: chebotarev@as.khb.ru

С.В. Нагаев
Институт математики им. С.Л. Соболева
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Коптюга, 4
E-mail: nagaev@math.nsc.ru

Ключевые слова: неравенство Берри – Эссеена, метод сглаживания, метод характеристических функций, биномиальное распределение, неравномерные оценки

Исследуется поведение сумм вида $\sum\limits_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k}$. Для этого сначала выводится так называемое равенство сглаживания. Оно приводит к представлению погрешности в интегральной теореме Муавра – Лапласа в виде суммы двух выражений. Одно появляется как результат применения формулы обращения, а другое – как результат сглаживания. Определяется вклад в погрешность каждого из выражений.

Пусть Z – двухточечная случайная величина с распределением

$$\mathbf{P}(Z=1)=p, \quad \mathbf{P}(Z=0)=q, \quad p+q=1,$$

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ – независимые копии случайной величины Z. Обозначим

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy, \quad \delta_n(p,x)=\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{npq}}\sum_{j=1}^{n}(Z_j-p)<x\right)-\Phi(x), \tag{1}$$

$$\Delta_n(p)=\sup_{x\in\mathbb{R}}|\delta_n(p,x)|.$$

В силу интегральной предельной теоремы Муавра – Лапласа $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_n(p)=0$ для любого $p\in(0,1)$. Сформулируем оценку величины $\Delta_n(p)$, полученную в [1]. Так же, как в [1], ради простоты формулировок мы будем рассматривать только случай $0<p\leqslant 0.5$. Нам понадобятся три функции: $K_1(p,n)$, $K_2(p,n)$ и $K_3(p,n)$, введенные в [1]. Они имеют достаточно громоздкий вид, и здесь мы их не приводим. Обозначим

$$\beta_3(p)=\mathbf{E}\left|\frac{Z-p}{\sqrt{pq}}\right|^3 \equiv \frac{p^2+q^2}{\sqrt{pq}}, \quad \mathcal{E}(p)=\frac{2-p}{3\sqrt{2\pi}\,[p^2+(1-p)^2]}. \tag{2}$$

Заметим, что $\max\limits_{0<p\leqslant 0.5}\mathcal{E}(p)=C_E\equiv\frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}}=0.409732\ldots$ (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть*
$$n \geqslant 200, \quad \frac{4}{n} \leqslant p \leqslant 0.5. \tag{3}$$
Тогда
$$\Delta_n(p) \leqslant \frac{\beta_3(p)}{\sqrt{n}} \Big(\mathcal{E}(p) + R_0(p,n)\Big), \tag{4}$$
где
$$R_0(p,n) = \frac{\sqrt{n}}{\beta_3(p)} \sum_{j=1}^{3} K_j(p,n),$$
причем для каждого $0 < p \leqslant 0.5$ *последовательность* $R_0(p,n)$*, убывая, ведет себя как* $O\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big)$*. Кроме того, при всех* n *и* p*, удовлетворяющих условию* (3)*,*
$$|R_0(p,n)| < 0.4215 - C_E < 0.012.$$

В настоящей работе мы получаем более точный результат, чем (4), который будет записывается в виде равенств для $\delta_n(p,x)$. Приступим к формулировке утверждений работы. Вместо неравенства сглаживания, полученного в [1], мы доказываем более точное равенство сглаживания. Пусть $P(x)$ – некоторая функция распределения. Для любой измеримой функции $f(x)$ введем обозначение
$$(P * f)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, dP(y).$$

Лемма 1. *Пусть* $G(x)$ *– функция дискретного распределения,* $h > 0$ *– наименьшее расстояние между точками разрыва,* $P(x)$ *– равномерное распределение на* $[-h/2, h/2]$*. Обозначим* $\delta(x) = G(x) - G_0(x)$*, где* $G_0(x)$ *– некоторая непрерывная функция распределения. Если* x_0 *– точка разрыва функции* G*, то справедливы следующие равенства*
$$\delta(x_0+) = (P*\delta)(x_0 + h/2) + \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \Big(G_0(x) - G_0(x_0)\Big)\, dx,$$
$$\delta(x_0-) = (P*\delta)(x_0 - h/2) + \frac{1}{h} \int\limits_{x_0-h}^{x_0} \Big(G_0(x) - G_0(x_0)\Big)\, dx.$$
Если x_0 *– точка непрерывности функции* G*, то*
$$\delta(x_0+) \leqslant (P*\delta)(x_0 + h/2) + \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \Big(G_0(x) - G_0(x_0)\Big)\, dx,$$
$$\delta(x_0-) \geqslant (P*\delta)(x_0 - h/2) + \frac{1}{h} \int\limits_{x_0-h}^{x_0} \Big(G_0(x) - G_0(x_0)\Big)\, dx.$$

Замечание 1. Утверждение леммы не зависит от того, с какой стороны непрерывна функция распределения, слева или справа.

Лемма 2. *Пусть* $G(x)$ *и* $G_0(x)$ *– функция распределения из леммы 1,* $\delta(x) = G(x) - G_0(x)$*. Тогда существует точка разрыва* x_0 *функции* $G(x)$*, в которой достигается* $\sup_x |\delta(x)|$ *в следующем смысле: если* G *непрерывна слева, то или* $\sup_x |\delta(x)| = \delta(x_0+)$ *или* $\sup_x |\delta(x)| = -\delta(x_0)$*, а если* G *непрерывна справа, то или* $\sup_x |\delta(x)| = \delta(x_0)$ *или* $\sup_x |\delta(x)| = -\delta(x_0-)$*.*

Обозначим $F(x)$ и $f(t)$ – функция распределения и характеристическая функция случайной величины $X = \frac{Z-p}{\sqrt{pq}}$ соответственно. Тогда разность $\delta_n(p,x)$, определенную в (1), можно записать в виде

$$\delta_n(p,x) = F^{*n}(x\sqrt{n}\,) - \Phi(x),$$

где F^{*n} – n-кратная свертка функции распределения F. Для определенности будем считать, что F непрерывна слева. В силу леммы 2 существует точка разрыва ξ_0 функции $F^{*n}(x\sqrt{n}\,)$, в которой достигается $\sup_x |\delta_n(p,x)|$, причем возможны только два случая: $\Delta_n(p) = \delta_n(p,\xi_0+)$ или $\Delta_n(p) = -\delta_n(p,\xi_0)$. Точки разрыва функции $F^{*n}(x\sqrt{n}\,)$ имеют вид $\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$. Поэтому расстояние между ними равно $h_n = \frac{1}{\sqrt{npq}}$. Обозначим $P_n(x)$ – равномерное распределение на $[-h_n/2, h_n/2]$,

$$(P_n * \delta_n)(x) = (P_n * \delta_n(p,\cdot))(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_n(p,x-y)\,dP_n(y),$$

$$B^+(p,n,x) = \frac{1}{h_n}\int\limits_{x}^{x+h_n} \Big(\Phi(y)-\Phi(x)\Big)\,dy, \quad B^-(p,n,x) = \frac{1}{h_n}\int\limits_{x-h_n}^{x} \Big(\Phi(y)-\Phi(x)\Big)\,dy,$$

$\varphi(x) = \Phi'(x)$.

Лемма 3. *Если x_0 – точка разрыва функции $F^{*n}(x\sqrt{n}\,)$, то справедливы следующие равенства*

$$\delta_n(p,x_0+) = (P_n * \delta_n)(x_0 + h_n/2) + B^+(p,n,x_0),$$
$$\delta_n(p,x_0) = (P_n * \delta_n)(x_0 - h_n/2) + B^-(p,n,x_0),$$

где

$$0 < B^+(p,n,x_0) \leqslant \frac{h_n}{2} \max_{x_0 \leqslant y \leqslant x_0+h_n} \varphi(y),$$
$$-\frac{h_n}{2} \max_{x_0-h_n \leqslant y \leqslant x_0} \varphi(y) \leqslant B^-(p,n,x_0) < 0.$$

Кроме того, для любого $x \in \mathbb{R}$

$$B^+(p,n,x) = \frac{h_n}{2}\,\varphi(x) + R_2^+(p,n,x),$$
$$B^-(p,n,x) = -\frac{h_n}{2}\,\varphi(x) + R_2^-(p,n,x),$$

где

$$R_2^+(p,n,x) = \frac{1}{h_n}\int\limits_{x}^{x+h_n} \varphi'\Big(x+\lambda(y-x)\Big)\,\frac{(y-x)^2}{2}\,dy, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$
$$R_2^-(p,n,x) = \frac{1}{h_n}\int\limits_{x-h_n}^{x} \varphi'\Big(x+\lambda(y-x)\Big)\,\frac{(y-x)^2}{2}\,dy, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

и

$$|R_2^+(p,n,x)| \leqslant \frac{h_n^2}{6} \max_{x \leqslant y \leqslant x+h_n} \Big|\varphi'(y)\Big|, \quad |R_2^-(p,n,x)| \leqslant \frac{h_n^2}{6} \max_{x-h_n \leqslant y \leqslant x} \Big|\varphi'(y)\Big|.$$

Перейдем к формулировке более точного результата, чем теорема 1. Обозначим

$$\alpha_3(p) = \mathbf{E}X^3 \equiv \frac{1-2p}{\sqrt{pq}}, \quad \tau_n = \Big(\frac{6\sqrt{n}}{\beta_3(p)}\Big)^{1/3}, \quad c_n = \sqrt{\frac{n}{n-1}}, \tag{5}$$
$$A(p,n,x) = \frac{\alpha_3(p)}{3!\,2\pi\sqrt{n}} \int\limits_{|u|\leqslant \tau_n/c_n} u^2 e^{-u^2/2} \frac{\sin y}{y}\Big|_{y=\frac{uh_nc_n}{2}} \cos\big(uxc_n\big)\,du,$$
$$A^+(p,n,x) = A(p,n,x+h_n/2), \quad A^-(p,n,x) = A(p,n,x-h_n/2).$$

Лемма 4. *Если x_0 – точка разрыва функции $F^{*n}(x\sqrt{n}\,)$, то справедливы следующие равенства*

$$\delta_n(p,x_0+) = A^+(p,n,x_0) + B^+(p,n,x_0) + R^+(p,n,x_0),$$
$$\delta_n(p,x_0) = A^-(p,n,x_0) + B^-(p,n,x_0) + R^-(p,n,x_0),$$

причем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |R^{\pm}(p,n,x)| \leqslant \sum_{i=1}^{3} K_i(p,n),$$

если выполнено условие (3).

Далее, ради краткости изложения, мы ограничимся рассмотрением только функции $\delta_n(p,x_0+)$.

Замечание 2. Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial}{\partial x}B^+(p,n,x) = \frac{1}{h_n}\int\limits_0^{h_n} \Big[\varphi(u+x)-\varphi(x)\Big]\,du \begin{cases} <0, & \text{если } x\geqslant 0,\\ >0, & \text{если } x\leqslant -h_n. \end{cases}$$

Поскольку функция $\frac{\partial}{\partial x}B^+(p,n,x)$ непрерывна по аргументу x, то найдется такая точка $\overline{x}$, $-h_n<\overline{x}<0$, что $\frac{\partial}{\partial x}B^+(p,n,x)\Big|_{x=\overline{x}} = 0$. Таким образом,

$$\max_{x\in\mathbb{R}} B^+(p,n,x) = B^+(p,n,\overline{x})$$

для некоторой точки $\overline{x}$ из интервала $(-h_n,0)$.

Обозначим

$$\mathcal{E}_1(p) = \frac{1-2p}{6(p^2+q^2)\sqrt{2\pi}}, \quad \mathcal{E}_2(p) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}(p^2+q^2)}. \tag{6}$$

Очевидно,

$$\mathcal{E}_1(p) + \mathcal{E}_2(p) = \mathcal{E}(p).$$

Графики $\mathcal{E}_1(p)$, $\mathcal{E}_2(p)$ и $\mathcal{E}(p)$ при $0\leqslant p\leqslant 0.5$ см. на рис. 1.

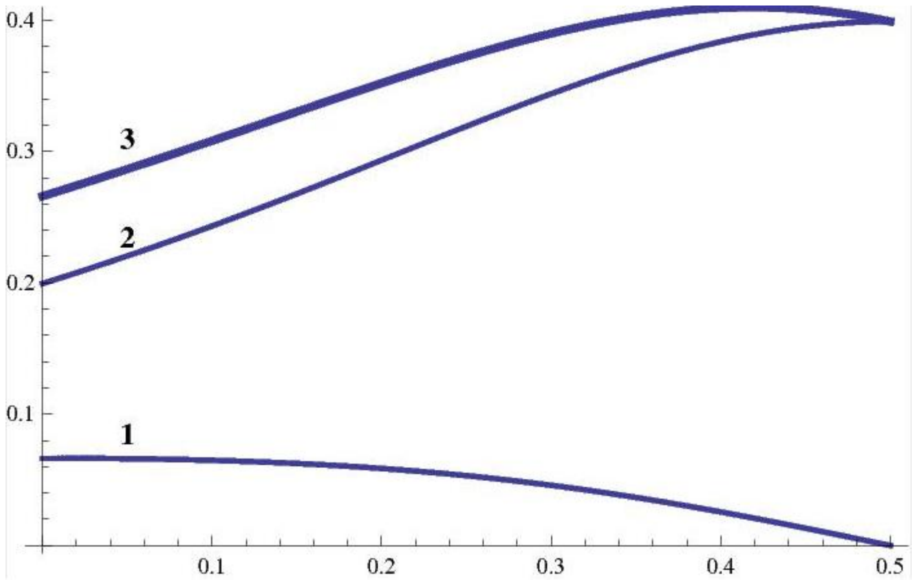


Рис. 1. 1 – график $\mathcal{E}_1(p)$, 2 – график $\mathcal{E}_2(p)$, 3 – график $\mathcal{E}(p)$

Как оказалось, функция $\mathcal{E}_1(p)$ связана с первым членом асимптотического разложения распределения суммы независимых одинаково распределенных случайных величин (см. (7)–(10)), а функция $\mathcal{E}_2(p)$ – со сглаживанием (см. (11)–(13)).

Обозначим

$$V_1(p,n,x) = \begin{cases} \min\left\{1,\ \frac{2\tau_n}{c_n^2}\ \max\left\{\frac{1}{|x|}\,,\frac{1}{|x+h_n|}\right\}\right\}, & \text{если}\ \ \tau_n/c_n \geqslant 1, \\ \min\left\{1,\ \frac{8}{c_n\sqrt{e}}\ \max\left\{\frac{1}{|x|}\,,\frac{1}{|x+h_n|}\right\}\right\}, & \text{если}\ \ \tau_n/c_n < 1\,. \end{cases}$$

$$V_2(p,n,x) = \sqrt{2\pi} \max_{x \leqslant y/c_n \leqslant x+h_n} \left|\varphi''(y)\right|.$$

Следующее утверждение уточняет лемму 4, показывая, что функция $A^{+}(p,n,x)$ с ростом $|x|$ ведет себя как затухающее колебание.

Лемма 5. *Для каждого* $x \in \mathbb{R}$

$$|A^{+}(p,n,x)| \leqslant \frac{\beta_3(p)\mathcal{E}_1(p)}{\sqrt{n}} \min\left\{1, V_2(p,n,x) + \frac{4\sqrt{(n-1)pq}}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\tau_n^2/(2c_n^2)} V_1(p,n,x)\right\}.$$

Пусть $X,\, X_1,\, X_2,\, \ldots$ – независимые одинаково распределеннные случайные величины, $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{E}X^2 = 1$. Известно, что первый член асимптотического разложения для $\mathbf{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{j=1}^{n} X_j < x\Big)$ равен $-\frac{\mathbf{E}X^3\,\varphi''(x)}{6\sqrt{n}}$. Следовательно, в случае, когда X – нормированная бернуллиева случайная величина, то первый член указанного разложения, обозначим его $Q(p,n,x)$, имеет вид

$$Q(p,n,x) = -\frac{\alpha_3(p)\,\varphi''(x)}{3!\sqrt{n}} = -\frac{\beta_3(p)\,\varphi''(x)}{\sqrt{n}}\,\mathcal{E}_1(p)\sqrt{2\pi}. \tag{7}$$

Последнее равенство в (7) следует из (2), (5) и (6). Основным утверждением работы является

Теорема 2. *1. Если x_0 – точка разрыва функции $F^{*n}(x\sqrt{n})$, то для любого $n \geqslant 1$*

$$\delta_n(p, x_0+) = A^+(p, n, x_0) + B^+(p, n, x_0) + R^+(p, n, x_0),$$

где при условии (3) *функция $R^+(p, n, x_0)$ удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|R^+(p, n, x)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{3} K_j(p, n),$$

свойства правой части которого описаны в теореме 1. 2. Для функции $A^+(p, n, x)$ справедливо представление

$$A^+(p, n, x) = -\frac{\beta_3(p)\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\,\mathcal{E}_1(p)\varphi''(x) + \widetilde{R}_3(p, n, x) + R_4(p, n, x), \tag{8}$$

где

$$|\widetilde{R}_3(p, n, x)| \leqslant \frac{4\beta_3(p)}{\sqrt{2\pi n}}\,\mathcal{E}_1(p)\,\sqrt{(n-1)pq}\,e^{-\tau_n^2/(2c_n^2)}V_1(p, n, x), \tag{9}$$

$$|R_4(p, n, x)| \leqslant \frac{\beta_3(p)\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\,\mathcal{E}_1(p)$$
$$\times\Big(\frac{h_n c_n}{2}\max_{x\leqslant v/c_n\leqslant x+h_n}\left|\varphi^{(3)}(v)\right| + |x|(c_n-1)\max_{|x|\leqslant|v|\leqslant|x|c_n}\left|\varphi^{(3)}(v)\right|\Big). \tag{10}$$

3. Для функции $B^+(p, n, x)$ справедливы соотношения

$$0 < B^+(p, n, x_0) \leqslant \frac{h_n}{2}\max_{x_0\leqslant y\leqslant x_0+h_n}\varphi(y) = \frac{\beta_3(p)\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\,\mathcal{E}_2(p)\max_{x_0\leqslant y\leqslant x_0+h_n}\varphi(y), \tag{11}$$

$$B^+(p, n, x) = \frac{h_n}{2}\,\varphi(x) + R_2^+(p, n, x) = \frac{\beta_3(p)\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\,\mathcal{E}_2(p)\varphi(x) + R_2^+(p, n, x), \tag{12}$$

где

$$|R_2^+(p, n, x)| \leqslant \frac{h_n^2}{6}\max_{x\leqslant y\leqslant x+h_n}\left|\varphi'(y)\right| = \frac{\beta_3^2(p)4\pi}{3n}\,\mathcal{E}_2^2(p)\max_{x\leqslant y\leqslant x+h_n}\left|\varphi'(y)\right|. \tag{13}$$

4. Функции $A^+(p, n, x)$ и $B^+(p, n, x)$ удовлетворяют неравенству

$$|A^+(p, n, x_0) + B^+(p, n, x_0)| \leqslant \frac{\beta_3(p)}{\sqrt{n}}\,\mathcal{E}(p).$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Межинтеграционной программы СО РАН (проект 56), а также ДВО РАН (проекты 12-I-ОМН-01, 12-II-СО-01М-002).

Список литературы

1. *Нагаев С.В., Чеботарев В.И.* Об оценке близости биномиального распределения к нормальному. – Теория вероятн. и ее примен., 2011, т. 56, в. 2, с. 248-278.

УДК 003.26+075.8

ОЦЕНКА СТОЙКОСТИ НЕКОТОРЫХ КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОТОКОЛОВ

Чеканов С.Г.
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690000, Суханова, 8
E-mail: stepltd@mail.ru

Гневашева Ю.О.
Южно-Уральский государственный университет
Россия, 454080, Челябинск, просп. Ленина, 76
E-mail: *julia865@mail.ru*

Чернецкая Н.В.
Челябинский институт путей сообщения
Россия, 454091, Челябинск, ул. Цвиллинга, 56
E-mail: stepltd@mail.ru

Ключевые слова: криптографические протоколы, стойкость криптографических примитивов

Создавая новые протоколы с заданными свойствами безопасности (аутентификация, конфиденциальность, доказательства отправки и получения и пр.) можно идти двумя путями: либо устранять возможные атаки на простой протокол, уже обладающий некоторыми из этих свойств, добавляя дополнительное шифрование, подтверждение подлинности, вычисление хэш-функций; либо взять уже известный протокол, обладающий этими свойствами и у которого не найдены возможные атаки, попытаться упростить его путем удаления из него некоторых шифрований, вычислений хэш-функций, при этом стараясь особо не изменять алгоритм обмена сообщениями. Второй путь также интересен в том смысле, что чем проще протокол в смысле вычислений - тем быстрее осуществляется обмен.

Рассмотрим некоторые протоколы аутентификации (NSPK) и протоколы защищенного обмена ключами (EKE). Будем использовать следующую систему обозначений: A, B — участники протокола, также идентификаторы участников A и B соответственно; $A \longrightarrow B : X$ — A отправляет B сообщение X; r_A — случайное число, генерируемое A; $E_k(X)$ — результат шифрования X на ключе k ; $E_A(X)$ — результат шифрования сообщения X на открытом ключе асимметричной системы, где секретный ключ принадлежит участнику A; k_{AB} — ключ симметричной системы шифрования участников A и B; k_A- открытый ключ асимметричной системы шифрования, секретный ключ которой принадлежит участнику A; $H(X)$ — значение хэш-функции на сообщении X; $D_A(X)$ — шифрование сообщения X участником A с использованием секретного ключа его асимметричной системы шифрования; $C(A)$ — противник C, который маскируется под участника A. Протоколы взаимной аутентификации Во всех этих протоколах требуется выполнение свойств аутентификации источника и защиты от повтора. 1) Протокол NSPK — xor 1. $A \longrightarrow B : E_B(r_A, A)$ 2. $B \longrightarrow A : E_A(r_A, r_B, B)$ 3. $A \longrightarrow B : E_B(r_B)$ Атак нет, свойства выполняются. Если убрать операцию xor, получится протокол NSL. Если убрать использование идентификатора участника B, получится базовый протокол NSPK. На оба этих протокола существуют атаки. 2) Протокол NSL (Needham — Schroeder — Long Protocol) 1. $A \longrightarrow B : E_B(A, r_A)$ 2. $B \longrightarrow A : E_A(r_A, r_B, B)$ 3. $A \longrightarrow B : E_B(r_B)$ Если допустить, что возможно заменить одно случайное число r_B на другое, полученное конкатенацией двух чисел (r_B, B) , и это останется незамеченным, то возможна следующая атака: Первый сеанс, C маскируется под B. Второй сеанс, C маскируется под A. Третий сеанс, C легально общается с участником A. 1. $A \longrightarrow C(B) : E_B(A, r_A)$ 1'. $C(A) \longrightarrow B : E_B(A, C)$ 2'. $B \longrightarrow C(A) : E_A(C, r_B, B)$ 1". $C \longrightarrow A : E_A(C, (r_B, B))$ 2". $C \longrightarrow C : E_C((r_B, B), r_A, A)$ 3'. $C(A) \longrightarrow B : E_B(r_B)$ Используются три сеанса протокола с чередованием сообщений из разных сеансов, при этом нарушитель может вычислить r_B и пройти аутентификацию в качестве участника A во втором сеансе протокола. 3) Протокол NSPK 1. $A \longrightarrow B : E_B(r_A, A)$ 2. $B \longrightarrow A : E_A(r_A, r_B)$ 3. $A \longrightarrow B : E_B(r_B)$ Нарушитель C, используя законный обмен с участником A, может открыть сеанс связи с участником B и убедить его в том, что C является A: 1. $A \longrightarrow C : E_C(r_A, A)$ 1'. $C(A) \longrightarrow B : E_B(r_A, A)$ 2'. $B \longrightarrow C(A) : E_A(r_A, r_B)$ 2. $C \longrightarrow A : E_A(r_A, r_B)$ 3. $A \longrightarrow C : E_C(r_B)$ 3'. $C(A) \longrightarrow B : E_B(r_B)$ Таким образом, можно предположить, что для аутентификации источника необходимо передавать идентификаторы участников обмена, при этом во избежание атак аналогичных атаке на протокол NSL, имеет смысл эти идентификаторы дополнять временными метками и защищать шифрованием, вычислением хэш-функции от полученного числа или применением какой-либо математической операции (xor, возведение в степень и т.п.). В работе предлагается протокол цифровой подписи, стойкость которого проанализирована различными способами, осуществлена программная реализация протокола. Теперь перейдем непосредственно к описанию разработанного протокола передачи сообщений на основе эллиптических кривых. При передаче сообщения M от пользователя A (отправителя) к пользователю B (получателю) выполняются следующие шаги: 1) подписываем передаваемое сообщение цифровой подписью Шнорра, используя хэш-функцию Tiger в соответствующих шагах алгоритма подписи; 2) выбираем эллиптическую кривую и точку на ней для последующего использования в шифровании, используя метод случайного выбора; 3) полученное сообщение представляем в виде точки на эллиптической кривой, используя вероятностный метод представления открытого текста . При этом текст представляется в виде ASCII-кодов символов; 4) к точке, полученной на шаге 3, применяем аналог системы шифрования Эль-Гамаля для эллиптических кривых; 5) делаем общедоступными в канале связи: характеристику поля; определенную над ним эллиптическую кривую; точку, выбранную на шаге 2; открытый ключ отправителя сообщения; открытый ключ цифровой подписи; 6) передаем по открытому каналу связи зашифрованное сообщение; 7) получатель по общедоступным данным расшифровывает сообщение и удостоверяется в правильности цифровой подписи; 8) в случае неверной цифровой подписи сообщение игнорируется. Построен график зависимости стойкости нашего протокола от нижней границы характеристики поля, начиная с 160 бит. Анализ стойкости протоколов проводился с использованием пакета AVISPA.

Список литературы

1. Черемушкин А. В. Криптографические протоколы: основные свойства и уязвимости. М.: Издательский центр "Академия 2009.
2. Kelsey J. Collisions and Near-Collisions for Reduced-Round Tiger // Proceedings of Fast Software Encryption. Gratz: FSE, 2006.
3. http://www.avispa project.org — страница разработчиков AVISPA

УДК 519.214

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЦПТ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

И.Г. Шевцова
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 52, 2-й учебный корпус, ВМК
E-mail: ishevtsova@cs.msu.su

Ключевые слова: центральная предельная теорема, скорость сходимости

В докладе рассматривается задача оптимизации структуры моментных оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм независимых случайных величин, имеющих три первых момента, и пуассоновских случайных сумм. Основное внимание уделено оценкам равномерной метрики (метрики Колмогорова). Показано, что даже теоретически наилучшие возможные классические оценки, имеющую аффинную зависимость от ляпуновской дроби, можно улучшить, если эту аффинную функцию заменить более эффективной линейной или даже вогнутой и дополнительно использовать информацию о младших моментах. Построены асимптотические оценки с оптимальной структурой и остаточным членом, указанным в явном виде, а также абсолютные оценки (не содержащие остаточного члена) с уточненной структурой, в частности, улучшены неравенства Берри–Эссеена, Нагаева–Бикялиса, а также асимптотические оценки Правитца (1975), Бикялиса (1991, 1994) и Чистякова (1996, 2000). На основе полученных равномерных оценок предложен новый подход к построению неравномерных оценок и оценок скорости сходимости обобщенных пуассоновских распределений, позволивший получить существенные продвижения в этой области. В качестве следствия впервые показано, что скорость сходимости сопровождающих безгранично делимых распределений выше, чем исходных.

УДК 517.95

ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

М.А. Шепелов
Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, Владивосток, Радио 7
E-mail: 726577@mail.ru

Ключевые слова: уравнение конвекции-диффузии, обратная задача, мультипликативное управление, устойчивость

Исследуются задачи идентификации для стационарного уравнения конвекции-диффузии, рассматриваемого в ограниченной области при смешанных краевых условиях на границе области. С помощью оптимизационного метода указанные задачи сводятся к обратным экстремальным задачам, в которых роль управлений играют скорость течения и плотность объемных источников вещества. Доказывается их разрешимость как для произвольного слабо полунепрерывного снизу функционала качества, так и для конкретных функционалов качества. На основе анализа системы оптимальности устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решений конкретных экстремальных задач относительно малых возмущений как функционала качества, так и одной из функций, входящих в краевую задачу.

Введение

В последние годы большое внимание уделяется постановке и исследованию задач управления для моделей тепломассопероноса [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Наряду с задачами управления важную роль в приложениях играют обратные задачи для моделей тепломассопереноса. Используя оптимизационный метод [7], указанные задачи можно свести к исследованию соответствующих обратных экстремальных задач на слабых решениях рассматриваемых краевых задач. Для исследования указанных экстремальных задач удобно применять хорошо разработанные методы условной минимизации [8]. В настоящей работе исследуется разрешимость экстремальной задачи для уравнения конвекции-диффузии, рассматриваемого в ограниченной области Ω при смешанных краевых условиях для температуры, выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума, и устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость оптимальных решений.

1. Постановка прямой задачи

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, с границей Γ, состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N. Рассмотрим в Ω задачу нахождения температуры T жидкой среды, занимающей область Ω, из соотношений

$$\lambda \Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = f \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$T = 0 \text{ на } \Gamma_D, \ \lambda \partial T / \partial n = \chi \text{ на } \Gamma_N. \tag{2}$$

Здесь λ =const> 0 – коэффициент температуропроводности, $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x})$ – вектор скорости, $f(\mathbf{x})$ – плотность объемных источников тепла, $\chi(\mathbf{x})$ – заданные на участках Γ_N функции. Будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω, либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$, либо границу Γ или участок Γ_0 границы Γ с положительной мерой. Через $\|\cdot\|_s$, $|\cdot|_s$ и $(\cdot,\cdot)_s$ будем обозначать норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(\Omega)$. Через $\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|_{1,Q}$ и $(\cdot,\cdot)_Q$, $(\cdot,\cdot)_{1,Q}$ будем обозначать нормы и скалярные произведения соответственно в пространствах $L^2(Q)$ и $H^1(Q)$. При $Q = \Omega$ индекс Ω будем опускать, полагая $\|\cdot\|_\Omega = \|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{1,\Omega} = \|\cdot\|_1$. Положим $\|\chi\|_{\Gamma_N} = \|\chi\|_{L^2(\Gamma_N)}$. Положим $\mathbf{H}^1_{\mathrm{div}}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathrm{div}\mathbf{u} = 0\}$, $\mathbf{Z} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_{\mathrm{div}}(\Omega) : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} \geqslant 0\}$. Будем предполагать, что выполняются условия (i) $\Gamma \in C^{0,1}$, $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$, $meas\ \Gamma_D > 0$; (ii) $\chi \in L^2(\Gamma_N)$, (iii) $\mathbf{u} \in \mathbf{Z}$, $f \in L^2(\Omega)$. Введем основное для дальнейшего анализа пространство $X = \{\theta \in H^1(\Omega) : \theta|_{\Gamma_D} = 0\}$. Известно, что X – гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_1$, эквивалентной полунорме $|\cdot|_1$ в силу неравенства Фридрикса–Пуанкаре́ вида $|\theta|_1^2 \geqslant \delta_1 \|\theta\|_1^2 \ \forall \ \theta \in X, \delta_1 = \mathrm{const} > 0$. Через X^* обозначим пространство, двойственное к X относительно пространства $L^2(\Omega)$. Слабым решением задачи (1), (2) назовем функцию $T \in X$, удовлетворяющую соотношениию

$$a_{\mathbf{u}}(T, \eta) \equiv \lambda(\nabla T, \nabla \eta) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, \eta) = \langle l, \eta \rangle \equiv (f, \eta) + (\chi, \eta)_{\Gamma_N} \forall \eta \in X. \tag{3}$$

Справедливы следующие неравенства (см. [7]):

$$|(\chi, \theta)_{\Gamma_N}| \leqslant \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} \|\theta\|_1, \ |(\mathbf{u} \cdot \nabla T, \theta)| \leqslant \gamma_1 \|\mathbf{u}\|_1 \|T\|_1 \|\theta\|_1, \ \gamma_1 = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Ясно, что $l \in X^*$, причем с учетом (4) выполняется оценка $\|l\|_{X^*} \leqslant \|f\| + \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N}$. Пусть $\mathbf{u} \in \mathbf{Z}$. Легко видеть, что $a_{\mathbf{u}}(T, T) \geqslant \lambda_* \|T\|_1^2, \ \lambda_* = \delta_1 \lambda$. Из общей теории вытекает, что задача (3) эквивалентна решению операторного уравнения

$$A_{\mathbf{u}} T = l. \tag{5}$$

Из теоремы Лакса-Мильграма вытекает, что решение $T \in X$ задачи (3) существует, единственно и для него выполняется оценка

$$\|T\|_1 \leqslant C_0 \|l\|_{X^*} \leqslant C_0(\|f\| + \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N}), \ C_0 = \lambda_*^{-1} \equiv (\delta_1 \lambda_0)^{-1}.$$

2. Постановка обратной задачи

Задачи исследования единственности и устойчивости решений обратных экстремальных задач для рассматриваемой модели теплопереноса заключаются в минимизации определенных функционалов качества, зависящих от состояния (температуры T) и неизвестных функций (управлений), удовлетворяющих уравнениям состояния, имеющих вид слабой формулировки (3) задачи (1),(2). Управления $\mathbf{u}$ и f относятся к разным классам распределенных управлений. Если функция f имеет смысл управления типа плотности источников, линейно входящей в уравнение состояния, то функция $\mathbf{u}$, являющаяся множителем при неизвестном решении, имеет смысл мультипликативного управления, нелинейно входящего в уравнение состояния. В качестве функционала качества мы выберем один из следующих:

$$I_1(T) = \|T - T_d\|_Q^2 = \int\limits_Q |T - T_d|^2 d\mathbf{x} \equiv \int\limits_\Omega r(T - \tilde{T}_d)^2 d\mathbf{x}, \ \ I_2(T) = \|T - T_d\|_{1,Q}^2. \tag{6}$$

Будем предполагать, что управление $\mathbf{u}$ и f изменяются во множествах K_1, K_2, причем $(j) K_1 \subset \mathbf{Z}$, $K_2 \subset L^2(\Omega)$ - некоторые выпуклые замкнутые множества. Полагая $K = K_1 \times K_2$, $u = (\mathbf{u}, f)$, введем оператор $F = X \times K \times L^2(\Gamma_N) \to X^*$, действующий по формуле $\langle F(T, u, \chi), \eta \rangle = \langle A_\mathbf{u} T, \eta \rangle - (f, \eta) - (\chi, \eta)_{\Gamma_N} \equiv a_\mathbf{u}(T, \eta) - (f, \eta) - (\chi, \eta)_{\Gamma_N}$. Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$J(T, u) \equiv \frac{\mu_0}{2} I(T) + \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{u}\|_1^2 + \frac{\mu_2}{2} \|f\|_\Omega^2 \to \inf, F(T, u) = 0, (T, u) \in X \times K. \tag{7}$$

Здесь μ_0, μ_1, μ_2 неотрицательные параметры, служащие для регулирования относительной важности каждого из слагаемых в (7). Введем множество $Z_{ad}(\chi) = \{(T, u) \in X \times K : F(T, u, \chi) = 0, \ J(T, u) < \infty\}$ допустимых пар (T, u) для задачи (7). Предположим в дополнение к (j), что справедливо следующее условие: (jj) $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$ и K_1, K_2 – ограниченные множества либо $\mu_l > 0$, $l = 0, 1, 2$, и функционал I ограничен снизу. **Теорема 1.** *Пусть $I : X \to \mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу функционал качества и выполняются условия (i), (ii), (j), (jj), причем $Z_{ad}(\chi) \neq \varnothing$. Тогда задача (7) имеет по крайней мере одно решение $(T, u) \in X \times K$.* Подчеркнем, что утверждения теоремы 1 справедливы для функционалов I_1 и I_2, поскольку они неотрицательны и слабо полунепрерывны снизу. **Теорема 2.** *Пусть при выполнении условий теоремы 1 пара $(\hat{T}, \hat{u}) \in X \times K$, где $\hat{u} = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{f})$, является решением задачи (7), и пусть функционал $I(T)$ непрерывно дифференцируем по T в точке $\hat{T}$. Тогда существует единственный множитель Лагранжа $\theta \in X$ такой, что справедливо уравнение Эйлера-Лагранжа $L'_T(\hat{T}, \hat{u}, \chi, \theta) \equiv F'_T(\hat{T}, \hat{u}, \chi)^* \theta + (\mu_0/2) I'_T(\hat{T}) = 0$ в X^*, эквивалентное тождеству*

$$\lambda(\nabla\tau, \nabla\theta) + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla\tau, \theta) = -(\mu_0/2) < I'_T(\hat{T}), \tau > \quad \forall \tau \in X, \tag{8}$$

и выполняется принцип минимума $L(\hat{T}, \hat{u}, f, \theta) \leqslant L(\hat{T}, u, f, \theta)$ $\forall u \in K$, эквивалентный паре вариационных неравенств

$$\langle L'_\mathbf{u}(\hat{T}, \hat{u}, \chi, \theta), \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} \rangle = \mu_1(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})_1 + ((\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla\hat{T}, \theta) \geqslant 0 \ \forall \mathbf{u} \in K_1, \tag{9}$$

$$\langle L'_f(\hat{T}, \hat{u}, \chi, \theta), f - \hat{f} \rangle = \mu_2(\hat{f}, f - \hat{f})_\Omega - (f - \hat{f}, \theta)_\Omega \geqslant 0 \ \forall f \in K_2. \tag{10}$$

Задачи (11) и (8) вместе с вариационными неравенствами (9) и (10) образуют систему оптимальности, описывающую необходимые условия экстремума для задачи (3). Установим одно важное свойство системы оптимальности, с помощью которого ниже мы выведем достаточные условия на данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решений ряда конкретных экстремальных задач. Сформулируем его в виде теоремы. **Теорема 3.** *Пусть в дополнение к условиям (i), (ii) $K_1 \subset \mathbf{Z}$, $K_2 \subset L^2(\Omega)$ и $X_{ad} \subset L^2(\Gamma_N)$ – ограниченные множества, и пусть пары*

$(T_1, u_1) \in X \times K$ и $(T_2, u_2) \in X \times K$ являются решениями соответственно задач (7) при $\chi_1 \in X_{ad}$ и задачи

$$\tilde{J}(T,u) = \frac{\mu_0}{2}\tilde{I}(T) + \frac{\mu_1}{2}\|\mathbf{u}\|_1^2 + \frac{\mu_2}{2}\|f\|_\Omega^2 \to \inf,\ \ F(T,u,\tilde{\chi}) = 0,\ \ (T,u) \in X \times K$$

при $\tilde{\chi} = \chi_2 \in X_{ad}$. Через $\theta_i \in X$ обозначим множители Лагранжа, отвечающие решениям (T_i, u_i, f_i), и пусть функционалы I и $\tilde{I}$ непрерывно дифференцируемы относительно состояния T. Тогда для разностей T, $\mathbf{u}$, f, θ и χ, определенных формулами

$$T = T_1 - T_2,\ \ \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2,\ \ f = f_1 - f_2,\ \theta = \theta_1 - \theta_2,\ \chi = \chi_1 - \chi_2, \tag{11}$$

выполняется неравенство

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla T, \theta_1 + \theta_2) + (\mu_0/2)\langle I'_T(T_1) - \tilde{I}'_T(T_2), T\rangle \leqslant -(\chi,\theta)_{\Gamma_N} - \mu_1\|\mathbf{u}\|_1^2 + \mu_2\|f\|_\Omega^2 \tag{12}$$

и справедлива оценка

$$\|T\|_1 \leqslant C_0(\gamma_1\|\mathbf{u}\|_1\|T_2\|_1 + \|f\| + \|\chi\|_{\Gamma_N}) \leqslant C_0(\gamma_1 M_T\|\mathbf{u}\|_1 + \|f\| + \|\chi\|_{\Gamma_N}). \tag{13}$$

3. Единственность и устойчивость решений экстремальных задач

Исследуем единственность и устойчивость решений следующей экстремальной задачи, отвечающей функционалу качества $I_1(T) = \|T - T_d\|_Q^2$:

$$J(T,u) = \frac{\mu_0}{2}I_1(T) + \frac{\mu_1}{2}\|\mathbf{u}\|_1^2 + \frac{\mu_2}{2}\|f\|_\Omega^2 \to \inf,\ \ F(T,u,\chi) = 0,\ \ (T,u) \in X \times K. \tag{14}$$

Обозначим через $(T_1, u_1) = (T_1, \mathbf{u}_1, f_1)$ решение задачи (14), отвечающее заданным функциям $T_d = T_d^{(1)} \in L^2(Q)$, $\chi = \chi_1 \in X_{ad}$. Через $(T_2, u_2) = (T_2, \mathbf{u}_2, f_2)$ обозначим решение задачи (14), отвечающее возмущенным функциям $\tilde{T}_d = T_d^{(2)} \in L^2(Q)$ и $\tilde{\chi} = \chi_2 \in X_{ad}$. Полагая $T_d = T_d^{(1)} - T_d^{(2)}$, имеем, что

$$\langle I'_{iT}(T_i), \tau\rangle = 2(T_i - T_d^{(i)}, \tau)_Q,\ \langle I'_{1T}(T_1) - \tilde{I}'_{1T}(T_2), T\rangle = 2(\|T\|_Q^2 - (T_d, T)_Q),\ i = 1,2. \tag{15}$$

В силу (15) тождество (8) для $\theta_i \in X$ и неравенство (12) для разностей T, $\mathbf{u}$, f, χ, θ, введенных в (11), принимают вид

$$\lambda(\nabla\tau, \nabla\theta_i) + (\mathbf{u}_i\cdot\nabla\tau, \theta_i) = -\mu_0(T_i - T_d^{(i)}, \tau)_Q\ \ \forall\tau \in X,\ i = 1,2, \tag{16}$$

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla T, \theta_1 + \theta_2) + \mu_0(\|T\|_Q^2 - (T_d, T)_Q) \leqslant -(\chi,\theta)_{\Gamma_N} - \mu_1\|\mathbf{u}\|_1^2 - \mu_2\|f\|_\Omega^2. \tag{17}$$

Задача (16) эквивалентна следующему уравнению для θ_i: $A^*_{\mathbf{u}_i}\theta_i = \mu_0 f_i^* \in X^*$, где $\langle f_i^*, \tau\rangle = -(T_i - T_d^{(i)}, \tau)_Q$, $i = 1,2$. Здесь $A^*_{\mathbf{u}_i}$ – оператор, сопряженный к оператору $A_{\mathbf{u}_i}$, введеному в разд. 1. Используя неравенство Коши-Буняковского, имеем $|\langle f_i^*, \tau\rangle| = |(T_i - T_d^{(i)}, \tau)_Q| \leqslant M_T^0\|\tau\|_1\ \ \forall\tau \in X$, где $M_T^0 = M_T + \max(\|T_d^{(1)}\|_Q, \|T_d^{(2)}\|_Q)$. Из результатов разд. 1 тогда выводим, что

$$\|\theta_i\|_1 \leqslant C_0\mu_0 M_T^0,\ \ i = 1,2,\ C_0 \equiv (\delta_1\lambda_0)^{-1}, |(\chi,\theta)_{\Gamma_N}| \leqslant 2\gamma_2 C_0\mu_0 M_T^0. \tag{18}$$

Используя (13), (18) и неравенство Юнга, имеем

$$|(\mathbf{u}\cdot\nabla T, \theta_1 + \theta_2)| \leqslant \gamma_1\|\mathbf{u}\|_1\|T\|_1\|\theta_1 + \theta_2\|_1 \leqslant 2\gamma_1\|\mathbf{u}\|_1 C_0(\gamma_1 M_T\|\mathbf{u}\|_1 + \|f\| +$$

$$+\gamma_2\|\chi\|_{\Gamma_N})C_0\mu_0 M_T^0 \leqslant \mu_0 {C_0}^2 M_T^0 M_T^{-1}(4\gamma_1^2 M_T^2\|\mathbf{u}\|_1^2+\|f\|^2+\gamma_2^2\|\chi\|_{\Gamma_N}^2). \qquad (19)$$

Предположим, что выполняются условия

$$\mu_1(1-\epsilon) > 4\mu_0\gamma_1^2 C_0^2 M_T^0 M_T,\ \mu_2(1-\epsilon) > \mu_0 C_0^2 M_T^0 M_T^{-1}, \qquad (20)$$

где $\epsilon > 0$ – произвольное сколь угодно малое число. Учитывая (20), из (19) выводим

$$|(\mathbf{u}\cdot\nabla T, \theta_1+\theta_2)| \leqslant \mu_1(1-\epsilon)\|\mathbf{u}\|_1^2+\mu_2(1-\epsilon)\|f\|_\Omega^2+\mu_0 C_0^2\gamma_2^2 M_T^0 M_T^{-1}\|\chi\|_{\Gamma_N}^2. \qquad (21)$$

Используя (21), из неравенства (17) получаем, что

$$\mu_0(\|T\|_Q^2-(T_d,T)_Q) \leqslant -(\mathbf{u}\cdot\nabla T,\theta_1+\theta_2)-(\chi,\theta)_{\Gamma_N}-\mu_1\|\mathbf{u}\|_1^2-\mu_2\|f\|_\Omega^2 \leqslant$$

$$-\epsilon\mu_1\|\mathbf{u}\|_1^2-\epsilon\mu_2\|f\|_\Omega^2+[\varphi(\|\chi\|)_{\Gamma_N}]^2. \qquad (22)$$

Здесь непрерывная функция $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ определяется формулой

$$\varphi(\|\chi\|_{\Gamma_N}) = (a\|\chi\|_{\Gamma_N}+b\|\chi\|_{\Gamma_N}^2)^{1/2},\ a = 2C_0\gamma_2 M_T^0,\ b = C_0^2\gamma_2^2 M_T^0 M_T^{-1}. \qquad (23)$$

Из (22) следует, что

$$\mu_0\|T\|_Q^2 \leqslant \mu_0\|T\|_Q\|T_d\|_Q-\epsilon\mu_1\|\mathbf{u}\|_1^2-\epsilon\mu_2\|f\|_\Omega^2+[\varphi(\|\chi\|_{\Gamma_N})]^2. \qquad (24)$$

Отсюда выводим неравенство $\|T\|_Q^2 \leqslant \|T\|_Q\|T_d\|_Q+[\varphi(\|\chi\|_{\Gamma_N})]^2$ относительно $\|T\|_Q$. Решив его, приходим к оценке $\|T\|_Q \leqslant \|T_d\|_Q+\varphi(\|\chi\|_{\Gamma_N})$, эквивалентной следующей оценке для разности T_1-T_2:

$$\|T_1-T_2\|_Q \leqslant \|T_d^{(1)}-T_d^{(2)}\|_Q+\varphi(\|\chi_1-\chi_2\|_{\Gamma_N}). \qquad (25)$$

Используя (25), и неравенство $\|T\|_Q\|T_d\|_Q \leqslant \|T\|_Q^2+(1/4)\|T_d\|_Q^2$, вытекающее из неравенства Юнга, из (24) выводим, что

$$\epsilon\mu_1\|\mathbf{u}\|_1^2+\epsilon\mu_2\|f\|_\Omega^2 \leqslant -\mu_0\|T\|_Q^2+\mu_0\|T\|_Q\|T_d\|_Q+[\varphi(\|\chi\|_{\Gamma_N})]^2 \leqslant$$

$$(\mu_0/4)\|T_d\|_Q^2+\mu_0\left[\varphi(\|\chi\|_{\Gamma_N})\right]^2 \leqslant \mu_0\left[(1/2)\|T_d\|_Q+\varphi(\|\chi\|_{\Gamma_N})\right]^2. \qquad (26)$$

Из (26) вытекают следующие оценки:

$$\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_1 \leqslant \sqrt{\mu_0/\epsilon\mu_1}\Delta,\ \|f_1-f_2\|_\Omega \leqslant \sqrt{\mu_0/\epsilon\mu_2}\Delta, \qquad (27)$$

$$\|T_1-T_2\|_1 \leqslant C_0(\gamma_1 M_T\sqrt{\mu_0/\epsilon\mu_1}+\sqrt{\mu_0/\epsilon\mu_2})\Delta+C_0\|\chi_1-\chi_2\|_{\Gamma_N}. \qquad (28)$$

Здесь величина Δ определяется формулой

$$\Delta = (1/2)\|T_d^{(1)}-T_d^{(2)}\|_Q+\varphi(\|\chi_1-\chi_2\|_{\Gamma_N}). \qquad (29)$$

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы. **Теорема 4.** *Пусть при выполнении условий (i), (ii) и (j) K_1, K_2 и $X_{\rm ad} \subset H^{1/2}(\Gamma_N)$ – ограниченные множества и пусть четверка $(T_i, \mathbf{u}_i, f_i) \in H^1(\Omega)\times K_1\times K_2$ является решением задачи (14), отвечающим заданным функциям $T_d^{(i)} \in L^2(Q)$ и $\chi_i \in X_{\rm ad}$, где $Q \subset \Omega$ – произвольное открытое множество. Предположим, что $\mu_0 > 0$ и выполняются условия (20). Тогда справедливы оценки (25) и (27), (28), где Δ определяется формулой (29), в которой функция φ дается формулой (23).* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов ФЦП (N14.A1821.0353) и РФФИ (N13-01-00313).

Список литературы

1. Г.И. Марчук, Математическое моделирование в проблеме окружающей среды, М.: Наука., 1982, 319.
2. G.V. Alekseev, D.A. Tereshko, On solvability of inverse extremal problems for stationary equations of viscous heat conducting fluid, Journal of Inverse and III-Posed Problems, 6 (1998), 521–562.
3. Г.В. Алексеев, И.С. Вахитов, О.В. Соболева, Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции-диффузии-реакции, Журнал вычислительной математики и математической физики, 52 (2012), 1–15.
4. Г.В.Алексеев, М.А. Шепелов, Об устойчивости решений коэффициентных обратных экстремальных задач для стационарного уравнения конвекции-диффузии, Сибирский журнал индустриальной математики, 16 (2012), 4, 4-16.
5. V.I. Agoshkov, F.P. Minuk, A.S. Rusakov, V.B. Zalesny, Study and solution of identification problems for nonstationary 2D- and 3D-convection-diffusion equation, Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 20, 1 (2005), 19–43.
6. S.G. Pyatkov, On some classes of inverse problems for parabolic equations, J. Inv. III-Posed Problems, 18. 8 (2011), 917-934.
7. Г.В.Алексеев , Д.А. Терешко, Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости, Владивосток: Дальнаука, (2008), 365.
8. А.Д. Иоффе , В.М. Тихомиров, Теория экстремальных задач, М.: Наука, 1974.

УДК 528.1

CRUSTAL MOTION DERIVED FROM GPS MEASUREMENTS IN NORTH AND NORTHEAST CHINA: IMPLICATIONS FOR TECTONICS

Guojie Meng
First Crust Monitoring and Application Center
China Earthquake Administration, Tianjing, China
E-mail: mengguojie66@gmail.com

Xinkang Hu, Xiaoning Su, Honglin Jin, Guangyu Fu
Institute of Earthquake Science
China Earthquake Administration, Beijing, China
E-mail: mengguojie66@gmail.com

Keywords: : GPS measurement, strain accumulation, coseismic and postseismic deformation.

North China and Northeast China Northeast China are generally considered to be with relatively stable continental interior, in contrast to the other regions of China. Nonetheless, the two areas are characterized by intermediate to strong seismic activity. More than 2 scores of $M > 7.0$ earthquakes took place in North China in last several millenniums, and several deep-focus earthquakes have been recorded in the southernmost part of northeast China, adjoining the Far East, Russia. We have collected GPS observations from 1999 to 2011, and derived an integrated velocity field using GAMIT/GLOBK software. We have re-calculated velocities with respect to the assumed AMU microplate, and reconfirmed almost absence of significant relative movements within the area under study. For the north China, composed of 4 tectonic microblocks and 3 active belts, we employ an integrating model of blocks and dislocations to fit the observed GPS velocities by solving an optimal problem using the simulated annealing algorithm. The following conclusions are drawn from the modeling: The four main blocks show very close Euler poles with clockwise angular rotation velocities. The 3 active tectonic belts are found to have different motions in terms of slip rate and locking depth. All the 3 tectonic belts display relatively high locking ratio, implying that they are prone to accumulate strain. We also document the far-field co-seismic and post-seismic displacements of the 2011 Great Tohoku earthquake detected by GPS stations in the study area. About 2300 km away from the Great Tohoku earthquake, the co-seismic offsets recorded by GPS sites are around 10mm. Post-seismic deformation displays a heterogeneous pattern, implying a complex causative mechanism.

УДК 519.248:62-192+519.176

BOUNDS FOR PRICES OF FINANCIAL ASIAN-TYPE OPTIONS

Alexander Novikov
University of Technology, Sydney, Australia and Steklov Mathematical Institute of RAS, Russia
PO Box 123, Broadway, Department of Mathematical Sciences, University of Technology, Sydney, NSW 2007
E-mail: Alex.Novikov@uts.edu.au

Nino Kordzakhia
Macquarie University, Sydney, Australia
Balaclava Rd, North Ryde NSW 2109, Australia
E-mail: nkordzak@hotmail.com

Keywords: Asian options; Lower and upper bounds; VWAP.

In the context of dealing with financial risk management problems it is desirable to have accurate bounds for option prices in situations when pricing formulae do not exist in the closed form. A unified approach for obtaining upper and lower bounds for Asian-type options is proposed in this paper. The bounds obtained are applicable to the continuous and discrete-time frameworks for the case of time-dependent interest rates. A numerical example is provided to illustrate the accuracy of the bounds.

Introduction

We aim to obtain accurate bounds for option prices

$$C_T = Ee^{-R_T} F_T(S),$$

where $R_t = \int_0^t r_s ds$, r_s is an interest rate, $F_T(S)$ is an Asian-type payoff of the option written on the stock price $S = (S_t, 0 \leqslant t \leqslant T)$, T is the maturity time. (We assume that all random processes are defined on the same *filtered probability space* $(\Omega, \{F_t\}_{t \geqslant 0}, P)$). The typical payoff for Asian-type options is

$$F_T(S) = (\int_0^T (S_u - K) d\mu(u))^+, \tag{1}$$

where $x^+ = \max[x, 0] = (-x)^-$ for any x, K is a fixed strike, $\mu(u)$ is a distribution function on the interval $[0, T]$. Using the notation

$$\overline{h} = \int_0^T h_u \mu(du), h \in H,$$

where H is the class of adapted random processes $h = (h_s, 0 \leqslant s \leqslant T)$ such that $\int_0^T |h_u|\mu(du) = \overline{|h|} < \infty$ *a.s.*, we can rewrite (1) as follows

$$F_T(S) = (\overline{S} - K)^+ = \overline{(S-K)}^+. \tag{2}$$

In relation to discretely monitored options (**DMO**) or continuously monitored options (**CMO**) the distribution function μ can be discrete or continuous respectively. This setup also includes the case of call options on the volume-weighted average price (VWAP), that is

$$A_T := \frac{\sum\limits_{t_j \leqslant T} S_{t_j} U_{t_j}}{\sum\limits_{t_j \leqslant T} U_{t_j}}, \ F_T(S) = (A_T - K)^+,$$

where U_{t_j} is a traded volume at the moment t_j. By setting

$$\mu(u) = \frac{\sum\limits_{t_j \leqslant u} U_{t_j}}{\sum\limits_{t_j \leqslant T} U_{t_j}} \ , 0 \leqslant u \leqslant T$$

we obtain the representations (1) and (2) for options on VWAP. The presentation of classical Asian payoffs in the form (1) was mentioned by Rogers and Shi [9] and Večeř ([13]) where they used the PDE approach for finding C_T for CMO under the geometric Brownian motion (**gBm**) model and constant interest rates. The paper [9] generated a flow of related results about lower and upper bounds under different settings. We would like to mention here the pioneering paper by Curran [3] and the unpublished paper by Thompson [11]; in fact, the latter contains some ideas which we are developing further here. A similar approach was used by Albrecher et al ([1]). In addition, among other recent papers on this topic we would like to mention the paper by Chen and Lyuu [2] containing many numerical results for CMO under the gBm model, and the paper by Lemmens et al [6] which discusses DMO based on bounds for geometric Levy processes. In [6] comparisons to other approaches were presented; in particular, among other methods, comparisons to the recursive integration method developed by Fusai and Meucci [4] and the method utilising comonotonic bounds (e.g. [12]) were given. Note that all above cited papers assume that the interest rate process is constant. The case of floating strikes, that is options with the payoff $F_T(S) = (\overline{S} - S_T)^+$, can be easily reduced to the case (1) and is not discussed here. Below we develop a unified approach to obtaining lower and upper bounds for Asian-type DMO and CMO including VWAP with general time-dependent interest rates.

1. Lower and Upper bounds

The main technical result, which we use for the derivation of lower and upper bounds below, is given in the following **Theorem 1.** *Let z be a real number. Then*

$$C_T = \sup_{z, h \in H} E e^{-R_T} (\overline{S} - K) I\{\overline{h} > z\} \tag{3}$$

$$= \inf_{h \in H} E e^{-R_T} \overline{(S - K(1 + h - \overline{h}))^+} \tag{4}$$

where both supremum and infimum are attained by taking

$$h_u = S_u / K \tag{5}$$

and $z = 1$. Further we use the notation

$$X_t := \log(S_t/S_0)$$

and assume that the discounted process $e^{-R_t}S_t = S_0e^{X_t-R_t}$ is a martingale with respect to the filtration $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$, as required by the non-arbitrage theory (see e.g. [5]). Theorem 1 implies that, for all $h \in H$, the following lower and upper bounds hold

$$C_T \geqslant LB := S_0 \sup_z Ee^{-R_T}(\overline{e^X} - \frac{K}{S_0})I\{\overline{h} > z\}, \tag{6}$$

$$C_T \leqslant UB := S_0Ee^{-R_T}\overline{(e^X - \frac{K}{S_0}(1 + h - \overline{h}))^+}. \tag{7}$$

To find a process h producing accurate bounds we need to take into account a complexity of calculations of the joint distribution of $(X, h, \overline{h})$. Obviously, the problem can be made computationally affordable when h_u is a linear function of X_u, that is under the choice

$$h_u = a(u)X_u + b(u)$$

with some nonrandom functions $a(u)$ and $b(u)$. Since both inequalities (6) and (7) are, in fact, equalities when (5) holds, one may try to match the first moments of h_u and S_u/K that is to set

$$Eh_u = E(S_u/K),\ Var(h_u) = Var(S_u/K).$$

Here we apply a simpler choice with $a(u) = a = const$ and $b(u) = 0$ i.e.

$$h_u = aX_u \tag{8}$$

where the constant a needs to be chosen in the upper bound. For the latter case we have

$$C_T \geqslant LB1 := S_0 \sup_z Ee^{-R_T}(\overline{e^X} - \frac{K}{S_0})I\{\overline{X} > z\}, \tag{9}$$

$$C_T \leqslant UB1 := S_0 \inf_a Ee^{-R_T}\overline{(e^X - \frac{K}{S_0}(1 + aX - a\overline{X}))^+}. \tag{10}$$

Note that the calculation of the lower bound (9) does not depend on a choice of the constant a.

2. The case of Gaussian returns

Here we suppose that the process $X = (X_u, 0 \leqslant u \leqslant T)$ is Gaussian. To simplify the exposition we also suppose that the process r_t is nonrandom. The case of stochastic interest rates which are independent of S_t, can be treated in a similar way. The pair $(X_u, \overline{X})$, obviously, has a Gaussian distribution with

$$Cov(X_u, \overline{X}) = \int_0^T Cov(X_u, X_s)d\mu(s), \tag{11}$$

$$Var(\overline{X}) = \int_0^T\int_0^T Cov(X_u, X_s)d\mu(u)d\mu(s). \tag{12}$$

Below we consider a numerical example which corresponds to the gBm model with

$$X_u = R_u + \sigma W_u - \sigma^2/2\ u,$$

where W_u is a standard Bm. For the case of DMO we assume that $\mu(u)$ is an uniform discrete distribution on (0,T] with jumps at points

$$u_i = \frac{i}{N}T,\ i = 1, ..., N,$$

where N is the number of time units (e.g. trading days). From (11) we obtain

$$\kappa(u_i) := cov(W_{u_i}, \overline{W}) = \sum_{j=1}^{N} \min(u_i, s_j)T/N = u_i(T - \frac{u_i}{2} + \frac{T}{2N}),$$

$$V_N := Var(\overline{W}) = \frac{T}{3}(1 + \frac{3}{2N} + \frac{1}{2N^2}),$$

Note that letting $N \to \infty$ one can obtain the characteristics needed for the pricing of CMO as well. For numerical illustrations and comparisons we consider the set of parameters $S_0 = K = 100$, $\sigma = 0.3$, the interest rate

$$r_s = 0.09(1 + c/2\sin(2\pi s)), \tag{13}$$

where the parameter $c = 0$ or $c = 1$. One can speed up calculations of the bounds using the function $erfc(x)$. For example, using the Girsanov transformation we have obtained the following expression for the lower bound

$$LB1 = \frac{e^{-R_T}S_0}{2T\ N}\max_z [\sum_i e^{R_{u_i}} erfc\{\sqrt{V_N/2}(z - \sigma\kappa(u_i))\} - \frac{K}{S_0} erfc\{\sqrt{V_N/2}z\}].$$

It takes less than a quarter of second with Mathematica for any σ to find this lower bound. Computing the upper bounds UB2 is also relatively fast (up to 7 seconds using Mathematica for fixed a) but essentially slower with use of the command *FindMinimum* in Mathematica. The optimal value of a for the upper bound (10) is usually found in the interval $(0.7, 1)$. In fact, we found that UB1 with the choice $a = 1$ produces a reasonable accuracy (the errors are less than 0.5% for wide ranges of T, σ and K). In Table 1 the numerical results for LB1 and UB1 obtained with Mathematica are reported with three decimal digits. We provide the calculated bounds for two cases $c = 0$ and $c = 1$ in (13); the results for $c = 1$ are formatted in bold and placed in brackets. As an estimate for the price we consider a midpoint of the interval $(LB1, UB1)$:

$$\hat{C}_T = \frac{LB1 + UB1}{2}.$$

The following bound is valid for the relative error of $\hat{C}_T$:

$$|\hat{C}_T/C_T - 1|100\% \leqslant (UB1/LB1 - 1)50\%.$$

Table 1.

T	N	$LB1$	$UB1$	$error\ \%\ for\ \hat{C}_T$
	10	12.162 (**12.135**)	12.259 (**12.239**)	0.4 (**0.42**)
1	50	11.782 (**11.785**)	11.829 (**11.807**)	0.1 (**0.11**)
	∞	11.718 (**11.741**)	11.731 (**11.769**)	0.03 (**0.11**)
	10	56.344 (**60.769**)	57.233 (**61.568**)	0.78 (**0.68**)
9	50	56.073 (**60.066**)	56.419 (**60.506**)	0.3 (**0.37**)
	∞	56.012 (**60.014**)	56.146 (**60.197**)	0.17 (**0.15**)

As it might be anticipated, the prices for options with longer maturities (here $T = 9$) depend essentially on the term structure of interest rates.

Acknowledgement

The research is supported by ARC Grant DP130103315.

Список литературы

1. Albrecher H. Mayer, P. A., Schoutens W. General lower bounds for arithmetic Asian option prices// Appl. Math. Finance. 2008. Vol. 15, no. 1-2. P. 123–149.
2. Chen K., Lyuu Y. Accurate pricing formulas for Asian options// Applied Mathematics and Computation. 2007. Vol. 188. P. 1711–1724.
3. Curran M. Valuing Asian and portfolio options by conditioning on the geometric mean price// Management Science. 1994. Vol. 40. P. 1705–1711.
4. Fusai G., Meucci A. Pricing discretely monitored Asian options under Lévy processes// J. Bank Finance. 2008. Vol. 32 (10). P. 2076–2088.
5. Karatzas I., Shreve St. Methods of mathematical finance// Applications of Mathematics (New York). 1998. Vol. 39. Springer-Verlag, New York.
6. Lemmens D., Liang L.Z.J., Tempere J., De Scheppe A. Pricing bounds for discrete arithmetic Asian options under Lévy models// Physica A. 2010. Vol. 389. P. 5193–5207.
7. Liptser R. Sh., Shiryayev A. N. Statistics of random processes. 2000. Vol. II. Springer.
8. Novikov A., Ling T., Kordzakhia N. Pricing of volume-weighted average options: analytical approximations and numerical results// Festschrift M. Musiela. 2013. Springer (in print).
9. Rogers L.C.G., Shi Z. The Value of an Asian Option// J. Appl. Prob. 1995. Vol. 32. P. 1077-1088.
10. Stace A.W. A moment matching approach to the valuation of a volume weighted average price option// International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2007. Vol. 10(1). P. 95-110.
11. Thompson G. W. P. Fast narrow bounds on the value of Asian options. Working Paper. 2000. Centre for Financial Research, Judge Institute of Management Science, University of Cambridge.
12. Vanmaele M., Deelstra G., Liinev J., Dhaene J., Goovaerts M. Bounds for the price of discretely sampled arithmetic Asian options// J. Comput. Appl. Math. 2006. Vol. 185 (1). P. 51-90.
13. Večeř J. Unified Asian pricing. Risk 15. 2002. P. 113–116.
14. Večeř J., Xu, M. Pricing Asian options in a semimartingale model// Quant. Finance. 2004. Vol. 4, no. 2. P. 170–175.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Научное электронное издание
на компакт-диске

**XXXVII Дальневосточная математическая
школа-семинар
имени академика Е.В. Золотова**

08 сентября – 14 сентября 2013 г., Владивосток
Сборник докладов

**Проблемы теоретической
и прикладной математики,
компьютерных технологий и их приложений**

Утверждено к печати Ученым советом
Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт
прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук

Ответственный за выпуск – д.ф.-м.н. Г.Ш. Цициашвили
Подготовка электронного набора текста – к.ф.-м.н. А.А. Дмитриев
Подписано в печать 24.08.2013.
Уч.-изд. л. 29,8. Объем 5,4 Мб.
Тираж 100 экз.

Системные требования:
PC не ниже класса Pentium I;
32 Mb RAM; свободное место на HDD 16 Mb;
Дисковод CD-ROM 2-x и выше; мышь.
Adobe Acrobat Reader.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной
математики Дальневосточного отделения Российской академии наук,
690041, Владивосток, ул. Радио, 7
E-mail: http://www.iam.dvo.ru