

## КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ПРОГНОЗУ ДИНАМИКИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ОСНОВАНИИ СООРУЖЕНИЙ НА МНОГОЛЕТНЕМЕРЗЛЫХ ГРУНТАХ

Я.Б. Горелик<sup>1</sup>, Д.С. Паздерин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт криосферы Земли СО РАН, 625000, Тюмень, а/я 1230, Россия; [gorelik@ikz.ru](mailto:gorelik@ikz.ru)

<sup>2</sup>ООО “Газпром нефть–Ямал”, 625048, Тюмень, ул. 50 лет Октября, 8Б, Россия;  
[Pazderin.DS@tmn.gazprom-neft.ru](mailto:Pazderin.DS@tmn.gazprom-neft.ru)

Рассмотрены вопросы корректности выбора граничных условий на верхней и нижней границах расчетной области, а также проблема выбора положения ее нижней границы. На конкретных расчетных примерах показано, что некорректное задание параметров верхнего граничного условия может привести к необоснованному охлаждающему эффекту основания: прогнозная глубина оттаивания может быть занижена в несколько раз. Аналогичным образом “предсказывается” тепляющее влияние поверхности, которое в реальности не будет иметь места. Неверный выбор положения нижней границы расчетной области существенно усугубляет эти эффекты. Предложена процедура корректного выбора параметров верхнего граничного условия в области сопряжения поверхности массива пород с атмосферой. Процедура основана на итерационной подгонке параметров условия по ограниченному набору фактических данных, известных из результатов изысканий под строительство: температура на глубине нулевых амплитуд и глубина сезонного оттаивания. Обсуждаются вопросы тестирования разработанных алгоритмов и программных продуктов для целей прогноза теплового состояния оснований сооружений.

*Многолетнемерзлые грунты, теплотехнические расчеты, фазовые переходы, деятельный слой, граничные условия, стационарные решения, глубина нулевых амплитуд*

## CORRECTNESS OF FORMULATION AND SOLUTION OF THERMOTECNICAL PROBLEMS IN FORECASTING TEMPERATURE FIELD DYNAMICS IN THE FOUNDATIONS OF CONSTRUCTIONS ON PERMAFROST

J.B. Gorelik<sup>1</sup>, D.S. Pazderin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Earth Cryosphere Institute, SB RAS, P/O box 1230, Tyumen, 625000, Russia; [gorelik@ikz.ru](mailto:gorelik@ikz.ru)

<sup>2</sup>ООО “Gazpromneft–Yamal”, 8B, 50 let Oktyabrya str., Tyumen, 625048, Russia;  
[Pazderin.DS@tmn.gazprom-neft.ru](mailto:Pazderin.DS@tmn.gazprom-neft.ru)

The paper discusses correctness of choice of boundary conditions for upper and lower bounds of the rated operating conditions, along with the problem of matching the lower boundary position. Choice of boundary conditions can significantly influence results of numerical solution of the problems of forecasting the temperature field dynamics in the foundations of engineering structures in permafrost regions. It has been demonstrated by specific numerical tests that the incorrectly specified parameters of the upper boundary may lead to unreasonable cooling effect of the foundation, with the predicted thawing depth being underestimated by several times in comparison with actual one. Similarly, the “predicted” surface warming effect may not take place in reality. The wrong choice of the lower boundary position of the rated operating conditions can therefore significantly exacerbate these effects. The procedure for correct choice of parameters of the upper boundary condition for the soil surface-atmosphere contact is proposed. The procedure is based on iterative fitting of the condition parameters (and related calculation results) using a limited set of observed data – temperature at depth of zero amplitude and seasonal thaw depth – available from the construction surveys. The study also addresses the problems of testing the developed algorithms and software products for the purpose of forecasting the thermal state of the construction foundations.

*Frozen ground, thermal engineering calculations, phase transitions, active layer, boundary conditions, stationary solutions, depth of zero amplitude*

## ВВЕДЕНИЕ

Прогноз теплового состояния оснований сооружений в районах распространения многолетнемерзлых грунтов лежит в основе качественного проектирования конструкций этих сооружений [СП 25.13330-2012, 2012], контроля за их состоянием в процессе эксплуатации посредством мони-

торинговых наблюдений, а также планирования необходимых ремонтно-восстановительных мероприятий [Попов, 2005]. Значимость теплотехнического прогноза на стадии изысканий зафиксирована в [СП 11-105-97, 1999], требования к постановке задач и основные методы их численного решения

регламентированы [РСН 87-67, 1988]. Несмотря на то что методы таких прогнозов в настоящее время достаточно хорошо разработаны [Основы..., 1974; Общее мерзлотоведение, 1978; Основы..., 1999], остается ряд вопросов, которые практически не обсуждались в литературе, но важны для обеспечения необходимой точности и надежности выполняемых расчетов. Отметим также, что существующая практика сертифицирования вычислительных программ не может гарантировать качество вычислений, поскольку обеспечивает выполнение лишь некоторых формальных критериев и не затрагивает экспертизы существа применяемых методов. Такая экспертиза возможна лишь при наличии публикаций по рассматриваемым вопросам в научных изданиях, где всесторонне и детально освещаются применяемые методы, доступные для качественной проверки как рецензентами работы, так и заинтересованными читателями.

### 1. ПРОБЛЕМНЫЕ ВОПРОСЫ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ПРОГНОЗНЫХ РАСЧЕТОВ

При выполнении прогнозных расчетов у разработчиков программных продуктов могут вызывать определенные затруднения следующие аспекты проблемы: а) выбор конкретных параметров граничного условия на участках контакта грунтового массива с атмосферой; б) выбор положения нижней границы расчетной области в зависимости от длительности предполагаемого прогноза и параметров сооружения; в) характер сопряжения элементарных ячеек расчетной области с поверхностью граничного сооружения, контактирующей с грунтом; г) тестирование готового программного продукта.

#### 1.1. Выбор параметров граничного условия на участках контакта грунтового массива с атмосферой

В постановке задачи о тепловом взаимодействии сооружения с мерзлыми грунтами обычно рассматривается полубесконечный массив грунта. Ограничивающая его сверху поверхность вне контура сооружения является той границей, на которой должно быть задано необходимое условие. Если сооружение заглубленное (например, трубопровод при подземной прокладке), то это условие выставляется на всей граничной поверхности. Наиболее простое из таких условий – постоянство температуры (не зависящей от координат и времени) на границе. Эта температура имеет смысл среднегодовой температуры поверхности грунтового массива (ее не следует путать со среднегодовой температурой воздуха). При часто используемом допущении об однородном распределении начальной температуры по глубине массива среднегодовая температура поверхности должна со-

впадать со значением этой начальной температуры. Ясно, что в отсутствие сооружений такое граничное условие обеспечивает постоянство температуры на глубине нулевых амплитуд в течение любого промежутка времени (поскольку отсутствуют причины для ее изменения в массиве) и не оказывает возмущающего действия (как охлаждающего, так и нагревающего) на подстилающие слои грунта. Оно является удобным во многих задачах, где необходимо оценить воздействие сооружения на грунты и не требуется повышенная точность прогноза. Однако если роль сезонных колебаний температуры в верхнем слое грунтов оказывается значительной (например, при использовании проветриваемого подполья с соответствующими расчетами несущей способности свай) или важными являются параметры деятельного слоя (например, глубины промерзания–оттаивания при расчете касательных сил пучения), а также если интерес представляют иные процессы в верхнем слое грунтового массива, то использование данного условия может оказаться недостаточным для обеспечения необходимой точности прогноза. Для учета влияния сезонных колебаний температуры поверхности грунта наиболее часто выбирается граничное условие третьего рода

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = K_v (T_0 - T_v(\tau)), \quad (1)$$

где  $K_v$  – коэффициент теплообмена между поверхностью грунта и воздухом;  $T$  – температура грунта (в рассматриваемом одномерном случае является функцией вертикальной координаты  $y$  точек массива и времени  $\tau$ );  $T_0$  – неизвестная температура верхней границы массива грунта;  $T_v$  – температура воздуха (периодическая функция времени с периодом 1 год);  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности грунта.

Годовой ход температуры воздуха  $T_v(\tau)$  считается заданным, а в коэффициент теплообмена эффективным образом может быть включена вся совокупность факторов, которые воздействуют с поверхности. Число этих факторов, вообще говоря, весьма значительно, но их можно разбить на две группы: а) климатические факторы (годовая динамика температуры воздуха, динамика осадков отдельно в летний и зимний периоды, годовая динамика скорости ветра); б) физико-географические (ландшафтные) факторы (характер изменения уровня поверхности, типичные вариации ее наклона, расчлененность рельефа, скорости движения поверхностных вод, тип поверхностных отложений, растительный покров и др.). Для задач прогнозирования может оказаться важным характер изменения ландшафтных факторов под действием климатических, однако в данной работе этот аспект проблемы не рассматривается. В отсутствие сооружения влияние двух указанных

групп факторов на температурный режим основания является определяющим, а ведущая роль в зависимости от сочетания конкретных условий может принадлежать любому из них. Учет всей совокупности действующих с поверхности факторов имеет смысл для решения фундаментальной проблемы определения роли каждого фактора в формировании температурного режима подстилающего массива грунта [Павлов, 1984].

В природно-технической системе, где роль природного компонента, как правило, значительна и малопредсказуема, невозможно “отключить” основную массу факторов, оставив для исследования действие только одного из них. В такой ситуации определение суммарного коэффициента теплообмена для конкретного участка строительства может оказаться практически невозможным вследствие весьма значительного объема работ по выяснению вклада отдельных факторов в суммарное выражение этого коэффициента. При отсутствии процедуры ранжирования роли отдельных факторов оценить общее влияние поверхности на температурный режим основания только по нескольким, произвольно выделенным из общей совокупности (даже с учетом данных метеостанции), невозможно. По этой причине в технических задачах, в отличие от фундаментальной проблемы, упомянутой выше, параметры верхнего граничного условия должны подбираться из нескольких иных соображений, основанных, например, на достижении соответствия некоторому ограниченному набору фактических данных. Без такой процедуры результаты выполненных расчетов будут ненадежны и не могут быть признаны вполне корректными. При этом неверно заданные параметры этого условия могут приводить как к охлаждающему влиянию поверхности с понижением температуры грунта во времени (без каких-либо охлаждающих устройств), так и к повышению его температуры вплоть до оттаивания и разогрева в диапазоне положительных температур.

Таким образом, для задач инженерной геокриологии учет совокупного действия поверхностных факторов в верхнем граничном условии должен быть заменен достаточно простой и надежной процедурой. В качестве обоснования такой процедуры можно предложить следующее рассуждение. Если отвлечься от длиннопериодных колебаний температуры на поверхности массива (связанных с климатическими изменениями), то формирование фактически наблюдаемого температурного режима массива грунта в естественных условиях (т. е. в ненарушенном состоянии и при отсутствии влияния каких-либо сооружений) происходит под действием сезонных колебаний температуры воздуха и всей совокупности относительно стабильно действующих поверхностных факторов.

Важной константой, характеризующей сформировавшееся тепловое состояние грунтового массива, является температура на глубине нулевых амплитуд. Если в условии (1) подобрать такое значение коэффициента теплообмена  $K_v$ , что при заданном законе сезонного изменения температуры воздуха  $T_v(\tau)$  расчетная температура в массиве грунта (в отсутствие сооружения, но в течение проектного срока его эксплуатации) будет оставаться постоянной с необходимой точностью, то (1) может быть принято в качестве граничного условия для прогноза температурного режима грунтов (в том числе при наличии сооружения). Этим гарантируется отсутствие дополнительного влияния поверхности на грунты основания, что позволяет выделить эффект влияния сооружения на мерзлые грунты в чистом виде. Изменение расчетной температуры грунтов на глубине нулевых амплитуд в отсутствие сооружения при достаточно произвольно выбранном коэффициенте  $K_v$  (что имеет место даже в проектных расчетах, а также в некоторых публикациях по рассматриваемой проблеме) говорит об ошибочности выбранного значения этого параметра и неадекватном применении верхнего граничного условия в расчетной процедуре.

При необходимости возможно включение в тестовую процедуру иных фактических данных, например, глубины сезонного оттаивания, которая также определяется на стадии изысканий. В этом случае к значениям параметров условия (1) могут быть предъявлены более жесткие требования.

## 1.2. Выбор положения нижней границы расчетной области

Неверный выбор положения нижней границы расчетной области может существенно исказить результаты прогноза. Это связано с тем обстоятельством, что распространение тепла в грунтовом массиве описывается уравнением параболического типа, для которого имеет место бесконечная скорость распространения возмущений в рассматриваемой среде [Тихонов, Самарский, 1972]. То есть влияние тепловыделений от сооружения мгновенно распространяется на любое расстояние в глубь массива. В численных схемах обязательным является ограничение расчетной области по глубине и постановка на нижней границе соответствующего условия (по температуре или тепловому потоку). Если положение нижней границы выбрано недостаточно далеко от сооружения, которое, как правило, расположено вблизи верхней границы массива, то влияние нижнего граничного условия в течение срока эксплуатации может оказаться столь значительным, что исключит влияние сооружения вблизи нижней границы, которое должно бы следовать из точной постановки задачи, что и приведет к искажению результатов расчета.

Для оценки положения нижней границы расчетной области можно использовать результаты работы [Баренблатт, 1954], где вводится радиус теплового влияния в среде от источника тепла  $L(\tau)$ , выражение для которого в плоском случае имеет вид

$$L(\tau) = \sqrt{6\mu\tau}, \quad (2)$$

где  $\mu$  – температуропроводность грунта;  $\tau$  – проектное время эксплуатации сооружения.

Другой способ заключается в итерационном подборе такого положения нижней границы, которое уже не оказывает влияния на результаты расчета за время эксплуатации сооружения. Отметим, что определение положения нижней границы расчетной области по положению нижней точки стационарной чаши протаивания под сооружением также не является корректным, поскольку, вообще говоря, при значительной разнице между начальной температурой мерзлого грунта и точкой его фазового перехода тепловое влияние нулевой изотермы распространяется еще ниже по разрезу.

### 1.3. Характер сопряжения элементарных ячеек расчетной области с границами сооружения

Во многих задачах возникает проблема сопряжения границ контура сооружения с разбиением расчетной области на элементарные ячейки. Эта проблема обычно решается аппроксимацией границы сооружения соответствующими формами, имеющими вид многоугольников. Например, круглое сечение труб заменяется сечением многоугольника, суммарный тепловой поток, проходящий через его грани, задается равным тепловому потоку, проходящему через стенку проектируемого трубопровода. Обоснование такого способа, применимого для многих задач математической физики, можно найти в работе [Лаврентьев, Шабат, 1958, с. 217]. Примеры расчетов показывают, что температурное поле “ $n$ -угольных труб” практически совпадает с таковым для круглых труб уже на расстояниях порядка одного-двух радиусов трубы [Яницкий, 1981; Даниэлян, Яницкий, 1987; Михайлов, 2012]. Более подробное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки настоящей статьи.

### 1.4. Тестирование программного продукта

Считается (см., например, [Попов, 2005]), что хорошего совпадения результатов расчетов с данными геотехнического мониторинга по сооружению достаточно, чтобы констатировать высокое качество расчетных методов. Однако для природно-технических систем невозможно создание строго контролируемых (лабораторных) условий наблюдений. Поэтому такое совпадение может быть недолговременным либо оказаться просто случайным. Кроме того, часто разработчики инструментов расчета для подтверждения качества

своих продуктов используют данные мониторинга для ежегодного обновления начальных условий задачи, демонстрируя многолетнее соответствие результатов расчета данным мониторинга. Этим фактически осуществляется подмена долгосрочного прогноза (значимость которого максимальна на стадии проектирования сооружений, когда мониторинговая сеть еще не создана и данные наблюдений отсутствуют) совокупностью краткосрочных прогнозов. Однако ценность такого способа при уже доступных фактических данных невелика, а оценка качества расчетного продукта по ним практически невозможна. Поэтому качество расчетных методик должно быть проверено сравнением либо с точными аналитическими решениями, либо с хорошо обоснованными и проверенными приближенными решениями. При этом критерием качества долгосрочного прогноза по-прежнему остается хорошее соответствие результатов расчета данным мониторинговых наблюдений (но на весь срок эксплуатации и без ежегодной корректировки начальных условий). Корректировка начальных условий должна допускаться при наметившихся отклонениях в соответствии расчетных и наблюдаемых величин, но с одновременным тщательным выяснением их причин. При использовании хорошо обоснованных расчетных методов эти причины следует искать в недостаточном качестве исходной информации о свойствах грунтов и о скрытых (невывявленных) процессах в грунтах основания.

К числу решений, которые могут быть использованы при тестировании рабочих программ, относятся: точные стационарные решения в полубесконечном массиве [Порхаев, 1970; Кутателадзе, 1979]; одномерные решения задачи Стефана с одним и двумя фронтами, полученные при ясно сформулированных посылках в сделанных приближениях [Основы..., 1974; Общее мерзлотоведение, 1978; Горелик и др., 2014]; решения по расчету динамики фронта фазового перехода, полученные, например, методом последовательной смены стационарных состояний [Порхаев, 1970].

Решение указанных вопросов и их роль при разработке расчетных процедур проиллюстрируем на примере прогноза состояния мерзлых грунтов в основании одиночного трубопровода при подземной прокладке.

## 2. ПРОЦЕДУРА ПОДБОРА ПАРАМЕТРОВ ВЕРХНЕГО ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ И ПОЛОЖЕНИЯ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ РАСЧЕТНОЙ ОБЛАСТИ

При подземной прокладке трубопровода с температурой теплоносителя выше  $0^\circ\text{C}$  в районах распространения многолетнемерзлых грунтов неизбежно их протаивание. Если мерзлые грунты имеют повышенную льдистость и характеризуются

ся значительным коэффициентом оттаивания  $A$  (ориентировочно  $A > 0.1$ ), то осадки грунтов, как и возникающие при этом деформации самого трубопровода, будут носить необратимый характер и могут представлять опасность при его эксплуатации. Для обеспечения надежности конструкции необходимо выполнение теплотехнических расчетов взаимодействия трубопровода с мерзлыми грунтами на весь срок его эксплуатации. С учетом сезонных процессов протаивания и промерзания с поверхности грунта, а также динамики протаивания вокруг самого трубопровода задача о расчете динамики теплового состояния основания трубопровода относится к типу сложных (многофронтовых) задач Стефана. Тем не менее постановка такой задачи и методы ее решения известны [Основы..., 1974], как и примеры их конкретной реализации [Даниэлян, Яницкий, 1987; Паздерин, 2014]. При постановке и решении этих задач далее будем следовать методам, изложенным в работе [Паздерин, 2014]. Чтобы пояснить процедуру выбора параметров верхнего граничного условия, приведем здесь постановку задачи только для процессов промерзания–протаивания с поверхности массива и изменения температуры в его внутренних точках в отсутствие трубопровода.

Постановка задачи включает уравнение теплопроводности для полупространства, которое записывается в энтальпийной форме [Самарский, Вабищевич, 2003]:

$$\gamma \frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (3)$$

где энтальпия  $H(T)$  является функцией температуры и определяется с учетом тепла фазового перехода, локализованного вблизи границы раздела фаз (грунт в массиве предполагается однородным по своим свойствам):

$$H(T) = \begin{cases} \frac{\gamma_s}{\gamma} L_f + C_u T & \text{при } T \geq 0^\circ \text{C}, \\ C_f T & \text{при } T < 0^\circ \text{C}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $\gamma$ ,  $\gamma_s$  – плотности грунта и скелета соответственно;  $C_u$ ,  $C_f$  – удельная теплоемкость талого и мерзлого грунта;  $\lambda$  – теплопроводность грунта (функция температуры: в талом состоянии  $\lambda_u$ , в мерзлом  $\lambda_f$ );  $L_f = \kappa w$ ;  $\kappa = 3.34 \cdot 10^5$  Дж/кг – удельная теплота перехода вода–лед;  $w$  – весовая влажность грунта (д. ед.).

После дифференцирования по температуре и времени в левой части (3) перед производной температуры по времени образуется множитель, имеющий смысл эффективной теплоемкости грунта и содержащий  $\delta$ -функцию от температуры, для которой может быть проведена процедура сглаживания [Самарский, Вабищевич, 2003]. Для численного решения уравнения (3) постановка граничных условий на подвижной границе не требуется.

Верхнее граничное условие для уравнения (3) выбирается в форме (1). В предлагаемом подходе достаточно оценить максимально возможное значение коэффициента теплообмена от каждого из действующих в конкретных физико-географических условиях факторов и, суммируя их, записать максимально возможное значение  $K_v$ . Далее изменение величины  $K_v$  принимается от нуля до максимального значения, а конкретный выбор его величины определяется критерием наилучшего соответствия расчетных и фактических значений температуры на глубине нулевых амплитуд и глубины сезонного оттаивания. Чтобы сделать описание процедуры выбора коэффициента  $K_v$  наиболее наглядной, в данной работе будем рассматривать действие только климатических факторов, пренебрегая влиянием ландшафта (считаем поверхность массива пород горизонтальной и гладкой). Более сложные случаи теплообмена предполагается рассмотреть в последующих публикациях.

Коэффициент теплообмена  $K_v$  имеет сильную сезонную зависимость вследствие значительного влияния на теплообмен снега (в зимнее время года) и процессов конвективного теплообмена с открытой поверхностью летом. Так, при средней толщине снежного покрова 0.5 м, плотности 150–300 кг/м<sup>3</sup> и коэффициенте теплопроводности в диапазоне 0.03–0.30 Вт/(м·°C) величина этого коэффициента (оцененная по термическому сопротивлению слоя) равна 1–4 Вт/(м<sup>2</sup>·°C). Оценка его величины по ветровой составляющей теплорепереноса в летнее время (при средней скорости ветра 5–15 м/с) дает значения в диапазоне 10–40 Вт/(м<sup>2</sup>·°C). Однако в пределах заданного региона в течение сезона коэффициент меняется не столь значительно [Основы..., 1974]. Поэтому в течение летнего или зимнего сезонов он может быть определен как некоторая средняя величина, имеющая постоянное значение. Общий же коэффициент  $K_v$ , характеризующий теплообмен в течение года, может быть определен как кусочно-постоянная функция.

Начальное условие задается постоянной по разрезу температурой  $T_i < 0$  (в примерах вычисления  $T_i = -2^\circ \text{C}$ ).

Вопрос о нахождении нижней границы расчетной области целесообразно рассматривать совместно с определением параметров верхнего граничного условия, поскольку их влияние на результаты расчетов могут быть одного порядка. В качестве первого шага по выбору указанных параметров можно предложить следующую процедуру: принимая за основу некоторые предварительные оценки сезонных значений коэффициента  $K_v$  (обозначаемые как  $K_{vs}$  – летний и  $K_{vw}$  – зимний), зафиксируем эти значения. Далее выполним оценку радиуса теплового влияния  $L(\tau)$  по формуле (2). Для примера примем  $\tau = 30$  лет,

величина  $\mu$  может быть оценена по приведенным ниже характеристикам мерзлого грунта и имеет порядок  $10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Вычисления дают для  $L(\tau)$  значения 70–80 м (в зависимости от диапазона изменения  $\mu$ ). Это значение принимается в качестве ориентира для положения нижней границы расчетной области. Однако для повышения надежности последующих вычислений в первой итерации выбора этого положения лучше всего взять значение, не менее чем в 2 раза превышающее приведенную оценку радиуса влияния. Для современной вычислительной техники и при хорошо отлаженной вычислительной процедуре время решения одномерной задачи (3), (4) с граничным условием (1) не превышает нескольких минут в любом из этих вариантов. Также представляет интерес проследить влияние вида граничного условия на нижней границе на результаты расчета. Для примеров вычислений, которые рассматриваются ниже, положение нижней границы расчетной области принято на отметке  $Y = 200 \text{ м}$ , а расчеты выполнены в двух вариантах граничного условия на этой границе: а) равенство нулю теплового потока  $q_b = 0$ ; б) постоянство температуры  $T_b$  на этой границе (равной начальному значению  $T_b = -2^\circ\text{C}$ ).

Значения сезонных констант в коэффициенте  $K_v$  в первой итерации принимаются максимальными из указанных выше диапазонов ( $40 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  для лета и  $4 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  для зимнего периода), а в последующих итерациях монотонно снижаются на 0.1 от максимального значения ступенчатыми шагами: сначала летнее значение при фиксированном зимнем, затем зимнее при фиксированном летнем и т. д. Контрольными параметрами в каждом варианте расчета являются: температура на глубине 15 м (условная глубина нулевых амплитуд) и максимальная глубина сезонного протаивания. Оба параметра коэффициента  $K_v$  считаются подобранными в процедуре, если температура на глубине нулевых амплитуд меняется не более чем на  $0.1^\circ\text{C}$  в течение расчетного срока, а максимальная глубина протаивания совпадает с условно принятым фактическим значением 1.3 м. Отметим, что рассматриваемая процедура не привязана к каким-либо конкретным территориальным условиям и в данном случае имеет только методическое значение.

#### Климатические данные по метеостанции Уренгой

| Месяц   | Средняя температура воздуха, $^\circ\text{C}$ | Месяц    | Средняя температура воздуха, $^\circ\text{C}$ |
|---------|-----------------------------------------------|----------|-----------------------------------------------|
| Январь  | –26.4                                         | Июль     | 15.4                                          |
| Февраль | –26.4                                         | Август   | 11.3                                          |
| Март    | –19.2                                         | Сентябрь | 5.2                                           |
| Апрель  | –10.3                                         | Октябрь  | –6.3                                          |
| Май     | –2.6                                          | Ноябрь   | –18.2                                         |
| Июнь    | 8.4                                           | Декабрь  | –24.0                                         |

Для всех вариантов расчета характеристики грунтов приняты постоянными по разрезу (раздельно для талых и мерзлых грунтов):  $\lambda_u = 1.61 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $\lambda_f = 1.92 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $\gamma C_u = 3.39 \text{ МДж}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $\gamma C_f = 2.13 \text{ МДж}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $\gamma_s = 1030 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $w = 0.56$ . Температура начала фазового перехода  $T_f = -0.2^\circ\text{C}$ . По приведенным данным  $\mu = 0.90 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

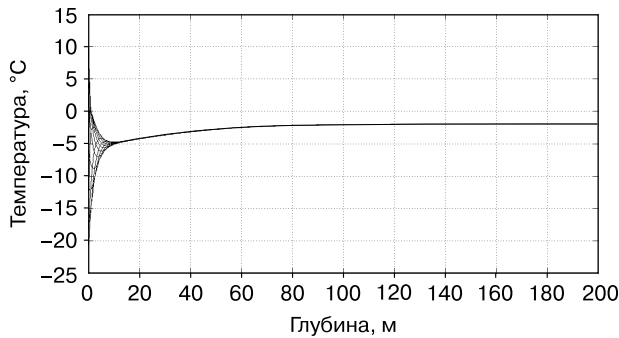
Ход температуры воздуха в течение года принят в виде кусочно-постоянной функции из среднемесячных температур. Для примеров вычислений данные приняты по метеостанции Уренгой по [СП 131.13330-2012, 2012] и представлены в таблице.

Задача решается численно. Используется конечно-разностная схема, в которой область определения искомой функции покрывается расчетной сеткой [Азиз, Сеттари, 2004]. Для получения дискретных аналогов уравнений в модели используется метод контрольного объема [Патанкар, 2003].

Для решения системы четырех уравнений (1), (3), (4) и граничного условия на нижней границе использовалась среда MATLAB.

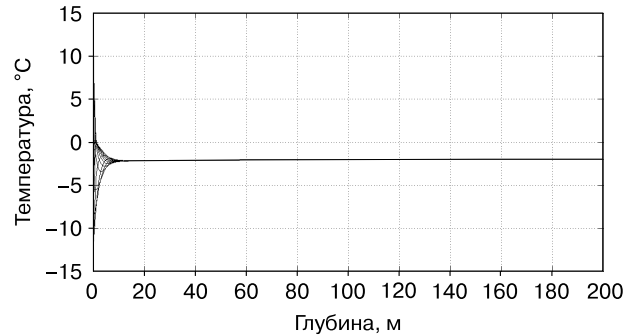
График зависимости температуры от глубины для промежуточных значений коэффициентов  $K_{vs}$  и  $K_{vw}$  (не обеспечивающих требований корректности) для нулевого потока тепла на нижней границе расчетной области приведен на рис. 1. Та же зависимость для параметров, обеспечивающих выполнение этих требований, приведена на рис. 2. Разлет кривых вблизи нулевой отметки в левой части графиков показывает поведение температуры в каждый из 12 месяцев завершающего (30-го) расчетного года, а точка их слияния на глубине примерно 15 м показывает глубину проникновения сезонных колебаний температуры (т. е. глубину нулевых амплитуд). При задании на нижней границе условия постоянства температуры  $T_b = T_i = -2^\circ\text{C}$  вместо условия  $q_b = 0$  оба варианта расчета приводят к практически идентичным распределениям температуры для соответствующих коэффициентов теплообмена (см. рис. 1, 2). Следовательно, результаты, приведенные на рис. 1 и 2, не зависят от вида нижнего граничного условия.

Результаты расчета, представленные на рис. 1, показывают, что если выбранные параметры коэффициента  $K_v$  не обеспечивают выполнение сформулированных требований, то температурная кривая ниже глубины нулевых амплитуд состоит из двух участков, имеющих разный характер поведения: первый из них (в интервале от 15 до ~80 м) имеет явно выраженный градиент температуры, который оказывает охлаждающее действие на подстилающие породы. Отметка 80 м есть расстояние, на котором начинает ощущаться тепловое влияние поверхности через 30 лет. Это примерно со-



**Рис. 1. Распределение температуры в массиве грунта в отсутствие сооружения:**

$K_{vs} = 23.2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$ ,  $K_{vw} = 2.9 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$ ,  $Y = 200 \text{ м}$ ,  $q = 0 \text{ Вт}/\text{м}^2$ ,  $T_i = -2 \text{ }^\circ\text{С}$ ,  $\tau = 30 \text{ лет}$ .



**Рис. 2. Распределение температуры в массиве грунта в отсутствие сооружения:**

$K_{vs} = 23.2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$ ,  $K_{vw} = 1.16 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$ ,  $Y = 200 \text{ м}$ ,  $q = 0 \text{ Вт}/\text{м}^2$ ,  $T_i = -2 \text{ }^\circ\text{С}$ ,  $\tau = 30 \text{ лет}$ .

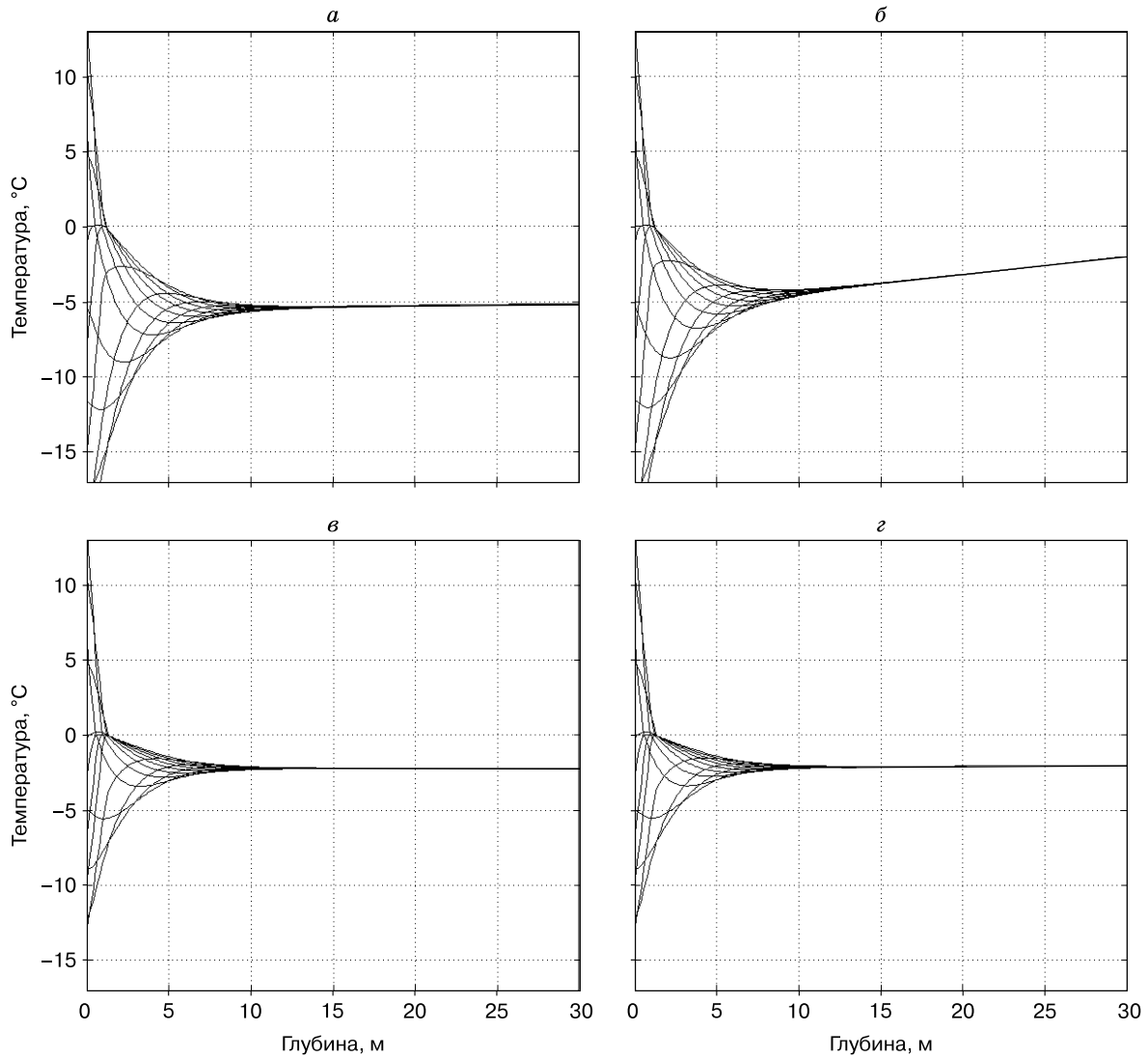
впадает с приведенной выше оценкой радиуса теплового влияния  $L(\tau)$ . С дальнейшим течением времени это влияние будет распространяться все дальше в глубь массива. Второй участок (от отметки 80 м и до нижней границы области 200 м) является безградиентным, в эту область тепловое влияние поверхности через 30 лет еще не проникло (в той мере, чтобы его можно было различить визуально). Температура вдоль этого участка остается практически постоянной, равной начальному значению  $-2 \text{ }^\circ\text{С}$ , и не зависит от вида граничного условия на нижней границе. Однако наличие первого (градиентного) участка показывает, что верхнее граничное условие с выбранными параметрами некорректно, поскольку приводит к охлаждению основания. Температура на глубине 15 м понижается до  $-5 \text{ }^\circ\text{С}$  в отсутствие каких-либо специальных устройств и не обеспечивает стабильности его состояния в естественных условиях. Нетрудно подобрать параметры теплообмена таким образом, что поверхность будет оказывать противоположное (отепляющее) действие на подстилающие породы.

Корректно подобранные параметры приводят к безградиентному распределению температуры ниже глубины нулевых амплитуд, обеспечивающему стабильность теплового состояния массива в естественных условиях. Картина этого распределения также не зависит от вида граничного условия на нижней границе области (см. рис. 2).

Для случая некорректно выбранных параметров коэффициента теплообмена и при выборе положения нижней границы расчетной области на отметках меньших, чем радиус теплового воздействия на заданный срок, влияние верхней границы на температуру подстилающих грунтов значительно усиливается. Так, при положении этой границы на отметке  $Y = 30 \text{ м}$  и при тех же прочих входных параметрах, что и в первом варианте (см. рис. 1),

происходит выхолаживание всей толщи пород ниже отметки глубины нулевых амплитуд до температуры  $-5 \text{ }^\circ\text{С}$  (рис. 3, а). Условие равенства нулю теплового потока на нижней границе способствует этому охлаждению, поскольку оно эквивалентно наличию идеальной теплоизоляции на глубине  $Y = 30 \text{ м}$ , которая полностью препятствует теплообмену с нижележащими породами, оказывающими отепляющее действие на вышележащие слои (см. рис. 1). Естественно, что при задании на нижней границе фиксированной температуры ее значение остается неизменным во времени, но внутри слоя ниже отметки глубины нулевых колебаний охлаждающий эффект поверхности также очевиден вследствие градиентного распределения температуры с минимумом (близким к  $-4 \text{ }^\circ\text{С}$ ) вблизи глубины нулевых амплитуд (см. рис. 3, б). В данном случае эффект охлаждения меньше, чем в предыдущем, вследствие принятого граничного условия, отражающего отепляющее воздействие нижележащих пород.

Для корректно выбранных параметров теплообмена результаты расчетов обеспечивают стабильность температуры в массиве пород ниже глубины нулевых амплитуд на уровне начального значения  $-2 \text{ }^\circ\text{С}$  и не зависят от вида граничного условия на нижней границе (см. рис. 3, в, г). Это означает, что при корректно выбранных параметрах поверхностного теплообмена суммарное тепловое действие поверхности на массив (проявляющееся на отметке нулевых колебаний температуры и ниже) равно нулю. Таким образом, выполненная подгоночная процедура позволяет принять для последующих расчетов температурного поля в основании сооружений для данных (модельных) территориальных условий верхнее граничное условие в форме (1) с параметрами  $K_{vs} = 23.2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$ ,  $K_{vw} = 1.16 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$ . Вместе с тем при расчете температурного поля в основании



**Рис. 3. Распределение температуры в массиве грунта в отсутствие сооружения:**

*а* –  $K_{vs} = 23.2 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{°C)}$ ,  $K_{vw} = 2.90 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{°C)}$ ,  $Y = 30 \text{ м}$ ,  $T_i = -2 \text{ °C}$ ,  $q = 0 \text{ Вт/м}^2$ ,  $\tau = 30 \text{ лет}$ ; *б* –  $K_{vs} = 23.2 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{°C)}$ ,  $K_{vw} = 2.90 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{°C)}$ ,  $Y = 30 \text{ м}$ ,  $T_i = -2 \text{ °C}$ ,  $T_b = -2 \text{ °C}$ ,  $\tau = 30 \text{ лет}$ ; *в* –  $K_{vs} = 23.2 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{°C)}$ ,  $K_{vw} = 1.16 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{°C)}$ ,  $Y = 30 \text{ м}$ ,  $T_i = -2 \text{ °C}$ ,  $q = 0 \text{ Вт/м}^2$ ,  $\tau = 30 \text{ лет}$ ; *г* –  $K_{vs} = 23.2 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{°C)}$ ,  $K_{vw} = 1.16 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{°C)}$ ,  $Y = 30 \text{ м}$ ,  $T_i = -2 \text{ °C}$ ,  $T_b = -2 \text{ °C}$ ,  $\tau = 30 \text{ лет}$ .

сооружения необходимо принять положение нижней границы расчетной области не ниже значения радиуса теплового влияния на расчетный срок эксплуатации, поскольку в этом случае поверхность массива воздействует на основание совместно с дополнительным источником тепла.

В рамках процедуры выбора параметров верхнего граничного условия в качестве начального распределения температуры может выступать достаточно произвольный вид функции температуры от глубины, удовлетворяющий условию стационарности. В частности, это может быть линия с постоянным геотермическим градиентом. В этом случае общая процедура выбора параметров теп-

лообмена останется неизменной с той разницей, что в качестве граничного условия на нижней границе расчетной области должен быть задан тепловой поток, соответствующий геотермическому градиенту. Если же начальное распределение температуры носит выраженный нестационарный характер, то для корректного выбора параметров верхнего граничного условия необходимо выполнить анализ факторов, вызывающих нестационарность этого распределения. Только после этого можно попытаться включить их действие в процедуру выбора параметров. Однако этот аспект проблемы не затрагивается в настоящем исследовании.

### 3. ПРОГНОЗ ТЕМПЕРАТУРЫ ГРУНТА В ОСНОВАНИИ ЗАГЛУБЛЕННОГО ТРУБОПРОВОДА

При расчете динамики температурного поля в основании “теплого” трубопровода приняты следующие параметры: радиус трубопровода  $R = 0.5$  м, толщина теплоизоляции  $\Delta = 0.1$  м, ее теплопроводность  $\lambda_i = 0.035$  Вт/(м·°С), глубина заложения до оси трубы 2.0 м, температура продукта  $T_p = 40.0$  °С. Начальное условие  $T_i = -2.0$  °С. В силу того что при наличии трубопровода одномерность процесса распространения тепла нарушается, необходимо рассматривать двумерную схему процесса (в каждом сечении, перпендикулярном оси трубопровода) и вводить ограничение на горизонтальный размер расчетной области. Форма области принята прямоугольной при ширине  $X = 120$  м и глубине  $Y = 200$  м. На нижней границе, как и на боковых границах, принято условие  $q_b = 0$ . Расчетный срок – 30 лет.

Для данной задачи уравнение теплопроводности (3) справедливо во всем полупространстве, за исключением внутренности круга, соответствующего поперечному сечению трубопровода. Дополнительное граничное условие на внутренней стенке трубы записывается как постоянство температуры по периметру поперечного сечения и равенство ее температуре  $T_p$ . Учет теплоизоляции осуществляется с помощью формул стационарной теплопередачи через цилиндрические стенки. В итоге это соотношение имеет вид граничного условия третьего рода с заданным коэффициентом теплопередачи ( $K_i$ ):

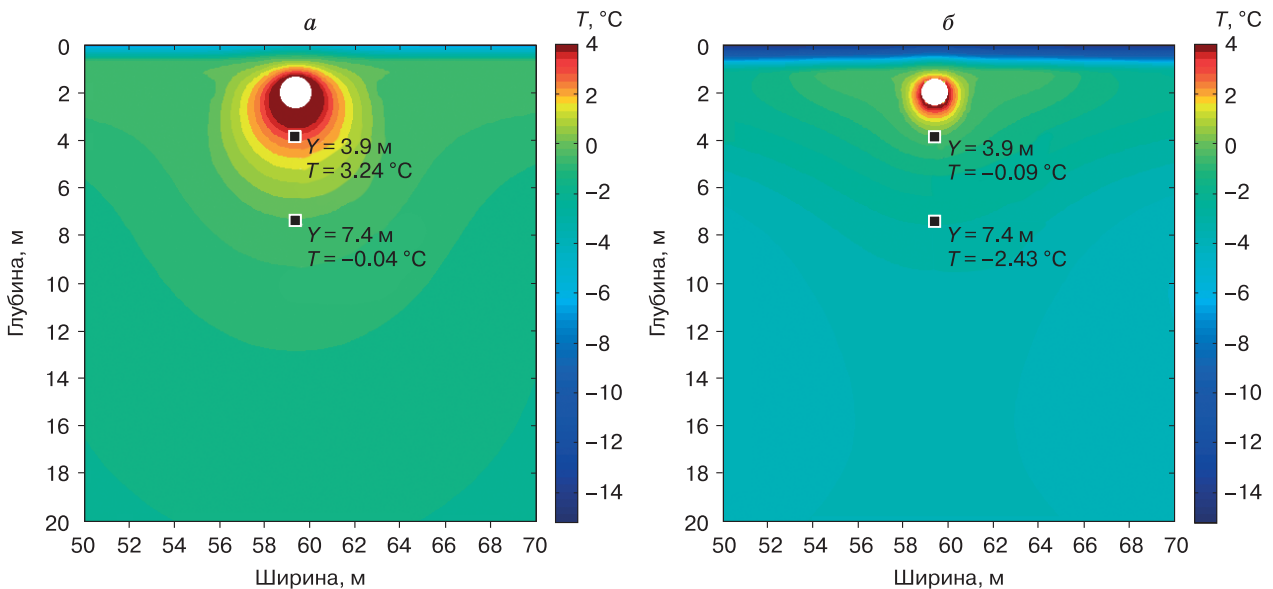
$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R+\Delta} = K_i (T_0 - T_p),$$

$$K_i = \frac{\lambda_{ii}}{R \ln((R+\Delta)/R)},$$

где  $r$  – радиальная координата точек грунта в локальной цилиндрической системе, связанной с центром трубы;  $T_0$  – неизвестная температура грунта на контакте с внешней границей теплоизоляции.

Для сопряжения периметра трубы с ячейками расчетной области использована аппроксимация круглого сечения 12-угольником.

Результаты расчетов для двух вариантов значений параметров коэффициента теплообмена из условия (1), которые использованы в п. 2, приведены на рис. 4, а, б для декабря 30-го года. Для наглядности на рисунках представлен фрагмент расчетной области в масштабе, соответствующем истинным размерам  $20 \times 20$  м, содержащий поперечное сечение трубопровода. Из их сравнения следует, что некорректно выбранный коэффициент существенно занижает расчетные температуры грунтов. В численном выражении это показано значениями температур в двух точках грунта (одинаковых для обоих вариантов). Соответственно, глубина протаивания под трубой с некорректно заданным коэффициентом оказывается сильно заниженной – около 3.9 м (см. рис. 4, б) в сравнении с корректным вариантом его задания – около 7.4 м (см. рис. 4, а). Почти двукратное занижение расчетного значения глубины протаивания под сооружением может привести к применению неадек-



**Рис. 4. Температурное поле грунта в основании трубопровода на конец 30-летнего периода:**

а –  $K_{cs} = 23.2$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С),  $K_{cw} = 1.16$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С); б –  $K_{cs} = 23.2$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С),  $K_{cw} = 2.9$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С).

ватных технических решений при его проектировании и чревато серьезными осложнениями при эксплуатации.

#### 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ

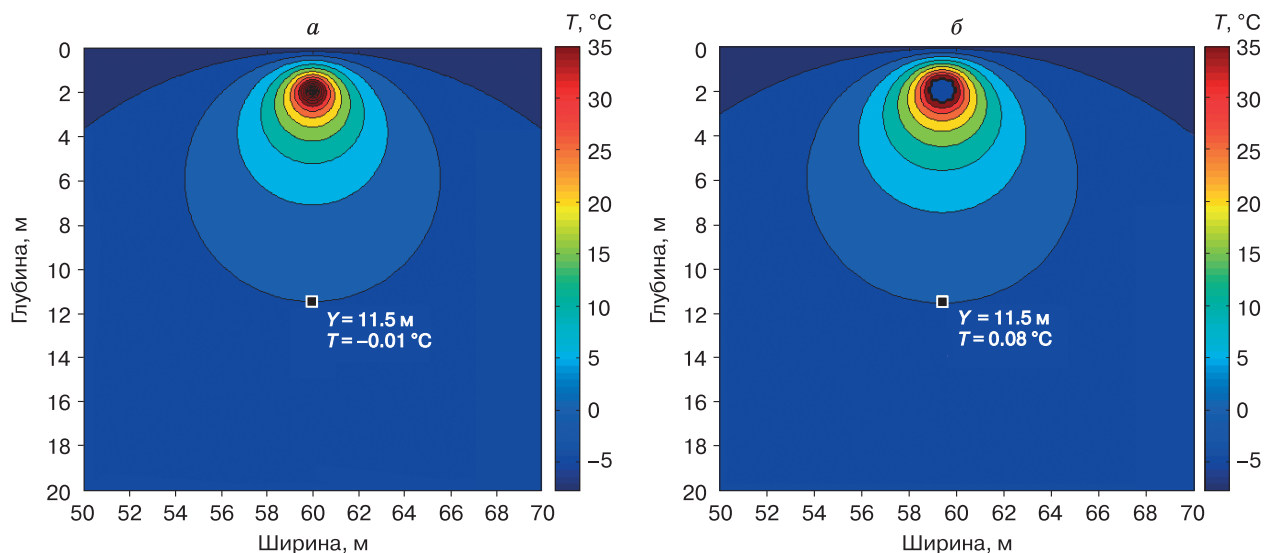
Приведем простой вариант тестирования разработанного метода при корректно заданном верхнем граничном условии, который заключается в сопоставлении его результатов на максимально длительный срок с результатами расчета стационарного (т. е. предельно возможного) положения границы протаивания под трубопроводом. Одним из условий корректности расчетной схемы является то, что по любому из направлений, исходящих из центра трубы и не пересекающих слой сезонного оттаивания, вычисленный радиус протаивания в каждый момент времени не должен превышать его стационарного значения. Учитывая, что радиус протаивания по любому из направлений есть монотонно возрастающая функция времени, желательно провести такое сопоставление для максимально длительного периода времени, насколько возможно по техническим и экономическим соображениям. Формулы для расчета стационарного температурного поля вокруг заглубленного трубопровода при постоянной по разрезу температуре грунта, совпадающей с температурой на его верхней поверхности, определяются решением Форхгеймера [Порхаев, 1970; Кутателадзе, 1979].

При тех же исходных данных, что использованы в расчетах выше, стационарное температурное поле вокруг трубопровода имеет вид, приведенный на рис. 5, а. Численное решение, соответствующее условиям расчета по рис. 3, а, но на срок от

30 лет и более, показывает, что полученный таким способом радиус протаивания всегда меньше значения, приведенного на рис. 5, а. Скорость его увеличения монотонно снижается со временем, а при 100-летней эксплуатации почти точно совпадает (см. рис. 5, б) со своим предельным значением (см. рис. 5, а). Расхождения (менее 2 %) могут быть обусловлены точностью определения положения фазовой границы внутри отдельной ячейки (размером  $0.1 \times 0.1$  м), на которые разбита расчетная область. Другим способом проверки корректности разработанной расчетной процедуры может быть сравнение результатов численных расчетов с результатами приближенных решений по квазистационарным моделям [Порхаев, 1970], которые хорошо зарекомендовали себя в практике инженерных расчетов [Горелик, 1983]. Оценки показывают удовлетворительную сходимость результатов расчета и при таком способе сравнения.

#### ВЫВОДЫ

1. Решение задач прогноза динамики температуры в основании сооружений, возводимых на многолетнемерзлых грунтах, связано с учетом влияния как техногенной, так и природной составляющих, оказывающих влияние на процесс теплопереноса. При этом число действующих с поверхности массива грунта природных факторов, вообще говоря, весьма значительно, а определение суммарного коэффициента теплообмена, отражающего совокупное действие всех факторов, для конкретного участка строительства может оказаться практически невозможным. С применением численных методов возникает проблема выбора положения нижней границы расчетной об-



**Рис. 5. Результаты двух способов расчета температурного поля вблизи заглубленного трубопровода:**  
а – стационарное решение (по Форхгеймеру); б – численный расчет температурного поля в основании трубопровода на срок эксплуатации  $\tau = 100$  лет.

ласти. Все это существенно осложняет создание качественных расчетных методов. При решении проблем инженерной геокриологии необходимо предложить достаточно простые и надежные процедуры решения этих вопросов.

2. Предложена итерационная процедура подгонки параметров верхнего граничного условия и выбора положения нижней границы расчетной области путем согласования результатов расчета с ограниченным набором фактических данных, определяемых еще на стадии изысканий. В качестве этих данных приняты значения температуры на глубине нулевых амплитуд и глубины сезонного оттаивания. Этим задается способ определения всех необходимых входных параметров для постановки задач теплотехнического прогноза при корректном учете природных факторов.

3. Сравнением результатов расчета в двух вариантах (с параметрами граничного условия и положением нижней границы, удовлетворяющими условиям корректности и не удовлетворяющими этим условиям) показано, что применение некорректно заданных параметров может приводить к значительным охлаждающим (либо отепляющим) воздействиям на грунты основания, которые не имеют места в реальности. Различие в результатах расчетов глубины оттаивания под сооружением может достигать кратного значения. Это способно привести к применению неадекватных технических решений при проектировании и вызвать серьезные осложнения при эксплуатации сооружения.

4. Существующая практика сертифицирования вычислительных программ не может гарантировать корректность и качество вычислений, поскольку обеспечивает выполнение лишь некоторых формальных критериев и не подвергает экспертизе существо применяемых методов. Для проверки качества разрабатываемых методов процедура тестирования должна стать обязательной.

*Авторы считают приятным долгом выразить благодарность профессору, д-ру техн. наук Хрусталеву Льву Николаевичу за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания.*

*Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ ведущих научных школ (НШ-9880.2016.5).*

## Литература

- Азиз Х.** Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. Москва; Ижевск, Ин-т компьютер. исследований, 2004, 416 с.
- Баренблатт Г.И.** О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук, 1954, № 9, с. 35–49.
- Горелик Я.Б.** Динамика протаивания грунтов под сооружениями // Проблемы нефти и газа Тюмени. Тюмень, ЗАПСИБНИГНИ, 1983, вып. 58, с. 37–38.
- Горелик Я.Б., Романюк С.Н., Селезнев А.А.** Особенности расчета теплового состояния мерзлых грунтов в основании факельной установки // Криосфера Земли, 2014, т. XVIII, № 1, с. 57–64.
- Даниэлян Ю.С.** Тепловые расчеты сложных систем заглубленных трубопроводов / Ю.С. Даниэлян, П.А. Яницкий. Тюмень, Гипротюменнефтегаз, 1987, 70 с.
- Кутателадзе С.С.** Основы теории теплообмена / С.С. Кутателадзе. М., Атомиздат, 1979, 415 с.
- Лаврентьев М.А.** Методы функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. М., Физматгиз, 1958, 678 с.
- Михайлов П.Ю.** Динамика тепломассообменных процессов и теплосилового взаимодействия промерзающих грунтов с подземным трубопроводом: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тюмень, 2012, 21 с.
- Общее мерзлотоведение** / Под ред. В.А. Кудрявцева. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, 464 с.
- Основы мерзлотного прогноза при инженерно-геологических исследованиях** / Под ред. В.А. Кудрявцева. М., Изд-во Моск. ун-та, 1974, 432 с.
- Основы геокриологии. Ч. 5. Инженерная геокриология** / Под ред. Л.Н. Хрусталева, Э.Д. Ершова. М., Изд-во Моск. ун-та, 1999, 518 с.
- Павлов А.В.** Энергообмен в ландшафтной сфере Земли / А.В. Павлов. Новосибирск, Наука, 1984, 255 с.
- Паздерин Д.С.** Тепловое взаимодействие горячего подземного трубопровода с грунтом и сезонно-действующими охлаждающими устройствами // Нефть. хоз-во, 2014, № 5, с. 102–104.
- Патанкар С.В.** Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах: Пер. с англ. Е.В. Калабина; под ред. Г.Г. Янькова. М., МЭИ, 2003, 312 с.
- Попов А.П.** Управление геотехническими системами газового комплекса в криолитозоне. Прогноз состояния и обеспечение надежности: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Тюмень, 2005, 49 с.
- Порхаев В.Г.** Тепловое взаимодействие зданий и сооружений с мерзлыми грунтами / В.Г. Порхаев. М., Наука, 1970, 208 с.
- РСН 87-67.** Республиканские строительные нормы. Инженерные изыскания для строительства. Составление прогноза изменений температурного режима вечномерзлых грунтов численными методами. М., Госстрой РФ, 1988, 43 с.
- Самарский А.А.** Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. М., Едиториал УРСС, 2003, 784 с.
- СП 11-105-97, 1999.** Инженерно-геологические изыскания для строительства. Ч. IV. Правила производства работ в районах распространения многолетнемерзлых грунтов. М., Госстрой РФ, 1999, 25 с.
- СП 25.13330-2012.** Основания и фундаменты на вечномерзлых грунтах. М., Минрегионразвития, 2012, 140 с.
- СП 131.13330-2012.** Строительная климатология. М., Минрегионразвития, 2012, 108 с.
- Тихонов А.Н.** Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М., Наука, 1972, 736 с.
- Яницкий П.А.** Расчет теплового взаимодействия коридоров коммуникаций с мерзлыми грунтами // Нефтепромысловое строительство. М., ВНИИОЭНГ, 1981, с. 13–15.

*Поступила в редакцию  
9 августа 2016 г.*