ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2011, том 47, № 4, с. 22–36

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЛЕОНИДА ВИТАЛЬЕВИЧА КАНТОРОВИЧА

ГЕНИЙ – ОН ГЕНИЙ, ПОТОМУ ЧТО ГЕНИЙ

© 2011 г. В.Н. Лившиц

(Москва)

ВВЕДЕНИЕ

Приближается 19 января 2012 г. – столетие со дня рождения Великого Человека и Выдающегося Ученого нашей страны – Леонида Витальевича Канторовича. Его мирового уровня научные заслуги в математике и экономике общеизвестны и общепризнанны – их автора удостоили наиболее престижными отечественными и зарубежными научными званиями, наградами и премиями, в том числе за математические достижения – Государственной (Сталинской) премией в 1949 г. за ставшие уже классическими результаты в области функционального анализа (теория полуупорядоченных K-пространств, вычислительная математика и др.), за достижения в сфере экономической науки (создание теории и методов наилучшего – оптимального использования ресурсов, включая макро- и микромоделирование, эффективность инвестиционных решений и др.), Ленинской премией – в 1965 г. и Премией памяти Альфреда Нобеля – в 1975 г.

Но его талант и деятельность были более многоплановыми, и, даже ограничиваясь математикой и экономикой, следует отметить, как минимум, его заслуги в создании методов линейного программирования и различных алгоритмов нелинейной оптимизации, да и общей математической и экономической теории и моделей формирования оптимальных плановых и проектных производственных решений, включая необходимый инструментарий, нашедших широкое применение во всех отраслях и сферах деятельности и различных типах экономик. В частности, гораздо менее признаны, хотя узким профессионалам, конечно, они хорошо известны, заслуги Леонида Витальевича в развитии теории и практики использования транспортной науки. Далее кратко освещается именно эта его роль.

Что думают коллеги о гениальности Леонида Витальевича?

Сначала – несколько слов о корректности названия статьи и отношения к нему юбилейных событий и юбиляра. О гениальности Л.В. Канторовича говорят не только сухие исторические факты его личной биографии[1], но и упоминают многие известные ученые, и не только они.

[1] В 14 лет он заканчивает среднюю школу, в 18 лет – математико-механический факультет ЛГУ, тогда же выступает с докладом (совместно с Е.М. Ливенсоном) на заседании Московского математического общества, в 20 лет как профессор читает лекции студентам, в 22 без защиты диссертации ему присваивается степень доктора физико-математических наук и о полученных им глубоких результатах в области принципов дифференциального исчисления говорит в пленарном докладе Н.Н. Лузина на математическом съезде 1934 г. и т.д.

С гениальными людьми человеческая память часто связывает их нетривиальные жизненные поступки, которые нередко облекались в мифическую форму. Так, Александр Македонский, по преданию, укротил бешеный нрав Буцефала, догадавшись, что огромный конь боится своей мощной тени, и успокоил его, выведя против солнца; кажется, он же развязал Гордиев узел, разрубив его мечом, и др. Колумб сумел поставить куриное яйцо, взломав немного его скорлупу, и т.д. Есть и опирающееся на факты предание о решении Л.В. Канторовичем такого же рода нетривиальных жизненных проблем. Приведем одну из полушуточной сферы. Было это, кажется, в 1981 г., когда по завершении Всесоюзного симпозиума по проблемам развития производственной инфраструктуры в г. Лобня (Московской области) оргкомитет решил наградить призом самого "сообразительного участника", который больше всего съест на заключительном банкете. Определять его решили так: у входной двери в банкетный зал поставили грузовые весы, и всех участников банкета в обязательном порядке дважды взвешивали и записывали их вес – первый раз при входе в зал в начале банкета и второй – по окончании банкета и по разности весов устанавливали рейтинг. Идея (кажется, ее автором был Сергей Сергеевич Артемьев) не всем понравилась, и два или три человека даже, кажется, отказались участвовать в банкетном удовольствии, не желая взвешиваться и демонстрировать свои данные и гастрономические успехи. Леонид Витальевич себе в удовольствии весело провести вечер, потанцевать с девушками, что он любил и хорошо умел делать, не отказал, но и взвешиваться не стал, а подошел ко входу и неожиданно для его возраста и комплекции ловко перепрыгнул через весы, без помех пройдя в зал. Правда, в должной мере отдавая дань вкусной пище, ел он немного и вряд ли мог бы претендовать на приз.

Вспомним в связи с этим сначала недалекое прошлое. Примерно 10 лет назад, перед предстоявшим тогда Юбилеем – 90-летием со дня рождения Л.В. Канторовича – многие известные ученые нашей страны – в большинстве своем математики и немного экономисты, в свое время тесно контактировавшие с Леонидом Витальевичем, написали о нем свои воспоминания – о Человеке и Ученом, которые потом были опубликованы в объемистом сборнике (Леонид Витальевич, 2002), выпущенном, правда, явно недостаточным тиражом (1000 экз.). Сегодня, накануне еще более Великого Векового Юбилея, перечитывая этот сборник, невольно бросается в глаза несколько непривычный даже для таких изданий лейтмотив характеристики Юбиляра. Слишком часто используются слова "гений", "гениальность ", "гениальный" и т.п., причем нередко это встречается и в воспоминаниях ученых, обычно скупых на такие характеристики коллег. Например, выдающийся математик, академик, И.М. Гельфанд пишет (там же, с. 161): "В чем я усматриваю **гениальность** Леонида Витальевича? В очень простой вещи – он совмещает в себе гуманитарную и математическую культуры. Почему это существенно? Если взять отдельно каждую половину его творчества, то это работы и совершенно замечательного математика, о чем я могу компетентно судить сам, и выдающегося экономиста. Последние удостоены Нобелевской премии, поэтому нет необходимости доказывать, что это замечательные работы. Однако не эти две отдельные половины творчества Леонида Витальевича являются основанием для моего утверждения. И Нобелевских лауреатов, и замечательных математиков много. Но что существенно и необходимость чего так остро осознается сейчас – это некое слияние культур. Мы все страдали и до сих пор страдаем от технократического отношения к жизни. Может быть, я и ошибаюсь, но мне кажется, что рационализм французских энциклопедистов кроме большой просветительской пользы нанес и большой вред культуре, проистекающий от утверждения, что математика есть царица наук и что всякое научное продвижение есть математизация… Но при этом совершенно игнорировались потребности таких дисциплин, как биология, социология, лингвистика (до некоторой степени), экономика, психология… Мы умеем делать атомные бомбы, совершать межпланетные путешествия, но не можем как следует разобраться ни в социальных, ни в экологических, ни в экономических проблемах. Лишь единицы в двадцатом веке оказались способны на этот синтез математической и гуманитарной культуры. Я могу назвать Андрея Николаевича Колмогорова, который воспринимал мир как единое целое. Понимал это на некотором, быть может, более наивном уровне, с большим технократическим давлением на себя, и Джон фон Нейман. В области социальных наук, чисто гуманитарных, такой синтез осуществил Леонид Витальевич Канторович. Говоря "синтез", я хочу сказать, что обе половины творчества Леонида Витальевича не есть две стороны его личности, две, независимые друг от друга его профессии – будто он иногда математик, а иногда специалист по гуманитарным наукам. Подобные сочетания встречаются часто, но не о них речь. А речь идет о единой внутренней одухотворенности, которая одинаковым образом сказывается во всем его творчестве. Не случайно, например, работа, за которую он получил Нобелевскую премию, являясь существенным вкладом в экономическую науку, в то же время является следствием его работ по функциональному анализу, по выпуклым телам, следствием того подхода, которому мы как раз учились в функциональном анализе".

Если перевести эти мысли на язык системного мышления, то, хотя не со всеми высказанными "деталями" (например, о вреде французской математизации, о ее такой роли в биологии, социологии и т.д.) можно полностью согласиться, но по "гамбургскому счету" все правильно и резюме вполне корректно обозначить следующим образом: "Гениальные труды Л.В. Канторовича заложили на базе современной математической философии и ее инструментария основы методологии системного анализа и синтеза сложных процессов, происходящих во взаимодействующих естественных и искусственных, технических, социальных, гуманитарных и т.д. подсистемах[2]. И это, безусловно, **гениальный** вклад и в науку, и в потенциал человеческой цивилизации".

С воспоминаниями И.М. Гельфанда, по сути, тесно перекликаются (там же, с. 115–126) мысли академика А.Г. Аганбегяна, бывшего в 1960-е годы, когда Л.В. Канторович работал в Институте математики СО АН СССР, в Новосибирском Академгородке директором Института экономики и организации промышленного производства, тесно сотрудничавшим с Институтом математики и особенно с Л.В. Канторовичем и сотрудниками руководимого им подразделения.

---

[2] Именно по этой причине автор настоящей статьи свою последнюю, вышедшую совместно с С.В. Лившиц, монографию (Лившиц В.Н., Лившиц С.В., 2011) по системному анализу экономики посвятил светлой памяти Л.В. Канторовича.

В частности, А.Г. Аганбегян пишет (там же, с. 129): "…есть просто хорошие ученые, есть талантливые – это сразу видно, а есть ученые, которых можно назвать гениальными. В своей жизни я встретил только одного гениального ученого – это Л.В. Канторович. И так я считаю только по его заслугам перед экономической наукой – не мне судить, что он сделал в математике, хотя слышал, что он там много выдающегося сделал, но в экономике он свершил настоящий переворот. Я попытаюсь это популярно объяснить. Меня всегда поражало, что человек, не имевший систематического экономического образования, не связанный с решением экономических проблем даже эпизодически, – профессиональный математик, причем не прикладник, а очень крупный теоретик, исключительно глубоко разбирался в экономике, видел причины многих явлений – глядел вглубь. Его суждения иногда были парадоксальны, странны, так что многие относились к его высказываниям, как к глупости, говорили, что он не понимает, что говорит. На самом деле те, кто так думал, не понимали сути проблем, которые пытались исследовать. Он, возможно, благодаря своему математическому мышлению или природному складу ума как-то проникал внутрь проблем, и это давало блестящий результат". Опять можно оспорить некоторые высказанные детали – например то, что Л.В. Канторович, фактически перестроивший основы вычислительной математики, поставивший ее на прочную базу функционального анализа (Канторович, Акилов, 1959), якобы не был прикладником. Но в целом опять все правильно – Леонид Витальевич своим гениальным системным взглядом и анализом проникал в то, что при традиционном экономическом анализе не видно было на поверхности – так было и при формировании содержания и уровней рентных оценок, и при корректном определении цен на ресурсы и продукцию, и при построении процедур оценки эффективности, установления государством ключевых параметров (норм эффективности, нормативов приведения разновременных затрат и результатов и т.д.). Все это вместе с работами его единомышленников (Лурье, 1964; Новожилов, 1968; и др.) позволило разработать гораздо более совершенную систему экономических расчетов эффективности использования ресурсов и деятельности предприятий, и с соответствующими предложениями очень патриотично настроенный Л.В. Канторович (лично и от имени ЛГУ) неоднократно обращался и в ЦК КПСС, и в Правительство СССР, Госплан, ЦСУ и др. (соответствующие письма Л.В. Канторовича И.В. Сталину, В.М. Молотову, Г.М. Маленкову и т.д. приведены в (Леонид Витальевич, с. 310–414) и относятся как к периоду ВОВ, так и к послевоенному).

Нередко и во время жизни Леонида Витальевича, и позднее многие наши экономисты, особенно ортодоксального образа мышления и профессионально занимавшиеся политэкономией, пытались представить работы Канторовича как не совместимые с марксизмом или даже как его опровержение, а деятельность отдельных сотрудников ЦЭМИ АН СССР, да и всего ЦЭМИ в целом, по применению математических методов в макроэкономических исследованиях чуть ли не как идеологическую антисоциалистическую диверсию. Конечно, такие прогрессивные экономисты как старшего поколения (А.Л. Лурье, В.В. Новожилов и др.), так и "младшего" поколения (Н.Я. Петраков, В.Г. Гребенников, О.С. Пчелинцев, С.С. Шаталин, В.Н. Богачев и др.), так не думали и в своих исследованиях и публикациях старались дать объективное представление о месте, сфере применимости и полезных направлениях развития как политэкономических положений классиков марксизма-ленинизма, так и разработанной Л. Канторовичем теории. В свое время в журнале "Вопросы экономики" в конце 60-х годов прошла бурная и, мне кажется, не очень полезная дискуссия по этому поводу ведущих политэкономов Института экономики и ЦЭМИ АН СССР, хорошо высветившая позиции, хотя, правда, их не сблизившая. Тем не менее и после этой дискуссии вплоть до сегодняшнего дня вопросы такого рода иногда возникают. Так, совсем недавно во время традиционного интервью, проводимого В.В. Познером, 22.05.2011 г. известный российский экономист Е.Г. Ясин на вопрос В.В., как же он (Ясин), будучи советским экономистом и д.э.н., а значит, и мысливший в рамках марксистского представления об экономических процессах, вдруг стал сторонником рыночной экономики. Ясин подтвердил, что так и было, а его трансформация произошла после того, как он прочел книгу Л. Канторовича "Экономический расчет…" с изложением основ теории оптимального планирования. Странновато немного, тем более, что, как следует из высказываний самого Л. Канторовича, он никогда не критиковал работы К. Маркса и относился к ним с уважением. Помнится, как он искренне был расстроен, и не только из опасений возможных неприятностей, когда появилась в американской печати нашумевшая статья Кембелла по существу с вопросом "Кто прав, Маркс или Канторович?". Да и в последние месяцы жизни, в подготавливаемом им для выступления в Московском математическом обществе докладе “Мой путь в науке” с его слов сын В.Л. Канторович записал: “Многих удивляет, как это вдруг случилось, что я стал экономистом. Нужно сказать, что некоторый интерес к экономике, к экономическим решениям у меня всегда был. Например, я с большим интересом слушал лекции по политэкономии, которые нам читал на третьем курсе А.А. Вознесенский, в последующем ректор университета, брат известного экономиста, председателя Госплана, члена Политбюро Н.А. Вознесенского. Я часто подходил к нему после лекций с вопросами. Марксова теория капиталистического капитала, в особенности в части, относящейся к третьему тому “Капитала”, выглядела научно стройной и содержательной. Экономика социализма нам тогда как будто не читалась”. Что же касается полезности и целесообразности использования математики в экономике, то в своей лекции в Шведской Академии наук в связи с присуждением ему в 1975 г. Премии памяти Альфреда Нобеля Л.В. Канторович четко сформулировал свое мнение: “Я смотрю оптимистически на возможность широкого применения математических методов в экономике, в особенности оптимизационных методов в управлении экономикой на всех уровнях. Нет сомнения в возможности значительного повышения экономической работы, лучшего использования ресурсов, повышения роста национального дохода и жизненного уровня за счет этого. Трудности моделирования и создания необходимой информации могут быть преодолены обогащением арсенала используемых средств, в результате новых оригинальных исследований в экономике, дальнейшего развития математического аппарата, техники, а также сочетания этих средств с интуицией и опытом человеческого разума”.

Интересный случай нетривиальности анализа (а может быть, и интуиции) Л.В. Канторовича, происшедший на ежегодной Шаталинской школе-семинаре, приводит в том же сборнике талантливый не только научный работник, но и музыкант и известный бард С.В. Чесноков (с. 228). Он пишет, что было это уже на закате брежневской эпохи, и выступавший с докладом Л.В. Канторович “высказал предположение, что оптимизационные подходы могут стать основой для моделирования социальных процессов”. С. Чесноков выразил сомнение, так как, по его мнению, в этих условиях “объектом моделирования здесь становится само формирование критериев, которые множественны и противоречивы… и в этих условиях применимость методов нахождения максимума или минимума целевой функции на выпуклом многограннике принципиально ограничена. Леонида Витальевича задела моя горячность. Он очень внимательно посмотрел на меня, но возражать не стал”. Однако, продолжает С. Чесноков, “…прошло несколько лет и появилась возможность поставить задачу о расширении силлогистики Аристотеля… Каково же было мое удивление и восхищение прозорливостью Леонида Витальевича, когда выяснилось, что математический аппарат, ведущий к решению проблемы, основывается на идеях линейного программирования, выдвинутых и обоснованных Канторовичем! Непредвиденная новая жизнь древнейшей логической системы, имеющей самое непосредственное отношение к устройству естественного языка, а значит, и к социальным процессам, оказалась возможной благодаря человеку, создавшему фундамент современной математической экономики. Да, сказал я себе: когда слушаешь **гения**, не спеши думать, что понимаешь его, чтобы потом не пришлось жалеть. Я передал работу Леониду Витальевичу с изложением полученных результатов и принес извинения за неуместную поспешность в своих суждениях”.

Следует заметить, что в каком-то смысле похожая “история” произошла и с автором настоящей статьи. Достаточно полно она изложена в (Леонид Витальевич, 2002, с. 184–190), и поэтому приведу оттуда лишь некоторые фрагменты, имеющие непосредственное отношение к деятельности Л.В. Канторовича в области транспорта и транспортной науки и одновременно представляющие хорошо характер этого замечательного человека.

Знакомство

Лично я познакомился с Леонидом Витальевичем в 1967 г. в Новосибирске летом, хотя, конечно, о его выдающихся математических работах слышал намного раньше, еще в студенческие 1940-е годы, обучаясь в Московском энергетическом институте и, тем более, обучаясь в конце 1960-х на мехмате МГУ. В Новосибирске тогда я вместе со своим коллегой по работе в Институте комплексных транспортных проблем при Госплане СССР (ИКТП) Э.И. Позамантиром находился в командировке, принимая участие в проводившейся в Академгородке Институтом экономики и организации промышленного производства (ИЭ и ОПП СО АН СССР, директор А.Г. Аганбегян) Всесоюзной конференции по применению экономико-математических методов. Тогда такие конференции (к сожалению, в отличие от настоящего времени) были очень популярны и часто проводились в разных городах Союза. Охватывали они широкую тематику, упоминаемая же мною была посвящена проблемам оптимизации отраслевого планирования, наиболее важному и интенсивно разрабатываемому тогда направлению. Наши с Э.И. Позамантиром доклады были посвящены вопросам моделирования транспорта. В частности, я излагал предложения по учету характеристик транспорта в моделях оптимального размещения и развития производства – тематика, которой в то романтическое для советского экономико-математического направления время занимались многие институты в стране, в том числе и ИЭ и ОПП, ИКТП и др. Опирались исследования по оптимизации на труды наших корифеев – А.Л. Лурье, В.В. Новожилова и др., но более всего – Л.В. Канторовича. Его Великая Книга "Экономический расчет наилучшего использования ресурсов", изданная АН СССР в 1959 г., хотя в основном написана автором была еще до войны, являлась настольной для всех, кто занимался применением математики в экономике и вел исследования в этой области. Практические же оптимизационные расчеты на ЭВМ проводились методами линейного программирования, основой которых также были довоенные работы Л.В. Канторовича, приоритет их к тому времени был бесспорен, в том числе отмечен и в основополагающей монографии Дж. Данцига.

По существу в каждом докладе на конференции упоминалось имя Л.В. Канторовича. Для нас (Э. И. Позамантира и меня) это имя было очень уважаемо еще и потому, что Леонид Витальевич был автором и наиболее важных пионерных работ по математическим методам оптимизации транспортных потоков, успешно применявшихся в ИКТП и развивавшихся там применительно к автомобильному и железнодорожному транспорту.

При оптимизации отраслевого и регионального развития (а это были в то время ключевые задачи для ИЭ и ОПП и сотрудничавшего с ним Института математики СО АН СССР, в котором тогда в 1967 году работал Леонид Витальевич) существенным фактором являлся уровень транспортных затрат на перевозки производственных ресурсов и готовой продукции. Особенно это было важно для массовых потоков сырьевых и топливно-энергетических ресурсов. Л.В. Канторович тогда выдвинул и разрабатывал идею перевозки в центр страны огромных объемов (до 0,5–1,0 млрд т в год) дешевого угля Канско-Ачинского месторождения, и понятно, что проблема транспортных затрат, или, как тогда ее называли, расценки сети, его очень интересовала и в научном, и, особенно, в практическом плане. Им тогда (вместе с А.И. Журавелем из НИИЖТа) были выполнены исследования и расчеты затрат на транспорт, исходя из их расценки как дополнительных (предельных) величин, что непосредственно вытекало из созданной Л.В. Канторовичем ранее общей концепции оптимального планирования. Вместе с тем при расценке железнодорожной сети надо было учесть много профессиональных железнодорожных "деталей", и, возможно по этой причине, Л.В. Канторович передал нам, работающим в ИКТП, приглашение зайти к нему в Институт математики поговорить, что мы и радостно сделали, так как познакомиться нам очень хотелось.

Встреча эта продолжалась около часа, мы обсудили серьезно существо вопроса, но запомнилось не только это, но и непринужденная атмосфера разговора, спокойное отношение Л.В. Канторовича к контраргументам, выдвигавшимся нами, исследователями гораздо более юными, находящимися на существенно более низком общенаучном уровне. Порой Л.В. Канторович вел дискуссию в шутливом тоне. Запомнился такой эпизод. Как-то в ответ на мое возражение по какой-то методической "детали" он сказал: "Знаете, Вениамин Наумович, разные люди мои мысли ухватывают по-разному – одни понимают их сразу; другим надо три года; третьим не хватит и всей жизни, чтобы понять. Вы человек сообразительный, думаю, вам десять лет хватит".

Л.В. Канторович и защита моей диссертации

Следующая встреча наша состоялась при иных обстоятельствах, для меня несколько трагикомических или, по крайней мере, не очень простых. Леонид Витальевич без всякой моей просьбы (не очень уверен, что ему запомнилась та наша встреча в Новосибирске), а исходя просто из присущей ему доброжелательности, научной этики и, как мне кажется, привычки помогать людям, которые, по его мнению, отстаивают правильные положения, оказал мне существенную помощь в 1971 г., когда я защищал на экономическом факультете МГУ докторскую диссертацию на тему: “Выбор оптимальных решений в задачах оптимального перспективного планирования и проектирования”. Диссертация включала как общеметодологические соображения и результаты, лежавшие в фарватере теории оптимального планирования, и соответствующие предложенные мной экономико-математические модели, так и прикладные результаты, главным образом относящиеся к методологии и расчетам оптимизации функционирования и развития железнодорожного транспорта, а также величин удельных затрат при перевозке грузов по железнодорожной сети. Именно эта последняя часть почему-то (я это толком не понимаю до сих пор) вызвала резко негативную реакцию заведующего лабораторией транспорта ЦЭМИ АН СССР профессора Е.П. Нестерова, высококвалифицированного в области железнодорожного транспорта профессионала, многие годы до перехода к научной деятельности проработавшего на руководящих должностях (генеральского уровня) в Министерстве путей сообщения. Он написал весьма длинный (на 19 страниц) резко отрицательный отзыв на мою работу, приложив к отзыву две метровые фотографии, иллюстрирующие скопление грузов в Красноярском порту. Конкретно же я обвинялся в том, что я – научный сотрудник – виноват в развале транспорта СССР и что степень доктора мне можно присуждать лишь после того, как я исправлю положение на транспорте Советского Союза. Хотя, по общему мнению, никакого отношения приводимые Е.П. Нестеровым возражения к моей работе не имели, в частности, в ней речной транспорт вообще не затрагивался, тем не менее, несмотря на то, что на диссертацию пришло несколько десятков положительных отзывов из ведущих экономических (в том числе ЦЭМИ, ИЭ и ОПП и др.) и транспортных институтов, ситуация с защитой была непростой. Положение усложнялось еще двумя обстоятельствами. Первое – в то время процедура защиты диссертаций на экономическом факультете МГУ была двухэтапной: защита проходила на Малом совете, членами которого в основном были известные ученые (в том числе и Л.В. Канторович), специалисты в области экономико-математического направления, но решения Малого совета обязательно должны были утверждаться на Большом совете экономфака МГУ, членами которого в основном были доктора наук по специальности “политэкономия”. Второе – в то время между политэкономами и экономматематиками в стране на всех уровнях шла теоретическая (и, как обычно у нас бывает, с практическими выходами) борьба “не на жизнь, а на смерть”. Острый, хотя и завуалированный конфликт был такого рода и на экономфаке МГУ между рекомендовавшей мою работу к защите кафедрой “Математические методы анализа экономики”, руководимой С.С. Шаталиным, и традиционалистами, прежде всего политэкономами факультета. В итоге хроника событий была следующая:

– в юбилейный день, 22 апреля 1971 г., после семичасового обсуждения на Малом совете принимается положительное заключение о присуждении мне степени доктора экономических наук (все голоса “за”, кроме одного воздержавшегося);

– на следующий день, 23 апреля 1972 г., Большой совет без проведения защиты не утверждает решение Малого совета и принимает решение – провести новую защиту уже на Большом совете с добавлением к имевшимся четырем официальным оппонентам (д.э.н. Л.Я. Берри, д.э.н. В.А. Волконский, д.э.н. И.Г. Попов и д.э.н. С.А. Хейнман) еще одного оппонента традиционного направления (назначили академика Т.С. Хачатурова).

– 25 июня 1971 г., т.е. через два месяца повторно после восьми с половиной часов обсуждения при положительных отзывах всех пяти официальных оппонентов и 12 выступлениях неофициальных оппонентов (десять выступавших – “за”, двое, в том числе проф. Е.П. Нестеров, – “против”) Большой совет подавляющим большинством голосов вновь присуждает мне степень доктора экономических наук.

Л.В. Канторович без каких-либо моих просьб выступал и на первой, и на второй защитах, и, я полагаю, эти его выступления существенно повлияли на положительный исход. Эти выступления (они впервые и лишь однажды полностью были опубликованы в малотиражном (к сожалению) издании (Леонид Витальевич, 2002, с 184–190), независимо от их повода и сюжета, как мне кажется, дают представление о взглядах Л.В. Канторовича по транспортной проблематике не только научного, но и психологического характера, и поэтому отдельные фрагменты из выступления Л.В. Канторовича, кстати, имеющие большое значение и сегодня, будут приведены ниже прямо по тексту первоначальной неправленой стенограммы.

Выдержка из стенограммы защиты 22 апреля 1971 г.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ (С.С. ШАТАЛИН): “*Слово имеет академик Канторович”.*

Л.В. КАНТОРОВИЧ, академик АН СССР:

“Работа т. Лившица представляет собой большое произведение, касающееся многих вопросов. Поэтому, естественно, те или иные вопросы в ряде случаев могут вызвать те или иные возражения, дискуссию.

Я хочу остановиться на тех замечаниях, которые были в ряде отзывов, в частности отзыве т. Нестерова. Мне представляется, что дискуссионность тех или иных положений работы отнюдь не дает основания для отказа ей в праве характеризовать, причем высоко характеризовать, научную квалификацию автора.

Мне лично пришлось выступать на защите проф. Нестерова в качестве оппонента. Я тоже возражал против ряда его положений, в частности вызванных его узким транспортным подходом; но, с другой стороны, чувствуя большое уважение к его квалификации, как специалиста по транспорту, несмотря на эти расхождения, я дал положительный отзыв.

Я думаю, что в данном случае все-таки т. Нестеров, выступая как энтузиаст транспорта и осуждая т. Лившица за то, что он, якобы, недооценивает транспорт, оказывается неправ, потому что, конечно, то, что он принимает за недооценку транспорта, в действительности есть глубокое уважение к транспорту, внимание к транспорту и направлено, в широком народнохозяйственном смысле, на пользу транспорту.

Здесь говорилось об этом. А в альбоме (не входя в детали формул) во всяком случае принцип дифференциальный – текущих и капитальных затрат, который кладется в основу измерения, является совершенно правильным.

Здесь т. Нестеров говорит, почему с транспорта берутся дифференциальные затраты, а с других не дифференциальные затраты? Все это – специфика транспорта. В транспорте мы имеем такое положение, что затраты дифференциальные в 2–3 раза меньше средних (а в других отраслях на 10%, и там этим можно пренебречь). Решая же вопросы о транспорте, игнорировать это невозможно, конечно. Так вот, на что ориентирует такой дифференциальный подход к учету транспортных затрат? Он ориентирует на то, чтобы, во-первых, эти транспортные затраты правильно учитывались, т.е. сопоставляя при размещении производства два варианта, мы определяем, какой прирост затрат народного хозяйства вызовет увеличение перевозок; во-вторых, это ориентирует на то, чтобы правильно, т.е. не слишком высоко, оценивать транспортные затраты, не делать дорогих капиталовложений в дублирующие предприятия, у невыгодных источников сырья иметь только местную продукцию и экономить капиталовложения и текущие затраты в очень многих отраслях.

Другое, к чему это приводит, это приводит к тому, чтобы правильно ориентировать размеры предстоящих транспортных перевозок. Если правильно рассчитываются транспортные затраты и объемы предстоящих транспортных перевозок, то это приведет к увеличению вложений в транспорт и развитию транспортной сети в интересах развития народного хозяйства. И если бы этот альбом появился не в 1967, а в 1957 г., и использовался бы при расчетах размещения производства, то были бы приняты дополнительные меры по развитию транспорта.

Во всех пятилетках фактический объем был значительно больше, чем запланированный, и транспорт все-таки справлялся с этим объемом.

Таким образом, мне хотелось бы разъяснить товарищу Нестерову, что эта точка зрения является, кроме народнохозяйственно-патриотичной, и патриотичной специально для железнодорожного транспорта.

Еще по ряду замечаний мне хотелось бы высказаться.

Есть обстоятельства, которые не учитывает ни т. Нестеров, ни т. Лившиц. Тов. Нестеров говорит, что если бы на 54 км по всем железным дорогам возросла бы средняя дальность, то это означало бы на 6–7% увеличение объема перевозок. Это не совсем так. Мне не раз приходилось об этом говорить.

В Новосибирске в прошлом году были произведены анализы, и они показали, что затраты на перевозку очень зависят от дальности. На вторые 700 км затраты почти вдвое ниже или составляют 60% затрат на первые 700 км перевозок.

То есть увеличить дальность на 54 км – в действительности означает увеличение реального объема на 3%. Это не новый факт, и на американских дорогах за 200–500 км берут в полтора раза больше, чем на 700 км.

Таким образом, учет этих дополнительных обстоятельств еще раз подтверждает тот факт, что надо ориентироваться в вопросах использования транспорта не на те или иные временные или субъективного происхождения недостатки и дефициты, а ориентироваться на то, что действительно эффективно для народного хозяйства…"

Выдержка из стенограммы защиты 25 июня 1971 г.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ (М.В. СОЛОДКОВ): "*Слово имеет тов. Канторович*".

Л.В. КАНТОРОВИЧ, академик АН СССР:

"Я хочу остановиться на вопросе, который вызвал наибольшую дискуссию, именно об учете транспортных затрат, по той причине, что я считаю этот вопрос имеющим важное народнохозяйственное значение.

При размещении производства, наряду с производственными затратами, решающее значение имеют для большинства отраслей и транспортные затраты. При применении математических методов размещения производства с самого начала возник вопрос, как учитывать транспортные затраты.

Первое положение было по тарифу. Совершенно естественно, что учет по тарифу не является решенным вопросом хотя бы потому, что тарифы в течение последних 10 лет остаются неизменными, а себестоимость снизилась процентов на 20, фондоемкость еще больше снизилась. Ясно, что тариф не отражает общественно необходимых реальных затрат на транспортное строительство.

Большинством экономистов и, как говорил представитель Госплана, и в практике работы Госплана была принята концепция расчета транспортных затрат по дифференциальным, текущим и фондовым затратам. Этой концепции придерживается автор работы и по ней были наибольшие возражения.

Кроме общих аргументов о том, что она все-таки привлекла мнение большинства экономистов (я этого также придерживаюсь), хотел бы сказать пару слов о том, какое значение имеет такой учет транспортных затрат при размещении производства. Этот учет приводит к тому, что по одной и той же отрасли имеются два варианта расчета: по тарифам и по дифференциальным затратам. Получаются два варианта размещения, причем вы получаете 50% экономии в капиталовложениях в производстве, потому что цена продукции дешевле. Вы можете использовать лучшие источники сырья и 25 млн дополнительных расходов на транспорт.

На что обращены такие решения? Во-первых, они ориентируют на более прогрессивные решения в отраслях промышленности, во-вторых, они ориентируют на некоторое увеличение объема работы транспорта и необходимость увеличения затрат на транспорт. Именно на это методика и направлена. Другое дело, как это фактически реализовалось, но она (эта методика) ориентирует на развитие транспорта и таким образом подтверждает справедливость тех решений, которые приняты по девятому пятилетнему плану.

Я хочу остановиться еще на одном пункте, где проф. Нестеров ссылается на меня, относительно дефицитности. Нужно учитывать дефицитный продукт в период дефицитности. В частности, я это говорю и в применении к перевозкам.

Пример – обстановка военного времени, когда большого развития транспорта не могло быть. Но при правильном планировании народного хозяйства этого временного положения не должно быть, и если будут правильно учтены и текущие, и фондовые затраты, то надобность в учете дефицитности отпадает. Так как в работе Лившица речь шла о расчете на перспективу, то ориентироваться на дефицитность неразумно. Искажение затрат в силу дефицитности не было необходимым.

Я должен сказать, что не все экономисты, в частности связанные с транспортом, придерживаются этой точки зрения, большинство, но не все, и тут имеются вопросы, по поводу которых можно спорить. То, что проф. Нестеров выступает со своей точкой зрения, в этом ничего плохого нет, но одно дело отстаивать свою научную точку зрения, а другое – дискредитировать всякую другую точку зрения. Я лично выступал оппонентом у профессора Нестерова и придерживался другой точки зрения, но это не мешало мне отнестись к точке зрения и к самой работе проф. Нестерова иначе и дать о ней положительный отзыв.

Я мог бы напомнить еще более разительный пример, когда акад. Струмилин в 1940 году выступал оппонентом у проф. Новожилова. Вы знаете, насколько различны их точки зрения, и все-таки после 10 страниц возражений акад. Струмилин, заканчивая, отнесся с уважением к работе и положительно оценил ее.

Наконец, имеется ряд возражений на критику проф. Нестерова, я уже не буду на них останавливаться. Он прорезюмировал так, что пока все вопросы не решены, то нельзя выходить с работой ни на защиту, ни на ее использование и пр. К счастью, проф. Нестеров и сам в практике не придерживается такой точки зрения. И не только в экономике, но и в точных науках очень часто приходится по вопросам, связанным с практикой, не дожидаться полного, исчерпывающего решения, а принимать усредненные данные, которыми можно пользоваться.

Я думаю, что это не недостаток, а научная смелость. Это смелость и института, и в частности диссертанта. И я думаю, что это надо отметить".

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ: *"Есть ли еще желающие выступить?" (нет)*

Наши дальнейшие контакты

После возвращения в 1971 г. из Новосибирска Л.В. Канторович спустя несколько лет перешел во Всесоюзный научно-исследовательский институт системных исследований ГКНТ и АН СССР (ВНИИСИ) и работал там с самого основания института в 1976 г. до своей кончины, заведуя отделом моделирования научно-технического прогресса. Естественно, что он – лауреат Государственной, Ленинской и Нобелевской премий был приглашен одним из первых, немало способствуя развитию этой новой научной организации, созданной в 1976 г. по замыслу ее первого директора (и одновременно заместителя Председателя ГКНТ СССР академика Д.М. Гвишиани), как советского аналога американской "Rand Corporation", росту ее престижа. Мне в этом неоднократно приходилось потом убеждаться (в том числе и в зарубежных командировках), когда я, отвечая на вопросы о нашем институте, упоминал, что у нас работает Л.В. Канторович.

Надо сказать, что Леонид Витальевич, перейдя во ВНИИСИ, очень активно участвовал не только в организуемых институтом научных конференциях, но и во многих других. Так, он был регулярным участником ежегодных Всесоюзных Шаталинских конференций по моделированию народного хозяйства, причем не только как неизменный работающий член оргкомитета, но и как один из участников вечерних, не только научных, заседаний, где иногда после жарких дискуссий до 2–3 часов ночи под гитару Сергея Чеснокова пели песни, рассказывали и обсуждали новости и др. Сам Леонид Витальевич иногда на таких посиделках блестяще декламировал басни, рассказывал много интересного и вполне вписывался в коллектив.

Не могу не вспомнить и такой случай. Нередко, работая на восьмом этаже здания ВНИИСИ, он поднимался к нам на девятый этаж, и мы обсуждали всякие научные и организационные проблемы по транспорту, связанные с его работой, а также разные другие проблемы. Однажды я прихожу во второй половине дня после чтения лекций в учебном институте, и мне сотрудники лаборатории говорят, что приходил Леонид Витальевич и оставил записку. Беру, читаю. Текст ее такой, я его запомнил: "Уберите солонку со стола; будет плохо – позвоните от моего имени профессору, кардиологу Абраму Львовичу Сыркину", – и далее следовал номер телефона. Оказывается, что когда приходил Леонид Витальевич, то мои сотрудники ему нажаловались на то, что у меня болело сердце. Надо сказать, что когда мне спустя несколько лет после того, как Леонида Витальевича не стало, в 1990 г. стало совсем худо, то я, действительно обратился к помощи проф. Сыркина и получил от него единственного тогда правильный совет, что надо делать операцию шунтирования, и последовал этому спасшему меня совету.

Примеров такого рода, когда Леонид Витальевич проявлял присущие ему удивительные свойства характера, помогал близким и малознакомым людям и т.д., можно приводить очень много. Я, как и все мои коллеги, кто встречался с Леонидом Витальевичем, могу добавить к написанному много-много теплых слов.

Л.В. Канторович и транспортная наука

Перейдем теперь к транспорту, большая и плодотворная деятельность Леонида Витальевича во благо которого освещена гораздо более скромно. И это очень жаль, так как с 1975 г. он по существу возглавил исследования в АН СССР по транспорту, взвалив с этого года на себя нелегкую ношу председателя научного совета АН СССР по комплексной проблеме "единая транспортная система". Круг научных вопросов, относящихся к этому совету, был весьма широкий (и оценка деятельности транспортных организаций, и обоснование системы показателей, и методы построения и величины транспортных тарифов, и оценка эффективности капитальных вложений на транспорте, и многое, многое другое). Ввиду того что транспорт находился в тяжелом состоянии, был, как говорили тогда в народном хозяйстве, "узким местом", все эти проблемы, особенно на железнодорожном транспорте, были весьма острыми, поэтому выработка и "пробивание" правильных научных решений в директивных органах требовали от Леонида Витальевича огромных усилий, перемноженных на его талант и авторитет. Многих, в том числе и лабораторию по производственной инфраструктуре ВНИИСИ, он привлек к работе совета. Мы были очевидцами того, как под руководством Леонида Витальевича деятельность ее не только активизировалась, стали регулярно проводиться всесоюзные конференции и рабочие совещания по важнейшим социально-экономическим проблемам транспорта под эгидой АН СССР, но главное резко, на мой взгляд, повысились их целевая научная ориентация, эффективность, что всегда было в центре внимания председателя совета АН СССР по транспорту. Характерный пример – за два дня до кончины Леонид Витальевич мне и ряду других членов совета звонил, его беспокоило, что не сможет присутствовать в Ленинграде на конференции по пассажирским перевозкам, где должен был и председательствовать, и выступать с докладом.

Автору настоящей работы, которому посчастливилось в течение ряда лет (1977–1986 гг.) работать одновременно с Л.В. Канторовичем во ВНИИСИ, хочется частично исправить указанную несправедливость – игнорирование того, что было Великим математиком и Экономистом сделано для транспорта. Такая возможность имеется, так как с сентября 1977 года, когда по инициативе С.С. Шаталина – тогда заместителя директора ВНИИСИ, в Институте была создана первая в стране научная лаборатория исследования проблем производственной инфраструктуры (транспорта, связи и т.д.), ее сотрудники (В.Н. Лившиц и др.) имели достаточно регулярную возможность контактировать с Л.В. Канторовичем, пользоваться его консультациями, слушать его выступления на всесоюзных конференциях по производственной инфраструктуре, в которых он, как правило, принимал активное участие: и в заседаниях, и в обычно проводившихся после них менее формальных мероприятиях. Контакты еще более усилились, когда Леонид Витальевич наряду со многими другими своими служебными и общественными обязанностями возглавил Научный совет по комплексной проблеме развития единой транспортной системы СССР и включил в бюро совета ряд специалистов по транспорту, в том числе и зав. лабораторией инфраструктуры В.Н. Лившица, и стал обсуждать широкий спектр актуальных транспортных проблем. Его (Л.В. Канторовича) некоторые мысли частично будут ниже кратко изложены, ограничимся характеристикой научного вклада юбиляра лишь в решение следующих важнейших для транспорта двух задач:

1) оптимизация потоков в транспортных, в том числе железнодорожных, сетях;

2) анализ структуры оптимальных тарифов на железнодорожные перевозки.

Попутно предполагается также привести некоторые, по нашему мнению, представляющие интерес для читателей личные воспоминания о Л.В. Канторовиче, выходящие за пределы транспортной тематики и адекватно характеризующие нашего удивительно симпатичного Великого Современника.

Более полная информация о работах Л.В. Канторовича в области транспорта и транспортной науки содержится в его монографии (Канторович, 1989), выпущенной в изд-ве "Наука" через три года после его кончины и содержащей в том числе перечень всесоюзных конференций по транспорту, организованных по инициативе и проведенных непосредственно под его руководством, наименование (библиографическое) всех основных 274 работ Л.В. Канторовича, опубликованных в 1939–1987 гг., и оригинальные тексты (иногда несколько сокращенные редакционной коллегией) его работ по транспорту, а также включающей последнюю незавершенную работу “Мой путь в науке” и тексты некоторых посланий Леонида Витальевича в правительственные органы (в том числе в Госплан и Госснаб СССР) с изложением предлагаемых мероприятий практического характера и их научных обоснований по повышению эффективности работы и развития транспорта нашей страны, совершенствованию исчисления транспортных затрат и тарифов, экономического механизма управления транспортом, развитием пассажирских сообщений и т.д. Содержится в указанной монографии и полный текст лекции Л.В. Канторовича: “Математика в экономике: достижения, трудности, перспективы”, прочитанной в Шведской Академии наук в связи с присуждением ему Нобелевской премии за 1975 г.

Перейдем теперь к рассмотрению непосредственного научного вклада Л.В. Канторовича в решение указанных выше двух задач.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОТОКОВ В СЕТЯХ

По существу в этой задаче, когда Л.В. Канторович и его ученик М.К. Гаврин еще до войны ею занялись, речь шла о хорошо известной железнодорожникам проблеме рационального планирования перевозок (тяжелых грузов, порожних вагонов и др.), имелись у практиков (А.Н. Толстого и др.) определенные неалгоритмические соображения, как ее решать, но, как указывается в (Канторович, 2002, с. 56), “ни математической формулировки, ни эффективного метода решения не было”. Л. Канторовичем и М. Гавуриным такой метод – специальная модификация метода разрешающих множителей – метод потенциалов – был разработан, однако попытка опубликовать сданную в 1940 г. статью в журналы “Железнодорожный транспорт”, “Известия Транспортной академии” и ряд других, несмотря на поддержку академика А.Н. Колмогорова и академика, транспортного генерала В.Н. Образцова, к успеху не привели, так как “математикобоязнь” и представление в редакциях, даже академических, о математике как антимарксистском инструменте экономического анализа, оказалось непреодолимой преградой. Правда, как пишет (там же, с. 57) Л. Канторович: “...я сделал абстрактный вариант этой задачи – заметку о перемещении масс в компактном метрическом пространстве, в которой был и критерий и метод потенциалов”, – и она с подачи С.Л. Соболева увидела свет в конце 1942 г. При этом была приведена формальная постановка задачи и доказана теорема о необходимости и достаточности условия потенциальности для минимального перемещения в следующем виде (Канторович, 1989, с. 78–79). Приведем, опуская доказательства, текст написанной заметки.

Будем считать R метрическим компактным пространством, хотя некоторые из приведенных определений и результатов могут быть высказаны и для пространств более общего вида.

Пусть $\Phi(e)$ – распределение масс, т.е. функция совокупности:

1) определенная для борелевских множеств;

2) неотрицательная $\Phi(e) \geq 0$;

3) абсолютно-аддитивная: если $e = e_1 + e_2 + \ldots$; $e_i e_k = 0 (i \neq k)$, то $\Phi(e) = \Phi(e_1) + \Phi(e_2) + \ldots$ Пусть $\Phi'(e')$ – другое распределение масс, причем $\Phi(R) = \Phi'(R)$. Перемещением масс будем называть такую функцию $\psi(e, e')$, определенную для пар (B) – совокупностей: $e, e' \in R$:

3. 1) неотрицательную и абсолютно-аддитивную по каждому из аргументов;

3. 2) такую, что $\psi(e, R) = \Phi(e)$; $\psi(R, e') = \Phi'(e')$.

Пусть $r(x, y)$ – известная непрерывная неотрицательная функция – работа по перемещению единицы массы из x в y.

Работой по перемещению данных распределений масс будем называть величину

$$W(\psi, \Phi, \Phi') = \int_R \int_R r(x, x')\, \psi\, (de, de') = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i,k} r(x_i, x'_k)\, \psi\, (e_i, e'_k),$$

где e_i – дизъюнктны и $\sum_1^n e_i = R$; e_k – дизъюнктны и $\sum_1^m e'_k = R$, $x_i \in e_i$, $x'_k \in e'_k$, и λ – наибольшее из чисел $\operatorname{diam} e_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и e'_k $(k = 1, \ldots, m)$.

Интеграл, очевидно, существует.

Величину $W(\Phi, \Phi') = \inf_{\psi} (\psi, \Phi, \Phi')$ будем называть минимальной работой по перемещению. Так как множество функций $\{\phi\}$ компактно, то ясно, что существует функция ϕ_0, осуществляющая этот минимум, т.е. такая, что $W(\Phi, \Phi') = W(\phi, \Phi, \Phi')$; правда, эта функция не единственна. Такое перемещение ϕ_0 будем называть минимальным перемещением.

Далее будем говорить, что перемещение ϕ от x к y не равно нулю, и писать $x \to y$, если для любых окрестностей U_x и U_y точек x и y будет $\phi(U_x, U_y) > 0$. Назовем перемещение потенциальным, если существует такая функция $U(x)$, что:

1) $|U(x) - U(y)| \le r(x, y)$;

2) $U(y) - U(x) = r(x, y)$, если $x \to y$. Тогда имеет место теорема.

Теорема. *Чтобы перемещение было минимально, необходимо и достаточно, чтобы оно было потенциально.*

В этой работе также были вербально сформулированы две практические задачи, при решении которых данная теорема находит себе применение.

Задача 1. О прикреплении пунктов потребления к пунктам производства. На железнодорожной сети имеется ряд пунктов производства $A_1, \ldots, A_m$, в которых производится соответственно $a_1, \ldots, a_m$ вагонов данного массового груза в сутки, и ряд пунктов потребления $B_1, \ldots, B_n$, в которых потребляется соответственно $b_1, \ldots, b_m$ вагонов в сутки $\left(\sum a_i = \sum b_k\right)$. Требуется так прикрепить пункты потребления к пунктам производства, чтобы суммарные затраты по перевозке оказались наименьшими. Затраты r_{ik} по перевозке одного вагона из пункта A_i в каждый пункт B_k считаются заданными. Решение дано в статье (Канторович, Гавурин, 1949).

Задача 2. О планировке участка. Считаются заданными рельеф местности – уравнение земной поверхности $z = f(x, y)$ – до планировки и после планировки $z = f_1(x, y)$ (при этом $\iint f(x, y)\, dxdy = \iint f_1(x, y)\, dxdy$), а также затраты по перемещению 1 м^3 земли из пункта (x, y) в пункт (x_1, y_1). Требуется указать такой план перемещения земляных масс, при котором суммарные затраты по перемещению оказались бы минимальными.

Что же касается полного текста работы 1940 г. об оптимизации потоков в дискретных сетях, то в несколько упрощенном инженерном виде для однопродуктового линейного случая без и с ограничением пропускной способности участков сети она была опубликована только в 1949 г. и стала классической, на ее основе был разработан (в ИКТП, ЦЭМИ, ЛО ЦЭМИ и др.) ряд алгоритмов оптимизации потоков в линейных сетях, в том числе и для расширенных постановок задачи – при многопродуктовых потоках с ограничениями пропускной способности участков и др. Во всех этих случаях по существу остается в силе теорема о потенциальности оптимального плана потоков, понимаемая в следующем смысле.

Пусть имеется m пунктов, соединенных транспортной сетью, состоящей из r участков. По участку сети s, $s = 1, \ldots, r$, можно производить перевозки из пункта i_s в пункт j_s, при этом затраты по перемещению единицы груза составляют a_s. В каждом пункте – узле сети i, $i = 1, \ldots, m$, – задан объем потребления b_i некоторого однородного продукта (для пунктов потребления $b_i > 0$, для пунктов производства $b_i < 0$, для прочих пунктов $b_i = 0$); причем $\sum_{i=1}^m b_i = 0$ (суммарные объемы производства и потребления совпадают). В задаче требуется найти такой вектор перевозок $\pi = (h_1, \ldots, h_r)$, где h_s – объем перевозок по участку сети s, $s = 1,\ldots, r$, чтобы минимизировались суммарные затраты на перевозки

$$Z = \sum_{s=1}^{r} a_s h_s \to \min$$

при ограничениях по отправлению из пунктов зарождения и доставке в пункты потребления всего, что требуется, и при ограничениях, если они имеются, пропускной способности участков сети:

1) $h_s \geq 0$, $s = 1, \ldots, r$;

2) $\sum_{j_s = i} h_s - \sum_{j_s = i} h_s = b_i$, $i = 1, \ldots, m$ (в каждый пункт поступает необходимое количество продукта);

3) $h_s \leq q_s$, $s = 1, \ldots, r$; где q_s – пропускная способность s участка.

В этом случае характеристика оптимального плана принимает вид, указанный в (Канторович, 1959, с. 290), там же приводится теорема (с. 290, теорема 6): *для оптимальности допустимого вектора перевозок* $\pi = (h_1, \ldots, h_r)$, *удовлетворяющего условиям* 1)–3), *необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа* $c_1, \ldots, c_m$ (*потенциалы*) *и такие числа* $d_1, \ldots, d_m$ (*ренты или прокатные оценки отдельных участков маршрута следования, рассчитанные на единицу груза*), *что:*

а) $c_{js} - c_{is} \leq a_s + d_s$, $s = 1, \ldots, r$;

б) $c_{js} - c_{is} = a_s + d_s$, *если* $h_s > 0$;

в) $d_s \geq 0$, *причем* $d_s = 0$, *если* $h_s < q_s$.

При этом величины c_{is} и c_{js} представляют собою потенциалы пунктов i и j, инцидентных, т.е. непосредственно связанных, с участком s.

Приведенные условия потенциальности оптимального плана допускают трактовку в терминах теории оптимального планирования в виде требований “бесприбыльности” и “безубыточности” наивыгоднейших перевозок. В самом деле, как подчеркнуто в (Лурье, 1964), потенциалы должны быть такими, чтобы перевозки не могли принести прибыль (т.е. оценка груза в любом пункте потребления не должна превышать оценки его в любом пункте производства, увеличенной на расходы по перевозке в данный пункт $c_{js} \leq c_{is} + a_s + d_s$). И в то же время (безубыточность) перевозки должны быть такими, чтобы оценка груза в пункте производства и издержки его на перевозки в точности покрывались оценкой груза в пункте потребления $s = 1,\ldots, r$; $c_{js} = c_{is} + a_s + d_s$.

Выдвинутый и обоснованный Л.В. Канторовичем принцип потенциальности оптимального плана потоков распространяется и на случай нелинейных сетей, только при этом, конечно, как доказано в (Левит, Лившиц, 1972; Лившиц, 2009), удельная стоимость перевозки груза по участку, входящая в условия потенциальности, не фиксируется экзогенно, а представляет собою соответствующие дифференциальные затраты, которые, как отмечал Л.В. Канторович в приведенном выше выступлении, на железных дорогах в несколько раз ниже средних, и это радикально влияет как на оптимальное размещение и развитие производства при централизованном его планировании, так и на равновесные цены и, следовательно, характеристики бизнеса в рыночной экономике.

Следует также отметить, что упомянутые выше, ставшие уже классическими теоремы Канторовича о потенциальности оптимального плана перевозок по сети многократно использовались и продолжают использоваться при построении конкретных алгоритмов оптимизации функционирования и развития сетевых структур, входя органическим элементом в систему анализа решений статических и динамических сетевых моделей (Белоусова и др., 2004, 2008).

Теперь несколько слов о мыслях Л.В. Канторовича по поводу железнодорожных тарифов. Хотя юбиляр не жил в период рыночных реформ в России, но в его гениальной книге (Канторович, 1959), да и в его других публикациях и выступлениях, в том числе и на защите в МГУ в 1971 г., есть много информации о том, как, исходя из интересов страны, надо строить все цены на ресурсы и продукты, в том числе и на железнодорожные грузовые и пассажирские тарифы.

Не претендуя на адекватность, и тем более, полноту представления о том, как конкретно решал бы Леонид Витальевич эту важную и весьма сложную проблему в новых для него российских условиях XXI в., представляется, что можно отметить в числе основных положений, на которые вероятнее всего он бы опирался, следующие.

1. При построении тарифов надо использовать системный подход и анализ всех наиболее важных последствий, на которые та или иная система тарифов может и должна оказать заметное влияние.

2. Исходя из системного подхода, учитывались бы не только экономические, но и наиболее существенные внеэкономические последствия.

3. Выбор структуры и уровней тарифов, по-видимому, осуществлялся бы не просто по интуиции, здравому смыслу и т.д., а с их учетом по некоторой экономико-математической модели, ориентированной на системную максимизацию благосостояния страны и ее населения, а не на запредельное благополучие небольших олигархических групп бизнеса и чиновников.

4. По-видимому, был бы использован тот научный потенциал, который заложен им в его гениальной книге (Канторович, 1959), в частности, согласно которой объективно-обусловленные оценки (оптимальные цены) в случае наличия скалярной оптимизационной модели народного хозяйства, включающей экономику, социум, экосистему и т.д., выражаются как частные производные экстремума целевой функции по соответствующему ресурсному ограничению.

5. При всей грубости и плохой реализуемости, вплоть до сомнений в ее существовании, целевой функции полезности, указанной в п. 4. модели, она подсказывает, что при построении цен, тарифов и т.д. более корректно, как правило, опираться не на средние, а на предельные, дифференциальные величины. А это значит, что в рыночных условиях системы естественной монополии, в том числе и в железнодорожной отрасли, где дифференциальные затраты на дополнительные перевозки много ниже средних, надо формировать, ориентируясь не на локальные хозрасчетные выгоды и условия самоокупаемости, самофинансирования и т.д., а оптимальный тариф на перевозку единицы i груза – рассчитывать по формуле: $p_i = m_i + c_i$, обеспечивая максимизацию системного эффекта. При этом m_i – дифференциальные (предельные) затраты на единицу прироста объема перевозок i вида, а c_i –дифференциальные внеэкономические потери на ту же единицу прироста.

6. В некоторых случаях, если это действительно необходимо, в модель могут быть введены дополнительные балансовые ограничения, например при обязательности выполнения условия самоокупаемости перевозок. Тогда следует перейти от оптимальных дифференциальных цен, тарифов и др. к соответствующим ценам Рамсея–Буато. Как показано в (Береза и др., 1997; Quinet, 1998), при этом оптимальный тариф по перевозке единицы i груза рассчитывается по формуле:

$$p_i = \frac{1+\lambda}{1+\lambda\delta_i} m_i + \frac{1}{1+\lambda\delta_i} c_i\,,$$

где δ_i – эластичность дохода по цене перевозки i груза, а $\lambda = (p_i - m_i - c_i)/(m_i - \delta_i p_i)$ – соотношение приростов общественного эффекта и убытка железных дорог при малом изменении объема перевозок.

7. На этой же основе, т.е. исходя из максимизации общественного эффекта, может проводиться довольно широкая диверсификация тарифов, например дополнительное снижение тарифов на железнодорожные пассажирские перевозки на определенных направлениях и для определенной категории потребителей транспортных услуг, если такая необходимость объективно вызывается системными социально-экономическими условиями – например (Канторович, 1989, с. 266), “скажем, для детей можно допустить оплату плацкарты в размере 50% стоимости, хотя они пользуются таким же местом”.

8. Имеются там же в монографии (Канторович, 1989) разделы “об исчислении транспортных затрат и тарифов – с. 183–211”, “проблемы развития системы пассажирских сообщений – с. 254–273” и др., в которых указывается и аргументируется Л.В. Канторовичем много совершенно конкретных транспортных предложений, которые представляются инвариантными относительно

глобального принципа управления народнохозяйственной системой – централизованно-плановой или рыночной – и поэтому, по-видимому, могут быть актуализированы.

9. В случае необходимости обеспечения самофинансирования транспортных систем тариф на перевозки рассчитывается, естественно, по несколько иной формуле, чем приведена выше в п. 6. Ее вывод также приведен в (Береза и др., 1997).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Канторович Л.В. (1942): О перемещении масс // *Докл. АН СССР.* Новая серия. Т. 37. № 7–8. С. 227–229.

Канторович Л.В., Гавурин М.К. (1949): Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. В сб.: “*Проблемы повышения эффективности работы транспорта*”. М., Л.: Изд-во АН СССР. С. 110–138.

Канторович Л.В. (1959): Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР.

Определение эффективности капитальных вложений на транспорте (1982): В сборнике трудов ВНИИСИ / Научн. ред. Л.В. Канторович, В.Н. Лившиц (Монография, с. 143). М.: ВНИИСИ. Вып. 8.

Канторович Л.В. (1989): Проблемы эффективного использования и развития транспорта / Под ред. В.Н. Лившица, Н.В. Паенсон, Е.Ф. Тихомирова. М.: Наука.

Леонид Витальевич Канторович (2002): Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый / Под ред. В.Л. Канторовича, С.С. Кутателадзе, Я.И. Фета. Т. 1. Новосибирск: Изд-во СО РАН, Филиал “Гео”.

Канторович Л.В., Акилов В.П. (1959): Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз.

Лившиц В.Н., Лившиц С.В. (2011): Системный анализ нестационарной экономики России (1992–2010): радикальные реформы, кризис, инвестиционная политика. М.: Маросейка.

Лурье А.Л. (1964): О математических методах решения задач на оптимум при планировании социалистического хозяйства. М.: Наука.

Новожилов В.В. Проблемы соизмерения затрат и результатов при оптимальном планировании. М.: Экономика, 1968.

Левит Б.Ю., Лившиц В.Н. (1972): Нелинейные сетевые транспортные задачи. М.: Транспорт.

Лившиц В.Н. (2009): О двух юбилеях одной классической работы Л.В. Канторовича (Из истории экономико-математического направления) // *Экономика и мат. методы*. Т. 45. Вып. 4.

Белоусова Н.И., Бушанский С.П., Васильева Е.М. и др. (2004): Совершенствование теоретических основ, моделей и методов оптимизации развития сети автомобильных дорог. В сб.: “*Компьютерный аудит*”. № 3.

Белоусова Н.И., Бушанский С.П., Васильева Е.М. и др. (2008): Информационная технология синтеза сложных сетевых структур нестационарной российской экономики: модели, алгоритмы, программная реализация // Аудит и финансовый анализ. № 1.

Береза Т.Н., Браславский А.Л., Лившиц В.Н. и др. (1997): Стоимость грузовых железнодорожных перевозок и пути ее снижения /Препринт # WP/97/000. М.: ЦЭМИ РАН.

Quinet E. (1998): Principes d’Economie des Transports. Paris, Economica.

Поступила в редакцию
10.06.2011 г.

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2011, том 47, № 4, с. 37–43

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЛЕОНИДА ВИТАЛЬЕВИЧА КАНТОРОВИЧА

ЗАДАЧА РАЦИОНАЛЬНОГО РАСКРОЯ В РАБОТАХ Л.В. КАНТОРОВИЧА И В.А. ЗАЛГАЛЛЕРА

© 2011 г. И.В. Романовский

(Санкт-Петербург)

ВВЕДЕНИЕ

Я хочу рассказать о замечательной книге Л.В. Канторовича и В.А. Залгаллера, которая была дважды опубликована – в 1951 г. под названием “Расчет рационального раскроя промышленных материалов” (Канторович, Залгаллер, 1951), а в 1971 г. под названием “Рациональный раскрой промышленных материалов” (Канторович, Залгаллер, 1971) – вызвала огромные последствия, часто цитируется в списках литературы и... никем сейчас не читается ввиду малой доступности. Отмечу, что книга практически неизвестна за рубежом. Все это несмотря на довольно значительный тираж – 5000 экз. первого издания и 4600 второго.

Книга важна как исторический документ, фиксирующий ход первого практического применения математико-экономических идей Л.В. Канторовича, начатый с простейших моделей и доведенный до практически использованных планов раскроя. В ней хорошо показано, как, по рекомендациям Л.В. Канторовича, на реальных задачах двойственные оценки (индексы) применяются вне рамок математической модели – для принятия решений при небольших изменениях исходных данных. Книга зафиксировала использование до 1950 г. таких важных математических инструментов, как метод последовательного улучшения плана, генерирование столбцов (раскроев), применение таблиц индексов в технике, известной сейчас как “динамическое программирование”.

Готовясь к празднованию столетия со дня рождения Л.В. Канторовича, мы решили эту книгу переиздать. В.А. Залгаллер согласился с нашим предложением и принимает участие в переиздании.

В данной статье будет рассказано об истории книги, о достоинствах первого, а затем и второго издания, о развитии работ по оптимальному раскрою в СССР и в постперестроечной России, и в конце немного о плане третьего издания.

ИСТОРИЯ КНИГИ

Начнем с того, что во время войны Л.В. Канторович был на военной службе – он работал в Высшем инженерно-техническом училище, где преподавал военным строителям. В частности, он читал лекции по теории вероятностей и написал интересный учебник по этой дисциплине, изобилующий военными примерами в стиле “исследования операций”.

В это время он работал над начатой еще до войны книгой, которая называлась тогда “Экономический расчет, обеспечивающий наиболее целесообразное использование ресурсов”. В 1959 г. она была опубликована Издательством АН СССР (Канторович, 1959).

Подполковник Канторович был демобилизован из Советской армии в 1948 г. и возглавил в Ленинградском отделении Математического института АН СССР специальный Отдел приближенных вычислений, выполнявший расчеты, связанные с Атомным проектом (Атомный проект СССР, 1999).

Канторович взял в этот отдел выпускника математико-механического факультета (матмеха) Ленинградского университета В.А. Залгаллера (известного ему по литературной работе еще с довоенных времен[1]) и… направил его на Вагоностроительный завод им. Егорова для практической проверки того, насколько удастся приложить экономические идеи Канторовича в реальных условиях – в раскрое материалов, используемых при изготовлении вагонов[2].

Для Канторовича тема раскроя была не новой. В 1942 г. он опубликовал небольшую заметку в специальном издании Наркомата (министерства) боеприпасов (Канторович, 1942), а в 1949 г. давно написанную статью об оптимальном пилении бревен на доски (Канторович, 1949) – возможность публикаций представилась ему в связи с получением в 1949 г. Сталинской премии[3].

Виктор Абрамович Залгаллер начал учиться на матмехе перед войной, всю войну провел в армии, после Победы демобилизовался, вернулся на матмех и в 1948 г. закончил его по кафедре геометрии с красным дипломом. С задачами раскроя и с довоенными работами Канторовича по линейному программированию он до этого поручения знаком не был. Да и сам этот термин Дж. Данциг еще только выбирал.

Поручение было выполнено. В.А. Залгаллер отобрал те из многообразных практических ситуаций раскроя, которые легче всего укладывались в схему Канторовича (их было достаточно много, и они были важны для производства), собрал данные и стал решать задачи оптимизации, создавая при этом методики расчетов. Попутно он занимался "научной организацией труда" раскройщиков, учил их приемам рациональной работы, совершенствовал оборудование их рабочих мест.

Найденные раскройные планы были внедрены. Они принесли заводу ощутимую экономию материалов и неожиданный выговор дирекции за срыв плана сдачи отходов. Этот опыт был также полезен. Он показал, что нелогично построенная система препятствует локальным попыткам рационального хозяйствования, даже если эти попытки ничем системе не угрожают.

Меньше чем через два года к печати была подписана книга (Канторович, Залгаллер, 1951). В ней описывались (впервые) задачи линейного программирования, к которым приводятся базовые модели массового раскроя, в терминах специальных *индексов* формулировались условия оптимальности раскроев (конечно, это были двойственные переменные, но двойственных задач Канторович не писал, в его терминологии это были *разрешающие множители*; прямая задача в форме Канторовича ставилась для задач раскроя очень удобно – как задача о максимальном выпуске комплектов деталей или, эквивалентно, как задача о минимальном использовании сырья на один комплект).

В книге рассмотрены модель одномерных заготовок с сырьем фиксированного размера, модель со случайной смесью исходных размеров, задача двумерного плоского гильотинного раскроя прямоугольников из прямоугольного сырья и некоторые задачи фигурного раскроя.

Методы расчета излагались в терминах решения систем линейных уравнений. Ничего, подобного симплекс-таблице Дж. Данцига (Данциг, 1966), у них не было и быть не могло, так что все вычисления В.А. Залгаллер проводил карандашом на бумаге. Но это обстоятельство обеспечивало вычислительную свободу, и уже тогда авторы увидели, что можно на каждой итерации вычислять наилучший раскрой для включения его в базисное решение. Говоря современным языком, это был метод генерирования столбцов с использованием для вычислений шкалы индексов, показывающей зависимость оценки сырья от его длины, того, что примерно через десять лет мы стали называть функцией Беллмана.

Авторы описали работу с двумерной шкалой индексов, также фактически с уравнением Беллмана, и привели пример расчета, выполненного вручную. Но работа со шкалой для двумерного случая была слишком громоздка для ручного счета и не рекомендовалась. В.А. Залгаллер разработал много рекомендаций по порядку проведения вычислений. С одной из них мы ознакоми-

[1] Студент Залгаллер по поручению лектора Канторовича преобразовал сжатый конспект его курса в полноценную книгу, которая была издана (с указанием на эту помощь).

[2] Залгаллер вспоминал: "Вера Николаевна Фаддеева говорила о Леониде Витальевиче, что он чувствовал себя не в своей тарелке, если варит каши меньше, чем в пятидесяти котлах. У него ведь систематически шли работы в самых разных направлениях" (см. (Леонид Витальевич Канторович, 2002, с. 169)).

[3] Тогда же была напечатана и написанная еще до войны статья с М.К. Гавуриным (Канторович, Гавурин, 1949) о транспортной задаче на сети с подробным изложением метода потенциалов.

лись особо, когда он оппонировал у нас диссертацию по программам раскроя и объяснил нам, на каких принципах нужно строить в ней начальный базисный план. Мы эти принципы немедленно включили в программу и с тех пор обязательно используем.

Очень интересен в книге раздел о круговых заготовках. Только сейчас, перечитывая книгу в связи с подготовкой к переизданию, я обратил внимание на упоминание участия в этой работе "сотрудника Кировского завода Г.Ш. Рубинштейна"[4]. Этот раздел, по-моему, был включен как дань истинной математической привязанности В.А. Залгаллера и Г.Ш. Рубинштейна – геометрии.

Книга показала способы, которыми можно совершенствовать раскрой материалов. Наряду с математическими моделями и очень простыми средствами их расчета она включала разнообразные практические рекомендации по расчету и раскрою. Например, в ней рекомендуется, казалось бы, совсем непрограммистское использование кальки при графическом решении уравнения Беллмана. Между тем аналог этому приему можно найти, например, во вполне компьютерном методе Дейкстры для нахождения кратчайших путей в графах. В первой отечественной компьютерной программе по раскрою (Булавский, Яковлева, 1961) использовался именно этот прием. Другой прием – особенности вычисления индексов при значительном преобладании нескольких заготовок программного воплощения – я еще не нашел.

При раскрое материалов смешанных длин рассматривается вопрос об экономической целесообразности заказа мерных длин[5], даются рекомендации по организации предварительной сортировки поступающих единиц сырья и предлагается простой и эффективный сортировочный стеллаж.

Была предложена и построена специальная сменная линейка, которая градуировалась так, чтобы рабочий мог быстро принимать правильные решения по раскрою.

В книге есть несколько приложений, написанных В.А. Залгаллером. Л.В. Канторович особенно ценил Приложение I, в котором приводится доказательство существования индексов, связанных с максимально экономным планом раскроев, – на современном языке это условие оптимальности решения в данной конкретной задаче линейного программирования.

Но самым важным было широкое использование индексов, возникающих в задаче линейного программирования, при принятии внемодельных решений, то, к чему призывал Л.В. Канторович в своей книге (Канторович, 1959) (В.А. Залгаллер читал ее еще в рукописи).

ПОСЛЕ КНИГИ

Примечательно, что после эксперимента на Вагоностроительном заводе В.А. Залгаллер сохранил интерес к задачам раскроя.

По-видимому, самым важным из приложений была задача "о поставах". Поставом называется расстановка пил при распиловке древесного ствола на доски. Как вспоминает Виктор Абрамович (Залгаллер, 2011), заняться этой задачей ему предложил также Л.В. Канторович. В результате появилась очень быстро опубликованная брошюра (Залгаллер, 1956), которая до сих пор входит в список цитируемой классики многочисленных диссертаций на по-прежнему актуальные темы распиловки древесины.

Начали появляться публикации за рубежом. Большое внимание привлекла серия статей известных американских специалистов в области оптимизации Пола Гилмора и Ральфа Э. Гомори (Gilmore, Gomory, 1961).

[4] Рубинштейн Геннадий Шлемович (1923–2004) – соратник Л.В. Канторовича, доктор физ.-мат. наук, профессор. Особенно известны их работы по "транспортной" метрике. В 1949 г. он закончил матмех и несколько лет работал на Кировском заводе. Но интерес к задачам раскроя у него остался, и он был руководителем аспирантки Э.А. Мухачевой (1930–2011), которая в дальнейшем создала в Уфе целую школу специалистов по оптимальному раскрою.

[5] Цитируем: "Беглое ознакомление авторов с одним проектом заказа материалов для вагоностроительного завода показало, что примерно в 50 % случаев, когда намечался заказ мерных длин, оказалось возможным с таким же или почти таким же успехом использовать материал торговых длин".

Началось программирование раскройных алгоритмов. Здесь использовался модифицированный симплекс-метод с генерированием столбцов. Первая программа была написана В.А. Булавским и М.А. Яковлевой (Булавский, Яковлева, 1961) (в машинных кодах), она опубликована в 1961 г., но выполнена раньше. В программе моделируется упоминавшийся выше “калечный” метод вычисления шкалы индексов: строится двухсторонний цепной список скачков шкалы, и этот список корректируется с учетом начальной части, которая уже построена.

В Ленинградском государственном университете был написан целый ряд программ для решения задач линейного программирования с генерированием столбцов (см., например, (Романовский, 1969; Грибов, 1973)), среди таких генераторов наиболее важное место занимали генераторы раскроев для линейной задачи и плоской задачи с гильотинным раскроем.

В Уфимском авиационном институте ученица Г.Ш. Рубинштейна Элита Александровна Мухачева создала научную школу, занимающуюся практически всеми аспектами оптимального раскроя.

Начались исследования дискретных задач построения оптимальных раскроев. Этот круг задач оказался очень популярным в связи с изучением трудоемкости дискретных экстремальных задач. Среди тех, кто изучал их, был и автор известной книги (Гэри, 1982).

В Петрозаводске в Карельском НИИ лесной промышленности по инициативе Иосифа Васильевича Соболева развернулась работа по оптимизации распиловки древесины. Это производство было особенно важно ввиду того, что давало огромную валютную прибыль.

В области фигурных укладок и многомерных укладок большую известность приобрела харьковская школа, возглавляемая В.Л. Рвачевым (1826–2005) и Ю.Г. Стояном.

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ

В 1971 г. Сибирское отделение издательства “Наука” выпустило в Новосибирске второе издание книги Л.В. Канторовича и В.А. Залгаллера под немного укороченным названием – “Рациональный раскрой промышленных материалов”. Текст первого издания сохранился практически полностью. Были сделаны два добавления: в качестве четвертой главы полностью включена упоминавшаяся выше брошюра (Залгаллер, 1956) и отдельно обзор литературы по раскрою, приготовленный В.А. Залгаллером специально для этого издания. В значительной степени обзор был выполнен по данным реферативных журналов. Кроме того, В.А. Залгаллер получил несколько подробных обзоров от руководителей крупных коллективов: от Ю.Г. Стояна из Харькова, от И.В. Соболева из КарНИИЛП.

Всего в эту библиографию вошло более 800 работ на русском, а также азербайджанском, английском, болгарском, венгерском, немецком, польском, украинском, финском, французском, чешском, шведском, эстонском и японском языках. При таком изобилии языков составитель предпочел иногда давать краткие пояснения, о чем идет речь в описываемом источнике.

Издание вышло тиражом 4600 экз., очень быстро исчезло из продажи и стало, как и первое, библиографической редкостью.

ПОСЛЕ ВТОРОГО ИЗДАНИЯ

За эти 40 лет произошли всем известные фантастические изменения в технике: компьютеры с огромной памятью, быстродействием, средствами отображения информации, электронные сети связи, проникновение электронной техники в звукозапись, фотографию, полиграфию – все это полностью изменило технический мир.

Многое изменилось и в раскрое.

Очень важной областью применения технологий раскроя является судостроение. Здесь нужно учитывать дороговизну материалов, сложность вырезаемых заготовок и дискретность заданий. С учетом всего этого еще в 1960-е годы появились новые средства раскроя, которые сразу же стали делать автоматически управляемыми и сопрягать с компьютерами. Часто раскрой сочетается с гибкой (изгибанием) заготовок, ее также стали делать автоматически управляемой, и появились программы, управляющие этим процессом. Сейчас можно считать, что новые разработки алгоритмов могут появиться только в рамках существующих специализированных систем, в которых имеются опробованные стандарты описания деталей, банки данных и набор конкурирующих алгоритмов.

В швейной промышленности раскрой с помощью компьютеров стал нормальным делом. Большое внимание сейчас уделяется согласованию плоских выкроек и вида изделия в носке: заказчику показывают, как будет выглядеть заказываемое изделие на конкретной фигуре, причем в движении[6].

Феноменальные изменения произошли в производстве плоского стекла. В конце 1950-х годов в Англии появился новый технологический процесс – флоат-процесс – с непрерывным производством стеклянного полотна. В технологическую цепочку этого процесса были включены компьютеры, оперативно составляющие карты раскроя, управляющие резкой стекла и его перемещением.

Изменение условий хозяйствования в связи с перестройкой стимулировало использование методов оптимального раскроя.

В книге 1971 г. много внимания уделялось оптимизации распиловки бревен. Эта проблематика тоже сохранилась и тоже изменилась. В Карельском НИИЛП работы по оптимизации распиловки бревен, на которые много ссылался В.А. Залгаллер, надолго прекратились (одной из последних была книга (Соболев, 1981)), но они ведутся в других местах, а в Карелии тоже возобновлены. В недавней диссертации (Шако, 2009) я встретил такие слова: “Первые компьютерные программы расчета поставов были разработаны под руководством к.т.н. Соболева И.В. в КарНИИЛПе. В дальнейшем под руководством проф. Калитеевского Р.Е. и проф. Алексеева А.Е. были разработаны более совершенные программы расчета поставов”.

Совсем недавно вышла книга (Калитеевский, Артеменков, Тамби, 2010), в которой подробно описывается эта проблематика с учетом возможностей российских предприятий лесопереработки. Но профессор Калитеевский сказал мне в телефонной беседе, что до реального использования управления поставами нашим предприятиям еще, к сожалению, очень далеко.

Что же касается Карелии, то прекращение работ по поставам не означало прекращения работ по раскрою. Другие задачи исследуются и решаются.

Особо хочется сказать про разрабатываемую там задачу о производстве тары из гофрированного картона. Этот картон производится на специальной машине – гофроагрегате и сразу поступает в переработку. Выходящая из машины непрерывная лента фиксированной ширины разделяется специальным ножом на две ленты, причем положение ножа можно достаточно просто в начале смены изменить. После этого поперечные ножи делят каждую из получившихся лент на прямоугольники. У каждой ленты размер прямоугольника можно задать отдельно, но тоже только в начале смены. Получившиеся таким образом прямоугольники поступают на дальнейшую обработку, которая может быть у каждого прямоугольника своя: он подвергается гильотинному раскрою, в получившихся деталях делаются просечки и сгибы (рилевка), затем детали собираются в комплекты. Разрешается компоновать в одном раскрое детали нескольких разных ящиков, но, как правило, ящики каждой смены должны в ней комплектоваться полностью. Это условие сильно затрудняет выбор сбалансированных раскроев и при неумелом выборе влечет большие отходы.

Авторы разработки (Воронин, Кузнецов, 2000) сообщили нам, что система, запущенная первоначально в 1995 г. на Архангельском ЦБК, внедрена сейчас уже на 16 предприятиях, выпускающих изделия из гофрокартона, причем возможности системы постепенно увеличиваются. Гофроагрегаты стали значительно более сложными, увеличилось число продольных ножей и

[6] Здесь можно вспомнить, что в далеком 1956 г. Л.В. Канторович предвидел использование вычислительных машин для рисования мультфильмов, и это предвидение казалось тогда совершенно несбыточным. Но рисование мультфильмов прямо для заказчика – и сейчас еще кажется чудом.

упростилась их переустановка, часть рилевочных операций может выполняться продольными ножами и т.д. Свежий обзор состояния проблемы можно найти, например, в (Сошкин, 2009).

Более сложные постановки задач, в которых выбор раскроев сочетался с использованием продукции (например, в связи с последующей транспортировкой), рассматривались в (Кузнецов, 2004).

ПЛАНИРУЕМОЕ ТРЕТЬЕ ИЗДАНИЕ

Сейчас готовится к выпуску третье издание книги, которое будет повторять второе издание с небольшими изменениями и дополнениями.

Хотелось продолжить библиографический обзор, выполненный В.А. Залгаллером для второго издания, но это оказалось и невозможным, и нецелесообразным. Во-первых, в разы вырос объем исследований, и сейчас уже можно делать обзор обзоров. Во-вторых, появились обзоры в Интернете, в том числе выполненные фирмами, работающими в конкретных областях. В качестве примеров можно назвать очерк развития флоат-процесса в стекольном производстве (Tihonoff design, 2011; Pilkington PLC, 2011), информационные материалы от фирм, занимающихся раскроем в судостроении (Ритм-Судно, 2011), швейном производстве[7] (САПР ГРАЦИЯ, 2011) и др.

По задаче укладки кругов в прямоугольник информация в Интернете (Packomania, 2011) оказалась настолько обширной и удачной, что мы не включили в новое издание небольшую таблицу раскладок кругов из второго издания, а ограничились ссылкой.

Небольшой комментарий для третьего издания написал В.А. Залгаллер. В обзоре, составленном в основном Э.А. Мухачевой и ее учениками, будут кратко описаны основные направления развития алгоритмов поиска раскроев как в непрерывных, так и в дискретных задачах, – направления, наиболее характерные для нескольких последних десятилетий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Атомный проект СССР (1999): Документы и материалы / Под общей ред. Л.Д. Рябева. Т. II. Кн. 1. М.: Изд. МФТИ. С. 495–498.

Булавский В.А., Яковлева М.А. (1961): О решении задач оптимального раскроя линейных материалов на электронных вычислительных машинах. В кн.: “*Линейное программирование. Труды научного совещания о применении мат. методов и экон. исслед. в планировании*”. 1960. Т. 4. М. С. 83–87.

Воронин А.В., Кузнецов В.А. (2000): Прикладные оптимизационные задачи в целлюлозно-бумажной промышленности. Петрозаводск: Изд-во Петрозаводского гос. ун-та.

Грибов А.Б. (1973): Алгоритм решения задачи плоского раскроя // *Кибернетика.* № 6. С. 110–115.

Гэри М., Джонсон Д. (1982): Вычислительные машины и трудноразрешимые задачи. М.: Мир.

Данциг Дж. (1966): Линейное программирование, его применения и обобщения. М.: Прогресс.

Залгаллер В.А. (2011): Воспоминания о совместной работе с Леонидом Витальевичем Канторовичем // *Экономика и мат. методы.* Т. 47. № 4.

Залгаллер В.А. (1956): Новое в составлении поставов для распиловки бревен. Вып. 67. Л.: ЦНИИЛ “Севзаплес”.

Калитеевский Р.Е., Артеменков А.М., Тамби А.А. (2010): Информационные технологии в лесопилении. СПб.: Профи.

Канторович Л.В. (1942): Методы рационального раскроя металла // *Производственно-технический бюллетень НК боеприпасов СССР*. № 7–8. С. 21–29.

Канторович Л.В., Гавурин М.К. (1949): Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // *Проблемы повышения эффективности работы транспорта.* М., Л.: Изд-во АН СССР. С. 110–138.

[7] Система ГРАЦИЯ, созданная в Институте проблем машиностроения АН Украины под руководством проф. Ю.Г. Стояна. Сейчас эта система работает на 110 предприятиях.

Канторович Л.В., Залгаллер В.А. (1951): Расчет рационального раскроя промышленных материалов. Л.: Лениздат.

Канторович Л.В., Залгаллер В.А. (1971): Рациональный раскрой промышленных материалов. Новосибирск: Наука.

Канторович Л.В. (1949): Подбор поставов, обеспечивающих максимальный выход пиломатериалов в заданном ассортименте // *Лесная промышленность.* № 7. С. 15–17; № 8. С. 17–19.

Канторович Л.В. (1959): Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР.

Кузнецов В.А. (2004): Математические модели, методы и программные комплексы оптимального раскроя и комплектовки с учетом дополнительных ограничений. Автореф. дис. … докт. техн. наук. Петрозаводск.

Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый (2002): В 2 т. / Редакторы-составители В.Л. Канторович, С.С. Кутателадзе, Я.И. Фет. Т. 1. Новосибирск: Изд-во СО АН РАН.

Романовский И.В. (1969): Решение задачи гильотинного раскроя методом переработки списка состояний // *Кибернетика.* № 1.

Соболев И.В. (1981): Управление производством пиломатериалов. М.: Лесная промышленность.

Сошкин Р.В. (2009): Задачи оптимального раскроя гофрополотна и методы их решения. Автореф. дис. … канд. техн. наук. Петрозаводск.

Шако О.И. (2009): Раскрой бревен в гибких технологиях лесопиления. Автореф. дис. … канд. техн. наук. М.

Gilmore P.C., Gomory R.E. (1961, 1963): A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem // *Operations research*. I – Vol. 9. № 6; II – Vol. 11. № 6.

Tihonoff desing [Электронный ресурс] Процесс формования листового стекл на расплаве металла. Режим доступа http://tffd.ru/article/100-process-of-formation-of-sheet-glass-on-metal.html, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: май 2011 г.).

Pilkington PLC [Электронный ресурс] Флоат-стекло. Режим доступа: http://www.pilkington.com/europe.russia/rusian/about+pilkington/technology/float/default.htm, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: май 2011 г.).

РИМ-СУДНО [Электронный ресурс] Автоматизированная система Римт-Судно. Модуль РАСКРОЙ. Открытое акционерное общество “Центр технологии судостроения и судоремонта” (ранее ФГУП “ЦНИИТС”). Режим доступа: http://www.private.peterlink.ru/poleshchuk/cad/system.htm, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: май 2011 г.).

САПР ГРАЦИЯ [Электронный ресурс] История развития САПР. Режим доступа: http://www.saprgrazia.com/history.php, свободный. Заг. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: май 2011 г.).

Www.packomania.com [Электронный ресурс] ©E. Specht. Режим доступа: http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: май 2011 г.).

Поступила в редакцию
10.06.2011 г.

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2011, том 47, № 4, с. 44–46

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЛЕОНИДА ВИТАЛЬЕВИЧА КАНТОРОВИЧА

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ РАСЧЕТОВ: УПУЩЕННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ

© 2011 г. В.И. Жиянов, Г.И. Шепелев

(Москва)

Из более чем пятнадцатилетнего московского периода творческой жизни Л.В. Канторовича одиннадцать лет приходятся на его работу во Всесоюзном НИИ системных исследований ГКНТ и АН СССР (ныне Институт системного анализа РАН). В, как всегда, многосторонней научной и научно-организационной деятельности Л.В. Канторовича этого периода мы хотели бы остановиться на той ее стороне, которая была связана с его стремлением стимулировать экономическое развитие нашей страны за счет более широкого использования оптимизационных расчетов. К сожалению, научные и научно-практические идеи Л.В. Канторовича, связанные с этим направлением инновационных преобразований, остались, по нашему мнению, не до конца понятыми и не в полной мере оцененными.

Уже к 1965 г., а скорее всего еще ранее, у Л.В. Канторовича сформировалось четкое понимание значимости оптимизационного подхода к совершенствованию планирования на всех уровнях, осознание его универсальности и твердое убеждение в необходимости широкого распространения оптимизационных расчетов. В их относящейся к тому времени совместной с академиком С.Л. Соболевым записке, направленной президенту АН СССР академику М.В. Келдышу, отмечалось, что “недооценивается значение и возможный эффект оптимального планирования, а также та коренная перестройка планирования экономических показателей, управления, которую она за собой влечет” (Соболев, Канторович, 2004).

С усложнением производственно-технологических и соответствующих организационно-экономических систем, ростом масштабов экономики, происходившими в это время, все более высокие требования стали предъявляться к обоснованию принимаемых решений. Недостаточно аргументированные решения не только не позволяли получить ожидаемого прироста выпуска конечной продукции, повышения ее качества и экономии ресурсов, но и приводили к значительному ущербу, сказывавшемуся и в смежных отраслях. Это проявлялось и в случае решений, принятых по аналогии, основывающихся лишь на опыте решения сходных предшествующих проблем, возникших в менее сложной обстановке.

Стало ясно, что необходим новый подход к решению сложных проблем, в рамках которого происходил бы перенос знаний из одной области в другую и интеграция разнородных знаний в эффективную производственно-организационную систему, решающую возникшую проблему. По мере того как почти все профессиональные виды человеческой деятельности все более специализировались, интеграция разнородных и разнообразных знаний в единое целое стала важнейшим научным императивом. Не сочетание случайных элементов и факторов, а целенаправленное формирование интегрированных систем и механизмов, – вот доминирующая идея этой концепции. Цель такого объединения – новое видение сложных практических проблем и новый подход к их решению, в рамках которого место многочисленных разрозненных частных знаний, волюнтаристски “объединяемых” зачастую интуитивными суждениями, занимают структуры целостного знания, полученные за счет привлечения методов системного анализа. При этом достаточно часто эффективные изменения в производстве оказываются связанными не столько с новыми образцами техники, сколько с новыми технологиями, многие из которых могут быть реализованы комбинациями уже имеющихся технических, технологических и экономических решений.

По твердому убеждению Л.В. Канторовича, путеводной звездой на этом пути могли быть оптимизационные расчеты как средство выявления и упорядоченного преобразования (чаще всего уже наличествующих) знаний и локальных технологий в системы и механизмы решения практических проблем в предположении, что их природа такова, что хотя бы один комплекс средств, обеспечивающих решение, существует или может быть спроектирован. В значительной мере анализ проблем направлен теперь на преодоление “узких мест”, проявившихся в результате анализа.

Думается, что именно по этой причине Л.В. Канторович в 1976 г. перешел из Института управления народным хозяйством во ВНИИСИ. По-видимому, немаловажную роль играл при этом тот факт, что ГКНТ СССР играл в то время роль общегосударственного координатора общегражданских (необоронных) исследований и разработок. В ГКНТ с использованием кадрового потенциала ВНИИСИ Л.В. Канторович при поддержке академиков В.А. Кириллина и С.С. Шаталина создал постоянно действующую комиссию по использованию оптимизационных расчетов в отраслях народного хозяйства (Канторович и др., 1978). В разное время членами комиссии были практически все видные ученые-экономисты и эксперты-практики республик нашей страны, а также ряд крупных математиков.

Характерной особенностью работы комиссии, руководимой Л.В. Канторовичем, помимо таких традиционных для научных советов и комиссий видов деятельности, как проведение конференций, конкурсов программных продуктов, выпуска каталогов применяемых оптимизационных задач, был анализ состояния использования оптимизационных расчетов в конкретных отраслях народного хозяйства и проведение слушаний на эту тему. Л.В. Канторович рассматривал эту сторону деятельности комиссии как средство поддержки работы ученых и практических работников на местах. В результате таких слушаний достаточно часто становилось ясно, что увеличение объемов производства, в том числе за счет роста производительности в отдельных звеньях технологической цепочки (локальная оптимизация), приводили к неэффективному расходованию ресурсов и, в конечном счете, к снижению объемов выпуска конечной продукции.

Показательным в этом отношении был, например, анализ использования оптимизационных расчетов в подотрасли производства сахара. Значительную предварительную работу в этом направлении провели специалисты Института математики Академии наук Киргизии. Выяснилось, что из-за отказа от достижения максимума общесистемного критерия – количества производимого сахара – и погони за ростом производства в отдельных переделах подотрасль столкнулась со значительными трудностями.

Ориентация на рост урожайности сахарной свеклы и стимулирование работников на основе этого показателя привели к постепенному вытеснению высоко сахаристых сортов урожайными, но менее сахаристыми. Сахароперерабатывающие заводы, спроектированные под меньшие объемы переработки, не справлялись в срок со своей задачей по росту выпуска сахара, хотя выполняли и перевыполняли планы переработки. Долго хранящаяся, из-за высоких урожаев, свекла “текла”, теряя сахар, а заводы, вынужденные работать практически круглогодично, не имели времени на профилактику и реконструкцию.

Ответы на рекомендации комиссии, полученные ГКНТ из соответствующих минсельхозов, показали, что достаточно простая и наглядная перестройка технологии производства и механизмов стимулирования работников требует большого числа согласований и внесения значительных изменений в привычные процедуры работы. Л.В. Канторович задолго предвидел это, отмечая, что “осуществление системы оптимального планирования требует коренной перестройки работы плановых и хозяйственных органов и органов управления, разработки новых плановых и экономических показателей, подготовки новых кадров. Таким образом, это дело более сложное, чем создание ядерной или ракетной техники, так как оно затрагивает все отрасли народного хозяйства” (Соболев, Канторович, 2004). В результате работы комиссии были выявлены и другие подобные проблемы.

По предложению Л.В. Канторовича и при поддержке руководства Главного управления вычислительной техники и систем управления ГКНТ к концу 1985 г. была разработана подпрограмма по стимулированию использования оптимизационных расчетов в народном хозяйстве как часть программы развития применений информационных технологий, подготовленная управлением. Подпрограмма была принята и включена в программу. Однако болезнь Л.В. Канторовича и его кончина привели к отторжению этих предложений, а вскоре и сама комиссия была упразднена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Канторович Л.В., Чешенко Н.И., Зорин Ю.М. и др. (1978): Об использовании оптимизационных расчетов в АСУ отраслями народного хозяйства // Экономика и мат. методы. Т. XIV. Вып. 5.

Соболев С.Л., Канторович Л.В. (2004): Основные препятствия на пути широкого применения оптимального планирования в народном хозяйстве (записка, направленная М.В. Келдышу, президенту АН СССР, март 1965 г.). В кн. "*Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый*". Т. 2. С. 304–306. Новосибирск: изд-во СО РАН, филиал "Гео".

Поступила в редакцию
10.06.2011 г.

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2011, том 47, № 4, с. 47–52

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЛЕОНИДА ВИТАЛЬЕВИЧА КАНТОРОВИЧА

ЛЕОНИД ВИТАЛЬЕВИЧ И СУДЬБА ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

© 2011 г. Я.И. Фет

(Новосибирск)

Я приехал в Академгородок летом 1961 г. Здесь все только начиналось. Здания Института математики еще не было. Строители только возводили его стены. Есть такая замечательная фотография, где Сергей Львович Соболев с радостью и надеждой смотрит на эти стены.

Дома ученых тоже не было. На той стороне Морского проспекта был густой лес. Однажды вечером я куда-то шел по правой стороне, где уже стояли жилые дома. Вечера у нас летом длинные, светлые. Людей на проспекте практически нет, но еще не стемнело. Вижу: из леса, в том месте, где сейчас Малый зал Дома ученых, выходит огромный, красивый лось. Он постоял некоторое время на обочине, посмотрел в обе стороны вдоль проспекта и медленно вернулся в лес. Кажется, ему не понравилось то, что делают здесь люди.

А мне – понравилось…

* * *

Мой первый рабочий день в качестве сотрудника ИМ – 22 мая 1961 г. В то время здание института еще не было построено, большинство отделов и лабораторий размещались в квартирах жилого дома (Морской проспект, д. 32). В названии института еще стояли слова "Институт математики с вычислительным центром". Лишь в 1964 г. был организован самостоятельный академический институт Вычислительный центр СО АН СССР, который возглавил Г.И. Марчук.

Однако в Академгородке уже работала на полную мощность одна из первых советских вычислительных машин "М-20", она имела следующие характеристики:

– элементная база – вакуумные радиолампы (машина 1-го поколения) в количестве 1600 штук;

– номинальное быстродействие – 20 тысяч операций с плавающей запятой в секунду (сейчас мы сказали бы "20 килофлопс");

– емкость оперативной памяти – 4 тыс. 45 разрядных слов;

– потребляемая мощность – 100 кВт;

– занимаемая площадь – 170 м^2.

Сейчас эти характеристики не вдохновляют. Но в 1961 г. эта машина, разработанная в Москве, в ИТМиВТ, под руководством Сергея Алексеевича Лебедева, была одной из лучших вычислительных машин в мире.

Машина находилась в здании Института геологии (он был построен одним из первых на Университетском проспекте, как раз напротив будущего Института математики) и занимала весь первый этаж ИГГ.

* * *

Это было время восторженного увлечения наукой, кибернетикой, ЭВМ. Вспомним: 6 апреля 1961 г. Андрей Николаевич Колмогоров с огромным успехом прочитал свой доклад "Автоматы и жизнь"; 12 апреля Юрий Гагарин стартовал в космос; "Литературная газета" (не без основания) писала: "Раньше мальчишки убегали в Америку к индейцам, теперь они убегают в Академгородок, к Ляпунову". Это было время хрущевской "оттепели", которую многие наивные энтузиасты приняли за серьезное изменение климата.

Сама организация Сибирского отделения воспринималась как огромный, фантастический эксперимент (конечно, *кибернетической* направленности). Организаторы СО АН СССР Михаил Лаврентьев и Сергей Соболев лучше других понимали, что может дать математика, умноженная на вычислительную технику.

Я хорошо помню разговоры, которые велись в то время (на разных уровнях) о редком и многообещающем содружестве ученых и инженеров в нашем институте, об уникальных возможностях для создания сверхбыстродействующих ЭВМ путем плодотворного сотрудничества инженеров Отделения вычислительной техники с математиками теоретических отделов.

Всеми работами по вычислительной технике руководил заведующий соответствующим отделением, заместитель директора института Э.В. Евреинов.

Евреинов объявил, что мы вскоре добьемся производительности 10^{12} в габаритах спичечной коробки.

К сожалению, волны надежды и успеха довольно быстро затихли, они разбились, как это всегда бывает, о негодный человеческий материал.

* * *

Итак, 22 мая 1961 г. я пришел в машинный зал М-20. До этого я работал несколько лет на заводе, в Новосибирске, и имел некоторый опыт проектирования измерительной радиоаппаратуры.

В первые дни мне казалось, что это – сон: в Академгородке была свобода!

В Новосибирске, на заводе – жесткая пропускная система. Когда я приехал на этот завод после окончания Одесского института связи, то я застал еще времена, когда рабочий день начинался по гудку, и все должны были успеть пройти через проходную на территорию завода до того, как прекратится этот гудок. В противном случае – проработка, объяснения, всякие неприятности. В течение рабочего дня выход за проходную – по специальной “увольнительной”, которую выписывает некий охранник, если найдет твою причину уважительной.

В Институте математики – полная самостоятельность. Я иду в машинный зал тогда, когда мне это нужно, иду на перерыв (или не иду) тогда, когда хочу. Но самое главное преимущество – свобода работать в читальном зале. В то время библиотека (ГПНТБ) еще не имела своего здания, его возводили в городе. Поэтому временно устроили (все в том же здании Института геологии!) журнальный читальный зал со свободным доступом. Я не поверил своим глазам, когда в первый раз пришел туда: довольно большой зал, уставленный стеллажами с множеством советских и иностранных научных и технических журналов. Здесь же – столики для работы. Свободный доступ! Если я знакомлюсь с нужной статьей и встречаю ссылку на другую статью, в другом журнале, то я просто подхожу к соответствующему стеллажу, нахожу необходимый журнал, год и номер (как правило, я это нахожу, и нахожу достаточно быстро!), и вот на моем столике нужная ссылка. Таких читальных залов я больше не встречал…

В этом зале я знакомился с основами архитектуры ЭВМ.

* * *

Поначалу Эдуард Владимирович поручил мне, вместе с другими институтскими инженерами, провести работы по модернизации некоторых устройств М-20. Вскоре он заговорил о необходимости самостоятельной исследовательской работы, о поисках подходящей тематики и т.д. Однажды он сказал: “Леонид Витальевич Канторович предлагает идею создания специализированной ЭВМ для математико-экономических расчетов. Не хотите ли вы заняться этой темой?” Я согласился, и на следующий день Э.В. познакомил меня с Леонидом Витальевичем. Теперь я понимаю, что это было главное событие в моей жизни!

Мне посчастливилось в течение многих лет работать и общаться с Л.В. Конечно, мы с ним обсуждали, главным образом, вопросы, связанные с архитектурой ЭВМ. Это сотрудничество было наиболее тесным в 1960-е годы, когда Л.В. жил в Академгородке. Но оно не прекратилось и позже, когда он переехал в Москву.

Я мог бы вспомнить много интересных эпизодов, связанных с нашими встречами. Но сейчас нужно сказать о главном, о том, как Л.В. пытался повлиять на развитие советской вычислительной техники. (В таких случаях Иосиф Владимирович Романовский обычно охлаждал его: “Леонид Витальевич, вы опять хотите осчастливить человечество? Оставьте! Человечество не хочет быть счастливым…”)

* * *

Круг интересов Леонида Витальевича был необычайно широк. В течение длительного времени он уделял большое внимание вопросам машинной реализации сложных вычислительных процессов, предлагал оригинальные структурные и математические решения, руководил разработкой и внедрением новых вычислительных устройств. Ему принадлежит ряд изобретений в этой области. Я не буду здесь перечислять все предложенные Л.В., до его переезда в Новосибирск, идеи и практические результаты. Об этом подробно рассказано в главе II двухтомника “Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый”[1].

В начале 1960-х годов Л.В. выдвинул идею “усиления” вычислительных возможностей универсальных ЭВМ путем комплексирования их со специализированными процессорами, “приставками”, ориентированными на массовые вычисления, характерные для того или иного класса задач. В частности, он предложил разработать быстродействующий специализированный процессор с микропрограммным управлением и использовать его как приставку к действующим или проектируемым универсальным ЭВМ с целью повышения их эффективности. В это время Л.В. Канторович переезжает в Новосибирск в Институт математики СО АН СССР. Здесь под его руководством и при его участии был разработан векторный конвейерный процессор для эффективного решения задач линейной алгебры и линейного программирования. Эта приставка получила название “арифметической машины”, или “АМ”.

В машине АМ был использован предложенный Л.В. *роторный* принцип организации массовых арифметических операций. Роторное арифметическое устройство работало с предельной (для заданного типа элементов) скоростью, ограниченной только быстродействием оперативной памяти, откуда операнды поступали в АУ. Следует сказать, что некоторые архитектурные решения, положенные в основу этой системы (прямой доступ к ОЗУ, конвейерная организация обработки и т.д.), впоследствии получили широкое распространение в отечественных и зарубежных машинах.

* * *

В первое время я работал один. У меня была отдельная комната в доме 32 на Морском проспекте (в этом доме временно размещался Институт математики). Если я не ошибаюсь, это была маленькая угловая комната на первом этаже. Окно выходило во двор, напротив трансформаторной будки. Я и сейчас с теплым чувством смотрю на эту будку, проходя мимо 32-го дома.

В течение некоторого времени я работал в своей “квартире № 1” и в замечательном читальном зале. Советовался с Л.В., уточняя его взгляды на приставку.

На первых обсуждениях я ничего не понял: я только-только начал разбираться в структурных схемах вычислительных устройств, что и как делается в существующих машинах. Соответствующих книг тогда еще не было, а мне нужно было серьезно ознакомиться с методами синтеза дискретных логических схем: минимизация, построение сумматоров, способы ускоренного умножения и др.

Постепенно вырисовывались контуры структурной схемы и основные требования к функциональным элементам. В начале 1962 г. появились первые результаты: переплетенный машинописный том, озаглавленный “Эскизный проект быстродействующей арифметической машины. Техническое описание. Новосибирск, 1962”. Этот том сохранился, сейчас я держу его в руках.

[1] Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый / Редакторы-составители В.Л. Канторович, С.С. Кутателадзе, Я.И. Фет. Новосибирск: Изд-во СО РАН, Филиал “Гео”. 2004. Т. 2. С. 21–56.

* * *

Л.В. старался расширить и ускорить работы. Он предложил мне пригласить в Отделение математической экономики несколько хороших инженеров для дальнейшей работы над АМ. У меня появились помощники: инженеры В.С. Лозовский, И.В. Иловайский, студенты.

Так же, как и в ходе предыдущих своих разработок, Леонид Витальевич настойчиво добивался изготовления и применения нового процессора. При этом ему приходилось затрачивать большие усилия на преодоление тупого сопротивления чиновников, на решение штатных, финансовых вопросов, вопросов снабжения и т.д. Наконец, он добился приобретения для АМ логических элементов комплекса “Урал-10” (в Пензе, где эти машины разрабатывал тогда Б.И. Рамеев).

В какой-то момент, в результате некоторой переписки, а может быть моих командировок в Томск, в Академгородок приехал Владимир Михайлович Кашин – главный инженер Томского СКБ математических машин.

Часто говорят и пишут, какой притягательной силой обладал Леонид Витальевич. Вот и в данном случае, после недолгих переговоров Кашин “притянулся”. Определенную роль сыграла (минимальная хотя бы) независимость томской промышленности от Москвы (еще работали Совнархозы). В 1966 г., при поддержке Западносибирского Совнархоза, удалось поручить томскому СКБ опытно-конструкторскую проработку этой машины. В официальной документации СКБ она именовалась “Тема 27-66. Специализированная ЭВМ для экономических расчетов”.

В 1967–1968 гг. экспериментальный образец АМ (две стойки комплекса “Урал-10”) был изготовлен в Томске, а в 1969 г. установлен в машинном зале Вычислительного центра СО АН СССР, соединен с универсальной машиной М-20 и успешно прошел испытания. Достаточно сказать, что на векторно-матричных операциях машина АМ показала быстродействие на порядок бóльшее, чем универсальные машины, выполненные на такой же элементной базе.

В нашем архиве сохранился документ, датированный 13 ноября 1969 г.: “АКТ испытаний экспериментального образца вычислительной системы, состоящей из универсальной ЦВМ и специализированной ЦВМ”. Акт утвердил директор ВЦ СО АН СССР Г.И. Марчук.

Что же дальше? Вскоре после этих испытаний на Вычислительном центре проводились плановые перестройки, и нас попросили убрать из зала арифметическую машину. Наши стойки перенесли во двор, на склад, и постепенно… списали.

* * *

Один необычный эпизод из истории создания АМ хорошо характеризует настойчивость Леонида Витальевича при достижении своих целей и способность преодолевать препятствия.

Конец 1967 г. В Томске, в СКБ математических машин заканчивается монтаж опытного образца АМ. Для того чтобы приступить к отладке и испытаниям, остается получить из Пензы блоки питания (конечно, заранее заказанные и профинансированные). Но не тут-то было! Блоки питания комплекса “Урал-10” – достаточно сложные, громоздкие и главное – дефицитные изделия. Конец года, завод не справляется с плановыми заданиями...

Наконец, после длительных переговоров Леонид Витальевич добивается положительного решения Д. Жучкова (начальника 4-го главного управления Министерства радиопромышленности). И тогда завод соглашается поставить в Томск необходимые блоки, но... “при условии оказания помощи с Вашей стороны рабочей силой, а именно – командирования в наше распоряжение на срок 20 дней (в декабре с.г.) трех фрезеровщиков и трех токарей, способных выполнять работы не ниже четвертого разряда”. Стоило видеть, как академик Канторович, с помощью нескольких других академиков – руководителей Сибирского отделения, разыскивает в разных институтах Академгородка рабочих высокой квалификации и командирует их в Пензу!

Странно, но это подействовало! В январе 1968 г. шесть источников питания были отгружены, а 3 февраля 1968 г. – получены в Томске.

* * *

АМ, предложенная Л.В. Канторовичем и разработанная при его непосредственном участии, была, по-видимому, одним из первых векторных конвейерных процессоров – прообразом будущих суперкомпьютеров.

Леонид Витальевич больше, чем кто-либо другой, понимал, какое значение имеет высокое быстродействие вычислительных машин для экономики и технического прогресса. В течение нескольких лет он снова и снова пытается обратить внимание начальства на эти оригинальные разработки и найти пути к их серийному производству и практическому применению. Сохранилось много писем, которые относятся к концу 1960-х годов и подписаны Л.В. Канторовичем, С.Л. Соболевым, Г.И. Марчуком. Среди адресатов этих писем: В.А. Кириллин, М.Е. Раковский, В.Д. Калмыков, К.Н. Руднев, А.М. Ларионов[2] и другие. С этими руководителями, в чьих руках находилась судьба отечественного электронного машиностроения, Леонид Витальевич встречался также и лично.

Если бы эти начальники, с которыми мы воевали, прислушались к идеям и предложениям Леонида Витальевича, то вся история компьютеризации нашей страны, возможно, пошла бы по другому, здоровому, пути. А от этого зависит многое. Сейчас мы хорошо знаем, что информационные технологии, по существу, определяют всю жизнь страны и ее граждан.

К сожалению, именно в это время начальство приняло волевое решение – копировать устаревшие американские машины. На все доводы Леонида Витальевича был один ответ: "Разработка специализированных процессоров, ускорение существующих машин не нужны. В ближайшее время начнется производство семейства Единой системы машин, которые смогут решить все проблемы".

Теперь мы хорошо знаем, к чему привела такая "техническая политика". В 1992 г. Б.Н. Малиновский писал об этом[3]: *"На разработку ЕС ЭВМ были затрачены огромные средства. Копирование ИБМ-360 шло трудно, с многократными сдвигами намеченных сроков, потребовало огромных усилий разработчиков. <...> Если подумать об ущербе, который был нанесен отечественной вычислительной технике, стране, общеевропейским интересам, то он, конечно, несравнимо выше в соотношении с полученными скромными (не по затратам труда и средств!) результатами"*.

Говорят, однажды у японских компьютерных специалистов спросили, на сколько Советский Союз отстал в этой области. Ответ был: *навсегда*. Это похоже на правду.

* * *

Я уверен, что настойчивое стремление Л.В. изменить в разумном направлении техническую политику Советского Союза в области разработки, производства и использования вычислительных машин было связано с тем, что он относился к этим проблемам так же серьезно, как к развитию советской экономики в целом.

В связи с этими размышлениями я позволю себе привести здесь один фрагмент из моей беседы с Анатолием Моисеевичем Вершиком (Ленинград, 1999 г.), которая опубликована в двухтомнике[4]:

А.М. Его трагедия в том, что он не дожил буквально двух-трех лет до того времени, когда его интеллект, его идеи могли быть востребованы, может быть, что-то в них могло быть изменено <...>. Но его интеллект был совершенно необходим, является необходимым и сейчас.

[2] В те годы В.А. Кириллин – председатель Госкомитета СССР по науке и технике, М.Е. Раковский – заместитель председателя Госплана СССР, В.Д. Калмыков – министр радиотехнической промышленности, К.Н. Руднев – министр приборостроения, средств автоматизации и систем управления, А.М. Ларионов был Генеральным конструктором ЕС ЭВМ. – *Ред.*

[3] **Малиновский Б.Н.** (1992): История вычислительной техники в лицах. Книга 1. Академик С.А. Лебедев. Киев: Наукова думка. С. 80.

[4] Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый. Новосибирск: Изд-во СО РАН, Филиал "Гео". 2004. Т. 1. С. 165.

Никакой замены ему нет, я ее не вижу. Ему бы еще лет пять прожить, это было бы для России очень важно.

Я.И. Если так, то у меня возникает совершенно трагическое ощущение, что Леонид Витальевич, вернее, его отсутствие повлияло на судьбу России.

А.М. Каждый отъезд, каждая смерть влияет. Я не думаю, что вопрос о влиянии Леонида Витальевича имеет совершенно однозначный ответ. Более или менее крупные экономисты разного сорта, разных направлений, все они так или иначе испытали его влияние.

Я.И. А если бы это случилось, и он попытался бы повлиять, то к нему прислушались бы? <…>

А.М. Я уверен, что тут надо точно определить время. В девяносто первом, девяносто втором году прислушались бы, абсолютно точно. Потому что в то время ценные советы все-таки воспринимались, и их было не так много. Они сами искали. Сейчас сомнительно, а тогда, безусловно, искали.

Академик Канторович мог принести большую пользу России. К сожалению, она этого не захотела. Такая у нее судьба…

Поступила в редакцию
24.06. 2011 г.

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2011, том 47, № 4, с. 53–74

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЛЕОНИДА ВИТАЛЬЕВИЧА КАНТОРОВИЧА

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ВОПРОСАХ АНАЛИЗА ГРУЗОПОТОКОВ[1]

Л.В. Канторович, М.К. Гавурин

Предметом данной статьи является изложение новых, более совершенных и универсальных методов решения некоторых вопросов математического характера, связанных с рационализацией грузопотоков. Несмотря на большую работу, проведенную работниками железнодорожного транспорта по ликвидации нерациональных перевозок, проблема рационализации грузопотоков продолжает оставаться актуальной.

В одних случаях (встречные перевозки) возможности уменьшения затрат на транспорт видны непосредственно, в других случаях возможность уменьшения затрат связана с довольно сложным и сразу неочевидным перемещением грузопотоков, а потому может остаться незамеченной и неиспользованной.

Первая задача (задача А), которая рассматривается ниже, – организация наиболее рациональной перевозки однородного груза от пунктов производства к пунктам потребления. При этом объемы производства и потребления в каждом пункте считают заданными; также заданы затраты, связанные с передвижением вагона груза из одного пункта в другой. Требуется узнать, как следует прикрепить пункты потребления к пунктам производства (учитывая заданные объемы производства и потребления), чтобы получить наилучший с точки зрения народного хозяйства вариант перевозки данного груза. Под таким вариантом мы разумеем тот, для которого общая сумма затрат по передвижению данного груза будет минимальной[2].

Сначала мы излагаем общие соображения, на которых основаны развиваемые нами методы, затем показываем на нескольких примерах процесс решения поставленной задачи. Предлагаемый способ является эффективным; даже в весьма сложных случаях решение задачи может быть найдено в короткий срок.

Далее мы рассматриваем более сложную задачу (задача Б), когда имеется несколько различных однородных грузов, а также ряд грузов с точно определенными пунктами назначения и отправления; в данном случае при планировании перевозок имеет важное значение вопрос о питании порожняком. Решение этого вопроса приводит к решению нескольких задач типа задачи А и потому может быть осуществлено теми же методами.

Ниже рассматривается задача В, отличающаяся от задачи А некоторым усложнением условий, а именно: некоторые магистрали имеют пропускную способность меньшую, чем мощность грузопотоков, для которых кратчайший путь проходит через данную магистраль. В этом случае приходится часть груза направлять кружным путем, и нужно добиться того, чтобы связанное с этим увеличение затрат оказалось минимальным. Решать задачи подобного типа возможно при помощи тех же методов.

Наконец, в заключение мы указываем на некоторые дополнительные обстоятельства, которые надо учитывать и на основании которых следует корректировать полученную схему перевозок.

[1] Впервые направлено в печать (в журнал "Железнодорожный транспорт") в декабре 1940 г. Опубликовано в 1949 г. в сборнике "Проблемы повышения эффективности работы транспорта". Изд-во АН СССР. С. 110–138.

[2] Задача А рассматривается в статье А. Толстого ("Социалистический транспорт". 1939. № 9. С. 28–51), однако в ней не дано законченного общего метода ее решения. См. также его брошюру "Методы устранения нерациональных перевозок при составлении оперативных планов" (Трансжелдориздат. 1941. С. 101); здесь подробно рассмотрены виды нерациональных перевозок и существующие методы анализа вопроса.

ЗАДАЧА А. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ

Рассмотрим задачу о наиболее целесообразном прикреплении пунктов потребления однородного груза к пунктам производства.

Суточный размер производства или потребления в вагонах (или тоннах) будем считать указанным[3]; на схемах мы будем писать число вагонов (тонн) в скобках около данного пункта – со знаком “плюс” у пунктов производства и со знаком “минус” у пунктов потребления. Затраты по передвижению вагона груза из одного пункта в другой будем считать заданными и на схемах будем отмечать их цифрой посредине участка, соединяющего данные пункты. Решение задачи заключается в том, чтобы найти такое прикрепление пунктов потребления к пунктам производства, при котором сумма затрат на транспорт была бы наименьшей. Казалось бы, что решение вопроса должен давать принцип кратчайших расстояний – прикрепление пунктов потребления к ближайшим, т.е. дающим минимальные затраты по доставке, пунктам производства. Однако проведение этого принципа в чистом виде оказывается невыполнимым даже в простейших случаях; частичное же выполнение его может привести к неправильному решению. Поясним это на двух весьма простых схемах.

Для случая, изображенного на рис. 1, ближайшим к пункту B пунктом производства является C. Однако если мы отправим 200 вагонов из C в B, то в пункт D, кроме остающихся 200 вагонов из C, нужно будет направить 400 вагонов из A. В результате получится явно нерациональный план перевозок, так как имеются встречные перевозки[4].

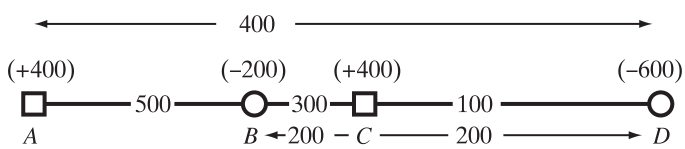

Рис. 1

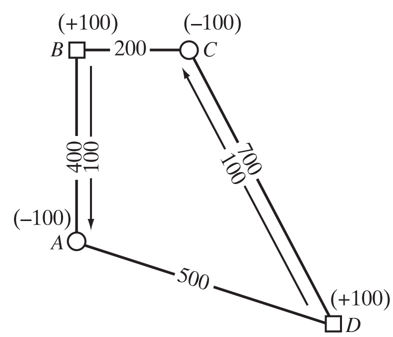

Рис. 2

В схеме, изображенной на рис. 2, прикрепляя A к B, мы также берем ближайший пункт производства. Однако данный план нерационален, так как сумма затрат для него составит $400 \times 100 + 700 \times 100 = 1100 \times 100$, тогда как, прикрепляя A к D и C к B, мы получили бы сумму затрат, равную $500 \times 100 + 200 \times 100 = 700 \times 100$.

В последнем примере встречных перевозок не имеется, и нерациональность плана становится ясной только путем сравнения с другим вариантом. В данном случае вариантов два; однако в более сложном, реальном случае число их может быть велико и потому непосредственное сравнение всех вариантов может оказаться практически неосуществимым.

Перейдем к изложению нашего метода, который позволяет избегнуть такого сравнения многих вариантов и дает возможность кратким путем проверить, является ли данный план наилучшим, и, в том случае, если это не так, указать способ его исправления. Основным для этого метода является понятие особой величины, которую мы будем называть *потенциалом перевозок*.

Обозначим через A, B, C,... все пункты, между которыми мы планируем перевозки, и пусть $\overline{AB}$ означает затраты на перевозку единицы груза из пункта A в пункт B. Пусть дан некоторый

---

[3] Предполагаем, что пункты погрузки и выгрузки указаны точно (железнодорожные станции). Если же погрузка или выгрузка указана по экономическим или административным районам, то такие районы можно заменять условно определенными станциями.

[4] Между прочим, на подобный нерациональный план перевозок может натолкнуть единая цена франко-станция отправления. При такой цене предприятию пункта B выгоднее получать снабжение из C, чем из A, и оно может добиться прикрепления к пункту C; тогда встречные перевозки окажутся неизбежными.

план перевозок из пунктов производства в пункты потребления. Мы будем называть план *потенциальным,* если с каждым из пунктов A, B, C,... можно связать некоторую величину U: U_A, U_B, U_C,... таким образом, чтобы удовлетворялись два следующих условия:

I условие. Разность значений величины U для любого пункта потребления B и пункта производства A не превосходит затраты (на единицу груза) по перевозке из A в B:

$$U_B - U_A \leq \overline{AB}.$$

II условие. Если при данном плане предусмотрена перевозка из A в B, то разность значений U совпадает с этой затратой:

$$U_B - U_A = \overline{AB}.$$

Такую величину U будем называть потенциалом перевозок, отвечающим данному плану.

Это название становится понятным, если привести следующую аналогию. Пусть запланирована перевозка из пункта A в пункт B и для перехода из A в B нужно преодолеть подъем A. Тогда высота (потенциал) пункта B будет превосходить на A высоту (потенциал) пункта A, т.е. разность потенциалов в этих пунктах будет равняться подъему h. Поэтому, если затраты на перевозку представить себе именно так, как подъем, то это будет соответствовать условию II. Очевидно, что если имеется некоторый другой путь, соединяющий пункты A и B, то подъем $\overline{AB}$ при нем должен быть не меньше разности высот этих пунктов – разности потенциалов. Это соответствует условию I.

Пусть нам дан некоторый план перевозок. Как узнать, будет ли он потенциальным, и как построить потенциал в том случае, если он существует?

Для построения потенциала мы должны использовать те пары пунктов, между которыми предусмотрены перевозки, так как для таких пар пунктов мы знаем разность значений потенциала (равную, согласно условию II, затратам на перевозку единицы груза из одного пункта в другой). По этим разностям нам и надлежит определить потенциал во всех пунктах. Поскольку нам заданы только разности значений потенциала, потенциал сохранит свои свойства, если мы изменим его значения во всех пунктах на одну и ту же постоянную величину. Таким образом, мы можем принять значение потенциала в одном пункте произвольным. Пусть, например, этот выбранный нами пункт есть пункт производства A. Тогда мы сможем определить значение потенциала в тех пунктах потребления, в которые, согласно плану, этот пункт отправляет свой груз. Пусть это будут пункты B_1, B_2, ... Затем мы сможем определить значение потенциала в тех пунктах производства, которые также направляют свой груз в один из пунктов B_1, B_2, ...

Таким путем, переходя от одного пункта к другому, мы сможем последовательно пытаться определять потенциал во всех пунктах. Однако не всегда можно это сделать, не приходя в противоречие с условием I. Чтобы уяснить себе этот вопрос, начнем с примеров.

Правильный план перевозок для задачи, данной на рис. 1, очевиден: надлежит отправить из A в B 200 вагонов и 200 вагонов в D, сверх того 400 вагонов из C в D. Определим потенциал для этого плана. Примем, например, $U_A = 0$. Так как из A совершается перевозка в B с затратой 500, то $U_B - U_A$ должно быть равно 500, т.е. $U_B = 500$. Так как для перевозки из A в B требуются затраты 1500, то $U_D = 1500$. Наконец, так как происходит перевозка из C в D с затратой в 700, то $U_D - U_C =$ $= 700$, или $U_C = U_D - 700 = 1500 - 700 = 800$.

Напротив, если бы мы попытались строить потенциал для первоначального плана, приведенного на рис. 1, то эта попытка не удалась бы. Действительно, полагая опять $U_A = 0$, мы должны были бы принять $U_D = 1500$, так как совершается перевозка из A в D, и далее $U_C = 800$, $U_B = 1100$. Тогда для пунктов A и B оказывается нарушенным условие 1, а именно: получаем $U_B - U_A = 1100 > \overline{AB} = 500$, т.е. в противоречии с условием.

В качестве третьего примера рассмотрим схему и план перевозок, приведенные на рис. 2. Примем $U_B = 0$; тогда по условию II должны иметь: $U_A = 400$. Так как точка D не связана грузопотоками с A и B, значение потенциала в ней не определено. Обозначим это неизвестное значение через α: $U_D = \alpha$. В таком случае мы должны иметь: $U_C = \alpha + 700$. Посмотрим, возможно ли хотя бы при каком-либо значении α выполнить условие I.

Применяя его к пунктам B и C, получаем:

$$U_C - U_B = \alpha + 700 \leq 200,$$

а применяя к пунктам A и D, получим:

$$U_A - U_D = 400 - \alpha \leq 500.$$

Таким образом, с одной стороны, должно быть $\alpha \leq -500$, с другой, $\alpha \geq -100$. Отсюда ясно, что такого α не существует, а потому для данного плана нельзя построить потенциал, удовлетворяющий обоим условиям (I и II). Следовательно, план непотенциальный.

В первом примере был взят наивыгоднейший исходный план, и он оказался потенциальным, в последних двух – план не был наивыгоднейшим и оказался непотенциальным. Всегда потенциальный план есть и наивыгоднейший, и наоборот. Точнее говоря, справедливы следующие два положения.

Положение 1. Если для данного плана имеется потенциал перевозок, то этот план является наивыгоднейшим, т.е. всякий другой план дает неменьшие суммарные затраты.

Через $A_1, A_2,..., A_m$ обозначим пункты производства, соответственно через $a_1, a_2,..., a_m$ – объем производства (в вагонах) в этих пунктах; через $B_1, B_2,..., B_n$ – пункты потребления и через $b_1, b_2,..., b_n$ – объемы потребления в них. Очевидно, должно быть $\sum_i a_i = \sum_k b_k$. Через $r_{ik} = \overline{A_i B_k}$ обозначим затраты по перевозке вагона груза из пункта A_i в B_k. Через h_{ik} обозначим число вагонов, направляемых из пункта A_i в B_k согласно данному плану перевозок (если перевозка не совершается, то $h_{ik} = 0$). По смыслу величин h_{ik} должно быть $\sum_i h_{ik} = a_i$ и $\sum_i h_{ik} = b_k$.

Согласно предположению для данного плана имеется потенциал перевозок – величина U, удовлетворяющая условиям I и II, которые при введенных обозначениях можно записать так:

I. $UB_k - UA_i \leq r_{ik}$ ($i = 1, 2, ..., m$; $k = 1, 2, ..., n$).

II. Если перевозка из Ai в Bk фактически осуществляется, т.е. $h_{ik} \neq 0$, то $UB_k - UA_i = r_{ik}$.

Подсчитаем сумму затрат по перевозкам при данном плане. Она равна

$$W = \sum_k \sum_i h_{ik} r_{ik} = \sum_i \sum_k (UB_k - UA_i) h_{ik}.$$

Действительно, если $h_{ik} \neq 0$, то соответственные произведения, стоящие в обеих частях равенства, равны между собой в силу условия II; если же $h_{ik} = 0$, то они оба равны нулю и равны между собой. Преобразуя дальше, получаем:

$$W = \sum_k U_{B_k} \sum_i h_{ik} - \sum_i U_{A_i} \sum_k h_{ik} = \sum_k U_{B_k} b_k - \sum_i UA_i a_i.$$

Пусть теперь дан некоторый другой план перевозок. Число вагонов, направляемых из A_i в B_k по этому плану, обозначим через h'_{ik}. Подсчитаем и оценим суммарные затраты по этому плану. Используя условие I, имеем:

$$W' = \sum_i \sum_k h'_{ik} r_{ik} \geq \sum_i \sum_k (U_{B_k} - U_{A_i}) h'_{ik} =$$

$$= \sum_k U_{B_k} \sum_i h'_{ik} - \sum_i U_{A_i} \sum_k h'_{ik} = \sum_k U_{B_k} b_k - \sum_i U_{A_i} a_i = W.$$

Итак, $W' \geq W$, т.е. действительно план, для которого имеется потенциал, дает наименьшие суммарные затраты.

Установленное предложение показывает, что если некоторый план дается в сопровождении потенциала перевозок (конечно, с выполнением условий I и II), то это служит гарантией того, что он наивыгоднейший. Верно также положение, обратное первому:

Положение 2. Всякий наивыгоднейший план является и потенциальным, т.е. для него существует потенциал перевозок, удовлетворяющий условиям I и II.

Полного доказательства этого положения приводить не будем, покажем лишь его идею, которая сводится к тому, что если для данного плана попытка построить потенциал не удается, то это объясняется нерациональностью плана. Следовательно, имея наивыгоднейший план, потенциал перевозок всегда можно построить. Покажем это на примере. На рис. 3 показан сплошными линиями заданный план перевозок (кроме изображенных на схеме станций и грузопотоков, могут быть еще и другие, здесь не приведенные).

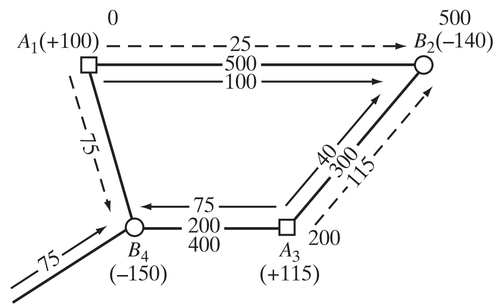

Рис. 3

Начнем определение потенциала с пункта A_1 и положим, например, $U_{A_1} = 0$ (значение потенциала в точке мы записываем рядом с ней). Из A_1 совершается перевозка в B_2, так что мы должны принять, по условию II, $U_{B_2} - U_{A_1} = \overline{A_1 B_2} = 500$, откуда $U_{B_2} = 500$. Далее, в B_2 производится перевозка из A_3, так что U_{A_3} мы должны определить из условия $U_{B_2} - U_{A_3} = \overline{A_3 B_2} = 300$. Отсюда $U_{A_3} = 500 - 300 = 200$. Таким же образом, U_{B_4} мы должны определить из условия $U_{B_4} - U_{A_3} = 200$. Следовательно, $U_{B_4} = 200 + 200 = 400$.

Допустим, что здесь мы обнаружили нарушение условия I и что затраты на перевозку из A_1 в B_4 по прямому пути будут меньше, чем разность потенциалов в этих точках:

$$\overline{A_1 B_4} < U_{B_4} - U_{A_1} = 400.$$

Это сразу показывает, что данный план можно улучшить, снизив общий объем перевозок. Для этого нужно направить 75 вагонов груза из A_1 непосредственно в B_4, и соответствующим образом изменить остальные перевозки. Получим схему перевозок, изображенную пунктирными линиями. Сравним затраты на перевозки (в пределах данной части схемы) при обоих вариантах. При первом варианте они равны

$$W_1 = 100 \times 500 + 40 \times 300 + 75 \times 200,$$

при втором

$$W_2 = 25 \times 500 + 115 \times 300 + 75 \times \overline{A_1 B_4} = 100 \times 500 + 40 \times 300 +$$

$$+ 75 \times \left(500 - 300 + 200 - \overline{A_1 B_4}\right) = W_1 - 75 \times \left(400 - \overline{A_1 B_4}\right).$$

Так как разность $400 - \overline{A_1 B_4}$, по предположению, положительна, то $W_2 < W_1$ и исправленный план экономичнее первоначального.

Таким же образом, всякий раз, когда мы, пытаясь построить на основании условия II потенциал перевозок для данного плана, нарушим условие I, это укажет на некоторую нерациональность плана и на способ, которым его можно улучшить.

Сделаем следующее замечание. Мы в нашем примере провели операцию исправления плана, которую будем называть снятием с кружного пути некоторого числа вагонов и направлением их по прямому пути. В рассмотренном примере мы сняли с кружного пути (A_1–B_2–A_3–B_4) 75 вагонов, т.е. уменьшили перевозки на тех участках этого пути, по которым перевозки производятся в направлении от A_1 к B_4, и для сохранения баланса в промежуточных пунктах увеличили на 75 вагонов перевозки на участках пути, по которым перевозки производятся в обратном направлении. При этом баланс нарушился только в крайних пунктах A_1 и B_4, а затраты на перевозку уменьшились на величину

$$75\ (U_{B_4} - U_{A_1}).$$

Для сведения баланса и в этих пунктах мы должны были направить 75 вагонов груза по прямому пути из A_1 в B_4, что вызвало увеличение затрат на $75 \times \overline{A_1 B_4}$. Общая экономия, таким образом, выражается величиной

$$75(U_{B_4} - U_{A_1} - \overline{A_1 B_4}).$$

Таким же образом и вообще, если в двух пунктах, A и B, потенциал определен, то с кружного пути, соединяющего эти пункты (составленного из участков, вдоль которых определяется потенциал), можно снять некоторое число m вагонов (наименьшее число, которое встречается на стрелках, идущих в направлении от A к B), так что баланс перевозок сохранится во всех пунктах этого пути, кроме крайних A и B. Затраты при этом уменьшатся на величину

$$m\,(U_B - U_A).$$

Иными словами, разность потенциалов всегда, так сказать, "реализуема".

Сформулированные выше два положения служат базой для всех излагаемых ниже методов нахождения наивыгоднейшего плана.

Пусть дан какой-нибудь план. Определяем последовательно от пункта к пункту потенциал. Если его удастся определить (с соблюдением условий I и II), то это будет служить гарантией того, что план наивыгоднейший. Обычно, если данный план взят на глаз, это будет не так, и при определении потенциала мы встретим противоречия (нарушение условий I и II); план будет заведомо ненаивыгоднейший. При этом рассуждения, проведенные при рассмотрении положения 2, показывают, при помощи какого исправления можно уменьшить затраты. На этом и основан метод решения задачи А, изложенный в следующем разделе.

ЗАДАЧА А

Здесь изложен метод нахождения наивыгоднейшего плана перевозок, который опирается на основные предложения, доказанные выше. При этом мы будем различать две задачи. Задача проверки того, является ли данный план наивыгоднейшим, и задача нахождения наивыгоднейшего плана прикрепления пунктов производства к пунктам потребления. Далее мы рассмотрим последовательно два случая – когда все пункты в плане связаны между собой и когда пункты разбиваются на несколько групп, не связанных грузопотоками одна с другой.

При рассмотрении примеров, не имея других данных о затратах по перевозкам (например, о себестоимости), мы берем в качестве меры затрат вагоно-километры, или, что то же самое, тонно-километры, как это обычно принимается на транспорте. Следовательно, наивыгоднейшим мы считаем план, дающий при соблюдении прочих условий минимальный вагоно-километраж. В этом случае затраты по перевозке на один вагон (выраженные в вагоно-километрах) равны расстоянию между пунктами. Следует сказать, что это является совершенно несущественным – метод решения не зависит от принятого способа измерения затрат и так же точно приведет к результату, если затраты будут измерены более совершенным образом.

Отметим еще, что, говоря выше о потенциале, мы определяли его только в пунктах погрузки и назначения. Однако при решении примеров иногда бывает выгодно определять его и в других пунктах (узлах); это всегда возможно в случае наивыгоднейшего плана без нарушения основных условий для потенциала. Наконец, обратим внимание на то очевидное обстоятельство, что если условия I и II для потенциала будут выполняться для любой пары соседних пунктов, т.е. связанных каким-то участком железнодорожного пути непосредственно, без захода в другие рассматриваемые пункты, то эти условия будут соблюдаться и всегда. Это замечание существенно облегчит проверку выполнения основных свойств потенциала[5].

Покажем, прежде всего на примерах, как проверить то, что план прикрепления является наивыгоднейшим. В этом случае нет необходимости иметь полный план перевозок с указанием их объема, а достаточно иметь схему грузопотоков. Рассмотрим схему, представленную на рис. 4. На схеме приведены расстояния между пунктами, а стрелками показаны направления грузопотоков. Как и выше, пункты производства (погрузки) изображены прямоугольниками, пункты потребления – кружками, остальные (узловые) станции – треугольниками.

[5] Отметим, что когда речь идет не о вагоно-километрах, а о другом измерении, то последние два упрощающих соображения будут верны, если измеритель такой, что всегда $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$, если кратчайший путь из A к C проходит через B.

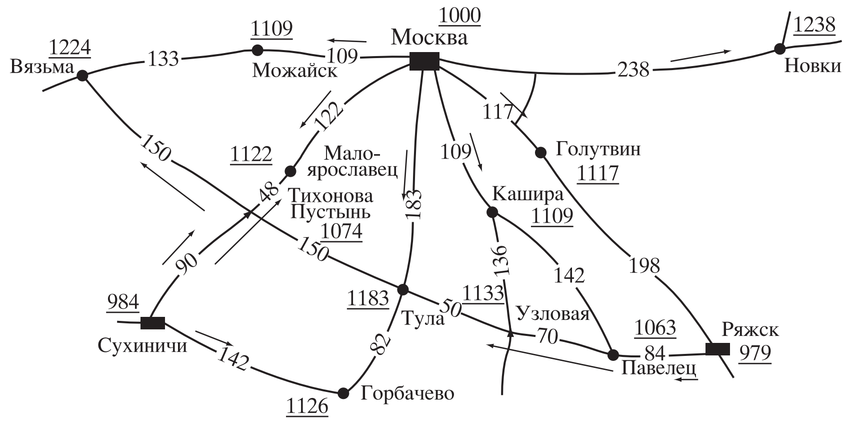

Рис. 4

Для проверки правильности плана строим потенциал. Для Москвы принимаем его равным 1000. Так как из Москвы производится перевозка в Новки, значение потенциала для Новки (по условию II) равно 1000 + 238 = 1238. Таким же образом, для Голутвина это значение равно 1117, для Каширы 1109, для Тулы 1183.

Далее, в Тулу производится перевозка из Ряжска, поэтому в Ряжске потенциал должен быть меньше на величину, равную расстоянию между ними: 50 + 70 + 84 = 204, т.е. потенциал для Ряжска равен 1183 – 204 = 979. Попутно определяется потенциал для Павельца: 979 + 84 = 1063 и Узловой: 1133. Затем определяется потенциал для Малоярославца: 1000 + 122 = 1122, для Сухинич: 1122 – (90 + 48) = 984, Тихоновой Пустыни: 984 +90 = 1074, Горбачева: 984 + 142 = 1126, Вязьмы: 1074 +150 = 1224, Можайска: 1000 + 109 = 1109.

Итак, потенциал определен во всех случаях. Проверим, будет ли выполнено условие I. Достаточно сравнить значение потенциала в тех соседних пунктах, для которых оно получено разным путем. Рассмотрим следующие пары пунктов:

Голутвин – Ряжск............... 1117 – 979 = 138 < 198;
Кашира – Павелец............. 1409 – 1063 = 46 < 142;
Узловая – Кашира.............. 1133 – 1109 = 24 < 136;
Тула – Горбачево................ 1183 – 1126 = 57 < 82;
Тула – Тихонова Пустынь... 1183 – 1074 = 109 < 150;
Вязьма – Можайск.............. 1224 – 1109 = 115 < 133.

Во всех случаях разность потенциала меньше расстояния, т.е. условие I соблюдено. Это доказывает, что план не содержит нерациональных перевозок (в отношении правильности прикрепления).

Заметим, что при анализе плана нет надобности составлять потенциал для всех пунктов: его можно не находить для тех пунктов, где рациональность плана не вызывает сомнений (например, для станции Новки на рис. 4). Для таких пунктов можно не определять их расстояний.

Полезно также проверять правильность плана параллельно с определением потенциала. Тогда, если план содержит нерациональные перевозки, это можно обнаружить, не находя потенциала для всех точек.

Проверка правильности плана прикрепления может быть с таким же удобством осуществлена вместо схемы путей по таблице расстояний и грузопотоков – “шахматке”. Подобная таблица расстояний дана ниже (см. таблицу расстояний).

В таблице указаны попарные расстояния между каждым из пяти пунктов отправления *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* и каждым из 12 пунктов назначения *а*, *б*,..., *м*. Далее указывается, какой пункт из какого снабжается по плану; для этого соответствующее расстояние набрано курсивом. Например, то, что цифра 1018 в строке *б* против *В* выделяется, показывает, что в данном плане предусмотрено снабжение пункта *б* из *В*.

Таблица расстояний

Пункты назначения	Пункты отправления				
	А (500)	*Б* (363)	*В* (247)	*Г* (438)	*Д* (35)
	Расстояния, км				
а (980)	567	*617*	1004	957	2099
б (1265)	765	1090	*1018*	835	1819
в (705)	658	955	*458*	267	1182
г (722)	*222*	552	690	616	1733
д (540)	508	808	*293*	120	1170
е (222)	1691	2017	1575	1335	*187*
ж (898)	*398*	725	837	765	1907
з (634)	617	924	439	*226*	1107
и (558)	375	434	*311*	427	1601
к (898)	842	1168	682	*460*	*863*
л (1224)	*724*	*861*	1157	1114	2255
м (838)	538	866	639	*400*	1072

Для проверки того, что план наивыгоднейший, строим потенциал. Начинаем с пункта *А*, берем для него значение потенциала равным, например, 500. Так как из пункта *А* совершаются перевозки в пункты *б*, *г*, *ж*, *л*, то определяем потенциал для них; например, для *б* потенциал равен 500 + 765 = 1265 и т. д. (эти связи нанесены на рис. 5).

Далее, в пункт *б* перевозится груз также из *В* при расстоянии в 1018. Отсюда значение потенциала в пункте *В* должно быть принято равным 1265 – 1018 = 247. После этого определяем потенциал в пунктах *в*, *д*, *и*, которые снабжаются из *В*. Продолжая таким же образом, определим значение потенциала во всех пунктах. Эти значения потенциалов приведены в таблице против обозначений соответствующих пунктов в скобках.

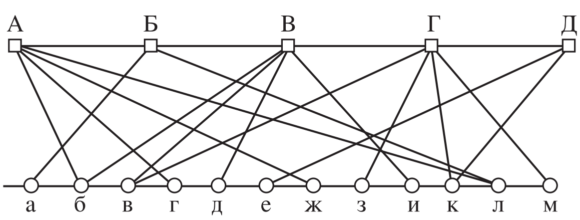

Рис. 5

Теперь проверим, выполнено ли для найденных значений потенциала условие I. Расстояние между каждыми двумя пунктами должно быть не больше разности потенциалов в пунктах отправления и в пунктах назначения. Иначе говоря, потенциал в пункте назначения должен быть не больше суммы потенциала в пункте отправления и расстояния. Произведем, например, проверку для пункта *а*. Потенциал в нем равен *Ua*= 980, а указанные суммы равны соответственно:

для *а* и *А* 500 + 567 = 1 067 > 930;
» *а* и *Б* 363 + 617 = 980 = 980;
» *а* и *В* 247 + 1 004 = 1 251 > 980;
» *а* и *Г*... 438 + 957 = 1 395 > 980;
» *а* и *Д* 35 + 2 099 = 2 134 > 980,

т.е. во всех случаях “больше” за исключением пары *а* и *Б*, где стоит знак равенства, но это находится в соответствии с тем, что из *Б* в *а* перевозка действительно совершается. К такому же результату приводит и проверка для остальных пунктов (*б*, *в*,..., *м*). Итак, для плана установлено наличие потенциала; следовательно, он наивыгоднейший.

При выполнении этой проверки, как правило, нет надобности все указанные суммы выписывать и точно подсчитывать, так как за немногими исключениями знак неравенства виден сразу, на глаз. Также вообще нет нужды производить проверку для тех пар пунктов, относительно которых заведомо ясно, что перевозка из одного в другой не может быть рациональной и можно даже расстояния между этими пунктами в "шахматку" не включать.

Приведем теперь примеры такого рода, когда при построении потенциала обнаруживается нерациональность плана, и покажем, как он может быть в таком случае исправлен. Отметим, что для исправления плана уже недостаточно только указать направление грузопотоков, а необходимо иметь полный план перевозок.

Рассмотрим в качестве примера план, приведенный на рис. 6. На нем, кроме расстояний, указан объем производства или потребления в каждом пункте и объем перевозок (на стрелках). К Ряжску прикреплены ближайшие к нему пункты Павелец и частично Голутвин, к Сухиничам – Вязьма, Горбачево и частично Малоярославец; остальные пункты прикреплены к Москве. Составляем потенциал. Принимаем его для Москвы равным 1000 и определяем последовательно для пунктов: Новки – 1000 + 238 = 1238, Голутвин – 1000 + 117 =1117, Ряжск – 1117 – 198 = 919, Павелец – 919 + 84 = 1003, Кашира – 1000 + 109 = 1109 (рис. 6). Делаем проверку для пунктов Кашира – Павелец: 1109 – 1003 = 106 < 142, невязки нет. Далее составляем потенциал для Тулы: 1000 + 183 = 1183. Сравниваем пункты Тула – Павелец, находим: 1183 – 1003 = 180 > 120. Разность потенциалов оказалась больше расстояния – невязка (нарушено условие I).

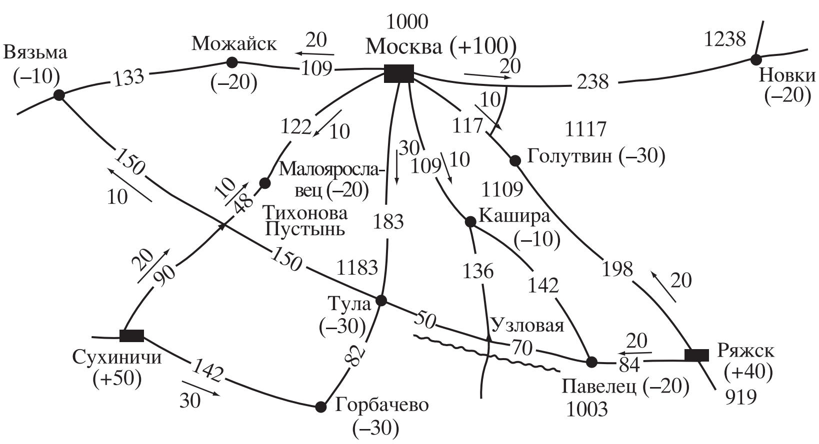

Рис. 6

Каким путем получилась невязка? Соединяем пункты Тула и Павелец (от меньшего потенциала к большему) незамкнутым кольцом, составленным из пунктов, где потенциал определен: Павелец – Ряжск – Голутвин – Москва – Тула. Наименьшее число вагонов, идущих в этом направлении, 20 (участок Ряжск – Голутвин). Поэтому снимаем 20 вагонов в этом направлении, а именно: число вагонов на стрелках, идущих в этом направлении, уменьшаем на 20, а число вагонов на стрелках, идущих в противоположном направлении, на 20 увеличиваем, т.е. на стрелке на участке Павелец – Ряжск ставим 40, на участке Ряжск – Голутвин – 0 (снимаем стрелку), на участке Москва – Голутвин – 30, на участке Москва – Тула – 10, на участке Павелец – Тула – 20 (вместо 0). Иначе говоря, вносим следующие изменения: из Ряжска направляем 20 вагонов в Тулу, Голутвин из Ряжска больше не снабжаем, зато в Голутвин направляем 30 вагонов вместо 10 из Москвы, но из Москвы в Тулу вместо 30 направляем только 10 вагонов.

Полученную за счет исправления экономию в вагоно-километраже можем подсчитать непосредственно, учитывая добавленные и снятые перевозки. Получим:

$$20 \times 198 + 20 \times 183 - 20 \times 120 - 20 \times 84 - 20 \times 117 = 1200 \text{ вагоно-км.}$$

Это можно подсчитать и по упрощенному правилу, исходя из того, что сокращение вагоно-километража равно произведению величины устраненной невязки на число вагонов. В данном случае

$$20\,(1183 - 1003 - 120) = 1200 \text{ вагоно-км.}$$

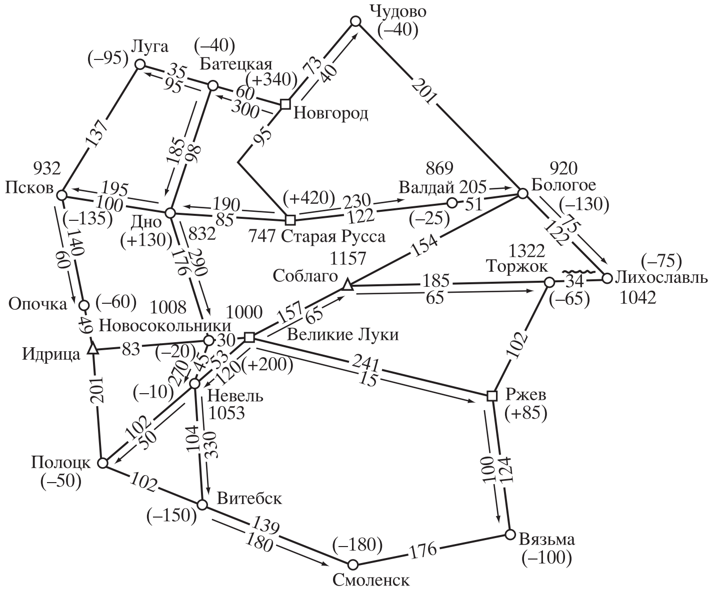

Рис. 7

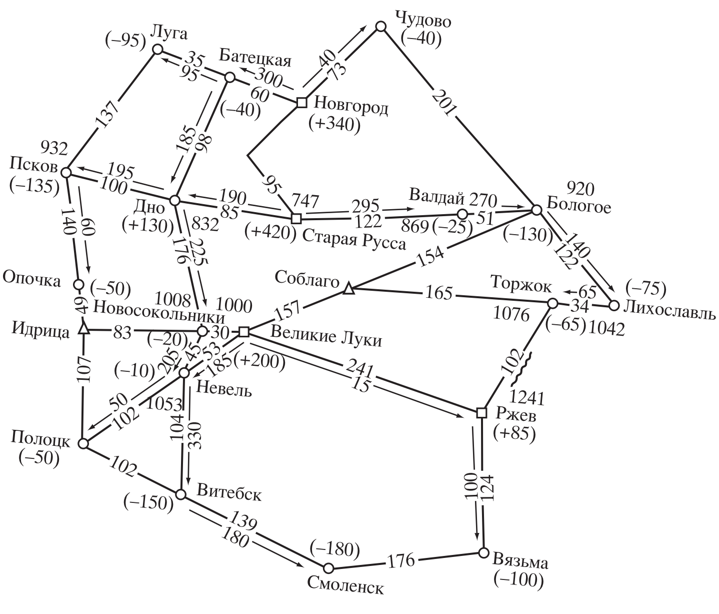

Рис. 8

Получающийся в результате указанного исправления план имеет схему направлений грузопотоков, которая приведена на рис. 4. Ее мы уже проверили; она соответствует наивыгоднейшему плану.

Вообще, если нам нужно не проверить план, а составить его по данным условиям, то поступаем таким образом. Составляем на глаз простейший план прикрепления; при этом только стараемся избежать явно нерациональных перевозок: встречных перевозок, пересекающихся грузопотоков. После этого проверяем план при помощи построения потенциала. Обнаружив невязки в потенциале, вносим исправления подобно проведенным в предыдущем примере. После нескольких исправлений приходим к наивыгоднейшему плану[6].

Приведем пример с несколькими такими исправлениями. Для ясности мы будем изображать последовательные приближения на отдельных чертежах. На практике в этом, конечно, нет нужды, и все решение проводится на одном чертеже. Исправления вносятся при помощи карандаша и резинки.

Задача изображена на рис. 7. На ней приведены пункты производства и потребления с указанием объема их при наших обычных обозначениях, а также составленный упрощенным путем исходный план.

Для проверки правильности составления плана строим потенциал. Принимаем его для Великих Лук равным 1000. Далее определяем его последовательно, как выше, для пунктов Невель, Новосокольники, Дно, Старая Русса, Валдай, Бологое, Лихославль, а также для Соблаго, Торжок. Для пунктов Лихославль и Торжок обнаруживается невязка: 1322 – 1042 > 34. Для устранения ее по соединяющему кружному пути – пути определения потенциала: Лихославль – Бологое – Валдай – Старая Русса – Дно – Новосокольники – Невель – Великие Луки – Соблаго – Торжок – снимаем наименьшее встречающееся число вагонов, идущих в этом направлении, 65 (участок Великие Луки – Соблаго – Торжок), т.е. уменьшаем на 65 число вагонов на стрелках, идущих в этом направлении, и увеличиваем на противоположных. В результате приходим к плану, приведенному на рис. 8.

Экономию подсчитываем по указанному выше упрощенному правилу:

$$65\ (1322 - 1042 - 34) = 65\times 246 = 15\ 990 \text{ вагоно-км}.$$

[6] Подчеркнем еще раз, что, говоря “наивыгоднейший план”, мы имеем в виду план, наивыгоднейший в соответствии с принятой постановкой, т.е., что план дает нам наименьшие суммарные затраты при принятом способе их измерения среди всех планов, удовлетворяющих данным условиям.

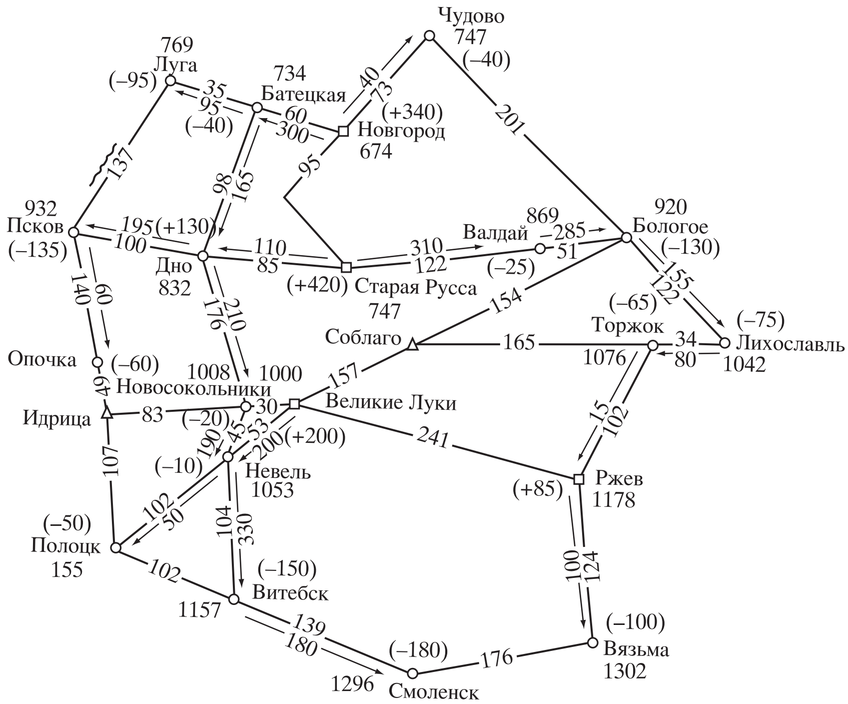

Рис. 9

Для этого плана опять строим потенциал (также начиная с Великих Лук), исправляя его значение в затронутых произведенным перемещением пунктах (в данном случае только в Торжке, а в Соблаго потенциал более не определен). Составляем далее потенциал для Ржева и обнаруживаем невязку для пунктов Торжок – Ржев. Для исправления ее снимаем 15 вагонов с пути Торжок – Лихославль – Бологое – Валдай – Старая Русса – Новосокольники – Невель – Великие Луки – Ржев. Уменьшение вагоно-километража составляет:

$$15 \times (1241 - 1076 - 102) = 15 \times 63 = 945 \text{ вагоно-км.}$$

Исправленный план приведен на рис. 9. На нем исправлен в соответствии с этим и потенциал в Ржеве. После этого продолжаем определение потенциала для пунктов Вязьма, а также для Батецкая, Новгород, Чудово, Луга. Для пунктов Чудово и Бологое невязки нет. Невязка обнаруживается для участка Луга – Псков: 932 – 769 > 137.

Снимаем 165 вагонов на соединяющем их пути Луга – Батецкая – Дно – Псков. Выигрыш составляет:

$$165\ (932 - 769 - 137) = 165 - 26 = 4290 \text{ вагоно-км.}$$

Исправленный план приведен на рис. 10. Исправляем в нем значение потенциала в пунктах Луга, Батецкая, Новгород, Чудово и продолжаем построение его для пунктов Опочка, Полоцк, Витебск, Смоленск. В этом плане никаких невязок более не обнаруживается, и он оказывается наивыгоднейшим – дающим минимальный вагоно-километраж.

Всего при переходе от первоначальной схемы (рис. 7) к окончательной (рис. 10) получим уменьшение вагоно-километража в размере

$$15\,990 + 945 + 4290 = 21\,225 \text{ вагоно-км,}$$

что составляет примерно 7 % от первоначального объема перевозок.

Отметим попутно еще некоторые возможности применения потенциала перевозок. Предположим, что в составленный план, для которого построен потенциал, вносятся некоторые изменения в связи с изменением объема производства и потребления, однако настолько небольшие, что

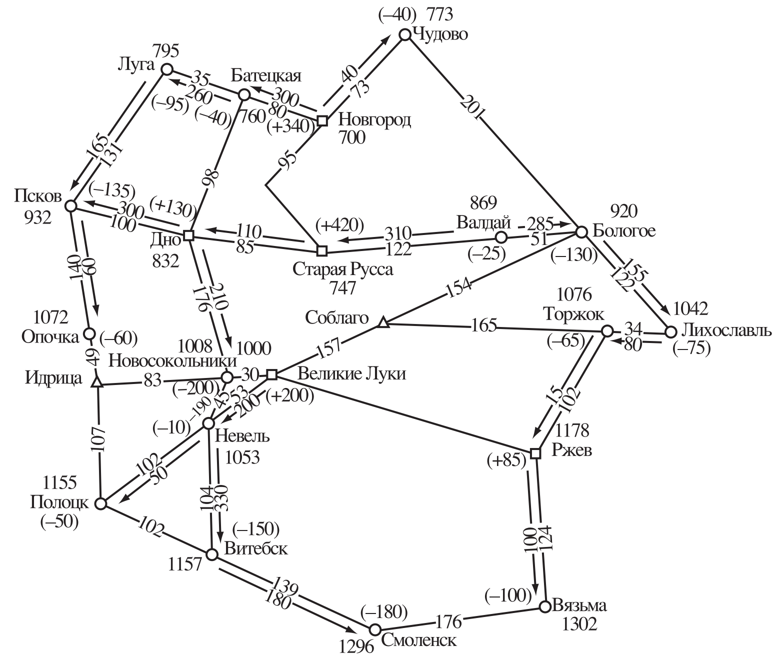

Рис. 10

схема грузопотоков остается неизменной. В таком случае изменение в затратах на перевозки, как легко проверить, можно подсчитывать по формуле:

$$\Delta W = \sum_k U_{B_k} \Delta b_k - \sum_i U_{A_i} \Delta a_i,$$

где Δa_i и Δb_k – изменения в объемах погрузки и выгрузки. Если изменение коснулось лишь небольшого числа пунктов, то подсчет по этой формуле очень удобен.

В отдельных случаях желательно по тем или иным причинам отступать от плана, дающего минимальные затраты (в частности, вагоно-километраж). Так, например, при нежелании нарушить установившуюся связь между предприятиями или для сохранения возможности маршрутизации и пр.

Пользуясь потенциалом, легко (если отступление касается небольшого числа вагонов) подсчитать связанные с этим потери. Именно, если мы введем перевозку из пункта A в B, которая не предусмотрена наивыгоднейшим планом, то связанные с этим потери в суммарном тонно-километраже на один “неправильно направленный” вагон будут равняться

$$\overline{AB} - (U_B - U_A).$$

Так, если направить некоторое число вагонов из Новгорода через Старую Руссу в Бологое, сохранив баланс вагонов во всех пунктах, то потери на каждый вагон составят

$$268 - (920 - 700) = 48 \text{ вагоно-км}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда грузопотоки разбиваются на несколько несвязанных между собой систем, и покажем, как в этом случае проверяется и исправляется план.

План перевозок приведен на рис. 11. Строим потенциал для него. Приняв его для Москвы равным 1000, находим его значение для Можайска и Тулы. Остальные пункты не связаны перевозками с теми, для которых определен потенциал. Тогда применяем следующий прием. Вводим условную перевозку m вагонов на связывающем участке. Например, направляем m вагонов из Можайска в Вязьму (на рис. 11 показано пунктирной стрелкой).

Тогда получаем возможность определить значение потенциалов в пунктах Вязьма, Тихонова Пустынь, Малоярославец, Сухиничи, Горбачево. Производим проверку для пунктов Москва – Малоярославец, обнаруживаем невязку 1140 – 1000 > 122. Однако в данном случае наличие не-

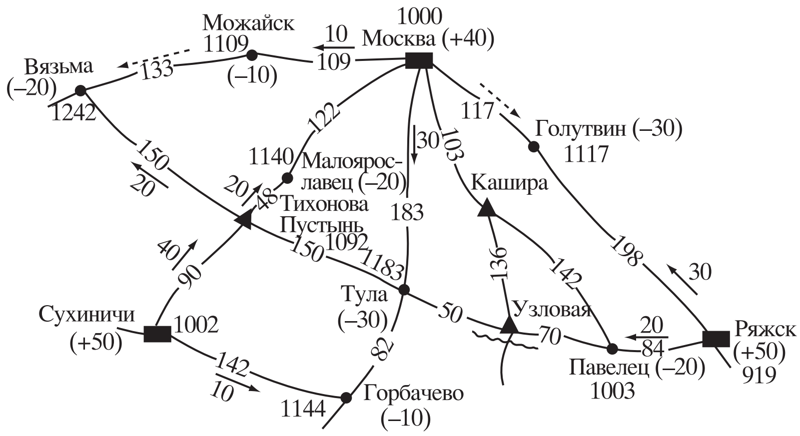

Рис. 11

вязки не свидетельствует еще о том, что имеются нерациональные перевозки. Именно, с пути Москва – Можайск – Вязьма – Тихонова Пустынь – Малоярославец мы можем снять со стрелок только m вагонов, так как в этом направлении встречается условная связь (пунктирная стрелка).

Осуществление этого (снятия вагонов) приводит, таким образом, не к реальному изменению плана, а к введению условной связи Москва – Малоярославец вместо Можайск – Вязьма. В связи с этим уже иначе определяются потенциалы в пунктах: Малоярославец, Тихонова Пустынь, Вязьма, Сухиничи, Горбачево, – именно они должны быть уменьшены на величину исправленной невязки (1140 – 1000) – 122 = 18.

Эти изменения нанесены в левой части рис. 12. Таким образом, план прикрепления в этой части был правилен, и нам потребовалось только исправить значения потенциала. После этого возвращаемся к построению потенциала, который у нас еще не определен для ряда пунктов, так как они не связаны с прочими. Вводим новую условную связь на участке Москва – Голутвин, направляя m вагонов. После этого значение потенциала определяется последовательно в пунктах: Голутвин, Ряжск, Павелец, – как это показано на рис. 11.

При проверке пунктов Тула – Павелец обнаруживается невязка в 1183 – 1003 > 120. На пути Павелец – Ряжск – Голутвин – Москва – Тула наименьшее число вагонов, идущее в указанном направлении, 30. Снимаем по 30 вагонов со стрелок, идущих в противоположную сторону. Получаем изменение грузопотоков, в связи с чем также изменяется значение потенциала в пункте Тула. Изменения даны на правой части рис. 12. В данном случае невязка привела к действительному изменению плана и к сокращению вагоно-километража на

$$(1183 - 1003 - 120) \times 30 = 1800 \text{ вагоно-км.}$$

После указанных исправлений в плане, приведенном на рис. 12, для потенциала оказываются выполненными условия I и II. Следовательно, этот план наивыгоднейший.

Из этого примера ясно, что распадение грузопотоков на несвязанные части не вносит существенных затруднений в проверку и исправление плана перевозок. В такой же мере этот прием осуществим и в том случае, когда план дан не в виде схемы, а в виде таблицы. В этом случае нужно только устанавливать условные связи по схеме рис. 5.

ЗАДАЧА Б

В этом разделе речь идет о планировании перевозок нескольких грузов.

Пусть даны пункты $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и связывающая их железнодорожная сеть и пусть каждый из нескольких различных грузов грузится в некоторых из этих пунктов и в некоторых других разгружается. При этом может случиться, что отдельные пункты будут участвовать в распределении не всех из рассматриваемых грузов. Требуется составить план перевозок всех этих грузов и образующегося порожняка так, чтобы затраты на всю массу перевозок были минимальными.

Предполагаем, что объемы погрузки и выгрузки по каждому грузу сбалансированы.

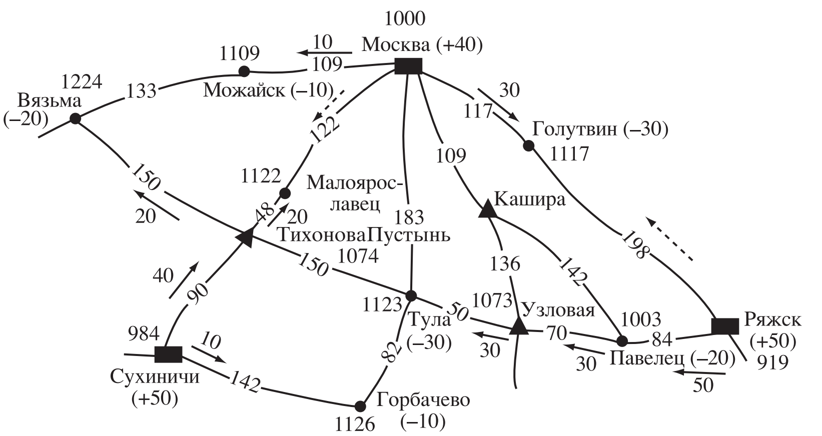

Рис. 12

Эта задача распадается на несколько задач типа задачи А. В самом деле, для каждого груза в отдельности надо выбрать наивыгоднейший план, независимо от перевозок других грузов. Что касается порожняка (мы считаем, что порожняк однородный)[7], то его можно считать за особый вид груза. По условиям задачи известно, сколько в каждый из пунктов прибывает груза и сколько вагонов груза из него отправляется. Это позволяет подсчитать, сколько вагонов порожняка требуется для любого из пунктов или сколько вагонов в нем высвобождается. Дело сводится, таким образом, к тому, чтобы подсчитать, из каких пунктов в какие целесообразно направлять порожняк, с тем чтобы сумма затрат на его перевозку была минимальной, т.е. к решению задачи А.

Не осложняется задача и тогда, когда задан некоторый “фон” перевозок, т.е. известно, что в некоторых пунктах освобождается порожняк от других перевозок, нами сейчас не планируемых, или требуется порожняк для таких перевозок. Нужно лишь учитывать эти количества порожняка при составлении баланса порожняка для каждой станции.

Таким образом, решение разбивается на следующие части: решается задача А для каждого груза в отдельности; для каждого пункта подсчитывается число высвобождающихся или требуемых вагонов порожняка (по видам его). Для каждого вида порожняка решается задача о его наивыгоднейшем распределении, т.е. опять задача А.

ЗАДАЧА С

Эта задача отличается от задачи А тем, что пропускная способность железнодорожной сети предполагается ограниченной или, во всяком случае, для некоторых магистралей указана максимальная допустимая загрузка их грузом данного вида. Требуется составить план перевозок, который учитывал бы такое ограничение и был бы наивыгоднейшим по сравнению с другими (также его учитывающими).

Метод решения задачи, по существу, совпадает с первым методом, предложенным нами для решения задачи А. Здесь также вводится потенциал, и наивыгоднейший план находится одновременно с нахождением потенциала. Сама техника решения задачи остается прежней, с малыми изменениями.

Итак, пусть для каждого участка сети, соединяющего любые соседние пункты A и B, заданы величины $l(A, B)$ и $l(B, A)$, представляющие пропускную способность этого участка в направлениях от A к B и соответственно от B к A. Эти пропускные способности могут быть различными вследствие различной технической оснащенности дорог, а также если имеется некоторый “фон”, т.е. если по сети уже перевозятся какие-то другие грузы, которые мы считаем заданными и не планируем в настоящий момент. Требуется составить наивыгоднейший (т.е. связанный с наименьшими затратами) план перевозок, при котором объем перевозок $h(A, B)$ по любому участку AB в направлении от A к B не превосходит $l(A, B)$.

[7] Если видов порожняка несколько (платформы, крытые вагоны и пр.), дальнейшее относится к каждому из них в отдельности.

Мы утверждаем, что некоторый план будет наивыгоднейшим только тогда, когда с ним можно связать такой потенциал U, при котором для любых двух “соседних” точек будут выполнены следующие условия:

$$\text{I. Если } h(A, B) = 0, \text{ то } U_B - U_A \le \overline{AB}.$$

$$\text{II. Если } 0 < h(A, B) < 1(A, B), \text{ то } U_B - U_A \le \overline{AB}.$$

$$\text{III. Если } h(A, B) = 1(A, B), \text{ то } U_B - U_A \ge \overline{AB}.$$

Здесь, как всегда, $\overline{AB}$ – затраты на перевозку одного вагона груза из A в B по участку AB. Такой потенциал отличается от рассмотренного нами ранее лишь тем, что для участков, используемых при наилучшем плане с полной загрузкой, условия I и II раздела 1 заменяются условием III.

Доказательство этого предложения представляет лишь некоторое усложнение доказательства, приведенного в разделе 1, и мы не будем его воспроизводить.

Покажем технику решения задачи В на примере.

Пример. Пусть дана задача, изображенная на рис. 13, и пусть для любого участка сети пропускная способность (в каждом направлении) равна 500 вагонам. На этой же фигуре изображен некоторый, взятый на глаз, план перевозок, при котором перевозки по любому участку не превосходят 500 вагонов.

Пробуем строить для этого плана потенциал, пользуясь условием II. Примем его равным нулю в пункте *7.* Тогда он последовательно определится, как это показано, в пунктах *8*, *16*, *13*, *2*, *1*, *12*, а также в пунктах *3*, *4*, *5*, *6.* При этом мы пользуемся стрелками, идущими вдоль участков, где перевозки по плану предусмотрены в объеме, меньшем 500 вагонов. Поэтому разность потенциалов на концах таких участков равна длине этих участков.

Обнаруживается невязка между пунктами *6* и *7,* так как условие III оказывается нарушенным. Способ уничтожения невязки, связанный с улучшением плана, очевиден. Добавим некоторое число m вагонов на кружный путь из пункта *7* в пункт *6* (через пункты *8*, *16*, *13*, *2*, *3*, *4*, *5*). Затраты на каждый добавляемый вагон будут равны разности потенциалов в пунктах *6* и *7*, т.е. 110 – 0 = 110. Одновременно снимем с прямого пути из *7* в *6* тоже m вагонов, экономия на каждом снимаемом вагоне 470. В результате мы выгадаем на каждом вагоне 470 – 110 = 360. Добавляя вагоны на кружном пути, мы уменьшаем перевозки по участкам *6 – 5*, *4 – 3*, *3 – 2*. Минимальное число вагонов, перевозимое по этим участкам, равно 20 (участок *3 – 2*). Поэтому принимаем $m = 20$ и переходим к плану, который изображен на рис. 14 и выгоднее предыдущего на 20 × 360 = 7200 вагоно-км.

В этом плане потенциал в пунктах 7, *8*, *16*, *13*, *2*, *1*, *12* остался прежним, в пунктах *6*, *5*, *4*, *3* он изменил свое значение. Кроме того, определен потенциал в пунктах *9* и *10.* Между пунктами *10* и *16* обнаруживается невязка, имеющая такой же, как и в предыдущем случае, характер. Для ее исправления нужно добавить грузопоток по кружному пути, соединяющему пункты *10* и *16* (через пункты *9* и *8*), сняв равное число вагонов с прямого пути. Величина добавляемого грузопотока определяется на этот раз из условия, что по участку *8 – 16* нельзя провозить более 500 вагонов.

Мы приходим к плану, изображенному на рис. 15, который дает по сравнению с предыдущим экономию в 30×[770 – – (740 – 110)] = 30 × 140 = 4200 вагоно-км. Здесь 30 – число вагонов, пускаемых по кружному пути, 770 – расстояние между пунктами *10* и *16*, 740 – 110 разность потенциала в них при плане рис. 14.

Поскольку дальнейшие исправления носят обычный для задачи А характер и не связаны с перегруженными участками, мы их не рассматриваем. Заметим только еще раз, что потенциал всюду определяется из условия II, т.е. при помощи стрелок, идущих вдоль участков, пропускная способность которых использована не полностью.

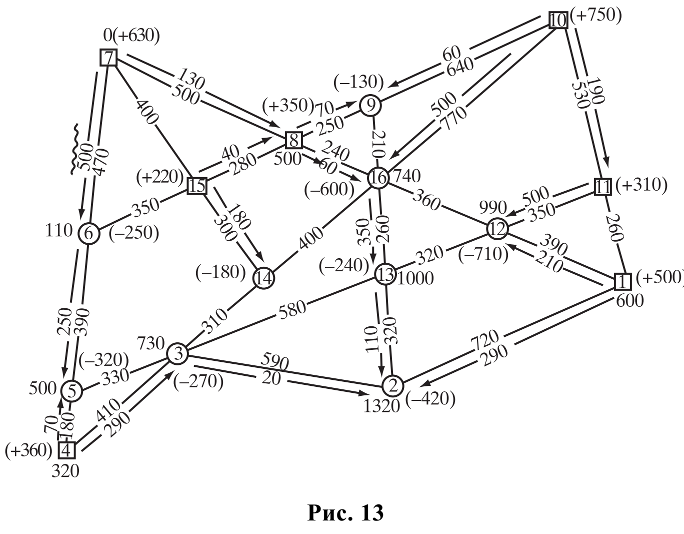

Рис. 13

В заключение остановимся на вопросе о возможности практического использования разобранных выше методов.

Решение задачи А, которое позволяет установить наиболее рациональную схему перевозок для данного однородного груза, может быть использовано при составлении плана перевозок важнейших массовых грузов: цемента, строительного леса, угля (для энергетических целей)[8], сахара, соли, зерна и др. Кроме того, с помощью описанного выше способа, как мы упоминали, решается вопрос о рациональном обороте порожняка.

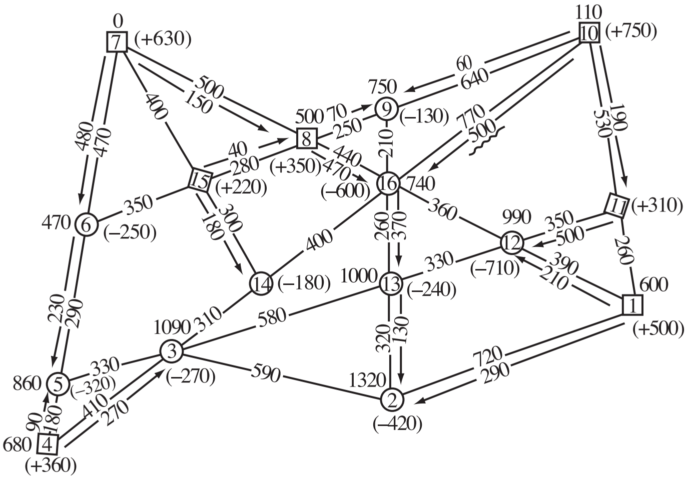

Рис. 14

Решение задач Б и В может быть применено при одновременном планировании перевозок нескольких массовых грузов с учетом загрузки магистралей и оборота порожняка.

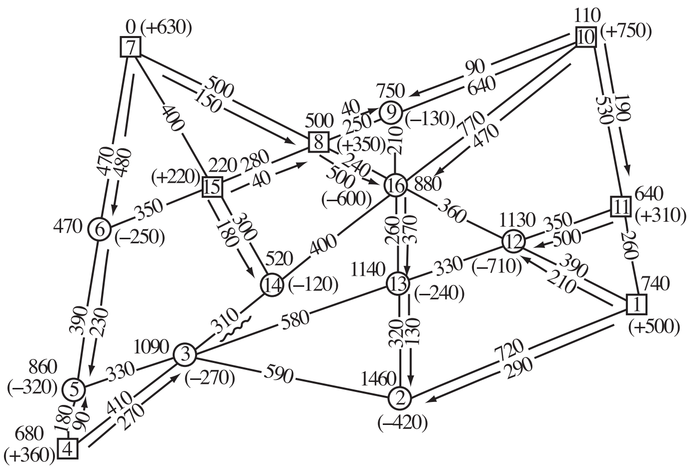

Рис. 15

Конечно, при составлении реального плана перевозок должны быть учтены и некоторые дополнительные обстоятельства, которые не были приняты во внимание в рассмотренной, в известной мере отвлеченной схеме. Однако это не может служить серьезным препятствием к применению предлагаемого метода. Во-первых, наиболее важные из этих дополнительных обстоятельств (использование водного транспорта, учет загрузки некоторых железнодорожных узлов, учет угловых заездов и др.) могут быть также учтены при помощи приемов, основанных на использовании того же основного метода. Во-вторых, другие обстоятельства, значительно реже оказывающие влияние (скорость и надежность данного пути и др.), могут быть учтены после того, как будет найдено решение задачи. Имея основную, правильную и рациональную схему перевозок, нетрудно внести в нее отдельные коррективы, тем более что данный метод позволяет оценить, насколько данные коррективы отклоняют план от наивыгоднейшего (…) и потому дает возможность внести их наилучшим образом.

Как мы уже говорили, решение задачи А, а также задач Б и В вполне осуществимо при помощи указанных методов даже в весьма сложных случаях. Трудности и расходы, связанные с составлением такой рациональной схемы, совершенно незначительны и не могут идти ни в какое сравнение с теми результатами, которые могло бы дать ее использование. Сокращение даже на один процент среднего пробега ряда массовых грузов имеет общегосударственное значение.

В настоящей работе мы рассматривали вопрос о планировании перевозок, предполагая объемы производства и потребления продукта (в отдельных пунктах) заданными. Не входя в подробности, отметим, что предлагаемые методы могут быть использованы также при учете транспортных вопросов, связанных с планированием объема производства и потребления в различных пунктах. Однако последний вопрос не может решаться только с точки зрения транспорта, а для решения его требуется одновременно полный анализ условий производства и потребления в каждом пункте.

Для автоматического решения задач А и В могла бы быть предложена гидравлическая или электрическая модель. Мы не приводим их описаний, так как изложенный расчетный метод настолько прост, что изготовление этих моделей вряд ли целесообразно.

---

[8] Когда речь идет об углях разной калорийности, решение вопроса не подходит прямо под задачу А, но может быть к ней сведено.

КОММЕНТАРИЙ К СТАТЬЕ Л.В. КАНТОРОВИЧА И М.К. ГАВУРИНА 1949 г.

Публикуемая статья была написана в 1940 г. в соавторстве с Марком Константиновичем Гавуриным, учеником и одним из ближайших друзей Л.В. Канторовича. Профессор Ленинградского университета М.К. Гавурин (1911–1992) сотрудничал с Леонидом Витальевичем по многим направлениям его работы – функциональному анализу и численным методам, участвовал в конкретных расчетах (в том числе по атомному проекту) и разработке вычислительных устройств ("функциональный преобразователь"). Он активно поддерживал многие начинания Леонида Витальевича, в частности организацию в ЛГУ кафедры "Вычислительная математика" в 1948 г. и соответствующей специальности, а в 1959 г. – знаменитого VI курса, на котором он был одним из лекторов.

Эта статья хотя и вышла небольшим тиражом (2,5 тыс. экз.) в малодоступном сборнике[1] и с тех пор не переиздавалась и не переводилась, является одной из наиболее часто цитируемых работ Л.В. Канторовича. Так что и сама работа, где впервые полно, включая детальное описание метода решения, рассмотрена одна из наиболее красивых и показательных задач линейного программирования, и почти десятилетняя история попыток ее публикации представляют значительный интерес.

Тьяллинг Купманс, получивший в 1957 г. от Л.В. Канторовича вместе с брошюрой "Математические методы организации и планирования производства" также экземпляр и этой работы, в предисловии к публикации перевода брошюры в "Management Science"[2] так их оценивал: "*Обе статьи являются исключительными документами в истории науки управления, линейного программирования и экономической теории вообще. В статье 1949 г. обсуждаются однопродуктовая и многопродуктовая транспортные модели (в том числе с пустыми вагонами), модель с сетью ограниченной пропускной способности, а также приложение этих моделей к железнодорожной сети вокруг Москвы*".

Интересно, что Т. Купманс, несмотря на объяснение задержки публикации статьи с Гавуриным "трудностями военного времени", данное в письме Канторовича, прозорливо подозревал иную причину. "*Купманс сознаёт, что это позор для советских экономистов, что советские экономисты-плановики не смогли использовать эти методы во время Второй мировой войны*"[3], – пишет У.Х. Марлоу, вспоминая свой разговор с Т. Купмансом о подготовке публикации перевода брошюры 1939 г., состоявшийся в октябре 1958 г. "*Но этот вывод читатель должен сделать самостоятельно*", – настаивал Купманс, предостерегая от "*каких-либо редакторских действий, которые могли бы как-то отразиться на Канторовиче*", особенно учитывая "*текущие события, связанные с Нобелевской премией по литературе*".

Транспортная задача по постановке и методу решения является наиболее простой и естественной из оптимизационных задач. Неудивительно, что ее первые постановки появились раньше, чем общая концепция линейного программирования[4], а ее непрерывный вариант – задача Монжа – еще в 1781 г. Поэтому вызывают недоумение трудности, возникшие в связи с публикацией этой работы, если учесть, что Леонид Витальевич был в то время одним из самых известных ученых. Ведь в статье обсуждались вполне понятные технические проблемы, она была написана исключительно ясно и никак не затрагивала идеологию. Кроме того, сама тема статьи не была новой – к тому моменту уже имелось несколько публикаций, посвященных методам сокращения затрат при планировании перевозок[5].

---

[1] Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1949, С. 110–138. Сборник посвящен юбилеям ученых-транспортников: 75-летию академика В.Н. Образцова, генерал-директора движения первого ранга, 80-летию чл.-корр. АН Б.Н. Веденисова, генерал-директора пути и строительства второго ранга и 75-летию профессора В.А. Соковича, генерал-директора движения третьего ранга.

[2] **Koopmans T.C.** (1960): A Note About Kantorovich's paper "Mathematical Methods of Organizing and Planning Production" // *Management Science* . № 4. July.

[3] Из присланной Л.В. Канторовичу в 1958 г. переписки американских ученых по поводу подготовки публикации перевода "Математических методов организации и планирования производства" в "Management Science".

[4] Работы А.Н. Толстого (1930) и Хичкока (1941).

[5] **Толстой А.Н.** (1930): Методы нахождения наименьшего суммарного километража при планировании перевозок. В сб.: "*Планирование перевозок*". М.: Транспечать НКПС; **Толстой А.Н.** (1931): Теория и практика планирования перевозок грузов в пространстве. М.; **Толстой А.Н., Долгов А., Моисеенко В.Л.** (1931/1932): Задачи по планированию перевозок. М.; **Толстой А.Н.** (1939): Методы устранения нерациональных перевозок при планировании // *Социалистический транспорт*. № 9. С. 28–51; **Толстой А.Н.** (1941): Методы устранения нерациональных перевозок при составлении оперативных планов. М.: Трансжелдориздат.

Обратимся к документам. В аннотации к работам, направлявшимся Ленинградским университетом в Совмин СССР в 1954 г., относительно статьи с М.К. Гавуриным написано следующее: "*Работа фактически выполнена в 1940 году и впервые направлена в печать в 1941 г.*[6] *Однако редакциями различных журналов ее опубликование задержалось до 1949 г., несмотря на положительные отзывы акад. В.Н. Образцова и акад. А.Н. Колмогорова*[7]*, по-видимому, из соображений перестраховки. Математическая теорема в абстрактной форме опубликована в 1942 году в ДАН*[8]. *В 1950–1953 гг. появился целый цикл американских работ по данному вопросу, где методы, предложенные в работе, переоткрыты (не полностью). Работа направлялась в 1941 и 1943 г. в Министерство железнодорожного транспорта, но не получила никакого отзыва. В 1948–1949 гг. она была проверена в Центральном институте железнодорожного транспорта*".

Десятилетняя задержка публикации тем более обидна, что за то время, пока статья моталась по редакциям, ее содержание во многом была переоткрыто. Правда, американские работы еще не были доступны – исследования по линейному программированию, начавшиеся с 1947 г., оформлялись, как правило, в виде отчетов Rand Corporation. Так что первой открытой публикацией стал вышедший в 1951 г. сборник статей под редакцией Т. Купманса "Activity analysis of production and allocation". Установлению приоритета отчасти способствовала короткая заметка в Докладах АН "О перемещении масс" 1942 г. В этой работе, помимо более общего и важного математического содержания[9], Леонид Витальевич сформулировал квинтэссенцию и публикуемой статьи (теорему о потенциалах и указание на метод решения). Кроме того, там была и ссылка на статью, – было указано, что она находится в печати. В публикуемой статье детально, включая и вырожденный случай, изложен метод потенциалов для решения транспортной задачи и ряда ее модификаций.

Экономико-математические работы Л.В. Канторовича оставались неизвестными на Западе вплоть до конца 1950-х годов, когда и сами работы, и почти детективный сюжет их открытия стали для западных исследователей своего рода шоком. Стоит напомнить, что до середины 1950-х годов СССР был практически закрытой страной, и многие издания были недоступны западному читателю, что было связано в том числе с трудностями публикации самих работ. Рассматривая свои исследования в этом направлении как практические, Леонид Витальевич адресовал их не математикам[10], а прежде всего инженерам и экономистам. В результате идеологической цензуры многие экономические статьи так и остались неопубликованными[11], а написанная в 1942 г. книга "Экономический расчет...", ставшая основанием для присуждения Нобелевской премии, была издана в СССР лишь спустя 17 лет. Адресованные инженерам работы, видимо из-за новизны подхода, также проходили с трудом. Так, публикуемая работа и написанная в то же время статья по оптимальной распиловке бревен вышли с почти десятилетней задержкой.

[6] В своих воспоминаниях "Мой путь в науке" Леонид Витальевич указывает, что впервые статья "была сдана в печать в 1940 г. в журнал «Железнодорожный транспорт»". В его архиве сохранилось письмо из редакции от 3 декабря 1940 г. следующего содержания: "На основании постановления редакционной коллегии 22/XI (объем статей не должен превышать 10 000 знаков или 3 печатных полос), просим сократить Вашу статью на 50–60 стр.". Это означало сокращение статьи почти в десять раз.

[7] Отзыв Андрея Николаевича Колмогорова, к сожалению, не сохранился.

[8] **Канторович Л.В.** (1942): О перемещении масс // *ДАН*. Т. 37. № 7/8. С. 227–229. Эта заметка, по свидетельству Т. Купманса, послужила отправной точкой для открытия американскими специалистами основополагающих работ Л.В. Канторовича по линейному программированию. Обнаружив ссылки на нее в статьях 1952 и 1953 г. Мерилла Флада (Merrill M. Flood), Купманс в течение нескольких лет разыскивал ее, а найдя, отправил в ноябре 1956 г. письмо Л.В. Канторовичу. По свидетельству Т. Купманса, об этой заметке М. Флад узнал от математика Макса Фишмана, присутствовавшего на его лекции по транспортной задаче в декабре 1949 г. (Впрочем, весьма вероятно, что отправной точкой для самого М. Фишмана стала заметка 1948 г. "Об одной задаче Монжа" в "Успехах математических наук", где была ссылка на работу в ДАН.)

[9] В этой работе введена "транспортная метрика" в пространстве распредений масс: расстояние между двумя различными расределениями определяется как работа по перемещению, минимально необходимая для превращения первого распределения во второе. Это понятие широко используется в современной математике.

[10] Помимо упомянутой "О преремещении масс", вышла лишь одна весьма абстрактная математическая заметка: **Канторович Л.В.** (1940): Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем // *ДАН*. Т. 28, № 3. С. 212–215.

[11] Некоторые из этих работ недавно опубликованы (см.: Леонид Витальевич Канторович, человек и ученый. М.: Изд-во СО РАН, 2002. Т. 1; 2004. Т. 2).

Несмотря на признание приоритета Л.В. Канторовича в постановке и исследовании задач линейного программирования, в зарубежной литературе неоднократно повторялся упрек в том, что он якобы не дал полного описания предлагаемых методов решения, а ограничился лишь общими указаниями в отличие от Дж. Данцига, который подробно описал каждый шаг симплекс-метода. Между тем объяснение того, почему Леонид Витальевич ограничился именно таким описанием методов решения соответствующих экстремальных задач, лежит на поверхности – в 1939 г. вычислительных машин еще не было, а для решения реальных задач вручную был необходим не стандартный подход к ним, а подход, учитывающий специфику задачи. И именно это давало результат. Например, В.А. Залгаллер, занимавшийся в 1948–1949 гг. расчетами наилучшего раскроя материалов в реальных производственных условиях, успешно решал эти задачи вручную, а они включали сотни ограничений. Решение задач такой размерности стандартным симплекс-методом потребовало бы огромного объема вычислений (даже для самых мощных вычислительных машин того времени)[12].

Что касается транспортной, то реальные задачи даже большой размерности несложно решать вручную, поэтому и алгоритм для нее был строго описан. Так что в отношении транспортной задачи отмеченный выше упрек абсолютно незаслужен, тем не менее он впервые был высказан именно в отношении этой задачи. В предисловии к переводу заметки "О перемещении масс" А. Чарнс (A. Charnes) писал: "*Задача отыскания эффективных методов для действительного решения специфических задач в настоящей статье не решена. В разработке таких методов мы находимся в настоящее время впереди русских*"[13].

Высказанное обвинение тем более несправедливо, что экземпляр совместной статьи с Гавуриным в то время уже был у Купманса, и она была доступна рецензенту. Более того, даже в рецензируемой Чарнсом заметке метод решения фактически описан: "*Доказанная теорема дает удобный способ проверки того, что данное перемещение масс минимальное. Именно для проверки достаточно попытаться строить потенциал для него тем способом, который приведен в доказательстве необходимости. При этом, если такое построение окажется невозможным, т.е. если перемещение не минимальное, то одновременно обнаружится способ уменьшения работы при перемещении, позволяющий постепенно подойти к минимальному перемещению*".

Основное содержание публикуемой статьи впервые было изложено в докладах обоих авторов *"Применение математических методов в вопросах планирования перевозок"*[14], прочитанных 26 февраля 1941 г. на совместном заседании группы математики и транспортной группы Ленинградского дома ученых.

Сохранился и предназначенный авторам экземпляр пятистраничного отзыва, подписанного академиком В.Н. Образцовым 10 июля 1942 г.: "*Возвращая данную мне для отзыва работу Канторовича «Применение математических методов в вопросах планирования перевозок» и отзыв академика Колмогорова, считаю, со своей стороны, что статья интересна и подлежит напечатанию*", – пишет В.Н. Образцов в редакцию "Известий Отделения технических наук". Затем следует сам отзыв, большую часть которого занимает обзор известных рецензенту попыток математического подхода к проблемам, возникающим на транспорте, причем рецензент хотел бы поместить свой отзыв как критику в том же журнале. Его вывод: "*Тем не менее, предупреждая читателя о необходимости быть осторожным в применении теоретических формул, нужно всецело поддержать всякую попытку, в том числе и данную, теоретического разрешения таких сложных вопросов. Не следует забывать, что «сопротивление материалов» является очень*

---

[12] Судя по всему, именно идея симплекс-метода была первой, пришедшей в голову Канторовичу. Но он отверг ее из-за неэффективности. "И другой, геометрический метод постепенного перехода с грани на грань многогранника в направлении grad z представляется недостаточно эффективным" (рукописная заметка 1938 г.). Как вспоминал Данциг, и он поначалу сомневался в том, что симплекс-метод заработает даже при использовании ЭВМ.

[13] **Charnes A.** (1958): // *Management Science.* Vol. 5. № 1. P. 3.

[14] Это название тезисов доклада, и оно указано в извещении о заседании. В протоколе доклад назван: "О математическом решении одной транспортной задачи" (Архив ЛДУ, фонд 349, опись 2, № 131 – протокол транспортной секции и № 134 – протокол математической секции). Как указано в протоколе, председателем был А.А. Марков, присутствовали: А.Д. Александров, М.В. Березовский, М.В. Забеллин, Е.С. Ляпин и др., высказались: И.П. Натансон, Л.С. Каминский, И.Д. Белановский, Э.П. Лисевич. Г.Р. Лоренцу было поручено подготовить заметку о заседании в "Вестник АН".

сложным явлением и, тем не менее, после нескольких веков изучения оно превратилось в одну из наиболее точных математических наук. Когда-нибудь это произойдет и с транспортными проблемами. Предложения проф. Канторовича являются теоретически оригинальными и интересными".

Несмотря на этот в целом положительный отзыв, в 1944 г. редакция "Известий Отделения технических наук" возвращает статью[15], приложив выдержку из другого, более позднего, отзыва В.Н. Образцова: "*При наличии большого числа пунктов погрузки и выгрузки рекомендуемые т. Канторовичем методы решения путем последовательного приближения к плану будут чрезвычайно затруднительными. Поэтому в практике НКПС их применять будет почти невозможно. Необходимо предложить Л.В. Канторовичу разработать метод более простого определения потенциала каждого пункта погрузки для того, чтобы легко было дать картину правильного прикрепления пунктов выгрузки* (*исключая метод приближения в несколько ступеней*).

Если такой метод (*одноступенчатого*) *решения задачи будет найден, то это будет ценное предложение для плановых и других работ.*

На основании изложенного статью необходимо сократить и переработать".

Появление другого отзыва, вероятно, было связано с тем, что в 1941 г. Леонид Витальевич направил работу еще и в Наркомат путей сообщения[16], из которого она опять-таки могла попасть к В.Н. Образцову (во втором отзыве говорится именно о возможности использования работы в практике НКПС). Получив ответ из редакции "Известий АН ОТН", Леонид Витальевич переработал статью. Вот что он писал в редакцию: "*Одновременно с настоящим письмом направляю Вам переработанный текст находившейся на рассмотрении в редакции ОТН моей, совместной с М.К. Гавуриным, статьи «Применение математических методов в вопросах планирования перевозок». Переработка произведена на основе отзыва и замечаний рецензента – акад. В.Н. Образцова. При этом изменено несколько и название статьи, а также она подвергнута некоторому сокращению".*

Кроме того, он направил письмо академику В.Н. Образцову: "*Глубокоуважаемый Владимир Николаевич! Редакция ОТН предложила мне переработать статью в соответствии с Вашим отзывом и замечаниями. Исправленный текст статьи я направил на днях обратно в редакцию.*

Имея в своем распоряжении экземпляр работы, я еще раз убедился по Вашим многочисленным замечаниям, как внимательно она была рассмотрена Вами. Очень благодарен Вам за Ваше внимание и замечания к работе.

Кроме того отзыва, копию которого Вы в свое время любезно направили мне, Вы, по-видимому, позднее давали еще один отзыв о моей работе, из которого редакция дала только краткую выписку. Кроме замечания о переработке изложения, в нем содержится указание, что вследствие сложности метода, вызванной применением последовательных приближений, его использование в практике НКПС не представляется возможным.

В соответствии с Вашими указаниями я упростил изложение метода, а также саму схему его применения, в особенности, для случая распадения грузопотоков на несвязанные системы.

Мне представляется, что в таком виде использование метода в практике НКПС вполне возможно и целесообразно, и то, что это не осуществлено до сих пор, вызвано не столько сложностью метода, сколько отсутствием у соответствующих работников времени или желания вникнуть в него.

---

[15] "3.III.1944, Редакция "Известий Отделения технических наук" АН СССР: Тов. Канторович Л.В. Согласно указанию Зам. ответственного редактора, члена-корреспондента АН СССР В.И. Вейца, Редакция направляет Вам копию отзыва академика В.Н. Образцова о Вашей статье "Применение математических методов в вопросах планирования перевозок", а также и статью. Зав. редакцией О.Н. Соловьева".

[16] Одновременно с этой статьей Леонид Витальевич направлял в НКПС еще и две записки с предложением мероприятий, которые могут повысить эффективность работы транспорта, однако ни одна из этих работ не встретила понимания. Отвечая на вопросы немецкого историка науки Сони Бронтес (см. [Бронтес, 2002, 1, с. 21]), Канторович писал, что в 1948–1949 гг. он, наконец, смог ознакомиться с реальными "*работами по планированию перевозок, которые велись в Министерстве путей сообщения*".

Задача А (*о прикреплении пунктов производства к пунктам потребления*) *постоянно решается практически в Отделе народно-хозяйственных перевозок НКПС и в Наркоматах. О нужности этой задачи свидетельствует и выпуск Трансжелдориздатом книги А. Толстого, посвященной специально способам решения этой задачи.*

В предлагаемом мною приеме проверка правильности плана перевозок с помощью потенциала производится очень быстро и не требует последовательных приближений, как в том случае, когда план дан в виде схемы, так и в виде "шахматки", если только расстояния между пунктами уже найдены. Таким образом, во всяком случае, метод может использоваться для проверки оперативных планов Наркоматов в отделе Народнохозяйственных перевозок. Однако и исправление плана перевозок, если он окажется не наилучшим, а также построение плана, хотя и могут потребовать нескольких приближений, осуществляются с такой простотой и требуют так мало времени, что это не может служить препятствием к использованию метода. Работник со средним образованием может легко научиться производить такую работу за 30–40 минут.

Что касается задачи Б (*с загруженными магистралями*), *то она в определенной постановке также представляется вполне реальной. То, что она не решается в настоящее время, связано, пожалуй, именно с отсутствием удовлетворительного метода решения её. При наличии же его, она также может войти в практику НКПС.*

Во всяком случае, вопрос о возможности использования этого метода будет разрешен, когда с ним смогут ознакомиться работники транспорта и транспортных ВУЗ'ов, что будет достигнуто скорейшим опубликованием работы. Задержка в этом ставит меня в трудное положение, так как за это время я получил уже несколько запросов от лиц, интересующихся работой и желающих с ней познакомиться, которых я не мог удовлетворить".

Несмотря на сделанные изменения, 8 апреля 1945 г. Леонид Витальевич получает из редакции "Известий ОТН" за подписью академика И.П. Бардина не очень грамотно составленный отказ: "*Проф. Канторович Л.В. В связи с пересмотром редакционного портфеля и недостатком места в журнале «Известия ОТН», при этом направляется Ваша статья «Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков»*".

Леонид Витальевич предлагает статью Ленинградскому институту инженеров железнодорожного транспорта, но и оттуда в апреле 1946 г. получает отказ "*ввиду невозможности ее помещения в Сборнике Института*".

Неожиданно в апреле 1948 г. приходит письмо от сотрудника Секции транспортных проблем АН А.П. Петрова: "*Уважаемый профессор Канторович! Мною просмотрена написанная вами совместно с доцентом М.К. Гавуриным статья о применении математических методов в вопросах анализа грузопотоков. Необходимо при Вашем ближайшем посещении Москвы встретиться (как мы договаривались) и условиться о возможности подготовки статьи к печати. Ввиду срочности вопроса крайне желательно было бы эту встречу осуществить скорее".*

Учитывая предысторию, вызывает удивление "срочность вопроса". В архиве Л.В. Канторовича не удалось найти каких-либо документов, дающих намек на причину изменения отношения к работе, а тем более – причину "срочности". Можно лишь высказать предположение, что "срочность" связана с получением какой-то информации о начавшихся в США работах в этом направлении, но, разумеется, это предположение ни на чем не основано (кроме самого факта наличия таких разработок).

И действительно, дальнейшее продвижение работы шло очень оперативно. Леониду Витальевичу предлагают поставить доклад на семинаре, и он указывает ближайший, приемлемый для себя срок, который и принимается.

Семинар – совместный семинар Отдела методов разработки Института горного дела АН и Секции транспортных проблем АН – состоялся 5 мая 1948 г. Сохранился его протокол. Помимо названных в его работе приняли участие представители Института механики АН, ВНИИ Железнодорожного транспорта, Главного Грузового управления МПС, Московского горного института и других организаций. В обсуждении доклада участвовали академик Л.Д. Шевяков, академик А.М. Терпигорев (от Института горного дела), академик В.Н. Образцов, Ф.И. Шаульский, А.П. Петров (от Секции транспортных проблем) и др. Было принято следующее решение:

"*1. Методы решения задач о нахождении рациональной системы грузопотоков, предложенные в работе и опирающиеся на некоторые общие математические теоремы, оригинальны и имеют определенные преимущества по сравнению с имеющимися ныне в отношении простоты и уверенности в правильности полученного результата.*

2. Считать целесообразным помещение статьи, содержащей изложение данного метода, с учетом необходимых исправлений в одном из журналов Академии наук СССР с тем, чтобы она могла быть обсуждена заинтересованными учреждениями и лицами и мог быть поставлен вопрос о практическом использовании предлагаемого метода".

В заключение следует отметить, что к проблемам транспорта Леонид Витальевич многократно обращался на протяжении многих лет, в том числе к вопросам организации городского транспорта и установления тарифов на него в начале 1960-х (в том числе внедренный в 1961 г. тариф на такси) и тарифов на железнодорожном транспорте[17]. Наконец, стоит напомнить о его работе в Транспортном совете Академии наук, который он возглавлял в течение последних десяти лет жизни, выступая организатором научных работ по транспорту в АН и основным докладчиком на многих научных конференциях и совещаниях, созываемых по инициативе Совета.

В.Л. Канторович

[17] **Канторович Л.В., Журавель А.И.** (1974): Роль транспортного фактора при размещении производства // *Вопросы экономики.* № 3. С. 79–90.

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2011, том 47, № 4, с. 75–110

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЛЕОНИДА ВИТАЛЬЕВИЧА КАНТОРОВИЧА

ВКЛАД Л.В. КАНТОРОВИЧА В ЭКОНОМИЧЕСКУЮ НАУКУ[1,2]

© 2011 г. Л. Йохансен

(Норвегия)

1. ФОН

Двадцатые годы (XX в.) – интересный период развития советской экономической науки. Были выполнены творческие и оригинальные работы во многих областях экономики, особенно в части, которую сегодня называют “экономикой развития”. В последние десятилетия некоторые из этих работ вновь стали актуальными, к ним снова возрос интерес. В этот ранний период развития советской экономической науки были предприняты также попытки применить математические методы как в области планирования, так и в научных исследованиях, причем эти работы были передовыми на фоне общего уровня советской экономической науки того времени. Стала знаменитой работа Г.А. Фельдмана о модели перспективного планирования, известны работы Е. Слуцкого, А.А. Конюса и, возможно, некоторых других специалистов. Вероятно, существует много и других работ этого периода, которые заслуживают особого внимания.

---

[1] Печатается по тексту: **Johansen L.** (1976): L.V. Kantorovich’s contribution to economics // *The Scandinavian Journal of Economics*. Vol. 78. P. 62–80.

[2] Этот очерк о вкладе Л.В. Канторовича в экономическую науку написан в связи с присуждением ему премии памяти

Период с 1930-х и почти до конца 1950-х годов был менее интересным – за небольшими исключениями – в развитии советской экономической науки. Однако в конце 1950-х годов в СССР произошло возрождение экономики как науки, что частично было связано с началом более широкого, чем прежде, применения математических и статистических методов и вычислительной техники. В этой новой волне, конечно, часть усилий затрачивалась на попытки наверстать упущенное или утерянное в предыдущие десятилетия. Также трудно отрицать, что в этот период появлялись незрелые и некритичные работы, что неизбежно на большой новой волне. Однако, несомненно, что в научном отношении наблюдались значительные успехи. Появились ценные и оригинальные исследования на фоне общего в целом низкого уровня работ, отражающих состояние экономической науки в других странах.

В период возрождения советской экономической науки большинство активных исследователей были, конечно, молодыми людьми, многие из которых имели неэкономическое образование. Этим, вероятно, частично объясняется и тот факт, что было испробовано много различных подходов. Поэтому на наблюдателя эта ситуации производила впечатление неразберихи. В возрождении советской экономической науки ведущую роль сыграли несколько ученых старшего поколения – они обеспечивали определенную преемственность идей. Среди них выделяются имена Л.В. Канторовича, В.С. Немчинова и В.В. Новожилова. Важность их вклада в экономическую науку была официально признана в 1965 г., когда им была присуждена высшая научная премия в СССР – Ленинская. Значение этого признания усиливается еще и тем, что они были единственными, кто получил такую премию в области экономики.

В настоящее время активно работает только наиболее молодой из них – Л.В. Канторович. С точки зрения научных достижений, вероятно, он – наиболее оригинальный и самый выдающийся из трех названных исследователей. Его вклад в экономическую науку – оригинальный не только по меркам его родины, но и по самым высоким международным стандартам.

2. КРАТКИЙ ОЧЕРК НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ Л.В. КАНТОРОВИЧА

Леонид Витальевич Канторович родился в 1912 г. В 1930 г. он закончил Математическое отделение Ленинградского государственного университета. В 1930-е годы преподавал математику в Политехническом университете в Ленинграде. В 1932–1934 гг. Канторович преподавал в Ленинградском университете, а в 1934 г. стал профессором. Канторович получил степень доктора наук по математике в 1935 г. С 1958 по 1964 г. он являлся членом-корреспондентом Академии наук СССР, а с 1964 г. – академиком (по Отделению математики). В 1949 г. ему была присуждена (тогда) Сталинская премия за работы в области математики, а в 1965 г., как отмечалось выше, Л. Канторовичу вместе с В. Немчиновым и В. Новожиловым была присуждена Ленинская премия за работы в области экономической науки, в частности, за применение математических методов в экономических исследованиях и планировании.

Л. Канторович – выдающийся и широко известный математик. На протяжении длительного времени он занимался экономическими проблемами, начав их исследование задолго до присуждения ему в 1965 г. Ленинской премии. Л. Канторович опубликовал фундаментальную работу по математической экономике еще в 1939 г. В начале 1940-х годов он работал над вопросами применения математики к решению экономических проблем, а с конца 1950-х годов опубликовал большую серию работ о методах экономических расчетов и их применении в планировании. В откровенной манере, подкрепляя свои выводы научными обоснованиями, он выступал в дискуссиях по многим вопросам, касающимся методов планирования и системы ценообразования в СССР, критиковал догматический и бесплодный период советской экономической науки.

Длительное время Л. Канторович возглавлял Отдел экономико-математических методов в Сибирском отделении Академии наук СССР. Это отделение работало в тесном контакте с совре-

Нобеля по экономике, но едва ли он столь подробен и детален, как этого требует подобный случай. Тем не менее, я надеюсь, что он дает некое впечатление о главных аспектах работ Канторовича. В основном мои изыскания базируются на переводах его статей и книг. В списке ссылок в конце этого очерка я указываю эти переводы, но также я привожу год издания оригинальной публикации работы Канторовича, а в ссылках использую буквы от [a] до [n]. Дополнительный список ссылок на работы других авторов нумеруется от [1] до [20].

менным вычислительным центром в Новосибирске, который был тогда, вероятно, самым передовым в СССР.

Мы привели краткий и далеко не полный обзор деятельности Л. Канторовича до современного периода. В следующем разделе я проанализирую более детально некоторые из полученных им научных результатов, которые имеют отношение к присуждению ему Нобелевской премии по экономике. Все эти результаты прямо или косвенно связаны с центральной экономической проблемой – оптимальным использованием ресурсов. Первостепенное значение имеет вклад Канторовича в развитие линейного программирования, играющего большую роль в ценообразовании, распределении ресурсов, выборе способов производства и т.д.

3. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ЕГО ИСТОКИ

Как теперь хорошо известно, линейное программирование представляет собой метод определения максимума или минимума линейной функции множества переменных, подчиненных ограничениям в форме линейных уравнений, требованиям неотрицательности и, возможно, более общих линейных неравенств. Линейное программирование развивалось по трем направлениям.

1. *Формулировка* проблемы и демонстрация того, что обширная область оптимизационных проблем в экономике может быть приведена к данной форме непосредственно или после некоторых преобразований.

2. Разработка *вычислительных методов и алгоритмов* для практического решения подобных задач.

3. Прояснение *теоретических аспектов и их следствий*.

Теория двойственности и отношение двойственной задачи к прямой – основной момент третьего направления. Из теории следует, что каждой задаче линейного программирования (прямой задаче) соответствует другая задача линейного программирования (двойственная задача), сформулированная, исходя из прямой, решением которой являются определенные величины, интерпретируемые как “теневые цены” различных ограниченных факторов, входящих в формулировку прямой задачи. Двойственные переменные, т.е. неизвестные двойственной задачи, связаны в классическом анализе с множителями Лагранжа. Участвуя в построении алгоритмов, они получают экономическую интерпретацию, что крайне важно, и становятся ценами. Полученные таким образом цены имеют отношение к таким проблемам, как возможность децентрализованно управлять деятельностью производственных секторов, технологическая структура которых может быть описана с помощью линейных зависимостей (уравнений и неравенств).

За последние 25 лет линейное программирование серьезно повлияло на развитие экономических исследований, нет сомнения, что оно будет играть важную роль и в будущем.

С одной стороны, достигнуто понимание того, что широкую область практических проблем можно сформулировать как задачи линейного программирования. А поскольку разработаны алгоритмы, которые позволяют решать такие задачи очень больших размеров (как по числу переменных, так и по числу условий), линейное программирование открыло путь к практическому выполнению расчетов, направленных на оптимизацию использования ресурсов в разных областях.

С другой стороны, теория линейного программирования, и особенно теория связи между двойственной и прямой задачами, позволили прояснить многие принципиальные экономические проблемы, например в теории общего равновесия и международной торговли. Теория игр, являющаяся, на мой взгляд, одним из наиболее значительных новшеств, связанных с экономической наукой, развивалась в постоянном взаимодействии с линейным программированием.

Общепринятая история развития линейного программирования гласила, что первые шаги были сделаны группой математиков и экономистов, работавших над проблемой распределения ресурсов для ВВС США во время Второй мировой войны. Одним из членов этой группы был Дж. Данциг. В 1947 г. он сформулировал общую задачу линейного программирования и разработал метод ее решения (симплекс-метод). Его работа была представлена в виде лекций, прочитанных в разных местах; распространялся также предварительный отчет, но до 1951 г. результаты его исследований опубликованы не были. В тот год они были включены в работу [1]. В этот том вошли также и многие другие работы по теории линейного программирования. С точки зрения экономической теории особое место занимала работа Т. Купманса.

С тех пор теория линейного программирования развивалась во многих направлениях: были составлены новые алгоритмы, особенно с использованием специальных структур; мы знаем о большом числе важных и ценных практических приложений; дальнейшее развитие получили теоретические вопросы. Что касается последних, то помимо упомянутой работы Купманса стимулирующее значение имела книга Дорфмана, Самуэльсона и Солоу [2].

Конечно, можно найти предшественников линейного программирования. Работы Дж. фон Неймана по теории игр и его ранняя модель экономического роста содержат элементы, которые до некоторой степени предвосхищают теорию линейного программирования. В работах Р. Фриша 1930-х годов также можно найти идеи и математические методы, которые можно считать первыми шагами в направлении линейного программирования. В работе 1941 г. Ф. Хичкок сформулировал и решил оптимизационную транспортную задачу, которая является специальным случаем задачи линейного программирования. Независимо от него сходную задачу в 1947 г. решил Т. Купманс. Были и другие, менее известные математики и экономисты, которые формулировали задачи и разрабатывали аналитические средства, предвосхищавшие некоторые элементы линейного программирования. Однако ни один из этих предшественников не дал общей трактовки, которая охватывала бы все три вышеупомянутые аспекта, и, по-видимому, ни один из них не видел *общего* значения теории линейно-программного типа.

Вышеизложенное в большей или меньшей мере было общепризнанной историей развития линейного программирования до тех пор, пока не стало широко известно, что еще в 1939 г. Л.В. Канторович построил математическую модель “организации и планирования производства”, которая по существу была линейно-программной моделью, внеся вклад во все три направления линейного программирования, перечисленные в начале раздела. Работа Канторовича 1939 г. стала известна и доступна коллегам из западных стран в 1960 г., когда в журнале “Management Science” появился английский перевод этой работы [а]. Инициатива ее перевода и публикации принадлежала Т. Купмансу, который до конца прояснил некоторые невнятные ссылки на работы Канторовича, относящиеся к транспортной задаче, и наладил с ним контакт. (Упомянутая работа Канторовича была опубликована также в другом английском переводе [в] на основе позднейшего русского издания. В целом, публикация в “Management Science” представляется лучшей.)

4. ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КАНТОРОВИЧЕМ

Работа Канторовича 1939 г. ограничивается рассмотрением задач планирования на низовом уровне, главным образом внутри отдельного предприятия. Первую и наиболее простую из рассмотренных задач производственного планирования можно схематически описать следующим образом. На предприятии имеется определенное число станков, которые можно использовать для производства определенных изделий, каждое из которых состоит из некоторого числа деталей. Технические коэффициенты показывают, сколько штук каждой детали станок может произвести в день. (Конечно, некоторые из этих коэффициентов могут иметь нулевое значение. Это показывает, что данный станок нельзя использовать для производства рассматриваемой детали.) Задача состоит в нахождении такого распределения производства различных деталей по имеющимся станкам, при котором будет получен максимальный выпуск целых изделий. Эта проблема на языке математики формулируется как задача максимизации линейной функции, которая выражает общее число целых изделий как функцию переменных, обозначающих время, в течение которого каждый станок используется для производства деталей каждого вида. Максимизация производится при определенных условиях в виде уравнений, которые показывают, что общее время использования станка для производства различных деталей должно быть равно общему наличному фонду времени, и в виде неравенств, показывающих, что время использования станка для производства определенной детали не может быть отрицательным.

В дальнейших разработках Канторович вводит дополнительные ограничения, так что в формулировке проблемы достигается бóльшая общность. Например, он вводит условие, при котором все станки в совокупности не должны использовать большее количество электроэнергии, чем ее заданное ограниченное количество. Это условие становится линейным ограничением более общего вида, чем те, которые упоминались в первой и более простой задаче. В самой общей формулировке Канторович учитывает возможность выполнения станком нескольких операций с целью одновременного производства различных деталей.

Канторович дает ряд примеров конкретных задач, которые можно математически сформулировать описанным выше способом. Задачи частично заимствованы из практики. Он также дает их решение. Кроме описанного выше непосредственного планирования производства, рассматриваются, например, задачи определения наилучших способов использования различных типов материалов, с тем чтобы избежать отходов (или минимизировать их); наилучшего из возможных способов использования энергии, когда определенные наличные количества различных видов энергии распределяются по различным видам деятельности; планирования строительства с учетом транспортировки строительных материалов; использование участков земли для выращивания различных сельскохозяйственных культур; задачи, связанные с планированием перевозок и размещением экономической деятельности. Хотя автор – математик, описание и обсуждение задач свидетельствует о близком знакомстве с конкретными обстоятельствами и о тонком понимании экономических аспектов задач.

Формулировки данных задач Канторовичем, на первый взгляд, кажутся частными случаями того, что теперь называется общей задачей линейного программирования. Вопрос относительно общности формулировок Канторовича также обсуждался. В предисловии [3] к публикации работы Канторовича в “Management Science” Т. Купманс приводит объяснение, за которое выражает благодарность Г. Скарфу. А Скарф, в свою очередь, основывает свою трактовку на предложении, выдвинутом самим Канторовичем. Там показано, что задача, которая в настоящее время рассматривается как общая задача линейного программирования, может быть преобразована в наиболее общую из формулировок Канторовича. (Обратное, – то есть то, что задачи Канторовича можно выразить в том же виде, что и стандартную задачу линейного программирования, – следует непосредственно.) В соответствии с этим Т. Купманс утверждает, что наиболее общая задача Канторовича, “хотя, кажется, имеет некоторую специальную структуру, в действительности эквивалентна общей задаче линейного программирования”.

Касаясь областей приложений, которые Канторович приводит в качестве примера, Т. Купманс пишет, что “широкая область приложений, охваченная автором, делает его работу ранней классикой в науке управления при любой экономической системе”.

Утверждение Т. Купманса относительно общности формулировки Канторовича было поставлено под вопрос в работе А. Чарнса и В. Купера [4][3]. Они указали на некоторую неполноту доказательства Т. Купмансом эквивалентности общей задачи линейного программирования и наиболее общей формулировки Канторовича. Т. Купманс ответил на эту критику в заметке [5]. Итоговый вывод состоит в том, что эквивалентность справедлива для класса задач линейного программирования, имеющих оптимальное решение, – этот класс, безусловно, наиболее интересен для практических приложений. Для задач, не имеющих оптимального решения, возникают определенные трудности.

Способ формулирования задач, рассмотренных Канторовичем, очень часто был весьма удобным. Однако в целом, вероятно, следует признать, что формулировки, данные в позднейшей литературе, более эффективны и удобны, чем формулировка Канторовича. С этими оговорками можно с уверенностью заключить, что Канторович – первый ученый, точно сформулировавший задачу линейного программирования и представивший обширную и разнообразную совокупность примеров практических задач, которые можно рассматривать и решать с помощью данного подхода.

[3] Подробный ответ Л.В. Канторовича на замечания Чарнса и Купера, написанный в 1960 г. и тогда же направленный этим авторам, был опубликован в 1999 г. в журнале “Экономика и математические методы” (1999. Т. 35. № 3, с. 36–39). См. также: “Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый”. Новосибирск: Изд. СО РАН, 2004, с. 375–380. (*Прим. перев.*)

Можно добавить, что Д. Данциг в классической работе “Линейное программирование, его применения и обобщения” следующим образом характеризовал вклад Канторовича [6, с. 22]: “Канторовичу следует отдать первенство в распознании того, что обширные классы определенных производственных проблем имеют ярко выраженные математические структуры, которые, как он считал, поддаются практическому численному расчету и могут быть численно решены… Доклад содержит замечательное собрание потенциальных приложений”.

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Переходя к вычислительным методам, следует указать, что главный момент в методе Канторовича в 1939 г. – введение некоторых переменных, названных “разрешающими множителями”, с интерпретацией, аналогичной множителям Лагранжа в классических задачах определения экстремума. Однако эти множители оказались чем-то гораздо большим тривиальной модификации множителей из классического анализа, поскольку линейность и ограничения в виде неравенств выдвигают принципиально новые математические проблемы. Канторович показал, что если значения этих множителей для некоторой задачи известны, то значения первоначальных неизвестных – переменных, которые характеризуют производственные, транспортные планы и т.п. в натуральных единицах, – можно найти сравнительно просто. Как правило, число таких множителей будет намного меньше числа переменных, характеризующих физический план. Поэтому многообещающим должен быть подход, состоящий в попытке найти значения этих множителей как средства нахождения неизвестных переменных, описывающих оптимальный план в натуральных показателях. Для этой цели Канторович разработал метод пошаговой аппроксимации (итеративный метод): начинают с задания предварительных оценок множителей и вычисляют, каким должен быть соответствующий физический план. Затем проверяют, удовлетворяет ли физический план всем ограничениям (уравнениям и неравенствам). Множители корректируются в той мере, в какой наблюдаются расхождения. Проводятся новые расчеты соответствующих физических планов и новые испытания выполнения или нарушения ограничений и т.д. Если расхождения используются надлежащим способом – как индикаторы того, как следует корректировать множители, – то такой пошаговый подход приведет в конце к оптимальному плану или очень хорошему приближению к нему.

В своих работах Канторович иллюстрирует метод рядом относительно небольших задач (хотя и более объемных, чем, например, примеры, которые приводятся в стандартных современных элементарных введениях в линейное программирование).

Этот метод обладает определенной слабостью с алгоритмической точки зрения, особенно в связи с программированием для современных ЭВМ (конечно, это соображение более уместно в настоящее время, чем в 1939 г.). В оригинальной работе Канторович сформулировал метод таким образом, что на некоторых шагах требовались специальные проверки и решения на основе суждения, т.е. метод не был полностью механическим и требовал дальнейших уточнений. С этой точки зрения метод, позднее разработанный Данцигом (симплекс-метод), – более полный, его проще программировать для ЭВМ. Поэтому именно его метод, а не первоначально предложенный Канторовичем, стал стандартным методом решения задач линейного программирования. (Существует множество вариантов этого метода, ориентирующихся на особенности ЭВМ или задачи со специальной структурой.) Два этих различных метода обладают определенным сходством: они оба – итеративные, в которых приближение к правильному решению происходит последовательными шагами, и в обоих множители типа Лагранжа играют важную роль. В обоих методах такие множители используются для описания оптимума. Вероятно, можно сказать, что в шагах, ведущих к оптимуму, эти множители играют более заметную роль в методе Канторовича, чем в симплекс-методе, поскольку изменения, которые делаются на каждом шаге методом Канторовича, включают в первую очередь корректировку множителей, за которой следует корректировка переменных, характеризующих план в натуральных показателях. Тогда как в симплекс-методе на каждом шаге сначала корректируют переменные, характеризующие план, а затем – корректируют соответствующие множители. Выше изложены очень грубые и неопределенные соображения, но рассмотрение технических подробностей выходит за рамки настоящей работы. Однако этот момент представляет специальный интерес в связи с рядом дальнейших заключений об организации планирования и управления, которые Канторович выводит из своего анализа линейного программирования. Мы вернемся к этому в настоящей статье позднее.

Я видел ссылки на дальнейшие разработки метода Канторовича, выполненные как самим Канторовичем, так и другими русскими математиками, в других ранних изданиях, но эти работы были для меня недоступны.

В западной литературе обсуждался вопрос о вкладе Канторовича в методы вычислений, сделанном в его первой работе. Данциг указывает [6, с. 22–23], что объяснение, данное Канторовичем, как корректировать множители, – неполное, и это – сложная проблема. Ее решение является главным моментом в критическом рассмотрении метода Канторовича у Чарнса и Купера [4]. Я думаю, что моя характеристика и сравнение, приведенное выше, дают об этом приблизительно верное представление.

Интересно также рассмотреть некоторые соображения Чарнса и Купера [4]. В заключительном параграфе они отмечают, что Канторович и другие русские математики работали с вычислительными методами, предназначенными для специальных структур, в пределах класса задач линейного программирования, а позднее это стало очень важной областью западных исследований – математическим программированием. Цитирую их заключения: “Может оказаться, что Канторович предвидел некоторые из этих работ, или же может оказаться, что его разрешающие множители очень важны в таких задачах. Едва ли можно переоценить важность этой работы по специальным структурам и эффективным алгоритмам, если требуется прогресс в области крупномасштабных приложений и связанных с ними теоретических исследований. Поэтому было бы несчастьем, если бы любые такие возможности для успешного продвижения, которые могли бы вытекать из ранней работы Канторовича, были бы упущены просто из-за неправильного понимания его действительных достижений и того, в каком отношении они до сих пор отличались или дополняли работы, проводимые с тех пор другими”. Западные исследования по линейному программированию, по-видимому, привели к разработке более эффективных алгоритмов. Тем не менее, в соответствии с вышеизложенным, возможно, эти ранние методы, предложенные Канторовичем, которые, кажется, никогда полностью не были доработаны[4], содержат идеи, которые все еще могут оказаться весьма важными.

6. “РАЗРЕШАЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ” КАНТОРОВИЧА

Как было указано в связи с третьим аспектом развития линейного программирования, упомянутого в начале раздела 3, линейное программирование имеет некоторые дальнейшие теоретические следствия, которые тесно связаны с общей теорией оптимального распределения ресурсов. Ключом к этим дальнейшим теоретическим толкованиям и выводам является введение “разрешающих множителей” – как их назвал Канторович.

В оптимальном решении указанные “разрешающие множители” – то же самое, что “двойственные переменные”, появляющиеся в общей теории линейного программирования в хорошо известном сегодня виде. Как отмечалось выше, Канторович показал, как их можно использовать в качестве критерия того, будет ли оптимальным найденное решение. С теоретической точки зрения именно в этом состоит фундаментальная функция множителей. Полезность разрешающих множителей в алгоритмах вытекает из этого теоретического свойства.

Множители, однако, полезны еще и тем, что указывают, как значение целевой функции (функции, которую мы желаем максимизировать или минимизировать) изменяется в результате небольших изменений в условиях задачи, например в результате изменения имеющихся ограниченных ресурсов. Другими словами, множители представляют собой предельные значения ценности ограничивающих факторов в задаче. Канторович выявил эту функцию множителей в

[4] Вероятно, автор не обратил внимания на Приложение II анализируемой ниже книги [f], где весь алгоритм описан подробно. Отметим, что сравнение эффективности классического симплекс-метода с методом Канторовича показало преимущество последнего (см. **Panne C. van de, Rahmana F.** (1977): The First Algorithm for Linear Programming: An Analysis of Kantorovich’s Method. The University of Calgary. Discussion Papers Series. № 45. May). (*Прим. перев.*)

своей работе и придал ей большое значение. Между прочим, он утверждал, что решение, полученное с помощью разрешающих множителей данного типа, гораздо ценнее решения, полученного без использования множителей, так как вопрос о малых вариациях в программе, вызванных модификацией условий задачи, может быть непосредственно разрешен на основе этих множителей без повторения полного цикла расчетов для каждого изменения ограничений. Фактически предлагаемый Канторовичем алгоритм строится именно на этой интерпретации разрешающих множителей.

В западной литературе имела место дискуссия о том, насколько Канторович продвинулся в направлении интерпретации своих множителей как теневых или эффективных цен. Купманс в своем предисловии к переводу работы Канторовича в “Management Science” [3] пишет, что «наибольший интерес для экономистов представляет интерпретация… в линейном программировании двойственных переменных, которые автор назвал “разрешающими множителями”, и которые среди прочих названий были названы в западной литературе “эффективными ценами”», – и далее подтверждает эту мысль.

Однако и в этом пункте Чарнс и Купер также придерживаются более критической позиции [4]. Но я не вижу, чтобы они сообщили о чем-то, что может вызвать сомнения в характеристике, которую я дал выше, и которая, по моему мнению, относится к решающему пункту концепции. Купманс развил свои замечания в кратком ответе указанным авторам [5]. Суть дела здесь в том, что Купманс в своих высказываниях вовсе не имел в виду утверждать, что Канторович еще в 1939 г. открыл *все* теоретические аспекты эффективных цен или что он полностью предвосхитил формулировку теоремы двойственности в том виде, как она известна сегодня. Но что он, тем не менее, прояснил важные теоретические свойства и интерпретацию множителей.

История линейного программирования, возможно, заслуживает большего внимания. Чарнс и Купер думают, что было бы интересно провести историческое исследование истоков и развития различных идей, относящихся к линейному программированию. Они завершают свой обзор следующим замечанием: “когда это будет сделано, тогда станет возможно определить истинное место идей Канторовича. Мы считаем, что яркость его достижений нисколько не потускнеет, если эта работа будет выполнена точно и тщательно”.

7. ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАНСПОРТА

В связи с работой 1939 г., рассмотренной нами выше, я упомяну, не входя в детали, другую, также очень раннюю работу Канторовича, опубликованную в СССР в 1942 г., – “О перемещении масс” [c]. Это – сжатая и довольно абстрактная математическая работа, но в ней в общем виде сформулирован широкий класс задач, которые автор с помощью примера сводит к задаче планирования транспорта, а именно – к задаче такого прикрепления пунктов потребления к пунктам производства товаров, при котором минимизируются общие транспортные издержки. Для такого класса задач автор сформулировал необходимые и достаточные условия оптимальности, но не разработал эффективных вычислительных методов нахождения этого оптимума[5]. В предисловии к английскому переводу [7] работы в “Management Science” А. Чарнс характеризует работу как “важную в области линейного программирования”. Другие называли ее “классической” абстрактной транспортной задачей.

У некоторых советских математиков были и другие работы, а также работы Канторовича, в которых они развивали вычислительные аспекты, связанные с этой статьей.

По-видимому, Канторович продолжает серьезно интересоваться проблемами транспорта и размещения производства и после публикации своей математической работы в этой области. Ряд расчетов, к которым приводят его идеи, в СССР, по-видимому, осуществлялись в широких масштабах. В одной из последних статей [d] (написанной совместно с А. Журавелем) Канторович

[5] Это утверждение повторяет ошибку, содержащуюся в предисловии Чарнса. Метод решения с очевидностью вытекает из приведенного в этой работе доказательства упоминаемой теоремы. Помимо этого он был подробно изложен в статье 1940 г., написанной совместно с М.К. Гавуриным, на которую там имеется ссылка как на находящуюся в печати (опубликована в 1949 г.). (*Прим. перев.*)

авторитетно обсуждал “роль транспортного фактора в размещении производства”. В этой работе он указывал на большое значение транспортного сектора в рациональном использовании экономических ресурсов и, соответственно, – на важность правильной структуры грузовых тарифов. В этой, связанной с практикой, дискуссии Канторович и Журавель в значительной степени опираются на эмпирическую работу о структуре издержек, оптимизации перевозок и размещения предприятий и т.п. Они приводят доводы в пользу реформы системы грузовых транспортных тарифов в СССР. При оценке работ Канторовича очень интересно сравнить абстрактную статью 1942 г. с прикладной статьей 1974 г. Канторович внес важный вклад в обе указанные сферы и, более того, сумел сохранить связь и плодотворное взаимодействие между ними.

8. ПОСЛЕДУЮЩИЕ РАБОТЫ КАНТОРОВИЧА

В позднейших работах Канторович дальше развил свои идеи, изложенные в исследованиях 1939 г. Я, в частности, имею в виду его статью [e] и очень важную и оказавшую большое влияние книгу “Экономический расчет наилучшего использования ресурсов” [f], опубликованную в СССР в 1959 г.

Что касается этих работ, то вопросы приоритета здесь несколько сложнее, чем в работе 1939 г., частично потому, что, очевидно, прошло значительное время между развитием этих идей и их официальной публикацией в СССР, а частично и потому, что за это время линейное программирование получило значительное развитие как в США, так и в странах Западной Европы. Однако, по-видимому, ясно, что основные идеи вышеупомянутых работ были развиты уже в начале 1940-х годов как продолжение работы, начатой в статье 1939 г. Канторович во многих местах упоминает, что он работал над этими проблемами в начале 1940-х годов. Р.В. Джуди [8, с. 220] безоговорочно утверждает, что эти работы были написаны в 1941 или 1942 г., но, вероятно, это слишком упрощенное понимание. По-видимому, ясно, что автор сообщал о части содержания и выводах из этих работ в 1940 г. в Ленинградском политехническом институте, в Математическом институте АН СССР – в 1942 г. (тогда находившемся в Казани), а в 1943 г. – в Институте экономики АН СССР. В указанных работах идеи статьи 1939 г. развивались в нескольких направлениях.

Теперь в этих работах даются формулировки, которые естественным образом охватывают общую задачу линейного программирования без всяких преобразований, которые были необходимы для их формулировки в статье 1939 г. Фактически Канторович теперь дает формулировку, которая может показаться даже более общей, чем общепринятая формулировка задачи линейного программирования. Формулировка Канторовича для многих целей (особенно для тех, которые он сам использует в качестве иллюстраций) является весьма полезной и удобной. С помощью соответствующих перестановок и преобразований стандартную задачу линейного программирования все же можно переформулировать таким образом, чтобы она охватывала и формулировку Канторовича. Различие, следовательно, касается формулировки, а не области реальных задач, которые могут быть ими охвачены.

Примером применения теории линейного программирования, для которого удобно использовать формулировки Канторовича, служит работа Д. Мицельского, К. Рея и В. Тржесьяковского, – они построили модель оптимизации плановой экономики с особым учетом экспорта и импорта [9]. Авторы показали, как на основе сформулированной по Канторовичу задачи и с помощью его способа обозначений условий оптимума можно естественным путем прийти к методу декомпозиции, – методу, в котором общая задача оптимизации разлагается на несколько меньших задач, связанных определенным образом между собой, а оптимальное решение общей задачи получается с помощью итеративной процедуры, состоящей в повторном решении меньших задач. Такой подход важен для обеспечения частично децентрализованного согласования оптимальных планов хозяйства в целом или его крупных секторов. Данный, “восточный”, подход к декомпозиции, по-видимому, начал разрабатываться независимо и параллельно хорошо известному сегодня принципу декомпозиции Д. Данцига и П. Вулфа [10], который был первым значительным вкладом в теорию разложения крупных задач линейного программирования в западной литературе. В упомянутой выше работе декомпозиция появляется как естественное следствие и распространение подхода Канторовича. Мне неизвестно, насколько сам Канторович формализовал подобные методы декомпозиции, но представляется очевидным, что он должен был работать с такими методами, когда занимался расчетами в вычислительном центре в Новосибирске. Подобный способ составления децентрализованного плана полностью соответствует общим идеям, высказанным Канторовичем, например, в конце статьи [e] и в нескольких местах книги [f]. Декомпозиция оказалась очень важной идеей и имеет большое значение для применения вычислительных методов к решению задач эффективного распределения ресурсов в больших системах.

Чрезвычайно важное направление распространения исследований Канторовича, которое появилось как в работе [e], так и [f], а потом было разработано и специально выделено в работах [g] и [i], состоит в разработке динамических моделей. С формально-математической точки зрения – это “всего лишь” вопрос наличия большего числа датированных переменных и определенных специальных структур в матрице коэффициентов, описывающей задачу. Поэтому с математической точки зрения большой новой теории не потребовалось. Однако с точки зрения интерпретации и применения динамическое расширение очень важно. Особое значение имеет появление в этом случае датированных теневых цен (разрешающих множителей, двойственных переменных) для различных ресурсов и товаров. За исключением весьма специальных случаев, этим ценам свойственно развиваться во времени, – это означает, что один вид ресурса или товара получает различные теневые цены в различные периоды времени. В этом случае система динамических рядов цен содержит всю информацию, заключенную в теневых ценах, о задаче перспективного планирования, но для применений и теоретической интерпретации представляет особый интерес разделение двух аспектов подобной динамической системы цен. Первый аспект касается изменения *относительных цен* различных товаров, второй – изменения со временем *уровня цен*. Конечно, это не имеет никакого отношения к инфляции или дефляции – рассматриваемые теневые цены выражают предельные значения ограниченных ресурсов в различные периоды времени, – т.е. уровень этих цен в разные периоды выражает ценность, измеренную потенциальным влиянием на целевую функцию наличия ресурсов в ближайшем или более отдаленном будущем. Канторович провел такое разделение (см., например, [f], с. 284–287), записав каждую цену как произведение нормализованной цены фактора на множитель, зависящий только от времени. Эти нормализованные цены привязаны к определенному постоянному уровню в предположении, что определенный, основанный на этих ценах, индекс должен оставаться неизменным во времени. В этом случае изменения фактических теневых цен окажутся комбинацией изменения относительных цен и изменения уровня цен. Введение фактора времени, представленного в качестве индекса цен, делает его интерпретацию близкой к процентной ставке. И Канторович использует его для выражения того, что он обозначает как “нормальную эффективность капиталовложений при переходе от периода t к следующему периоду времени”. Такая интерпретация полностью аналогична точкам зрения и концепциям, которые используются в других современных теориях процента и оптимальных инвестиционных решениях.

9. ГОСУДАРСТВЕННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ХОЗЯЙСТВА И СИСТЕМА ЦЕН

Этот раздел подводит нас к, возможно, наиболее важному аспекту работ [e]–[g] и наиболее подробно обсуждается в [f] (см. также [h]). Кроме дальнейших работ над проблемами, относящимися к микроуровню, или оптимальному планированию перевозок и размещению, Канторович делает общие выводы относительно путей такой организации социалистической экономики, которая обеспечивает высокую эффективность использования ресурсов. Он представляет себе плановую систему, основанную на линейном программировании, в которой составляется централизованный план, касающийся основных аспектов развития, в значительной степени на основе рассмотренных выше методов декомпозиции с координацией совокупности менее крупных задач и итерации. На основе этих расчетов в дополнение к основным “физическим” аспектам плана для наиболее важных продуктов и ресурсов получаются также теневые цены. Канторович предлагал использовать их в качестве основы для системы цен в народном хозяйстве. Он очень убедительно аргументировал (как с практической, так и с теоретической точек зрения), что эти цены могут составить рациональную основу решений, относящихся к большому числу актов выбора в экономике, которые имеют намного более детальный характер, чем те решения, которые можно отыскивать путем расчета более формализованного и централизованного плана. В этой связи

Канторович обсуждал вопрос, который, по моим сведениям, не очень широко и явно обсуждался в западной литературе. Канторович назвал его "относительной устойчивостью" теневых цен. Суть состоит в том, что теневые цены, найденные в результате решения оптимизационной задачи, логически связаны только с теми элементами плана, которые явно входили в проводившиеся вычисления. Детализированные решения, которые приходится принимать в менее крупных подразделениях экономики, суть решения, относящиеся к таким вопросам, как, например, вводить или нет определенные новые методы работы, некоторые новые или модифицированные производственные процессы и т.д., которые были неизвестны или по другим причинам (особенно ввиду их многочисленности) не могли быть учтены при формализованных расчетах плана. Идея Канторовича в данном вопросе состояла в том, что в той мере, в какой эти обстоятельства, находящиеся за пределами формализованных расчетов плана, имеют меньший порядок величины в сравнении с аспектами, включенными в расчеты, полученные теневые цены не будут сильно отклоняться от "правильных" теневых цен, которые можно было бы получить, если бы можно было проводить полный расчет, охватывающий все аспекты, т.е. учитывать модификации методов работы, производственных процессов и т.п., упомянутых выше. Вследствие этого рассчитанные теневые цены могут образовать основу для решений, которые касаются обстоятельств, не охваченных формальной моделью.

Я считаю, что это очень важная идея. В теоретической литературе часто встречается мысль, согласно которой централизованные расчеты цен, которые должны служить в качестве сигналов для децентрализованных решений относящихся к объемам, осуществить невозможно, потому что цены и объемы производства в оптимальном решении взаимообусловлены. Невозможно рассчитать оптимальное решение как для сферы цен, так и для сферы объемов, не вычислив в то же время планов для другой сферы, а если это так, то зачем децентрализовать решения об объемах производства, после того как цены рассчитаны централизованно? Мне представляется, что подход Канторовича позволяет далеко продвинуться в ответе на этот вопрос.

Точка зрения Канторовича в ходе обсуждения системы цен в СССР нашла серьезную поддержку, но не была принята в качестве единственной базы для расчета цен. Было выдвинуто также много возражений против этого предложения. Несомненно, это было связано с тем, что система цен в экономике имела много различных функций. Предложение Канторовича относилось, главным образом, к решению проблемы оптимального распределения ресурсов, выбора способа производства и т.д. Однако, кроме того, имеются такие функции цен, как воздействие на распределение доходов, достижение целей администрации и управления, формирование основы системы учета и т.д. Этим другим целям не обязательно наилучшим образом служит система цен, наилучшая с точки зрения эффективного распределения ресурсов, которая, к тому же, включает движение во времени, как это свойственно упомянутой выше динамической системе. Хотя предложение Канторовича в первую очередь касалось роли цен в связи с эффективностью использования ресурсов и способа производства, ему не чуждо рассмотрение и других функций цен. Например, Канторович считает, что вычисленные теневые цены можно непосредственно использовать для расчета взаимных платежей между государственными предприятиями без учета влияния их на распределение доходов, в то время как фактические розничные цены, по которым платят потребители, во многих случаях и по разным причинам должны отклоняться от таких теневых цен. Более того, Канторович прямо указывает на следующее обстоятельство: пусть расчет дает весьма различающиеся теневые цены рабочей силы различных типов и квалификации, но это не должно автоматически отражаться на фактически выплачиваемой заработной плате и окладах. Тем не менее Канторович считает, что такие теневые цены можно было бы учесть в планах, касающихся организации производства, выбора альтернативных капиталовложений и т.д.

Канторович подробно рассматривал роль, которую должна играть рента на землю и ограниченные природные ресурсы в системе цен. Это естественно вытекает из анализа теневых цен и оптимизации. Данный вопрос имеет большое значение для СССР, и он обсуждался весьма широко, а работы Канторовича, очевидно, много способствовали прояснению вопроса.

Обзоры ряда основных точек зрения в дискуссии о системе цен в СССР были даны М. Борштейном [11], Л. Йохансеном [12] и Р.В. Джуди [8].

10. ИНВЕСТИЦИОННЫЕ КРИТЕРИИ

Анализ критериев определения эффективности капиталовложений Канторович тесно связал с системой цен. Он очень квалифицированно критиковал длинный список предлагавшихся критериев, которые в прежнее время выдвигались при обсуждении этой проблемы в СССР и которым до некоторой степени следовали на практике. Он приводил убедительные аргументы в пользу критериев, основанных на разрешающих множителях или теневых ценах. В связи с этим на сцену выходит вся система динамических рядов цен, которая была описана выше, где "нормальная эффективность капиталовложений" играет ту же роль, что и процентная ставка при расчете текущей стоимости.

Вопрос об инвестиционных критериях также энергично обсуждался и в западной литературе. В ней этот вопрос часто запутывают в некоторых аспектах, между прочим, потому, что инвестиционные критерии зачастую рассматриваются изолированно от всеобъемлющей точки зрения на проблемы оптимизации экономики в целом. По моему мнению, анализ Канторовичем вопроса об инвестиционных критериях весьма прозрачен и конструктивен также и в сравнении с тем, что имеет место в современной западной литературе, – именно потому, что он выводит предлагаемые им критерии из концепции оптимизации экономики в целом.

При обсуждении инвестиционных критериев Канторович непосредственно затрагивал массу спорных вопросов в советской экономической науке и экономической политике. В первую очередь эти области тесно связаны с проблемами системы цен. По этой причине Канторович критикует некоторые предложения, которые выдвигались в СССР и которые по форме довольно близки его собственным предложениям. Суть в том, что другие авторы не видели так ясно тесной связи критериев эффективности капиталовложений с системой цен в целом, а критерии, которые формально близки критериям Канторовича, будут приводить к неверным результатам, если их применять на основе структуры цен, которая не согласуется с идеей оптимизации. Таким же образом Канторович критиковал формально сходные критерии, которые опираются на показатель процентной ставки, полученный из рассмотрения системы денежного обращения, а не с помощью оптимизации. Далее, Канторович критиковал серию критериев, которые также подобны его собственным, но которые отличаются тем, что они опираются на различные нормы "эффективности капиталовложений" в различных отраслях производства. Из анализа экономики в целом вытекает, что такая норма должна быть одинаковой для всех отраслей. (Здесь практика сделала несколько шагов в направлении сближения с точкой зрения Канторовича, но еще не приняла ее целиком.)

В качестве примера проблемы инвестиционных критериев Канторович обсуждал также более конкретно такие аспекты развития экономики СССР, как упор на тяжелую промышленность на ранних этапах индустриализации. Официальная точка зрения в СССР состояла в том, что такое распределение средств в пользу тяжелой промышленности оказалось бы невыгодным согласно экономическим расчетам, но одно из преимуществ советской системы именно в том и состоит, что крупные капиталовложения могли быть были сделаны вопреки выгоде. Канторович придерживается мнения, что *при правильных расчетах*, основанных на теневых ценах и правильно определенной норме "эффективности капиталовложений", эта стратегия *могла бы оказаться выгодной.*

Важная проблема, связанная с критериями капиталовложений, – безусловно, вопрос о возможности численной оценки нормы эффективности капиталовложений, которую следует использовать в расчетах. Одним из подходов к этому является предложенный Канторовичем и экспериментально опробованный в СССР, который состоит в расчете этой нормы на основе укрупненных моделей, сформулированных как динамические задач линейного программирования, описанные выше (см., в частности, [i]). Однако Канторович не придерживался этой процедуры догматически. Он считал, что к вопросу оценки нормы эффективности капиталовложений следует подходить под разными углами зрения, поскольку линейно-программная формулировка не охватывает всех относящихся к делу аспектов экономики. Канторович вдумчиво и основательно рассматривает эту проблему в нескольких статьях. Он также попытался рассчитать норму с помощью макроэкономических моделей. Ряд работ Канторовича в этой области имеется в английских переводах [j]–[n]. В этих статьях определение числового значения нормы эффективности капиталовложений рассматривалось при различных допущениях относительно вида производственных функций и типа технического прогресса с различением роли фондов и предметов потребления. Что касается вида производственных функций и типа технического прогресса, то кажется (см., в частности, [n]), что Канторович считал представление “putty-clay” (связанных фондов) более реалистичным, чем “putty-putty” (перетекания фондов), но, рассмотрев случай “putty-clay”, он предлагал также модифицированную модель “putty-clay”, в которой ограничена возможность фактической замены фондов.

В связи с инвестиционными критериями и динамической нормой эффективности капиталовложений интересно также сослаться на широкое обсуждение Канторовичем “цены времени” [m]. Это популярное сочинение, в котором весьма убедительно и прозрачно с помощью многочисленных практических и конкретных примеров объясняется необходимость более действенного учета временного лага в планировании и управлении экономикой в СССР.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мне представляется, что вышеприведенный обзор охватывает основные аспекты вклада Л.В. Канторовича в экономическую науку, хотя, конечно, это изложение – краткое и обобщенное.

Как отмечалось ранее, у меня не было возможности изучить ряд работ Канторовича. Некоторые из них указаны в советской библиографии по экономико-математическим методам и моделям, которая была опубликована Ленинградским отделением АН СССР в 1968 г. Некоторые упоминаются и кратко излагаются в работах [13, 14, 17], а также в тех работах Канторовича, на которые были сделаны ссылки. Насколько я могу судить, большая часть этих статей касаются вычислительных аспектов и дальнейшей детализации рассмотренных выше работ. По-видимому, в последующем Канторович интенсивно работал над проблемами амортизации фондов в связи с техническим прогрессом. Предложения на этот счет можно найти в [m], где, между прочим, рассматривается вопрос о правильности применения ускоренной амортизации в начальный период срока службы фондов. Канторович доказывал, что такая система амортизации может быть подтверждена анализом моделей оптимального использования, ремонта и замены станков. Можно сослаться также на статью [h] и на несколько других статей, в которых рассматривался этот вопрос, но они имеются только на русском языке.

Кроме работ, опубликованных под его именем, Канторович, несомненно, внес большой вклад в науку, руководя научными исследованиями и расчетами, особенно в научно-исследовательском центре в Новосибирске.

Если собрать все работы Л.В. Канторовича под одним названием, то таким подходящим обобщающим названием было бы: оптимизация использования ограниченных ресурсов, – т.е. самая главная из всех экономических проблем. Его вклад в линейное программирование относится к этой области. Математические и вычислительные аспекты важны, но не меньшее значение имеет то, что Канторович понял, какой широкий класс конкретных и разнообразных задач можно привести к этой форме. Он увидел огромное значение теории линейного программирования для решения намного более общих проблем управления и планирования экономики, включая систему цен и критерии инвестиций. Система цен и критериев инвестиций служит также полезным инструментом оптимального использования ограниченных ресурсов. В эти области Канторович внес вклад также и с других позиций, – отличных от линейного программирования.

По прочтении книг и статей Канторовича становится ясно, что он достиг глубокого понимания экономических проблем, и многие его объяснения отличаются проницательными экономическими соображениями и реалистическим анализом практических проблем. Л.В. Канторович – знаменитый математик, но, несомненно, мы с полным правом можем включить его в ряд наиболее выдающихся *экономистов* последних десятилетий.

БИБЛИОГРАФИЯ

Работы Л.В. Канторовича

В этом списке приводятся ссылки на переводы публикаций Л.В. Канторовича, которые я по большей части использовал в работе. Год оригинальной публикации приводится в скобках. Имеются издания некоторых работ в переводах на другие западные языки – кроме указанных ниже. Для интересующихся этими работами существует библиография, включающая и ссылки на оригиналы, – например, см. Ellman [13], p. 198–199. См. также *The Use of Mathematics in Economics* [b], p. 302.

[a] Mathematical Methods of Organizing and Planning Production. Management Science. № 4. July. 1960. (Оригинальная публикация в Ленинграде, 1939 г.)

[b] Mathematical Methods of Production Planning and Organization, Published in The Use of Mathematics in Economics. Edited by A. Nove. Oliver & Boyd, Edinburgh & London 1964. (Это перевод наиболее важных частей книги, опубликованной в СССР в 1959 г. под редакцией В.С. Немчинова. Статья Канторовича воспроизводит его работу 1939 г. – см. [a] – с небольшими изменениями.)

[c] On the Translocation of Masses // *Management Science.* № 1. October 1958 (оригинальная публикация в СССР в 1942 г.).

[d] The Role of the Transport Factor in the Location of Production // *Problems of Economics.* 1974. (Соавтор А. Журавель. Оригинальная публикация в СССР в 1974 г.)

[e] Further Development of Mathematical Methods and Prospects of Their Application in Economic Planning // *The Use of Mathematics in Economics*. См. [b].

[f] The Best Use of Economic Resources. London, N.Y.: Pergamon Press. 1965. (Оригинальная публикация в СССР в 1959 г.)

[g] Ein dynamisches Modell der optimalen Planuing // *Sowjetwissenschaft*. Gesellshaftswessenshaftliche Beiträge (Berlin), № 7. 1964. (Оригинальная публикация в СССР в 1964 г. Английский перевод “A Dynamic Model of Optimum Planning” в журнале “*Mathematical Studies in Economics and Statistics in the USSR and Eastern Europe*”. Vol. I. № 2. Winter 1964–1965.)

[h] Optimal Mathematical Models in Planning the Development of a Branch and in Technical Policy // *Contemporary Soviet Economics*. Vol. I. N.Y.: International Arts and Sciences Press. 1969. (Оригинальная публикация в СССР в 1967 г.)

[i] Estimating the Effectiveness of Capital Expenditures // *Matekon.* № 1. Fall 1971. (Совместно с В.Н. Богачевым и В.Л. Макаровым. Оригинальная публикация в СССР в 1970 г.)

[j] A Single-Product Dynamical Model with Instantaneous Convertibility of Funds // *Soviet Mathematics.* № 3. 1967. (Совместно с И.Г. Глобенко. Оригинальная публикация в СССР в 1967 г.)

[k] A Dynamical Model of Economics // *Soviet Mathematics.* № 5. 1967. (Совместно с И.Г. Глобенко. Оригинальная публикация в СССР в 1967 г.)

[l] Once Again on Calculating the Norm of Effectiveness on the Basis of a One-Product National Economic Development Model // *Matekon.* № 2. Winter 1970–1971. (Совместно с А.Л. Вайнштейном. Оригинальная публикация в СССР в 1970 г.)

[m] Der Preis der Zeit *// Sowjetwissenschaft*. Gesellshaftswessenshaftliche Beiträge (Berlin). № 1. 1970. (Совместно с В.Н. Богачевым. Оригинальная публикация в СССР в 1969 г.)

[n] Dynamic Models of Technological Changes. In: G.I. Marchuk (ed.) “*Optimization Techniques. 1F1P Technical Conference*”. Lecture Notes in Computer Science, 27, Berlin: Springer-Verlag, 1975.

Ссылки на других авторов

Работы, помеченные номерами [1]–[12], используются в тексте. Ссылки [13]–[20] сделаны на книги и статьи, которые использовались при подготовке этого очерка.

[1] Koopmans T.C. (ed.) (1951): Activity Analysis of Production and Allocation. Cowles Commission Monograph № 13. N.Y.: John Wiley & Sons. (Особенно см. G.B. Dantzig “The Programming of Interdependent Activities” and “Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities”, кроме того, **Koopmans T.C.** “Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities”.)

[2] **Dorfman R., Samuelson P.A., Solow R.M.** (1958): Linear Programming and Economic Analysis. N.Y.: McGraw-Hill Book Co. 105S.

[3] **Koopmans T.C. (**1960): A Note About Kantorovich’s Paper, Mathematical Methods of Organizing and Planning Production // *Management Science.* № 4. July . (Введение к L.V. Kantorovich [a].)

[4] **Charnes A., Cooper W.W. (**1962): On Some Works of Kantorovich, Koopmans and Others // *Management Science*. Vol. 8. P. 246–263.

[5] **Koopmans T.C.** (1962): On the Evaluation of Kantorovich’s Work of 1939 // *Management Science*. Vol. 8. April. P. 13–17.

[6] **Dantzig G.B.** (1963): Linear Programming and Extensions. Princeton: Princeton University Press.

[7] **Charnes A.** (1958): Foreword // *Management Science.* № 1. October. (Ведение к L.V. Kantorovich [c].)

[8] **Judy R.W. (**1971): The Economists. In: Skilling H.G., Griffiths F. (eds.) “*Interest Groups in Soviet Politics*”. Chapter VII. Princeton: Princeton University Press.

[9] **Mycielski J., Rey K., Trzeciakowski W.** (1963): Decomposition and Optimization of Short-run Planning in a Planned Economy. In: Barna T. (ed.) “*Structural Interdependence and Economic Development”.* L.: MacMillan & Co.

[10**] Dantzig G.B., Wolfe P.** (1960): Decomposition Principle for Linear Programs // *Operations Research.* № 1.

[11**] Bornstein M.** (1964): The Soviet Price Reform Discussion // *Quarterly J. of Econ*.

[12] **Johansen L.** (1966): Prissystemets Rolle i de Østeuropeiske Land // *Statsohonomiek Tidskrift*.

[13] **Ellman M.** (1973): Planning Problems in the USSR. Cambridge: Cambridge University Press.

[14] **Hurdt J.P.** et al. (eds.) (1967): Mathematics and Computers in Soviet Economic Planning. Now Haven: Yale University Press.

[15] **Isbell J.H., Marlow W.H.** (1962): On an Industrial Programming Problem of Kantorovich // *Management Science*. Vol. 8. № 1.

[16] **Johansen L.** (1966): Soviet Mathematical Economics // *The Econ. J.*

[17] **Johansen L.** (1967): Review of L. V. Kantorovich: The Best of Use of Economic Resources ([f]) // *The Economic Journal*.

[18] **Zauberman A.** (1967): Aspects of Planometrics. L.: The Athlone Press, University of London.

[19] **Ward B.** (1960): Kantorovich on Economic Calculation // *The J. of Political Econ*.

[20] Pro and Con (1969): Pro and Con – Compare Conclusions. In: “*Contemporary Soviet Economics*”. Vol. I. N.Y.: International Arts and Sciences Press. (Перевод отчета из Экономической газеты, № 10, 1965 г. о дискуссии, состоявшейся в связи с выдвижением Л.В. Канторовича, В.С. Немчинова и В.В. Новожилова на Ленинскую премию 1965 г.)

Работы Л.В. Канторовича (советские издания, цитированные автором в переводах)

[a] Математические методы организации и планирования производства. Л. 1939.

[b] Математические методы организации и планирования производства. В кн.: “*Применение математики в экономических исследованиях*”. М. 1959.

[c] О перемещении масс // *ДАН.* 1942.

[d] Роль транспортного фактора в размещении производства (совм. с А. Журавелем) // *Вопросы экономики.* 1974.

[e] Дальнейшее развитие математических методов и возможности их применения в планировании хозяйства. В кн. “*Применение математики в экономических исследованиях*”. М. 1959.

[f] Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М. 1959.

[g] Динамическая модель оптимального планирования. В кн.: “*Планирование и экономико-математические методы*”. М. 1964.

[h] Оптимальные математические модели в планировании развития отрасли и в технической политике. Новосибирск. 1967.

[i] Об оценке эффективности капитальных затрат (совм. с В.Н. Богачевым и В.Л. Макаровым) // *Экономика и мат. методы.* Т. VI. Вып. 6. 1970.

[j] Однопродуктовая динамическая модель с мгновенной превращаемостью фондов (совм. с И.Г. Глобенко) // ДАН СССР. Т. 174. № 3. 1967.

[k] Динамическая модель экономики (совм. с И. Г. Глобенко) // *Докл. АН СССР*. Т. 176. № 5. 1967.

[l] Еще об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития народного хозяйства (совм. с А. Л. Вайнштейном) // *Экономика и мат. методы.* Т. VI. 1970.

[m] Цена времени (совм. с В. Богачевым) // *Коммунист*. № 10. 1969.

[n] Динамические модели технического прогресса. 1975.

Перевод В.Л. Канторовича

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЛЕОНИДА ВИТАЛЬЕВИЧА КАНТОРОВИЧА

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ ИННОВАЦИОННОГО РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ РОССИИ НА ОСНОВЕ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ*

© 2011 г. К.А. Багриновский

(Москва)

Основное содержание настоящей работы тесно связано с трудами по высшему анализу и математическим методам организации и планирования производства покойного академика, лауреата Нобелевской премии Л.В. Канторовича. Его незабвенной памяти и посвящается эта статья.

В статье рассматриваются вопросы применения моделей и методов адаптивного управления в условиях возрастания неопределенности выработки и принятия решений в современной экономике России. В качестве основного объекта исследований избраны механизмы инновационного развития и их функционирование в меняющихся условиях. Представлен новый подход к моделированию механизма обновления продуктов и технологий, а также описание новых возможных объектов анализа на примере необходимого развития ИТ-инфраструктуры в экономике России.

Ключевые слова: адаптивные предприятия, информационные технологии, нанотехнологии, производство наноструктур, инновационная система.

Система адаптивного управления предприятием предназначена для того, чтобы обеспечить наиболее точное достижение поставленной цели производства, и в особенности организовать защиту производственной деятельности от неконтролируемых внешних влияний и помех.

Рыночная экономика является в сущности надежной базой для применения методов адаптивного управления. Основанные на законах рынка предприятия постоянно анализируют свое окружение и изменяются, концентрируя производственные ресурсы на самых полезных и прибыльных направлениях их использования. При этом в настоящее время в большинстве предприятий главную роль в развитии производства играет поддержание стабильности и контроль производства. Однако тщательный анализ развития многих успешных предприятий приводит к системе взглядов, которую можно представить как совокупность принципов создания и эффективной деятельности современного предприятия с адаптивным управлением. При этом следует иметь в виду, что разработка и применение специальной системы адаптивного управления на предприятии способствуют решительному ускорению достижения этой цели и освобождению целенаправленной работы предприятия от ненужных внешних влияний и разнообразных помех.

В общем смысле под механизмом инновационного (научно-технологического) развития понимается система взаимоотношений между государством, научно-технической средой и рыночными силами, которая обеспечивает постоянное совершенствование и обновление технологического вооружения национальной экономики (Багриновский, Бендиков, 2007). Этот механизм включает ряд основных компонентов – механизмов инновационного развития, которые предназначены для решения конкретных задач развития научно-технического прогресса реальной экономики.

В их число следует включить механизм освоения новых наукоемких технологий. Надежная работа этого механизма способствует правильному использованию такой важнейшей стороны

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского гуманитарного научного фонда (проект 11-02-00227а).

деятельности предприятия, как его рыночная мотивация, поскольку в результате его успешной работы предприятие более четко ориентируется на активное поведение на рынке, расширение своего присутствия на нем и усиление своей рыночной позиции.

Механизм управления технологическим развитием основан на сочетании и взаимодействии между государственным регулированием, инновационным бизнесом и его рыночной инфраструктурой, а также между фундаментальными и прикладными научными исследованиями в области высоких современных технологий.

Механизмы инвестирования в инновационное развитие являются важнейшей частью национальной инновационной системы (НИС) страны.

Серьезную роль в создании НИС играет механизм обновления продуктов и технологий, который основан, главным образом, на сокращении прямых затрат труда и материалов за счет заметного увеличения более сложных видов затрат, в особенности на НИОКР. Современные новые технологии, как правило, возникают в результате комплексного использования крупных достижений в области электроники, разработки новых материалов, компьютерного проектирования и т.п.

Создание новых видов продукции отличается от процесса обновления технологий прежде всего тем, что его успешность тесно связана с положением дел на соответствующем рынке. Процесс разработки принципиально новых изделий обычно активизируется с наступлением спада спроса на традиционные изделия. При этом происходит падение цен на такие изделия, продавцы широко применяют различные виды скидок, чтобы остановить падающий спрос, в результате чего снижается доходность таких изделий. Поэтому потенциальные производители будут более охотно поддерживать новое изделие. Важным элементом процесса создания нового изделия является исследование рынка, по возможности более точная оценка объемов продаж и разработка комплекса методов обслуживания нового изделия. Чтобы обеспечить стабильность производства и продаж нового изделия, большое значение следует придавать методам регулирования возможных колебаний спроса, вплоть до их полной ликвидации. Для решения этой задачи могут быть эффективно использованы методы адаптивного управления.

Методы анализа и синтеза дискретных адаптивных систем динамических объектов достаточно полно и точно изложены в книгах (Срагович, 1981; Деревицкий, Фрадков, 1981). Там же рассмотрены различные способы постановки задач адаптивного управления и приведены примеры решения практических задач. Процесс управления называется самоорганизующимся, если уменьшение априорных неопределенностей, приводящее к эффективному управлению, достигается за счет информации, которая получается в ходе управления на основе последовательных наблюдений доступных входных и выходных сигналов.

Самоорганизация достигается различными способами, из которых следует выделить: снижение степени неопределенности описания динамики объекта (самоорганизующийся процесс параметрической адаптации) и неопределенности, непосредственно связанной с улучшением качества системы (функционально-адаптивный самоорганизующийся процесс). При этом получаемая от объекта управления информация используется управляющим устройством и соответствующим блоком оценки качества работы системы. В работе (Багриновский, 1999) представлен процесс самонастройки на примере решения задачи о поддержании постоянной величины валовой выручки на заданном уровне для динамической экономической системы.

Разработке практических принципов управления, способствующих созданию адаптивного предприятия, посвящена значительная часть книги (Майер, Дэвис, 2007).

1. АЛГОРИТМЫ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Общая постановка задачи адаптивного управления имеет следующий вид. Рассматривается объект управления (ОУ), на динамику которого влияют управляющие воздействия $u = u(t)$, измеряемые возмущения $r = r(t)$ и недоступные измерению возмущения $v = v(t)$. Доступные измерению выходные переменные объекта обозначаются $y = y(t)$. Предполагается также, что динамика объекта зависит от ряда неизвестных параметров, совокупность которых обозначается ξ. Задано множество Ξ возможных значений ξ, определяющее класс допустимых объектов. Кроме того, задана цель управления, определяющая желательное поведение объекта.

Требуется определить алгоритм управления (адаптивный регулятор), использующий измеряемые величины, не зависящий от ξ, принадлежащему Ξ, так, чтобы для любого ξ из Ξ обеспечить достижение заданной цели управления (Деревицкий, Фрадков, 1981, с. 13).

Данная постановка задачи охватывает также традиционные, "неадаптивные" задачи управления. В "неадаптивном" случае параметры объекта ξ предполагаются известными, т.е. множество допустимых объектов Ξ состоит из одного элемента. Специфика задач адаптивного управления состоит в том, что класс Ξ содержит "много" объектов, поэтому и цель управления должна достигаться в условиях неопределенности. Правда, четкую границу между адаптивными и неадаптивными задачами провести трудно, поскольку традиционные решения зачастую являются "грубыми", нечувствительными к отклонению параметров объекта от известных значений. Нетривиальные задачи адаптивного управления возникают тогда, когда "размер" множества Ξ (уровень неопределенности) достаточно велик и традиционные методы синтеза регуляторов оказываются непригодными.

Следует заметить, что в число неизвестных параметров, кроме параметров объекта, могут входить также характеристики возмущений. При этом множество Ξ будет определять класс допустимых объектов и возмущений.

Особенность работы адаптивного регулятора состоит в *одновременном* изучении объекта и управлении им. При адаптивном подходе правило определения управляющих воздействий может автоматически изменяться в ходе работы. Адаптивный регулятор имеет двухуровневую структуру (Деревицкий, Фрадков, 1981, с. 14, рис. 1.4). Алгоритм первого уровня зависит от вектора параметров c и при известном ξ из Ξ должен обеспечивать (при соответствующем выборе $c^* = c^*(\xi)$) достижение цели управления. Алгоритм второго уровня должен изменять (настраивать) в ходе итеративного процесса вектор c таким образом, чтобы приспособиться к неизвестной ситуации и обеспечивать при неизвестном априори ξ из Ξ достижение поставленной цели.

Алгоритм первого уровня называется *алгоритмом регулирования*, а устройство, в котором он реализуется, – *регулятором*. Алгоритм второго уровня называется *алгоритмом адаптации*. Устройство, в котором он реализуется, называется *адаптером*. Объект управления и регулятор образуют основной контур адаптивной системы. Цепь обратной связи, включающая адаптер, называется *контуром адаптации*. Приведенная постановка относится к самонастраивающимся системам, где настройке подвергаются только параметры регулятора – конечный набор числовых величин.

Антиградиентными алгоритмами адаптации будем называть алгоритмы, в которых направление изменения настраиваемых параметров противоположно градиенту скорости изменения заданной оценочной функции, обусловленного уравнением объекта (Деревицкий, Фрадков, 1981, с. 35).

В ходе управления детерминированными объектами случайное блуждание по множеству правил может отсутствовать; такого рода алгоритмы называются *беспоисковыми*.

Следует иметь в виду, что рынок в любой момент может предъявить различные требования к расходованию конкретных видов ресурсов. Поэтому адаптивное управление процессом должно быть в значительной мере автоматизировано, а параметры регулятора – вычисляться при помощи адаптера.

В решении конкретных задач управления технологическим прогрессом обычно используются различные целенаправленные алгоритмы параметрической и функциональной адаптации, а также применяются встроенные регуляторы. К их числу относятся:

а) снижение процентной ставки по банковским кредитам при необходимости дополнительного прироста инвестиций;

б) снижение налоговой ставки на добавленную стоимость (НДС) в случае возникновения дополнительной потребности в поставках сырья и материалов;

в) повышение НДС на товары, пользующиеся высоким спросом;

г) дополнительная эмиссия акций на уровне предприятия при нехватке капиталов;

д) снижение выплат дивидендов и т.п.

Далее рассмотрены схематические примеры применения некоторых беспоисковых алгоритмов адаптивного управления.

2. РАСЧЕТ ПРИБЛИЖЕНИЯ К ЗАДАННОМУ ЗНАЧЕНИЮ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ В УСЛОВИЯХ НАЛИЧИЯ НЕКОНТРОЛИРУЕМЫХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Пусть $u(t)$ – внешнее задающее воздействие (например, расход основного производственного ресурса), $v(t)$ – внешнее неконтролируемое возмущение (например, отклонение от нормы поступления основного ресурса, которое определяется на основе экспертных оценок), $y(t) = f(u)$ – производственная функция, которую применяют для расчета объема выпуска продукции, y^* – заданный конечный объем.

Таким образом, основное уравнение функционирования объекта имеет вид $y(t) = f(u(t) + v(t))$. Требуется обеспечить процесс приближения $y(t)$ к y^* при определенном законе изменения $u(t)$ и при любом возмущении $v(t)$, принадлежащем ограниченному множеству V. Для достижения этой цели строится оценочная функция $Q(t) = (y^* - y(t))^2$ и определяется ее минимальное значение, равное нулю, методом антиградиентного спуска по параметрам производственной функции (Деревицкий, Фрадков, 1981).

В данном примере полагаем, что функция $f(u)$ может быть выражена при помощи введения одного параметра a и имеет вид $y = a\sqrt{u}$. В этом случае оценочная функция примет следующий вид: $Q(t) = (y^* - a\sqrt{u+v})^2$.

Далее определяется производная от $Q(t)$ по параметру a:

$$dQ(t)/da = -2(y^* - a\sqrt{u_t + v_t})\sqrt{u_t + v_t}.$$

Расчетная формула метода спуска имеет вид

$$a_{t+1} = a_t + 2h(y^* - a\sqrt{u_t + v_t})\sqrt{u_t + v_t}.$$

Здесь величина $h > 0$ является шагом по времени (t), а функция возмущения $v(t)$ определяется условиями конкретной задачи.

Процесс расчета продолжается до тех пор, пока величина $Q(t)$ не станет достаточно малой.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕННОГО ВЫШЕ ПОДХОДА К РАЗРАБОТКЕ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ, РАЗВИТИЕ КОТОРЫХ ХАРАКТЕРИЗУЕТСЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫМИ МОДЕЛЯМИ

Например, рассмотрим задачу оптимизации предприятия, работающего в условиях ограниченности важнейших производственных ресурсов в количестве m. Пусть все главные технологические способы могут быть выражены как $(m + 1)$-мерные векторы затраты–выпуск $L_j = (y_j, a_{1j}, \ldots, a_{mj})$, где y_j отражает объем продукции, производимой таким способом при единичной интенсивности его применения. Величины a_{kj} представляют количества расходуемых производственных ресурсов в тех же условиях.

Задача максимизации выпуска продукции имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \to \max \text{ при условиях } \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \le s_k, \quad k = 1,\ldots, m, \quad x_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots, n.$$

Здесь величины x_j представляют искомые интенсивности технологических способов, а величины s_k – заданные объемы производственных ресурсов. Известно, что при неотрицательных значениях коэффициентов технологических способов эта задача имеет решение и суммарный выпуск продукции предприятия может быть выражен через объемы расходуемых ресурсов по формуле

$Y=\sum_{j=1}^{n} y_j=\sum_{k-1}^{m} p_k s_k$, где p_k – “теневые цены” ресурсов, определяемые как решение задачи, двойственной к основной.

Таким образом, имеется прямая связь между расходом ресурсов и объемом выпуска продукции, аналогичная той, которая была представлена выше для случая одного ресурса.

Пусть y^* – заданный конечный объем. Тогда для построения адаптивной системы можно действовать согласно плану, намеченному выше в задаче с одним ресурсом.

4. ПРОЦЕСС АДАПТАЦИИ ГРУППЫ ПРЕДПРИЯТИЙ

Пусть $E_1,..., E_n$ – объекты, y_j – соответствующие объемы выпуска продукции, R_j – затраты основного ресурса (энергии), a_j – технологический коэффициент производственной функции $y_j = a_jR_j$, $j = 1,..., n$. Общий расход ресурса выражает соотношение $R=\sum_{j=1}^{n} R_j$. Средний технологический коэффициент группы равен $a=\sum_{j=1}^{n} y_j/R$. Возможные отклонения от этого коэффициента представлены функцией времени $v(t)$.

Рассмотрим случай, когда происходит сбой в работе одного предприятия (с номером j_s): $z_{j_s}=y_{j_s}-q_{j_s}(t_r)$, где $q_{j_s}(t_r)$ – потеря, или ущерб, в момент t_r. Предположим, что компенсация ущерба происходит путем увеличения общего расхода ресурса в следующий момент в размере $d_s R(t_r+1)=q_{j_s}(t_r)/a_j$.

Пусть Y^* – планируемый выпуск продукции группой предприятий в течение определенного периода $[t_0, t_f]$. Тогда оценочная функция имеет вид $Q(t)=\left(Y^*-\sum_{t=t_0}^{t_f} y_{jt}\right)^2$. Она должна стремиться к 0 при t, стремящемся к ∞. С учетом введенных обозначений получаем $Q(t)=\left(Y^*-\sum_{t=t_0}^{t_f}(a+v(t))R\right)^2$.

4.1. Имитационные модели механизмов инновационного развития. На основе моделей, подобных представленным выше, могут быть разработаны имитационные системы. Эти системы используются для решения различных задач управления исходными объектами. Они также могут быть включены в общий процесс превращения исходного объекта в адаптивное предприятие как рабочий инструмент.

В качестве примера приведем построение имитационной системы адаптивного управления механизмом обновления.

Действие механизма обновления продуктов и технологий в рыночных условиях направлено на максимально возможное увеличение конечного продукта и минимизацию отклонений от принятого плана развития производства. Соответствующая имитационная система строится на основе аналогичной системы, разработанной для представления действия механизма обновления в условиях ограниченности важнейших производственных ресурсов в работе (Багриновский, Исаева, 2006).

Система также имеет дискретный характер и состоит из ряда взаимосвязанных частей – блоков. Первый – блок прогнозирования и формирования пакета производственных ресурсов, необходимых для выполнения намеченной программы, – создается на основе информации, поступающей с ресурсных рынков, а также сведений о финансовых средствах, которыми может располагать предприятие для приобретения указанных ресурсов. В результате работы этого блока формируется ограничительный вектор ресурсного наполнения $R=\{R_i\}_{i=1,\dots,m}$.

Основной раздел второго блока имитационной системы предназначен для определения значений расходных коэффициентов a_j ($j = 1,…, n$), которые характеризуют технологии, применяемые как для производства старых изделий, так и предполагаемых для производства новых изделий. При этом с участием экспертов и ЛПР вырабатываются коэффициенты b_j ($j = 1,\ldots, n$), которые характеризуют затраты на НИОКР, направленные на совершенствование старых изделий и разработку новых технологий.

Третий блок имитационной системы используется для расчетов и определения (совместно с ЛПР) основных параметров оптимизационной модели получения максимума конечного продукта. Здесь рассчитываются значения всех ценовых показателей для всех видов продукции предприятия на основе информации о состоянии продаж на соответствующих рынках и возможных прогнозах и расчетах. Для дальнейших расчетов тем самым подготавливаются цены продуктов p_j ($j = 1,\ldots, n$), где n – число изучаемых изделий.

В оптимизационной модели в качестве искомых величин применяются объемы производства всех рассматриваемых изделий – как старых, так и инноваций.

В упрощенном варианте оптимизационная задача на такте (t) имеет вид

$$F = \sum_{j=1}^{n}(p_{jt} - a_{jt})x_{jt} - \sum_{j=1}^{n} b_{jt}x_{jt}^2 \to \max \text{ при условиях } \sum_{i=1}^{m} q_{ijt} < R_{jt}, \quad x_{jt} > 0, \quad j = 1,\ldots, n.$$

Здесь $q_{ijt} > 0$ обозначает расходный коэффициент ресурса i при производстве товарной единицы продукта j. Пусть вектор $z_t = \{z_{jt}\}_{j=1,\ldots,n}$ является решением оптимизационной задачи на такте (t). Тогда величина $I_{jt} = b_{jt}z_{jt}^2$ ($j = 1,\ldots, n$) представляет собой объем финансирования НИОКР, направляемый на совершенствование старого или на разработку нового изделия с номером j.

В качестве характеристики эффективности данной работы в имитационной системе используется обратная связь между третьим блоком на такте (t) и вторым блоком на такте ($t + 1$). Эта связь отражает влияние результатов НИОКР на снижение величин расходных параметров и в простейшей форме имеет вид: $a_{j,t+1} = a_{jt}\exp\{-k_{jt}I_{jt}\}$, $j = 1,\ldots, n$, где $k_{jt} > 0$ – коэффициент эффективности НИОКР.

Четвертый блок адаптивной имитационной системы содержит главные элементы управления производственной единицей в условиях адаптивного управления. Далее приводится пример разработки адаптивной системы управления на предприятии, который во многом основан на материалах книги (Деревицкий, Фрадков, 1981).

Пусть объектом управления является некоторое машиностроительное предприятие, занятое производством запасных частей (деталей) для сельскохозяйственных машин. В определенные моменты времени t_k ($k = 0, 1,\ldots$) на предприятие поступают сырье, имеющее качество f_k, и дополнительные материалы u_k. Будем считать, что количество y_k продукции, которое получается в момент времени t_k, зависит от количества сырья, подготовленного для производства деталей, причем величина x_{k+1} определяется значениями x_k, f_k, u_k. Пренебрегая действием неуправляемых возмущений, можно записать математическую модель производства в следующем виде:

$$x_{k+1} = F(x_k, f_k, u_k), \quad y_k = h(x_k). \tag{1}$$

Конкретный вид функций в соотношении (1) определяется производственной функцией предприятия, а также уравнением подготовки сырья для дальнейшей обработки. Величины y_k, f_k считаются доступными измерению, а количество дополнительных материалов u_k является управляющим воздействием, при помощи которого можно влиять на ход процесса производства.

Пусть далее целью управления является поддержание количества выходного продукта на заданном уровне y^*. Обычно для целей управления уравнения (1) линеаризуют в окрестности расчетного режима, заменяя (1) линейными уравнениями

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k + df_k, \quad y_k = hx_k. \tag{2}$$

Если значения коэффициентов a, b, d, h известны точно, то можно достаточно просто построить алгоритм, обеспечивающий достижение цели (идеальный закон управления). Этот закон задается равенством

$$u_k^* = (y^* - ay_k - dhf_k)/(bh). \tag{3}$$

Однако в общем случае коэффициенты a, b, d, h в соотношении (2) зависят как от расчетных значений переменных, так и от параметров процесса производства, в частности, от качества сырья, правильности подбора дополнительных материалов, надежности оборудования и т.п. При этом часть факторов, от которых зависит изменение свойств объекта, недоступна непосредственному измерению. Поэтому реальным процессом производства приходится управлять в условиях неопределенности, когда идеальным законом управления (1) пользоваться нельзя. Средством решения подобных задач может служить адаптивная система управлений. В такой системе применяется закон управления с переменными коэффициентами. Изменение (настройка) коэффициентов осуществляется с помощью алгоритма адаптации на основе обработки текущей информации о состоянии процесса, которую получают в ходе нормальной работы предприятия.

Алгоритм адаптации строится таким образом, чтобы приспособиться к конкретной ситуации и обеспечить достижение цели управления при любом возможном значении неизвестных параметров объекта.

Применительно к рассматриваемой задаче построение адаптивной системы может быть выполнено следующим образом. Идеальный закон управления заменяется реальным законом, который имеет следующий вид

$$u_k = c_{1k} y^* + c_{2k} y_k + c_{3k} f_k, \tag{4}$$

где c_{1k}, c_{2k}, c_{3k} – настраиваемые коэффициенты, образующие вектор $c_k = (c_{1k}, c_{2k}, c_{3k})$. (Заметим, что закон (4) совпадает с идеальным законом (3) при $c_{1k} = 1/(bh)$, $c_{2k} = -a/(bh)$, $c_{3k} = -d$.) Исходная цель управления задается равенством $y_{k+1} = y^*$.

Для построения алгоритма адаптации вводится оценочная функция

$$Q(t) = (y^* - y_{k+1})^2. \tag{5}$$

Теперь цель управления может быть задана как минимизация функции (5) на каждом шаге процесса расчетов. Для нахождения решения этой задачи здесь применяется антиградиентный метод в конечных разностях, позволяющий учитывать изменение состояния объекта во времени.

Вычисляя частные производные оценочной функции (5) по настраиваемым параметрам, получим алгоритм адаптации в виде

$$c_{1,k+1} = c_{1,k} - r_k(y_{k+1} - y^*)y^*, \quad c_{2,k+1} = c_{2,k} - r_k(y_{k+1} - y^*)y_k, \quad c_{3,k+1} = c_{3,k} - r_k(y_{k+1} - y^*)f_k.$$

Множитель r_k обычно называется *шагом алгоритма* по времени, его выбор осуществляется по специальным правилам. Работа алгоритма обычно продолжается до тех пор, пока значение оценочной функции (5) не станет достаточно малым с учетом уровня возможных помех. Сам алгоритм является необходимой частью имитационной системы адаптивного управления и может быть использован в различных обстоятельствах.

Результаты работы четвертого блока (величины u_k, f_k) на такте (t_k) поступают в блок расчета основных показателей (формула (1)) и используются при вычислении показателей следующего такта расчетов (t_{k+1}).

4.2. Направления возможного внедрения методов адаптивного управления. В заключение опишем ряд направлений возможного развития методов разработки имитационных систем адаптивного управления (принципов, мемов), используя которые, сами промышленные предприятия могут продвигаться по пути создания адаптивного предприятия (Майер, Дэвис, 2007, с. 144).

1. *Изучение и моделирование запуска процесса самоорганизации.* Для этого необходимо иметь ясное представление о системе управления предприятием снизу вверх. При этом следует разрабатывать правила, которые влияют на индивидуальный выбор работников, а не на поведение организации в целом. На предприятии, которое следует принципам самоорганизации, лидеры прекращают управлять людьми и начинают управлять правилами. В качестве примера можно привести работу “системы такси” на улицах большого города. Каждая машина – агент системы, действующий по правилам. Правила агентов (такси) адаптивны, они меняются в зависимости от времени года и по мере застройки районов, а также изменения дорожного движения. Они сами

находят клиентов и самостоятельно выполняют работу (заказ). В результате каждый потребитель может “поймать” такси за приемлемое время.

2. *Исследование и описание различных способов рекомбинации.* Усиление взаимосвязей облегчает рекомбинацию различных компонентов – компьютерных программ, свойств продуктов, людей и рынков. Превращение бизнеса в открытую систему позволяет оценить достоинства и новизну растущего многообразия.

Адаптивное предприятие концентрируется на рекомбинации по трем причинам. Во-первых, рекомбинация – ключ к быстрым и оригинальным инновациям. Во-вторых, она расширяет разнообразие, что, в свою очередь, делает предприятие более жизнеспособным и расширяет спектр его реакций во времена резких перемен. В-третьих, она помогает талантливым людям развиваться быстрее, потому что они испытывают на себе влияние множества разнообразных идей и им приходится решать множество самых разнообразных проблем. Это дает предприятию, а также каждому его сотруднику самые лучшие шансы на создание продукта, практики или стратегии, которых никогда не существовало раньше.

3. *Изучение и оценка способности предприятия воспринимать и реагировать на внешние воздействия.* Сети снижают затраты на получение информации в режиме реального времени. Датчики позволяют фильтровать новую информацию, действовать в соответствии с ней и в зависимости от результатов прогнозирования, добиваться оснащения предприятия всем необходимым для восприятия изменений и формирования немедленной, точной и адекватной реакции на них.

При разработке имитационной модели следует учесть тот факт, что воспринимать изменения рынка и реагировать на них быстрее и точнее предприятиям помогают три новые тенденции. Первая состоит в том, что стоимость датчиков быстро падает, позволяя предприятиям встраивать обратную связь в каждый продукт. Вторая – в том, что технологическое развитие самих датчиков позволяет воспринимать новые типы данных и делать это более точно, требуя меньше места и энергии. Согласно третьей тенденции, беспроводные сети делают новые данные доступными в любом месте и в реальном времени.

4. *Развитие направления “Учиться и адаптироваться”.* Активное использование обратной связи дает возможность знать, что произошло после того, как система управления “восприняла и среагировала”. Этот опыт и новая информация добавляются в ее набор реакций. Такая петля обратной связи создает непрерывную адаптацию, которая должна быть представлена как необходимый элемент имитационной системы.

Теперь, когда датчики становятся вездесущими и взаимосвязанными, появилась возможность создавать компьютерные программы, которые извлекают новые знания в результате того, что воспринимают всю систему, одновременно ее совершенствуя.

Обратную связь, которая делает возможным процесс обучения, можно создавать постепенно. Знания и навыки, необходимые для обучения, могут исходить либо от менеджмента, либо из эффективности таких технологий, как нейронные сети. Этот процесс может начинаться на фабриках как часть системы управления взаимодействия с клиентами, в финансах, налогово-административной системе или как часть системы информации и менеджмента. Датчики стали дешевыми. Интеграция разумной реакции и способности к обучению остается важной проблемой, но во многих случаях технологии для этого уже существуют и постоянно появляются новые. Непременным условием получения серьезных результатов является желание и готовность адаптироваться.

5. *Изучение и моделирование процессов типа “посеять, отобрать и усилить”.* Тестирование множества разнообразных возможностей выбора и усиление наиболее удачных из них способствуют созданию полезной базы данных для дальнейшей работы предприятия. Такая база дает возможность экспериментировать, а не планировать.

Следует исходить из того, что в создаваемом адаптивном предприятии работают независимые самоорганизующиеся люди, готовые воспринимать бизнес-ситуацию и экономический климат и желающие осуществить задуманные планы. Для того чтобы не допустить напрасной траты ресурсов и не получить хаос, следует применять направленный отбор вариантов развития.

В настоящее время многие предприятия идут по пути использования новых технологий тестирования. Дело в том, что современные способы рекомбинации создают большие запасы потенциальных решений, которые следует сортировать в очень больших масштабах. Это тестирование производится с помощью компьютерных моделей, чтобы экспериментировать с многочисленными альтернативами. Таким образом, принцип "сеять, отбирать и усиливать" становится средством проведения испытаний потенциальной ценности разнообразных экономических возможностей. Он позволяет выбирать победителей самому рынку и принять высокий процент неудач. Можно считать, что "сеять, отбирать и усиливать" – адаптивный принцип репродуктивного выбора. При этом восприятие и реакция, обучение и адаптация – принципы успешного развития предприятия уже после его становления.

6. *Возможный подход к радикальной реорганизации предприятия на основе* "*дестабилизации*". Современный уровень изменений окружающей среды может потребовать создания внутренней нестабильности для выживания в ней. Для этого нужно разрушать стабильные элементы своей организации.

Исследователи теории сложных систем часто говорят о "границе хаоса". Они признают, что "слишком много стабильности" опасно для развития так же, как и "слишком мало порядка".

Трудно точно подсчитать, сколько нужно нестабильности для того или иного предприятия. Это связано с тем, что в настоящее время нет достаточно надежных способов ее измерения. Однако становится все более ясно, что рост нестабильности внешнего окружения требует снижения стабильности внутри предприятия. Дело в том, что жизненный цикл продуктов становится все короче. Время, за которое новым предприятиям необходимо стать прибыльными, уменьшается. Предприятия, способные завершать цикл развития быстрее других, смогут создавать нестабильное рыночное окружение и использовать его в своих целях.

4.3. О некоторых актуальных проблемах развития экономики России. Методы адаптивного управления найдут применение для решения современных проблем развития информационно-телекоммуникационной (ИТ) инфраструктуры в России.

На российском рынке ИТ-технологий заметны позитивные тенденции. Но на полное восстановление после кризиса потребуется еще один–два года. Данные Минэкономразвития показывают, что в 2010 г. российский рынок ИТ-технологий вырос только на 3% – до 565 млрд руб. (с учетом инфляции), при том что в кризисный 2008 г. он опустился на 13% по сравнению с 2009 г. По предварительным данным международной аналитической компании IDC, расходы на ИТ в России выросли на 17% (в абсолютных показателях). Можно считать, что объем продаж и новых сделок значительно вырос во всех трех основных отраслях рынка ИТ-технологий: программном обеспечении, оборудовании и услугах. По данным IDC, в России на 45% увеличились продажи корпоративных аппаратных средств – одно из главных показателей роста рынка. Нынешний рост связан с тем, что парк оборудования по существу является рабочим инструментом бизнеса, его необходимо регулярно модернизировать и развивать.

Одним из быстро восстанавливающихся секторов ИТ-рынка стала поставка персональных компьютеров частным пользователям. Всего за 2010 г. в розничную продажу поступило 11 млн ПК, общий рост поставок по сравнению с предыдущим годом составил около 60%. Уже сейчас продажи персональных компьютеров для частных лиц превысили докризисный уровень. При этом в секторе ПК продолжает расти доля мобильных компьютеров – в 2010 г. она составила 70% всех проданных ПК, превысив средний мировой уровень, равный 59%.

Основными потребителями ИТ-услуг в России стали финансовый, нефтегазовый и телекоммуникационный секторы. Обрабатывающая промышленность была мало заинтересована в развитии своих ресурсов, а больше занималась поддержкой существующих. Государственный сектор также не вел активной работы, направленной на приобретение новых ПК. В отличие от государственных структур средние предприятия стали заказывать и закупать программное обеспечение в сегменте систем управления предприятием, систем для работы с аналитикой, что помогает предприятию выжить в кризисных условиях.

Государство остается самым крупным заказчиком для ИКТ-предприятий. Например, IBS выполняет серию проектов для государственной корпорации "Росатом" (проект создания информационной системы управления капитальным строительством), участвует в проектах для

"Газпрома" (создание системы управления персоналом, системы автоматизированного документооборота и др.).

Также заметно повысился спрос на мобильные решения для бизнеса. В особенности востребованы специальные мобильные приложения для владельцев мобильных телефонов iPhone и планшетов iPod. Пользуясь ими, можно в любой момент получать отчеты о деятельности подразделений предприятия, проводить мониторинг запасов на товарных складах и т.п.

В настоящее время в России наблюдается повышенная "облачность". Этот термин означает предоставление различного вида сервиса на удалении, обычно на основе оборудования провайдера. По прогнозам, в России скоро начнется бум спроса на такие "облачные" услуги. Если в 2009 г. совокупный объем таких услуг составил у нас всего 5 млн долл., то в 2014 г. этот показатель превысит 160 млн долл.

Имеется другая сложность – слабое развитие ИТ-инфраструктуры. Чтобы адаптировать инфраструктуру к меняющимся требованиям, необходимо оперативно внедрять современные технологии. В противном случае низкая адаптивность ИТ-инфраструктуры, в том числе дата-центров, может стать заметным сдерживающим фактором развития новых услуг на рынке (Эксперт, 2011). Следует иметь в виду, что с этой проблемой западные предприятия сталкивались уже в 1990-е годы.

В мире также отмечается рост популярности модели аутсорсинга, когда предприятия не покупают в собственность дорогое оборудование, а арендуют его, что дает заметную экономию на инвестициях.

Общий объем российского рынка телекоммуникаций в 2010 г. достиг 1808 млрд руб. – на 9% больше, чем годом ранее. На период до 2014 г. прогнозируются более скромные темпы прироста – 7–8%. Это гораздо ниже темпов докризисной динамики. В период 2006–2008 гг. рынок телекоммуникаций ежегодно прибавлял 21–26%. По-видимому, наблюдаемое снижение показателей обусловлено тем, что рынок сотовой связи практически достиг насыщения, а фиксированная междугородная и международная связь продолжают терять доходы от конкуренции с IP-телефонией. Ожидается также, что в ближайшие годы начнут насыщаться и такие наиболее активно растущие сейчас сегменты, как интернет и платное телевидение.

К 2014 г. в мире поставки портативных компьютеров, включая ноутбуки, нетбуки и мультимедийные планшеты, вырастут до 503,8 млн штук. Причем планшеты займут 35% рынка.

На российском ИТ-рынке в 2011–2015 гг. темпы роста дойдут до 10–15% в год, и он сможет достигнуть докризисного уровня в этом или в следующем году (Ходырев, 2011).

Необходимость решения многих проблем, связанных с развитием ИТ-технологий в России, потребует использования новых средств в теории и практике управления предприятиями. Важную роль в этом процессе может сыграть применение теории механизмов инновационного развития в сочетании с методами адаптивного управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Багриновский К.А. (1999): О методах адаптивного управления в переходной экономике // *Экономическая наука современной России*. № 2.

Багриновский К.А., Бендиков М.А. (2007): Методы моделирования и анализа свойств механизмов инновационного развития // *Экономика и мат. методы*. Т. 43. № 3.

Багриновский К.А., Исаева М.К. (2006): Методы анализа и моделирование механизма обновления продуктов и технологий // *Экономическая наука современной России*. № 3 (34).

Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л. (1981): Прикладная теория адаптивных систем управления. М.: Наука.

Эксперт (2011): Еще не выздоровел, но уже пошел на поправку // *Эксперт*. № 7. 21–27 февраля.

Майер К., Дэвис С. (2007): Живая организация. М.: Добрая книга.

Срагович В.Г. (1981): Адаптивное управление. М.: Наука.

Ходырев А. (2011): По прежней траектории // *Эксперт*. № 16.

Поступила в редакцию
10.06.2011 г.

Models and Methods for Improving the Mechanisms of Innovation Development in Russian Economy Based on Adaptive Control

C.A. Bagrinovsky

The paper deals with the use of models and methods of adaptive control under the conditions of increasing uncertainty for decision in the modern Russian economy. The main object of study is the selected mechanisms of innovation development and their functioning in changing environment. A new approach to modeling the mechanism for updating the products and technologies, as well as the possible new objects of analysis on the example of the IT-infrastructure in the Russian economy proposed.

Keywords: adaptive enterprise, information technology, nanotechnology, production of nanostructures, innovation system.

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2011, том 47, № 4, с. 122–130

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЛЕОНИДА ВИТАЛЬЕВИЧА КАНТОРОВИЧА

МОДЕЛЬ ОБЪЕДИНЕНИЯ В ЕДИНОЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

© 2011 г. В.А. Булавский

(Москва)

В работе на основе схемы кооперативной игры с побочными платежами изучаются два варианта модели объединения производителей реальных благ в единое экономическое пространство. В одном варианте за основу берутся цены производимых благ, установившиеся вне модели. При этом целью управления (перераспределения ресурсов) является валовый выпуск благ по внешним ценам. Во втором варианте за основу берется структура выпуска благ. Цены на блага при этом определяются внутри экономической системы, исходя из стремления увеличить выпуск благ при данной их структуре (ассортименте). Обсуждается сравнение на основе изучаемых вариантов модели централизованной экономики с рыночной.

Ключевые слова: кооперативная игра с побочными платежами, объединение в единое экономическое пространство, цели управления экономикой.

ВВЕДЕНИЕ

Когда речь идет о разумном хозяйствовании, то главным образом имеется в виду рациональное использование ресурсов, которые тратятся на достижение поставленных целей. Если рассматривается одна производственная единица, то чаще всего предполагают, что о рациональном использовании своих ресурсов она позаботится сама. Иначе обстоит дело, если моделируется кооперация нескольких производственных единиц (предприятий, фирм, регионов, стран и т.п.). В этом случае рациональное использование ресурсов должно допускать их объединение с последующим перераспределением и соответствующее разделение общей прграммы работы.

В известной монографии “Экономический расчет наилучшего использования ресурсов” (Канторович, 1959, с. 290–291) обсуждается задача о совместной работе комплекса предприятий, на которых производится сходная номенклатура товаров. В соответствии с общей направленностью монографии предполагается, что деятельность каждого предприятия описывается некоторой задачей линейного программирования. При этом основной акцент делается на распределении программы работы (задания) между предприятиями и на использовании множителей Лагранжа (объективно обусловленных оценок) для проверки оптимальности выбранного распределения программы. Рекомендация автора состоит в объединении задач линейного программирования, описывающих деятельность предприятий и нахождении оптимального плана для этой объединенной задачи. При этом распределение заданий, конечно, должно обеспечиваться выделением ресурсов для их выполнения. Поскольку имелась в виду система хозяйствования, принятая в Советском Союзе, то подразумевалось именно выделение ресурсов, а не их перераспределение.

Настоящую работу можно рассматривать как продолжение описанной темы, но в несколько более общих обстоятельствах. Основных отличий три. Во-первых, производственные единицы не предполагаются уже объединенными в управляемое из центра единое экономическое пространство, а исходно считаются вполне самостоятельными субъектами модели. Каждый из этих субъектов модели обладает собственным объемом ресурсов и механизмом их переработки в товары. Во-вторых, ввиду полной самостоятельности субъектов их объединение (полное или частичное) в единое экономическое пространство рассматривается в рамках игровой модели, в качестве которой используется кооперативная игра с побочными платежами. В-третьих, в модели фигурируют цены на производимые товары. По этим ценам рассчитывается прибыль отдельных участников модели, а также возможности различных коалиций.

1. УЧАСТНИКИ МОДЕЛИ

Рассматривается статическая (точнее, однопериодная) модель, в которой фигурируют два вида благ: m видов ресурсов и n видов товаров, в которые и перерабатываются ресурсы. По своей номенклатуре ресурсы и товары могут иметь значительное пересечение (вплоть до полного совпадения). Но так как ресурсы имеются в наличии к началу периода, а товары получаются к концу периода, то корректно ресурсы и товары рассматривать как разные блага. Перерабатывают ресурсы в товары участники модели, число которых обозначим через l. Будем также обозначать через $p = (p^1,\ldots, p^n)$ строку цен товаров, а через $r = (r^1,\ldots, r^m)^t$ столбец количеств ресурсов. Верхний индекс t обозначает транспонирование. Сам механизм переработки ресурсов в товары нас интересовать не будет. Вместо этого для каждого участника модели с индексом k зададим функцию $\varphi_k(p, r)$, значение которой трактуется как выручка, получаемая субъектом k, если он оптимально использует ресурсы в объемах r и продает полученные из них товары по ценам p. Автор надеется, что стандартные предположения – выпуклость функций φ_k по переменной p и их вогнутость по переменной r – будут приняты специалистами по математическому программированию с пониманием. Для образца можно сослаться на стандартную задачу выпуклого программирования или (более общо) на понятие обобщенной выпуклой программы (Rockafellar, 1970, разд. 29).

Напомним, что обобщенную выпуклую программу можно задать следующим образом. На множестве D допустимых значений r задано точечно-множественное отображение $F: D \to R^n$, значение которого $F(r)$, $r \in D$, трактуется как возможные выпуски товаров из ресурсов r. Если $\bar r \in D, \bar x \in F(\bar r),\ \hat r \in D,\ \hat x \in F(\hat r)$, то при $\lambda \in (0, 1)$ можно считать, что в течение периода работы модели доля λ времени идет на переработку ресурсов $\bar r$ в товары $\bar x$ (т.е. получаем товары $\lambda\bar x$ и тратим ресурсы $\lambda\bar r$), а доля времени $(1 - \lambda)$ идет на переработку ресурсов $\hat r$ в товары $\hat x$ (т.е. получаем товары $(1-\lambda)\hat x$ и тратим ресурсы $(1-\lambda)\hat r$). Таким образом, если считать множество D выпуклым, то множество

$$\lambda F(\bar r) + (1-\lambda)F(\hat r) = \{\lambda\bar x + (1-\lambda)\hat x \mid \bar x \in F(\bar r), \quad \hat x \in F(\hat r)\}$$

является подмножеством образа $F(\lambda\bar r + (1-\lambda)\hat r)$.

В частности, если принять $\bar r = \hat r = r,\ r \in D$, то множество-образ $F(r)$ является выпуклым множеством. Естественно также считать, что $F(\bar r) \subset F(\hat r)$, если $\bar r \le \hat r$ по всем компонентам, т.е. возможности производственного субъекта не уменьшаются при увеличении у него количества ресурсов. Будем считать, что образы $F(r)$ являются непустыми, ограниченными и замкнутыми множествами. Подобные предположения вполне традиционны для экономико-математического моделирования, и аргументы в пользу таких предположений здесь обсуждаться не будут.

Выберем теперь некоторый набор цен $p \in R^n$ и положим

$$\varphi(p, r) = \max\{px \mid x \in F(r)\}. \tag{1}$$

Так как множества $F(r)$ являются непустыми выпуклыми компактами, то величина максимальной выручки $\varphi(p, r)$ определена при всех $p \in R^n$ и $r \in D$. Эта величина является выпуклой по переменной p как максимум линейных по p функций и, как это видно из нижеследующих рассуждений, вогнутой по переменной r. Действительно, если $\lambda \in (0,1),\ r = \lambda\bar r + (1-\lambda)\hat r$, то так как $F(r) \supset \lambda F(\bar r) + (1-\lambda)F(\hat r)$, получаем согласно (1)

$$\varphi(p, r) \ge \max\{p(\lambda\bar x + (1-\lambda)\hat x) \mid \bar x \in F(\bar r), \hat x \in F(\hat r)\} = \lambda\varphi(p, \bar r) + (1-\lambda)\varphi(p, \hat r).$$

Что и доказывает вогнутость зависимости от r.

Используя терминологию выпуклого анализа, можно сказать, что при фиксированном r функция $\varphi(p, r)$ является опорной функцией для выпуклого замкнутого множества $F(r)$. Напомним, что множество точек $x \in F(r)$, при которых достигается максимум в (1) в точности совпадает с субдифференциалом $\partial_p\varphi(p, r)$ по переменной p, т.е. каждый субградиент по переменной p функции $\varphi(p, r)$задает оптимальный выпуск товаров при ресурсах r и ценах на товары p.

Непрерывность по переменной p при фиксированном r следует из выпуклости $\varphi(p, r)$ по p и из того, что эта функция определена (имеет конечные значения) во всех точках p конечномерного пространства R^n. Чтобы получить непрерывность функции дохода по переменной r при фиксированном p, достаточно потребовать, чтобы точечно-множественное отображение F: $r \in D \to$

$F(r) \subset R^n$ было непрерывно (по Хаусдорфу). Содержательно это означало бы, что малые изменения количеств ресурсов не могут резко изменить возможности производственного субъекта, т.е. рассматривается обстановка спокойного производства. Ввиду вогнутости по переменной r и конечномерности пространства можно просто предположить, что множество D открытое. Однако в дальнейшем мы будем предполагать, что функция φ для каждого участника модели непрерывная по паре переменных. Заметим еще, что функция дохода $\varphi(p, r)$ по переменной p получилась положительно однородной первой степени. Так как цены p всегда будут считаться неотрицательными и не сплошь нулевыми, то можно ограничиться рассмотрением цен из стандартного симплекса

$$P = \left\{ p = (p^1, \ldots, p^n) \,|\, p^j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n; \; pa = \sum_{j=1}^{n} p^j a^j = 1 \right\}, \tag{2}$$

где столбец $a = (a^1, \ldots, a^n)^t > 0$ задает некоторую корзину товаров, а верхний индекс t, напомним, обозначает транспонирование. Сформулируем теперь свойства участников рассматриваемой модели в виде следующего предположения.

Предположение. *Пусть на декартовом произведении непустых открытых выпуклых множеств $P_0 \subset R^n$ и $D_0 \subset R^m$ заданы непрерывные функции φ_k, $k = 1, \ldots, l$, двух аргументов $p \in P_0$ и $r \in D_0$, каждая из которых является выпуклой по переменной p и вогнутой по переменной r. Кроме того, по переменной p функции φ_k будем считать положительно однородными первой степени. Для участника (субъекта) модели с индексом k задан непустой выпуклый компакт $D_k \subset D$, служащий множеством допустимых значений переменной r для этого участника, и начальный объем $r_k^0 \in D_k$ ресурсов, которыми распоряжается участник k. Предполагается, что $P \subset P_0$. Наконец, предположим, что начальные запасы ресурсов не находятся на пределе работоспособности, т.е. при каждом k существует такой столбец $\hat{r}_k \in D_k$, что $\hat{r}_k < r_k^0$.*

Напомним, что множество субградиентов $\partial_p\varphi_k(p, r_k)$ трактуется как множество оптимальных вариантов выпуска товаров при ресурсах r_k и ценах на товары p. Подкрепить такую трактовку можно на основе положительной однородности функций $\varphi_k(p, r_k)$ по переменной p. Действительно, если взять $\alpha \in (0, 1)$, то при $x \in \partial_p\varphi_k(p, r_k)$ будем иметь

$$(1 \pm \alpha)\varphi_k(p, r_k) = \varphi_k((1 \pm \alpha)p, r_k) \geq \varphi_k(p, r_k) \pm \alpha px,$$

т.е. получим $\pm\alpha\varphi_k(p, r_k) \geq \alpha px$. Отсюда следует равенство $\varphi_k(p, r_k) = px$. Таким образом, субградиент (столбец) x играет роль выпуска товаров.

2. ОБЪЕДИНЕНИЕ НА ОСНОВЕ РЫНКА РЕСУРСОВ

В предыдущем разделе описан состав участников модели. Чтобы завершить описание кооперативной игры с побочными платежами, в рамках которой будет моделироваться объединение участников в тотальную коалицию, нужно для каждой коалиции $S \subset \{1, \ldots, l\}$ указать ее возможности $v(S)$. Так как рынок товаров в данном варианте модели не рассматривается, предположим, что каким-то образом выбраны и зафиксированы цены товаров p. Под возможностями коалиции S будем понимать максимальную выручку, которую при заданных ценах на товары можно получить, если между членами коалиции перераспределить имеющиеся у них изначально ресурсы. Таким образом,

$$v(S) = \max\left\{ \sum_{k \in S} \varphi_k(p, r_k) \,|\, r_k \in D_k, \; k \in S; \; \sum_{k \in S} r_k \leq \sum_{k \in S} r_k^0 \right\}. \tag{3}$$

Функцию $v(\cdot)$ часто называют характеристической функцией игры с побочными платежами. Обычно считается, что тотальная коалиция $T = \{1, \ldots, l\}$ в игре пригодна для объединения, если ее возможностей хватает для такого распределения между участниками, которое не может превзойти ни одна коалиция. Здесь, конечно, нет возможности описывать сколько-нибудь полно игры с побочными платежами. Отметим лишь, что ядром $c(v)$ кооперативной игры с побочными платежами принято называть множество распределений $(z_1,\dots, z_l)$, удовлетворяющих требованиям:

$$\sum_{k=1}^{l} z_k = v(\{1, \dots, l\}) = v(T), \tag{4}$$

$$\sum_{k\in S} z_k \ge v(S) \text{ при всех } S \subset T,\ S \ne T. \tag{5}$$

Именно распределения из ядра $c(v)$ можно использовать для поддержания устойчивости тотальной коалиции.

Лемма. *В условиях предположения задача* (3) *для любой коалиции $S \subset T$ имеет решение r_k^S, $k \in S$. При этом существует строка $\pi_S = (\pi_S^1,\dots, \pi_S^m)$ (множители Лагранжа), для которой $\varphi_k(p, r_k^S) \ge \varphi_k(p, r_k) - \pi_S[r_k - r_k^S]$ для всех $r_k \in D_k$, $k \in S$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение задачи (3) существует, так как это задача о максимуме непрерывной функции на непустом выпуклом компакте. Кроме того, это задача выпуклого программирования, а согласно предположению для нее выполнено условие Слейтера: точку Слейтера образует набор столбцов $\hat{r}_k$, $k \in S$. Поэтому существует строка множителей Лагранжа π_S, при которой функция Лагранжа

$$\pi_S\left[\sum_{k\in S} r_k - \sum_{k\in S} r_k^0\right] - \sum_{k\in S} \varphi_k(p, r_k)$$

в точке решения ($r_k^S(k \in S$) достигает минимума на декартовом произведении множеств D_k. Так как функция Лагранжа распадается по переменным r_k, то по переменной r_k в точке r_k^S на своем множестве D_k достигает минимума каждая из величин $\pi_S[r_k - r_k^0] - \varphi_k[(p, r_k)$. Таким образом, $[-\varphi_k(p, r_k)] \ge [-\varphi_k(p, r_k^S)] - \pi_S[r_k - r_k^S]$ при всех $r_k \in D_k$. ■

Непустота ядра $c(v)$ означает достаточную силу тотальной коалиции T: распределив свою выручку $v(T)$ согласно некоторому распределению из ядра $c(v)$, она обеспечивает доход своим членам не меньший, чем тот, на который они могли бы рассчитывать, состоя в любой другой коалиции. Отметим также, что для пустой коалиции оказывается $v(\varnothing) = 0$. Следующая теорема утверждает, что ядро, определяемое характеристической функцией (3), непустое.

Теорема 1. *Ядро игры с побочными платежами для характеристической функции* (3) *непустое.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим задачу линейного программирования о минимизации левой части равенства (4) при ограничениях (5). Система ограничений (5) совместная, так как значения переменных z_k можно взять сколь угодно большими. В то же время среди ограничений системы (5) имеются ограничения вида $z_k \ge v(\{k\})$, $k = 1,\dots, l$. Поэтому на множестве допустимых z минимизируемая форма ограничена снизу:

$$\sum_{k=1}^{l} z_k \ \ge\ \sum_{k=1}^{l} v(\{k\}).$$

Таким образом, рассматриваемая задача линейного программирования имеет решение. Обозначим его через $z^T = (z^{1T},\dots, z^{lT})$. Если

$$\Delta = v(T) - \sum_{k=1}^{l} z^{kT} \ge 0, \tag{6}$$

то, положив $z^k = z^{kT} + \Delta/l$ при всех $k \in T$, получим распределение, удовлетворяющее условиям (4) и (5), т.е. принадлежащее ядру игры. Таким образом, нужно лишь доказать неравенство (6).

Задача линейного программирования, двойственная к только что рассмотренной, может быть описана следующим образом. Положим для краткости

$$SS_k = \{S \subset T \mid S \ne T,\ k \in S\}. \tag{7}$$

Требуется определить значения переменных $Y_S,\ S \subset T,\ S \neq T$, удовлетворяющих условиям неотрицательности $Y_S \geq 0$, системе уравнений

$$\sum_{S \in SS_k} Y_S = 1, \quad k = 1, \ldots, l \tag{8}$$

и максимизирующих линейную форму

$$\sum_{\{S \subset T, S \neq T\}} v(S)\, Y_S .$$

Эта двойственная задача имеет решение наряду с прямой задачей, причем оптимальное (максимальное) значение целевой формы такое же, как и у минимизируемой формы прямой задачи, использованное в (6) в качестве вычитаемого. Таким образом, достаточно показать, что при любых допустимых значениях переменных Y_S имеет место неравенство

$$\sum_{S \subset T, S \neq T} v(S)\, Y_S \leq v(T).$$

Проведем оценку. Для каждой коалиции S, как и раньше, обозначим через $r_k^S,\ k \in S,$ решение задачи (3), существующее согласно лемме. Таким образом,

$$v(S), = \sum_{k \in S} \varphi(p, r_k^S); \quad r_k^S \in D_k,\ k \in S;\ \sum_{k \in S} r_k^S \leq \sum_{k \in S} r_k^0 .$$

Пусть $Y,\ S,\ S \subset T,\ S \neq T$ – допустимые значения переменных в двойственной задаче. Имеем

$$\sum_{S \subset T, S \neq T} v(S)\, Y_S = \sum_{S \in T, S \neq T} \left\{ Y_S \sum_{k \in S} \varphi_k(p, r_k^S) \right\}.$$

Поменяв порядок суммирования в правой части последнего равенства, получим

$$\sum_{S \subset T, S \neq T} v(S)\, Y_S = \sum_{k=1}^{l} \sum_{S \in SS_k} Y_S \varphi_k(p, r_k^S),$$

где SS_k, напомним, определено формулой (7). Ввиду вогнутости функций φ_k по второму аргументу, равенств (8) и неотрицательности Y_S имеем

$$\sum_{S \in SS_k} Y_S \varphi_k(p, r_k^S) \leq \varphi_k(p, \tilde{r}_k), \text{ где } \tilde{r}_k = \sum_{S \in SS_k} Y_S r_k^S .$$

Проделав преобразования в обратном порядке, получим

$$\sum_{k=1}^{l} \tilde{r}_k = \sum_{k=1}^{l} \sum_{S \in SS_k} Y_S r_k^S = \sum_{S \subset T, S \neq T} \sum_{k \in S} Y_S r_k^S = \sum_{S \subset T, S \neq T} \left[Y_S \sum_{k \in S} r_k^S \right] \leq$$

$$\leq \sum_{S \subset T, S \neq T} \left[Y_S \sum_{k \in S} r_k^0 \right] = \sum_{k=1}^{l} \left[r_k^0 \sum_{S \in SS_k} Y_S \right] = \sum_{k=1}^{l} r_k^0 .$$

Таким образом, $\sum_{S \in T, S \neq T} v(S)\, Y_S \leq \sum_{k=1}^{l} \varphi_k(p, \bar{r}_k)$, причем $\sum_{k=1}^{l} \tilde{r}_k \leq \sum_{k=1}^{l} r_k^0$, т.е. согласно (3) $\sum_{S \subset T, S \neq T} v(s)\, Y_S \geq v(T)$. ■

Обсудим теперь работу тотальной коалиции. Сначала предположим, что наша экономика управляется из политического центра. Имеющиеся у каждого участника модели начальные ресурсы в количествах r_k^0 можно рассматривать как его резерв на свои внутренние нужды. В денежном выражении его можно оценить не прибегая к множителям Лагранжа π_T, о которых шла речь в лемме. Если участник k потратит свои начальные ресурсы для производства, то при их оптимальном использовании он заработает сумму денег $v(\{k\})$ (по ценам на товары p). Но при централизованном управлении все ресурсы объединяются и подлежат перераспределению. Для устойчивости тотальной коалиции участнику k хорошо бы сумму $v(\{k\})$ вернуть. При оптимальном распределении задания и ресурсов центр, владеющий всеми товарами, произведенными тотальной коалицией, получит валовый доход $v(T)$. Выбрав распределение $(z_k,\ k \in T)$ из непустого ядра $c(v)$, центр свой валовый доход $v(T)$ распределит между участниками тотальной коалиции. При этом в силу определения ядра для каждого участника будет выполнено неравенство $z_k \geq v(\{k\})$, так что компенсация за ресурсы окажется достаточной. Можно и не выдавать все z_k, а сэкономить неотрицательную сумму $z_k - v(\{k\})$ для других нужд системы.

Если трактовать выпущенные товары как ресурсы для следующего периода времени, то этот процесс можно превратить в динамический: обобществленные выпущенные товары компенсируются распределением из следующего ядра и т.д. Отметим, что при такой интерпретации множители Лагранжа π_T играют ту же роль, что и объективно обусловленные оценки в монографии Л.В. Канторовича: они лишь подтверждают оптимальность выбранного распределения ресурсов и заданий.

Предположим, что перераспределение ресурсов осуществляется в рамках рыночной экономики. Цены p на товары все еще предполагаются заданными извне. В качестве равновесных цен на рынке ресурсов хорошо бы смотрелись множители Лагранжа π_T, о которых говорится в лемме. Действительно, если задачу (3) рассмотреть при $S = T$, то функция Лагранжа для нее будет иметь вид:

$$\pi_T\left[\sum_{k \in T} r_k - \sum_{k \in T} r_k^0\right] - \sum_{k \in T} \varphi_k(p, r_k).$$

Множители Лагранжа π_T подбираются так, что на искомом решении функция Лагранжа минимизируется по переменным r_k на множествах D_k. Это, как уже отмечалось в доказательстве леммы, сводится к тому, что по каждой переменной r_k на своем множестве D_k достигает минимума величина

$$\pi_T[r_k - r_k^0] - \varphi_k(p, r_k),$$

т.е. максимизируется чистый доход $\varphi_k(p, r_k) - \pi_T r_k$ на множестве D_k. Проблема состоит в бюджетных ограничениях $\pi_T[r_k - r_k^0] \leq 0$, которые присутствуют при стандартном описании модели рынка.

Выше при рассмотрении варианта централизованной экономики эта проблема была снята тем, что центр рассчитывался за обобществленные ресурсы деньгами, полученными от реализации выпущенной продукции. В варианте с рыночной экономикой можно поступить аналогично: позволить взять кредит для покупки ресурсов под обеспечение выпускаемой продукции. Фактически это те же действия: дать деньги для покупки ресурсов или дать ресурсы, а потом забрать продукцию (или деньги от ее реализации). Таким образом, оказывается, что граница между централизованной и рыночной экономиками стирается. Нужно лишь чтобы в централизованной экономике решения принимались рациональные, а в рыночной была развита гибкая система кредитования. Остаются, конечно, различия морального плана, но это уже находится за рамками рассматриваемой модели.

В заключение раздела отметим, что связи между рынками благ и кооперативными играми с побочными платежами посвящено значительное число работ, например монография Розенмюллера (Rosenmüller, 1971).

3. ОБЪЕДИНЕНИЕ НА ОСНОВЕ РЫНКА РЕСУРСОВ И РЫНКА ТОВАРОВ

Следуя модели Л.В. Канторовича (Канторович, 1959, с. 290, 291), в этом разделе будем интересоваться корзиной товаров (ассортиментным набором), задаваемой столбцом $a > 0$, использованным при масштабировании цен на товары в формуле (2). Для коалиции S рассмотрим задачу о седловой точке функции

$$\sum_{k \in S} \varphi_k(p, r_k) \tag{9}$$

при $p \in P$ и $(r_k,\ k \in S) \in R_S$, где для краткости использовано обозначение

$$R_S = \left\{(r_k,\ k \in S) \,|\, r_k \in D_k,\ k \in S;\ \sum_{k \in S} r_k \le \sum_{k \in S} r_k^0\right\}. \tag{10}$$

Так как функция (9) – выпукло-вогнутая и непрерывная, а множества P и R_S являются непустыми выпуклыми компактами, то для этой функции на указанных множествах существует седловая точка, т.е. пара

$$[p_S, (r_k^S,\ k \in S)] \in P \times R_S,$$

удовлетворяющая неравенствам

$$\sum_{k \in S} \varphi_k(p, r_k^S) \ge \sum_{k \in S} \varphi_k(p_S, r_k^S) \ge \sum_{k \in S} \varphi_k(p_S, r_k) \tag{11}$$

при всех $p \in P$, $(r_k,\ k \in S) \in R_S$.

Таким образом, теперь набор цен на товары и вариант перераспределения ресурсов между участниками модели определяются совместно. Нетрудно понять, что если в задаче (3) положить $p = p_S$, то ее решением будет как раз $(r_k^S,\ k \in S)$. Об этом говорит правое неравенство в (11).

Рассмотрим теперь левое неравенство в (11). Оно означает, что при заданных $r_k^S,\ k \in S$, цены p_S являются решением следующей задачи выпуклого программирования:

$$\hat{v}(S) = \min\left\{\sum_{k \in S} \varphi_k(p, r_k^S) \,|\, p \in P\right\}. \tag{12}$$

Если вспомнить описание (2) множества P, то найдем, что точка p_S минимизирует значение функции Лагранжа для задачи (12)

$$\sum_{k \in S} \varphi_k(p, r_k^S) - \lambda^S \left[\sum_{j=1}^{n} p^j a^j - 1\right] = \sum_{k \in S} \varphi_k(p, r_k)^S - \lambda^S (pa - 1)$$

по переменной $p \in R_+^n$, т.е. на неотрицательном ортанте пространства R^n. Если вспомнить, что все функции φ_k определены для переменной p из открытого множества $P_0 \subset R^n$, то согласно теореме Моро–Рокафеллара субдифференциал по p целевой функции в задаче (11) равен сумме субдифференциалов по p функций φ_k. Таким образом, существуют такие столбцы $x_k^S = (x_k^{1S}, \ldots, x_k^{nS})' \in \partial_p \varphi_k(p_S, r_k^S)$, что

$$\sum_{k \in S} x_k^S \ge \lambda^S a, \text{ причем } \sum_{k \in S} x_k^{jS} = \lambda^S a^j, \text{ если } p_S^j > 0.$$

В этом варианте поведения коалиций участников модели множитель Лагранжа λ^S для задачи (12) показывает число комплектов товаров a, которое можно сформировать из общего выпуска товаров (при оптимальном для цен p_S поведении участников коалиции S). Цены же $p_S \in P$ выбираются так, что "лишние" товары (не использованные полностью для формирования комплектов) имеют нулевую цену. Поэтому называть решение p_S задачи (12) ценами не вполне корректно: они получены не в силу равновесия на каком-либо рынке товаров, а согласно требованию производить продукцию комплектно. Впрочем, такое требование можно рассматривать как эквивалент рынка. Заметим, что наличие в общем выпуске товаров сверх $\lambda^S a$ свидетельствует о том, что эти товары производятся попутно, как побочный продукт. Отметим также, что в силу нулевых цен для избыточных товаров валовый (по ценам p_S) выпуск товаров совпадает с валовой по тем же ценам оценкой комплектного выпуска $\lambda^S a$ из λ_S комплектов. Так как цена комплекта по ценам p_S равна единице, то валовый выпуск $\hat{v}(S)$ совпадает с числом выпущенных комплектов товаров. Напомним, что одновременно выбирается распределение ресурсов $(r_k^S,\ k \in T)$, обеспечивающее максимальный валовый выпуск товаров, т.е. максимальное число комплектов. Следует, конечно, оговориться, что поведение отдельных участников коалиции определяется их стремлением максимизировать выручку за произведенные товары. Вопрос о комплектации их не интересует. Именно выбор цен p_S обеспечивает нацеленность коалиции S на выпуск комплектной продукции.

Рассмотрим кооперативную игру с побочными платежами, определяемую характеристической функцией $\hat{v}(S),\ S \subset T$.

Теорема 2. *Ядро* $c(\hat{v})$ *игры с характеристической функцией* $\hat{v}(\cdot)$ *непустое.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для тотальной коалиции T в игре с характеристической функцией $\hat{v}(\cdot)$ определим цены p_T и соответствующее им распределение ресурсов $(r_k^T,\ k \in T)$. Если в задаче (3) положить $p = p_T$, то в силу правого неравенства в (11) распределение ресурсов $(r_k^T,\ k \in T)$ при $S = T$ будет решением задачи (3). То есть при таком выборе цен p окажется, что $v(T) = \hat{v}(T)$. С другой стороны, для каждой коалиции $S \subset T$ имеем $\hat{v}(S) \le \sum_{k \in S} \varphi_k(p_T, r_k^S) \le v(S)$, так как $\sum_{k \in S} r_k^S \le \sum_{k \in S} r_k^0$. Напомним, что $v(S)$ согласно (3) определено здесь для $p = p_T$. По теореме 1 ядро $c(v)$ непустое, т.е. существует распределение $z = (z_k,\ k \in T)$, удовлетворяющее условиям (4) и (5). Но тогда это же распределение z удовлетворяет и условиям:

$$\sum_{k=1}^{l} z_k = v(T) = \hat{v}(T), \tag{13}$$

$$\sum_{k \in S} z_k \ge v(S) \ge \hat{v}(S) \text{ при всех } S \subset T,\ S \ne T. \tag{14}$$

Таким образом, ядро $c(\hat{v})$ содержит в себе непустое (по теореме 1) ядро $c(v)$. ■

Так как ядро $c(\hat{v})$ снова оказывается непустым, можно повторить все, что было сказано в конце предыдущего раздела о работе тотальной коалиции (объединенных производителях товаров). Мы этого делать не будем. Отметим лишь одно, как представляется, важное обстоятельство. Независимо от того, идет ли речь о централизованно управляемой экономике или о “рыночной” экономике, управляемой владеющей средствами производства элитой, наиболее существенны лишь цели центра управления. Если целью является номинальное обогащение управляющего кластера, работает первый вариант модели с ориентацией на внешние цены товаров (разд. 2). Если же целью является максимальное удовлетворение внутренних потребностей тотальной коалиции, то больше, видимо, подойдет второй вариант модели (разд. 3) с ориентацией на внутренние цены.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ двух вариантов модели объединения в единое экономическое пространство позволяет сделать вывод о том, что решающее значение имеет не вид управляющего центра (политическое руководство или элита, владеющая средствами производства), а цели, которые этот управляющий центр ставит перед собой. Если цель – собственное номинальное обогащение, то управляющие действия (распределение ресурсов) направлены на максимизацию валового выпуска товаров во внешних ценах (т.е. в валюте, в которой номинируется обогащение). Если же целью являются внутренние интересы тотальной коалиции, то для оценки валового выпуска используются внутренние цены, специально подобранные для лучшего удовлетворения внутренних потребностей. Важно отметить, что и в том, и в другом случае поведение отдельных производителей благ одинаковое: они стремятся максимизировать свой валовый выпуск в выбранных управляющим центром ценах. При управлении политическим центром необходимы профессиональное планирование и дисциплина исполнения. При управлении элитой, владеющей средствами производства, повышается значение системы кредитования. Конечно, и в этом случае необходим контроль со стороны политического центра за деятельностью кредитных организаций, чтобы высокими процентами за кредит они не “скушали бы” всю экономику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Канторович Л.В. (1959): Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Издательство АН СССР.

Rosenmüller J.(1971): Kooperative spiele und märkete. Berlin, Heidelberg. N.Y.: Springer Verlag. (Русский перевод: Розенмюллер И. (1974): Кооперативные игры и рынки. М.: Мир.)

Rockafellar R.T. (1970): Convex Analysis. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. (Русский перевод: Рокафеллар Р. (1973): Выпуклый анализ. М.: Мир.)

Поступила в редакцию
10.06.2011 г.

A Model of Uniting into the Common Economic Space

V. A. Bulavsky

Two variants of uniting the producers into the common economic space are studied, the study being based on the scheeme of corporate game with collateral payments. One variant is based on the priced of the goods produced outside the model. The aim of management (rellocation of resources) is the output of goods measured in external prices. The second variant is based on the structure of goods output. The priced being created inside the economic system, concerning the increase of goods output within the given assortment. Discussed the comparison of the centralised and market models on the proposed model variants.

Keywords: corporate game with collateral payments**,** uniting into the common economic space, the aims of economic management.

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЛЕОНИДА ВИТАЛЬЕВИЧА КАНТОРОВИЧА

МОДЕЛИРОВАНИЕ НТП, УПОРЯДОЧЕННОСТЬ И ЦИФРОВАЯ ЭКОНОМИКА

© 2011 г. А.Н. Козырев

(Москва)

Исследуется роль упорядоченности в цифровой экономике. Показано, что идея Л.В. Канторовича о замене обычного сложения операцией максимума может иметь много приложений в моделях цифровой экономики.

Ключевые слова: упорядоченность, идемпотентное сложение, контент, ценовая дискриминация.

Интерес Л.В. Канторовича к моделям научно-технического прогресса (НТП) в последние годы жизни столь же хорошо известен, как и его вклад в теорию упорядоченных векторных пространств. Гораздо менее известны его устные высказывания о связи между этими двумя направлениями исследований и о недооцененной, а потому недостаточно отраженной в экономической теории роли упорядоченности в экономике. Разумеется, речь идет не только о естественной упорядоченности пространства продуктов, и даже совсем не о ней, а о более глубоких идеях и связанных с ними эффектах, проявившихся в полной мере лишь в современной цифровой экономике.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗНАНИЙ И ИНФОРМАЦИИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Одна из таких идей – замена сложения в модели межотраслевого баланса операцией взятия максимума, более верно отражающей приращение знания и его использование в производстве новых знаний. Соответствующая математическая модель – баланс научных разработок – построена В.Л. Макаровым и опубликована (Макаров, 1971, с. 37–45) со ссылкой на Л.В. Канторовича как автора исходной идеи. В этой модели сохранена структура привычного всем межотраслевого баланса, однако переменные интерпретируются не как обычные продукты, а как уровни развития различных отраслей науки, или, иначе говоря, уровни знания, достигнутого в соответствующих областях науки. Тем самым отображается тот факт, что для развития естественных наук необходим определенный уровень развития математики, вычислительной техники. Для развития математики нужна вычислительная техника и т.д. При этом важен именно уровень развития "потребляемого" знания. Он должен быть не ниже, чем требуется для самого требовательного из "потребителей". Поэтому берется максимум по всем запросам, а не их сумма.

Разумеется, если говорить о развитии этой идеи, ее практическом применении, то проблема интерпретации не исчерпывается ссылкой на никак не определяемый уровень развития отрасли знания. Остается открытым вопрос, в каких единицах следует измерять уровень развития той или иной отрасли знания, если его вообще можно измерить. К той же проблеме можно подойти с другой стороны, задавшись вопросами о соотношении знания и информации, их измерения и представления в математической модели. Какие для этого есть возможности и выразительные средства?

В том и другом случае обнаруживается большое разнообразие представленных в научной литературе точек зрения на информацию и знание (Макаров, Клейнер, 2007, глава 2) при достаточно скромном наборе вариантов представления того и другого в математических моделях. Более того, все смысловые различия между информацией и знанием в модели стираются, а выбор сводится в основном к использованию вещественных или булевских переменных, а также тех или иных операций над ними или соотношений между ними. Вопрос о необходимости как-то интерпретировать эти переменные, разумеется, не снимается. Но проводить в модели различия между знанием и информацией достаточно бессмысленно, как и во многих других случаях, например при попытках их количественных измерений. Не случайно основоположник экономики знаний Фриц Махлуп различий между знанием и информацией не делал (Machlup, 1962, chapter 1), как не делал их и Кеннет Эрроу (Arrow, 1962, p. 104–119) – один из основоположников информационной экономики и первый, кто стал рассматривать информацию (знание) как продукт со специфическими свойствами. Другой основоположник информационной экономики – Джордж Стиглер использовал эти термины (Stigler, 1961, p. 213–225) исключительно в том смысле, что дополнительная информация или знания помогают уменьшить неопределенность и избежать ошибок при совершении сделки, а потому имеют ценность, которая может быть измерена. Но о представлении информации (знания) как продукта в математической модели речь не шла.

К. Эрроу рассматривает информацию и как сигнал – уменьшение неопределенности (т.е. по Винеру), и как продукт со специфическими свойствами, что в данном случае более существенно. Эти специфические свойства информации – продукта – проявляются как отсутствие износа при использовании и возможность потребления сразу многими экономическими агентами без создания помех друг другу, если информация никак специально не охраняется (Arrow, 1962, p. 104–119). Следует обратить внимание на последнее условие, косвенно свидетельствующее о том, что Эрроу понимал под информацией в том числе охраняемые результаты интеллектуальной деятельности. Его понимание термина “информация” (как продукт) тождественно или, в крайнем случае, очень близко по смыслу более современным терминам – “информационные продукты” (Varian, 1998, part 1) или “контент” (content) (Detering, 2001, chapter 2).

Технически интересующая нас категория продуктов может быть определена через “возможность оцифровки” (Varian, 1998). Всю совокупность таких продуктов, включая новые цифровые продукты и поддающееся оцифровке содержание традиционных продуктов (но не их материальную часть), в литературе по экономике авторского права и интернет принято обозначать термином content (Detering, 2001) или “контент” – в русской транскрипции. Иногда также говорят “медиа контент”. Слово “содержание” не передает в полной мере смысла термина, поэтому лучше пользоваться транскрипцией. В результате получаем следующую формулировку:

Контент – это все, что в принципе поддается оцифровке или изначально существует в цифровой форме. Сюда входят компьютерные программы, музыка, тексты, кино, видео и многое другое. Список открыт.

Во избежание недоразумений проведем грань между понятиями “контент” и “медиа”. В данном случае “медиа” – отнюдь не только средства массовой информации, а все, что несет в себе контент, – книги, CD и DVD диски с музыкой, фильмами и программным обеспечением, средства массовой информации как таковые и т.д. Чтобы почувствовать разницу между медиа и контентом, можно представить книгу как нечто материальное с бумажными страницами, обложкой, клеем, – это медиа. Клей и бумага не оцифровываются. Все, что есть в книге, поддающееся оцифровке, включая картинки и особенности расположения букв, – это контент, поскольку все это оцифровке поддается.

Для представления контента в математических моделях и теоретических работах обычно используются числовые переменные, хотя далеко не всегда за ними стоят измерения или измеримые величины. Как и при построении пространства обычных продуктов, главное здесь – частичная упорядоченность продуктовых наборов, а не количественные показатели как таковые. Упорядоченность (хотя бы частичная) здесь либо сразу присутствует, либо ее можно ввести, причем разными способами. Числовые переменные не обязательно соответствуют каким-то количественным показателям – просто с числами удобно работать. Именно по причине удобства переменные в математических моделях экономики почти всегда представлены вещественными числами. По той же причине ведомства, “отвечающие” за науку и экономику в разных странах, все более упорно пытаются измерить науку и ее достижения количественно, несмотря на кричащие недостатки известных подходов к измерению достижений науки в числах (Лоуренс, 2011, с. 39–45).

Использование дискретных переменных для представления знаний или иных интеллектуальных продуктов в математических моделях – вполне обычное явление в математике. В частности, В.Л. Макаров использовал булевские переменные в модели равновесия с нововведениями (Макаров, 1976, с. 19–45), а потом в своем докладе (Макаров, 2003, с. 18), где дал обоснование такому подходу, исходя из того, что "нельзя дать кусочек знания на пробу, чтобы потом продать всю партию". Дискретность, как кажется, явно присутствует. Конечно, нечто подобное можно сказать практически о любых обычных продуктах, и даже о деньгах. Деньги дискретны в буквальном смысле на уровне самой мелкой монеты (копейки, цента и т.д.). Они дискретны и на более высоком уровне. Например, в смете по гранту обычно фигурируют тысячи рублей, многие экономические показатели измеряются миллионами рублей (или долларов) и т.п. Иначе говоря, дискретность появляется там и тогда, где и когда это удобно. То же самое можно сказать о непрерывности переменных. Зато в модели дискретные переменные, как правило, не столь удобны, как вещественные переменные, поскольку вместе с дискретностью появляются дополнительные технические трудности, которые требуется преодолеть (Данилов, Кошевой, Сотсков, 2003, с. 606–616), часто заслоняющие экономический смысл получаемого результата.

Примечательно, что и булевское сложение, и "сложение" вещественных чисел, получаемое при замене операции обычного сложения операцией взятия максимума, идемпотентны. По определению идемпотентность сложения означает, что сложение двух или более одинаковых элементов дает все тот же элемент. Свойство идемпотентности очень точно соответствует известной максиме – "не надо изобретать велосипед", т.е. не надо придумывать то, что уже придумано. На более примитивном уровне: "да" и еще раз "да" дает в итоге "да"– и ничего больше. Эти простые истины были известны задолго до "цифровой эпохи". Однако именно с появлением цифровых технологий и новых средств передачи информации идемпотентность сложения информации (на элементарном уровне – на уровне битов) проявилась на уровне информационных продуктов и стала играть в экономике все более важную роль. Сложение представленных в цифровой форме продуктов идемпотентно в том же самом смысле, что и сложение "да" плюс "да". Расширение или обогащение контента происходит только при добавлении чего-то нового, не совпадающего с уже имеющимися образцами цифровых продуктов. Но здесь появляется и нечто новое, а именно: теперь важна также мера несовпадения. Добавление нового программного продукта к уже имеющимся программным продуктам может серьезно обогатить контент, если у нового продукта много новых функций (новых возможностей), но эффект будет гораздо меньшим, если таких новых функций мало или их почти нет, хотя прибавка в битах или числе написанных команд будет велика. То же самое можно сказать о новых музыкальных альбомах и всем том, что составляет контент.

Оборотная сторона идемпотентности сложения – неопределенность операции вычитания. В экономике ей соответствует отсутствие свойства редкости у продукта, что может выглядеть либо как мгновенная масштабируемость (instant scalability) практически без затрат в производстве, либо как неконкурентность (non-revalness) в потреблении продукта. Первое отмечается при исследовании рынка программных продуктов, второе – как одно из основных свойств общественных благ (общественных продуктов) при современном изложении этой теории, в том числе в учебной литературе по микроэкономике (Бусыгин и др., 2003, глава 11). Но в основе того и другого лежит одно и то же алгебраическое свойство, что дало основания рассматривать рынок контента, в том числе рынок компьютерных программ, как частную поставку общественных благ (Demsetz,1970, p. 293–306).

Именно в теории общественных продуктов, выросшей из теории общественных расходов (или общественных финансов), свойство неконкурентности в потреблении было формализовано (Samuelson, 1954, p. 387–389) и записано в виде математической формулы, а именно: потребление общественного продукта одинаково для всех потребителей. Иначе говоря, "знак «+» в уравнении баланса был заменен на знак «=»" (Pickhardt, 2001, p. 3), что позволило чисто математически вывести условие оптимальности равновесия в экономике общественных продуктов. Это условие известно как уравнение Сэмюэльсона. Из него следует, что для достижения оптимальности в потреблении общественного продукта необходима дифференциация цен на один и тот же продукт для разных потребителей. Такая ценовая политика именуется ценовой дискриминацией.

В теории несовершенной конкуренции ценовая дискриминация ассоциируется со злоупотреблением монопольным положением на рынке. Она запрещена в США актом Клейтона, аналогичные запреты есть и в ряде других стран. Фактически он есть и в России, с той лишь разницей, что прямой запрет заменен налогом. Статья 40 Налогового кодекса РФ, разработанная для пресечения злоупотреблений с трансфертными ценами на нефтепродукты, ограничивает дифференциацию цен. Фактически она трактуется налоговиками расширительно и применяется в том числе к лицензиям на использование результатов интеллектуальной деятельности. В результате ценовая дискриминация подавляется и там, где она вполне оправдана с точки зрения современной экономической теории. Но речь в данном случае не о дефектах американского антимонопольного законодательства и российского Налогового кодекса, а о практической значимости вывода, следующего из математической модели при “замене знака «+» знаком «=»”. Дальнейшее развитие идеи Сэмюэльсона о “замене знака «+» знаком «=»” – разделение свойства неконкурентности в потреблении и свойства неисключительности, т.е. невозможности исключать кого-то из потребления (Musgrave, 1983, p. 151, fn. 48). Чистые общественные блага, типа хорошей экологии, обладают тем и другим свойством, исключить кого-то из потребления общественного блага (продукта) невозможно. Поэтому в балансе появляется равенство. Продукты, обладающие только свойством неконкурентности в потреблении, называются квазиобщественными. К этой категории относятся основные разновидности контента. А права на него согласно Гражданскому кодексу РФ называются исключительными. В частности, это касается имущественных авторских и патентных прав.

Замена обычного сложения операцией взятия максимума или, иначе говоря, “замене знака «+» знаком «*max*»” в уравнении баланса – более радикальное продвижение в развитии технических возможностей для построения математических моделей, чем “замена знака «+» на знак «=»”, так как операция максимума – полноценная алгебраическая операция. Если на множестве неотрицательных чисел принять ее за “сложение”, в качестве умножения взять обычное умножение, а вместо ноля – обычный ноль, то получится полукольцо (Маслов, Колокольцев, 1994, с. 5). Над этим полукольцом можно построить модуль, т.е. структуру, обладающую многими свойствами арифметического векторного пространства, что позволяет использовать его как пространство продуктов. Сложение элементов – продуктовых наборов – покомпонентное, как и в большинстве моделей экономики с обычными продуктами. При этом появляется возможность применять довольно мощный математический аппарат, а именно идемпотентный анализ. Кроме того, если рассматривать элементы построенного модуля как продуктовые наборы, то их алгебраические свойства проявляются и в производстве, и в потреблении.

В модели баланса научных разработок по Канторовичу–Макарову достигнутый уровень разработок в одном направлении науки может использоваться всеми другими направлениями независимо друг от друга, т.е. пользование одним “потребителем” не создает каких-либо ограничений для других. Именно это свойство известно в теории общественных продуктов как неконкурентность в потреблении (с той лишь разницей, что в модели баланса это производственное потребление). Оно присуще всем общественным и квазиобщественным благам. Однако в данном случае важно то, что это свойство не постулируется, а следует из свойства идемпотентности операции максимума. Главным здесь представляется именно наличие частичного порядка на множестве научных разработок, т.е. возможность в принципе сравнивать их уровень, а отнюдь не представление достигнутого уровня числом. Поэтому вопрос о том, в каких единицах и как измеряется уровень научных разработок, вторичен. Он не более, хотя и не менее, принципиален, чем аналогичный вопрос в отношении традиционных общественных благ типа уровня безопасности и качества окружающей среды. Если речь идет не о вычислениях, а о качественном анализе, числа здесь нужны лишь постольку, поскольку они упорядочены, а работать с ними удобнее, чем с чем-то еще. То же самое можно сказать и в отношении всего контента. Упорядоченность здесь может быть введена различными способами, в том числе можно использовать принципы операций с множествами. Максимум в этом случае будет означать объединение двух множеств. При этом объединение тоже может интерпретироваться по-разному. Например, при сравнении компьютерных программ можно сравнивать функциональные возможности, при сравнении баз данных – их полноту, и т. д. Разумеется, можно предложить и другие способы упорядочивания контента. В конечном счете это зависит от конкретных целей того или иного исследования.

Следует обратить внимание и на тот факт, что в теории общественных благ их производство или накопление обычно представлено либо в самой общей форме, либо крайне примитивно. Если же использовать строго формализованную операцию идемпотентного сложения, например операцию максимума, то появляется существенно больше возможностей. Самое же главное – появляется связь между представлениями о том, как блага накапливаются (создаются) и как они потребляются. То и другое получается как следствие одних и тех же алгебраических свойств, прежде всего идемпотентности сложения. Наконец, совсем новые и, вероятно, недооцененные возможности открываются в связи с возможностью применения новой математики – идемпотентного анализа (Маслов и Колокольцев, 1994), применение которой в экономике сдерживается в основном ее сложностью и инерционностью экономической науки. Разумеется, как всякий универсальный аппарат идемпотентный анализ позволяет анализировать только очень общие свойства, не касаясь деталей и специфических возможностей конкретных видов контента. Однако примерно это же можно сказать о математической теории равновесия для общественных и квазиобщественных благ вообще. В общей формализованной теории нет места ни конкретным особенностям отдельных видов контента, ни институтам, ни сколько-нибудь адекватным ответам на вызовы.

АВТОРСКОЕ ПРАВО, ПИРАТСТВО И ЦЕНОВАЯ ДИСКРИМИНАЦИЯ

Центральное место в экономике медиа-контента занимают проблемы вознаграждения за творческий труд и возврата инвестиций в развитие медиа-продуктов, а также проблема предотвращения несанкционированного использования контента. Чтобы предметно заниматься такими проблемами, необходимо обратиться к деталям. Отсюда вовсе не следует, что исследования на абстрактном математическом уровне ничего не дали для понимания и решения этих проблем. Напротив, основоположники информационной экономики и теории общественных благ из общих принципов и абстрактных математических моделей получили содержательные выводы, из которых логически следует правомерность и желательность дифференциации цен на медиа-продукты.

По мере роста информационного сектора экономики, в том числе экономики на основе авторского права (программирование, звукозапись, кино, телевидение, издательская деятельность), интерес к этой теме возрастал и становился более конкретным. С начала 1970-х годов, а именно с работы Гарольда Демсеца (Demsetz, 1970, p. 293–306), рынок контента стали рассматривать как частную поставку общественных благ, проблему несанкционированного использования контента – как частный случай проблемы “безбилетника” (free rider). А в последнее время среди экономистов, работающих в данной области, стало принято рассматривать рынок музыки (Liebowitz, Watt, 2007) как действующую модель всей экономики медиа-контента, или, как еще говорят, экономики авторского права. Для этого есть определенные основания, поскольку все медиа-рынки укладываются в схему, предложенную Демсецем.

Большая часть цифрового контента охраняется в рамках законодательства об авторском праве и смежных правах. В частности, это касается компьютерных программ, музыки, фильмов и литературных произведений. Все эти разновидности контента охраняются и распространяются по лицензиям, выдаваемым правообладателями. Исключения из этого правила достаточно редки. Не являются исключениями программы, распространяемые на основе так называемых GNU-лицензий, и любые произведения, распространяемые на основе лицензий Creative Commons. В том и другом случае авторское право работает, но используется не совсем обычно. Поэтому настоящих исключений не так уж много. В основном это официальные документы и некоторые фактические данные, например данные о погоде.

Институт авторского права обеспечивает правообладателю (не обязательно автору) исключительное право разрешать или запрещать использование охраняемого произведения, придавая тем самым (в теории) произведению свойство исключительности. Теоретически это дает правообладателю легальную монополию и возможность использовать ценовую дискриминацию, т.е.

назначать разные цены для разных потребителей произведения. Однако воспользоваться этой теоретической возможностью достаточно сложно, в том числе и в силу причин, о которых говорит общая теория. А именно: появляется возможность арбитража, т.е. можно купить не очень нужный тебе продукт и продать тому, кто готов заплатить за него больше. Кроме того, есть техническая проблема выявления платежеспособного спроса – правообладателю очень трудно определить, кто и сколько готов платить. Есть определенные ограничения и в законодательстве, о которых говорилось выше. Есть психологическая проблема. Объяснить покупателям причины дифференциации цен сложно, а иногда и невозможно. Наконец, существует проблема несанкционированного использования контента и ее крайнее выражение – пиратство, т.е. незаконное копирование и распространение контента в коммерческих целях. Все перечисленные проблемы общие. В той или иной мере они характерны для всего охраняемого контента, включая цифровой контент. Однако на практике они решаются разными способами для различных видов контента (программного обеспечения, кино, музыки, текстов) и, что еще важнее, – с разной успешностью. Особенно интересен в этом отношении рынок программного обеспечения, где ценовая дискриминация присутствует в разнообразных формах, маскируясь то под торговлю разными программными продуктами, то под аренду или предоставление программного обеспечения как услуги, а иногда – и в виде попустительства пиратству.

Ценовую дискриминацию легко наблюдать на российском рынке программного обеспечения, причем в разных формах. Так, русскоязычная версия Windows всегда стоит дешевле, чем англоязычная версия. В среднем цена русскоязычной версии составляет около 75% цены англоязычной. Формально – это разные продукты, но их функциональные возможности идентичны. Разница лишь в том, что они предназначены для разных категорий пользователей. В данном случае – это различие в языке, но реально за этим стоит более низкая цена для местного (российского) рынка, чем для рынков англоговорящих стран. Стоит заметить, что немецкая версия той же операционной системы стоит, наоборот, дороже. И в том, и другом случае есть основания не опасаться арбитража, а потому правообладатель назначает для разных рынков разные цены, исходя из готовности местного населения платить за продукт по тем или иным ценам.

Еще сильнее различаются цены программных продуктов, предназначенных для пользователей, имеющих разный уровень дохода. Различаются версии professional, standard, business, home и т.д. Формально – все это разные продукты. Однако различия здесь созданы искусственно, т.е. более дешевые и заведомо "худшие", с точки зрения потенциального потребителя, версии – искусственно ухудшенные продукты. Поскольку все программные продукты обладают свойством "мгновенной масштабируемости" (instant scalability), производителю проще и дешевле обеспечить всех пользователей одной, наиболее продвинутой, версией. Он этого не делает, так как не может просто установить разные цены для разных категорий пользователей в силу ряда причин, в числе которых есть технические трудности. Например, необходимо знать заранее или как-то определять готовность пользователя платить ту или иную цену. Но помимо технических трудностей могут возникнуть правовые и психологические барьеры, преодоление которых либо невозможно, либо связано со значительными издержками. В целом эти издержки достаточно велики, чтобы более выгодным оказалось снижение качества продукта и дифференциация покупателей по принципу "высокое качество – и высокая цена" или "низкое качество – и низкая цена". Здесь неизбежна потеря полезности и, следовательно, потеря стоимости, причем уничтожают стоимость сами поставщики программных продуктов – обладатели исключительных прав.

В эту же схему укладывается ситуация, когда одна категория пользователей приобретает пиратскую версию продукта, ничего не платя официальному поставщику, но испытывая определенные неудобства, другая категория пользователей получает тот же продукт легально, причем вместе с технической поддержкой и осознанием своего положения легального пользователя.

С определенной долей условности ценовой дискриминацией можно считать также более низкие цены на предустановленные программные продукты (OEM-версии) по сравнению с их коробочными аналогами. В этом случае более низкая цена не сопровождается снижением качества продукта в OEM-версии, но пользователя ограничивают в правах. Он не имеет права переставить программу на другой компьютер, что допускается в коробочном варианте. Однако дело здесь не только в ограничении прав. Конкуренция между поставщиками ноутбуков на российский рынок столь высока, что они не только не могут платить за предустановленные программы, но в ряде случаев берут плату с поставщиков программного обеспечения за то, что те или иные программные продукты будут предустановленны. Разумеется, такая практика касается программ, устанавливаемых с лицензией на относительно небольшой срок – от одного до трех месяцев. И все же в этом случае можно говорить об отрицательных ценах на программное обеспечение.

То же самое касается аренды программного обеспечения и предоставления его как услуги. Производитель ничего не экономит на том, что заставляет потребителя вернуть продукт на материальном носителе и/или прекратить использование версии установленной на компьютере пользователя после истечения срока “аренды”. Однако для потребителя эти условия влекут за собой существенное снижение ценности используемого продукта, возможно, только психологическое. Этим обстоятельством оправдывается снижение цены по сравнению с приобретением полноценной лицензии, причем без искусственного ухудшения качества продукта. При всей технологической бессмысленности такой практики она успешно применяется. Причина успеха – возможность установить ценовую дискриминацию, прикрывая ее арендой.

Несколько сложнее обстоит дело с ценовой дискриминацией под видом предоставления программного обеспечения как услуги. Здесь ограничение прав на использование программного продукта может быть дополнено еще какими-то ограничениями или услугами. Клиент (он же – фактически лицензиат) не может отделить услугу от предоставленного ему права. Тем самым решается не только проблема арбитража, но и проблема пиратства.

Наконец, ценовая дискриминация в наиболее явном виде имеет место при организованных поставках программного обеспечения определенным категориям пользователей, например в рамках программы “Первая помощь”. Иначе говоря, в тех случаях, когда это технически и организационно возможно, поставщики программного продукта охотно используют ценовую дискриминацию в явном виде. И все же здесь тоже происходит уничтожение стоимости, поскольку принимаются изощренные и многочисленные меры с целью не допустить бесконтрольной утечки программного обеспечения в те секторы, куда поставка по низким ценам не предполагалась. В совокупности эти меры очень сильно осложняют использование программных продуктов, что равносильно снижению их функциональных возможностей (качества). А это, в свою очередь, означает уничтожение стоимости.

Еще одно важное обстоятельство, которое учитывается фирмами и должно учитываться при разработке государственной политики, это наличие сетевых эффектов (Katz A., 2005, p. 155, 2005; Katz M., Shapiro, 1985, p. 424–440, 1994, p. 93–115). Сетевой эффект – одна из разновидностей внешних эффектов (externalities) состоит в росте ценности сети для каждого ее участника по мере присоединения к сети все новых участников. Присоединение еще одного участника означает, что каждый прежний участник может взаимодействовать в рамках сети еще и с новым участником, а новый – со всеми старыми участниками. Отсюда можно сделать вывод, что ценность сети растет пропорционально квадрату числа ее участников. Эта зависимость получила название закона Меткалфа, в честь Роберта Меткалфа – одного из создателей *Ethernet*. Разумеется, когда сеть составляют пользователи какого-то программного продукта, ситуация много сложнее и в чем-то интереснее. От числа пользователей такого продукта, как операционная система, зависит мотивация производителей большого числа различных продуктов. Это касается не только программных продуктов, но и устройств. Если устройство поставляется с драйверами, то наличие драйвера для данной операционной системы напрямую зависит от ее популярности. Например, для Windows драйверы всегда поставляются с устройствами, а для Linux – далеко не всегда. Впрочем, можно законодательно ввести запрет на ввоз устройств без драйверов для Linux, и ситуация изменится, как минимум, в конкретной стране. Но если драйвер будет сделан для поставок только в эту страну, то он все равно уже будет существовать, и вопрос о том, ставить ли его на устройства для других стран, тоже будет решаться, скорее всего, положительно. Основание для такого предположения – все та же возможность масштабирования без затрат.

Иначе устроен рынок кино и видео. Здесь сетевые эффекты либо проявляются достаточно слабо, либо вообще не проявляются, поскольку потребление кино сильно отличается от потребления компьютерных программ. Кино зритель смотрит как потребитель, а не для того чтобы создать какой-то другой продукт. При этом просмотр фильма в кинотеатре не требует от него практически ничего, кроме желания смотреть и готовности платить за билет. Необходимость консультаций и забота о совместимости форматов, оборудования и т.п. отпадает, а вместе с ней снижаются и сетевые эффекты.

Ценовая дискриминация на просмотр фильмов в кинотеатрах в большинстве стран не применяется. В том числе ее не используют в России. Исключение из общего правила – Индия, где ценовую дискриминацию в кино применяют достаточно широко, дифференцируя цены на места разного качества в кинозалах (Karaganis, 2011, chapter 3). Несколько иначе обстоит дело с видеопродукцией для индивидуального просмотра с использованием домашних устройств. Но и здесь возможности для ценовой дискриминации и сетевые эффекты гораздо слабее, чем в области программного обеспечения. Также здесь нет аналога open source, соответственно, у легальных поставщиков контента нет необходимости использовать пиратов для борьбы с этим явлением.

Рынок музыки очень сильно отличается от рынка программного обеспечения и рынка кино. В отличие от кино и компьютерных программ здесь, помимо записанной музыки, в чем-то на них похожей, существует "живая музыка", т.е. концерты. Отмечаемое многими исследователями падение рынка звукозаписи в последние годы сопровождается ростом посещений концертов. В целом рынок музыки в США (например) в последние годы растет, хотя рынок звукозаписи сокращается. Это говорит о том, что падение интереса к покупке записанной музыки в силу чрезвычайной легкости ее получения через интернет и скачивание или совместное использование файлов отнюдь не убивает музыку. Доступность записанной музыки, действительно, приводит к ее обесцениению. Но при этом возрастает ценность живой музыки. Отсюда следует необходимость более внимательно посмотреть и, возможно, переосмыслить проблему несанкционированного использования музыкальных, и не только музыкальных, произведений, представленных в цифровом форме.

Нечто аналогичное может произойти и с книжным рынком. Распространение "ридеров" – устройств для чтения электронных книг и простота получения цифровых копий книг через интернет рассматривается многими издателями как угроза их бизнесу, и даже существованию книжного рынка вообще. Однако существуют и иные возможности. В частности, бумажная книга может поставляться как отдельная услуга. При этом электронный вариант книги может распространяться свободно или за минимальную цену. Оптимальный вариант будущего устройства книжного рынка и рынка контента в целом пока не найден, как не найден он и для других медиа-рынков.

Все перечисленные примеры объединяет одно простое обстоятельство, а именно: в каждом случае производителю (как вариант – правообладателю) было бы выгоднее поставить полноценную копию продукта, не ограничивая пользователя в правах и не чиня ему препятствий с помощью технических средств. Это общее свойство – следствие масштабируемости (практически без затрат), о котором говорилось выше. Но в реальной жизни действовать столь прямолинейно нельзя по причинам, перечисленным в начале раздела. Поэтому возникают различные модели бизнеса, иногда очень странные, на первый взгляд, но эксплуатирующие, так или иначе, свойство масштабируемости (практически без затрат). В его основе лежит фундаментальное свойство информации и всех цифровых продуктов – неопределенность операции вычитания – следствие идемпотентности сложения. Знание этого обстоятельства иногда помогает увидеть связь между, казалось бы, независимыми явлениями и дать им внятное объяснение.

ИЗМЕРЕНИЯ, СИНЕРГИЯ И "КАННИБАЛИЗМ" В ЭКОНОМИКЕ ЗНАНИЙ

Рассуждая о практическом применении математических моделей экономики контента, трудно обойти вопрос измерений, в том числе измерений в натуральном и в стоимостном (денежном) выражении. При этом измерения в стоимостных показателях в чем-то даже интереснее, но начать имеет смысл именно с проблемы измерений в натуральных показателях.

Примечательно, что отец кибернетики Норберт Винер предпочитал говорить об информации только в относительном смысле, как о мере уменьшения неопределенности в замкнутой системе. Еще более техническим представляется подход Клода Шенона исключительно с позиций пропускной способности каналов связи и совершенно безотносительно полезности информации и, следовательно, ее стоимости. Иначе говоря, в подходе Норберта Винера достаточно ясно просматривается позитивная точка зрения на информацию. В подходе Клода Шеннона ее нет, и эта нейтральность по отношению к ценности – скорее достоинство, чем недостаток. Парадоксальным образом именно такой подход может оказаться наиболее адекватным современной экономике (Sveiby, 1998), так как большая часть экономической информации – навязанная информация. Это касается не только рекламы как классического образца навязываемой информации, но и многочисленных аналитических прогнозов, как правило, никогда несбывающихся (Талеб, 2011, глава 15). Информация в современном мире – не благо и не дефицитный ресурс, часто она навязывается потребителю. Наиболее дефицитным ресурсом стало теперь внимание (Долгин, 2010, с. 66). Вместе с тем навязываемая информация, о которой пишет (Sveiby, 1998), это не совсем та информация, что у Шенона. Бессмысленно говорить о том, сколько бит информации в рекламном ролике, точнее, об этом имеет смысл говорить только в смысле загруженности канала. Внимание потребителя отнимает не количество битов, а то, что он успевает воспринять.

Более интересен в этом плане подход А.Н. Колмогорова (Колмогоров, 1965, с. 3–11), где также предлагается рассуждать не о понятии "информация", а о понятии "количество информации", причем не в абсолютном, а в относительном смысле. В качестве примера предлагается рассмотреть две карты одной местности. У них может быть разная текстура бумаги и много других различий, не имеющих отношения к особенностям местности, изображенной на этих картах. С каких-то точек зрения информация о качестве бумаги и т.п. может иметь значение, но наиболее естественно сравнивать эти карты с точки зрения того, какая информация, характеризующая изображенную местность, в них содержится. Одна карта может быть подробнее другой. Значит, в ней больше информации о местности. Карты могут быть не вполне сравнимыми, например одна из них физическая, а другая политическая. В принципе можно представить такую карту, где представлено и то, и другое. Так обычно не поступают, в силу того что с такой картой неудобно работать. Но бывают атласы, бывают электронные карты с возможностью переключения и т.д. Иначе говоря, здесь мы имеем дело с частичной упорядоченностью. С пониманием количества информации как числа – все сложнее, причем даже в том случае, когда речь идет об относительном, а не абсолютном количестве информации.

В той же статье А.Н. Колмогоров рассмотрел три подхода к определению количества информации как числа – комбинаторный, вероятностный и алгоритмический. Сам он не стал уточнять авторства и варианты двух первых подходов, но стоит отметить, что наиболее известные подходы Клода Шеннона и Норберта Винера в целом укладываются в рамки вероятностного подхода, хотя и различаются между собой. Преимущество алгоритмического подхода, предлагаемого А.Н. Колмогоровым, перед двумя остальными – в его большей осмысленности применительно к ситуациям типа рассмотренной выше (с двумя картами), однако вычислимость количества информации при таком его определении – безнадежная задача, хотя теоретически она вполне разрешима. Вместе с тем осмысленность получаемой числовой оценки далеко не очевидна. Это легко показать на том же примере с картами местности. Если одна из них подробнее другой, то не столь важно, каким именно числом это выражено. А если они вообще несравнимы и служат разным целям (одна физическая, другая политическая), то их (по определению) нельзя сравнивать, применяя алгоритмический подход. Результат заведомо будет не вполне корректным, на его основе нельзя будет сказать, что одна карта содержит больше информации, чем другая, поскольку это – разная информация.

Строго говоря, то же самое происходит и при стоимостной оценке. Получение оценки в денежном измерении очень удобно во многих отношениях, но применительно к нематериальным ценностям, в том числе к информации, эта оценка во многом зависит от контекста. Выстрел стартового пистолета несет спортсмену один бит информации, имеющий огромную ценность в момент старта и никакой ценности секундой позже. Возможно, не столь ярко, но все же достаточно чувствительно эффект контекста проявляется для всех нематериальных ценностей (intangibles).

Термин intangibles (существительное во множественном числе) чаще всего переводят как "нематериальные активы", причем во многих случаях это правильно. Однако более правильно использовать специальный термин – "неосязаемости", как это сделано в переводе (Смит, 2010) монографии (Smith, 1997), поскольку термин "нематериальные активы" более узкий. Его точный смысл определяется правилами бухгалтерского учета (ПБУ-14-2007). И ему соответствует столь же точный термин – intangible assets.

“Неосязаемости” (intangibles) – очень широкий термин, охватывающий не только контент, но и множество других ценностей, как-то: связи с властными структурами, с поставщиками и крупными потребителями, выгодные контракты, клиентскую базу и репутацию, а также множество других ценностей. Неосязаемости, приносящие доход, естественно назвать интеллектуальным капиталом, хотя есть и другие его определения. В стоимостном выражении интеллектуальный капитал можно оценивать как разность между рыночной стоимостью компании и стоимостью всех ее материальных активов. Примерно так Ц. Грилишес (Griliches, 1990, p. 1661–1707) определял стоимость неосязаемого капитала (intangible capital). Разница состоит в том, что в качестве рыночной стоимости он брал рыночную капитализацию компании, т.е. не учитывал поправку на наличие задолженности. На основе данных за 1980-е годы он обнаружил практически линейную зависимость между вложениями в R&D, числом патентов и величиной неосязаемого капитала компании. Однако можно с уверенностью утверждать, что Грилишесу очень повезло с выбором временного периода. Сейчас он подобного результата получить бы не смог, в том числе потому, что структура интеллектуального капитала компаний изменилась и усложнилась. В частности, очень большая часть вложений в R&D – вложения в программное обеспечение. Соответственно, большую часть неосязаемого капитала составляют не патенты, а компьютерные программы. Но дело не только в этом. Более подробно о проблемах учета затрат на R&D в качестве инвестиций можно прочитать в отчете (Mackie, 2009, chapter 1).

В составе интеллектуального капитала принято выделять три блока: человеческий капитал; организационный капитал (куда входит кодифицированная информация); клиентский капитал. Не вдаваясь в подробности о содержании каждого из трех блоков, заметим, что недостаточность одного из них обесценивает два остальных. Некоторые специалисты по управлению знаниями (knowledge management) даже предлагали перемножать (а не складывать) оценки каждого из блоков, чтобы получить интегральную оценку. При всей экстравагантности этих заявлений за ними стоит понимание того факта, что ценность информации чрезвычайно сильно зависит от того, в чьих руках она находится, а также от наличия прав, связей и т.п. Здесь имеет место синергетический эффект. Другой пример положительной синергии – рассмотренный выше сетевой эффект, вся сеть имеет большую ценность, чем сумма ценности ее частей при любом ее расчленении.

Однако в экономике есть много примеров, когда имеет место отрицательный синергетический эффект, именуемый также “каннибализмом”. Чаще всего этот эффект связан с наличием отношений порядка и проявляется в том, что появление лучшего технического решения обесценивает все другие решения той же задачи, если не полностью, то частично. Аналогично: патенты, обеспечивающие защиту от конкуренции одну и ту же рыночную нишу, частично обесценивают друг друга. Обеспеченные ими дополнительные степени защиты не увеличивают денежного потока, а потому нет ясных оснований считать, что возрастает стоимость бизнеса и той его части, которая приходится на патентный портфель. Эффект проявляется тем ярче, чем надежнее патенты. Если каждый из них обеспечивает абсолютную невозможность обхода, то для защиты от конкуренции достаточно любого из них. Тогда стоимость патентного портфеля не зависит от того, состоит ли он из всех этих патентов или только из одного из них. Парадоксальный, на первый взгляд, эффект проявляется на практике в смягченной форме, поскольку абсолютную защиту рыночной ниши не обеспечивает ни один патент, ни даже портфель из патентов, ноу-хау и т.д. (далее – портфель интеллектуальной собственности). Пополнение портфеля интеллектуальной собственности увеличивает его стоимость, но с понижающимся эффектом. Здесь мы опять сталкиваемся с проявлением отношений порядка, более сильная охрана обесценивает более слабую охрану.

Конструктивный вывод из сказанного выше состоит в том, что наличие частичной упорядоченности в портфеле интеллектуальной собственности можно использовать при оценке его отдельных компонентов. Такая задача обычно возникает в связи с учетом портфеля интеллектуальной собственности на балансе или передаче его на баланс другого юридического лица. Нельзя ставить на баланс всю сумму как одну учетную единицу. Ее надо разбить между отдельными патентами, правами на программы и ноу-хау. Для этого можно воспользоваться решением по Шепли, но предварительно надо разбить портфель на кластеры по принадлежности к той или иной рыночной нише или конкретному изделию. А внутри каждого кластера надо учесть эффект “каннибализма”, исходя из упорядоченности по силе правовой охраны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Циплаков А.А. (2003): Микроэкономика – третий уровень. Новосибирск: СО РАН.

Данилов В.И., Кошевой Г.А., Сотсков А.И. (1993): Экономическое равновесие на рынке интеллектуальных товаров // *Экономика и мат. методы.* Т. 29. Вып. 4.

Долгин А.Б. (2010): Манифест новой экономики. Вторая невидимая рука рынка. М.: ООО "Издательство АСТ".

Колмогоров А.Н. (1965): Три подхода к определению понятия "количество информации" // *Проблемы передачи информации*. Т. 1. № 1.

Лоуренс П.А. (2011): Как измерение вредит науке. В сб.: "*Игра в цифирь, или Как теперь оценивают труд ученого (сборник статей по библиометрике)*". М.: МЦНМО.

Макаров В.Л. (1973): Баланс научных разработок и алгоритм его решения. В сб.: "*Оптимизация*". Новосибирск. 1973. Вып. 11 (28).

Макаров В.Л. (2003): Экономика знаний: уроки для России // *Вестник Российской академии наук.* Т. 73. № 5.

Макаров В.Л. (1976): Модель экономического равновесия, учитывающая нововведения. В сб.: "*Оптимизация*". Новосибирск. Вып. 18.

Макаров В.Л., Клейнер Г.Б. (2007): Микроэкономика знаний. М.: Экономика.

Маслов В.П., Колокольцев В.Н. (1994): Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит.

Махлуп Ф. (1966): Производство и распространение знаний в США. М.: Прогресс.

Смит Г. (2010): Оценка товарных знаков. М.: ЗАО ИД "Квинто-Консалтинг".

Талеб Н.Н. (2011): Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости. М.: КоЛибри, Азбука-Аттикус.

Arrow K.J. (1962): Economic Welfare and the Allocation of Resources for Invention. In: "*Collected Papers of Kenneth J. Arr*ow". Vol. 5. Cambridge: Harvard University Press.

Demsetz H. (1970): The Private Production of Public Goods. 13 Journal of Law and Economics.

Detering D. (2001): Ökonomie der Medieninhalte. Allokative Effizienz und Chancengleichheit in den Neuen Medien, LIT Verlag, Münster; (сокращенный вариант – Detering D. How to Charge Lindahl Prices for IP goods – доступен по ссылке: http://www.medieninhalte.de/article.htm.

Griliches Z. (1990): Patent Statistics as Economic Indicators: A Survey // *J. of Econ. Literature*. Vol. XXYIII.

Karaganis J. (ed.): (2011): Media piracy in emerging economies. Published by the Social Science Research Council ([электронный ресурс] Режим доступа: http://piracy.ssrc.org, свободный. Яз. англ.).

Katz A. (2005): A Network Effects Perspective on Software Piracy // *University of Toronto Law J.* U Toronto Law and Economics Research Paper № 03-01. Vol. 55.

Katz M.L., Shapiro C. (1985): Network Externalities, Competition and Compatibility // *American Econ. Rev.* Vol. 75.

Katz M.L., Shapiro C. (1994): Systems Competition and Network Effects. 8 Journal of Economic Perspectives.

Liebowitz S.J., Watt R. (2007): How to Best Ensure Remuneration for Creators in the Market for Music? [электронный ресурс] Copyright and its Alternatives working paper 01, SERCI_WPS01 (pdf). Режим доступа: http://www.serci.org/default.asp, свободный. Яз. англ.).

Mackie C. (2009): Intangible Assets: Measuring and Enhancing Their Contribution to Corporate Value and Economic Growth: Summary of a Workshop. [Электронный ресурс] Washington, National Research Council. Режим доступа: http://www.nap.edu/catalog/12745.html, свободный. Яз. англ.

Machlup F. (1962): The Production and Distribution of Knowledge in the United States. Princeton.

Musgrave R.A. (1983): Public Goods. In: Brown E.C., Solow, R.M. (Eds.) "*Paul Samuelson and Modern Economic Theory*". N.Y.

Pickhardt M. (2001): Fifty Years after Samuelson's. The Pure Theory of Public Expenditure" 52nd International Atlantic Economic Conference Philadelphia, USA, 12–14 October.

Samuelson P.A. (1954): The Pure Theory of Public Expenditure. 36 Review of Economics and Statistics.

Smith G. (1997): Trademark Valuation. John Willey & Sons, Inc.

Stigler G. (1961): The Economics of Information // *The J. of Political Econ.* Vol. 69. № 3.

Sveiby K.E. (1998): What is information? [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.sveiby.com/articles/Information.html, свободный. Яз. англ. (дата обновления 31 декабря 1998).

Varian H.R. (1998): Markets for Information Goods. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.sims.berkeley.edu/~hal/people/hal/papers.html, свободный. Яз. англ. (дата обновления 16 октября 1998).

Поступила в редакцию
21.06.2011 г.

Modeling of Technological Progress, orderliness and digital economy

A.N. Kozyrev

The orderliness role in digital economy is investigated. It is shown that L.V. Kantorovich's idea about replacement of usual addition with maximum operation can have many applications in models of digital economy.

Keywords: orderliness, idempotent addition, content, price discrimination.

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2011, том 47, № 4, с. 143–165

К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ЛЕОНИДА ВИТАЛЬЕВИЧА КАНТОРОВИЧА

ДВОЙСТВЕННОСТЬ МОНЖА–КАНТОРОВИЧА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ПОЛЕЗНОСТИ*

© 2011 г. **В.Л. Левин**

(Москва)

Обзор посвящен развитию теории двойственности для общей задачи Монжа–Канторовича и ее применению в теории полезности.

Ключевые слова: теория двойственности, двойственность Монжа–Канторовича, теория полезности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача Монжа–Канторовича (ЗМК), известная также как задача о перемещении масс, состоит в следующем. Заданы два распределения (исходное и желаемое) некоторого продукта и функция стоимости, показывающая стоимость перемещения единицы продукта из одного пункта в другой. Требуется перейти от первого распределения ко второму с наименьшими затратами, т.е. составить оптимальный план перемещения масс. Впервые эту задачу рассмотрел Гаспар Монж (1781) в связи с некоторыми прикладными вопросами фортификации (“задача о выемках и насыпях”). Функцией стоимости в задаче Монжа служило расстояние между пунктами, а под планом перемещения масс понималось отображение, сохраняющее объем, так что надо найти план, минимизирующий работу по перемещению масс, связанную с преодолением сил трения. В такой постановке задача была решена П.-Э. Аппелем (1887). В наше время получены решения задачи Монжа для более общих функций стоимости и более общих распределений массы.

В 1942 г. Л.В. Канторович (Канторович, 1942) (см. также (Канторович, 1948; Канторович, Рубинштейн, 1957, 1958; Канторович, Акилов, 1984)) рассмотрел задачу о перемещении масс, в которой под планом перемещения понималась положительная мера на произведении пространств, имеющая своими проекциями (маргинальными мерами) исходное и желаемое распределения, а функцией стоимости, как и у Монжа, служило расстояние между пунктами. Указанная постановка задачи, называемая иногда классической задачей Монжа–Канторовича, является расширением (релаксацией) первоначальной постановки Монжа; решениям Монжа при этом отвечают меры, сосредоточенные на графике соответствующего отображения. Такой вариант классической ЗМК исследуется в публикациях Канторовича 1942 и 1949 г. В более поздних работах (Канторович, Рубинштейн, 1957, 1958) рассматривается другой вариант задачи, когда заданы не сами маргинальные меры, а их разность, т.е. разрешены транзитные перевозки.

Приведем точную математическую формулировку классической ЗМК, рассматривавшейся Л.В. Канторовичем. На метрическом компакте (X, d) заданы две положительные борелевские меры σ_1 и σ_2 с равными общими массами: $\sigma_1 X = \sigma_2 X$. Требуется минимизировать интеграл $\int_{X\times X} c(x, y)d\mu$, где $c(x, y) = d(x, y)$, μ пробегает множество положительных мер на $X \times X$ с проекциями $\mu(B \times X) = \sigma_1 B$ и $\mu(X \times B) = \sigma_2 B$ для каждого борелевского множества $B \subseteq X$ (ЗМК с фиксированными маргинальными мерами) или же μ пробегает множество положительных мер на $X \times X$ с разностью проекций $\mu(B \times X) - \mu(X \times B) = \sigma_1 B - \sigma_2 B$ (ЗМК с фиксированной разностью маргинальных мер). Обозначим через $\mathcal{A}(c, \sigma_1 - \sigma_2)$ оптимальное значение задачи с фиксированной разностью маргинальных мер и через $\mathcal{C}(c, \sigma_1, \sigma_2)$ оптимальное значение задачи с фиксированными маргинальными мерами. Один из важных результатов для классической ЗМК состоит в

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 10-02-00073а).

эквивалентности обеих постановок, с фиксированными маргинальными мерами и с фиксированной разностью маргинальных мер: $\mathcal{A}(d, \sigma_1, \sigma_2) = \mathcal{C}(d, \sigma_1 - \sigma_2)$ (Канторович, Рубинштейн, 1957, 1958). При этом указанная величина является метрикой на пространстве вероятностных мер на X, топологизирующей их слабую* сходимость (метрика Канторовича–Рубинштейна). Другим фундаментальным результатом является критерий оптимальности Канторовича: для оптимальности данной допустимой меры (плана перемещения масс) необходимо и достаточно существование функции $u(x)$ на исходном пространстве, называемой потенциалом и обладающей тем свойством, что для любых двух пунктов x и y разность потенциалов $u(x)$–$u(y)$ не превосходит значения функции стоимости в точке (x, y), а на носителе меры имеет место точное равенство.

Классическая ЗМК является бесконечномерной задачей линейного программирования (исторически, одной из первых, если не самой первой); при этом критерий оптимальности Канторовича может быть переформулирован как теорема двойственности, т.е. утверждение о равенстве оптимальных значений исходной и двойственной задач (см., например, (Вершик, 1970; Рубинштейн, 1970)). В случае конечного числа пунктов задача с фиксированными проекциями превращается в обычную транспортную задачу линейного программирования (с расстоянием в качестве функции стоимости), а задача с фиксированной разностью проекций – в транспортную задачу в сетевой постановке. Замечательно, что первая публикация Л.В. Канторовича (1942) появилась раньше соответствующих работ, относящихся к конечномерной транспортной задаче.

Задачи Монжа–Канторовича с более общими функциями стоимости (непрерывными и разрывными), определенными на всевозможных пространствах, рассматриваются в литературе начиная с середины 1970-х годов (Левин, 1974, 1975, 1977, 1978; Левин, Милютин, 1979). В это же время появился и сам термин “задача Монжа–Канторовича” (Левин, 1977, 1978), ставший теперь общепринятым. В общем случае две постановки ЗМК перестают быть эквивалентными, и существование потенциала не является необходимым условием оптимальности. (Заметим в этой связи, что в формулировке задачи в (Канторович, 1948) не предполагается, что функция стоимости является метрикой, однако это предположение неявно используется в доказательстве.) Приведем иллюстративный пример.

Пример 1. Пусть $X = [0, 1]$, $c(x, y) = (x - y)^2$, $\sigma_1 = \epsilon_0$, $\sigma_2 = \epsilon_1$, где ϵ_x – мера Дирака (δ-функция) в точке x, т.е. $\epsilon_x(B) = 1$ при $x \in B$ и $\epsilon_x(B) = 0$ при $x \notin B$. Поскольку $\epsilon_{(0,1)}$ – единственная мера с проекциями ϵ_0 и ϵ_1, то она является оптимальным решением ЗМК с фиксированными проекциями и $\mathcal{C}(c, \sigma_1, \sigma_2) = c(0, 1) = 1$. В то же время для $\mu = \epsilon_{(0,1/n)} + \epsilon_{(1/n,2/n)} + ... + \epsilon_{((n-1)/n,1)}$ (перемещение из 0 в 1 через $n - 1$ промежуточный пункт) разность проекций равна $\sigma_1 - \sigma_2$, и, так как интеграл от $c(x, y)$ по этой мере равен $1/n$, то $\mathcal{A}(c, \sigma_1 - \sigma_0) = 0$. Далее, если $u(x) - u(y) \leq (x - y)^2$ при всех x, y из $[0, 1]$, то $u(x)$ – константа, стало быть, $u(0) - u(1) = 0 \neq c(0, 1) = 1$, т.е. мера $\epsilon_{(0,1)}$ оптимальна (в задаче с фиксированными проекциями), но критерий Канторовича для нее не выполняется[1].

Несложно показать, что для сохранения эквивалентности обоих вариантов ЗМК при любых σ_1, σ_2 ($\sigma_1 X = \sigma_2 X$) необходимо и достаточно, чтобы функция стоимости удовлетворяла неравенству треугольника $c(x, y) + c(y, z) \geq c(x, z)$. С точки зрения теории двойственности ЗМК с фиксированной разностью маргинальных мер является более трудной. Полная теория двойственности в массовой постановке (т.е. описание всех функций стоимости, для которых верна теорема двойственности) для этой задачи была построена в совместной работе Милютина и автора (Левин, Милютин, 1979) в случае произвольного (не обязательно метризуемого) компактного пространства X. Обобщение этой теории на более широкий класс топологических пространств получено в (Левин, 1984, 1987; Levin, 1990). Дальнейшие (не топологические) обобщения см. в (Левин, 1996; Levin, 1997b; Левин, 1997).

В 1960–1980 гг. интенсивно развивались исследования по классической ЗМК с фиксированными проекциями (некоторые авторы рассматривают только этот вариант задачи) и ее применениям в теории информации и математической статистике (Вассерштейн, Вершик, Судаков, Келлерер, Рачев, Рюшендорф и др.). После появления важных работ (Brenier, Gangbo, McCann) в этой области начался настоящий бум, продолжающийся и сейчас (связь с уравнением

[1] Для оптимальности допустимой меры в общей ЗМК с фиксированными проекциями необходимо и достаточно существование пары непрерывных функций $u(x)$ и $v(y)$ таких, что $u(x) - v(y) \leq c(x, y)$ при любых x, y и $u(x) - v(y) = c(x, y)$ на носителе меры.

Монжа–Ампера и другими дифференциальными уравнениями с частными производными, применения в различных разделах естествознания, от метеорологии и океанологии до космологии, гидро- и аэродинамики, и т.д.). В 1998–2003 гг. появилось несколько монографий (Rachev, Rüschendorf; Evans, Grandbo; Villani; Brenier; Ambrosio).

Экономические применения задачи Монжа–Канторовича, отличные от очевидного транспортного аспекта, оказались связаны с теорией двойственности для общей ЗМК с фиксированной разностью проекций. Нами был развит новый метод, позволяющий использовать единый подход при решении самых разных задач как математической экономики (теория полезности; рационализируемость спроса; модели динамики; коррупция, связанная с искажением экономической информации), так и чистой математики (задача наилучшего приближения, циклическая монотонность, абстрактный выпуклый анализ), список литературы в конце статьи[2]. В основе метода лежат теоремы двойственности для общей ЗМК с фиксированной разностью маргинальных мер и специальной (разрывной) функцией стоимости. Важную роль при этом играет множество ограничений двойственной задачи

$$Q(c) := \{u \in C^b(X) : u(x) - u(y) \le c(x, y) \ \ \forall (x, y) \in X \times X\}$$

($C^b(X)$ – пространство всех ограниченных непрерывных функций на X), аналогичное множество

$$Q_0(c) := \{u \in \mathbf{R}^X(X) : u(x) - u(y) \le c(x, y) \ \ \forall (x, y) \in X \times X\},$$

являющееся множеством ограничений для абстрактной (нетопологической) версии двойственной ЗМК (если функция стоимости ограничена, непрерывна в некоторой окрестности диагонали $D = \{(x, x) : x \in X\}$ и обращается в нуль на D, то $Q_0(c) = Q(c)$), а также редуцированная функция стоимости $c_*(x, y)$, показывающая минимальную стоимость перемещения единицы продукта из x в y с учетом всевозможных транзитных перемещений через несколько промежуточных пунктов. Оказалось, что решение многих задач из самых разных разделов экономической теории сводится к условиям непустоты (и изучению свойств) множеств $Q(c)$ и $Q_0(c)$ для специальных (как правило, знакопеременных) вспомогательных функций стоимости. Этот метод оказался полезен и при исследовании ЗМК с фиксированными проекциями.

В настоящем обзоре изложены теоремы двойственности для обоих вариантов общей ЗМК и их применение в теории полезности.

2. ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ, УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

2.1. ЗМК с фиксированной разностью маргинальных мер. Напомним постановку задачи Монжа–Канторовича с фиксированной разностью маргинальных мер. Даны: функция стоимости $c: X \times X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ и знакопеременная борелевская мера ρ на X, $\rho X = 0$ (разность маргинальных мер). Задача состоит в нахождении оптимального значения

$$\mathcal{A}(c, \rho) := \inf\{c(\mu) : \ \mu \ge 0, \ \pi_1\mu - \pi_2\mu = \rho\},$$

где $c(\mu) := \int\limits_{X \times X} c(x, y)\mu(d(x, y))$, маргинальные меры на X $\pi_1\mu$ и $\pi_2\mu$, определены равенствами $(\pi_1\mu)B = \mu(B \times X)$, $(\pi_2\mu)B = \mu(X \times B)$ для каждого борелевского множества B в X. Это общая ЗМК с заданной разностью маргинальных мер. Разумеется, для того чтобы задача была корректно определена, функция стоимости должна быть универсально измеримой.

Двойственная задача состоит в нахождении оптимального значения

$$\mathfrak{B}(c, \rho) := \sup\left\{\int\limits_X u(x)\rho(dx) : u \in Q(c)\right\},$$

где

$$Q(c) = Q(c, C^b(X)) := \{u \in C^b(X) : u(x) - u(y) \le c(x, y) \quad \forall x, y \in X\},$$

[2] Первая журнальная заметка по двойственности для общей ЗМК опубликована в Докладах Академии наук (1975) по представлению Л.В. Канторовича; см. (Левин, 1975).

$C^b(X)$ – пространство ограниченных непрерывных вещественных функций на X. Очевидно, всегда справедливо неравенство $\mathcal{A}(c, \rho) \geq \mathcal{B}(c, \rho)$.

Теорема 1 (Левин, Милютин, 1979). *Пусть пространство X метризуемо и компактно. Предположим, что $c(x, y)$ удовлетворяет неравенству треугольника и обращается в нуль на диагонали ($c(x, x) = 0 \ \forall x \in X$), а лебеговы множества меньших значений*

$$\{(x, y) : c(x, y) \leq \alpha\}, \ \alpha \in \mathbf{R} \tag{1}$$

являются аналитическими (суслинскими). Тогда следующие утверждения равносильны:

а) при всех ρ, $\rho X = 0$, справедливо соотношение двойственности

$$\mathcal{A}(c, \rho) = \mathcal{B}(c, \rho) > -\infty; \tag{2}$$

б) функция стоимости полунепрерывна снизу.

Далее, если какое-нибудь (а стало быть оба) из этих равносильных утверждений имеет место, то оптимальное значение $\mathcal{A}(c, \rho)$ достигается, и более того, для любых положительных мер на X, σ_1, σ_2 с разностью $\sigma_1 - \sigma_2 = \rho$ найдется мера $\mu \geq 0$ на $X \times X$ такая, что $\pi_1\mu = \sigma_1$, $\pi_2\mu = \sigma_2$ и $c(\mu) = \mathcal{A}(c, \rho)$.

Следствие 1. Если $c(x, y)$ полунепрерывна снизу на $X \times X$, обращается в нуль на диагонали и удовлетворяет неравенству треугольника, то $Q(c)$ непусто.

Для непрерывной функции $c(x, y)$ это – прямое следствие неравенства треугольника, так как в таком случае при любом $z \in X$ функции $u(x) = c(x, z)$ и $v(x) = -c(z, x)$ принадлежат $Q(c)$.

Следствие 2. Если $c(x, y)$ полунепрерывна снизу на $X \times X$ и обращается в нуль на диагонали, то следующие утверждения равносильны:

а) $c(x, y)$ удовлетворяет неравенству треугольника;

б) справедливо представление

$$c(x, y) = \sup_{u \in Q(c)} (u(x) - u(y)). \tag{3}$$

Здесь б) $\Rightarrow$ а) очевидно, а а) $\Rightarrow$ б) есть прямое следствие теоремы 1, принимая во внимание, что правая часть равенства (3) в точности совпадает с $\mathcal{B}(c, \varepsilon_x - \varepsilon_y)$, а $c(x, y) = \mathcal{A}(c, \varepsilon_x - \varepsilon_y)$ при всех $x \neq y$. (Последнее следует из того, что $\varepsilon_{(x,y)}$ – единственная мера на $X \times X$, имеющая ε_x и ε_y своими маргинальными мерами.)

Теорема 1 обобщается на некомпактные пространства следующим образом.

Теорема 2 (Левин, 1984; Levin, 1990). *Пусть X – польское пространство (т.е. сепарабельное метризуемое пространство, которое можно метризовать так, что оно станет полным). Тогда при предположениях теоремы 1 следующие утверждения равносильны:*

а) при всех ρ, $\rho X = 0$, выполняется соотношение двойственности (2);

б) справедливо представление (3).

Если $c(x, y)$ не удовлетворяет неравенству треугольника, то условия для справедливости соотношения двойственности выражаются в терминах *редуцированной функции стоимости*

$$c_*(x, y) := \inf_n \inf_{z_1, \ldots, z_n \in X} \{c(x, z_1) + c(z_1, z_2) + \ldots + c(z_n, y)\}. \tag{4}$$

Легко убедиться, что $Q(c) = Q(c_*)$ (включение $Q(c_*) \subseteq Q(c)$ очевидно, а обратное включение получается сумированием неравенств $u(z_k) - u(z_{k+1}) \leq c(z_k, z_{k+1})$, $k = 0,..., n$, где $z_0 = x$, $z_{n+1} = y$), следовательно, $\mathcal{B}(c, \rho) = \mathcal{B}(c_*, \rho)$. С другой стороны, теорема о редукции (Levin, 1990, Theorem 9.6) утверждает, что $\mathcal{A}(c, \rho) = \mathcal{A}(c_*, \rho)$ при условии, что

$$\mathcal{A}(c, \rho) = \lim_{N \to \infty} \mathcal{A}(c \wedge N, \rho), \tag{5}$$

где $(c \wedge N)(x, y) := \min(c(x, y), N)$. Более того, справедлива следующая теорема двойственности.

Теорема 3 (Левин, 1987, теорема 2; Levin, 1990, Theorem 9.4). *Пусть X – польское пространство. Предположим, что функция стоимости $c(x, y)$ ограничена снизу, а ее лебеговы множества меньших значений являются аналитическими. Следующие утверждения равносильны:*

а) соотношение двойственности выполняется при всех ρ, $\rho X = 0$;

б) выполнено равенство (5), $Q(c)$ *непусто, и справедливо представление*

$$c_*(x, y) = \sup_{u \in Q(c)} (u(x) - u(y)). \tag{6}$$

Замечание 1. Сформулированные выше результаты обобщаются на более широкий класс пространств X. В частности, теорема 1 верна для любых (не обязательно метризуемых) компактов, теорема 2 (теорема 3) справедлива, если X гомеоморфно универсально измеримому (соотв. бэровскому) подмножеству некоторого компакта. В указанных (неметризуемых) версиях теорем двойственности все рассматриваемые меры предполагаются регулярными, а под аналитическими множествами понимаются результаты применения А-операции к бэровским множествам. Подробнее см. (Levin, 1990).

2.2. ЗМК с фиксированными маргинальными мерами: двойственность, условия оптимальности и точные решения. Напомним постановку общей задачи Монжа–Канторовича (ЗМК) с фиксированными маргинальными мерами. Пусть X и Y – вполне регулярные топологические пространства. Даны: ограниченная снизу и универсально измеримая функция стоимости $c : X \times Y \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ и конечные регулярные борелевские меры σ_1 на X и σ_2 на Y, $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$; задача состоит в нахождении оптимального значения

$$\mathfrak{C}(c, \sigma_1, \sigma_2) := \inf\{c(\mu): \mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)\},$$

где

$$c(\mu) := \int\limits_{X \times Y} c(x, y)\mu(d(x, y)), \quad \Gamma(\sigma_1, \sigma_2) := \{\mu: \mu \geq 0, \pi_1\mu = \sigma_1, \ \pi_2\mu = \sigma_2\},$$

$\pi_1\mu$ и $\pi_2\mu$ – проекции (маргинальные меры) μ на X и Y. Это – общая ЗМК с фиксированными маргинальными мерами.

Двойственная задача состоит в нахождении оптимального значения

$$\mathcal{D}(c, \sigma_1, \sigma_2) := \sup\left\{\int\limits_X u(x)\sigma_1(dx) - \int\limits_Y v(y)\sigma_2(dy) : (u, v) \in Q'(c)\right\},$$

где

$$Q'(c) := \{(u, v) \in C^b(X) \times C^b(Y) : u(x) - v(y) \leq c(x, y) \forall (x, y) \in X \times Y\}.$$

Очевидно, всегда $\mathfrak{C}(c, \sigma_1, \sigma_2) \geq \mathcal{D}(c, \sigma_1, \sigma_2)$.

Теорема 4 (см. (Левин, 1984, теорема 1; Levin, 2001б, Theorem 1.4). *Следующие утверждения равносильны:*

а) для всех $\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_2 \geq 0$ *с* $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$ *справедливо соотношение двойственности* $\mathfrak{C}(c, \sigma_1, \sigma_2) = \mathcal{D}(c, \sigma_1, \sigma_2)$;

б) $c(x, y)$ *ограничена снизу и полунепрерывна снизу на* $X \times Y$;

в) $c(x, y)$ *представима в виде* $c(x, y) = \sup_{(u,v) \in H}(u(x) - v(y))$, *где* H *– непустое подмножество* $C^b(X) \times C^b(Y)$. *Более того, если эти равносильные утверждения выполняются, то оптимальное значение* $\mathcal{C}(c, \sigma_1, \sigma_2)$ *достигается, т.е. существует оптимальное решение рассматриваемой ЗМК.*

Обратимся теперь к вопросу о существовании (и единственности) оптимального решения Монжа рассматриваемой ЗМК. Напомним (см. Введение), что задача Монжа (ЗМ) состоит в минимизации (нелинейного) функционала $\mathcal{F}(f) := \int\limits_X c(x, f(x))\sigma_1(dx)$ на множестве $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ всех сохраняющих меру борелевских отображений $f : X \to Y$. (Отображение f называется сохраняющим меру, если $\sigma_2 = f(\sigma_1)$, т.е. $\sigma_2 B = \sigma_1 f^{-1}(B)$ для каждого борелевского множества $B \subseteq Y$.) Свяжем с

$f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ меру $\mu_f \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$, сосредоточенную на графике f и являющуюся образом меры σ_1 при отображении $id_X \times f$, $\mu_f = (id_X \times f)(\sigma_1)$. Легко увидеть, что $c(\mu_f) = \mathcal{F}(f)$; следовательно, для любой функции стоимости $c(x, y)$ справедливо неравенство

$$\mathcal{C}(c, \sigma_1, \sigma_2) \leq \mathcal{V}(c, \sigma_1, \sigma_2), \tag{7}$$

где $\mathcal{V}(c, \sigma_1, \sigma_2)$, – оптимальное значение ЗМ. Заметим, что если ЗМК имеет оптимальное решение, являющееся решением Монжа μ_f, то f автоматически оказывается оптимальным решением ЗМ и (7) выполняется со знаком равенства. В общем случае неравенство (7) является строгим, и более того, множество $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ может быть пустым.

Далее предполагается, что X и Y – замкнутые области в $\mathbf{R}^n$, а $c \in C^b(X \times Y)$. Напомним, что *носителем* положительной борелевской меры σ на X называется минимальное замкнутое множество полной меры σ (т.е. дополнение объединения всех открытых подмножеств X нулевой меры). Носитель σ обозначается $spt(\sigma)$.

Нам понадобятся два условия на σ_1 и c.

Условие A_1. Мера σ_1 абсолютно непрерывна относительно n-мерной меры Лебега.

Условие A_c. Если для y^1, y^2 из $spt(\sigma_2)$ функции $c(\cdot, y^1)$ и $c(\cdot, y^2)$ дифференцируемы в некоторой точке $x \in intX$ и их градиенты в этой точке совпадают, то $y^1 = y^2$.

Условие A_c выполняется, в частности, когда $X = Y$ и $c(x, y) = x \times y$ или $c(x, y) = h(x - y)$, где h строго выпукла (строго вогнута).

Теорема 5 (Levin, 1999, Theorem 6.1; Levin, 2004, Theorems 1.2, 1.3). *Предположим, что X выпукло, $c(x, y)$ непрерывна и выполнены условия A_1, A_c. Также предположим, что все функции $c(\cdot, y)$ ($y \in spt(\sigma_2)$) выпуклы либо все они вогнуты. Тогда существует единственное оптимальное решение ЗМК, это оптимальное решение является решением Монжа $\mu = \mu_f$ и f – единственное (с точностью до значений на σ_1-пренебрежимом множестве) оптимальное решение ЗМ.*

Аналогичный результат верен при отказе от выпуклости X и замене условий вогнутости (выпуклости) функций $c(\cdot, y)$ ($y \in spt(\sigma_2)$) условием их дифференцируемости и равномерной по y локальной липшицевости на $spt(\sigma_1)$; подробнее см. (Levin, 1999, Theorem 6.2; Levin, 2004, Theorem 1.4).

Замечание 2. В теореме 5 (и в других подобных теоремах) единственность оптимального решения имеет место для специальных σ_1 и c. В отличие от этих “индивидуальных” результатов о единственности в (Levin, 2001b) (см. также (Левин, 2008a)) было доказано несколько теорем о типичности единственности в задаче Монжа–Канторовича с произвольными маргинальными мерами, удовлетворяющими равенству $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$, и в более общих бесконечномерных задачах линейного программирования. Простейшая из этих теорем (Levin, 2001b, Theorem 1) утверждает, что если X и Y – ограниченные замкнутые области в евклидовых пространствах, то непрерывные функции стоимости $c(x, y)$, для которых оптимальное решение ЗМК единственно, образуют массивное (плотное G_δ) множество в $C(X \times Y)$. Однако в этой теореме оптимальные решения соответствующих ЗМК, вообще говоря, не являются решениями Монжа.

Рассмотрим множество вещественных функций на X, $L := \{-c(\cdot, y): y \in spt(\sigma_2)\}$, и свяжем с каждой $\mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ многозначное отображение $F_\mu: X \to L$,

$$F_\mu(x) := \{-c(\cdot, y):(x, y) \in spt(\mu)\}. \tag{8}$$

Положим $Z = \mathrm{dom} F_\mu := \{x \in X: F_\mu(x) \neq \varnothing\}$ и определим на $Z \times Z$ функцию

$$\varphi_\mu(x, z) := \inf\{l(x) - l(z) : l \in F_\mu(x)\}. \tag{9}$$

Из (Levin, 1999, Theorem 5.1) следует, что мера $\mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ оптимальна тогда и только тогда, когда отображение F_μ *L-циклически монотонно*, т.е. для каждого натурального числа p и каждого цикла $x^1,\ldots, x^p$, $x^{p+1} = x^1$ в $\mathrm{dom}\, F_\mu$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{p} (l_k x^k) - l_k(x^{k+1})) \geq 0,$$

каковы бы ни были $l_k = -c(\cdot, y_k) \in F_\mu(x^k)$, $k = 1,..., p$. С другой стороны, как следует из (Levin, 1999, Theorem 2.1), для L-циклической монотонности F_μ необходима и достаточна непустота $Q_0(\varphi_\mu)$. Получаем следующий критерий оптимальности.

Теорема 6 (Levin, 2004, Theorem 2.1). *Мера* $\mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ *является оптимальным решением ЗМК с функцией стоимости* $c(x, y)$ *и маргинальными мерами* σ_1 *и* σ_2 *тогда и только тогда, когда непусто множество* $Q_0(\varphi_\mu)$.

Заметим, что для непрерывного отображения $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ и $\mu = \mu_f$ отображение F_μ однозначно и дается равенством $F_\mu(x) = -c(\cdot, f(x))$ на $Z = spt(\sigma_1)$; в этом случае функция $\varphi_\mu(z^1, z^2)$ превращается в

$$\varphi^f(z^1, z^2) := c(z^2, f(z^1)) - c(z^1, f(z^1)), \tag{10}$$

и мы получаем такое следствие теоремы 6.

Следствие 3. Если $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ непрерывно, то μ_f является оптимальным решением ЗМК (а f – оптимальным решением соответствующей ЗМ) тогда и только тогда, когда $Q_0(\varphi^f)$ непусто.

Таким образом, оптимальность данной меры $\mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ в ЗМК или данного отображения $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ в ЗМ эквивалентна непустоте множества $Q_0(\varphi)$ для некоторой специальной вспомогательной функции стоимости (φ_μ или φ^f) на $Z \times Z$. Предположим для простоты, что $spt(\sigma_1) = X$. Тогда при неограничительных условиях гладкости на исходную функцию стоимости $c(x, y)$ и отображение $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ связанная с ними вспомогательная функция стоимости φ^f на $X \times X$ является гладкой, и имеет место одно из двух утверждений: 1) $Q_0(\varphi^f)$ пусто; 2) $Q_0(\varphi^f)$ с точностью до постоянного слагаемого состоит из единственной функции $u_0(x)$ ($Q_0(\varphi^f) = \{u_0(x) + \mathbf{R}\}$), удовлетворяющей уравнению

$$\nabla u_0(x) = \nabla_x \varphi^f(x, z)|_{z=x}. \tag{11}$$

Очевидно, для функции $g^x(z) := u_0(z) + \varphi^f(x, z)$ имеет место эквивалентность

$$u_0 \in Q_0(\varphi^f) \Leftrightarrow g^x(x) = \min\{g^x(z) : z \in X\} \quad \forall x \in X. \tag{12}$$

Учитывая (11), можно выписать условия второго порядка (отдельно, необходимые и достаточные) для минимума функции $g^x(z)$ при $z = x$, а значит, и для справедливости 2). Для некоторых конкретных f и c необходимые условия смыкаются с достаточными, и при их выполнении f оказывается единственным (с точностью до значений на множестве нулевой меры) оптимальным решением задачи Монжа, а μ_f – единственным оптимальным решением соответствующей задачи Монжа–Канторовича. Единственность здесь следует из теоремы 5 или другого аналогичного результата (см. (Levin, 2004, Theorem 1.4)). Подробнее см. (Levin, 1999; Левин, 2002; Левин, 2003; Левин, 2004; Levin, 2004).

Для разрывного отображения f носителем меры μ_f является замыкание множества $\{(z, f(z)) : z \in spt(\sigma_1)\}$. В некоторых случаях следствие 3 и его обобщения, вытекающие из теоремы 6, позволяют находить точные оптимальные решения задач Монжа и Монжа–Канторовича; см. (Левин, 2003; Levin, 2004; Левин, 2004a). В (Левин, 2004a) (см. также (Levin, 2004)) для $n = 2$ и нескольких классических ЗМ, где функцией стоимости $c(x, y)$ служит эвклидово расстояние (или квадрат расстояния) между точками x и y, а σ_1 и σ_2, суть меры Лебега на двух геометрических фигурах равной площади, получены точные оптимальные решения ЗМ, являющиеся кусочно-изометрическими отображениями специального вида, причем в случае $c(x, y) = \|x - y\|^2$ (или $c(x, y) = -\|x - y\|^2$) имеет место единственность. В частности, точные оптимальные решения ЗМ получены для $c(x, y) = \|x - y\|$ и мер Лебега на квадратах (равносторонних треугольниках) с общим центром, полученных один из другого вращением на 45° (на 60°); для этой функции стоимости единственности нет (Левин, 2004a).

Замечание 3. Нахождение точных оптимальных решений для конкретных ЗМК (и задач Монжа) является весьма трудным делом, требующим большой изощренности в изобретении различных специальных приемов. Известно несколько примеров построения точных решений ЗМК для $n = 1$ (Uckelmann; McCann; Плахов). Наш метод является более систематическим и позволяет находить точные решения и в многомерном случае.

3. ТЕОРИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

3.1. Замкнутые предпорядки и непрерывные функции полезности. Важный класс отношений предпочтения составляют предпорядки. *Предпорядком* на множестве альтернатив X называется бинарное отношение $\preceq$, удовлетворяющее условиям рефлексивности ($x \preceq x\ \forall x \in X$) и транзитивности ($x \preceq y,\ y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$). Предпорядок называется *тотальным* (иногда также используются как синонимы термины *полный* и *линейный*), если любая пара альтернатив (x, y) сравнима, т.е. выполняется, по крайней мере, одно из соотношений $x \preceq y$ и $y \preceq x$.

С каждым предпорядком $\preceq$ можно связать два бинарных отношения: строгий предпорядок $\prec$ и отношение равноценности (или безразличия) ~, определяемые следующим образом:

$$x \preceq y \Leftrightarrow (x \preceq y) \wedge \neg (y \preceq x),$$

$$x \sim y \Leftrightarrow (x \preceq y) \wedge (y \preceq x).$$

Функцией полезности предпорядка $\preceq$ называется вещественная функция $u(x)$, удовлетворяющая условиям строгой монотонности:

$$x \preceq y \Rightarrow u(x) \le u(y), \tag{13}$$

$$x \prec y \Rightarrow u(x) < u(y). \tag{14}$$

Из (13) следует, что каждая функция полезности удовлетворяет также условию: $x \sim y \Rightarrow u(x) = u(y)$. Пара условий (13), (14) равносильна единственному условию

$$x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \le u(y)$$

тогда и только тогда, когда предпорядок $\preceq$ тотален.

Предпорядок $\preceq$ на топологическом пространстве X называется *замкнутым*, если его график $gr(\preceq) := \{(x, y) : x \preceq y\}$ есть замкнутое подмножество в $X \times X$.

Одним из фундаментальных результатов математической теории полезности (и математической экономики в целом) является теорема Дебре (Debreu, 1954, 1964), утверждающая существование непрерывной функции полезности для каждого замкнутого тотального предпорядка на сепарабельном метризуемом пространстве. Ниже (а также в (Левин, 1981, 1983а; Levin, 1986, 1990)) приведены некоторые обобщения этой теоремы на предпорядки, не являющиеся тотальными. В основе нашего подхода лежит использование специальной функции стоимости $c(x, y)$, обращающейся в нуль на графике предпорядка, удовлетворяющей неравенству треугольника и обладающей подходящими свойствами (полу)непрерывности. С помощью теоремы двойственности для ЗМК мы получаем представление

$$gr(\preceq) = \{(x, y) : u(x) \le u(y) \quad \forall u \in H\}, \tag{15}$$

где $H \subseteq Q(c)$. Более того, иногда удается выбрать счетное множество $H = \{u_n : n = 1, 2,...\}$, и в таком случае

$$u_0(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} u_n(x)(1 + |u_n(x)|)^{-1}$$

оказывается функцией полезности для $\preceq$ с требуемыми свойствами непрерывности.

Теорема 7 (Кирута, Рубинов, Яновская, 1980; Левин, 1981). *Пусть $\preceq$ – замкнутый предпорядок на метризуемом компактном пространстве X. Тогда его график допускает представление* (15) *со счетным H, следовательно, существует непрерывная функция полезности для $\preceq$.*

Доказательство[3]. Рассмотрим на $X \times X$ функцию стоимости

$$c(x,\ y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \preceq y; \\ +\infty, & \text{если нет.} \end{cases} \tag{16}$$

В силу транзитивности и рефлексивности предпорядка эта функция удовлетворяет неравенству

[3] Это доказательство принадлежит автору (Левин, 1981). Доказательство Рубинова (Кирута, Рубинов, Яновская, 1980) основано на другой идее.

треугольника и обращается в нуль на диагонали. Кроме того, она полунепрерывна снизу в силу замкнутости $\preceq$. Тогда, согласно теореме 1, $Q(c)$ непусто и справедливо представление (3) (см. следствия 1 и 2); следовательно,

$$gr(\preceq) = \{(x,\ y) : u(x) \le u(y) \quad \forall u \in Q(c)\}.$$

Поскольку банахово пространство $C(X)$ сепарабельно, мы можем выбрать счетное плотное подмножество H в $Q(c)$. Тогда справедливо представление (15) с этим H, откуда следует существование непрерывной функции полезности.

Теорема 8 (Levin, 1986, Theorem 4). *Пусть* $\preceq$ *– предпорядок на сепарабельном метризуемом пространстве* X*. Следующие утверждения равносильны:*

а) имеет место представление (15) со счетным множеством $H \subset C^b(X)$*;*

б) предпорядок $\preceq$ *является ограничением на* X *некоторого замкнутого предпорядка* $\preceq_1$ *на* X_1*, где* X_1 *– метризуемая компактификация* X*.*

При выполнении этих равносильных утверждений существует непрерывная функция полезности для $\preceq$*.*

Теорема 9 (Левин, 1983а, теорема 2; Levin, 1990, Theorem 9.11). *Для каждого замкнутого предпорядка на сепарабельном метризуемом локально компактном пространстве существует непрерывная функция полезности.*

Имеет место следующая теорема о продолжении.

Теорема 10 (Levin, 1990, Lemma 9.14). *Пусть* $\preceq$ *– замкнутый предпорядок на компактном пространстве* X*,* F *– замкнутое подмножество* X *и* $v(x)$ *– неубывающая (относительно ограничения* $\preceq$ *на* F*) непрерывная функция на* F*. Тогда существует неубывающая относительно* $\preceq$ *функция* $u \in C(X)$*, сужение которой на* F *есть* $v(x)$ *и* $\min u(X) = \min v(F)$, $\max u(X) = \max v(F)$.

Теорема 9 выводится из теорем 7 и 10; подробности см. в (Levin, 1990).

Теорема 11 (Левин, 1985, теорема 1; Levin, 1986, Theorem 5). *Пусть* $\preceq$ *– предпорядок на метрическом пространстве* (X, d), $h : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *– возрастающая непрерывная функция,* $h(0) = 0$. *Рассмотрим на* $X \times X$ *функцию стоимости*

$$c(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \preceq y; \\ h(d(x, y)), \text{ если нет.} \end{cases} \tag{17}$$

Следующие утверждения равносильны:

а) $gr(\preceq)$ *допускает представление* (15) *с* $H \subset C(X)$, *и* $|u(x) - u(y)| \le h(d(x, y))$ *для всех* $u \in H$, $(x, y) \in X \times X$*;*

б) если $(x, y) \notin gr(\preceq)$*, то* $c_*(x, y) > 0$.

Если X *сепарабельно и выполнены равносильные утверждения а), б), то для* $\preceq$ *существует равномерно непрерывная функция полезности* $u_0(x)$ *такая, что* $|u_0(x) - u_0(y)| \le h(d(x, y))$ *при всех* x, y *из* X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как редуцированная функция стоимости c_* удовлетворяет неравенству треугольника и $0 \le c_*(x, y) \le h(d(x, y))$, то она непрерывна на $X \times X$.

а) ⇒ *б*): из представления (15) вытекает $u(x) - u(y) \le c(x, y) \quad \forall u \in H$, $(x, y) \in X \times X$; тогда $u(x) - u(y) \le c_*(x, y) \quad \forall u \in H$, $(x, y) \in X \times X$. Если $(x, y) \notin gr(\preceq)$, то, ввиду (15), найдется функция $u \in H$, для которой $u(x) > u(y)$, следовательно, $c_*(x, y) \ge u(x) - u(y) > 0$.

б) ⇒ *а*): возьмем $H = \{u_z : z \in X\}$, где $u_z(x) = c_*(x, z)$. Тогда $u_z(x) - u_z(y) = c_*(x, z) - c_*(y, z) \le$ $\le c_*(x, y) = 0$, следовательно, $u_z(x) \le u_z(y) \quad \forall u_z \in H$.

Если $(x, y) \notin gr(\preceq)$, то $u_y(x) - u_y(y) = c_*(x, y) > 0$, и представление (15) полностью доказано.

Равносильность утверждений *а*) и *б*), таким образом, установлена.

Предположим теперь, что последовательность (x_k) плотна в X и справедливы утверждения *а*) и *б*). Используя непрерывность c_*, получаем

$$gr(\preceq) = \{(x, y) : c_*(x, z) \le c_*(y, z) \;\; \forall z \in X\} =$$
$$= \{(x, y) : c_*(x, x_k) \le c_*(y, x_k), \;\; k = 1, 2, ...\} =$$
$$= \left\{(x, y): \frac{c_*(x, x_k)}{1+c_*(x, x_k)} \le \frac{c_*(y, x_k)}{1+c_*(y, x_k)}, k = 1, 2, \ldots\right\},$$

т.е. представление (15) выполняется для счетного множества

$$H = \{c_*(\cdot, x_k)(1 + c_*(\cdot, x_k))^{-1} : k = 1, 2, ...\} \subset C^b(X).$$

Тогда

$$u_0(x) := \sum_1^\infty \frac{c_*(x, x_k)}{2^k(1+c_*(x, x_k))} -$$

требуемая функция полезности.

Пусть X – сепарабельное метрическое пространство с ограниченной метрикой d, $\mathcal{F}(X)$ – пространство всех замкнутых подмножеств X с расстоянием Хаусдорфа

$$d_H(A, B) := \max(\inf\{\alpha : A^\alpha \supseteq B\}, \;\; \inf\{\alpha : B^\alpha \supseteq A\}),$$

где

$$F^\alpha := \{x \in X : \mathrm{dist}(x, F) < \alpha\} \;\; \forall \mathcal{F} \in F(X), \;\; \alpha > 0,$$
$$\mathrm{dist}(x, F) := \inf\{d(x, y) : y \in F\}.$$

Так как X сепарабельно, то существует счетное подсемейство $\{F_n\}$ в $\mathcal{F}(X)$ такое, что каждое множество $F \in \mathcal{F}(X)$ представимо в виде $F = \bigcap_{n \in N(F)} F_n$, где $N(F) := \{n : F \subseteq F_n\}$. Легко проверить, что функция φ на $\mathcal{F}(X)$:

$$\varphi(F) := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \inf\{\alpha > 0 : F_\alpha^n \supseteq F\}, \tag{18}$$

обладает следующими свойствами (Levin, 1986, Theorem 6):

а) $|\varphi(A) - \varphi(B)| \le d_H(A, B)$,

б) $A \subset B \Rightarrow \varphi(A) < \varphi(B)$,

в) $\varphi(A \cup B) \le \varphi(A) + \varphi(B)$.

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 12 (Левин, 1985, следствие теоремы 3; Levin, 1986, Corollary 2). *Пусть $\preceq$ – замкнутый предпорядок на X, и отображение a: $(X, d) \to (\mathcal{F}(X), d_H)$, $a(x) := \{y \in X : y \preceq x\}$, непрерывно. Тогда функция $u(x) := \varphi(a(x))$, $x \in X$, где φ определена равенством* (18), *является непрерывной функцией полезности для $\preceq$. Если, к тому же, $d_H(a(x), a(y)) \le d(x, y)$ для всех x, y из X, то функция полезности $u(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $L \le 1$.*

Обратимся теперь к следующей проблеме. Предположим, что задано некоторое топологическое пространство параметров Ω, представляющее различные типы потребителей, и для каждого $\omega \in \Omega$ определен замкнутый предпорядок $\preceq_\omega$. Когда существует *непрерывная полезность*, т.е. вещественная функция $u(\omega, x)$, непрерывная по совокупности переменных ω и x, и такая, что $u(\omega, \cdot)$ является функцией полезности $\preceq_\omega$ для каждого ω из Ω? Этот вопрос естественно возникает в различных разделах математической экономики. В случае тотальных предпорядков $\preceq_\omega$ некоторые достаточные условия существования непрерывной полезности были получены рядом авторов (Mas-Colele; Mount, Reiter; Neucfeind; Chishilnisky). Полное решение этой проблемы дано в работах (Левин, 1983б; Levin, 1990)[4]. Заметим, что в случае, когда все

[4] См. также (Levin, 2000).

предпорядки $\preceq_\omega$, $\omega \in \Omega$, являются тотальными, полученные нами условия существования непрерывной полезности не только достаточны, но и необходимы (см. следствие 4). Приведем соответствующие результаты.

Теорема 13 (Левин, 1983а, теорема 1; Levin, 1990, Theorem 9.12; Levin, 2000, Theorem 3.1). *Пусть Ω и X – метризуемые топологические пространства, а X, к тому же, сепарабельно и локально компактно. Предположим также, что для каждого $\omega \in \Omega$ задан предпорядок $\preceq_\omega$ на X, и при этом множество $\{(\omega, x, y) : x \preceq_\omega y\}$ замкнуто в $\Omega \times X \times X$. Тогда существует непрерывная полезность $u : \Omega \times X \to [0, 1]$.*

Эта теорема впервые доказана в (Левин, 1983а) (небольшой пробел в этом доказательстве устранен в (Левин, 1985), см. также (Levin, 2000, Theorem 3.1)). В доказательстве существенно используются теоремы 9 и 10. Как отмечено в (Левин, 1983а), в частном случае, когда пространство параметров Ω сепарабельно и локально компактно, теорема является прямым следствием теоремы 9 для предпорядка $\preceq$ на $\Omega \times X$, определяемого соглашением: $(\omega_1, x_1) \preceq (\omega_2, x_2) \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2, x_1 \preceq_{\omega_1} x_2$. (Формулировка теоремы 13 и ее доказательство для указанного частного случая приведены с ссылкой на нашу работу (Левин, 1983а) в книге (Bridges, Mehta, 1995, § 8.3 "Levin's theorem").)

Следствие 4 (Левин, 1983а, следствие 1; Levin, 1990, Corollary 9.1; Levin, 2000, Corollary 3.1). Предположим, что:

i) Ω и X – такие же, как в теореме 13;

ii) для каждого $\omega \in \Omega$ предпорядок $\preceq_\omega$ определен на непустом подмножестве $\Gamma(\omega) \subseteq X$;

iii) множество $\Phi := \{(\omega, x) : x \in \Gamma(\omega)\}$ замкнуто в $\Omega \times X$.

Рассмотрим два утверждения:

а) множество $M := \{(\omega, x, y): x \in \Gamma(\omega), y \in \Gamma(\omega), x \preceq_\omega y\}$ замкнуто в $\Omega \times X \times X$;

б) существует непрерывная функция $u : \Phi \to [0, 1]$ такая, что $u(\omega, \cdot)$ является функцией полезности $\preceq_\omega$ для всех $\omega \in \Omega$.

Тогда а) $\Rightarrow$ б), а если все $\preceq_\omega$ суть тотальные предпорядки, то а) $\Leftrightarrow$ б).

Пусть P обозначает множество всех замкнутых предпорядков на сепарабельном метризуемом локально компактном пространстве X. Отождествляя предпорядок $\preceq \in P$ с его графиком в $X \times X$, мы рассмотрим на P топологию t, индуцированную экспоненциальной топологией на пространстве замкнутых подмножеств одноточечной компактификации $X \times X$ (определение и свойства экспоненциальной топологии см., например, в (Куратовский, 1966)). Очевидно, (P, t) – метризуемое пространство. Применяя теорему 13 к $\Omega = (P, t)$, получаем такое следствие.

Следствие 5 (теорема об универсальной полезности; см. (Левин, 1983а, следствие 2; Levin, 1990, Corollary 9.2; Levin, 2000, Corollary 3.2). Существует непрерывная функция u : $(P, t) \times X \to [0, 1]$ такая, что для каждого предпорядка $\preceq$ из P $u(\preceq, \cdot)$ есть его функция полезности.

3.2. Функционально замкнутые предпорядки и сильное стохастическое доминирование. Предпорядок $\preceq$ на вполне регулярном пространстве X называется *функционально замкнутым*, если для него справедливо представление (15), в котором H – непустое подмножество $C(X)$. Очевидно, функционально замкнутый предпорядок замкнут. Как следует из доказательства теоремы 9 (см. (Левин, 1983а; Levin, 1990)), каждый замкнутый предпорядок на сепарабельном локально компактном метризуемом пространстве функционально замкнут. Класс функционально замкнутых предпорядков введен в (Левин, 1985).

Теорема 14 (Levin, 1986, Theorem 3). *Пусть $\preceq$ – предпорядок на вполне регулярном пространстве X. Следующие утверждения равносильны:*

а) $\preceq$ функционально замкнут;

б) $\preceq$ есть ограничение на X некоторого замкнутого предпорядка на βX (βX обозначает компактификацию Стоуна–Чеха пространства X);

в) (теорема о продолжении) для каждого компактного множества $F \subset X$ и каждой неубывающей (относительно ограничения $\preceq$ на F) функции $v \in C(F)$ существует неубывающая *(относительно $\preceq$) функция $u \in C^b(X)$, являющаяся продолжением $v(x)$ на X и удовлетворяющая условиям:* $\min u(X) = \min v(F)$, $\max u(X) = \max v(F)$*;*

г) (теорема об отделимости) пусть F_1 и F_0 – компактные множества в X, и $(F_1 \times F_0) \cap \cap\, gr(\preceq) = \varnothing$, тогда найдется неубывающая непрерывная функция $u : X \to [0, 1]$, равная 1 на F_1 и 0 на F_0.

Следствие 6 (Levin, 2000, Corollary 4.1). Каждый замкнутый предпорядок на компактном пространстве функционально замкнут.

Рассмотрим теперь связь между функционально замкнутыми и стохастическими предпорядками. Очевидно, каждый функционально замкнутый предпорядок допускает представление (15) с $H = H^b(\preceq)$, где $H^b(\preceq)$ – конус всех неубывающих (относительно $\preceq$) функций из $C^b(X)$. Более того,

$$H^b(\preceq) = Q(c), \tag{19}$$

где функция стоимости $c(x, y)$ определена равенством (16).

Обозначим через $M(X)$ множество регулярных борелевских вероятностных мер на X, интерпретируемых как лотереи с исходами в X. Пусть $\preceq$ – замкнутый предпорядок на X. Мы связываем с ним предпорядок $\preceq_*$ на $M(X)$, называемый далее *сильным стохастическим доминированием* и определяемый для σ_1 и σ_2 из $M(X)$ соглашением, что $\sigma_1 \preceq_* \sigma_2$ тогда и только тогда, когда

$$\int_X u(x)\sigma_1(dx) \le \int_X u(x)\sigma_2(dx) \quad \forall u \in H^b(\preceq).$$

Если $(X, \preceq)$ есть **R** (или сегмент в **R**) с естественным порядком $\le$, то $\preceq_*$ совпадает с обычным стохастическим доминированием $\preceq_{SD}$ (см., например, (Маршалл, Олкин, 1983)),

$$\sigma_1 \preceq_{SD} \sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_1\{y : y \le x\} \ge \sigma_2\{y : y \le x\} \quad \forall x \in X.$$

Теорема 15 (Levin, 1990, Theorem 9.13). *Предположим, что X гомеоморфно универсально измеримому подмножеству некоторого компакта, и пусть $\preceq$ – замкнутый предпорядок на X. Тогда:*

I) если $\preceq$ функционально замкнут и $\sigma_1 \in M(X)$, $\sigma_2 \in M(X)$,, то следующие утверждения равносильны:

а) $\sigma_1 \preceq_* \sigma_2$;

б) существует мера $\mu \in M(X \times X)$ такая, что $\pi_1\mu = \sigma_1$, $\pi_2\mu = \sigma_2$ и $spt(\mu) \subseteq gr(\preceq)$ (здесь $spt(\mu)$ – носитель меры μ);

II) если для всех σ_1 и σ_2 из $M(X)$ утверждения а) и б) равносильны, то предпорядок $\preceq$ функционально замкнут.

Доказательство опирается на неметризуемую версию теоремы двойственности 2 с учетом равенства (19) и того факта, что для функции стоимости (16) справедливы соотношения

$$\sigma_1 \preceq_* \sigma_2 \Longleftrightarrow B(c, \sigma_1 - \sigma_2) = 0 \text{ и } c(\mu) = 0 \Longleftrightarrow spt(\mu) \subseteq gr(\preceq).$$

Подробнее см. (Levin, 1990).

Следствие 7. Если $\preceq$ функционально замкнут, то $x \preceq y \Longleftrightarrow \varepsilon_x \preceq_* \varepsilon_y$.

Обозначим через $H^b(\preceq, \mathbf{B}(X))$ конус всех неубывающих (относительно $\preceq$) ограниченных борелевских функций на X.

Теорема 16 (Levin, 1990, Theorem 9.14). *Пусть пространство X такое же, как в теореме* 15, *$\preceq$ – замкнутый предпорядок на X, σ_1 и σ_2 принадлежат $M(X)$. Следующие утверждения равносильны:*

а) $\displaystyle\int_X u(x)\sigma_1(dx) \le \int_X u(x)\sigma_2(dx) \quad \forall u \in H^b(\preceq, \mathbf{B}(X))$;

б) *найдется мера $\mu \in M(X \times X)$ такая, что $\pi_1\mu = \sigma_1$, $\pi_2\mu = \sigma_2$* и $spt(\mu) \subseteq gr(\preceq)$.

Теорема 16 обобщает аналогичный результат (Kamae, Krengel, O'Brien, 1977), относящийся к случаю, когда X – польское пространство (см. также (Маршалл, Олкин, 1983) для $X = \mathbf{R}^n$ и (Preston, 1974) для конечного X).

Заметим, что если X – вполне регулярное, но не нормальное, топологическое пространство, то на нем существует замкнутый предпорядок, не являющийся функционально замкнутым (Levin, 1990).

В заключение этого пункта приведем две аксиоматические характеризации сильного стохастического доминирования. Будем считать для простоты, что X – компакт, и рассмотрим на пространстве лотерей $M(X)$ слабую* топологию. Тогда $M(X)$ – компакт, и можно говорить о замкнутых предпорядках на нем. Обозначим через $\mathcal{F}(X)^{\preceq}$ класс всех неубывающих замкнутых множеств в X. (Множество A называется неубывающим, если $x \in A, x \preceq y \Rightarrow y \in A$.) Пусть $\preceq'$ – некоторый замкнутый предпорядок на пространстве лотерей $M(X)$, $\sigma_1 \in M(X)$, $\sigma_2 \in M(X)$. Сформулируем несколько аксиом, связывающих предпорядок $\preceq'$ на пространстве лотерей $M(X)$ с исходным предпорядком $\preceq$ на пространстве альтернатив X.

A1. Если $\sigma_1 \preceq' \sigma_2$, то $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma) \preceq' \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma) \quad \forall \sigma \in M(X)$.

A2. Если $y \preceq y$, то $\varepsilon_x \preceq' \varepsilon_y \quad \forall (x, y) \in X \times (X)$.

A3. Если $\sigma_1 \preceq' \sigma_2$, то $\sigma_1 F \le \sigma_2 F \quad \forall F \in \mathcal{F}(X)^{\preceq}$.

Предпорядок $\preceq'$ на $M(X)$ называется *выпуклым*, если $gr(\preceq')$ – выпуклое множество в $M(X) \times M(X)$.

Теорема 17 (Levin, 2000, Theorem 5.1, Corollary 5.1).

I. Сильное стохастическое доминирование удовлетворяет аксиомам $A1$–$A3$ и является единственным замкнутым предпорядком на M(X), удовлетворяющим этим аксиомам.

II. Сильное стохастическое доминирование является единственным выпуклым замкнутым предпорядком на M(X), удовлетворяющим аксиомам $A2$ и $A3$.

3.3. Нетранзитивные отношения предпочтения, допускающие липшицевы и непрерывные функции полезности. В этом пункте (см. также (Levin, 1991)) в качестве отношений предпочтения рассматриваются произвольные многозначные отображения $R: X \to 2^X$ на пространстве альтернатив X или, что равносильно, бинарные отношения R, $xRy \Longleftrightarrow y \in R(x)$. Каждое такое отображение называется далее *предпочтением*: мы говорим, что y предпочтительнее x, если $y \in R(x)$. Предпорядок $\preceq$ отвечает предпочтению $R(x) := \{y : x \preceq y\}$, но для произвольного предпочтения соответствующее бинарное отношение не обязано быть ни транзитивным, ни рефлексивным.

С каждым предпочтением R связывают строгое предпочтение R_s: $y \in R_s(x) \Longleftrightarrow y \in R(x)$, $x \notin R(y)$. Вещественная функция $u(x)$ на X называется *R-изотонной*, если $y \in R(x) \Rightarrow u(x) \le u(y)$. R-изотонная функция, для которой $y \in R_s(x) \Rightarrow u(x) < u(y)$, называется *функцией полезности* предпочтения R.

Далее X – сепарабельное метризуемое топологическое пространство, d – метрика на X, согласующаяся с данной топологией. Вещественная функция $u(x)$ называется *d-липшицевой*, если $|u(x) - u(y)| \le d(x, y)$ для всех x, y из X.

Наша ближайшая цель – охарактеризовать предпочтения R, которые допускают d-липшицевы функции полезности.

Прежде всего заметим, что функция $u(x)$ является одновременно R-изотонной и d-липшицевой тогда и только тогда, когда $u \in Q(c, C(X))$, где

$$c(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } \; y \in R(x); \\ d(x, y), \text{ если нет}, \end{cases} \tag{20}$$

$$Q(c, C(X)) := \{u \in C(X) : u(x) - u(y) \le c(x, y) \quad \forall (x, y) \in X \times X\}. \tag{21}$$

Далее, на X определен функционально замкнутый предпорядок $\preceq$,

$$x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \le u(y) \; \forall u \in Q(c,\, C(X)),$$

и так как все $u \in Q(c,\, C(X))$ R-изотонны, то справедлива импликация $y \in R(x) \Rightarrow x \preceq y$. Более того, имеет место эквивалентность $x \preceq y \Leftrightarrow c_*(x, y) = 0$, и тогда из теоремы 11 вытекает существование d-липшицевой функции полезности для $\preceq$. Она будет также и функцией полезности для R при выполнении условия:

$$y \in R_s(x) \Rightarrow x \prec y. \tag{22}$$

Условие (22) может быть выражено в терминах R и d, и его справедливость не только достаточна, но и необходима для существования d-липшицевой функции полезности предпочтения R.

Чтобы реализовать эту схему, рассмотрим множество $T(y, x)$ всех цепочек $\tau = (z_0 \to z_1 \to \ldots \to z_n)$, где z_i суть элементы X, $z_0 = y$, $z_n = x$, $n = 1, 2, \ldots$ Цепочка τ называется R-неубывающей, если $z_i \in R(z_{i-1})$ либо $z_i = z_{i-1}$ для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Определим (dR)-оценку цепочки τ

$$V_{d,\,R}(\tau) := \sum_{i=0}^{n} c(z_{i-1}, z_i).$$

Другими словами, $V_{d,\,R}(\tau)$ есть суммарная плата за движение из y в x по цепочке τ при условии, что переход от z_{i-1} к z_i бесплатен, если z_i предпочтительнее z_{i-1}, и плата за него равна расстоянию между z_{i-1} и z_i в противном случае. Очевидно, цепочка τ является R-неубывающей тогда и только тогда, когда ее оценка равна нулю.

Обозначим через $T_R(y, x)$ подмножество $T(y, x)$, состоящее из цепочек вида

$$\tau = (y_0 \to x_1 \to y_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n \to y_n \to x_{n+1}),$$

где

$$y_k \in R(x_k),\; k = 1, \ldots, n,\; y_0 = y,\; x_{n+1} = x,\quad n = 1, 2, \ldots$$

Такие цепочки будем называть R-регулярными. Для каждой R-регулярной цепочки τ имеем

$$V_{d,\,R}(\tau) = \sum_{i=0}^{n} d(y_i, x_{i+1}).$$

Как показано в (Levin, 1991), справедливы равенства

$$c_*(x, y) = \inf_{\tau \in T(x,\, y)} V_{d,\,R}(\tau) = \inf_{\tau \in T_R(x,\, y)} V_{d,\,R}(\tau),$$

и условие (22) может быть переписано в виде

$$y \in R_s(x) \Rightarrow \inf_{\tau \in T(y,\, x)} V_{d,\,R}(\tau) = 0. \tag{23}$$

Очевидно, если R допускает какую-нибудь функцию полезности, то при любых $y \in R_s(x)$ невозможно найти R-неубывающую цепочку, ведущую из y в x. Условие (23) является более сильным. Оно утверждает, что если y строго предпочтительнее x (т.е. $y \in R_s(x)$), то не существует цепочки со сколь угодно малой оценкой, ведущей из y в x.

Теорема 18 (Levin, 1991, Theorem 1). *Следующие утверждения равносильны:*

а) существует d-липшицева функция полезности предпочтения R;

б) если y строго предпочтительнее x ($y \in R_s(x)$), то найдется число $\delta(y, x) > 0$ такое, что $V_{d,\,R}(\tau) \ge \delta(y, x)$ для любой цепочки τ, ведущей из y в x;

в) если y строго предпочтительнее x, то найдется число $\delta(y, x) > 0$ такое, что $V_{d,\,R}(\tau) \ge \delta(y, x)$ для любой регулярной цепочки τ, ведущей из y в x.

Заметим теперь, что всякая непрерывная функция $u(x)$ является d_u-липшицевой относительно метрики $d_u(x, y) := d(x, y) + |u(x) - u(y)|$, и так как, в силу непрерывности $u(x)$, эта метрика согласуется с топологией в X, условия существования непрерывной функции полезности могут быть выведены из теоремы 18. Более того, переходя от $d(x, y)$ и $u(x)$ к $d'(x,y):=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ и $u'(x):=\dfrac{u(x)}{1+d(x,y)\,|}$, можно считать метрику d_u (и функцию полезности) ограниченными.

Теорема 19 (ср. (Levin, 1991, Corollary 1)). *Обозначим через* $\mathbf{D}$ *множество метрик, согласующихся с топологией X, и через* $\mathbf{D}^b$ *его подмножество, состоящее из ограниченных метрик. Следующие утверждения равносильны:*

а) существует непрерывная функция полезности предпочтения R;

б) найдется метрика $d \in \mathbf{D}$, *для которой справедливо утверждение б) теоремы* 18*;*

в) найдется метрика $d \in \mathbf{D}$, *для которой справедливо утверждение в) теоремы* 18*;*

г) найдется метрика $d \in \mathbf{D}^b$, *для которой справедливо утверждение б) теоремы* 18*;*

д) найдется метрика $d \in \mathbf{D}^b$, *для которой справедливо утверждение в) теоремы* 18.

4. ЗАДАЧИ РАЦИОНАЛЬНОГО ВЫБОРА

Различным аспектам (как правило, не топологическим) теории рационального выбора посвящена огромная литература. В этом разделе (см. также (Levin, 1991; Левин, 2004b; Levin, 2005)) изучаются условия рационализируемости выбора посредством функций полезности, обладающих свойствами непрерывности. Получено решение двух задач рационального выбора (в весьма общей абстрактной постановке и в рамках теории спроса). Ответ дается в терминах, связанных с общей задачей Монжа–Канторовича, и представляет собой некоторое усиление сильной аксиомы выявленного предпочтения и обобщение непараметрического метода Африата–Вэриана.

4.1. Абстрактная постановка задачи рационального выбора. Пусть $\mathbf{M}$ – семейство непустых подмножеств X, объединением которых служит все X. Предположим, что в каждом $M \in \mathbf{M}$ выбрано некоторое подмножество $\varphi(M)$. Функция выбора называется *рациональной*, если найдется вещественная функция $u(x)$ на X такая, что

$$\varphi(M) = \left\{x \in M : u(x) = \max_{y \in M} u(y)\right\} \forall M \in \mathbf{M}.$$

В таком случае также говорят, что $u(x)$ есть функция полезности, *рационализирующая* выбор φ.

Теорема 20 (Levin, 1991, Corollary 2). *Пусть (X, d) – сепарабельное метрическое пространство,* $\mathbf{M}$ *– семейство непустых подмножеств в нем, объединением которых служит все X, и* φ *– функция выбора на* $\mathbf{M}$. *Следующие утверждения равносильны:*

а) существует липшицева функция полезности, рационализирующая выбор φ*;*

б) фиксируем как угодно $M \in \mathbf{M}$ *и элементы* $x \in M \backslash \varphi(M)$ *и* $y \in \varphi(M)$; *тогда найдется* $\varepsilon = \varepsilon(M, x, y) > 0$ *такое, что для любых натурального числа n, множеств* $M_1, \ldots, M_n$ *из* $\mathbf{M}$ *и элементов* $x_k \in M_k$, $y_k \in \varphi(M_k)$, $k = 1, \ldots, n$, *справедливо неравенство* $\sum_{k=1}^{n+1} d(y_{k-1}, x_k) \geq \varepsilon$, *где* $y_0 = y$, $x_{n+1} = x$.

Замечание 4. Очевидно, *б*) влечет за собой следующий вид *сильной аксиомы выявленного предпочтения*: в X не существует цепочки $z_0 \to z_1 \to \ldots \to z_n$ с $z_0 \in \varphi(M)$, $z_n \in M \backslash \varphi(M)$, $z_k \in M_{k+1} \cap \varphi(M_k)$ (k = 0,1,...,n), где $M_0 = M_{n+1} = M$, $M_1, \ldots, M_n \in \mathbf{M}$.

Теорема 20 вытекает из теоремы 18 для предпочтения $R(x) := \{y\text{: } \exists M \in \mathbf{M}\text{: } x \in M, y \in \varphi(M)\}$, если проверить, что $y \in R_s(x) \Longleftrightarrow [\exists M \in M : x \in \mathbf{M} \backslash \varphi(M),\ y \in \varphi(M)]$. Подробности см. (Levin, 1991). Аналогично, следующий результат выводится из теоремы 19.

Теорема 21 (Levin, 1991, Corollary 3). *Пусть X – сепарабельное метризуемое пространство,* $\mathbf{M}$ *и* φ *– такие же, как в теореме* 20. *Следующие утверждения равносильны:*

а) существует непрерывная функция полезности, рационализирующая φ*;*

б) утверждение б) теоремы 20 выполнено для некоторой метрики $d \in \mathbf{D}^b$, *где* $\boldsymbol{D}^b$ *– множество ограниченных метрик, согласующихся с топологией X.*

4.2. Рациональный выбор в теории потребительского спроса. Пусть заданы: некоторое подмножество P в $\operatorname{int}\mathbf{R}_+^n$, называемое далее *множеством цен*, и функция $I: P \to (0, +\infty)$, показывающая доход потребителя при данных ценах. (Два важных частных случая функции дохода: доход, не зависящий от цен, $I(p) = 1$ и $I(p) = p\omega$, где $\omega \in \mathbf{R}_+^n$ – принадлежащий данному потребителю набор продуктов.) Множество $B(p) := \{q \in \mathbf{R}_+^n : pq \le I(p)\}$ называется *бюджетным множеством* потребителя при ценах p, а отображение $B : p \mapsto B(p)$ *бюджетным отображением*. Далее под *функцией спроса* понимается всякое отображение $f : P \to \mathbf{R}_+^n$, для которого $f(p) \in B(p) \cap \operatorname{int}\mathbf{R}_+^n$ при всех $p \in P$. Будем говорить, что функция полезности $U : \mathbf{R}_+^n \to \mathrm{R} \cup \{-\infty\}$ *рационализирует* спрос f, если $U(f(p)) \ge U(q)$ для всех $q \in B(p)$. Если при этом $U(f(p)) > U(q)$ для $q \in B(p) \setminus \{f(p)\}$, то мы говорим, что *$U$ строго рационализирует f.*

С каждой функцией $\lambda : P \to \mathbf{R}_+$ мы свяжем функцию стоимости c_λ на $P \times P$,

$$c_\lambda(p, p') := \lambda(p')(p'f(p) - I(p')). \qquad (24)$$

Пусть функция полезности U рационализирует спрос f. Будем говорить, что функция $\lambda : P \to \mathbf{R}_+$ *совместима* с U, если для любого $p \in P$ выполняются соотношения:

$$\lambda(p)(pf(p) - I(p)) = 0, \qquad (25)$$

$$U(f(p) \ge U(q) + \lambda(p)(I(p) - pq) \quad \forall q \in \mathbf{R}_+^n, \qquad (26)$$

т.е. (в случае вогнутой U) $\lambda(p)$ является множителем Лагранжа–Куна–Такера в задаче максимизации U на $B(p)$.

Функция на множестве цен $u(p) := \sup\{U(q) : q \in B(p)\}$, $p \in P$ называется *косвенной функцией полезности*, ассоциированной с U.

Напомним (см. Введение), что по аналогии с $Q(c_\lambda)$ можно рассмотреть множество ограничений абстрактного (не топологического) варианта двойственной ЗМК с фиксированной разностью маргинальных мер

$$Q_0(c_\lambda) = \{u \in \mathbf{R}^X : u(x) - u(y) \le c_\lambda(x, y) \; \forall (x, y) \in X \times X\}.$$

Теорема 22 (Levin, 2005, Theorem 2). *Пусть f – функция спроса; тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если функция полезности U: $\mathbf{R}_+^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ с* dom $U \supseteq f(P)$ *вогнута и рационализирует спрос f, то найдется функция λ: $P \to \mathbf{R}_+$, удовлетворяющая (25) при всех $p \in P$, и такая, что ассоциированная с U косвенная функция полезности $u(p) = U(f(p))$ принадлежит $Q_0(c_\lambda)$. В таком случае, $\lambda(p)p$ есть суперградиент U в $f(p)$:*

$$\lambda(p)p \in \partial' U(f(p)) \quad \forall p \in P. \qquad (27)$$

Если, к тому же, U строго рационализирует f, то справедлива импликация:

$$f(p') \in B(p) \setminus \{f(p)\} \Rightarrow u(p) > u(p'). \qquad (28)$$

2. *Если λ: $P \to \mathbf{R}_+$ удовлетворяет* (25)*, а $u \in Q_0(c_\lambda)$, то найдется неубывающая полунепрерывная сверху вогнутая функция $U : \mathbf{R}_+^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ такая, что* dom $U \supseteq f(P)$, *U рационализирует f, λ совместима с U, и $u(p)$ является косвенной функцией полезности, ассоциированной с U. В качестве такой функции полезности можно взять*

$$U(q) := \inf_{p \in P}\big(u(p) + \lambda(p)(pq - I(p))\big). \qquad (29)$$

3. *Пусть λ и $u(p)$ – такие же, как в п. 2, и, кроме того, предположим, что выполнено* (28)*, а множество $f(P)$ открыто либо выпукло и замкнуто. Тогда найдется полунепрерывная сверху вогнутая функция полезности U такая, что* dom $U \supseteq f(P)$, *$u(p)$ является косвенной функцией полезности, ассоциированной с U, и U строго рационализирует f.*

4. *Если λ удовлетворяет* (25)*, то $Q_0(c_\lambda)$ непусто тогда и только тогда, когда для каждого натурального числа l и каждого цикла $p^1, \ldots, p^l$, $p^{l+1} = p^1$ в P выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{l} \lambda(p^{k+1}) p^{k+1}\left(f(p^k) - f(p^{k+1})\right) \ge 0.$$

Замечание 5. Если f рационализируется вогнутой функцией U, которая дифференцируема в $f(p)$, $p \in P$, то из (27) вытекает равенство

$$\lambda(p) = \frac{\nabla U(f(p))f(p)}{pf(p)}, \quad p \in P.$$

Функция спроса f называется *ненасыщаемой*, если $pf(p) = I(p)$ для всех $p \in P$. Для таких функций условие (25) выполняется автоматически. Условие непустоты, даваемое теоремой 22 (см. утверждение 4), тесно связано с аксиомами выявленного предпочтения. Можно показать (см. (Levin, 2005, Proposition 1)), что если существуют λ и $u \in Q_0(c_\lambda)$, удовлетворяющие условиям (25) и (28), то для f выполняется сильная аксиома выявленного предпочтения Хаутеккера SARP (Houthakker, 1950), а если спрос f ненасыщаем, функция λ строго положительна и $Q_0(c_\lambda)$ непусто, то f удовлетворяет обобщенной аксиоме выявленного предпочтения Вэриана GARP (Varian, 1982).

В следующей теореме мы рассматриваем широкий класс вогнутых функций полезности и даем полное описание функций из этого класса, рационализирующих данную ненасыщаемую функцию спроса.

Теорема 23 (Levin, 2005, Theorem 3). *Предположим, что* $U : \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R}$ *– полунепрерывная сверху вогнутая функция полезности, и для каждого* $q \in \inf \mathbf{R}^n_+$ *множество* $\partial' U(q) \cap \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+$ *непусто. Пусть* $f : P \to \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+$ *есть ненасыщаемая функция спроса, тогда следующие утверждения равносильны:*

а) U *рационализирует* f, *и существует строго положительная функция* $\lambda(p)$, $p \in P$, *совместимая с* U;

б) U *представима в виде*

$$U(q) = \inf_{p' \in P'} \big(u'(p') + \lambda'(p')p'(q - f'(p')) \big), \ q \in \mathbf{R}^n_+, \tag{30}$$

где

$$P \subseteq P' \subseteq \mathbf{R}^n_+, \ f' : P' \to \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+, \quad f' \,|\, P = f, \ \lambda' : P' \to \operatorname{int} \mathbf{R}_+,$$

$$u' \in Q_0(c_\lambda), \ c_{\lambda'}(p, p') := = \lambda'(p')p'(f'(p) - f'(p')) \ \ \forall (p, p') \in P' \times P'.$$

Теорема 24 (Levin, 2005, Theorem 6). *Предположим, что* P *есть область, функции* $f' : P' \to \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+$, *и* $\lambda : P \to \mathbf{R}_+$ *непрерывны и выполнено условие* (25).

I. Предположим, что f *рационализируется вогнутой функцией полезности* $U : \mathbf{R}^n_+ \to \operatorname{int} \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ *с* $\operatorname{dom} U \supseteq f(P)$, *и* λ *совместима с* U. *Пусть* $u(p) = U(f(p))$ *есть косвенная функция полезности, ассоциированная с* U. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

i) $u(p)$ *непрерывна и принадлежит* $Q_0(c_\lambda)$;

ii) если f *и* λ *гладкие класса* C^r, *где* r *– натуральное число или* $+\infty$, *то* $u(p)$ *– тоже гладкая* C^r, *и* $u(p) - u(p') = c_{\lambda *}(p, p')$ *при всех* $(p, p') \in P \times P$,, *где* $c_{\lambda *}$ *– редуцированная функция стоимости,*

$$c_{\lambda *}(p, p') = \inf_k \ \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} c_\lambda(p^{i-1}, p^i) : p^1, \ldots, p^{k-1} \in P, \, p^0 = p, \, p^k = p' \right\}.$$

Более того, в таком случае

$$\frac{\partial u(p)}{\partial p_i} = \lambda(p) \sum_{k=1}^{n} p_k \, \frac{\partial f_k(p)}{\partial p_i}, \quad p = (p_1, \ldots, p_n), \ i = 1, \ldots, n,$$

и для каждого $p \in P$ *матрица* $M(p) = (m_{ij}(p))_{ij}$,

$$m_{ij}(p) := \frac{\partial \lambda(p)}{\partial p_i} \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial f_k(p)}{\partial p_j} + \lambda(p) \frac{\partial f_i(p)}{\partial p_j},$$

симметрична и отрицательно полуопределена.

II. Предположим, что область P выпукла, функции f и λ *– гладкие* C^2*, для каждого* $p \in P$ *матрица* $M(p)$ *симметрична, и для любых p, p′ из P справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \lambda(p')}{\partial p'_i} p'(f(p) - f(p')) + \lambda(p')(f_i(p) - f_i(p')) \right)(p_i - p'_i) \le 0.$$

Тогда f рационализируется неубывающей полунепрерывной сверху вогнутой функцией с $U\colon \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ *с* $\operatorname{dom} U \supseteq f(p)$, λ *совместима с U, и ассоциированная с U косвенная функция полезности является гладкой* C^2 *и принадлежит* $Q_0(c_\lambda)$.

Теорема 25 (Levin, 2005, Corollary 3; Levin, 2006, Theorem 11). *Пусть* $f : P \to \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+$ *– ненасыщаемая функция спроса. Следующие утверждения равносильны:*

а) существует положительно однородная функция полезности $U : \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R}_+$*, которая рационализирует f и строго положительна на f(P);*

б) существует положительно однородная непрерывная вогнутая функция полезности $U : \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R}_+$*, которая рационализирует f и строго положительна на f(P);*

в) для функции стоимости ξ *на P × P, определяемой равенством*

$$\xi(p, p') := \ln(p' f(p)) - \ln(p' f(p')), \tag{31}$$

множество $Q_0(\xi)$ *непусто*;

г) для каждого цикла $p^1, ..., p^l,\ p^{l+1} = p^1$ *в P выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{l} p^{k+1} f(p^k) \ge \prod_{k=1}^{l} p^k f(p^k); \tag{32}$$

д) существует строго положительное решение системы неравенств

$$u(p) \ge \frac{p\, f(p)}{p\, f(p')}\, u(p') \tag{33}$$

для всех p, p′ из P.

Здесь функции $U(q)$ и $u(p)$ связаны равенством $u(p) = U(f(p))$, $p \in P$, т.е. $u(p)$ – косвенная функция полезности, ассоциированная с U. При этом $\lambda(p) := U(f(p))/I(p)$ – единственная совместимая с U функция $P \to \mathbf{R}_+$ (см. (Levin, 2005, Proposition 5)), и имеет место цепочка эквивалентностей

$$u \in Q_0(c_\lambda) \Longleftrightarrow [u(p) \text{ удовлетворяет (33)}] \Longleftrightarrow \ln u \in Q_0(\xi).$$

Замечание 6. Утверждение *г*) представляет собой некоторое усиление “положительно полуоднородного” варианта сильной аксиомы выявленного предпочтения, а утверждение *д*) обобщает соответствующий вариант теории Африата–Вэриана (Afriat, 1967, 1973; Varian, 1982, 1983) на случай бесконечного множества наблюдаемых данных (в случае конечного множества P (33) превращается в систему неравенств Африата–Вэриана для “торговой статистики” $\{(p, f(p))\colon p \in P\}$).

Замечание 7. Если $f(P)$ открыто, то справедливы аналогичные характеризации строгой рационализируемости; см. (Levin, 2005, Corollary 3).

Замечание 8. Аналогичный подход, опирающийся на данные в (Левин, 1990; Levin, 1997a) условия непустоты множества $Q(c)$ ограничений двойственной ЗМК, применялся к специальным (гладким) функциям стоимости $c(q, q')$ при изучении рационализируемости *обратных* функций спроса; см. также (Carlier et al., 2002).

5. ТЕОРИЯ КОЛЛЕКТИВНОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

В этом разделе (см. также (Levin, 2009b, 2010a)) рассматривается следующая модель коллективного выбора. Даны: множество участников (экономических агентов, или, в другой интерпретации, экспертов) $N = \{1, ..., n\}$, множество возможных альтернатив (состояний общества или конкурирующих проектов) X и множество допустимых индивидуальных функций полезности участников $U \subset \mathbf{R}^X$. Следуя Сену (Sen, 1970), под *функционалом общественного благосостояния*[5] (англ. *Social Welfare Functional*) мы понимаем отображение f, переводящее профиль индивидуальных полезностей $(u_1, ..., u_n) \in U^n$ в коллективное предпочтение $\preceq = f(u_1, ..., u_n) \in \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ – множество всех тотальных предпорядков на X. Положим

$$M = \{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n\colon \mathbf{a} = \mathbf{u}(x),\ \mathbf{u} = (u_1, ..., u_n) \in U^n,\quad x \in X\} \tag{34}$$

и определим на нем бинарное отношение $\preceq_M$,

$$\mathbf{a} \preceq_M \mathbf{b} \Longleftrightarrow [\exists \mathbf{u} \in U^n,\ x, y \in X\colon\ \mathbf{u}(x) = \mathbf{a},\ \mathbf{u}(y) = \mathbf{b},\ xf(\mathbf{u})y].$$

В публикациях, посвященных функционалам общественного благосостояния, обычно предполагается, что множество допустимых функций полезности U состоит из всех (или всех ограниченных) вещественных функций на X; это предположение известно как условие *универсальности области* (англ. *unrestricted domain assumption*); см., например, (d'Aspremont, Gevers, 1977; Maskin, 1978). Мы не делаем этого предположения и рассматриваем более общие классы U. Приведем пример с бесконечным множеством альтернатив X.

Пример 2. Предположим, что мы должны распределить единичный ресурс между m базовыми проектами. Пусть X есть симплекс, т.е. множество векторов $x = (\xi_1, ..., \xi_m) \in \mathbf{R}^m_+$, удовлетворяющих равенству $\xi_1 + ... + \xi_m = 1$, где ξ_j – доля ресурса, предназначенная для реализации проекта j. Имеется n экспертов, оценка экспертом i вектора распределения ресурса x дается значением индивидуальной функции полезности $u_i(x)$, а коллективное суждение о сравнительной ценности различных векторов определяется предпочтением $\preceq = f(u_1, ..., u_n)$. В этом примере условие универсальности области является излишне ограничительным. Более реалистично считать, что U состоит из неотрицательных непрерывных вогнутых функций (или даже из неотрицательных линейных функций) на X.

Следуя (Levin, 2009b), будем говорить, что пространство полезностей U^n удовлетворяет *сильному условию сборки* (англ. *strong assembling*) **StAs**, если для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in M$ найдутся $\mathbf{u} \in U^n$ и $x, y, z \in X$ такие, что $\mathbf{u}(x) = \mathbf{a}$, $\mathbf{u}(y) = \mathbf{b}$ и $\mathbf{u}(z) = \mathbf{c}$. Очевидно, что **StAs** значительно слабее условия универсальности. Легко видеть, что условие **StAs** выполнено для приведенного выше примера; подробнее см. (Levin, 2009b, 2010a). Очевидно, что из него следует более слабое *условие сборки* **As**: для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M$ найдутся $\mathbf{u} \in U^n$ и $x, y \in X$ такие, что $\mathbf{u}(x) = \mathbf{a}$, $\mathbf{u}(y) = \mathbf{b}$. Далее, так как $f(\mathbf{u})$ тотально, отсюда вытекает тотальность $\preceq_M$: любые два элемента $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M$ сравнимы, т.е. выполнено, по крайней мере, одно из двух соотношений, $\mathbf{a} \preceq_M \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} \preceq_M \mathbf{a}$.

Функционал общественного благосостояния f называется *утилитарным* (или *утилитаризмом*), если он может быть представлен суммой индивидуальных функций полезности: для любых $x, y \in X$,

$$xf(u_1, ..., u_n)y \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \le \sum_{i=1}^{n} u_i(y).$$

Некоторые аксиоматические характеризации утилитаризма даны в работах (d'Aspremont, Gevers, 1977; Maskin, 1978). В обоих случаях из условия универсальности области следует, что множество M (34) совпадает с $\mathbf{R}^n$. Ниже (см. также (Levin, 2009в)) дана другая аксиоматическая характеризация утилитаризма. В отличие от упомянутых работ мы не требуем универсальности области и не используем сильную аксиому Парето.

Перечислим ряд аксиом, которым может удовлетворять или не удовлетворять функционал общественного благосостояния f. (Их подробное обсуждение и сравнение с аксиомами из (d'Aspremont, Gevers, 1977; Maskin, 1978) см. (Levin, 2009b).)

Cl (**замкнутость**). Если $\mathbf{u}^k \in U^n$, x_k, $y_k \in X$, $x_k f(\mathbf{u}^k) y_k$, $k = 1, 2, ...$, $\mathbf{u} \in U^n$, $x, y \in X$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{u}^k(x_k) = \mathbf{u}(x)$, $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{u}^k(y_k) = \mathbf{u}(y)$, то $xf(\mathbf{u})y$.

Если выполнено условие **As**, то из **Cl** следует, что бинарное отношение $\preceq_M$ замкнуто, т.е. его график есть замкнутое подмножество в $M \times M$. При выполнении более сильного условия универ-

[5] Мы пользуемся устоявшейся терминологией, хотя в математическом смысле это никакой не функционал.

сальности области справедливо равенство $M = \mathbf{R}^n$ и **Cl** превращается в аксиому непрерывности (Maskin, 1978).

TI (**инвариантность относительно сдвигов**). Пусть $\mathbf{u} \in U^n$, $x, y \in X$, $xf(\mathbf{u})y$ и $c \in \mathbf{R}^n$. Если найдутся $\mathbf{v} \in U^n$ и $x', y' \in X$ такие, что $\mathbf{v}(x') = \mathbf{u}(x) + \mathbf{c}$, $\mathbf{v}(y') = \mathbf{u}(y) + \mathbf{c}$, то $x'f(\mathbf{v})y'$.

Эта аксиома усиливает известное условие *нейтральности*: для любых x, y, x_1, y_1 из X, удовлетворяющих равенствам $u_i(x) = v_i(x_1)$, $u_i(y) = v_i(y_1)$, $i \in N$, имеет место эквивалентность $xf(u_1, ..., u_n)y \Longleftrightarrow x_1 f(v_1, ..., v_n)y_1$.

A (**анонимность**). Для любых профиля $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n) \in U^n$ и перестановки $\pi : N \to N$ справедливо равенство $f(u_1, ..., u_n) = f(u_{\pi(1)}, ..., u_{\pi(n)})$.

Это – хорошо известная традиционная аксиома; см., например, (Sen, 1970; d'Aspremont, Gevers, 1977; Maskin, 1978).

QP (**квази-паретовский принцип**). Если $\mathbf{u} \in U^n$ и $x, y \in X$, то $\mathbf{u}(x) \le \mathbf{u}(y) \Rightarrow xf(\mathbf{u})y$.

Эта аксиома существенно слабее любого из традиционных принципов (условий) Парето.

NT (**нетривиальность**). Существуют $\mathbf{u} \in U^n$ и $x, y \in X$ такие, что $x \prec y$, где $\prec$ – строгое предпочтение, отвечающее $\preceq = f(\mathbf{u})$.

Теорема 26 (Levin, 2009, Theorem 1). *Предположим, что множество M (*34*) замкнуто или открыто. Также предположим, что выполняется условие* **StAs** *и M устойчиво относительно положительных сдвигов:* $\mathbf{a} \in M$, $c \in \mathbf{R}^n_+ \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{c} \in M$.

Функционал общественного благосостояния f является утилитаризмом тогда и только тогда, когда выполняются аксиомы **CI, TI, A, QP** *и* **NT**.

Необходимость проверяется легко. Главные моменты доказательства достаточности состоят в следующем. Из сформулированных аксиом следует, что $\preceq_M$ есть тотальный замкнутый предпорядок на M (транзитивность выводится из **StAs** и **TI**), удовлетворяющий условию:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M,\ \mathbf{c} \in \mathbf{R}^n,\ \mathbf{a} + \mathbf{c},\ \mathbf{b} + \mathbf{c} \in M,\ \mathbf{a} \preceq_M \mathbf{b}] \Rightarrow (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \preceq_M (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \tag{35}$$

Тогда из (Levin, 2008, Corollary 3.1) вытекает существование линейной функции полезности для $\preceq_M$, а из аксиомы анонимности **A** выводится, что этой линейной функцией может служить сумма координат. Существование линейной функции полезности для $\preceq_M$, в свою очередь, доказывается с помощью теоремы 9, т.е. в конечном счете, опираясь на двойственность Монжа–Канторовича. Аналогичный метод применим и к задачам аксиоматической характеризации коллективных функций полезности утилитарного типа (Levin, 2010b) и коллективных предпочтений, представимых функциями полезности специального вида (Levin, 2010a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Канторович Л.В. (1942): О перемещении масс // *ДАН*. Т. 37. № 7–8.

Канторович Л.В. (1948): Об одной проблеме Монжа // *УМН*. Т. 3. № 2.

Канторович Л.В., Акилов Г.П. (1984): Функциональный анализ. М.: Наука.

Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. (1957): Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах // *ДАН*. Т. 115.

Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. (1958): Об одном пространстве вполне аддитивных функций // *Вестник ЛГУ. Сер. мат., мех. и астр*. Т. 13. № 7.

Кирута А.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б. (1980): Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. Л.: Наука.

Куратовский К. (1966): Топология. Т. 1. М.: Мир.

Левин В.Л. (1974): Двойственность и аппроксимация в задаче о перемещении масс. В кн.: "*Математическая экономика и функциональный анализ*". М.: Наука.

Левин В.Л. (1975): К задаче о перемещении масс // *ДАН*. Т. 224. № 5.

Левин В.Л. (1977): О теоремах двойственности в задаче Монжа–Канторовича // *УМН*. Т. 32. № 3.

Левин В.Л. (1978): Задача Монжа–Канторовича о перемещении масс. В кн.: “*Методы функционального анализа в математической экономике*”. М.: Наука.

Левин В.Л. (1981): Некоторые приложения двойственности для задачи о перемещении масс с полунепрерывной снизу функцией стоимости. Замкнутые предпочтения и теория Шоке // *ДАН.* Т. 260. № 2.

Левин В.Л. (1983а): Теорема о непрерывной полезности для замкнутых предпорядков на метризуемом -компактном пространстве // *ДАН.* Т. 273. № 4.

Левин В.Л. (1983б): Теоремы об измеримой полезности для замкнутых и лексикографических отношений предпочтения // *ДАН.* Т. 270. № 3.

Левин В.Л. (1984): Задача о перемещении масс в топологическом пространстве и вероятностные меры на произведении двух пространств, обладающие заданными маргинальными мерами // *ДАН.* Т. 276. № 5.

Левин В.Л. (1984): Липшицевы предпорядки и липшицевы функции полезности // *УМН.* Т. 39. № 6.

Левин В.Л. (1985): Функционально замкнутые предпорядки и сильное стохастическое доминирование // *ДАН.* Т. 283. № 1.

Левин В.Л. (1987): Измеримые селекторы многозначных отображений и задача о перемещении масс // *ДАН.* Т. 292. № 5.

Левин В.Л. (1990): Формула для оптимального значения задачи Монжа–Канторовича с гладкой функцией стоимости и характеризация циклически монотонных отображений // *Мат. сборник.* Т. 181. № 12.

Левин В.Л. (1996): Теоремы двойственности для нетопологического варианта задачи о перемещении масс // *ДАН.* Т. 350. № 5.

Левин В.Л. (1997): К теории двойственности для нетопологических вариантов задачи о перемещении масс // *Мат. сборник.* Т. 188. № 4.

Левин В.Л. (1998): Существование и единственность сохраняющего меру оптимального отображения в общей задаче Монжа–Канторовича // *Функциональный анализ и его приложения*. Т. 32. № 3.

Левин В.Л. (2002): Условия оптимальности для гладких решений Монжа задачи Монжа–Канторовича // *Функциональный анализ и его приложения.* Т. 36. № 2.

Левин В.Л. (2003): Решение задач Монжа и Монжа–Канторовича: теория и примеры // *ДАН.* Т. 388. № 1.

Левин В.Л. (2004а): Метод в математической теории спроса, связанный с двойственностью Монжа–Канторовича // *ДАН.* Т. 398. № 5.

Левин В.Л. (2004б): Условия оптимальности и точные решения двумерной задачи Монжа–Канторовича // *Записки научных семинаров ПОМИ*. Т. 312. Специальный выпуск “Теория представлений. Динамические системы XI” (отв. ред. А.М. Вершик).

Левин В.Л. (2006): Задачи наилучшего приближения, связанные с двойственностью Монжа–Канторовича // *Мат. сборник*. Т. 197. № 9.

Левин В.Л. (2008а): О типичной единственности оптимального решения в бесконечномерной задаче линейного программирования // *ДАН.* Т. 421. № 1.

Левин В.Л. (2008б): Гладкие допустимые решения двойственной задачи Монжа–Канторовича и их применение в задачах наилучшего приближения и математической экономики // *ДАН.* Т. 419. № 5.

Левин В.Л. (2011): Общие предпочтения и функции полезности. Подход на основе двойственной задачи Канторовича // *ДАН.* Т. 437. № 5.

Левин В.Л., Милютин А.А. (1979): Задача о перемещении масс с разрывной функцией стоимости и массовая постановка проблемы двойственности выпуклых экстремальных задач // *УМН.* Т. 34. № 3.

Маршалл А.В., Олкин И. (1983): Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир.

Afriat S.N. (1967): The Construction of Utility Functions from Expenditure Data // *Intern. Econ. Rev.* Vol. 8.

Afriat S.N. (1973): On a System of Inequalities on Demand Analysis: an Extension of the Classical Method // *Intern. Econ. Rev.* Vol. 14.

Bridges D.S., Mehta G.B. (1995): Representations of Preference Orderings. LN in Economics and Mathem. Systems. Vol. 422. Springer.

Carlier G., Levin V.L., Shananin A.A. et al. (2002): A System of Inequalities Arising in Mathematical Economics and Connected with the Monge–Kantorovich Problem. Working Paper, Ceremade – UMR 7534 – Univ. Paris Dauphine.

d'Aspremont C., Gevers L. (1977): Equity and the Informational Basis of Collective Choice // *Rev. of Econ. Studies*. Vol. 44.

Debreu G. (1954): Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function. In: "*Decision Processes*". N.Y.: Wiley.

Debreu G. (1964): Continuity Properties of Paretian Utility // *Intern. Econ. Rev*. Vol. 5.

Houthakker H.S. (1950): Revealed Preference and the Utility Function // *Economica.* Vol. 17.

Kamae T., Krengel U., O'Brien G.L. (1977): Stochastic Inequalities on Partially Ordered Spaces // *Ann. Probab*. Vol. 5.

Levin V.L. (1986): Extremal Problems with Probability Measures, Functionally Closed Preorders and Strong Stochastic Dominance. In: "*Stochastic Optimization*". LN in Control and Inform. Sci. Vol. 81. Springer. Berlin.

Levin V.L. (1990): General Monge–Kantorovich Problem and its Applications in Measure Theory and Mathematical Economics. In: "*Functional Analysis, Optimization, and Mathematical Economics (A collection of papers dedicated to memory of L.V. Kantorovich)*". L.J. Leifman (ed.) N.Y., Oxford: Oxford University Press.

Levin V.L. (1991): Some Applications of Set-Valued Mappings in Mathematical Economics // *J. of Math. Econ.* Vol. 20.

Levin V.L. (1996a): A Superlinear Multifunction Arising in Connection with Mass Transfer Problems // Set-Valued Analysis , Vol. 4.

Levin V.L. (1997a): Reduced Cost Functions and Their Applications // *J. of Math. Econ.* Vol. 28.

Levin V.L. (1997b): Topics in the Duality Theory for Mass Transfer Problem. In: "*Distributions with Given Marginals and Moment Problems*" BeneV. , tĕpan J. (eds). Dordrecht: Kluwer.

Levin V.L. (1999): Abstract Cyclical Monotonicity and Monge Solutions for the General Monge–Kantorovich Problem // *Set-Valued Analysis*. Vol. 7.

Levin V.L. (2000): A Method in Utility Theory Connected with the Monge–Kantorovich Problem. Working Paper WP/2000/089. M.: CEMI.

Levin V.L. (2001a): On Generic Uniqueness of Optimal Solutions for the General Monge–Kantorovich Problem // *Set-Valued Analysis*. Vol. 9.

Levin V.L. (2001b): The Monge–Kantorovich Problems and Stochastic Preference Relations // *Adv. Math. Econ*. Vol. 3.

Levin V.L. (2004): Optimal Solutions of the Monge Problem // *Adv. Math. Econ*. Vol. 6.

Levin V.L. (2005): A Method in Demand Analysis Connected with the Monge–Kantorovich Problem // *Adv. Math. Econ*. Vol. 7.

Levin V.L. (2006): Abstract Convexity and the Monge–Kantorovich Duality. In: LN in Economics and Mathematical Systems. Vol. 583. Springer.

Levin V.L. (2008): On preference relations that admit smooth utility functions // Adv. Math. Econ. Vol. 11.

Levin V.L. (2009a): Smooth Feasible Solutions to a dual Monge–Kantorovich Problem with Applications to Best Approximation and Utility Theory in Mathematical Economics // *Adv. Math. Econ.* Vol. 12.

Levin V.L. (2009b): New Axiomatic Characterizations of Utilitarianism // *Math. Soc. Sci.* Vol. 58.

Levin V.L. (2010a): On Collective Utility Functions Admitting Linear Representations // *J. of Math. Econ.* Vol. 46.

Levin V.L. (2010b): On Social Welfare Functionals: Representation Theorems and Equivalence Classes // *Math. Soc. Sci*. Vol. 59.

Maskin E. (1978): A Theorem on Utilitarianism // *Rev. of Econ. Studies*. Vol. 45.

Preston C.J. (1974): A Generalization of the FKG Inequalities // *Comm. Math. Phys*. Vol. 36.

Sen A.K. (1970): Collective Choice and Social Welfare. San Francisco: Holden-Day.

Varian H.R. (1982): The Nonparametric Approach to Demand Analysis // *Econometrica.* Vol. 50.

Varian H.R. (1983): Non-Parametric Tests of Consumer Behaviour // *The Rev. of Econ. Studies*. Vol. V(1). № 160.

Поступила в редакцию
10.06.2011 г.

Monge–Kantorovich Duality Theory and its Application in the Utility Theory

V. L. Levin

An article reviews the developments of duality theory for the Monge–Kantorovich general problem and its application in the utility theory.

Keywords: duality theory, Monge–Kantorovich duality, utility theory.

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2011, том 47, № 4, с. 166–170

СВЕТЛОЙ ПАМЯТИ ИГОРЯ БИРМАНА

С Игорем Бирманом мы познакомились в 1947 г., когда были студентами Московского государственного экономического института (МГЭИ). За нашу непозволительную в ту пору любознательность меня и его – одного за другим вышибли со второго курса этого института. Ввиду столь незавидной общности судьбы и близости характеров мы подружились на всю последующую жизнь. Через более полувека Игорь, обладавший сыздетства литературным дарованием, в своей автобиографической книге назвал нашу дружбу “конгениальной”[1].

Через полгода после отчисления из МГЭИ мне повезло: “Не было бы счастья, да несчастье помогло”. В 1948 г. я поступил на работу в ЦСУ СССР, в Отдел баланса народного хозяйства (БНХ). Начальником отдела был выдающийся экономист В.А. Соболь. В обстановке тотальной секретности и фальсификации того времени о подобном “университете” я не смел даже мечтать. За год работы в отделе БНХ я узнал об экономике нашей страны столько, сколько ни в одном вузе тогда не преподавали. Самым содержательным и интересным из того, о чем узнавал, я делился с Игорем. Наши с ним беседы и мне, и ему в дальнейшем пригодились – да еще как.

Вскоре после изгнания из МГЭИ Игорь стал работать в Институте экономики строительства. Но об этом – второй раздел статьи. В 1956 г. мы с Игорем стали сотрудничать уже на другом поприще. В этом году я поступил на работу в Институт электронных управляющих машин – ИНЭУМ АН СССР, которым руководил член-корреспондент АН СССР И.С. Брук.

В начале 1950-х годов под его руководством в ИНЭУМ была создана вторая в стране электронная вычислительная машина ЭВМ-М-2. Поначалу я был единственным в ИНЭУМ экономистом, но затем получил лабораторию, а потом и экономический отдел.

Одной из моих первых сотрудников стала Альбина Третьякова, которая вскоре вышла замуж за Игоря Бирмана. С основной группой своих сотрудников и математиками я занимался расчетами межотраслевых балансов и ценами единого уровня, а Игорь, который числился в Институте экономики строительства, большую часть рабочего времени проводил в ИНЭУМ, – вместе с Альбиной он занимался линейным программированием.

С Игорем и Альбиной нам удалось рассчитать оптимальный топливно-энергетический баланс страны. Статью об этом мы опубликовали на развороте “*Экономической газеты*” 11 ноября 1960 г.

ИНЭМовская ЭВМ-М-2 была единственной ЭВМ “гражданского” пользования. Другие ЭВМ в ту пору без специальных “допусков” были недосягаемы. Один из немногих уцелевших во времена сталинских репрессий ученых-экономистов, академик В.С. Немчинов, заинтересовался нашей ЭВМ-М-2 и стал наведываться в ИНЭУМ. Затем он пригласил меня к себе домой и рассказал о замышляемой тогдашним главою страны Н.С. Хрущевым экономической реформе. Немчинова в этой связи заинтересовали мои расчеты цен единого уровня, и он включил меня в Комиссию АН СССР по определению стоимости, которую создал по указанию Н.С. Хрущева. Затем в эту Комиссию был приглашен и Игорь Бирман.

Статья профессора Харьковского инженерно-экономического института Е. Либермана в “Правде” в 1962 г., одобренная Н.С. Хрущевым, знаменовала начало экономической реформы.

Организационная подготовка реформы стартовала с учреждения Госэкономсовета, который возглавил заместитель председателя Совмина СССР А.Ф. Засядько.

Игорь Бирман участвовал в подготовке экономической реформы по двум направлениям: публикуя статьи о ней в центральной печати и работая в Комиссии Госэкономсовета и Ака-

[1] Бирман Игорь. Я – экономист. М.: Время, 2001. С. 188.

демии наук СССР по реформе. В "Известиях" были напечатаны наши с Бирманом статьи: в 1962 г. – "*Цена и прибыль*", а в 1964 г. – "*Самостоятельность предприятия и экономические стимулы*".

Как выясняется теперь из книги сына Н.С. Хрущева Сергея Хрущева "*Никита Хрущев. Реформатор*"[2], – конечная цель реформы виделась Н.С. Хрущеву в переходе к товарному хозяйству, наподобие той, которую много лет позже провел в Китае Дэн Сяопин. К сожалению, осенью 1964 г. Н.С. Хрущев был отстранен от власти, и его заветная мечта так и не сбылась.

Написанный нами с Игорем Бирманом текст проекта экономической реформы был передан новому Председателю Совета министров СССР А.Н. Косыгину, который он огласил в докладе на Сессии Верховного Совета. Английский советолог Зауберман, сличив доклад Косыгина с нашей с Игорем опубликованной в "Известиях" в 1964 г. упомянутой выше статьей, обнаружил их полное совпадение[3].

Несмотря на серьезную деформацию первоначального проекта экономической реформы, его реализация оказалась весьма эффективной.

В результате экономической реформы, названной впоследствии "косыгинской", прирост национального дохода за пятилетку 1965–1970 гг. составил 41%, доходы населения выросли на 33%. Подобного экономического роста ни в одной из предыдущих и последующих советских пятилеток не наблюдалось.

В следующей за указанной пятилеткой, в 1971–1975 гг., приросты национального дохода и доходов населения уменьшились вдвое, а дальше наступил застой – притом не только в экономике, но и в общественной жизни.

О "хрущевской оттепели" остались лишь воспоминания. В 1974 г. Игорь с Альбиной эмигрировали в США.

В США Альбигори, как стали в ту пору называть их друзья, поселились в пригороде Вашингтона. Альбина поступила на работу в российский отдел американского Бюро цензов (подобие советского ЦСУ или нынешнего Росстата), а Игорь продолжал заниматься тем же, чем и в СССР, – исследованиями советской экономики. Примечательно, что всю жизнь он оставался неистовым, влюбленным в свою профессию трудоголиком.

В начале 1990-х годов, работая заведующим сектором хозяйственного механизма Комиссии по развитию производительных сил и природных ресурсов (КЕПС АН СССР, затем РАН), я трижды бывал в командировках в США. Жил там не в гостиницах, а в доме Альбигорей. Ежедневно, кроме субботы и воскресенья, Игорь отправлялся в знаменитую библиотеку Конгресса и там просиживал с утра до вечера.

В апреле 1990 г. Игорь Бирман сумел организовать российско-американскую конференцию по сопоставлениям внутреннего валового продукта, уровня жизни и военных расходов России и США, широко освещавшуюся в американской печати. В США помимо статей были напечатаны две его книги "*Экономика недостач*" (1983) и "*Строить заново*" (1988).

В этих книгах сопоставление экономики СССР и США, намного более качественное, чем американских советологов. Во второй из названных книг — глава "Выход капитализации экономики" – теперь, как известно, уже сбывшийся прогноз.

В середине 1990-х годов Игорь и Альбина на несколько лет вернулись в Москву. Альбина Третьякова была командирована Бюро цензов, Игорь Бирман продолжал свои исследования российской экономики, теперь уже признанные и даже частично оплачиваемые российской стороной. И Игорь, и Альбина тесно сотрудничали в России с Левада-центром. В этот период пребывания Игоря Бирмана в России были изданы его книги: "*Статистика уровня жизни населения России*" (М., 1997), "*Я – экономист*" (М., 2001). Две книги об уровне жизни населения России (в сравнении с американским) – 2004 и 2007 г.

---

[2] Хрущев С. Никита Хрущев. Реформатор. М.: Время, 2010.

[3] Бирман И. Я – экономист. М.: Время, 2001. С. 253.

Игорь Бирман получил признание и в ЦЭМИ. В журнале “Экономическая наука современной России” была напечатала его статья “*Избыточность – норма нормальной экономики*” (ЭНСР, 2007. № 4).

12 апреля 2011 г. собравшиеся в большой зале ЦЭМИ участники Всероссийского симпозиума “Стратегическое планирование и развитие предприятий”, среди которых были инициатор симпозиума член-корреспондент РАН Г.Б. Клейнер, академик РАН В.М. Полтерович и многие другие друзья и коллеги Игоря Бирмана, по предложению директора ЦЭМИ, академика РАН В.Л. Макарова, почтили память Бирмана вставанием и минутой молчания.

В.Д. Белкин

Институт экономики строительства Госстроя СССР, в котором Игорь Яковлевич пытался приучить начальство к математическим методам, недолго выдерживал малоуправляемого сотрудника – борца за новое направление.

Пришлось Игорю сменить фирму, стал он зав. отделом оптимального планирования во ВНИИЭСМе – Всесоюзном институте информации и экономики промышленности строительных материалов Министерства стройматериалов СССР. Здесь вокруг Бирмана закипела творческая жизнь. В содружестве с В. Стороженко, который заведовал отделом прогнозирования, разрабатывались прогнозы и перспективные планы развития отрасли и ее важнейших производств – цементной, керамической, стекольной промышленности и др. Вдохновляемый Игорем отдел оптимального планирования выполнял огромную работу, собирая и обрабатывая статистику сотен заводов. Использовались разработанные Бирманом “Методические указания по определению оптимальных схем перевозок, снабжения и размещения предприятий с помощью линейного программирования”.

Дело было новое. Надо было учиться всем, и в том числе самому Игорю. Бирман организовал в институте постоянно действующий семинар по теме. Учились с удовольствием – транспортная задача линейного программирования увлекала сотрудников ясными и четкими постановками, наглядностью графических схем размещения предприятий.

Результаты работы – обоснования конкретных точек строительства новых заводов после бурных обсуждений на коллегии министерства утверждались и передавались отраслевым проектным институтам. Так что в создании материальной базы быстро растущего в те годы жилищного строительства непосредственно участвовал и Игорь Бирман. Он радовался практической пользе, не терпел наукообразной зауми, пустозвонства, абстракции должны приводить к осязаемым конкретным результатам. Игоря, как ребенка, увлекали схемы перевозок, точки, кружочки, стрелочки – за этими условными обозначениями он видел реальные объекты.

В 1968 г. вышла книга Бирмана “*Оптимальное программирование*”. Эта была книга большого, непривычного формата, она содержала сотни параграфов, в которых шаг за шагом, скрупулезно, без сложных формул растолковывалась непосвященным, но интересующимся, азбука программирования. Книга вызвала всеобщее внимание в экономической среде. Текст оживляли забавные изречения, афоризмы, анекдоты – это был “фирменный” прием Бирмана, которым он пользовался и в других своих работах. Он сознательно оживлял сухую прозу науки, считал занимательность таким большим достижением, от которого он не отказался бы ни при каких соблазнах. Об этом, в частности, свидетельствует такой факт. Игорь собрался защищать докторскую диссертацию по этой книге. Работа, достойная присуждения докторской степени, но непривычный, свободный, не по канонам ВАКа стиль изложения, которым так гордился Бирман, стал непреодолимым препятствием защиты докторской диссертации. Ему советовали: убери все эти эпиграфы, хохмы и подавай на защиту. Но не тут-то было. Надо знать Игоря! Он категорически отказался.

* * *

Игорь не терпел наглецов, дураков и подхалимов; не любил и презирал серую касту бюрократов, подтрунивал над их неграмотностью, дерзил невзирая на лица.

Помнится, как однажды позвонила секретарь заместителя министра по кадрам, человека, которого боялись.

– Игорь Яковлевич, я вас соединяю с заместителем министра…

– Какая честь... – проворчал Бирман.

– Игорь Яковлевич, здравствуйте, вы мне нужны, приезжайте сразу ко мне в министерство…

– Здравствуйте, но я сейчас не могу приехать, у меня семинар в отделе.

Заместитель министра даже поперхнулся:

– Вы, наверное, не поняли, Игорь Яковлевич? – с нажимом сказало начальство. – Вы мне срочно нужны!..

– Я вам срочно нужен?! У вас ведь есть машина. Садитесь и приезжайте ко мне в институт… если я вам так нужен.

Заместитель министра в ярости бросил трубку, поэтому Игорь не услышал, что вдогонку сказал начальник, – но мог догадаться.

Критически мыслящий, неуправляемый Игорь Бирман восстанавливал против себя бюрократическую машину. Он вел тогда в ЦЭМИ семинары по экономической теории и практике, на которые ломился народ и где выступали знаменитые ученые – Альберт Вайнштейн, Лурье, Канторович…

Но это не извиняло Игоря Яковлевича перед суровой комиссией райкома партии.

– Вы посмотрите, в каком виде он пришел на заседание районного комитета!.. Без галстука, в шлепанцах на босу ногу… Тут что вам?!..

– А его взгляды на жизнь советских людей… Это не наши взгляды! Он оскорбляет советских тружеников. Он назвал Магадан городом паразитов!..

– Позвольте, – сказал Бирман, – не городом паразитов, а городом-паразитом. “Город-паразит” – это экономико-географическое определение. Объясняю: это город, не имеющий собственного производства…

– Он еще издевается, – зашумели старцы парткомиссии. – Гнать его из рядов… – И выгнали…

* * *

После исключения Игорь недолго пребывал в свободном полете, пока не приземлился в Вашингтоне со своей любимой половиной Альбиной Третьяковой. Здесь он стал работать по договорам, но его критический ум, насмешливость, порой ехидство в разговорах с собеседниками и в свободном мире не нравились заказчикам. Известны его нелестные высказывания в адрес местных советологов, специалистов из Пентагона и ЦРУ, которым тоже доставалось от Бирмана. Он доказывал, что в этих важных государственных органах не умеют считать, преуменьшают советские военные расходы. Естественно, неожиданная, “не с той стороны”, критика советского советолога не могла не привлечь внимания общественности…

* * *

С Игорем и Альбиной встретился я случайно в Стокгольме, где я навещал родственников, а Бирманы стажировались по гранту у Андерса Ослунда. У Ослунда был небольшой институт экономики стран Восточной Европы. Он привлекал к работе интересных людей и сам выступал консультантом в эпоху российской перестройки.

Мы гуляли по стокгольмским паркам, было видно, что Игорь и Альбина отдыхают здесь, как говорится, и душой, и телом… Но неуемному Игорю казалось, что в благополучной спокойной жизни шведам не хватает “экстрима”… Может быть.

В тот год в Стокгольме стало популярным рискованное шоу: с высоченного крана на резиновом канате смельчаки прыгали головой вниз… Экстрим? Еще какой!

У столика администратора стояла толпа зевак и несколько желающих поучаствовать.

– За сколько бы ты решился?

– А ты?

– Давай спросим…

– Скажите, сколько я получу за один прыжок? – поинтересовался Бирман.

– Ха-ха… Не вы получите, а я получу с вас пятьсот крон. Платите пятьсот за билет на аттракцион и прыгайте на здоровье…

– Тогда, пожалуй, в другой раз…

Мы посмеялись и пошли в кафе поблизости…

* * *

Ежегодные приезды Бирманов в Москву вносили в жизнь ностальгические воспоминания. Но Игорь, человек деятельный и увлекающийся, нашел актуальную во все времена тему – уровень жизни народа, тем более что тема эта была близка и Альбине, анализирующей российскую статистику.

Бирман создал фундаментальный труд: “Уровень русской жизни (а также американской)” (М.: Экономика, 2007). В аннотации сказано: “Книга об очень спорном не более ясном и крайне важном – измерении уровня жизни. Автор, бывший советский экономист, с 1974 года живет в США. Обильно цитируя русскую и американскую литературу, он описывает различные стороны жизни, главным образом, в России и Америке, показывает многообразные трудности оценки и заключает необщепринятыми выводами.

Книга не “занаучена”, написана в свободной манере, в ней много иронии, юмора, и просто анекдотов. Можно сказать, что это нескучная книга на грустную тему”.

Тема оставалась грустной, происходящее в стране его разочаровывало.

Бирманы продали московскую квартиру и перестали ездить. А нам его стало не хватать.

В.С. Стороженко

СОДЕРЖАНИЕ ЗА 2011 ГОД (ТОМ 47)

К столетию со дня рождения Леонида Витальевича Канторовича

Народнохозяйственные проблемы

Отраслевые проблемы

Математический анализ экономических моделей

Статистические методы и теория вероятностей

Научные обсуждения

Заметки и письма

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА ИМЕНИ ПРОФЕССОРА Б.Л. ОВСИЕВИЧА 2010 ГОДА

Редакционная коллегия и коллектив редакции нашего журнала от души поздравляют победителей конкурса имени профессора Бориса Львовича Овсиевича 2010 г.!

В 2010 г. состоялся шестой конкурс работ молодых ученых. В апреле 2011 г. Совет премии имени профессора Б.Л. Овсиевича принял решение о присуждении премий 2010 г.

Первую премию не присуждать.

Вторая премия присуждена **Иващенко Сергею Михайловичу** за работу "Разработка модели общего экономического равновесия для анализа инфляционных процессов" (ОАО "ВБМ-групп").

Третья премия присуждена кандидату экономических наук **Соколову Михаилу Владимировичу** за работу "Об «адекватности» двух предпосылок в экономико-математических моделях" (Учреждение Российской академии наук Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН) и кандидату физико-математических наук **Соловьеву Владимиру Игоревичу** за работу "Экономико-математическое моделирование рынка программного обеспечения" (Институт гуманитарного образования и информационных технологий).

Поощрительная премия присуждена **Игнатенко Анне Дмитриевне** за работу "Эконометрический анализ обменного курса и денежно-кредитной политики Банка России в период с 1999 по 2009 г." (Учреждение Российской академии наук Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН), кандидату технических наук **Караевой Юлии Викторовне** за работу "Моделирование регионального топливно-энергетического баланса с учетом инновационных технологических решений использования традиционных и возобновляемых видов энергии" (Исследовательский центр проблем энергетики Учреждения Российской академии наук Казанского научного центра РАН) и **Реттиевой Анне Николаевне** за работу "Методы поддержания кооперации в задачах управления биоресурсами" (Учреждение Российской академии наук Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН).

Санкт-Петербургский научный центр Российской академии наук
Учреждение Российской академии наук
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН (СПб ЭМИ РАН)
Фонд поддержки образования и науки
"Алферовский фонд"

объявляют конкурс

на соискание премии **имени профессора Бориса Львовича Овсиевича** за фундаментальные экономико-математические исследования, выполненные в России. В конкурсе могут участвовать **лица, не достигшие 40 лет к 31 декабря 2011 г.** и имеющие публикации в ведущих рецензируемых отечественных и (или) зарубежных журналах.

Работу на конкурс представляет сам претендент при обязательном наличии рекомендации от Ученого совета Института РАН или ВУЗ`а либо от академика или члена-корреспондента РАН. Представление пишется в произвольной форме и только в печатном виде. Выдвижение на премию коллектива авторов не допускается.

В комплект заявки на конкурс входят документы, указанные на сайте **www.alferov-fond.ru и http://emi.nw.ru.** Документы высылаются в СПб ЭМИ РАН с пометкой "На конкурс имени Б.Л. Овсиевича" до **30 декабря 2011 г. по почтовому штемпелю** по адресу: **191187 СПб, ул. Чайковского, д. 1.**

Заявки ценными бандеролями не отправлять.

Контактный телефон (812) 273 79 53. Электронная почта для справок**: konkurs@emi.nw.ru**

Число и размер премий определяется Советом премии ежегодно по итогам конкурса.

Конкурс проводится с 2005 г. За 6 лет лауреатами стали 25 человек.

Церемония вручения премий, которая состоится в апреле–мае 2012 г., включает выступления лауреатов с докладами перед научной общественностью.

Информация о результатах конкурса публикуется в газете "Поиск".

Сдано в набор 06.07.2011 г. Подписано к печати 30.08.2011 г. Формат бумаги $60 \times 88^1/_8$
Цифровая печать Усл.печ.л. 22,0 Усл.кр.-отт. 5.5 тыс. Уч.-изд.л. 22.1 Бум.л. 11.0
Тираж 243 экз. Зак. 1774

Учредители: Российская академия наук, Центральный экономико-математический институт, Институт проблем рынка

Издатель: Российская академия наук. Издательство «Наука», 117997 Москва, Профсоюзная ул., 90
Оригинал-макет подготовлен АИЦ "Наука" РАН
Отпечатано в ППП "Типография "Наука", 121099 Москва, Шубинский пер., 6