

О ЗАДАЧЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Губатенко В.П.¹

¹ – Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Сформулирована обратная задача электроразведки переменными токами для модели изотропной частотно-дисперсной геологической среды. Доказана возможность редукции этой задачи к задаче продолжения электромагнитного поля вглубь земли. Приведен пример не единственности решения одномерной обратной задачи для случая немагнитной среды с частотно-дисперсной проводимостью. Для устранения такой неоднозначности необходимо использовать априорную информацию о законе частотной дисперсии проводимости.

Ключевые слова: обратная задача, электроразведка, частотно-дисперсные среды, продолжение электромагнитного поля

Поставим несколько обратных задач электроразведки для модели изотропной геологической среды, характеризуемой проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ . Рассмотрим формулировку этих задач в частотной области в предположении, что параметры геологической среды σ и μ обладают частотной дисперсией.

Обратная задача 1

Пусть x, y, z – прямоугольные декартовы координаты в трехмерном евклидовом пространстве R^3 . Будем искать коэффициенты σ и μ уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H} \quad (2)$$

в области $V = \{M(x, y, z) \in R^3 \mid z > 0\}$ (в земле), где $\mathbf{E} = \mathbf{E}(M, i\omega) = \mathbf{E}(x, y, z, i\omega) = (E_x, E_y, E_z)$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}(M, i\omega) = \mathbf{H}(x, y, z, i\omega) = (H_x, H_y, H_z)$ – соответственно комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей в земле; i – мнимая единица; ω – круговая частота.

Пусть неизвестные параметры $\sigma = \sigma(x, y, z, i\omega)$ и $\mu = \mu(x, y, z, i\omega)$ удовлетворяют условиям

$$\sigma(M, i\omega) \neq 0, \quad \mu(M, i\omega) \neq 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{Re} \sigma(M, i\omega) \geq 0, \quad \operatorname{Im} \mu(M, i\omega) \leq 0, \quad (4)$$

$$\sigma(M, i\omega) \in C^{k-1}(V), \quad \mu(M, i\omega) \in C^{k-1}(V), \quad k \geq 3. \quad (5)$$

Условия (3) и (4) выражают физическую реализуемость параметров среды [1], а (5) есть условие их гладкости.

Так как параметры среды доступны измерениям на поверхности земли $z = +0$, то будем их считать известными на этой поверхности:

$$\sigma = \sigma^0(x, y, +0, i\omega), \quad \mu = \mu^0(x, y, +0, i\omega). \quad (6)$$

Предположим так же, что на поверхности $z = +0$ известны векторы поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0(x, y, +0, i\omega), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^0(x, y, +0, i\omega), \quad (7)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0(x, y, +0, i\omega) = (E_x^0, E_y^0, E_z^0)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0(x, y, +0, i\omega) = (H_x^0, H_y^0, H_z^0)$. Тогда уравнения (1) и (2) на поверхности $z = +0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H_z^0}{\partial y} - \frac{\partial H_y^0}{\partial z} \right|_{z=+0} &= \sigma^0 E_x^0, & \left. \frac{\partial E_z^0}{\partial y} - \frac{\partial E_y^0}{\partial z} \right|_{z=+0} &= i\omega \mu^0 H_x^0, \\ \left. \frac{\partial H_x^0}{\partial z} \right|_{z=+0} - \frac{\partial H_z^0}{\partial x} &= \sigma^0 E_y^0, & \left. \frac{\partial E_x^0}{\partial z} \right|_{z=+0} - \frac{\partial E_z^0}{\partial x} &= i\omega \mu^0 H_y^0, & (8) & (9) \\ \left. \frac{\partial H_y^0}{\partial x} - \frac{\partial H_x^0}{\partial y} \right|_{z=+0} &= \sigma^0 E_z^0, & \left. \frac{\partial E_y^0}{\partial x} - \frac{\partial E_x^0}{\partial y} \right|_{z=+0} &= i\omega \mu^0 H_z^0, \end{aligned}$$

где $\left. \frac{\partial E_x}{\partial z} \right|_{z=+0}$, $\left. \frac{\partial E_y}{\partial z} \right|_{z=+0}$, $\left. \frac{\partial H_x}{\partial z} \right|_{z=+0}$, $\left. \frac{\partial H_y}{\partial z} \right|_{z=+0}$ – частные производные компонент электромагнитного поля по координате z на поверхности $z = +0$.

Соотношения (6)–(9) являются граничными условиями обратной задачи. Вместе с тем, видим, что фигурирующие в них функции являются зависимыми. Например, если $E_z^0 \neq 0$, то в качестве независимых функций могут быть выбраны $\mu = \mu^0(x, y, +0, i\omega)$, E_x^0, E_y^0, E_z^0 , $\left. \frac{\partial E_x}{\partial z} \right|_{z=+0}$ и $\left. \frac{\partial E_y}{\partial z} \right|_{z=+0}$. В этом случае функции H_x^0, H_y^0, H_z^0 определяются соотношениями (9). Тогда $\sigma = \sigma^0(x, y, +0, i\omega)$

находится из последнего равенства условий (8) а функции $\left. \frac{\partial H_x}{\partial z} \right|_{z=+0}$, $\left. \frac{\partial H_y}{\partial z} \right|_{z=+0}$ определяются из первого и второго равенств тех же условий. Следовательно, граничные условия обратной задачи принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu^0(x, y, +0, i\omega), & E_x &= E_x^0(x, y, +0, i\omega), & E_y &= E_y^0(x, y, +0, i\omega), \\ E_z &= E_z^0(x, y, +0, i\omega), & \left. \frac{\partial E_x}{\partial z} \right|_{z=+0} &= \varphi(x, y, +0, i\omega), & \left. \frac{\partial E_y}{\partial z} \right|_{z=+0} &= \psi(x, y, +0, i\omega), \end{aligned} \quad (10)$$

где функции в правых частях этих равенств известны. Если же $E_z^0 = 0$, то к граничным условиям (10) добавим

$$\sigma = \sigma^0(x, y, +0, i\omega).$$

Заметим, что из уравнений (1), (2) и условий (4), (5) вытекает

$$\mathbf{E}(M, i\omega) \in C^k(V), \quad \mathbf{H}(M, i\omega) \in C^k(V), \quad (11)$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(M, i\omega) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \mathbf{H}(M, i\omega) = 0. \quad (12)$$

Как следует из постановки обратной задачи, ее решение существует. Очевидно, что если найдено какое-либо решение $\sigma = \tilde{\sigma}(x, y, z, i\omega)$, $\mu = \tilde{\mu}(x, y, z, i\omega)$ этой задачи, то для этих параметров существует однозначное решение уравнений Максвелла (1) и (2) относительно векторных полей \mathbf{E} , \mathbf{H} . Возникает следующий вопрос: можем ли мы редуцировать эту обратную задачу к нахождению векторного поля \mathbf{E} ? Чтобы ответить на этот вопрос поставим следующую обратную задачу.

Обратная задача 2

Пусть скалярные функции σ , μ и векторные поля \mathbf{E} , \mathbf{H} удовлетворяют условиям (3), (5) and (11),(12), и в то же время эти векторные поля не равны тождественно нулю в области V . Поставим следующую обратную задачу:

Предположим, что в области V задано векторное поле \mathbf{E} . Найти в этой области скалярные функции σ , μ и вектор \mathbf{H} , обращающие соотношения (1) и (2) в тождества.

Аналогичная задача может быть рассмотрена для заданного вектора \mathbf{H} и неизвестных функций σ , μ , \mathbf{E} . Однако мы не будем рассматривать ее отдельно, принимая во внимание симметрию (1) и (2) по отношению к формальной замене $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$, $i\omega\mu \leftrightarrow \sigma$, называемой принципом перестановочной двойственности [2].

Лемма 1. Решение 2-й обратной задачи существует тогда и только тогда, когда неизвестная скалярная функция μ есть решение уравнения

$$\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} \right) = 0 \quad (13)$$

за исключением решений μ уравнения

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} \right) = 0. \quad (14)$$

Замечание к лемме 1. Если μ есть решение уравнения (14), то искомый вектор \mathbf{H} тождественно равен нулю.

ЛЕММА 2. Если для заданного вектора \mathbf{E} существует решение 2-й обратной задачи, то в каждой точке $M \in V$ или

$$(\mathbf{E}(M), \text{rot } \mathbf{E}(M)) = 0, \quad (\text{rot } \mathbf{E}(M), \text{rot rot } \mathbf{E}(M)) = 0,$$

или

$$(\mathbf{E}(M), \text{rot } \mathbf{E}(M)) \neq 0, \quad (\text{rot } \mathbf{E}(M), \text{rot rot } \mathbf{E}(M)) \neq 0.$$

Замечание к лемме 2. Если $(\mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{E}) \neq 0, (\text{rot } \mathbf{E}, \text{rot rot } \mathbf{E}) \neq 0$ в некоторой точке $M \in V$, то в силу непрерывности скалярных функций $(\mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{E})$ и $(\text{rot } \mathbf{E}, \text{rot rot } \mathbf{E})$ существует окрестность этой точки, в которой справедливы данные неравенства. Следовательно, задавая вектор \mathbf{E} во 2-й обратной задаче, можно рассмотреть два случая: или $(\mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{E}) \equiv 0, (\text{rot } \mathbf{E}, \text{rot rot } \mathbf{E}) \equiv 0$ в области V , или $(\mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{E}), (\text{rot } \mathbf{E}, \text{rot rot } \mathbf{E})$ не равны тождественно нулю в любой подобласти области V . Первому случаю соответствуют ортогональные векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} , а второму – не ортогональные. Первый случай включает, например, трехкомпонентные плоские и осесимметричные электромагнитные поля, а второй – пятикомпонентные поперечно-электрические и поперечно-магнитные поля [3].

ТЕОРЕМА 1. Если векторное поле \mathbf{E} есть решение уравнений

$$(\mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{E}) = 0, \quad (\text{rot } \mathbf{E}, \text{rot rot } \mathbf{E}) = 0, \quad (15)$$

то для заданного вектора \mathbf{E} решение 2-й обратной задачи существует и не единственно.

Доказательство этой теоремы основано на теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [4]. После нахождения всех решений уравнения (13) и удаления из них решений уравнения (14) можем определить функции σ и \mathbf{H} соотношениями

$$\sigma = \frac{1}{i\omega \mathbf{E}^2} \left(\mathbf{E}, \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{E} \right) \right), \quad \mathbf{H} = \frac{1}{i\omega \mu} \text{rot } \mathbf{E}. \quad (16)$$

Заметим здесь, что первое равенство в (16) определяется из соотношения

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{E} \right) = i\omega \sigma \mathbf{E}. \quad (17)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть вектор \mathbf{E} задан в области V и $(\mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{E}) \neq 0, (\text{rot } \mathbf{E}, \text{rot rot } \mathbf{E}) \neq 0$ в этой области. Для существования решения 2-й обратной задачи необходимо и достаточно, чтобы вектор \mathbf{E} являлся решением уравнения

$$\text{rot } \mathbf{F}^E = 0, \quad (18)$$

$$\text{где } \mathbf{F}^E = \frac{1}{(\text{rot } \mathbf{E}, \text{rot rot } \mathbf{E})} \text{div} \left[\frac{(\text{rot } \mathbf{E}, \text{rot rot } \mathbf{E})}{(\mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{E})} \mathbf{E} \right] \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{(\mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{E})} (\mathbf{E} \times \text{rot rot } \mathbf{E}).$$

При выполнении условий этой теоремы общее решение μ 2-й обратной задачи имеет вид

$$\mu = \mu_0(i\omega) \exp \left(\int_{M_0}^M F_x^E dx + F_y^E dy + F_z^E dz \right), \quad (19)$$

где $\mathbf{F}^E = (F_x^E, F_y^E, F_z^E)$; $M(x, y, z) \in V, M_0(x_0, y_0, z_0) \in V$; функция $\mu_0(i\omega)$ есть произвольная функция частоты ω , но не зависит от координат x, y, z . Проводимость σ и вектор напряженности \mathbf{H} определяются формулами (16). Рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача 3

Как следует из теорем 1 и 2, векторное поле \mathbf{E} порождает семейство функций $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mu, \sigma\}$, обращающее уравнения (1) и (2) в тождества тогда и только тогда, когда \mathbf{E} удовлетворяет уравнениям (15) или уравнению (18). Множество таких векторных полей \mathbf{E} определяет всевозможные параметры среды σ и μ , в том числе подчиняющиеся условиям физической реализуемости (4). Для единственного восстановления параметров среды, в соответствии с теоремами 1 и 2 необходима априорная информация о распределении магнитной проницаемости μ в области V .

Предположим, например, здесь и далее, что $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Такое условие выполняется для подавляющего числа горных пород. В этом случае как для ортогональных полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , так и для не ортогональных, вектор \mathbf{E} должен быть решением уравнения

$$\mathbf{E} \times \text{rot rot } \mathbf{E} = 0. \quad (20)$$

Тогда 1-я обратная задача редуцируется к следующей задаче:

Обратная задача 3.1. Найти решение \mathbf{E} уравнения (20), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} E_x &= E_x^0(x, y, +0, i\omega), & E_y &= E_y^0(x, y, +0, i\omega), \\ E_z &= E_z^0(x, y, +0, i\omega) \neq 0, & \frac{\partial E_x}{\partial z} \Big|_{z=+0} &= \varphi(x, y, +0, i\omega), & \frac{\partial E_y}{\partial z} \Big|_{z=+0} &= \psi(x, y, +0, i\omega), \end{aligned} \quad (21)$$

или, в случае $E_z = 0$, условиям

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^0(x, y, +0, i\omega), & E_x &= E_x^0(x, y, +0, i\omega), & E_y &= E_y^0(x, y, +0, i\omega), \\ & & \frac{\partial E_x}{\partial z} \Big|_{z=+0} &= \varphi(x, y, +0, i\omega), & \frac{\partial E_y}{\partial z} \Big|_{z=+0} &= \psi(x, y, +0, i\omega). \end{aligned} \quad (22)$$

Если 1-я обратная задача имеет единственное решение, то и напряженность \mathbf{E} определяется однозначно из задачи 3.1. Имея решение \mathbf{E} обратной задачи 3.1, функции σ и \mathbf{H} определяются по формулам (16).

Покажем на простой классической модели магнитотеллурических зондирований, что решение как обратной задачи 1 так и задачи 3.1 не единственно в случае частотной дисперсии проводимости. Предположим, что в области V расположена немагнитная среда ($\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$) с проводимостью $\sigma = \sigma(z, i\omega)$, и пусть возбуждается электромагнитное поле $\mathbf{E} = (E_x(z, i\omega), 0, 0)$, $\mathbf{H} = (0, H_y(z, i\omega), 0)$ с ортогональными векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} . Тогда в области V уравнение (20) (или уравнение (17)) имеет вид

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + i\omega\mu_0\sigma E_x = 0. \quad (23)$$

Зададим граничные условия (22) равенствами

$$\sigma^0(+0, i\omega) = \sigma_0, \quad E_x = E^0(i\omega), \quad \frac{dE_x}{dz} \Big|_{z=+0} = \varphi(i\omega) = -\sqrt{-i\omega\mu_0\sigma_0} E^0(i\omega), \quad (24)$$

где $\sigma_0 = \text{const} > 0$; $\text{Re}\sqrt{-i\omega\mu_0\sigma_0} > 0$; $E^0(i\omega)$ – произвольная комплексная функция круговой частоты ω . Легко показать, что как

$$\sigma = \sigma_0, \quad E_x = E^0(i\omega)\exp(-k_0 z) \quad (25)$$

так и

$$\sigma = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{k_0^2 + k_1(k_1 - k_0)(2k_0 - k_1)z + \frac{k_1(k_1 - k_0)^2}{2} z^2}{1 + (k_1 - k_0)z + \frac{(k_1 - k_0)^2}{2} z^2}, \quad (26)$$

$$E_x = E^0(i\omega) \left[1 + (k_1 - k_0)z + \frac{(k_1 - k_0)^2}{2} z^2 \right] \exp(-k_1 z),$$

где $k_0 = \sqrt{-i\omega\mu_0\sigma_0}$; $k_1 = \sqrt{-i\omega\mu_0\sigma_1}$, $\sigma_1 = \text{const}$, $\sigma_0 < \sigma_1 < 4\sigma_0$, являются решениями задач 1 и 3.1.

Решению (25) соответствует квазистационарное поле в однородном полупространстве с проводимостью $\sigma = \sigma_0$, а решению (26) – физически реализуемая градиентная частотно-дисперсная среда ($\text{Re}\sigma > 0$, $\text{Im}\sigma < 0$ для всех $\omega > 0$). Оба решения не противоречат теореме единственности [5], в которой не предполагалась частотная дисперсия проводимости σ .

Этот показывает, что для нахождения единственного решения обратной задачи необходимо привлечь дополнительную априорную информацию о природе частотной дисперсии. Если, например, известно, что σ не зависит от ω , то можно предложить метод [6-9], примененный для обратной задачи акустики. В самом деле, так как проводимость σ определяется формулой (16) и не зависит от круговой частоты ω , то

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{1}{\omega \mathbf{E}^2} (\mathbf{E}, \text{rot rot } \mathbf{E}) \right] = 0, \quad (27)$$

и можно поставить следующую обратную задачу:

Обратная задача 3.2. Найти решение \mathbf{E} системы уравнений (20), (27), удовлетворяющее граничным условиям (21) в случае $E_z \neq 0$ или условиям (22) если $E_z = 0$.

Решение этой задачи существует и единственно, по крайней мере, для одномерной задачи магнитотеллурики. Если решение задачи 3.2 найдено, то σ и \mathbf{H} вычисляются по формулам (16)

Автор благодарит Российский фонд фундаментальных исследований за финансовую поддержку гранта 10-05-00 753-а, а также Swedish Institute, Visby Program.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1982.
2. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. М.: «Советское радио». 1971.
3. Светов Б.С., Губатенко В.П. Аналитические решения электродинамических задач. М.: Наука. 1988.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука. 1969.
5. Тихонов А.Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т.5. №3. С. 545-547.
6. Beilina L. and Klivanov M.V. A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem, SIAM J. Sci. Comp., 31, 478-509, 2008.
7. Beilina L. and Klivanov M.V. Synthesis of global convergence and adaptivity for a hyperbolic coefficient inverse problem in 3D, J. Inverse and Ill-posed Problems, 18, 85-132, 2010.
8. Beilina L. and Klivanov M.V. Reconstruction of dielectrics from experimental data via a hybrid globally convergent/adaptive inverse algorithm, Inverse Problems, 26, 125009, 2010.
9. Beilina L. and Klivanov M.V. Approximate global convergence and adaptivity for Coefficient Inverse Problems, Springer, New-York, 2012.