МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»,

посвященная 100-летию со дня рождения Б.В.Гнеденко

(Москва, 26–30 июня 2012 года)

Тезисы докладов

INTERNATIONAL CONFERENCE «PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS»

In Commemoration of the Centennial of B.V.Gnedenko

(Moscow, June 26–30, 2012)

Abstracts

Москва
2012

ББК 22.1г 22.171 74

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ», посвященная 100-летию со дня рождения Б.В.Гнеденко (Москва, 26–30 июня 2012 года). Тезисы докладов / Под редакцией А.Н. Ширяева, А.В. Лебедева. — М.: ЛЕНАНД, 2012. — 400 с.

ISBN 978-5-9710-0492-9

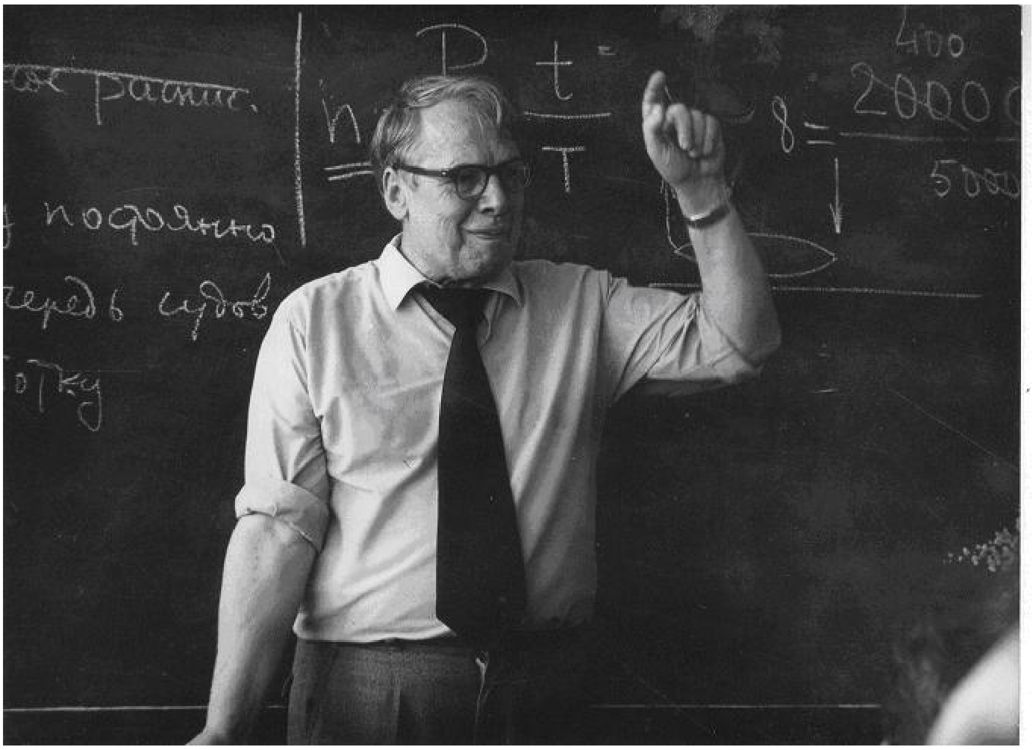
В сборнике представлены тезисы докладов Международной конференции «Теория вероятностей и ее приложения», посвященной 100-летию со дня рождения великого русского ученого Бориса Владимировича Гнеденко (01.I.1912 – 27.XII.1995), прошедшей на механико-математическом факультете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова 26–30 июня 2012 года.

Семь основных секций конференции отражают научные интересы и достижения Б.В.Гнеденко в различных областях теории вероятностей и ее приложений, истории математики и математического образования. В докладах конференции представлены итоги развития его идей и результатов.

Сборник будет полезен преподавателям школ и вузов, научным сотрудникам, студентам и всем, кто интересуется современной математикой, историей математики или ее преподаванием.

ISBN 978-5-9710-0492-9

Предисловие



БОРИС ВЛАДИМИРОВИЧ ГНЕДЕНКО (1.I.1912 – 27.XII.1995)

Б.В. Гнеденко родился 1 января 1912 г. в Симбирске (ныне Ульяновск).

В 1930 году он окончил физико-математическое отделение педагогического факультета Саратовского университета. С сентября 1930 по август 1934 года Б.В. Гнеденко работал ассистентом Текстильного института в Иванове. Здесь Борис Владимирович увлекся теорией вероятностей, здесь им были написаны первые работы по теории массового обслуживания. Этот период деятельности сыграл огромную роль в его формировании как ученого и педагога.

В 1934 году Борис Владимирович поступил в аспирантуру механико-математического факультета МГУ. Его учителями были А.Я. Хинчин и А.Н. Колмогоров. Кандидатскую диссертацию на тему «О некоторых результатах по теории безгранично делимых распределений» он защитил в июне 1937 года. С 1 сентября этого же года Б.В. Гнеденко — младший научный сотрудник Института математики МГУ, а с 1 сентября 1938 года — доцент кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ. Докторскую диссертацию «Предельные теоремы для независимых случайных величин» Б.В.

Гнеденко защитил 28 мая 1941 года. Диссертация состояла из двух частей: теории суммирования и теории максимального члена вариационного ряда. С тех пор Борис Владимирович считается основателем математической теории экстремальных значений случайных последовательностей.

С 16 октября 1942 года по 20 августа 1945 года Б.В. Гнеденко — профессор механико-математического факультета МГУ. В 1945 году Украинская Академия наук избирает Бориса Владимировича своим членом-корреспондентом. В этом же году он переезжает во Львов и работает в академических учреждениях и в университете. В 1948 году Борис Владимирович избирается академиком АН УССР.

Исследования по предельным теоремам были подытожены Б.В. Гнеденко в совместной с А.Н. Колмогоровым монографии «Предельные распределения для сумм независимых случайных величин» (1949 г.). За эту книгу авторам в 1951 году была присуждена премия им. П.Л. Чебышева.

Курс лекций по теории вероятностей, который Борис Владимирович читал в Львовском университете, послужил ему основой для написания учебника «Курс теории вероятностей» (1949 г.). Эта книга многократно издавалась в разных странах и является одним из основных учебников по теории вероятностей и в наши дни.

В 1946 году выходят его «Очерки по истории математики в России» и совместная с А.Я. Хинчиным книга «Элементарное введение в теорию вероятностей».

С 1950 года Б.В. Гнеденко работает в Киеве в Институте математики АН УССР и в университете (заведующий отделом теории вероятностей Института математики (1950-1960) и директор этого института (1955 – 1958), заведующий кафедрой теории вероятностей и алгебры КГУ, председатель бюро Отделения физико-математических и химических наук АН УССР).

Переехав в Киев, Борис Владимирович обращается к новой проблематике, на этот раз относящейся к математической статистике (проверка однородности двух выборок). Этот цикл его работ получил мировое признание. В этот же период Б.В. Гнеденко начинает разрабатывать два направления прикладных научных исследований — теорию массового обслуживания и применение математических методов в медицине. Работа по первому направлению привела к выходу монографии «Введение в теорию массового обслуживания» (совместно с И.Н. Коваленко) (1966), а по второму — к созданию первого в мире электронного диагноста сердечных заболеваний (совместно с Н.М. Амосовым, Е.А. Шкабара и М.А. Куликовым) (1960). С 1955 года Борис Владимирович возглавил работу по организации Вычислительного центра АН УССР, руководил работами по созданию универсальной вычислительной машины «Киев» и специализированной машины для решения систем линейных алгебраических уравнений, написал (совместно с В.С. Королюком и Е.Л. Ющенко) первый в нашей стране (в открытой печати) учебник по программированию (1961 г.).

В 1960 году Б.В. Гнеденко возвращается в МГУ на должность профессора кафедры теории вероятностей механико-математического факультета, которой руководит с 1966 года до последних дней своей жизни.

В Москве Борис Владимирович начинает заниматься теорией надежности, организует вместе с Я.М.Сориным, Ю.К.Беляевым, А.Д.Соловьевым, Я.Б. Шором и Л.Я. Шухгальтером Всесоюзный семинар по различным вопросам надежности при Политехническом музее, открывает семинар по математическим вопросам теории надежности на механико-математическом факультете. Совместно с Ю.К. Беляевым и А.Д. Соловьевым выпускает монографию «Математические методы в теории надежности» (1965 г). За цикл работ в области надежности Б.В. Гнеденко вместе с ближайшими сподвижниками был удостоен

Государственной премии СССР (1979 г.).

В связи с задачами надежности Борис Владимирович вновь вернулся к исследованию предельных теорем для сумм независимых случайных величин, но уже в случайном числе. За эти работы ему присуждается премия им. М.В. Ломоносова первой степени (1982 г.) и премия Минвуза СССР (1986 г.).

Борис Владимирович обращал внимание на математические проблемы страхования, участвовал, по крайней мере, в одном Астиновском коллоквиуме (ASTIN colloquium, Sopot, 1969). По его инициативе и с его активным участием на механико-математическом факультете в 1993 году была открыта экономическая специализация для подготовки специалистов в области актуарно-финансовой математики.

Борис Владимирович продолжал интересоваться вопросами истории математики. В различных журналах печатались его статьи на эту тему.

Совместно с А.И. Маркушевичем Б.В. Гнеденко руководил работой семинара по вопросам преподавания математики в средней школе. Он тесно сотрудничал с редакциями журналов «Математика в школе» и «Вестник высшей школы». Им было опубликовано большое число статей и книг по различным аспектам преподавания.

Борис Владимирович был избран почетным доктором Берлинского университета им. Гумбольдта (1976 г.), почетным доктором Афинского Экономического университета (1993 г.), являлся членом Королевского Статистического общества (Великобритания), членом редколлегий ряда отечественных и зарубежных журналов.

С наиболее полным списком работ Бориса Владимировича можно познакомиться в Интернете (Electronic Journal «Reliability: Theory and Applications», http://www.gnedenko-forum.org/Journal/2011_4.html).

26–30 июня 2012 года на механико-математическом факультете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова состоялась Международная конференция «Теория вероятностей и ее приложения», посвященная 100-летию со дня рождения Б.В. Гнеденко.

Семь основных секций конференции отражают научные интересы и достижения Б.В.Гнеденко в различных областях теории вероятностей и ее приложений, истории математики и математического образования. В докладах конференции представлены итоги развития его идей и результатов.

Информация о конференции

Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения выдающегося отечественного математика, классика теории вероятностей Б.В.Гнеденко, прошла с 26 по 30 июня 2012 г. на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова. Организаторами конференции являются МГУ им. М.В.Ломоносова, Математический институт имени В.А.Стеклова РАН и Московский институт электроники и математики (МИЭМ).

В Президиум Организационного и Программного комитета входят: В.А.Садовничий, В.В.Козлов, Ю.В.Прохоров, А.Н.Ширяев, В.Н.Чубариков, В.А.Каштанов.

На конференции прошел ряд часовых пленарных заседаний с выступлением специально приглашенных докладчиков. Научная тематика конференции представлена также на заседаниях секций:

1. Предельные теоремы

2. Стохастическая теория экстремумов

3. Теория массового обслуживания

4. Математическая теория надежности

5. Актуарная математика

6. История математики

7. Преподавание математики

8. Разное

На каждой секции заслушаны 45-минутные приглашенные доклады и 25-минутные сообщения. Официальными языками конференции были английский и русский.

Оргкомитет конференции

В.А. Садовничий (сопредседатель), академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ректор МГУ им. М.В. Ломоносова

Ю.В. Прохоров (сопредседатель), академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, заведующий отделом теории вероятностей и математической статистики МИРАН им. В.А. Стеклова

А.Н. Ширяев (сопредседатель), академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

В.Н. Чубариков (заместитель председателя), д.ф.-м.н., профессор, и.о. декана механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

В.В. Козлов, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, директор МИРАН им. В.А. Стеклова

В.А. Каштанов, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой исследования операций факультета прикладной математики Московского института электроники и математики

И.Н. Сергеев, д.ф.-м.н., профессор, заместитель декана по науке механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Д.В. Георгиевский, д.ф.-м.н., профессор, заместитель декана по работе с иностранными учащимися механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Л.Г. Афанасьева, д.ф.-м.н., профессор

Е.В. Булинская, д.ф.-м.н., профессор

С.С. Демидов, д.ф.-м.н., профессор

Б. Димитров, д.ф.-м.н., профессор

В.И. Питербарг, д.ф.-м.н., профессор

Н.Х. Розов, д.ф.-м.н., профессор
В.В. Рыков, д.ф.-м.н., профессор
Н.А. Северцев, д.т.н., профессор
В.В. Сенатов, д.ф.-м.н., профессор
Н. Сингпурвалла, профессор
Ю.Н. Тюрин, д.ф.-м.н., профессор
И.А. Ушаков, д.т.н., профессор
Г.И. Фалин, д.ф.-м.н., профессор
М.А. Шнепс-Шнеппе, д.т.н., профессор

Программный комитет

Бюро программного комитета

В.А. Садовничий, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ректор МГУ им. М.В. Ломоносова

Ю.В. Прохоров, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, заведующий отделом теории вероятностей и математической статистики МИРАН им. В.А. Стеклова

А.Н. Ширяев, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

В.Н. Чубариков, д.ф.-м.н., профессор, и.о. декана механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

В.В. Козлов, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, директор МИРАН им. В.А. Стеклова

Члены программного комитета

В.В. Анисимов (Украина, Великобритания)
А.М. Андронов (Латвия)
Р. Барлоу (США)
Ю.К. Беляев (Россия, Швеция)
А.Г. Гаджиев (Азербайджан)
И.Б. Герцбах (Израиль)
Б.И. Григелионис (Литва)
Э.А. Даниэлян (Армения)
В.М. Золотарев (Россия, США)
А.М. Зубков (Россия)
В.А. Каштанов (Россия)
И.Н. Коваленко (Украина)
В.С. Королюк (Украина)
В.А. Малышев (Россия)
М.С. Никулин (Россия, Франция)
Б.А. Севастьянов (Россия)
Н. Сингпурвалла(США)
М.А. Федоткин (Россия)
Ш. Форманов (Узбекистан)
Ю.С. Харин (Беларусь)

Сайт конференции – http://gnedenko100conference.ru

Пленарные доклады
Plenary Lectures

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Statistical Models and Analysis of Interval Data Collected in Elicitation Surveys[1]

Yuri K. Belyaev[2]

Selected results obtained together with Bengt Kriström are included in this communication.

Evaluation of future possible prices of new improved market goods, or costs of retention environmental quality, can be based on opinions of individuals randomly sampled from related population $\mathfrak{P}$. Special questionnaires are developed for such investigations. We propose a novel two-step approach to elicitation in surveys and provide supporting statistical theory for the models suggested. Each sampled individual is suggested freely to state any interval with possible values of prices containing his/her true price which is optimal with respect to individual's utility function. These intervals are called self-selected and the true prices are called willingness to pay (WTP-)points. The ends of self-selected intervals are numbers usually rounded to simple sums of common values of coins or paper money. The essential idea is to combine self-selected intervals obtained in a first step and then employ brackets generated from the self-selected intervals in a second step. In this way we combine the advantages of self-selected intervals, mainly related to the fact that the individuals often find it difficult to report a precise point-estimate of a quantity of price, with the documented usefulness of brackets. Because the brackets are generated from the first step sample we sidestep the thorny problem of the optimal design of brackets and an additional assumption on possible dependency between the self-selected intervals and their WTP-points of interest.

We introduce three basic assumptions and consider the following two-step design of data collecting. In the first step randomly sampled individuals provide self-selected intervals that contain their true WTP-points. Let n randomly sampled respondents, from a population $\mathfrak{P}$ of interest, have stated intervals $\mathbf{y}_1^n = \{\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n\}, \mathbf{y}_i = (y_{Li}, y_{Ri}]$, containing their WTP-points. Due to rounding, the same intervals can be stated by several respondents. All different ends of stated self-selected intervals generate division intervals $\mathcal{V}_k = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$. In the second step of data collection we prolong random sampling of new (not yet sampled) individuals from the population $\mathfrak{P}$. In the second step each individual is to announce freely an interval containing his/her WTP-point. If the interval was not stated in the first step then we do not include it in the collected data. Otherwise we ask the respondent to select the division interval containing his/her true WTP-point. The respondents may well abstain from answering this second question and we will cater for these events in the collected data. Then ipso facto our statistical inferences will be valid surely only on the subset of individuals in the population $\mathfrak{P}$ who will state the same self-selected intervals already stated in the first step of data collection. The coverage probability characterizes this subset. We suggest a low consistent estimator of this probability. The collected data will be the list of triples $\{i, \mathbf{z}_i, NA\}$, or $\{i, \mathbf{z}_i, \mathbf{v}_{j_i}\}$ where i is the current number of the requested individual, NA is "no answer"to the additional question,

[1]This work was supported by projects at the Department of Forest Economics, SLU.
[2]Swedish University of Agricultural Sciences (SLU) and Umeå University.
E-mail: `yuri.belyaev@sekon.slu.se`

$\mathbf{z}_i$ is the stated self-selected interval and $\mathbf{v}_{j_i}$ is the added division interval. We call the triples, respectively singles and pairs.

It is possible to find consistent estimates of $\mathbf{q}_{tr} = \{q_{tr1}, ..., q_{trk}\}$, i.e. of the projection WTP-distribution of interest on the division intervals $\mathcal{V}_k$. We obtain the statistical model with the log likelihood function corresponding the collected list of data with pairs and triplets. The parameters are probabilities in the vector $\mathbf{q}_{tr}$. Their ML-estimates $\check{q}_j, j = 1, ..., k$, are consistent and efficient. We find these ML-estimates. By applying independent resamplings from the data collected in the second step we obtain consistent estimate of the normalized covariance matrix of the ML-estimators deviations from the true values $\mathbf{q}_{tr}$. The application of resampling methods is possible because the statistical model possesses the standard regularity properties.

References

[1] *Belyaev Y.K. and Kriström B.*, Approach to Analysis of Self-Selected Interval Data. CERE WP2, 2010, p. 1–34.

[2] *Belyaev Y.K. and Kriström* B., Analysis of contingent valuation data with self-selected rounded WTP-intervals collected by two-step sampling plans. Proceedings of the 9^{th} Conference on Multivariate Statistics. Tartu, 2011, pp 14. (In print).

[3] *Belyaev, Y. and Kriström B.*, Two-Step Approach to Self-Selected Interval Data in Elicitation Surveys, 2012, pp. 45.(Submitted).

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

The worldwide influence of the work of B.V. Gnedenko

Nicholas H. Bingham[1]

We shall discuss the woldwide influence of the work of B. V. Gnedenko (1912-1995). The plan of the talk is the following:

1. Early work: limit theorems
2. Early work: maxima
3. Reliability and queueing theory
4. Empiricals and statistics
5. Books
6. History of mathematics
7. Some reminiscences.

[1]Imperial College London, Department of mathematics. E-mail: N.Bingham@imperial.ac.uk

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Gnedenko's Classical Theorem and Modern Problems of Renewal Theory[1]

Alexander A. Borovkov[2] and Konstantin A. Borovkov[3]

Gnedenko's classical local limit theorem for sums $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ of i.i.d. r.v.'s ξ_j and its analogs for non-lattice distributions, together with large deviation bounds, prove to be crucial for establishing the asymptotic behaviour of the sums $\sum_{n\ge1} a_n \mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta))$ as $x \to \infty$, where we assume that $\mathbf{E}\,\xi_j \in (0,\infty)$ and $\{a_n\}$ is a numerical sequence satisfying broad assumptions on its "behaviour on average", and $\Delta > 0$ is fixed. The novelty is not only in much broader conditions on the weights $\{a_n\}$ compared to the known results, but also in that neither the jumps ξ_j nor the weights a_j need to be positive.

Let $\{\xi_j\}_{j\ge1}$ be a sequence of i.i.d. random variables with a c.d.f. F, $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \ge 1$. In 1948–1949 B.V. Gnedenko proved the following remarkable fact (see §§ 49, 50 in [3]): if ξ_j are arithmetic, $\mathbf{E}\,\xi_j^2 < \infty$ or ξ_j belong to the domain of attraction of a non-normal stable law (so that $(S_n - \alpha_n)/\beta_n$ converge in law for some sequences $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$), with density ϕ, then

$$\lim_{n\to\infty} \sup_k |\beta_n \mathbf{P}(S_n = k) - \phi((k-\alpha_n)/\beta_n)| = 0.$$

In the mid-1960s, the result was extended to the non-lattice case by L.A. Shepp and C. Stone in the form of "integro-local limit theorems" providing uniform (in both $x \in \mathbb{R}$ and Δ from finite intervals bounded away from 0) approximation to probabilities $\mathbf{P}(S_n \in (x, x+\Delta])$.

Not only did these local/integro-local theorems provide deep insight into the nature of convergence in the classical limit theorems, but they also proved later to be powerful tools in establishing exact large deviations results (see e.g. Ch.6 in [1]).

Moreover, as discussed in our talk, these theorems also play important role in extending the result of the famous Blackwell renewal theorem to answer the following question that is of interest in a number of applications: assuming that $\mu := \mathbf{E}\,\xi > 0$ and $\{a_n\}$ is a numerical sequence, what is the asymptotics, as $x \to \infty$, of the quantity

$$h(x,\Delta) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta)).$$

There is a substantial literature devoted to studying the asymptotics of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{P}(S_n < x)$ and $h(x,\Delta)$ as $x \to \infty$, recent surveys and further references being available in [4, 5]. Of the known general results, the following assertion stated as Theorem 6.1 in [4] is the closest to the topic of our research: *If the sequence $\{a_n\}$ is regularly oscillating in the sense that*

[1]This work was supported by the President of the Russian Federation Grant NSh-3695.2008.1, the RFBR Grant N 08–01–00962 and the ARC Centre of Excellence for Mathematics and Statistics of Complex Systems.

[2]Sobolev Institute of Mathematics, Ac. Koptyug avenue 4, 630090 Novosibirsk, Russia, and Novosibirsk State University. E-mail: borovkov@math.nsc.ru.

[3]Department of Mathematics and Statistics, The University of Melbourne, Parkville 3010, Australia. E-mail: borovkov@unimelb.edu.au.

$\lim_{x,y\to\infty,\ x/y\to 1} a_x/a_y = 1$ (we use the convention that $b_x := b_{\lfloor x\rfloor}$ for a sequence $\{b_n\}$, where $\lfloor x\rfloor$ is the integer part of x) *and, as* $x\to\infty$, *one has*

$$\mathbf{P}(\xi \ge x) = o\left(a_x/A_x\right), \quad \textit{where} \quad A_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \tag{1}$$

then, in the non-lattice case, for any fixed $\Delta > 0$ *one has* $h(x,\Delta) \sim \dfrac{\Delta}{\mu} a_{x/\mu}$ as $x\to\infty$. Here $\sim$ denotes asymptotic equivalence ($f(x)\sim g(x)$ iff $f(x)/g(x)\to 1$ as $x\to\infty$). An analogous relation holds under the same assumptions in the arithmetic case as well (Theorem 3.1 in [4]). These results are direct extensions of the celebrated Blackwell theorem in Renewal Theory that describes the asymptotics of $h(x,\Delta)$ as $x\to\infty$ in the case where $a_n\equiv 1$.

We establish asymptotics of the above-mentioned form under much more general conditions on $\{a_n\}$, allowing ξ to assume values of both signs. First we consider two cases that can be treated using the same approach based on the integro-local theorems and some large deviation bounds from [1]: the case of finite variance, and the case where F belongs to the domain of attraction of a stable law with index $\alpha\in(1,2)$. About the weight sequence we assume that it is "ψ-locally constant on average", i.e. when, for a fixed non-decreasing function $\psi(t) > 1$, $t > 0$, there exists an r.v.f. $d(t)$ such that $d(t) = o(\psi(t))$ as $t\to\infty$ and the "averaged sequence"

$$\tilde a_n := \frac{1}{d(n)} \sum_{n\le k<n+d(n)} a_k > 0$$

is ψ-locally constant (see Definition 1.2.7 in [1]): $\lim_{n\to\infty} \tilde a_{n+v\psi(n)}/\tilde a_n = 1$ for any fixed $v\in\mathbb{R}$. For such sequences, provided that an analog of (1) holds with $\{a_n\}$ replaced by $\{\tilde a_n\}$ (and a couple of further broad conditions are met), we demonstrate that

$$h(x,\Delta) \sim \frac{\Delta}{\mu}\tilde a_{x/\mu}, \quad x\to\infty. \tag{2}$$

We also obtain necessary and sufficient conditions for (2) under the assumption that $\mathbf{E}\,\xi^2<\infty$ and the tails of F are of "locally regular variation".

Finally, we establish the asymptotics of $h(x,\Delta)$ under the assumptions that F satisfies the moment Cramér condition and $a_n = b_n e^{qn}$, where $\{b_n\}$ is a ψ-l.c. sequence with $\psi(t)=\sqrt{t}$, $b_n = O(\tilde b_n)$, and $q = \text{const}$.

For precise formulations of the above-mentioned results and their proofs, see [2].

References

[1] *Borovkov A.A., Borovkov K.A.*, Asymptotic Analysis of Random Walks: Heavy-Tailed Distributions. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[2] *Borovkov A.A., Borovkov K.A.*, Blackwell-type theorems for weighted renewal functions. arXiv:1201.0836v1, 2012.

[3] *Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N.*, Limit distributions for sums of independent random variables. Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1954.

[4] *Lin J.*, Some Blackwell-type renewal theorems for weighted renewal functions. J. Appl. Prob., 2008, v. 45, p. 972–993.

[5] *Omey E., Teugels J.L.*, Weighted renewal functions: A hierarchical approach. Ann. Appl. Prob., 2002, v. 34, p. 394–415.

International conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

A dynamical competing risks model for filtering reliability and tracking survivability

Nozer D. Singpurwalla [1]

Should probability be the sole basis for reliability theory? In this talk I wish to propose a paradigm change in reliability theory, to which the likes of Gnedenko, Kolmogorov, Belyaev and Soloyev have contributed much, by suggesting that a satisfactory mathematical theory of reliability is achieved by making probability work in concert with Popper's notion of propensity. A theoretical framework for doing so is provided by deFinetti's theorem on exchangeable sequences.

To illustrate my point of view, I consider the quintessential problem of *reliability growth*. This problem which arises in the actuarial, the biomedical, and the engineering sciences best viewed as a dynamical system. In the framework considered here, it is analyzed by filtering reliability, which is now viewed as a propensity, and tracking survivability which is interpreted as a probability. This framework, which is one of interpretation, may have a broader appeal in other contexts wherein filtering and tracking are done.

[1] The George Washington University, Washington, D.C., USA. E-mail: nozer@gwu.edu

СЕКЦИЯ 1

Предельные теоремы
Limit Theorems

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Формулы для производящих функций в задаче о покрытии дискретной окружности

Вадим А. Авдеев[1]

В работе обсуждается дискретный аналог задачи о покрытии окружности единичной длины n случайными дугами длины α.

1 Введение

Задачи, связанные с покрытием окружности единичной длины n случайными дугами длины α, являются классическими и изучались большим количеством авторов. Еще в 1897 году подобными вопросами задавался Уитворт в своей книге [1].

Стивенс в работе [2] 1939-го года был первым, кто нашел точную формулу для вероятности полного покрытия окружности в этом случае:

$$p(n,\alpha) = \sum_{k=0}^{[\frac{1}{\alpha}]} (-1)^k \binom{n}{k} (1-k\alpha)^{n-1}.$$

Дискретные варианты этой задачи рассматривали в своих статьях Холст [3], Ивченко [4] и Юйе [5].

В данном докладе рассматривается следующая модель покрытия: пусть имеется k ячеек, расположенных на окружности и занумерованных числами $1,\ldots,k$ по часовой стрелке. Будем n раз выбирать равномерно и независимо одну из них и класть в m последующих ячеек, начиная с нее, по частице. Как можно вычислить вероятность полного покрытия окружности, то есть того, что в каждой ячейке будет находиться как минимум одна частица?

2 Основные результаты

В настоящей работе исследование данной вероятности сводится к вычислению $f_k^m(n)$ — количества упорядоченных способов выбрать n точек на окружности таким образом, чтобы в результате имеющего процесса она была полностью покрыта:

$$p_k^m(n) = \frac{1}{k^n} f_k^m(n),$$

где $f_k^m(n)$ удается представить в виде суммы специального вида:

$$f_k^m(n) = \sum_{t=1}^{k} t! S(n,t) \varphi_k^m(t).$$

[1]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: avdeev.vadim@gmail.com

В этом представлении $S(n,t)$ — числа Стирлинга второго рода, и $\varphi_k^m(t)$ — количество всех таких t-подмножеств k-элементной окружности, все расстояния между соседними точками которых не больше, чем m.

Основной результат состоит в том, что с помощью этого представления для $f_k^m(n)$ находится производящая функция по параметру k:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k^m(n)x^k = \frac{1-(m+1)x^m + mx^{m+1}}{(1-x^m)\left(1-x^{m+1}\right)}\mathrm{Li}_{-n}\left(\frac{x-x^{m+1}}{1-x^{m+1}}\right) \tag{1}$$

(здесь $\mathrm{Li}_s(x)$ — функция полилогарифма: $\mathrm{Li}_s(x) = \sum_{t=1}^{+\infty}\frac{x^t}{t^s}$) и производящая функция по параметрам k и n одновременно:

$$\sum_{k,n=1}^{+\infty} f_k^m(n)x^k\frac{y^n}{n!} = \frac{\left(x-(m+1)x^{m+1}+mx^{m+2}\right)(e^y-1)}{(1-x)\left(1-x-\left(x-x^{m+1}\right)(e^y-1)\right)}.$$

При $m=2$ можно выписать в явном виде и производящую функцию по параметру n:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_k^2(n)\frac{y^n}{n!} = \left(\frac{e^y-1-\sqrt{e^{2y}+2e^y-3}}{2}\right)^k + \left(\frac{e^y-1+\sqrt{e^{2y}+2e^y-3}}{2}\right)^k.$$

Используя (1), для $f_k^m(n)$ удается доказать следующую оценку сверху:

$$f_k^m(n) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{Li}_{-n}\left(\frac{m}{m+1}\right) = \frac{n!}{2\left(\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)^{n+1}} + \frac{1}{2}\varepsilon_n\left(\frac{m}{m+1}\right),$$

где

$$\varepsilon_n(x) = -\sum_{t=0}^{+\infty}\frac{B_{n+t+1}}{(n+t+1)t!}(\ln x)^t$$

и B_i — числа Бернулли.

Автор выражает благодарность А.М.Зубкову за полезные замечания и предложения.

Список литературы

[1] *Whitworth W.A.*, DCC Exercises in Choice and Chance (Reprint of 1897 edition). Hafner, 1965.

[2] *Stevens W.L.*, Solution to a Geometrical Problem in Probability. Ann. Hum. Genet., 1939, v. 9, N 4, p. 315–320.

[3] *Holst L.*, On discrete spacings and the Bose-Einstein distribution. In: Contributions to Probability and Statistics in Honour of Gunnar Blom. Lund, 1985, p. 169–177.

[4] *Ивченко Г.И.*, О случайном покрытии окружности: дискретная модель. Дискрет. матем., 1994, т. 6, N 3, с. 94—109.

[5] *Huillet T.*, A Bose–Einstein approach to the random partitioning of an integer. J. Stat. Mech. Theor. Exp., 2011, N 8.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Об “эргодическом” уравнении Пуассона с малым потенциалом

Светлана В. Анулова[1], Александр Ю. Веретенников[2]

Установлено вероятностное представление решения уравнения Пуассона с малым знакопеременным потенциалом.

1 Введение

Уравнение Пуассона в R^d “во всем пространстве” для эллиптических операторов

$$Lu - cu = -f, \quad L = \frac{1}{2}\sum a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1}$$

играет важную роль в теории усреднения и диффузионной аппроксимации, см. [3, 4, 5] и др. Большинство работ об уравнении Пуассона посвящено либо задачам в ограниченной области, либо задачам с $c \equiv 0$ [2] и др., либо с $c \geq c_0 > 0$. На уровне фольклора “хорошо известно” (а для ограниченных областей известно на самом деле), что: если существуют 1) *однородный марковский* диффузионный процесс с генератором L (X_t, $t \geq 0$) и 2) решение (1) u в подходящем функциональном пространстве, то $u(x)$ равно

$$\mathbf{E}_x \int_0^\infty \exp(-\int_0^t c(X_s)\,ds) f(X_t)\,dt \quad \text{или} \quad \int_0^\infty \mathbf{E}_x \exp(-\int_0^t c(X_s)\,ds) f(X_t)\,dt. \tag{2}$$

Существуют модели, в которых необходимо ослабить ограничение на потенциал c, разрешив ему быть “всего лишь” неотрицательным или даже знакопеременным. Такой вопрос также исследовался, см., в частности, [6]. Однако, достаточные условия сходимости интегралов в (2) при $c \not\equiv 0$ без $\inf c > 0$ авторам неизвестны. В настоящем докладе предлагается простое достаточное условие для некоторого класса “эргодических” операторов L и “малых” потенциалов c. Возможно, что результат такого рода известен в статистической механике, но и в таком случае будет полезно иметь явно сформулированные достаточные условия непосредственно в теории уравнений Пуассона. Это и является целью работы.

2 Основной результат

Ради простоты изложения предположим, что функция f ограничена. Малость функции c будем понимать в следующем смысле: существует константа $\beta > 0$, $\beta \to 0$, такая, что $c(x) = \beta c_1(x)$, где c_1 – фиксированная заданная функция. Для простоты предположим также ограниченность c_1.

[1]Институт проблем управления, Москва, Россия. E-mail: anulovas@ipu.ras.ru

[2]Университет Лидса, Великобритания и Институт проблем передачи информации, Москва, Россия. E-mail: a.veretennikov@leeds.ac.uk

Теорема 1. *Пусть матрица диффузии равномерно невырождена и равномерно ограничена, выполнено условие типа больших уклонений (см.* [1]*)*

$$\lim_{|x|\to\infty} \langle b(x), x/|x|\rangle = -\infty, \tag{3}$$

существует неприводимый однородный марковский процесс $(X_t,\, t\ge 0)$ *с генератором* L *и единственной вероятностной инвариантной мерой* μ, c_1 *ограничена и*

$$\int c_1(x)\,\mu(dx) > 0. \tag{4}$$

Тогда найдется такое $\beta_0>0$, *что при любом* $0<\beta\le\beta_0$ *и* $c=\beta c_1$ *для любой ограниченной* f *второй интеграл в (2) сходится и определяет решение уравнения* (1) *в классе соболевских функций* $W^{2,loc}_d$.

3 Схема доказательства сходимости интеграла

В силу ограниченности f достаточно показать, что функция $\mathbf{E}_x \exp(-\int_0^t c(X_s)\,ds)$ убывает по t экспоненциально быстро. В предположении (3) при всех β существует предел

$$H(\beta) := \lim_{T\to\infty} H_T(\beta), \quad H_T(\beta) := \frac{1}{T}\ln \mathbf{E}_x \exp(\beta \int_0^T c_1(X_s)\,ds)$$

(см. например, [1]). Функция $H_T(\beta)$ дифференцируема, а по теореме Гертнера-Эллиса существует $H'(0)$ (ср. [1]). Обе функции $H_T(\beta)$ и $H(\beta)$ являются выпуклыми, поэтому из их сходимости следует и сходимость их производных там, где есть эти производные. Раз $H'_T(0)=\frac{1}{T}\mathbf{E}_x\int_0^T c_1(X_s)\,ds \to \int c_1(x)\,\mu(dx)>0$, то $H'(0)=\int c_1(x)\,\mu(dx)>0$ и, значит, $H(-\beta)<0$ при малых $\beta>0$. Стало быть, $H_T(-\beta)$ при малых $\beta>0$ сходится к отрицательному пределу, что и доказывает сходимость второго интеграла в (2).

Список литературы

[1] *Веретенников А.Ю.*, О больших уклонениях для диффузионных процессов с измеримыми коэффициентами. Успехи матем. наук, 1995, т. 50, № 5, с. 135–146.

[2] *Веретенников А.Ю.*, О соболевских решениях уравнения Пуассона в R^d с параметром (К 70-летию профессора Н.В.Крылова). Проблемы математического анализа, 2011, т. 61, с. 43–68.

[3] *Kifer Yu.*, Large deviations and adiabatic transitions for dynamical systems and Markov processes in fully coupled averaging. Memoirs Amer. Math. Soc. number 944. Providence, R.I.: AMS, 2009.

[4] *Papanicolaou G.C., Stroock D., Varadhan S.R.S.*, Martingale approach to some limit theorems. Papers from the Duke Turbulence Conference (Duke Univ., Durham, N.C., 1976), Paper No. 6, ii+120 pp. Duke Univ. Math. Ser., v. III, Duke Univ., Durham, N.C., 1977.

[5] *Pardoux É., Veretennikov A.Yu.*, On the Poisson equation and diffusion approximation, I. Ann. Probab., 2001, v. 29, N 3, p. 1061–1085.

[6] *Nummelin E.*, On the Poisson equation in the potential theory of a single kernel. Math. Scand., 1991, v. 6, p. 59–82.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Об асимптотическом распределении последовательностей случайных величин со случайным индексом

Хайдарали М. Арипов, Абдусуннат А. Джамирзаев [1]

В работе обобщается один результат Ф.Ж.Анскомбе о предельном распределении последовательностей случайных величин со случайным индексом.

1 Введение

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, \mathbf{P}\}$ заданы последовательности случайных величин (с.в.) $\{\eta_n\}$ и $\{\nu_n\}$, где $\{\nu_n\}$ - последовательность положительных целочисленных с.в. Ф.Ж.Анскомбе [1] доказал следующую теорему.

Теорема 1. (F.J.Anscombe, 1952) *Пусть выполнены следующие условия:*

(A) *Существует последовательность целых чисел k_n такая, что при $n \to \infty$, $k_n \to \infty$ и*

$$\frac{\nu_n}{k_n} \xrightarrow{p} 1;$$

(B) *Существует функция распределения $F(x)$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n < x\} = F(x) \quad \forall x \in C(F),$$

где $C(F)$ — множество точек непрерывности $F(x)$;

(C) *Для любых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ существуют число $c = c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ и номер $n_0 = n_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ такие, что при $n > n_0$*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{|k-n|<cn} |\eta_k - \eta_n| \geqslant \varepsilon_1\right\} \leqslant \varepsilon_2.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_{\nu_n} < x\} = F(x) \quad \forall x \in C(F).$$

Ряд работ А.Реньи, В.Рихтер, С.Гуящу, Ш.Чёрго, Й.Модьороди, Т.А.Азларов, А.А.Джамирзаев и других, посвящены обобщению теоремы 1.

Например, В.Рихтер [2] доказал теорему 1 для случая, когда $\{\eta_n\}$ обладает свойством перемешивания в смысле А.Реньи, т.е. для любого $A \in F$, $\mathbf{P}(A) > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n < x, A\} = \mathbf{P}(A) \cdot F(x), \quad \forall x \in C(F)$$

и $\frac{\nu_n}{k_n} \xrightarrow{p} \nu_0 > 0$, где ν_0 — дискретная с.в. Й.Модьороди [3] обобщил результат В.Рихтера [2] на случай, когда ν_0 — необязательно дискретная с.в..

[1] Президиум Академия Наук Узбекистана. E-mail: khaidarali@mail.ru; Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, механико-математический факультет. E-mail: djamirzaev@rambler.ru

2 Основные результаты

Пусть $\sigma = \sigma(\xi)$ — σ-алгебра событий, порожденная с.в. ξ. В работе доказана следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условие* (C) *и следующие:*

(A1) *Существуют последовательность целых чисел k_n такая, что при $n \to \infty$, $k_n \to \infty$ и с.в. ν_0 такая, что при $n \to \infty$*

$$\frac{\nu_n}{k_n} \xrightarrow{p} \nu_0 > 0;$$

(B1) *Существует функция распределения $F(x)$ такая, что для любого $A \in \sigma(\nu_0)$,* $\mathbf{P}(A) > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n < x/A\} = F(x) \quad \forall x \in C(F).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_{\nu_n} < x\} = F(x) \quad \forall x \in C(F).$$

Заметим, что в теоремах 1 и 2 не предполагаются независимость ν_n от η_n. Следует отметить, что теорема 2 обобщает результаты работ [1-3].

Список литературы

[1] *Anscombe F.J.,* Large-sampl theory of sequential estimation, Proc. Cambridje Phil. Soc., 1952, v. 48, N 4, p. 600-607.

[2] *Richter W.,* Ubertragung von Grenzaussagen für Folgen von zufälligen Grőssen auf Folgen mit zufälligen Indizes. Теория вероят и её прим., 1965, т. 10, вып 1, с. 82–83.

[3] *Moguorodi J.,* Limit distributions for sequences of random variables with random indices. Trans. 4 thPrague Conf. Inform. Theory, Statist. Decis. Funet. Random Procese, 1965, Prague, p. 463–470.

[4] *Джамирзаев А.А.,* О свойстве перемешивания в смысле А.Реньи для статистики критерия однородности. Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Пермь, Пермский Гос. Унив., 2008, вып. 21, с. 33–37.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Эмпирические процессы в авторегрессионных схемах с выбросами. Робастные GM-тесты

Болдин М.В., Есаулов Д.М.[1]

В докладе представлены новые результаты об асимптотических равномерных разложениях остаточных эмпирических процессов в авторегрессионных схемах с выбросами в наблюдениях. Результаты применяются к исследованию робастности обобщенных M-тестов (GM-тестов).

В работе продолжаются исследования робастности статистических тестов в семипараметрических моделях временных рядов (т.е. для зависимых данных), начатые в [1, 2]. Ради краткости сформулируем некоторые результаты применительно к простейшей $AR(1)$ модели

$$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $\{\varepsilon_t\}$ — н.о.р.с.в. с неизвестными функцией распределения (ф.р.) G и плотностью g, $\mathbf{E}\varepsilon_1 = 0$, $\mathbf{E}\varepsilon_1^2 < \infty$; $|\beta| < 1$, β —неизвестный параметр. Наблюдения $y_0, y_1, \dots, y_n$ имеют вид

$$y_t = u_t + z_t^{\gamma_n}\xi_t, \quad t = 0, 1, \dots, n. \tag{2}$$

В (2) $\{u_t\}$ — выборка из стационарного решения (1); $\{z_t^{\gamma_n}\}$ — н.о.р.с.в. с распределением Бернулли с параметром $\gamma_n = \min(1, n^{-1/2}\gamma)$, $\gamma \geq 0$ неизвестно; $\{\xi_t\}$ — н.о.р.с.в. с неизвестным и произвольным распределением μ; последовательности $\{u_t\}$, $\{z_t^{\gamma_n}\}$, $\{\xi_t\}$ независимы между собой. Последовательность $\{\xi_t\}$ интерпретируется как последовательность грубых выбросов (засорений), γ_n — уровень засорения.

По наблюдениям $\{y_t\}$ будем проверять гипотезу $H_0 : \beta = \beta_0$ против, скажем, правосторонней альтернативы $H_1^+ : \beta > \beta_0$. Мощность теста будем исследовать при локальных альтернативах $H_{1n}(\tau) : \beta = \beta_n := \beta_0 + n^{-1/2}\tau, \tau > 0$. Удобно в дальнейшем полагать $\tau \geq 0$, так что $H_{1n}(0)$ есть H_0. Кроме того, пусть $n \geq n_\tau$, где n_τ есть наименьшее натуральное, при котором $|\beta_n| < 1$ для всех $n \geq n_\tau$. Пусть

$$l_n(\beta_0) := n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\varphi(y_{t-1})\psi(y_t - \beta_0 y_{t-1}) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)du_n(x, \beta_0), \tag{3}$$

$$u_n(x, \beta_0) := n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\varphi(y_{t-1})\mathbf{I}(y_t - \beta_0 y_{t-1} \leq x), \tag{4}$$

$\mathbf{I}(\cdot)$ — индикатор события, $x \in \mathbb{R}^1$. Процесс $u_n(x, \beta_0)$ в (4) — остаточный взвешенный эмпирический процесс, функции φ и ψ выбираются априорно в соответствии с описанными далее условиями. Тестовой статистикой для H_0 возьмем

$$T_n = T_n(\beta_0) := \hat{s}_n^{-1} l_n(\beta_0),\ \hat{s}_n^2 := n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\varphi^2(y_{t-1})\psi^2(y_t - \beta_0 y_{t-1}).$$

[1]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: `boldin_m@hotmail.com, daniel.yesaulov@gmail.com`

Тест со статистикой T_n — вариант GM-теста. Соотношения (3)—(4) позволяют свести асимптотическое исследование статистики T_n к нахождению асимптотических равномерных разложений эмпирического процесса $u_n(x, \beta_0)$. Эти результаты довольно громоздки даже в случае $AR(1)$, поэтому оставим точные формулировки для доклада. Здесь опишем их приложения. Нам понадобятся следующие условия. Пусть $\{u_t^0\}$ — стационарное решение (1) при H_0.

Условие 1. G дважды дифференцируема с производной g, $\sup_x |g'(x)| < \infty$.

Условие 2. $\sup_x |\varphi(x)| < \infty$.

Условие 3. Вариация $\mathrm{Var}\,|_{-\infty}^{\infty}[\psi] < \infty$, $\mathbf{E}\psi(\varepsilon_1) = 0$.

Условие 4. $\Delta_1(\beta_0) := \mathbf{E}[u_1^0\varphi(u_1^0)] \int_{-\infty}^{\infty} g(x)d\psi(x) > 0$.

Пусть

$$\Delta_2(\beta_0, \mu) := \mathbf{E}\varphi(u_1^0)\mathbf{E}\psi(\varepsilon_1 + \xi_1) + \mathbf{E}\varphi(u_1^0 + \xi_1)\psi(\varepsilon_2 - \beta_0\xi_1),$$

$$\delta(\tau, \gamma, \mu) = \delta(\beta_0, \tau, \gamma, \mu) := \{\mathbf{E}\varphi^2(u_1^0)\psi^2(\varepsilon_1)\}^{-1/2}[\Delta_1(\beta_0)\tau + \Delta_2(\beta_0, \mu)\gamma].$$

Теорема 1. *Пусть верна* $H_{1n}(\tau)$, $\tau \geq 0$. *Пусть выполнены условия* 1—4, *а в случае* $\tau > 0$, *вдобавок, функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *непрерывны. Тогда равномерно по* $0 \leq \gamma \leq \Gamma$ *и произвольным* μ *статистика* T_n *сходится слабо к* $N(\delta(\tau, \gamma, \mu), 1)$, $n \to \infty$.

В силу теоремы 1 при $\gamma = 0$ при гипотезе H_0 $T_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$, $n \to \infty$. Отвергать H_0 будем при $T_n > t_{1-\alpha}$, $t_{1-\alpha}$ — квантиль стандартной гауссовской ф.р. $\Phi(x)$ уровня $1 - \alpha$. В схеме без засорений такой тест имеет асимптотический уровень α. При произвольном γ его мощность на $H_{1n}(\tau)$ есть $W_n(\tau, \gamma, \mu) := P_{\beta_n}(T_n > t_{1-\alpha})$.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *равномерно по* $0 \leq \gamma \leq \Gamma < \infty$ *и произвольным* μ

$$W_n(\tau, \gamma, \mu) \to W(\tau, \gamma, \mu) := 1 - \Phi(t_{1-\alpha} - \delta(\tau, \gamma, \mu)), \quad n \to \infty.$$

Следствие 1 влечет следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда*

$$\sup_{n \geq n_\tau, \mu} |W_n(\tau, \gamma, \mu) - W_n(\tau, 0, \mu)| \to 0, \quad \gamma \to 0. \tag{5}$$

В силу (5) семейство мощностей $\{W_n(\tau, \gamma, \mu)\}$ равностепенно непрерывно по γ в точке $\gamma = 0$. Мы интерпретируем (5) как локальную качественную робастность GM-теста при условиях 1—4. Отметим, что общеупотребительный тест наименьших квадратов, получаемый при $\varphi(x) = \psi(x) = x$, свойством локальной качественной робастности не обладает. Определение локальной качественной робастности для схемы засорения типа (2) было введено в [1]. Оно родственно общеизвестному определению качественной робастности тестов в нелокальной ситуации для н.о.р. данных, введенному в [3].

Список литературы

[1] *Boldin M.V.*, Local robustness of sign tests in AR(1) against outliers. Math. Methods Statist. 2011, v. 20, p. 1–13.

[2] *Есаулов Д.М.*, Робастность GM-тестов в авторегрессии против выбросов. Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2012, N 2, с. 47–50.

[3] *Reider H.*, Qualitative robustness of rank tests Ann. Statist. 1982, v. 10, p. 205–211.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Двухтипные процессы Беллмана-Харриса, стартующие с большого числа частиц[1]

Владимир А. Ватутин,[2] Валентин А. Топчий[3]

В докладе будет описано асимптотическое поведение ветвящихся процессов Беллмана-Харриса с двумя типами частиц, стартующие в нулевой момент времени с большого числа частиц. При этом, один тип частиц – короткоживущий, а второй – долгоживущий. Показано, что временна́я ось разбивается на шесть растущих интервалов, где различным образом нормированные компоненты процесса Беллмана-Харриса сходятся к принципиально различным распределениям.

Пусть $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}(t) = (Z_1(t), Z_2(t))$ – ветвящийся процесс Беллмана-Харриса с двумя типами частиц, эволюция которого начинается в момент $t = 0$ с $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}(0) = \mathbf{N} = (N_1, N_2)$ частиц нулевого возраста. Наша цель - описать распределение числа частиц в процессе в момент $t \to \infty$. При фиксированном наборе $\mathbf{N}$ условие ветвления сводит общую ситуацию к двум случаям $\mathbf{N} = (1, 0)$ и $\mathbf{N} = (0, 1)$. Аналогично, при неограниченном росте начального размера популяции проблема сводится к анализу свойств процессов, начинающихся только с одного типа частиц. Далее мы считаем, что $\mathbf{N} = (0, N)$. Обозначим $G_i(t)$ распределение длительности жизни частицы типа $i \in \{1, 2\}$, и пусть численность потомства (ξ_{i1}, ξ_{i2}) частицы i-го типа задается производящей функцией

$$f_i(\mathbf{s}) = f_i(s_1, s_2) := \mathbf{E} s_1^{\xi_{i1}} s_2^{\xi_{i2}},\ \mathbf{s} = (s_1, s_2) \in [0, 1]^2,\ \mathbf{f}(\mathbf{s}) = (f_1(\mathbf{s}), f_2(\mathbf{s}))^T .$$

Нас будут интересовать критические процессы, т.е. процессы, у которых матрица средних

$$\mathbf{M} := (a_{i,j})_{i,j=1,2} = (\mathbf{E}\xi_{i,j})_{i,j=1,2}$$

неразложима и ее перронов корень равен 1.

Мы также будем предполагать конечность вторых моментов численности потомства частиц любого типа и сосредоточимся на процессах, в которых частицы первого типа – короткоживущие, а частицы второго типа – долгоживущие. Точнее, мы будем считать, что распределения продолжительности жизни частиц удовлетворяет условиям

$$1 - G_1(t) = o(t^{-2}),\ 1 - G_2(t) = l(t)t^{-\beta},\ \beta \in (0, 1/2],$$

где $l(t)$ медленно меняющаяся на бесконечности функция. Ясно, что при этом условии функция

$$\mu_2(t) = \int_0^t (1 - G_2(u))du \sim l(t)t^{1-\beta}/(1 - \beta).$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00139 и программами РАН “Динамические системы и теория управления” (В.А. Ватутин) и “Современные проблемы теоретической математики: Развитие методов исследования стохастических моделей совокупностей частиц” (В.А. Топчий).

[2]Математический институт им. В.А.Стеклова РАН. E-mail: vatutin@mi.ras.ru

[3]Омский фил. Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН. E-mail: topchij@ofim.oscsbras.ru

Пусть $F_2(t;\mathbf{s}) = \mathbf{E}\left[\mathbf{s}^{\mathbf{Z}(t)}|\mathbf{Z}(0) = (0,1)\right]$. Тогда

$$\mathbf{E}\left[\mathbf{s}^{\mathbf{Z}(t)}|\mathbf{Z}(0) = (0,N)\right] = \exp\left\{N\log F_2\left(t;\mathbf{s}\right)\right\} = \exp\left\{-N\left(1-F_2\left(t;\mathbf{s}\right)\right)\left(1+o(1)\right\}.$$

Таким образом, задача нахождения предельного распределения числа частиц в процессе при $N, t\to\infty$ сводится к подбору функции $t = t(N)$ и нормирующих функций для $Z_i(t)$, чтобы указанное выражение сходилось к пределу.

Оказывается, что существует 6 асимптотических зон для $t = t(N)$, где качественно различается и тип пределов и тип нормирующих функций. Перечислим эти зоны:

$$N\sqrt{1-G_2(t)}\to\infty;\quad N\left(1-G_2(t)\right)\to 0;\quad N\left(1-G_2(t)\right)\asymp const;$$

$$N\left(1-G_2(t)\right)\to\infty,\ \mu_2(t)\gg N;\quad N\sim r\mu_2(t);\quad N\gg\mu_2(t).$$

Аналогичная проблема для процессов Беллмана-Харриса с одним типом частиц изучалась ранее рядом авторов, в частности, в работах [1] и [2]. Наличие двух типов частиц (короткоживущих и долгоживущих) приводит к появлению принципиально новых эффектов.

Обозначим $(i = 1,2)$

$$\left(\Phi_1(\mathbf{s}),\Phi_2(\mathbf{s})\right)^T = \mathbf{M}(\mathbf{1}-\mathbf{s}) - \left(\mathbf{1}-\mathbf{f}(\mathbf{s})\right),\ F_i(t,s) = \mathbf{E}\left[s^{Z_1(t)}\middle|\mathbf{Z}(0) = (2-i,i-1)\right].$$

Один из наших результатов таков.

Теорема 1. *Если* $\beta\in(0,1/2]$, $N\sim r\mu_2(t)$, $t\to\infty$, $r\in(0,\infty)$, *то*

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}\left[s^{Z_1(t)}\exp\left\{-\lambda\frac{Z_2(t)}{N\beta}\right\}\middle|\mathbf{Z}(0) = (0,N)\right] = \exp\left\{-r\frac{a_{12}(1-s)}{1-a_{11}} - r\lambda + rg(s)\right\},$$

где

$$g(s) = \frac{a_{12}}{1-a_{11}}\int_0^\infty\Phi_1(F_1(w;s),F_2(w;s))dw + \beta\int_0^\infty\Phi_2(F_1(w;s),F_2(w;s))dw.$$

Отметим, что утверждение теоремы означает асимптотическую независимость первой компоненты $Z_1(t)$ и нормированной N второй компоненты. Условие $\beta\in(0,1/2]$ является принципиальным для методов исследований. Дело в том, что предельные теоремы связаны с поведением $\mathbf{P}(Z_1(t)>0\big|\mathbf{Z}(0) = (2-i,i-1))$. Нами доказано, что эта вероятность в исследуемом случае с точностью до медленно меняющейся функции имеет асимптотику $t^{\beta-1}$, а при $\beta\in(1/2,1]$, скорее всего, она имеет порядок $t^{-\beta}$ (пока не доказано).

Список литературы

[1] *Ватутин В.А.*, Критические ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса, начинающиеся с большого числа частиц. Мат. заметки, 1986, т. 40, N 4, с. 527–541.

[2] *Топчий В.А.*, Умеренные уклонения для общей численности частиц в критических ветвящихся процессах. Теория вероятн. примен., 1988, т. 33, вып. 2, с. 406–409.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Обобщение УЗБЧ Прохорова на случай отрицательно ассоциированных случайных величин

Нина Н. Голикова[1]

Доказано, что критерий Прохорова для почти наверной устойчивости сумм ограниченных независимых случайных величин в своей достаточной части допускает обобщение на отрицательно ассоциированные случайные величины.

1 Введение

Многие законы больших чисел для сумм независимых случайных величин допускают обобщение на отрицательно ассоциированные случайные величины. Нашим предметом исследования является усиленный закон больших чисел Прохорова [1] для надлежаще ограниченных независимых случайных величин. Оригинальное доказательство Прохорова [1] с разной степенью подробностей воспроизведены в учебнике [2] и в монографии [3]. Условия применимости усиленного закона больших чисел Прохорова выражены в терминах дисперсий случайных величин. Известно, что дисперсия суммы $X_1 + \cdots + X_n$ отрицательно ассоциированных случайных величин мажорируется удвоенной дисперсией суммы $X'_1 + \cdots + X'_n$ независимых случайных величин таких, что X_k и X'_k одинаково распределены для каждого $k = 1, \ldots, n$. Этот факт вместе с некоторыми другими идеями позволяет обобщить теорему Прохорова в части достаточности на случай отрицательно ассоциированных случайных величин.

2 Основные результаты

Формулировка нашего основного утверждения формально совпадает с формулировкой критерия Прохорова в части достаточности.

Теорема 1. *Пусть даны отрицательно ассоциированные случайные величины X_i, $i > 1$, с нулевыми математическими ожиданиями. Если для любого $i > 1$ и некоторой константы $K > 0$ выполняется неравенство*

$$|X_i| \le \frac{K \cdot i}{\ln \ln i} \quad \text{п.н.}$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-\varepsilon \cdot 2^{2n}}{\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \mathbf{E} X_i^2} \right) < \infty,$$

[1]Московский государственный областной университет, физико-математический факультет. E-mail: nina.golikova@mail.ru

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = 0 \quad \textit{п.н.}$$

Доказательство основано на неравенстве (1) для сумм отрицательно ассоциированных случайных величин из статьи [4].

Теорема 2. *Если отрицательно ассоциированные случайные величины* $X_1,\ldots,\ X_n$ *ограничены числом* $c > 0$*, то для любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{\max_{1\le k\le n} |S_k - \mathbf{E}S_k| > \varepsilon\} \le \frac{4}{1 + \left(1 + \frac{\varepsilon c}{\sigma_n^2}\right)^{\frac{-2\varepsilon}{c}}} \exp\left(\frac{\varepsilon}{2c} - \frac{\varepsilon}{2c}\ln\left(1 + \frac{\varepsilon c}{\sigma_n^2}\right)\right), \qquad (1)$$

где $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k - \mathbf{E}X_k)^2 < \infty,\ S_k = X_1 + \cdots + X_k,\ k = 1 \ldots n.$

В идейном плане при доказательстве теоремы 1 мы следуем оригинальному доказательству Прохорова. Существенное отличие состоит в том, что вместо известного арксинус-неравенства Прохорова мы используем неравенство (1). При этом достигается ряд упрощений оригинального доказательства и, в частности, не требуется прибегать к операции симметризации. Более того, операция симметризации для отрицательно ассоциированных случайных величин оказывается бесполезной.

Список литературы

[1] *Прохоров Ю.В.*, Одна экстримальная задача теории вероятностей. Теория вероятностей и ее применения, 1959, т. IV, N 2, с. 211–214.

[2] *Лоэв М.*, Теория вероятностей. М.: Издательство Иностранной литературы, 1962.

[3] *Stout W.F.* Almost sure convergence. Academic press, 1974.

[4] *Герасимов М.Ю.*, Неравенства для сумм отрицательно ассоциированных случайных величин. Вестник Тверского Государственного Университета, 2010, т. 9, с. 29–42.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Метрические свойства Ω-дробей[1]

Ольга А. Горкуша[2]

Мы исследуем эргодические системы, соответствующие Ω-дробям — классу непрерывных дробей, тесно связанному с геометрической интерпретацией приближений вещественного числа рациональными числами. Обозначим через A_n/B_n, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность подходящих дробей непрерывной Ω-дроби числа $x \in (0, 1)$. Мы получим почти для всех иррациональных чисел x распределение последовательности $\{\Upsilon_n\}_{n\geq 1}$, где $\Upsilon_n = \Upsilon_n(x) = B_n|B_n x - A_n|$.

1 Введение

Любое вещественное число x из $(0, 1)$ можно представить в виде конечной (если $x \in \mathbf{Q}$) или бесконечной регулярной непрерывной дроби

$$x = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}},$$

где для всех $n \geq 1$ неполные частные a_n определяются соотношением

$$a_n = a_n(x) = \left[\frac{1}{T^{n-1}(x)}\right], \text{ если } T^{n-1}(x) \neq 0.$$

Здесь $T : [0, 1) \mapsto [0, 1)$ — преобразование Гаусса

$$T(x) = \begin{cases} 1/x - [1/x] & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Естественное обобщение преобразования Гаусса получено в 1977 году в работе [1].
Пусть $D = ([0, 1] \setminus \mathbf{Q}) \times [0, 1]$. Определим отображение $\mathfrak{T} : D \mapsto D$:

$$\mathfrak{T}(x, y) = \begin{cases} \left(T(x), \frac{1}{[1/x]+y}\right), & \text{если } (x, y) \in D \text{ и } x \neq 0; \\ (0, y), & \text{если } x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Автор работы доказал, что система $(D, \mathfrak{B}_D, \mu, \mathfrak{T})$ с семейством множеств Бореля $\mathfrak{B}_D$ и вероятностной мерой

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \iint_A \frac{dxdy}{(1 + xy)^2}, \ A \in \mathfrak{B}_D$$

формирует эргодическую систему.

В этой работе мы получили аналогичный результат для Ω-дробей — одного из классов полурегулярных дробей.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ N 11-01-00628-а, 11-01-12004-офи-м-2011.

[2]Хабаровское отделение Института Прикладной Математики Дальневосточного отделения РАН. E-mail: o-garok@rambler.ru

2 Основные результаты

Для вещественного числа x из интервала $(0, 1/2)$ рассмотрим решетку на плоскости

$$\Gamma_x = \{(n - x \cdot m, m) | n, m \in \mathbf{Z}\}.$$

Пусть Ω — выпуклая, ограниченная и замкнутая область на плоскости с кусочно-гладкой границей, которая содержит некоторую окрестность точки $(0, 0)$ и симметрична относительно координатных осей. Рассмотрим афинное преобразование

$$(x_1, x_2) \mapsto (t_1 x_1, t_2 x_2) = \varsigma(x_1, x_2)$$

с положительными вещественными числами t_1 и t_2. Обозначим через $\varsigma(\Omega)$ множество точек $\varsigma(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Определение 1. Ненулевой узел γ решетки Γ_x назовем Ω-минимумом, если для некоторого преобразования ς внутри области $\varsigma(\Omega)$ нет ненулевых узлов из Γ_x.

Множество таких минимумов будем обозначать через $\mathfrak{M}(\Gamma_x; \Omega)$. Впервые такая конструкция была предложена Эрмитом [5] в случае круга. Позднее Минковский [6] рассмотрел более общую ситуацию с областью $\Omega = \Omega_\theta = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 | |x_1|^\theta + |x_2|^\theta \le 1\}$, $\theta \ge 1$.

Определим последовательности целых неотрицательных чисел $\{A_k\}_{k\ge 0}$ и $\{B_k\}_{k\ge 0}$ с условием $B_k < B_{k+1}$ и точек $\{M^{(k)}\}_{k\ge 0}$ решетки Γ_x следующим образом

$$\mathfrak{M}(\Gamma_x; \Omega) = \{\pm M^{(k)} | M^{(k)} = (A_k - xB_k, B_k),\ k \ge 0\}. \tag{2}$$

Определение 2. Для вещественного числа x из $(0, 1/2]$ полурегулярную дробь

$$x = \cfrac{\varepsilon_1}{b_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{\varepsilon_n}{b_n + \ddots}}} = [0; \varepsilon_1/b_1, \varepsilon_2/b_2, \ldots, \varepsilon_n/b_n, \ldots],\ b_n \in \mathbf{N},\ \varepsilon_n \in \{-1, 1\}, \tag{3}$$

назовем Ω-дробью числа x, если последовательности подходящих дробей $\{A_k/B_k\}_{k\ge 1}$ удовлетворяют соотношению (2).

Для вещественного числа x из $(1/2, 1)$ дробь (3) назовем Ω-дробью, если $[0; 1/(b_2 + 1), \varepsilon_3/b_3, \ldots]$ — Ω-дробь числа $1 - x$.

Получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть функция $\Psi(x, y) = 0$ описывает границу области Ω. Обозначим через $(2a_0, 0)$, (a_0, b_0), (b_0, a_0), $(0, 2a_0)$ точки с условием*

$$\Psi(2a_0, 0) = \Psi(a_0, b_0) = \Psi(b_0, a_0) = \Psi(0, 2a_0) = 0.$$

Для всех α из $[0, 1]$ будем рассматривать функцию $\beta_\Omega = \beta(\alpha)$ со свойствами

$$\begin{array}{lll} \Psi(u, v) = 0, & & \textit{для}\ a_0 \le u \le b_0; \\ \Psi(s, t) = 0, & u = s \cdot \beta,\ t = v \cdot \alpha & \textit{для}\ b_0 \le s \le 2a_0; \\ \Psi(x, y) = 0, & x = s - u,\ y = t + v & \textit{для}\ 0 \le x \le a_0. \end{array}$$

Определим области S_1, S_2, Y соотношениями

$$S_1 = \{(T, V) \in D |\ T \in [0, 1],\ V \in [\beta(T), 1]\},\ S_2 = \{(T, V) \in D\ |(V, T) \in S_1\},$$

$$Y = \big(D \setminus (S_1 \cup S_2)\big) \cup F(S_1),\ F(t,v) = \left(-\frac{t}{1+t}, 1-v\right).$$

На множестве Y рассмотрим оператор — аналог преобразования $\mathfrak{T}$ из (1) *для Ω-дробей:*

$$\mathfrak{J}(t,v) = \begin{cases} \mathfrak{T}(t,v), & \text{если } t \geq 0, \mathfrak{T}(t,v) \notin S_2, \\ F \circ \mathfrak{T}^2(t,v), & \text{если } t \geq 0, \mathfrak{T}(t,v) \in S_2, \\ \mathfrak{T} \circ F^{-1}(t,v), & \text{если } t < 0, \mathfrak{T} \circ F^{-1}(t,v) \notin S_2, \\ F \circ \mathfrak{T}^2 \circ F^{-1}(t,v), & \text{если } t < 0, \mathfrak{T} \circ F^{-1}(t,v) \in S_2. \end{cases}$$

Тогда система $(Y, \mathfrak{B}_\Omega, \mu_\Omega, \mathfrak{J})$ с семейством множеств Бореля $\mathfrak{B}_\Omega$ на Y и вероятностной мерой

$$\mu_\Omega(A) = \frac{1}{\Phi(\Omega)} \iint_A \frac{dxdy}{(1+xy)^2},\ A \in \mathfrak{B}_\Omega,$$

где

$$\Phi(\Omega) = \log 2 - \iint_{S(\Omega)} \frac{dxdy}{(1+xy)^2}$$

формирует эргодическую систему.

Список литературы

[1] *Nakada H.*, Metrical theory for a Class of Continued Fractions Transformations and Their Natural Extensions. Tokyo J. Math., 1981, v. 4, p. 399-426.

[2] *Tong J.*, The Conjugate Property of the Borel Theorem on Diophantine Approximation. Proc. Amer. Math. Soc., 1989, v. 105, N. 3, p. 535-539.

[3] *Bosma W., Jager H., Wiedijk F.*, Some metrical observations on the approximation by continued fractions. Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math., 1983, v. 45, N. 3, p. 281-299.

[4] *Bagemihl F., McLauglin J.R.*, Generalization of some classical theorems concerning triples of consecutive convergents to simple continued fractions. Publ. Math. Debrecen, 1967, v.14, p. 53-55.

[5] *Hermite C.H.*, Sur L'introduction des variables continues dans la theorie des nombres, 1851. Journal fur die reine und angewandte Mathematik, v. 41.

[6] *Minkowski H.*, Zur Theorie der Kettenbruche. Annales de l'Ecole Normale Superieure, 1894, v. 13, p. 41-60.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

О совместном распределении случайной суммы и числа слагаемых

Абдусуннат А. Джамирзаев[1]

В работе обсуждаются результаты автора о совместном распределении случайной суммы и числа слагаемых.

1 Введение

Б.В.Гнеденко [1] указал на связи теории случайного суммирования с задачами теории массового обслуживания, теории надежности и с другими задачами разных направлений. Во многих исследованиях по случайному суммирования функция распределения число слагаемых при некоторой нормировке сходится к предельному закону $G(x)$, где $G(+0) = 0$.

В настоящей работе в отличие от предыдущих (см. [2], [3]) предельная теорема для случайной суммы доказывается без предположения $G(+0) = 0$. Такая схема встречается в задачах теории массового обслуживания и др.

2 Основные результаты

Пусть $\xi_{n1}, \xi_{n2}, ..., \xi_{n,k}, ...$ — последовательность независимых, одинаково распределенных при каждом n случайных величин (с.в.), $n = 1, 2, ...$, и $\{v_n\}$ — последовательность положительных, целочисленных с.в.

Предположим, что для некоторой последовательности чисел k_n, где $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$

(A) $\xi_{n1} + \xi_{n2} + ... + \xi_{nk_n} \xrightarrow{p} 1$ при $n \to \infty$;

(B) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $b = b(\varepsilon) > 0$ и $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для любого $n > n_0$

$$\mathbf{P}\{v_n \leqslant bk_n\} > 1 - \varepsilon.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A) *и* (B). *Тогда следующие три утверждения эквивалентны:*

(C) *существуют последовательность чисел $\{k_n\}$, $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и функция распределения $G(x)$ такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{v_n}{k_n} < x\right\} = G(x), \quad \forall x \in C(G);$$

(D) *существует функция распределения $G(x)$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_{n1} + \xi_{n2} + ... + \xi_{nv_n} < x\} = G(x), \quad \forall x \in C(G);$$

[1]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, механико-математический факультет. E-mail: `djamirzaev@rambler.ru`

(E) *существуют последовательность чисел* $\{k_n\}$, $k_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$ *и функция распределения* $G(x)$ *такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\xi_{n1}+\xi_{n2}+...+\xi_{nv_n}<x, \frac{v_n}{k_n}<y\right\} = G(\min(x,y)), \quad \forall x,y \in C(G),$$

где $C(G)$ *- множества точек непрерывности функции* $G(x)$.

Для доказательства теоремы 1 сначала доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (B) *и при* $n \to \infty$

$$\xi_{n1}+\xi_{n2}+...+\xi_{nk_n} \to 0.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\xi_{n1}+\xi_{n2}+...+\xi_{nv_n} \xrightarrow{p} 0.$$

Отметим, что в настоящей работе не предполагается условие о независимости v_n от $\{\xi_{nk}\}$. Это обстоятельство позволяет применять сформулированную теорему 1 при изучении асимптотического поведения совместных распределений некоторых характеристик систем массового обслуживания.

В докладе приводится примеры приложения полученных результатов.

Список литературы

[1] *Гнеденко Б.В.*, О связи теории суммирования независимых случайных величин с задачами теории массового обслуживания и теории надежности. Rev. Roumaine Math. Et. Appl, 1967, т.12, N 9., p. 1243–1253.

[2] *Азларов Т.А., Джамирзаев А.А.*, Об относительной устойчивости сумм случайного числа случайных величин в схеме серий. Обозрение прикладной и промышленной математики, 1997, т. 4, N 3, с. 313–314.

[3] *Modyorodi J.*, Rev. Roumaine Math. Pures. Et. Appl., XVI, 1971, N 4, p. 551–557.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Свойства статистики критерия симметричности Шекели и Мори в случае двоичных векторов

Андрей М. Зубков[1], Дмитрий О. Меньшенин[2]

Изучаются свойства статистики критерия симметричности распределения в евклидовом пространстве для класса дискретных распределений.

1 Введение

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные в $\mathbb{R}^d$ векторы и $\|X\|$ обозначает евклидову норму вектора X. В [2] было показано, что

$$\mathbf{E}(\|X_1 + X_2\| - \|X_1 - X_2\|) \geq 0$$

и что $\mathbf{E}(\|X_1 + X_2\| - \|X_1 - X_2\|) = 0$ тогда и только тогда, когда случайный вектор X имеет симметричное распределение (т.е. распределения X и $-X$ совпадают).

На основании этого свойства в [2] было предложено использовать последовательность статистик

$$T_n = T_n(X_1, ..., X_n) = \sum_{1\leq i<j\leq n} (\|X_i + X_j\| - \|X_i - X_j\|) \Big/ \sum_{1\leq i\leq n} \|X_i\|$$

для проверки гипотезы о симметричности распределения вектора X против класса всех несимметричных альтернатив.

2 Основные результаты

Если $X = (x_1, \ldots, x_d)$ имеет равномерное распределение на множестве

$$V_d = \{U = (u_1, \ldots, u_d) : \ u_j \in \{-1, +1\}, j = 1, \ldots, d\}$$

вершин d-мерного куба, то $x_1, \ldots, x_d$ независимы, и $\mathbf{P}\{x_i = -1\} = \mathbf{P}\{x_i = 1\} = \frac{1}{2}$. Если вектор Y имеет такое же (симметричное) распределение и не зависит от X, то

$$\mathbf{E}\left(\|X + Y\| - \|X - Y\|\right) = 0. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Если случайные векторы $X = (x_1, \ldots, x_d), Y = (y_1, \ldots, y_d)$ независимы и равномерно распределены на V_d, $d \geqslant 2$, то*

$$\mathbf{D}\left(\|X + Y\| - \|X - Y\|\right) = \frac{1}{2^{d-3}} \sum_{m=0}^{d} C_d^m \left(\frac{d}{2} - \sqrt{m(d-m)}\right) = 2 + \frac{\theta_d}{d}, \quad \theta_d \in [1, 6],$$

$$\mathbf{P}\left\{(\|X + Y\| - \|X - Y\|) \leqslant t\right\} \to \Phi\left(t/\sqrt{2}\right), \quad d \to \infty.$$

[1]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. E-mail: zubkov@mi.ras.ru

[2]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: dmitry.menshenin@gmail.com

Теорема 2. *Если при каждом* $d = 1, 2, \ldots$ *случайные векторы* $X = (x_1, \ldots, x_d)$, $Y = (y_1, \ldots, y_d)$ *со значениями в* V_d *независимы, одинаково распределены, имеют независимые компоненты,*

$$\mathbf{P}\{x_j = 1\} = \frac{1+\varepsilon_j^{(d)}}{2}\,,\ \mathbf{P}\{x_j = -1\} = \frac{1-\varepsilon_j^{(d)}}{2}\,,\ |\varepsilon_j^{(d)}| \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots, d,$$

и для некоторого $\delta > 0$ *для всех достаточно больших* d

$$a_d \stackrel{def}{=} \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\left(\varepsilon_j^{(d)}\right)^2 < 1-\delta, \quad b_d \stackrel{def}{=} \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\left(\varepsilon_j^{(d)}\right)^4 < a_d,$$

то при $d \to \infty$

$$\left|\mathbf{E}\left(\|X+Y\| - \|X-Y\|\right) - \frac{2a_d\sqrt{2d}}{\sqrt{1-a_d}+\sqrt{1+a_d}}\right| = O\left(\tfrac{1}{\sqrt{d}}\right),$$

а распределение разности $\|X+Y\| - \|X-Y\|$ *асимптотически нормально с параметрами*

$$\left(\frac{2a_d\sqrt{2d}}{\sqrt{1-a_d}+\sqrt{1+a_d}}\,, (1-b_d)\frac{1+\sqrt{1-a_d^2}}{1-a_d^2}\right).$$

Теорема 3. *Если случайные векторы* $X = (x_1, \ldots, x_d)$, $Y = (y_1, \ldots, y_d)$ *независимы и равномерно распределены на подмножестве*

$$G_d = \left\{(v_1, \ldots, v_d) \in V_d : \sum_{k=0}^{d} I\{v_k = 1\} \equiv 0\,(mod\ 2)\right\}$$

множества вершин V_d, $d \geqslant 2$, *то для любого* $t \in (-\infty, \infty)$

$$\mathbf{P}\left\{(\|X+Y\| - \|X-Y\|) \leqslant t\right\} \to \Phi\left(t/\sqrt{2}\right), \quad d \to \infty,$$

$$\mathbf{E}\left(\|X+Y\| - \|X-Y\|\right) = \frac{1-(-1)^d}{2^{d-1}}\sum_{l=0}^{d}(-1)^{l+1}C_d^l\sqrt{l} < \frac{1}{2^{d-2}}\,.$$

Кроме того, если случайные векторы $X^* = (x_1^*, \ldots, x_d^*)$, $Y^* = (y_1^*, \ldots, y_d^*)$ *независимы и равномерно распределены на* V_d, *то расстояние по вариации между распределениями* $\|X+Y\| - \|X-Y\|$ *и* $\|X^*+Y^*\| - \|X^*-Y^*\|$ *равно* $\frac{1}{2}$.

Список литературы

[1] *Menshenin D.O., Zubkov A.M.*, On the Szekely–Mori asymmetry criterion statistics for binary vectors with independent components. Austrian J. Statist., 2008, v. 37, N 1, p. 137–144.

[2] *Szekely G. J., Mori T. F.*, A characteristic measure of asymmetry and its application for testing diagonal symmetry. Commun. Statist. Theory Meth., 2001, v. 30, N 8–9, p. 1633–1639.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Незамеченные наилучшие неравенства для биномиального закона

Андрей М. Зубков, Александр А. Серов[1]

Приводится формулировка практически неулучшаемых неравенств для функции распределения биномиального закона, которые можно извлечь из статьи Д. Алферса и Х. Дингеса, опубликованной в 1984 году, но оставшихся незамеченными.

Стандартная связь между функциями распределения биномиального и нормального законов

$$\mathrm{Bin}(n,p;m)=\sum_{0\leqslant k\leqslant m} C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \quad \text{и} \quad \Phi(x)=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du$$

выражается теоремой Муавра–Лапласа:

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Bin}\left(n,p,np+x\sqrt{np(1-p)}\right)=\Phi(x),\quad -\infty<x<\infty. \tag{1}$$

Так как существует много явных (не содержащих интегралов) приближенных формул и обширных таблиц для $\Phi(x)$, а вычисление сумм с биномиальными коэффициентами при больших n весьма громоздко, то формула (1) используется при нахождении приближенных значений функции биномиального распределения. Для построения статистических критериев с заданными вероятностями ошибок требуется информация о значениях «хвостов» распределений. Однако относительная погрешность нормальной аппроксимации биномиального распределения на его хвостах довольно велика. Это послужило одной из причин разработки теории больших уклонений, доказательства различных неравенств для хвостов биномиального закона, а также для хвостов распределений сумм случайных величин и т.д.

В качестве классического примера укажем формулу С. Н. Бернштейна [2]

$$\sum\nolimits_{k=m_0}^{m_1-1} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z_0}^{z_1} e^{-u^2}du,$$

где m_0, m_1 — целые, z_k — корень уравнения $z_k\sqrt{2np(1-p)}+\frac{1-2p}{3}z_k^2=m_k-np+\alpha_k$ при некотором $\alpha_k\in(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ и $np(1-p)\geqslant 62,5$, $0\leqslant z_0<z_1\leqslant\sqrt{2np(1-p)}$, относящуюся к значениям m_0, m_1, отличающимся от np на величины порядка $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$. В.Феллер [3] уточнил результаты С. Н. Бернштейна, представив верхние и нижние оценки в аналогичном виде с немного другим выбором пределов интегрирования z_0, z_1. Экспоненциальные оценки хвостов для сумм $S_n=X_1+\ldots+X_n$ независимых случайных величин $X_1,\ldots,X_n$ со значениями из отрезка [0, 1] получил В.Хёфдинг [4]: если $\mathbf{E}S_n=n\mu$, то

$$\mathbf{P}\{S_n-\mathbf{E}S_n\geqslant nx\}\leqslant\left(\left(\frac{\mu}{\mu+x}\right)^{\mu+x}\left(\frac{1-\mu}{1-\mu-x}\right)^{1-\mu-x}\right)^n\leqslant e^{-2nx^2}.$$

[1]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. E-mail: `zubkov@mi.ras.ru`, `serov1984@mail.ru`
Работа поддержана РФФИ, проект №11-01-00139.

Эти результаты до сих пор обобщаются и уточняются разными авторами, см., напр., [5].

Цель доклада — привести переформулировку результатов, фактически содержащихся в статье [1]. Соответствующие неравенства не были выписаны в [1] в явной форме и поэтому до сих пор остались незамеченными, хотя они удобны для использования и практически полностью решают задачу оценки вероятностей уклонений для биномиальных законов во всей области значений параметров и аргументов. Отметим, что доказательства в [1] довольно громоздки и содержат ряд пробелов, восстановление которых потребовало от авторов доклада заметных усилий.

Теорема 1. *Пусть* $H(x,p) = x\ln\frac{x}{p} + (1-x)\ln\frac{1-x}{1-p}$, $\mathrm{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$ *при* $x \neq 0$ *и* $\mathrm{sgn}(0) = 0$, *а монотонно возрастающие последовательности* $\{B_k(n,p)\}_{k=0}^{n+1}$ *определяются формулами*

$$B_0(n,p) = 0,\ B_{n+1}(n,p) = 1,\ B_k(n,p) = \Phi\left(\mathrm{sgn}\left(\tfrac{k}{n} - p\right)\sqrt{2nH\left(\tfrac{k}{n}, p\right)}\right),\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Тогда при любом $k = 0, 1, \ldots, n$ *справедливы неравенства*

$$B_k(n,p) < \mathrm{Bin}(n,p,k) \leqslant B_{k+1}(n,p), \tag{2}$$

и равенство в правой части имеет место только при $k = n$.

Отношение верхних и нижних оценок для $\mathrm{Bin}(n,p,k)$ в (2) может быть большим, когда k значительно меньше np, однако при таких значениях k большими являются и отношения $\mathrm{Bin}(n,p,k)/\mathrm{Bin}(n,p,k-1)$.

В другой форме эти же результаты приведены в [6], где они использовалась при выводе оценок неполных сумм биномиальных коэффициентов.

Список литературы

[1] *Alfers D., Dinges H.*, A normal approximation for Beta and Gamma tail probabilities. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1984, v. 65, p. 399–420.

[2] *Бернштейн С.Н.*, Возврат к вопросу о точности предельной формулы Лапласа. Известия АН СССР, сер. матем., 1943, т. 7, N 1, с. 3–14.

[3] *Feller W.*, On the normal approximation to the binomial distribution. Ann. Math. Statist., 1945, v. 16, N 4, p.319–329.

[4] *Hoeffding W.*, Probability inequalities for sums of bounded random variables. J. Amer. Statist. Ass., 1963, v. 58, N 301, p. 13–30.

[5] *Петров В.В.*, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. «Наука», М., 1987.

[6] *Зубков А.М., Серов А.А.*, Оценки числа булевых функций, имеющих аффинные приближения заданной точности. Дискретн. матем., 2010, т. 22, N 4, с. 3–19.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Эквивалентность ряда отношений порядка на множестве дискретных распределений

Андрей М. Зубков[1], Татьяна А. Татаренко[2]

В 1982 г. было доказано, что отношение частичного порядка на множестве распределений на $\{1,2,\ldots\}$, порожденное отношением стохастического порядка для распределений числа занятых ячеек при независимом размещении частиц по ячейкам, совпадает с отношением порядка по Шуру. Этот результат обобщен на отношения частичного порядка, порожденные отношениями стохастического порядка на множестве распределений чисел ячеек, в которые попало не менее заданного числа частиц.

Пусть $\mathfrak{A} = \{\boldsymbol{a} = (a_i)_{i=1}^{\infty} : \inf_{i\geqslant 1} a_i = 0, \sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1\}$ — множество вероятностных распределений на $\{1,2,\ldots\}$. На множестве $\mathfrak{A}$ можно разными способами вводить отношения частичного порядка. Мы будем отождествлять распределения $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$, если они различаются лишь перенумерацией координат, и поэтому будем рассматривать только распределения из множества $\mathfrak{A}^* = \{\boldsymbol{a} \in \mathfrak{A} \colon a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots\} \subset \mathfrak{A}$.

Одно из частичных отношений порядка на $\mathfrak{A}^*$ (и — в силу указанного отождествления распределений — на $\mathfrak{A}$) — отношение порядка по Шуру (см., например, [4]): $\boldsymbol{a} = (a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots) \preccurlyeq \boldsymbol{a}' = (a'_1 \geqslant a'_2 \geqslant \ldots)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{k} a'_j \quad \text{для всех } k \geqslant 1. \tag{1}$$

Рассмотрим также отношения частичного порядка, построенные по распределениям чисел ячеек с заданным заполнением в схеме полиномиального размещения частиц по ячейкам. Для каждого $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{A}$ введем последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимых случайных величин с распределением $\boldsymbol{a}$:

$$\mathbf{P}\{\xi_t = j\} = a_j, \qquad t, j \in \{1,2,\ldots\},$$

и соответствующий процесс размещения частиц по ячейкам с номерами $1,2,\ldots$: t-я частица попадает в j-ю ячейку, если $\xi_t = j$. В теории размещений частиц по ячейкам (см., например, [2], [3]) изучаются случайные величины $\mu_r(T;\boldsymbol{a})$, равные числу ячеек, в которые после размещения T частиц попало ровно r частиц, а также случайные величины $\overline{\mu}_r(T;\boldsymbol{a}) = \sum_{k\geqslant r} \mu_r(T;\boldsymbol{a})$ — числа ячеек, в которые попало не менее r частиц.

Каждому целому $r \geqslant 1$ соответствует отношение $\preccurlyeq_r$ частичного порядка: $\boldsymbol{a} \preccurlyeq_r \boldsymbol{a}'$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}\{\overline{\mu}_r(T;\boldsymbol{a}) \leqslant k\} \leqslant \mathbf{P}\{\overline{\mu}_r(T;\boldsymbol{a}') \leqslant k\} \quad \text{для всех } T \geqslant 2r-1 \text{ и } k \in \{1,2,\ldots\}. \tag{2}$$

Если выполняется условие (2), то можно задавать на одном вероятностном пространстве случайные величины $\zeta(T;\boldsymbol{a})$ и $\zeta(T;\boldsymbol{a}')$ так, что $\zeta(T;\boldsymbol{a})$ имеет такое же распределение, как $\overline{\mu}_r(T;\boldsymbol{a})$, $\zeta(T;\boldsymbol{a}')$ — такое же распределение, как $\overline{\mu}_r(T;\boldsymbol{a}')$ и

$$\mathbf{P}\{\zeta(T;\boldsymbol{a}) \geqslant \zeta(T;\boldsymbol{a}')\} = 1,$$

[1]Математический институт им. В.А.Стеклова РАН. E-mail: `zubkov@mi.ras.ru`
[2]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова. E-mail: `tatarenko_ta@mail.ru`

т. е. если $\boldsymbol{a} \preccurlyeq_r \boldsymbol{a'}$), то $\overline{\mu}_r(T;\boldsymbol{a})$ «стохастически больше» $\overline{\mu}_r(T;\boldsymbol{a'})$ при любом $T \geqslant 2r-1$.

В [1] было доказано, что отношения частичного порядка по Шуру и $\preccurlyeq_1$ эквивалентны (в этом случае ограничение на n отсутствует). То же самое верно при любом r.

Теорема 1. *Отношение* (2) *частичного порядка* $\preccurlyeq_r$ *эквивалентно отношению частичного порядка по Шуру* (1) *при любом* $r \geqslant 1$.

Следствие 1. *При любых натуральных числах r и N число ячеек, содержащих не менее r частиц, в равновероятной схеме размещения по N ячейкам «стохастически больше» числа ячеек, содержащих не менее r частиц, в любой другой полиномиальной схеме размещения по N ячейкам при одинаковом числе размещаемых частиц.*

Отметим еще, что в [5] описаны полиномиальные распределения $\boldsymbol{a}$, для которых при фиксированных числе ячеек N, числе частиц T и целом $r \geqslant 1$ достигаются максимальные и минимальные значения $\mathbf{M}\mu_r(T,\boldsymbol{a})$, и получены двусторонние оценки максимального значения.

Список литературы

[1] *Зубков А. М., Попов Н. Н.*, Отношение частичного порядка, порожденное распределениями числа занятых ячеек. Матем. заметки, 1982, т. 32, N 1, с. 97–102.

[2] *Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.*, Случайные размещения. М., Наука, 1976, 224 с.

[3] *Johnson N.L., Kotz S.*, Urn models and their application. New-Jork e.a., J.Wiley & Sons, 1977, 402 pp.

[4] *Маршалл А., Олкин И.*, Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983, 575 с.

[5] *Гильманшин Р.Р., Зубков А.М., Колокольникова Н.А.*, Оценки экстремальных значений среднего числа ячеек, содержащих заданное число частиц. Дискретная математика, 2007, т. 19, вып. 1, с. 11–16.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Свойства распределения статистики Пирсона для конечных выборок

Андрей М. Зубков, Марина В. Филина[1]

В докладе обсуждаются обнаруженные в вычислительных экспериментах особенности аппроксимации распределения статистики Пирсона для конечных выборок хи-квадрат распределениями.

Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_N$ — частоты исходов $1, \ldots, N$ в выборке объема T из полиномиального распределения с вероятностями исходов $p_1, \ldots, p_N$. Статистика Пирсона вычисляется по формуле

$$\Pi_{N,T} = \sum\nolimits_{k=1}^{N} \frac{(\nu_k - m_k)^2}{m_k},$$

где $m_1, \ldots, m_N$ — гипотетические средние значения частот $\nu_1, \ldots, \nu_N$.

Доклад посвящен обсуждению результатов, полученных при вычислении точных распределений статистики Пирсона для конечных выборок. Целью экспериментов было сравнение точных распределений с обычно используемыми аппроксимациями хи-квадрат распределением (а также нецентральным хи-квадрат и нормальным распределениями).

Для вычисления точных распределений использовался алгоритм из [1], [2], основанный на представлении распределения разделимой статистики (в частности, статистики Пирсона) в виде финального распределения неоднородной по времени цепи Маркова, переходные вероятности которой определяются вероятностями $p_1, \ldots, p_N$ исходов полиномиальной схемы и объемом T выборки. На обычном персональном компьютере с 1 Gb оперативной памяти удается вычислять распределения статистики Пирсона для случая, когда $m_1 = \ldots = m_N = \frac{T}{N}$, с числом исходов N вплоть до нескольких сотен и объемом выборки T до нескольких тысяч. Аналогичные результаты можно получать для случаев, когда $m_1, \ldots, m_N$ принимают небольшое число различных значений; в общем случае точные вычисления распределения статистики Пирсона удается проводить, когда число исходов составляет несколько десятков.

Представление результатов вычислений в графической форме (см., например, [3], [4]), выявило несколько закономерностей, которые пока не удалось строго обосновать. Опишем часть закономерностей для случаев, когда $m_k = Tp_k$, $k = 1, \ldots, N$.

1. Разность между (сглаженной) функцией распределения статистики Пирсона для конечной выборки (множество значений статистики конечно) и функцией распределения хи-квадрат с соответствующим числом степеней свободы имеет вид волны и при увеличении аргумента меняет знак по крайней мере дважды: от 0 до значений, немного меньших математического ожидания статистики Пирсона, эта разность отрицательна, затем она становится положительной, а на правом хвосте распределения — снова отрицательной (вплоть до максимального значения статистики Пирсона). С ростом объема выборки абсолютные величины этих разностей убывают, но их форма, описанная выше, сохраняется.

2. При переходе от равновероятного случая к неравновероятному с теми же числами исходов N и объемом выборки T происходит сглаживание функции распределения

[1]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. E-mail: `zubkov@mi.ras.ru`, `mfilina@mi.ras.ru`

статистики Пирсона (в частности, за счет уменьшения массы отдельных атомов этого распределения).

3. Вычисление точных распределений статистики Пирсона показало, что если $u_M(\alpha)$ — α-квантиль распределения хи-квадрат с M степенями свободы, то

$$\mathbf{P}\{\Pi_{N,T} > u_{N-1}(\alpha)\} > \alpha, \quad \text{если} \quad \alpha \geqslant 0,99,$$

причем отношение $\mathbf{P}\{\Pi_{N,T} > u_{N-1}(\alpha)\}/\alpha$ оказывается существенно больше 1, если величина T/N невелика и/или α близко к 1; кроме того, это отношение увеличивается с ростом «неравновероятности» распределения $p_1, \ldots, p_N$.

Таким образом, если для вычисления критических уровней значения статистики Пирсона использовать квантили распределения хи-квадрат, то фактическая вероятность отклонения основной гипотезы может оказаться больше планировавшейся.

В докладе будут также отмечены особенности аппроксимации нецентральным распределением хи-квадрат и нормальным распределением в ситуациях, когда $(m_1, \ldots, m_N) \neq (Tp_1, \ldots, Tp_N)$.

Список литературы

[1] *Зубков А.М.*, Рекуррентные формулы для распределений функционалов от дискретных случайных величин. Обозр. прикл. промышл. математики, 1996, т. 3, вып. 4, с. 567–573.

[2] *Зубков А.М.*, Методы расчета распределений сумм случайных величин. Труды по дискретной математике, т. 5. М.: Физматлит, 2002, с. 51–60.

[3] *Filina M.V., Zubkov A.M.*, Exact computation of Pearson statistics distribution and some experimental results. Austrian J. Statistics, 2008, v. 37, N 1, p. 129–135.

[4] *Filina M.V., Zubkov A.M.*, Tail properties of Pearson statistics distributions. Austrian J. Statistics, 2011, v. 40, N 1–2, p. 47–54.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Стационарное распределение произведения случайных матриц

Е.А. Илларионов, Д.Д. Соколов, В.Н. Тутубалин[1]

На примере уравнения Якоби, по-видимому впервые, была рассчитана инвариантная мера, существование которой было доказано в работах Ферстенберга (1963). Непосредственное решение интегрального уравнения, из которого выражается инвариантная мера, создает немало вычислительных трудностей и требует привлечения больших компьютерных ресурсов. Используя суперкомпьютер СКИФ МГУ, удалось построить данную меру при различных значениях параметров. На ее основе были вычислены показатели Ляпунова и скорости роста моментов поля Якоби.

1 Введение

Изучение предельных свойств произведения большого числа случайных матриц было начато Беллманом [1] и затем продолжалось рядом математиков (см. напр. [2]). Было получено относительно полное описание как асимптотических свойств матричных элементов, так и распределения всей матрицы-произведения $B(n) = B_1 B_2 ... B_n$ в целом, но это описание зависит от стационарного распределения некоторой марковской цепи (инвариантной меры). Эта мера является решением некоторого интегрального уравнения, но найти её в явном виде удалось лишь в ряде простейших случаев [3]. Математические результаты Ферстенберга [4] сводятся к доказательству существования и единственности этой меры (при введении дополнительных предположений на распределение μ перемножаемых матриц) и к доказательству строгой положительности некоторых интегралов по прямому произведению инвариантной меры ν на распределение матриц μ.

Полученные Ферстенбергом результаты могут быть применены для изучения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, если предположить, что коэффициенты этих уравнений обновляются (т.е. заменяются на статистически независимые) в определенные моменты времени. В этом случае фундаментальная матрица системы оказывается произведением независимых случайных матриц, так что становится возможным ее асимптотическое исследование на основе предельных теорем [5]. При заданном распределении μ отдельных фундаментальных матриц вопрос упирается в вычисление соответствующей инвариантной меры ν. Как правило, эту меру не удается найти аналитически, и остается искать ее численно. Исследование возникающих при этом трудностей и составляет содержание настоящей работы.

Мы решаем интересующую нас задачу на примере уравнения Якоби

$$y''(x) + K(x)y = 0, \tag{1}$$

где $K(x)$ – случайный процесс с обновлением. Оказывается, даже в таком относительно простом примере ядро интегрального уравнения, из которого определяется инвариант-

[1]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: `egor.mypost@gmail.com`

ная мера, является быстро изменяющейся функцией, так что решение требует привлечения существенных компьютерных ресурсов. По-видимому, до сих пор задача численного нахождения инвариантной меры не привлекала внимания исследователей, а указанная трудность не была известна.

2 Основные результаты

Вычисления, проведенные на суперкомпьютере СКИФ МГУ, позволили найти инвариантную меру при различных ограничениях, налагаемых на случайный процесс $K(x)$. По полученной мере были посчитаны показатели Ляпунова

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|xB(n)\| \tag{2}$$

и скорости роста моментов поля Якоби

$$\gamma_p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{pn} \log \mathbf{E}|y(n)|^p, \tag{3}$$

где x — любой ненулевой вектор и предел понимается с вероятностью 1. Результаты согласуются с теорией [7], которая предсказывает рост γ_p с увеличением p. Сравнение показателей Ляпунова с оценками, полученными в [6] путем численного моделирования большого числа реализаций решения уравнения Якоби с использованием различных генераторов псевдослучайных чисел, также показало высокую степень совпадения результатов.

Список литературы

[1] *Bellman R.*,Limit theorem for non-commutative operations. I. Duke Math. J. 1954, v. 21, p. 491–500.

[2] *Bougerol P., Lacroix J.*, Product of random matrices with application to Schrödinger operators. Progress in Probability and Statistics. 1985, v. 8, p. 1–283.

[3] *Comtet A., Texier C., Tourigny Y.*, Products of random matrices and generalised quantum point scatterers. Journal of Statistical Physics. 2010, v. 140, p. 427–466.

[4] *Furstenberg H.*, Noncommuting random products. Trans. Amer. Math. Soc. 1963, v. 108, p. 377–428.

[5] *Tutubalin V.N.*, A central limit theorem for products of random matrices and some of its applications. Symposia Mathematica. 1977, v. XXI, p. 101–116.

[6] *Михайлов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.*, Фундаментальная матрица для уравнений Якоби со случайными коэффициентами. Вычислительные методы и программирование. 2010, т. 11, с. 261–268.

[7] *Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Molchanov S. A., Sokoloff, D. D.* Kinematic dynamo problem in a linear velocity field J. Fluid Mech. 1984, v. 144, p. 1–11.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Восстановление фазы для вероятностных мер на группе функций Уолша

Ирина П. Ильинская[1]

В работе указаны условия, при которых композиции распределений Пуассона на группе функций Уолша восстанавливаются по модулю своей характеристической функции с точностью до сдвига.

1 Введение

В некоторых разделах физики важно знать ответ на вопрос: какие вероятностные меры в $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ или, в более общем случае, на локально компактной абелевой группе, восстанавливаются по модулю своей характеристической функции однозначно с точностью до сдвига и центральной симметрии. Построению таких мер на локально компактных абелевых группах посвящены, например, работы Г.М. Фельдмана и Г. Карналя [1], [2]. В докладе этот вопрос рассматривается для вероятностных мер на группе функций Уолша.

Обозначим

$$r_k(x) = \operatorname{sign}(\sin(2^k \pi x))\,, \quad x \in [0,1]\,, \quad k = 0,1,2,\dots\,,$$

последовательность функций Радемахера, $\{w_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность функций Уолша, которые являются всевозможными конечными произведениями функций Радемахера. Множество $W = \{w_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является топологической группой относительно операции умножения и дискретной топологии. Вероятностная мера на W задаётся набором чисел $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $a_k \geqslant 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$, а её характеристическая функция имеет вид $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k(x)$. Множество характеристических функций вероятностных мер на группе W обозначим S_W.

Определение 1. Вероятностная мера на W (и её характеристическая функция $f(x)$) имеют *тривиальный класс эквивалентности*, если из равенства $|f_1(x)| = |f(x)|$, $f_1 \in S_W$, следует, что $f_1(x) = w_k(x) f(x)$ для некоторого $k = 0,1,2,\dots$.

2 Основные результаты

Ранее автором ([3]) были получены следующие результаты, дающие условия того, что распределение Пуассона на группе W и композиции распределений Пуассона имеют тривиальный класс эквивалентности.

Теорема 1. *Распределение Пуассона с характеристической функцией*

$$f(x) = \exp\{a(w_k(x) - 1)\} \quad (a > 0\,, \quad k = 1,2,\dots)$$

имеет тривиальный класс эквивалентности.

[1]Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, механико-математический факультет. E-mail: `iljinskii@univer.kharkov.ua`

Теорема 2. *Композиция двух распределений Пуассона с характеристической функцией*

$$f(x) = \exp\{a(w_i(x) - 1) + b(w_j(x) - 1)\} \quad (a, b > 0\,, \ \ i, j = 1, 2, \dots\,, \ \ i \neq j)$$

имеет тривиальный класс эквивалентности тогда и только тогда, когда

$$e^{-2a} + e^{-2b} + e^{-2(a+b)} > 1\,.$$

Теорема 3. *Композиция трёх распределений Пуассона с характеристической функцией*

$$\begin{aligned} f(x) = {}&\exp\{a(w_i(x) - 1) + b(w_j(x) - 1) + c(w_i(x)w_j(x) - 1)\} \\ &(a, b, c > 0\,, \ \ i, j = 1, 2, \dots\,, \ \ i \neq j) \end{aligned}$$

имеет тривиальный класс эквивалентности тогда и только тогда, когда

$$e^{-2(a+b)} + e^{-2(b+c)} + e^{-2(c+a)} > 1\,.$$

Недавно автором совместно с Д.С. Негурицей получена

Теорема 4. *Композиция трёх распределений Пуассона с характеристической функцией*

$$\begin{aligned} f(x) = {}&\exp\{a(w_i(x) - 1) + b(w_j(x) - 1) + c(w_k(x) - 1)\} \\ &(a, b, c > 0\,, \ \ i, j, k = 1, 2, \dots\,, \ \ i \neq j, \ j \neq k, \ k \neq i) \end{aligned}$$

имеет тривиальный класс эквивалентности тогда и только тогда, когда выполняется система неравенств

$$\begin{cases} e^{-2a} + e^{-2b} + e^{-2(a+b)} > 1\,, \\ e^{-2b} + e^{-2c} + e^{-2(b+c)} > 1\,, \\ e^{-2c} + e^{-2a} + e^{-2(c+a)} > 1 \end{cases}$$

и хотя бы одно из неравенств

$$\begin{aligned} e^{-2a} + e^{-2b} - e^{-2c} - e^{-2(a+b)} + e^{-2(b+c)} + e^{-2(c+a)} + e^{-2(a+b+c)} &> 1\,, \\ -e^{-2a} + e^{-2b} + e^{-2c} + e^{-2(a+b)} - e^{-2(b+c)} + e^{-2(c+a)} + e^{-2(a+b+c)} &> 1\,, \\ e^{-2a} - e^{-2b} + e^{-2c} + e^{-2(a+b)} + e^{-2(b+c)} - e^{-2(c+a)} + e^{-2(a+b+c)} &> 1\,. \end{aligned}$$

Список литературы

[1] *Carnal H., Feldman G.M.* Phase retrievall for probability measures on abelian groups, 1. J.Theor. Probab., 1995, v.8, N 3, p. 717–725.

[2] *Carnal H., Feldman G.M.* Phase retrievall for probability measures on abelian groups, 2. J.Theor. Probab., 1997, v.10, N 4, p. 1065–1074.

[3] *Ильинская И.П.* Восстановление фазы для вероятностных мер на группе характеров группы Кантора-Уолша. Доповіді НАН України, 2003, N 8, с. 11–14.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Интегральное представление переходных вероятностей марковского процесса эпидемии Вейса и предельная теорема

Александр В. Калинкин, Антон В. Мастихин[1]

В докладе обсуждаются результаты авторов о марковских процессах эпидемии.

1 Определение марковского процесса эпидемии

На множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2),\ \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots\}$ рассматривается однородный во времени марковский процесс $(\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, с переходными вероятностями $P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t) = \mathbf{P}\left\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\right\}$. При $t \to 0+$ положим [1, 6] $(\mu > 0)$

$$P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2-1)}(t) = \alpha_1\alpha_2 t + o\,(t),\ P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1-1,\alpha_2)}(t) = \mu\alpha_1 t + o\,(t),\ P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = 1 - (\alpha_1\alpha_2 + \mu\alpha_1)t + o\,(t).$$

Введем производящие функции, $(\alpha_1, \alpha_2) \in N^2$ $(|s_1| \leqslant 1,\ |s_2| \leqslant 1)$,

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} P^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{(\beta_1,\beta_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2},\ \mathcal{F}(t; z_1, z_2; s_1, s_2) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\alpha_2!} F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2).$$

Первая (обратная) и вторая (прямая) системы дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей записываются в виде уравнений [3]

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = z_1 z_2 \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2}\right) + \mu z_1 \left(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1}\right), \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = (s_1 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s_1 \partial s_2} + \mu(1 - s_1) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s_1}, \tag{1}$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z_1, z_2; s_1, s_2) = e^{z_1 s_1 + z_2 s_2}$.

2 Замкнутое решение уравнений Колмогорова

Введем функцию $H(x, y) = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ux}) J_0(2\sqrt{vy})\, {}_0F_2(1, 1; -uv)\, du dv$ $(x > 0,\ y > 0)$, где $J_0(z)$ — бесселева функция, ${}_0F_2(1, 1; z)$ — обобщенная гипергеометрическая функция.

Теорема 1. *Производящая функция переходных вероятностей равна*

$$F_{(\alpha_1,\alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \Bigg((s_1 e^{-(x+\mu)t})^{\alpha_1} (1 - e^{-y} + s_2 e^{-y})^{\alpha_2} + \int_0^\infty \Bigg(\frac{1}{2\pi i} \oint_{0+} \Big(\frac{\mu(1 - e^{-(x+\mu)t})}{u}$$
$$+ s_1 e^{-(x+\mu)t})^{\alpha_1} (1 - e^{-y-v} + s_2 e^{-y-v})^{\alpha_2} e^{(u-\mu)v} du \Big) dv \Bigg) H(x, y)\, dx dy. \tag{2}$$

[1]Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, кафедра высшей математикм. E-mail: `kalinkin@mx.bmstu.ru, mastihin@yandex.ru`

Доказательство состоит в применении к линейным уравнениям в частных производных второго порядка (1) метода разделения переменных и суммировании полученного ряда [4].

Важен случай, когда в процессе эпидемии при $t = 0$ число α_1 инфицированных особей мало, а число α_2 восприимчивых особей велико. Метод характеристических функций [2] при интегральном представлении (2) для производящей функции случайного числа особей сводится, в силу биномиального характера выражения, к простому применению второго замечательного предела, и дает «пороговую» предельную теорему ([4], ср. [5]; [6]).

Теорема 2. *При фиксированном* $t > 0$ $\lim_{\alpha_2\to\infty} \mathbf{P}\left\{\xi_2(t)/\alpha_2 \leqslant x\right\} = F_{\alpha_1}(t;x)$, *где* $F_{\alpha_1}(t;x)$ — *функция распределения, характеристическая функция для которого равна* $(\alpha_1 = 1, 2, \ldots)$

$$\varphi_{\alpha_1}(t;\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dF_{\alpha_1}(t;x) = e^{-\alpha_1\mu t} e^{i\lambda e^{-\alpha_1 t}}$$
$$+ \sum_{k=1}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^k \frac{\mu^k}{(k-1)!} \sum_{l=0}^{k} C_k^l (-1)^l \int_0^{e^{-(\alpha_1-k+l)t}} e^{i\lambda x} x^{\mu-1} (-\ln x - (\alpha_1 - k + l)t)^{k-1}\, dx. \tag{3}$$

Из (3) находится явное выражение для функции распределения

$$F_{\alpha_1}(t;x) = \begin{cases} 0, & x < e^{-\alpha_1 t}; \\ e^{-\alpha_1\mu t} + \int_{e^{-\alpha_1 t}}^{x} f_{\alpha_1}(t;y)\, dy, & e^{-\alpha_1 t} \leqslant x < 1; \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

где кусочно-непрерывная функция $f_{\alpha_1}(t;x)$ задана на каждом из интервалов $(e^{-(\alpha_1-n)t}, e^{-(\alpha_1-n-1)t})$, $n = 0, \ldots, \alpha_1 - 1$, равенством

$$f_{\alpha_1}(t;x) = x^{\mu-1} \sum_{k=n+1}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^k \frac{\mu^k}{(k-1)!} \sum_{l=0}^{k-n-1} C_k^l (-1)^l (-\ln x - (\alpha_1 - k + l)t)^{k-1}.$$

$$F_1(t;x) = \begin{cases} 0, & x < e^{-t}; \\ x^{\mu}, & e^{-t} \leqslant x < 1; \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases} \quad F_2(t;x) = \begin{cases} 0, & x < e^{-t}; \\ x^{\mu}(1 + \mu\ln x + 2\mu t), & e^{-2t} \leqslant x < e^{-t}; \\ x^{\mu}(1 - \mu\ln x), & e^{-t} \leqslant x < 1; \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

Список литературы

[1] *Weiss G.* On the spread of epidemics by carries. Biometrics, 1965, v. 21, N 2, p. 481–490.

[2] *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. Изд. 5-е. М.: Наука, 1969. — 400 с.

[3] *Калинкин А.В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. Усп. матем. наук, 2002, т. 57, N 2, с. 23–84.

[4] *Калинкин А.В., Мастихин А.В.* Марковский процесс эпидемии Вейса и ветвящиеся процессы. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Естественные науки". 2006, N 2(21), с. 3–17.

[5] *Мастихин А.В.* Финальные вероятности марковского процесса эпидемии Беккера. Теория вероятностей и ее применения, 2011, т. 56, N 3, с. 606–614.

[6] *Крючкова Е.В.* Модель развития эпидемии, учитывающая иммунный порог индивидуумов. Конференция "Ломоносов 2012". Секция "Математика и механика". М.: МГУ, 2012.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

О больших уклонениях максимума процесса ожидания

Михаил В. Козлов[1]

Рассматриваются большие уклонения максимума M_n отрезка случайного блуждания S_j, $j \le n$, и максимума $\mathcal{M}_n^W$ отрезка процесса ожидания W_j, $W_{j+1} := \max(0, W_j + X_{j+1})$, в предположении, что сл.в. X_j подчиняются правостороннему условию Крамера. Уточняются ранее полученные результаты А.А. Боровкова, Д.А. Коршунова (2000 г.) об асимптотике вероятностей $\mathbf{P}(M_n > tn)$, $\mathbf{E}X_j < 0$, $n \to \infty$. Получены условные функциональные предельные теоремы для траектории случайного блуждания при условиях $T(tn) = k$ и $M_n > tn$. Развитый подход применяется к задаче о больших уклонениях максимума процесса ожидания W_j. Получены также условные предельные теоремы для процесса W_j при условии $\mathcal{M}_n^W > tn$.

Пусть X, X_1, X_2, ... — последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) невырожденных случайных величин (сл.в.). Мы предполагаем, что математическое ожидание $\mathbf{E}X =: \mu_0$ конечно и что выполнено правостороннее условие Крамера

$$\text{(A1)} \qquad \mathbf{E}e^{\lambda X} =: \theta(\lambda) < \infty \ \text{ при } \ 0 < \lambda < \lambda_+, \ \lambda_+ := \sup\{\lambda \colon \theta(\lambda) < \infty\}.$$

При $\mu_0 < 0$, если не оговорено противное, предполагаем, что

$$\text{(A2)} \qquad \sup\{\theta(\lambda) \colon \lambda > 0\} > 1, \ \mathbf{P}(X > 0) > 0.$$

При условии (A2) обозначим через $\varkappa$ положительный корень уравнения $\theta(\lambda) = 1$. Положим

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \ S_0 = 0, \ M_n := \max\{S_j \colon j \le n\}, \ M := \sup\{S_j \colon j \ge 0\}.$$

При $\mu_0 < 0$ вероятности больших уклонений (б.у.) $\mathbf{P}(M_n > x)$, $\mathbf{P}(M > x)$, $n, x \to \infty$, подробно изучались в работах А.А. Боровкова, А.А. Боровкова и Д.А. Коршунова (см. [1], [2] и приведённую там библиографию). Сл.в. M_n совпадает по распределению со сл.в. W_n, определяемой рекуррентно:

$$W_{n+1} = \max(0, W_n + X_{n+1}), \ W_0 = 0. \tag{1}$$

В докладе проводится прямой анализ вероятностей б.у. сл.в. M_n. Это позволяет освободиться от некоторых ограничений в [1]. Близкой по методу является работа А.В. Шкляева [3], где асимптотика вероятностей б.у. максимума выведена в случае $\mu_0 \ge 0$. Положим $T(x) := \inf(k \colon S_k > x)$, $x > 0$. Мы исследуем асимптотику членов разложения

$$\mathbf{P}(M_n > tn) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(T(tn) = k). \tag{2}$$

[1]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: `kozlovmikhail@mail.ru`

Опираясь на классический результат В.В. Петрова [4]:

$$\mathbf{P}(S_n > tn) \sim c_0(t) n^{-1/2} e^{-\psi(t)n}, \ n \to \infty, \ t > \mu_0, \tag{3}$$

мы выводим соотношение

$$\mathbf{P}(T(tn) = n) \equiv \mathbf{P}(S_n > tn, M_{n-1} \leq tn) \sim c_1(t) n^{-1/2} e^{-\psi(t)n}, \ n \to \infty, \tag{4}$$

которое применяется к вероятностям

$$\mathbf{P}(T(tn) = k) = \mathbf{P}\bigg(S_k > \left(\frac{tn}{k}\right) \cdot k, M_{k-1} \leq \left(\frac{tn}{k}\right) \cdot k\bigg). \tag{5}$$

В результате получаются локальные предельные теоремы для вероятностей (5) при условии б.у. максимума. Попутно заново выводятся теоремы о вероятностях б.у. $\mathbf{P}(M_n > tn)$, установленные ранее в [1] и [3]. При этом в случае $\mu_0 < 0$ удаётся несколько расширить область действия асимптотики, полученной в [1] для вероятностей (2).

Использованные методы и полученные результаты применяются при нахождении асимптотики вероятностей б.у. максимума $\mathcal{M}_n^W := \max\{W_j : \ j \leq n\}$ процесса ожидания, а также при описании типичных траекторий процесса, отвечающих б.у. $\mathcal{M}_n^W > tn$.

Список литературы

[1] *Боровков А.А., Коршунов Д.А.*, Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова, 2. Достационарные распределения в экспоненциальном случае. Теория вероятностей и ее применения, 2000, т. 45, N 3, с. 437-468.

[2] *Боровков А.А.,* Эргодичность и устойчивость случайных процессов. Москва, Эдиториал УРСС, 1999, 440с.

[3] *Шкляев А.В.,* Предельные теоремы для случайного блуждания при условии большого уклонения максимума. Теория вероятностей и ее применения, 2010, т. 55, N 3, с. 590-598.

[4] *Петров В.В.,* О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, с. 310-322.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Пуассоновская аппроксимация для распределения числа "параллелограммов" в случайной выборке из $\mathbb{Z}_N^q$

Василий И. Круглов[1]

Исследуется распределение числа равных пар разностей, удовлетворяющих дополнительному условию, между элементами равновероятных независимых выборок из $\mathbb{Z}_N^q, N \geqslant 4$.

1 Введение

Критерий, предложенный Дж. Марсальей для проверки качества датчиков случайных чисел (см. [2, 3]), использует статистику

$$\mu(N,T) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant T-1} \mathbf{I}\left\{X_{(i+1)} - X_{(i)} = X_{(j+1)} - X_{(j)}\right\},$$

где $X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(T)}$ — вариационный ряд, построенный по числам $X_1, \ldots, X_T$. Доказано (см. [1]), что если $X_1, \ldots, X_T$ — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на множестве $\{0, \ldots, N-1\}$, то при $\lim\limits_{T,N\to\infty} T^3/(4N) = \lambda$ распределение случайной величины $\mu(N,T)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ.

Случайную величину $\mu(N,T)$ можно интерпретировать как количество равных отрезков $\nu_{i,j} = X_j - X_i$, удовлетворяющих следующему условию: величины X_i и X_j должны быть соседними членами вариационного ряда $X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(T)}$. Здесь рассматривается задача аналогичного характера для ситуации, когда исходные случайные величины принимают значения в группе $\mathbb{Z}_N^q$.

2 Постановка задачи и основные результаты

Будем рассматривать группу $\mathbb{Z}_N^q$, где $N \geqslant 4$, как q-мерный дискретный тор $\{0, \ldots, N-1\}^q$. Введём на $\mathbb{Z}_N^q$ метрику: для $x = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{Z}_N^q, y = (y_1, \ldots, y_q) \in \mathbb{Z}_N^q$ положим

$$\rho(x,y) = \max_{i=1,\ldots,q} \big(|x_i - y_i|_N\big),$$

где $|x_i - y_i|_N = \min\left(|x_i - y_i|, N - |x_i - y_i|\right),\ i = 1, \ldots, q$.

Пусть в данном торе равномерно и независимо выбраны случайные точки $\xi_1, \ldots, \xi_T, T \geqslant 4$. Зафиксируем параметр $\rho_{\max}, 1 \leqslant \rho_{\max} < \frac{N-1}{2}$, и для каждой упорядоченной пары чисел $1 \leqslant i, j \leqslant T$ построим вектор

$$\Delta_{i,j} = (\xi_j - \xi_i)\mathbf{I}\{\rho(\xi_i, \xi_j) \leqslant \rho_{\max}\}.$$

[1]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. E-mail: `kruglov@mi.ras.ru`

Будем говорить, что точки $\xi_h, \xi_f, \xi_l, \xi_m$, где $1 \leqslant h < f < l < m \leqslant T$, составляют параллелограмм, если имеет место событие

$$B(h,f,l,m) = \bigcup_{\sigma} \left\{ \Delta_{\sigma(h),\sigma(f)} = \Delta_{\sigma(l),\sigma(m)} \neq 0 \right\},$$

т.е. хотя бы для одной перестановки $\sigma : \{h,f,l,m\} \to \{h,f,l,m\}$ векторы $\Delta_{\sigma(h),\sigma(f)}$ и $\Delta_{\sigma(l),\sigma(m)}$ являются ненулевыми и равными. Для любых $1 \leqslant h < f < l < m \leqslant T$

$$p = \mathbf{P}\left(B(h,f,l,m)\right) = \frac{3}{N^q} \frac{(2\rho_{\max}+1)^q - 1}{N^q} \left(2 - \frac{(2\rho_{\max}+1)^q}{N^q}\right).$$

Введём случайную величину $\zeta = \zeta(N,q,T,\rho_{\max}) = \sum\limits_{1 \leqslant h < f < l < m \leqslant T} \mathbf{I}_{B(h,f,l,m)}$, равную количеству параллелограммов, образованных элементами выборки $\xi_1, \ldots, \xi_T$, тогда

$$\mathbf{E}\zeta = \mathrm{C}_T^4 p = \frac{T^{[4]}}{8N^q} \frac{(2\rho_{\max}+1)^q - 1}{N^q} \left(2 - \frac{(2\rho_{\max}+1)^q}{N^q}\right), \; T^{[4]} = T(T-1)(T-2)(T-3).$$

Пусть $d_{TV}(\zeta, \pi_\lambda)$ — расстояние полной вариации между распределением случайной величины ζ и распределением Пуассона с параметром $\lambda = \mathbf{E}\zeta$.

Теорема 1. *При* $N, T \geqslant 4$ *справедлива оценка*

$$d_{TV}(\zeta, \pi_\lambda) < \left(1 - e^{-\lambda}\right) \left(\frac{4}{3}T^3 p + 3T^2 p + 4Tp + p + \frac{18T^2}{N^q} + \frac{24T}{N^q}\right).$$

Следствие 1. *Если* $T \to \infty, N \to \infty, \rho_{\max}^q \to \infty$ *так, что* $\lambda \to \lambda_0 = \mathrm{const} \in (0, +\infty)$, *то* $d_{TV}(\zeta, \pi_\lambda) \to 0$.

Следствие 2. *Если* $T \to \infty, N = \mathrm{const} \geqslant 4, \rho_{\max} = \mathrm{const}, q \to \infty$ *так, что* $\lambda \to \lambda_0 = \mathrm{const} \in (0, +\infty)$, *то* $d_{TV}(\zeta, \pi_\lambda) \to 0$.

Сформулируем предельную теорему для распределения момента $\tau_0 = \min\{T : \zeta > 0\}$ первого появления параллелограмма в выборке.

Теорема 2. *Пусть* $T \to \infty$ *и параметры* $N, q, \rho_{\max}$ *меняются таким образом, что* $d_{TV}(\zeta, \pi_\lambda) \to 0$, *тогда*

$$\mathbf{P}\left\{ \tau_0 > \sqrt[4]{t \cdot \frac{8N^q}{\frac{(2\rho_{\max}+1)^q - 1}{N^q}\left(2 - \frac{(2\rho_{\max}+1)^q}{N^q}\right)}} \right\} \to e^{-t}, t \geqslant 0.$$

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. А. М. Зубкову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] *Клыкова Н.В.* Предельное распределение числа совпадающих промежутков. Теория вероятностей и ее применения, 2002, т. 47, вып. 1, с. 147–152.

[2] *Кнут Д.* Искусство программирования, том 2. Получисленные методы. М.: ООО "И. Д. Вильямс", 2007.

[3] A statistical test suite for random and pseudorandom number generators for cryptographic applications. NIST Special Publication 800-22.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Экстремальная задача для суммы независимых индикаторов

Владимир А. Лесниченко[1]

Для суммы $S_n = I_1 + \ldots + I_n$, где $I_1, \ldots, I_n$ — независимые индикаторы, $\mathbf{P}\{I_k = 1\} = p_k$, $k = 1, \ldots, n$, найдены экстремальные значения вероятности $\mathbf{P}\{S_n = 0\}$ при условиях $\mathbf{E}S_n = m_1$, $\mathbf{D}S_n = m_2$. Указаны также необходимые условия, которым должен удовлетворять набор $p_1, \ldots, p_n$ для того, чтобы на нем достигались экстремальные значения $\mathbf{P}\{S_n = 0\}$ при фиксированных моментах $\mathbf{E}S_n^r = m_r$, $r \in C$, где $C \subset \mathbb{N}$ — конечное множество натуральных чисел.

1 Введение

Пусть $I_1, \ldots, I_n$ — независимые индикаторы и $S_n = I_1 + \ldots + I_n$. В работе рассматривается задача об экстремальных значениях $\mathbf{P}\{S_n = 0\}$ при условии, что фиксированы некоторые моменты S_n. Найдены экстремальные значения вероятности $\mathbf{P}\{S_n = 0\}$ при условиях $\mathbf{E}S_n = m_1$, $\mathbf{D}S_n = m_2$. Указаны необходимые условия экстремальности значений $\mathbf{P}\{S_n = 0\}$ при условиях $\mathbf{E}S_n^r = m_r$, $r \in C$, для произвольного конечного множества C натуральных чисел.

Задача получения оценок $\mathbf{P}\{\zeta = 0\}$ в терминах моментов рассматривалась для различных классов неотрицательных случайных величин ζ. При $C = \{1, \ldots, k\}$ способ получения неулучшаемых оценок $\mathbf{P}\{\zeta = 0\}$ с помощью линейного программирования описан в [1]; в этой книге подробно рассмотрен класс неравенств типа Бонферрони для целочисленных неотрицательных случайных величин. В [2] получены неулучшаемые оценки $\mathbf{P}\{\zeta = 0\}$ в классе случайных величин со значениями в $\{0\} \bigcup [1, \infty]$. В [3] получены явные оценки сверху для расстояния (в равномерной метрике) между функцией распределения суммы независимых индикаторов и ее асимптотическим разложением.

В данной работе кроме условий на моменты предполагается независимость слагаемых-индикаторов. Представляется интересным выяснить, как изменяются экстремальные значения при наложении таких дополнительных условий.

2 Основные результаты

Пусть $I_1, \ldots, I_n$ — независимые индикаторы, $\mathbf{P}\{I_k = 1\} = p_k$, $\mathbf{P}\{I_k = 0\} = 1 - p_k$, $k = 1, \ldots, n$, и $S_n = I_1 + \ldots + I_n$. Для произвольного конечного множества $C \subset \mathbb{N}$ обозначим через $A_C(m_r(r \in C); n)$ множество наборов $\vec{p} = (p_1 \ldots, p_n) \in [0, 1]^n$, которые являются решениями системы уравнений $\mathbf{E}S_n^r = m_r$, $r \in C$.

[1]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. E-mail: lesnichenko.v@gmail.com

Обозначая через $\{x\}$ дробную долю числа x, положим

$$A(n) = \left\{(m_1, m_2) : m_1 \in [0, n], \{m_1\}(1 - \{m_1\}) < m_2 \leqslant m_1(1 - n^{-1}m_1)\right\},$$
$$D(n) = \{(m_1, m_2) \colon (m_1 - 1, m_2) \in A(n-1)\},$$
$$\nu(m_1, m_2) = \frac{m_1^2}{m_1 - m_2}.$$

Пусть $q_1(m_1, m_2, k, n) \geqslant q_2(m_1, m_2, k, n)$ — решение системы уравнений

$$kq_1 + (n-k)q_2 = m_1, \quad kq_1(1 - q_1) + (n-k)q_2(1 - q_2) = m_2.$$

Теорема 1. *Для любого натурального n и любых допустимых значениях m_1, m_2*

$$\min_{\vec{p} \in A_{\{1,2\}}(m_1, m_2; n)} \mathbf{P}\{S_n = 0\} = \begin{cases} 0, & \text{если } (m_1, m_2) \in D(n), \\ (1 - q_1^0)(1 - q_2^0)^{n-1}, & \text{если } (m_1, m_2) \in A(n) \backslash D(n), \end{cases}$$
$$\max_{\vec{p} \in A_{\{1,2\}}(m_1, m_2; n)} \mathbf{P}\{S_n = 0\} = \begin{cases} (1 - q_1^1)^k (1 - q_2^1), & \text{если } \nu(m_1, m_2) \notin \mathbb{N}, \\ (1 - q_1^1)^k, & \text{если } \nu(m_1, m_2) \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

где $k = \lfloor \nu(m_1, m_2) \rfloor$, $q_i^0 = q_i(m_1, m_2, 1, n)$, $\quad q_i^1 = q_i(m_1, m_2, k, \lceil \nu(m_1, m_2) \rceil)$, $\quad i = 1, 2$.

Назовём t-значным набор чисел $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in [0, 1]^n$, если он содержит не более t различных ненулевых значений и не содержит единиц.

Теорема 2. *Пусть фиксированы значения моментов* $\mathbf{E}S_n^r = m_r$, $r \in C \subset \mathbb{N}, |C| < \infty$.

1. *Если* $\exists \vec{p} \in A_C(m_r\,(r \in C); n) \colon \max p_i = 1$, *то* $\min_{A_C(m_r(r \in C); n)} \mathbf{P}\{S_n = 0\} = 0$. *В противном случае минимальное значение достигается на* $\max\{r \colon r \in C\}$*-значном наборе.*

2. *Если* $\exists \vec{p} \in A_C(m_r\,(r \in C); n) \colon \max p_i < 1$, *то максимальное значение* $\mathbf{P}\{S_n = 0\}$ *достигается на* $\max\{r \colon r \in C\}$*-значном наборе. В противном случае* $\mathbf{P}\{S_n = 0\} = 0$.

Список литературы

[1] *Galambos J., Simonelli I.*, Bonferroni-type Inequalities with Applications. Springer-Verlag, New York, 1996.

[2] *Зубков А. М.*, Неравенства для распределения числа одновременно происходящих событий. Обозр. прикл. и пром. матем., 1994, т. 1, с. 638–666.

[3] *Михайлов В. Г.*, Об уточнении центральной предельной теоремы для сумм независимых случайных индикаторов. Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, N 3, с. 540–552.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Об асимптотике распределения двухшаговых статистических оценок[1]

Линке Ю.Ю, Саханенко А.И. [2]

Пусть $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nn}$, $n = 1, 2, \ldots,$ – последовательность серий независимых в каждой серии наблюдений, распределения которых (вообще говоря, различные внутри каждой серии) зависят от неизвестного параметра θ_n. Имеется целый ряд статистических задач, в которых оценка некоторого параметра θ_n строится в два этапа. Сначала на первом шаге находится некоторая оценка $\theta_n^* = \theta_n^*(X_{n1}, \ldots, X_{nn})$, удовлетворяющая, скажем, требованию состоятельности. На втором же шаге с помощью θ_n^* строится оценка θ_n^{**}, которая точнее приближает неизвестный параметр θ_n и часто обладает рядом оптимальных свойств.

Идея двухшаговой процедуры оценивания восходит к работам Р. Фишера, который дополнительно использовал один шаг в методе Ньютона для приближенного вычисления оценки максимального правдоподобия (см, например, [1]). Двухшаговые процедуры оценивания применяются в различных задачах регрессионного анализа.

Следуя работам Р. Фишера, двухшаговые оценки обычно представляют в следующем виде:

$$\theta_n^{**} = \theta_n^* + \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(\theta_n^*, X_{ni}) \Big/ \sum_{i=1}^{n} V_{ni}(\theta_n^*, X_{ni}),$$

где функции $\{W_{ni}(\theta_n^*, X_{ni})\}$ и $\{V_{ni}(\theta_n^*, X_{ni})\}$ подбираются так, чтобы θ_n^{**} приближала бы точнее неизвестный параметр θ_n, нежели оценка первого шага θ_n^*.

Исследование асимптотики поведения таких оценок существенно зависит от выбора оценки первого шага. Построение состоятельной оценки первого шага в тех или иных моделях представляет собой отдельную, вообще говоря, нетривиальную проблему. В [3-9] было замечено, что в целом ряде регрессионных моделей, включающих различные постановки задач линейной и дробно-линейной регрессии, удается построить оценку первого шага θ_n^* параметра $\theta_n \in (-\infty, \infty)$, допускающую представление

$$\theta_n^* - \theta_n = \frac{\sum u_{ni}}{1 + \sum v_{ni}}, \qquad \text{где } \mathbf{E}u_{ni} = \mathbf{E}v_{ni} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

для некоторых преобразований $\{u_{ni} = u_{ni}(\theta_n, X_{ni})\}$ и $\{v_{ni} = v_{ni}(\theta_n, X_{ni})\}$, обеспечивающих малость дисперсий числителя и знаменателя в правой части (1).

В [2] получены необходимые и достаточные условия для сходимости вида

$$\frac{\theta_n^{**} - \theta_n}{d_n} \xrightarrow{d} \eta \qquad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где η — случайная величина, распределение которой может быть произвольным, хотя наиболее распространенный вариант, возникающий в приложениях, — это случай, когда

[1] Работа поддержана грантами РФФИ N 11-01-00285, 11-01-12006-офи-м-2011.

[2] Институт математики им. С.Л. Соболева; Новосибирский государственный университет. E-mail: linke@math.nsc.ru, aisakh@mail.ru

η имеет нормальное распределение. В [2] мы ограничились случаем, когда оценка первого шага θ_n^* представима в виде (1).

Мы обобщаем результаты из [2] на двухшаговые оценки еще более общего вида, возникающие в ряде статистических задач.

Подчеркнем, что используемый нами подход к исследованию двухшаговых оценок позволяет нам получать основные результаты при более слабых ограничениях на гладкость функций, определяющих оценку второго шага, нежели ограничения классического типа, восходящие к исследованиям Г. Крамера [10].

Список литературы

[1] *Боровков А.А.*, Математическая статистика. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1997.

[2] *Линке Ю.Ю.*, Об асимптотике распределения двухшаговых статистических оценок. Сибирский Математический Журнал, 2011, т. 52, N 4, с. 841–860.

[3] *Линке Ю.Ю., Саханенко А.И.*, Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно–линейной регрессии Сибирский Математический Журнал, 2000, т.41, N 1, с. 150–163.

[4] *Саханенко А.И., Линке Ю.Ю.*, Асимптотически оптимальное оценивание в задаче дробно–линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах Сибирский Математический Журнал, 2006, т. 47, N 6, с.1372–1400.

[5] *Линке Ю.Ю. Саханенко А.И.*, Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно – линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах Сибирский Математический Журнал, 2008, т.49, N 3, с. 592–619.

[6] *Линке Ю.Ю. Саханенко А.И.*, Асимптотически оптимальное оценивание в задаче линейной регрессии при невыполнении некоторых классических предположений. Сибирский Математический Журнал, 2009, т. 50, N 2, с. 380–396.

[7] *Линке Ю.Ю. Саханенко А.И.*, Асимптотически оптимальное оценивание в задаче линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах. Сибирский Математический Журнал, 2010, т. 51, N 1, с. 128–145.

[8] *Саханенко А.И., Линке Ю.Ю.*, Улучшение оценок в задаче линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах. Сибирский Математический Журнал, 2011, т. 52, N 1, с. 132–149.

[9] *Саханенко А.И., Линке Ю.Ю.*, Состоятельное оценивание в задаче линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах. Сибирский Математический Журнал, 2011, т. 52, N 4, с. 894–912.

[10] *Крамер Г.*, Математические методы статистики. М.: Мир. 1976.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Свойства эмпирических характеристических процессов по неоднородно цензурированным величинам

Фаррух Ш. Норбоев[1]

В работе обсуждаются свойства эмпирических характеристических процессов, построенных по неоднородно цензурированным справа последовательностям случайных величин.

1 Введение

Пусть $\{X_k, k \geq 1\}$ - последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин (с.в.) с непрерывной функцией распределения (ф.р.) $F(x)$ и $\{Y_k, k \geq 1\}$ другая последовательность независимых с.в. с непрерывными ф.р. $\left\{G^{(k)}(x), k \geq 1\right\}$ соответственно. Предполагается, что обе последовательности с.в. взаимонезависимы и наблюдается выборка $V^{(n)} = \{(Z_k, \delta_k), 1 \leq k \leq n\}$, где $Z_k = \min(X_k, Y_k)$, $\delta_k = I(X_k \leq Y_k)$ и $I(A)$ - индикатор события A . Рассмотрим следующую последовательность статистик

$$C_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x), -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

в качестве оценки для характеристической функции $\left\{C(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), -\infty < t < \infty\right\}$ по неоднородно цензурированной справа выборке $V^{(n)}$, где оценка для $F(x)$ (см. [1]):

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < Z_{(1)}, \\ 1 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^{R_n(x)}, & Z_{(k)} \leq x < Z_{(k+1)}, 1 \leq k < n-1, \\ 1, & x \geq Z_{(n)}, \end{cases} \tag{2}$$

где $Z_{(1)} \leq ... \leq Z_{(n)}$ - вариационный ряд из $\{Z_1, ..., Z_n\}$,

$$R_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{I(Z_i \leq x, \delta_i = 1)}{1 - H_n(Z_i) + \frac{1}{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{I(Z_i \leq x)}{1 - H_n(Z_i) + \frac{1}{n}} \right)^{-1}$$

и $H_n(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} I(Z_i \leq x)$.

[1]Гулистанский государственный университет, физико-математический факультет. E-mail: norboyev1979@mail.ru

2 Основные результаты

Для последовательности эмпирических ф.р. (2) справедливы следующие результаты, полученные в [1].

Теорема 1. [1] . *Пусть числа* α *и* β *таковы, что* $\alpha < \beta$ *и при* $n \to \infty$ *верно* $n\left(1 - H_n\left(\beta\right)\right) \xrightarrow{p} \infty; \quad 0 < \lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(Z_n \le x,\ \alpha \le x \le \beta\right) < 1.$

Тогда $\sup\limits_{\alpha \le x \le \beta} \left|F_n\left(x\right) - F\left(x\right)\right| \xrightarrow{p} 0$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 2. [1] . *Если в условиях теоремы 1 существует ф.р.* $G\left(x\right)$ *такая, что* $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{\alpha \le x \le \beta} \left|\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} G^{(k)}\left(x\right) - G\left(x\right)\right| = 0$, *то* $\sqrt{n}\left(F_n\left(x\right) - F\left(x\right)\right) \overset{D}{\Rightarrow} Z\left(x\right) \cdot \left(1 - F\left(x\right)\right)$ *в* $D\left[\alpha, \beta\right]$, *где* $\left\{Z\left(x\right) - \infty < x < \infty\right\}$ *гауссовский процесс с независимыми приращениями, имеющий нулевое среднее и функцию дисперсии*

$$d\left(x\right) = Var\left\{Z\left(x\right)\right\} = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{dF\left(u\right)}{\left(1 - F\left(u\right)\right)^2 \left(1 - G\left(u\right)\right)}.$$

Для последовательности (2) имеют место также и законы типа повторного логарифма. Интерес представляют аналогичные предельные свойства и для последовательностей эмпирических характеристических процессов $\{C_n(t) - C(t), t \in (-\infty, \infty)\}$.

Пусть $\Delta_n = \sup\limits_{\tau \le t \le T} \left|C_n\left(t\right) - C\left(t\right)\right|$ и $\left\{\varepsilon_n\left(t\right) = \sqrt{n}\left(C_n\left(t\right) - C\left(t\right)\right),\ \tau \le t \le T\right\}$, где τ и T выбираются подходящим образом. В докладе обсуждаются предельные свойства последовательностей Δ_n и $\varepsilon_n\left(t\right)$ при $n \to \infty$.

Список литературы

[1] *Абдушукуров А.А.*, Оценки неизвестных распределений по неполным наблюдениям и их свойства. LAMBERT Academic Publishing. 2011. 299 с.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Об усиленном законе больших чисел для решения стохастического дифференциального уравнения[1]

Екатерина С. Паламарчук[2]

На основе определения, данного в [1], получены условия, при которых пара, включающая функционал от решения стохастического дифференциального уравнения и некоторый нормирующий предсказуемый процесс, удовлетворяет усиленному закону больших чисел.

1 Введение

Пусть на стохастическом базисе $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (F_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P}\}$ заданы семимартингал $\{Y_t\}_{t=0}^{\infty}$ и возрастающий предсказуемый процесс $\{L_t\}_{t=0}^{\infty}$ с $L_0 = 0$. Приведем данное в [1]

Определение 1. Пара (Y_t, L_t) удовлетворяет *усиленному закону больших чисел* (*УЗБЧ*), если

$$\mathbf{P}(\lim_{t\to\infty} \frac{Y_t}{L_t} = 0) = 1\,.$$

В [1] был рассмотрен ряд примеров процессов, для которых выполняется УЗБЧ, в частности, случай, когда Y_t принадлежит классу квадратично интегрируемых локальных мартингалов.

В качестве процессов, для которых будем устанавливать справедливость УЗБЧ, рассматриваются функционалы от случайного процесса $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$, динамика которого описывается уравнением

$$dX_t = a_t X_t\,dt + \sigma_t\,dw_t\,, \quad X_0 = x\,, \tag{1}$$

где a_t, σ_t — ограниченные неслучайные функции времени, $\{w_t\}_{t=0}^{\infty}$ — одномерный стандартный винеровский процесс, x — неслучайное. Относительно функции a_t дополнительно предположим следующее

Условие 1. Функция $\Phi(t,s) = \exp\left(\int\limits_s^t a_\tau\,d\tau\right)$ *допускает экспоненциальную оценку*, т.е. $\exists$ константы $\kappa_1, \kappa_2 > 0$, такие что $|\Phi(t,s)| \leq \kappa_1 e^{-\kappa_2(t-s)}\,, \quad \forall\, s \leq t\,.$

В работе [2], в частности, было показано, что при этом условии УЗБЧ имеет место для пары (Y_t, L_t), где $Y_t = X_t^2$, L_t — неотрицательная возрастающая функция времени, такая что $L_t^{-1} = o(1/\ln t)$, $t \to \infty$.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ N 10-01-00767, проектом РГУИТП N НИР 1.1859.2011.
[2]Центральный экономико-математический институт РАН. E-mail: `e.palamarchuck@gmail.com`

2 Основные результаты

Утверждение 1. *Пусть* $L_t = \int\limits_0^t \sigma_s^2\, ds$, k *— любое натуральное число. Тогда, если выполнено условие* 1, *то для пары* (Y_t, L_t) *в следующих случаях имеет место УЗБЧ:*
1. $Y_t = X_t^k$,
2. $Y_t = \int\limits_0^t (X_s^k - EX_s^k)\, ds$, *если предел* $\lim\limits_{t\to\infty} L_t = \infty$.

Замечание 1. При $k = 1$, $\sigma_t \equiv \sigma$ утверждение 1 для пары

$$(Y_t, L_t) = \left(\int\limits_0^t (X_s - EX_s)\, ds\, , \sigma^2 t \right)$$

соответствует традиционной формулировке УЗБЧ для процессов с непрерывным временем [3, 4].

Если в качестве Y_t и L_t выступают функционалы от процесса X_t, то процессы вида Y_t/L_t носят название самонормированных, задача исследования их асимптотического поведения рассматривается, например, в [5]. Сформулируем здесь доказанное нами

Утверждение 2. *Пусть* $Y_t = \int\limits_0^t X_s\, ds$, $L_t = \int\limits_0^t X_s^2\, ds$. *Тогда, если выполнено условие* 1 *и предел* $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^t \sigma_s^2 = \infty$, *то для пары* (Y_t, L_t) *имеет место УЗБЧ.*

Так же, как и в [2], полученные результаты могут быть использованы для исследования стохастической оптимальности в задаче линейно-квадратического регулятора на бесконечном интервале времени, но в более широкой постановке.

Список литературы

[1] *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.*, Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.

[2] *Белкина Т.А., Кабанов Ю.М, Пресман Э.Л.*, О стохастической оптимальности для линейно-квадратического регулятора. Теория вероятностей и ее применения, 2003, т. 48, N 4, с. 661–675.

[3] *Хасьминский Р.З.*, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.

[4] *Skalmierski B., Tylikowski A.*, Stochastic processes in dynamics. Kluwer Academic Publishers, 1982.

[5] *De la Peña V.H., Tze Leung Lai, Qi-Man Shao.*, Self-Normalized Processes: Limit Theory and Statistical Applications. Springer, 2009.

[6] *Крамер Г., Лидбеттер М.*, Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Об асимптотическом поведении совместного распределения момента первого выхода и перескока возмущенного случайного блуждания за нелинейную границу[1]

Фада Г. Рагимов, Мустафа М.Навиди[2]

1 Введение

Пусть $\xi_n, \ \ n \geq 1,$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{E}\left|\xi_1\right| < \infty$, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ и пусть $\Delta\left(x\right)$, $x \in R = (-\infty, \infty)$ есть положительная борелевская функция.

Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \ n \geq 1$, и $T_n = n\Delta\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

Рассмотрим семейство моментов первого выхода

$$\tau_a = \inf\left\{n \geq 1 : T_n \geq f_a\left(n\right)\right\}$$

процесса T_n за нелинейную границу $f_a\left(t\right)$, (всегда считаем $\inf\left\{\emptyset\right\} = \infty$), где $f_a\left(t\right), \, t > 0$, — семейство положительных нелинейных границ от растущего параметра $a > 0$, причем $f_a\left(1\right) \uparrow \infty$ при $a \to \infty$.

В линейном случае, когда $\Delta\left(x\right) = x$ и $f_a\left(t\right) = a$, в литературе есть много результатов о распределениях τ_a и перескока $R_a = T_{\tau_a} - f_a\left(\tau_a\right) = S_{\tau_a} - a$ [1].

Изучение момента первого выхода τ_a для случае $\Delta\left(x\right) \neq x$ и $f_a\left(t\right) = a$ занимает центральное место в теории нелинейного восстановления [1].

Для нелинейного случая, когда $\Delta\left(x\right) \neq x$ и $f_a\left(t\right) \neq a$ некоторые асимптотические результаты о распределениях τ_a и R_a можно найти в работе [2], в которой изучены нелинейные граничные задачи для возмущенного случайного блуждания.

В настоящей работе для некоторого класса границ $f_a\left(t\right)$ изучается асимптотическое поведение совместного распределения $\mathbf{P}\left(\tau_a = n, \, R_a \leq r\right)$ при $a \to \infty$.

Будем предполагать, что распределение случайной величины ξ_1 принадлежит области притяжения устойчивого распределение с параметром $\alpha \in (1, 2]$.

Относительно функции $\Delta\left(x\right)$ предполагаем, что она непрерывно-дифференцируема в некоторой окрестности точки $x = \mathbf{E}\xi = \nu$ причем $\Delta\left(\nu\right) > 0$ и $\Delta'\left(\nu\right) \neq 0$.

Эти условия позволяют написать
$T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k + nH\left(\frac{S_n}{n}\right)$, где $X_k = \Delta\left(\nu\right) + \Delta'\left(\nu\right)\left(\xi_k - \nu\right)$ и$H\left(x\right) = \Delta\left(x\right) - \Delta'\left(x\right)\left(x - \nu\right) - \Delta\left(\nu\right)$.

Отметим, что $\sum_{k=1}^{n} X_k, \ n \geq 1$ есть обычное случайное блуждание с $\mathbf{E}X_1 = \Delta\left(\nu\right) > 0$ и $H\left(\frac{S_n}{n}\right), \, n \geq 1,$ — случайное возмущение ([1] , [2]).

[1]Работа поддержана грантом EIF-2011-1(3)-82/30/1.

[2]Бакинский Государственный Университет, E-mail: ragimovf@rambler.ru

2 Основные результаты

В частности, для случая параболической границы $f_a(t) = a\sqrt{t}$ и конечной дисперсии $\sigma^2 = D\xi_1 < \infty$ имеет место.

Теорема 1. *Пусть выполняются вышеперечисленные условия относительно функции $\Delta(x)$ и случайная величина $X_1 - \frac{\Delta(\nu)}{2}$ имеет нерешетчатое распределение. Если $n = (a/\Delta(\nu))^2 + \theta_a \frac{\alpha}{\Delta(\nu)}$, причем $\theta_a \to \theta \in R$ при $a \to \infty$, то для $r > 0$*
$\mathbf{P}(\tau_a = n,\ R_a \le r) = \frac{\lambda}{\rho\sqrt{n}} \varphi\left(\frac{\lambda\theta}{\rho}\right) H(r)(1 + o(1))$ при $a \to \infty$,
где

$$\lambda = \frac{\Delta(\nu)}{2},\ \rho^2 = DX_1 = (\Delta'(\nu))^2 \sigma^2,$$

$$H(r) = \frac{1}{\mathbf{E}\chi_+} \int_0^r \mathbf{P}(\chi_+ > x)\, dx,$$

$$\chi_+ = \sum_{i=1}^{\tau_+} X_i - \frac{\Delta(\nu)}{2}\tau_+,$$

$$\tau_+ = \inf\left\{n \ge 1 :\ \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{\Delta(\nu)}{2} n > 0\right\}$$

и $\varphi(x)$ — плотность стандартного нормального распределения.

Список литературы

[1] *Woodroofe M.*, Nonlinear renewal theory in sequential analysis. SIAM. 1982.

[2] *Zhang C. H.*, A nonlinear renewal theory. Ann. Probab. 1988, v. 16, N 2, p. 793–824.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

О простых оценках снизу для вероятностей больших уклонений[1]

Александр И. Саханенко[2]

В работе обсуждаются новые простые по виду оценки снизу в экспоненциальных неравенствах, предназначенные, в частности, для унификации доказательств в принципе больших уклонений.

1 Введение

Пусть случайный элемент ξ принимает значения в линейном измеримом пространстве $\mathcal{X}$. Обозначим через $\mathcal{X}_1^*$ множество линейных измеримых функционалов λ, удовлетворяющих условию $\mathbf{E}[|(\lambda,\xi)|e^{(\lambda,\xi)}] < \infty$. Для $\lambda \in \mathcal{X}_1^*$ введем в рассмотрение случайный элемент $\xi^{(\lambda)}$, имеющий сопряженное распределение, и связанное с ним среднее $a(\lambda)$:

$$\mathbf{P}[\xi^{(\lambda)} \in A] = \mathbf{E}[e^{(\lambda,\xi)} : \xi \in A]/\mathbf{E}e^{(\lambda,\xi)}, \qquad a(\lambda) = \mathbf{E}(\lambda, \xi^{(\lambda)}).$$

При получении простых оценок сверху для вероятностей больших уклонений часто пользуются следующим вариантом неравенства Чебышева (см., например, [1])

Лемма 1. *Если* $\lambda \in \mathcal{X}_1^*$ *и* $A \subset \{x : (\lambda, x) \geq a(\lambda)\}$, *то*

$$\mathbf{P}[\xi \in A] \leq \mathbf{P}[(\lambda,\xi) \geq a(\lambda)] \leq \mathbf{E}e^{(\lambda,\xi)}/e^{a(\lambda)} \equiv \varepsilon(\lambda). \tag{1}$$

Автору известна лишь одна достаточно удачная попытка получить аналогичную по общности оценку снизу

Лемма 2. (А.А. Могульский [2]) *Если* $M > 0$ *и* $\lambda \in \mathcal{X}_1^*$, *то*

$$\mathbf{P}[\xi \in A](e^M - 1) + 1 \geq \varepsilon(\lambda) e^{M\mathbf{P}[\xi^{(\lambda)} \in A]}. \tag{2}$$

Однако при использовании этого неравенства возникают проблемы, связанные с выбором числа M. По этой причине приводимые ниже оценки (3) и (6) могут быть удобнее и точнее, чем (2).

2 Основные результаты

Теорема 1. *Если* $\lambda \in \mathcal{X}_1^*$, *то*

$$\varepsilon(\lambda) \leq (P/Q)^Q (\overline{P}/\overline{Q})^{\overline{Q}} \leq 2P^Q \equiv 2\mathbf{P}[\xi \in A]^{\mathbf{P}[\xi^{(\lambda)} \in A]}, \tag{3}$$

где $P = \mathbf{P}[\xi \in A] = 1 - \overline{P}$ *и* $Q = \mathbf{P}[\xi^{(\lambda)} \in A] = 1 - \overline{Q}$.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ N 11-01-00285, 11-01-12006-офи-м-2011.
[2]Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН. E-mail: `aisakh@mail.ru`

Из неравенства (3) немедленно вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 1. *Пусть* $\xi = \xi_n$, $A = A_n$, $\lambda = \lambda_n \in \mathcal{X}_1^*$, *причем*

$$\mathbf{P}[\xi_n^{(\lambda_n)} \notin A_n] \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty. \tag{4}$$

Тогда для любой числовой последовательности $\{a_n\}$ *такой, что* $\inf_n a_n > 0$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n^{-1} \ln \mathbf{P}[\xi_n \in A_n] \geq \liminf_{n\to\infty} a_n^{-1} \ln \varepsilon_n(\lambda_n). \tag{5}$$

Таким образом, чтобы получить хорошую оценку снизу для левой части в (5), достаточно найти наибольшее значение правой части этого неравенства среди всех последовательностей функционалов $\lambda_n \in \mathcal{X}_1^*$, которые удовлетворяют условию (4). Пример в [2] показывает, что при решении этой задачи утверждением Следствия 1 пользоваться удобнее, чем неравенством (2). А для проверки условия (4) можно использовать приводимое ниже первое неравенство в (7).

Следующее более простое по виду неравенство в некоторых случаях может быть более точным, чем (3).

Теорема 2. *Если* $\lambda \in \mathcal{X}_1^*$ *и* $B \subset A$, *то*

$$\mathbf{P}[\xi \in A] \geq \varepsilon(\lambda)\bigl(1 - \mathbf{P}[\xi^{(\lambda)} \notin B] - E(\lambda, B)\bigr), \tag{6}$$

где

$$E(\lambda, B) = \mathbf{E}[(\lambda, \xi^{(\lambda)}) - a(\lambda) : \xi^{(\lambda)} \in B] = \mathbf{E}[a(\lambda) - (\lambda, \xi^{(\lambda)}) : \xi^{(\lambda)} \notin B].$$

При оценивании величин в правых частях неравенств (3) и (6) могут быть полезны следующие простые утверждения.

Лемма 3. *Пусть* $\mathcal{X}$ — *нормированное пространство,* $\lambda \in \mathcal{X}_1^*$, *а множество* A *содержит шар радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* $\mathbf{E}\xi^{(\lambda)}$. *Тогда при* $D(\lambda) = \mathbf{E}\|\xi^{(\lambda)} - \mathbf{E}\xi^{(\lambda)}\|^2 < \infty$

$$\mathbf{P}[\xi^{(\lambda)} \in A] \leq D(\lambda)/r^2, \quad |E(\lambda, \overline{A})| \leq \|\lambda\| D(\lambda)/r. \tag{7}$$

Замечание 1. Если $\mathcal{X} = \mathcal{X}^* = \mathbb{R}^m$, то во всех внутренних точках λ множества $\mathcal{X}_1^*$ функция $\varphi(\lambda) = \ln \mathbf{E}e^{(\lambda,\xi)}$ определена и аналитична, а матрица $\varphi''(\lambda)$, состоящая из вторых частных производных функции $\varphi(\lambda)$, является ковариационной матрицей случайного вектора $\xi^{(\lambda)}$. След этой матрицы $\varphi''(\lambda)$ равен $D(\lambda)$, причем $D(\lambda) = \mathbf{E}\|\xi^{(\lambda)} - \mathbf{E}\xi^{(\lambda)}\|^2 < \infty$ во всех внутренних точках множества $\mathcal{X}_1^*$.

Список литературы

[1] *Боровков А.А., Могульский А.А.*, О вероятностях больших уклонений в топологических пространствах. I. Сиб. мат. журнал, 1978, т. 19, N 5, с. 988–1004.

[2] *Могульский А.А.*, Вероятностное неравенство для получения оценок снизу в принципе больших уклонений. Сиб. мат. журнал, 1996, т. 37, N 4, с. 889–894.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Непараметрическое оценивание эффективных доз по данным бинарных откликов

Михаил С. Тихов[1]

Предлагается новый способ непараметрического оценивания эффективных доз $ED_{100\lambda}$ ($0<\lambda<1$) по случайным планам эксперимента. Доказана асимптотическая нормальность построенных оценок.

1 Введение

Рассматривается следующая модель бинарных откликов, которая носит условное название *зависимость доза-эффект* [1] и которую можно описать следующим образом.

Пусть $\{(X_i, U_i), 1 \le i \le n\}$ – потенциальная повторная выборка из неизвестного распределения $F(x)G(u)$, $F(x) = \mathbf{P}(X_i < x)$, $G(u) = \mathbf{P}(U_i < u)$, вместо которой наблюдается выборка $\mathcal{U}^{(n)} = \{(U_i, W_i),\ 1 \le i \le n\}$, где $W_i = I(X_i < U_i)$ есть индикатор события $(X_i < U_i)$. Величины U_i рассматриваются как вводимые дозы, а W_i – как эффект от воздействия дозы U_i. Предполагается, что величина U имеет равномерное на интервале $(0,1)$ распределение, величина X распределена на интервале $(0,1)$ с неизвестным распределением $F(x)$. Пусть $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, причем $f(x) > 0$ при $x \in (0,1)$. Эту ситуацию будем называть *случайным* планом эксперимента.

Для независимых с.в. (X_i, U_i) имеем: $\mathbf{E}(W_i|U_i = x) = \mathbf{E}(I(X_i < x)|U_i = x) = F(x)$, поэтому задача оценивания функции распределения $F(x)$ сводится к задаче оценивания регрессии $\mathbf{E}(W_i|U_i = x)$.

Одной из основных задач зависимости доза-эффект является оценка эффективных доз $ED_{100\lambda} = F^{-1}(\lambda) = x_\lambda$, $0 < \lambda < 1$, по выборке $\mathcal{U}^{(n)}$. В докладе мы рассматриваем две оценки по случайным планам эксперимента и указываем их предельные распределения.

В работе [2] для регрессионной модели

$$Y_i = m(X_i) + \sigma(X_i)\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

где $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^n$ есть двумерная выборка независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин (с.в.), причем с.в. X_i имеет плотность распределения $f(x) > 0$, а их значения расположены на отрезке $[0,1]$, с.в. ε_i также предполагаются н.о.р. с нулевым ожиданием и имеют четвертый момент (причем $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ независимы от $\{X_i\}_{i=1}^n$), а регрессионная функция $m(x)$ предполагается строго монотонной, была предложена оценка

$$\hat{m}_I^{-1}(t) = \frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{t} K_d\left(\frac{\hat{m}(\frac{i}{n}) - u}{h_d}\right) du,$$

где

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n K_r\left(\frac{X_i - x}{h_r}\right) Y_i}{\sum_{i=1}^n K_r\left(\frac{X_i - x}{h_r}\right)},$$

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, факультет ВМК, кафедра прикладной теории вероятностей. E-mail: `tikhovm@mail.ru`

для $m^{-1}(t)$. Там же было показано, что оценка $\hat{m}_I^{-1}(\lambda)$ является асимптотически нормальной. Используемые в качестве ядра функции $K_r(x)$ и $K_d(x)$ являются четными и финитными плотностями распределения; ширина окна просмотра данных h_r и h_d – сглаживающие параметры, неслучайны, зависят от объема выборки n, сходятся к нулю, когда $n \to \infty$. Для случайных планов эксперимента в зависимости доза-эффект определим оценку

$$\hat{x}_{1,\lambda} = \frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\lambda} K_d \left(\frac{u - F_{nh_r}(U_i)}{h_d} \right) du$$

эффективной дозы x_λ, где статистика

$$F_{nh_r}(x) = \frac{1}{nh_r} \sum_{i=1}^{n} K_r \left(\frac{x - U_i}{h_r} \right) W_i \Bigg/ \frac{1}{nh_r} \sum_{i=1}^{n} K_r \left(\frac{x - U_i}{h_r} \right).$$

используется для оценки неизвестной функции распределения $F(x)$.

Изучено также асимптотическое поведение оценки

$$\hat{x}_{2,\lambda} = \sqrt{\hat{S}_{2,\lambda} - b(h_r, h_d)},$$

где

$$\hat{S}_{2,\lambda} = \frac{2}{nh_d} \sum_{i=1}^{n} U_i \int_{-\infty}^{\lambda} K_d \left(\frac{u - F_{nh_r}(U_i)}{h_d} \right) du,$$

$$b(h_r, h_d) = a_d h_d^2 + a_r h_r^2, \ a_r = -\frac{\nu_r^2 f'(x_\lambda)}{f(x_\lambda)}, \ a_d = -\frac{\nu_d^2 f'(x_\lambda)}{f^3(x_\lambda)}.$$

2 Основные результаты

Приведенные ниже теоремы установлены при некоторых условиях, которые мы назовем условиями регулярности, на ядерные функции $K_r(x)$, $K_d(x)$, сглаживающие параметры h_r, h_r и распределение $F(x)$.

Теорема 1. *При условиях регулярности*

$$\sqrt{nh_r}(\hat{x}_{1,\lambda} - x_\lambda - b_2(h_r, h_d)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \sigma_1^2(\lambda)), \ \text{где } \sigma_1^2(\lambda) = \frac{\lambda(1-\lambda)\| K_r \|^2}{f^2(x_\lambda)}.$$

Теорема 2. *При условиях регулярности*

$$\sqrt{nh_r}(\hat{x}_{2,\lambda} - x_\lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \sigma_2^2(\lambda)), \ \text{где } \sigma_2^2(\lambda) = \sigma_1^2(\lambda) x_\lambda.$$

Из теорем 1, 2 следует, что оценки $\hat{x}_{1,\lambda}$, $\hat{x}_{2,\lambda}$ состоятельны, асимптотически нормальны, и так как $0 < x_\lambda < 1$, то предельная дисперсия оценки $\hat{x}_{2,\lambda}$ меньше, чем предельная дисперсия оценки $\hat{x}_{1,\lambda}$.

Список литературы

[1] *Криштопенко С.В., Тихов М.С., Попова Е.Б.*, Доза-эффект. М.: Медицина, 2008.

[2] *Dette H., Neumeyer N., Pilz K.F.*, A note on nonparametric estimation of the effective dose in quantal bioassay. Journal of the American Statistical Association, 2005, v. 100, p. 503–510.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Асимптотическое поведение распределения спектра произведения случайных матриц большой размерности[1]

Александр Н. Тихомиров[2]

В работе обсуждаются недавние результаты об асимптотическом поведении распределения спектра произведения независимых случайных матриц большой размерности, полученные автором совместно с Ф. Гётце и Н. В. Алексеевым.

В последние два-три года был достигнут определенный прогресс в исследовании асимптотического поведения распределения спектра произведения случайных матриц большой размерности. Первые результаты были опубликованы в работах Н. Алексеева, Ф. Гётце и А. Тихомирова в 2010 году (см. [1] и [2]). В этих работах были описаны в терминах преобразования Стилтьеса и в терминах моментов предельные распределения для математического ожидания эмпирической функции распределения сингулярных чисел произведения независимых прямоугольных случайных матриц, сингулярных чисел степеней квадратных случайных матриц, а также предельное распределение математического ожидания эмпирической функции распределения собственных чисел произведения квадратных случайных матриц. В работе [2] было дано доказательство методом моментов сходимости распределения сингулярных чисел произведения прямоугольных матриц и распределения сингулярных чисел степеней квадратных матриц. В то же время независимо был опубликован ряд работ польских физиков и математиков, получивших те же предельные распределения для матриц с гауссовскими элементами (см. [4], [5]).

В работе Алексеева, Гётце и Тихомирова [2] в предположении конечности четвертых моментов у случайных элементов матриц, было доказано, что математическое ожидание распределения сингулярных чисел m-й степени случайных квадратных неэрмитовых матриц сходится к распределению, моменты которого суть m-е числа Фусса–Каталана, $FC(m,k) = \frac{1}{mk+1}\binom{mk+k}{k}$, $k \geq 1$. Такое же предельное распределение имеет математическое ожидание эмпирического распределения сингулярных чисел произведения m независимых квадратных случайных матриц. Сходимость в этом случае доказана при уловии Линдеберга для элементов матриц (см. [3]). По существу, упомянутые выше результаты являются прямым обобщением известного результата Марченко–Пастура о сходимости распределения сингулярных чисел случайных матриц (см. [8]). В работе Гётце и Тихомирова [6] в предположении, что квадраты элементов матриц равномерно интегрируемы относительно вероятностной меры было доказано, что эмпирическое распределение собственных чисел на комплексной плоскости произведения m независимых матриц сходится при неограниченном росте размерности матриц к распределению m-й степени случайной величины, равномерно распределенной в единичном круге комплексной плоскости. Плотность предельного распределения имеет вид $p(x,y) = \frac{1}{\pi m (x^2+y^2)^{\frac{m-1}{m}}} \mathbb{I}\{x^2+y^2 \leq 1\}$, где $\mathbb{I}\{A\}$

[1]Работа поддержана грантами РФФИ N 11-01-00310-а, 11-01-12104-офи-м-2011.

[2]Коми Научный Центр УрО РАН, Сыктывкарский государственный университет. E-mail: sasha-tikh@yandex.ru

обозначает индикатор множества A. Аналогичный результат практически одновременно был получен Сошниковым и Рурке в работе [7]. Эти результаты обобщают известный круговой закон Гирко. В работе Тихомирова [9] была найдена плотность распределения собственных чисел произведения двух независимых случайных прямоугольных матриц размерности $n \times p$ и $p \times n$ соответственно, предполагая при этом, что n и p растут согласованно, т.е. существует предел отношения $q = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{p} \in (0, 1)$. Предельная плотность имеет вид $p(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{(1-q)^2+4q(x^2+y^2)}}\mathbb{I}\{x^2 + y^2 \le 1\}$. Сходимость к этому распределению доказана в предположении конечности второго момента у элементов матриц.

Список литературы

[1] *Алексеев Н. В., Гётце Ф., Тихомиров А. Н.*, О сингулярном спектре степеней и произведений случайных матриц. Доклады Академии наук, 2010, т. 433, N.1, с. 7–9

[2] *Alexeev N., Götze F. and Tikhomirov A.*, Asymptotic distribution of singular values of powers of random matrices. Lithuanian Mathematical Journal, 2010, v. 50, N 2, p. 121–132.

[3] *Alexeev N., Götze F. and Tikhomirov A.*, On the asymptotic distribution of the singular values of powers of random matrices. arXiv:1012.2743

[4] *Burda Z., Jarosz A., Livan G., Nowak M. A., and Swiech A.*, Eigenvalues and singular values of products of rectangular Gaussian random matrices. Phys. Rev. E 82, 2010, 061114.

[5] *Burda Z., Janik R.A., Nowak M.A.*, Multiplication law and S transform for non-hermitian random matrices. arXiv:1104.2452v1.

[6] *Götze F. and Tikhomirov A.*, On the Asymptotic Spectrum of Products of Independent Random Matrices. arXiv:1012.2710

[7] *O'Rourke S., Soshnikov A.*, Products of Independent Non-Hermitian Random Matrices. arXiv:1012.4497

[8] *Марченко В.А., Пастур Л.А.*, Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц. Матем. сб., 1967, т. 72, N 4, с. 507–536.

[9] *Тихомиров А.Н.*, Об асимптотике спектра произведения двух прямоугольных случайных матриц Сиб. матем. журн., 2011, т. 52, N 4, с. 936–954

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Последовательности испытаний Бернулли с периодически меняющимися вероятностями успеха

Виктор Д. Трещев[1]

1. Рассматриваются следующие три игры. N человек сидят за круглым столом, у каждого из них есть по монетке. Вероятности выпадения гербов на монетках равны $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Игроки по очереди, начиная с первого, подбрасывают свои монетки. Выигрывает тот, у кого раньше других:

(I) выпадет герб;

(II) герб выпадет два раза;

(III) выпадет второй герб за все время игры.

Исследуется вопрос о том, при каких наборах $p_1, p_2, \ldots, p_N$ вероятности выигрыша для всех игроков совпадают. Условия (I), (II) и (III) описывают три различные игры.

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *В игре* (I) *вероятности выигрыша для всех игроков совпадают тогда и только тогда, когда*

$$p_k = \frac{p_1}{1-(k-1)p_1}, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Теорема 2. *В игре* (II) *вероятности выигрыша для всех игроков совпадают тогда и только тогда, когда вероятности* $p_1, p_2, \ldots, p_N$ *удовлетворяют системе*

$$p_i^2 D_i \left(s_1 s_2 \ldots s_{i-1} \frac{s_1 s_2 \ldots s_N}{1 - s_1 s_2 \ldots s_N} \right) \Bigg|_{s_1=q_1, s_2=q_2, \ldots, s_N=q_N} = \frac{1}{N}; \quad i = 1, 2, \ldots, N;$$

где $D_i, i = 1, 2, \ldots, N,$ *– дифференциальные операторы*

$$D_i = \sum_{\substack{\varepsilon_k \in \{0,1\}, \\ k \in \{1,2,\ldots,N\} \setminus \{i\}}} p_1^{\varepsilon_1} p_2^{\varepsilon_2} \ldots p_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}} p_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \ldots p_N^{\varepsilon_N} \frac{\partial^{1+\sum \varepsilon_k}}{\partial s_1^{\varepsilon_1} \partial s_2^{\varepsilon_2} \ldots \partial s_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}} \partial s_i \partial s_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \ldots \partial s_N^{\varepsilon_N}}.$$

[1]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: vtreschev@mi.ras.ru

Теорема 3. *В игре* (III) *вероятности выигрыша для всех игроков совпадают тогда и только тогда, когда вероятности* $p_1, p_2, \dots, p_N$ *удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} p_1 SQ \frac{1}{(1-Q)^2} &= \frac{1}{N}; \\ q_1 p_2 (S_1 + (S - S_1)Q) \frac{1}{(1-Q)^2} &= \frac{1}{N}; \\ Q_2 p_3 (S_2 + (S - S_2)Q) \frac{1}{(1-Q)^2} &= \frac{1}{N}; \\ \dots \\ Q_{j-1} p_j (S_{j-1} + (S - S_{j-1})Q) \frac{1}{(1-Q)^2} &= \frac{1}{N}; \\ \dots \\ Q_{N-1} p_N (S_{N-1} + (S - S_{N-1})Q) \frac{1}{(1-Q)^2} &= \frac{1}{N}; \end{cases} \tag{1}$$

где

$$q_i = 1 - p_i;$$
$$Q_0 = 1; \quad Q_i = q_1 q_2 q_3 \dots q_i; \quad Q = Q_N;$$
$$S_0 = 0; \quad S_i = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} + \dots + \frac{p_i}{q_i}; \quad S = S_N.$$

Также изучается поведение решения для игры (III) около нуля:

Теорема 4. *При* $p_1 = \varepsilon \downarrow 0$ *все* $p_i \, (i > 1)$ *имеют вид* $\varepsilon + \frac{(i-1)(i-1-N)}{2} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$.

2. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_N \in (0, 1)$. Рассмотрим последовательность независимых испытаний Бернулли, в которой вероятность успеха в i-м испытании равна p_j ($j \in \{1, 2, \dots, N\}$), если $i \equiv j \mod N$. Обозначим через ξ_n порядковый номер испытания, в котором произошел n-й успех.

Теорема 5. *Если* $(N, m) = 1$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n \equiv k \,(\mathrm{mod}\, m)\} = \frac{1}{m}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

О близости сверток распределений случайных сумм

Шакир К. Форманов[1], **Тамара А. Форманова**[2]

В работе обсуждаются результаты авторов об оценке близости сверток распределений случайных сумм.

1 Введение

Знаменитая монография Б.В.Гнеденко, А.Н.Колмогорова "Предельные распределения для сумм независимых случайных величин"(М., Гостехиздат, 1949) является первоисточником современной теории суммирования случайных величин. Наши исследования посвящены задачам, постановки которых берут начало от центральной предельной проблемы суммирования независимых случайных величин, решенной в этой монографии.

Пусть даны две последовательности серий независимых случайных величин (с.в.)

$$v_n^{(1)}, \xi_{n1}, \xi_{n2}, ..., \xi_{nn},$$

$$v_n^{(2)},\ \eta_{n1}, \eta_{n2}, ..., \eta_{nn},\quad n = 1, 2, ...,$$

где $v_n^{(i)}$ — целочисленные неотрицательные с.в. с распределениями

$$P_n^(i) = \mathbf{P}\left(v_n^{(i)} = k\right),\ i = 1, 2,\quad k = 1, 2, ...$$

Рассмотрим случайные суммы

$$S_n^{(1)} = \sum_{j=1}^{v_n^{(1)}} \xi_{nj},\qquad S_n^{(2)} = \sum_{j=1}^{v_n^{(2)}} \eta_{nj}.$$

Пусть

$$F_{nj}(x) = \mathbf{P}(\xi_{nj} < x),\ \ G_{nj}(x) = \mathbf{P}(\eta_{nj} < x),\quad j = 1, 2, ...,$$
$$F_n(x) = \mathbf{P}\left(S_n^{(1)} < x\right),\ \ G_n(x) = \mathbf{P}\left(S_n^{(2)} < x\right).$$

Тогда (* — знак свертки (композиции) распределений)

$$F_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{k}{}^{*}F_{nj}\right)\mathbf{P}\left(v_n^{(1)} = k\right),$$

$$G_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{k}{}^{*}G_{nj}\right)\mathbf{P}\left(v_n^{(2)} = k\right),$$

[1]Институт математики и информационных технологий АНРУз. E-mail: `shakirformanov@yandex.ru`
[2]Ташкентский автомобильно-дорожный институт. E-mail: `fortamara@yandex.ru`

где

$$\prod_{j=1}^{k}{}^{*}F_{nj} = F_{n1} * F_{n2} * ... * F_{nk},$$

$$\prod_{j=1}^{k}{}^{*}G_{nj} = G_{n1} * G_{n2} * ... * G_{nk}, \ \ k = 1, 2, ...$$

Будем говорить, что

$$F_n - G_n \Rightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

если

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d(F_n - G_n) \to 0$$

для любой ограниченной и непрерывной функции $f(\cdot)$. Здесь знак $\Rightarrow$ означает слабую сходимость распределений.

2 Основные результаты

Теорема 1. *Предположим, что*

$$\mathbf{E}\xi_{nj} = 0, \ \ \mathbf{E}\eta_{nj} = 0, \ \ \mathbf{E}\xi_{nj}^2 = \mathbf{E}\eta_{nj}^2 = \sigma_{nj}^2, \quad j = 1, 2, ...$$

Пусть выполнены следующие условия:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=1}^{k}\int\limits_{|x|>\varepsilon}|x|\,|F_{nj}(x) - G_{nj}(x)|\,dx\right)P_n^{(1)}(k) \to 0,$ *для каждого* $\varepsilon > 0.$

2) $\mathrm{Var}\left(P_n^{(1)}, P_n^{(2)}\right) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|P_n^{(1)}(k) - P_n^{(2)}(k)\right| \to 0.$

Тогда

$$F_n - G_n \Rightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

В случае, когда $\mathbf{P}\left(v_n^{(1)} = n\right) = \mathbf{P}\left(v_n^{(2)} = n\right) = 1$, близость сверток распределений неслучайных сумм

$$F_n = \prod_{j=1}^{n}{}^{*}F_{nj}, \quad G_n = \prod_{j=1}^{n}{}^{*}G_{nj}$$

исследована в книге [1].

В [2] изучается близость распределений "геометрических случайных сумм" , когда числа слагаемых имеют общее геометрическое распределение

$$\mathbf{P}\left(v_n^{(1)} = k\right) = \mathbf{P}\left(v_n^{(2)} = k\right) = (1 - p_n)^{k-1} \cdot p_n, \ \ 0 < p_n < 1, \quad k = 1, 2, ...$$

Список литературы

[1] *Rotar V.I.*, Probability Theory. World Scientific, 1997, 414 pp.

[2] *Formanov Sh.K.* On Nearness of the geometric convolution of distributions in the series Scheme., Int. conference "Kolmogorov and contemporary mathematics" , Moscow, June 16-21, 2003, p. 434–435.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Расстояния между локальными максимумами в последовательностях случайных величин[1]

Елена В. Хиль[2]

1 Введение

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — стационарная последовательность случайных величин, для которой $\mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2\} = 0$, и $\{\tau_j,\, j \in \mathbb{Z}\}$ — моменты появления локальных максимумов в этой последовательности, т.е. τ_j — такие числа, что $\xi_{\tau_j - 1} < \xi_{\tau_j} > \xi_{\tau_j + 1}$. Обозначим через $\lambda_j = \tau_j - \tau_{j-1}$ расстояния между соседними локальными максимумами.

Для случая, когда ξ_n независимы, распределения λ_j изучались в [1], [2]. При этом в [1] предлагалось использовать несколько стандартных статистик, основанных на λ_j, для тестирования генераторов случайных чисел. Однако в теоремах о свойствах этих статистик обычно предполагается, что случайные величины λ_j независимы и одинаково распределены. В то же время в [2] было показано, что случайные величины последовательности $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ зависимы. Таким образом, для построения статистических критериев, использующих λ_j, необходима дополнительная информация о структуре последовательности локальных максимумов.

2 Основные результаты

Теорема 1. *Если случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение, то последовательность пар $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ образует цепь Маркова.*

Если при этом случайные величины ξ_n имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$*, то переходная плотность цепи $(\lambda_j, \xi_{\tau_j})$ равна*

$$p_{\left(\lambda_j, \xi_{\tau_j}\right), \left(\lambda_{j+1}, \xi_{\tau_{j+1}}\right)}\left((m, x), (k, y)\right) = \frac{y\left((y+x)^{k-1} - |y-x|^{k-1}\right)}{2\,(k-1)!\,x}\,,\ x, y \in [0,\,1],\ m, k \geqslant 2.$$

В [2] явная формула для совместного распределения длин двух соседних промежутков λ_1, λ_2 между локальными максимумами была получена в виде двойной суммы довольно сложных выражений. Другой способ рассуждений, использующий найденное в теореме 1 условное распределение, позволил представить это же совместное распределение в конечном виде.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ N 11-01-00139.

[2]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: `elena.hill@gmail.com`

Теорема 2. *Если случайные величины $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение, то при любых целых $k, m \geqslant 2$*

$$\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = m\} = \mathbf{P}\{\lambda_1 = m, \lambda_2 = k\} =$$
$$= \frac{3 \cdot 2^{k+m-1} \cdot \left[(km(k+m+1) + 1 - k^2 - m^2)C_{k+m}^m - (k+m-1)(k+1)(m+1)\right]}{(m+1)(k+1)(k+m+3)(k+m+1)!},$$
$$\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = m\} = \frac{3 \cdot 2^{k+m}}{(m+1)!(k+1)!(k+m+3)(k+m+5)} \times$$
$$\times \left(\tfrac{km(k+m+5)^2 - (k+m+3)((k+m)^2 + 6(k+m) - 3)}{(k+3)(m+3)} + \frac{2(k+m+1)}{C_{k+m+2}^{m+1}} \right).$$

Числа появлений локальных максимумов в конечной последовательности $\{\xi_1, \ldots, \xi_T\}$ и частоты расстояний между ними можно использовать как статистики в критерии согласия с гипотезой H_0 : *элементы последовательности $\{\xi_n\}$ независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение.*

Положим

$$N_1(T) = \sum_{i=1}^{T-2} \chi_i, \quad N_k(T) = \sum_{i=1}^{T-k-2} \chi_i^{(k)}, \ k \geqslant 2,$$

где

$$\chi_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}\{\xi_{t-1} < \xi_t > \xi_{t+1}\}, \quad \chi_t^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}\{\chi_t = 1, \ \chi_{t+j} = 0 \ (j = 1, \ldots, k-1), \ \chi_{t+k} = 1\}.$$

Теорема 3. *При гипотезе H_0 распределения векторов*

$$N^{(s)}(T) = (N_1(T), N_2(T), \ldots, N_s(T)), s \geqslant 2,$$

при $T \to \infty$ асимптотически нормальны с параметрами $(A^{(s)}T, C_sT)$, где

$$A^{(s)} = (a_1, a_2, \ldots, a_s) = \left(\tfrac{1}{3}, \ \tfrac{1}{3}\mathbf{P}\{\lambda = 2\}, \ldots, \tfrac{1}{3}\mathbf{P}\{\lambda = s\}\right),$$

а элементы матрицы ковариаций $C_s = \|c_{km}\|_{k,m=1}^s$ определяются формулами

$$c_{11} = \tfrac{2}{45},$$
$$c_{1k} = c_{k1} = \tfrac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = k\} - \tfrac{k-1}{9}\mathbf{P}\{\lambda = k\}, \ k \geqslant 2,$$
$$c_{kk} = \tfrac{1}{3}\mathbf{P}\{\lambda = k\} - \tfrac{2k+5}{9}\mathbf{P}^2\{\lambda = k\} +$$
$$+ \tfrac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = k\} + \tfrac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k\}, \ k \geqslant 2,$$
$$c_{mk} = c_{km} = -\tfrac{k+m+5}{9}\mathbf{P}\{\lambda = k\}\mathbf{P}\{\lambda = m\} +$$
$$+ \tfrac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = m\} + \tfrac{2}{3}\mathbf{P}\{\lambda_1 = k, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = m\}, \ m > k \geqslant 2.$$

Список литературы

[1] *Kuketayev A.*, Probability distribution of distances between local extrema of random number series. (http://ru.arxiv.org:math/0611130).

[2] *Зубков А. М., Харитонова Н. А., Хиль Е. В.*, Расстояния между локальными максимумами в последовательностях случайных величин. Теория вероятностей и ее применения, 2011, т.56, N 4, с. 690–703.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Большие уклонения ветвящихся процессов в случайной среде

Александр В. Шкляев[1]

Работа посвящена тематике больших уклонений ветвящихся процессов в случайной среде с дробно-линейной производящей функцией числа непосредственных потомков одной частицы. Для таких процессов получены условные функциональные предельные теоремы при условии большого уклонения, а также получены результаты о больших уклонениях максимума ветвящегося процесса.

1 Введение

Пусть $\eta = (\eta_0, ..., \eta_n, ...)$ - последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин (сл.в.) и $f_y(s)$, $y \in R$, — семейство вероятностных производящих функций (п.ф.). Ветвящийся процесс Z_n в случайной среде η (ВПСС) представляет собой марковскую цепь с условной п.ф. переходных вероятностей равной

$$\mathbf{E}\left(s^{Z_{n+1}}|Z_n, \eta\right) = f_{\eta_n}(s)^{Z_n} \text{ п.н.}$$

.

Полагая $X_i = \ln f'_{\eta_{i-1}}(1)$, введем случайное блуждание $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Такое случайное блуждание называют *сопровождающим* для процесса Z_n.

Нас будут интересовать вероятности больших уклонений, то есть событий вида $\ln Z_n \geq \theta n$, где $\theta > \mathbf{E}X_1$. Для вероятностей таких событий в работах [1], [2] получена точная асимптотика при $n \to \infty$ в случае производящих функций $f_y(s)$, соответствующих геометрическому распределению.

В данной работе при условиях дробно-линейности функций $f_y(s)$ получена асимптотика $\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \theta n)$, $\mathbf{P}(\max_{i \leq n} \ln Z_n \geq \theta n)$, для случайного процесса

$$Y_n(t) = \frac{\ln Z_{[nt]} + \ln(Z_{[nt]+1}/Z_{[nt]})(nt - [nt]) - \theta nt}{\sqrt{n}\sigma(h_\theta)},$$

где $\sigma(h_\theta)$ - некоторая функция θ, доказана сходимость по условному распределению при условиях $\ln Z_n \geq \theta n$ и $\max_{i \leq n} \ln Z_i \geq \theta n$ в $C[0,1]$ к броуновскому мосту W^0. Методы работы основываются на прямом анализе поведения сопрождающего блуждания S_n с помощью результатов о больших уклонениях максимума случайного блуждания, полученных А.В. Шкляевым ([3]) и М.В. Козловым ([4]).

2 Основные результаты

Будем рассматривать дробно-линейные производящие функции $f_y(s)$, полагая

$$f_y(s) = 1 - \left(\frac{b(y)}{2a(y)^2} + \frac{1}{(1-s)a(y)}\right)^{-1}.$$

[1]Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: `ashklyaev@gmail.com`

Тогда при $U_n = e^{-S_n}$, $V_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b(\eta_i)}{2a^2(\eta_i)} e^{-S_i}$ несложно получить явную формулу

$$\mathbf{P}(Z_n > k | Z_0 = 1, \eta) = (V_n + U_n)^{-1}(1 + V_n^{-1}U_n)^{-k},\ k \geq 0. \tag{1}$$

Пусть сопровождающее блуждание X_i с шагами $X_i = \ln a(\eta_{i-1})$ удовлетворяет условию Крамера $\mathbf{E}e^{hX} < \infty$ при $h < h^+$ и $\zeta_i = \ln b(\eta_i) - \ln(2a^2(\eta_i))$ удовлетворяют условию Крамера на всей прямой. Эти условия будем называть условиями (*).

Исходя из представления (1) удается получить следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть Z_n - надкритический, критический или умеренно докритический ВПСС, удовлетворяющий условиям (*). Тогда асимптотические соотношения*

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \theta n | Z_0 = m) \sim I_m(\theta)\mathbf{P}(S_n \geq \theta n),\ n \to \infty,$$

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \theta n + \ln m | Z_0 = m) \sim \mathbf{P}(S_n \geq \theta n),\ n \to \infty,\ m \to \infty,$$

выполняются равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, \theta^+)$. Те же соотношения выполняются для строго докритического ВПСС равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\theta^*, \theta^+)$.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 для семейства мер $P_n(A) = \mathbf{P}(Y_n(\cdot) \in A | \ln Z_n \geq \theta n)$ имеет место слабая сходимость в пространстве $C[0,1]$*

$$P_n \Rightarrow P_0,\ n \to \infty,$$

где P_0 — мера, заданная на $C[0,1]$ броуновским мостом.

Теорема 3. *В условиях теорем 1, 2 при любом $\gamma_n = o(n)$ справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(\max_{\varepsilon n < i < j < n} |(\ln Z_j - S_j) - (\ln Z_i - S_i)| \geq \gamma_n | \ln Z_n \geq \theta n) = o(1),\ n \to \infty.$$

С помощью теорем 2, 3 удается получить аналогичные теоремам 1, 2 результаты для максимума ветвящегося процесса $M_{Z_n} = \max_{i \leq n} Z_i$. При этом в теореме 1 в правых частях обоих предельных соотношений появлятся дополнительная мультипликативная константа, теорема 2 переносится на M_{Z_n} без изменений. Для строго докритических ВПСС при $\theta \in (0, \theta^*)$ также удается получить родственные теоремам 1-3 результаты, но исследование этого случае оказывается значительно более сложной задачей.

Автор выражает благодарность М.В.Козлову за ценные замечания и предложения.

Список литературы

[1] *Козлов М.В.*, О больших уклонениях ветвящихся процессов. Дискретная математика, 2006, v. 18, N 2, c. 29–47.

[2] *Козлов М.В.*, О больших уклонениях строго докритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков, Теория вероятностей и ее применения, 2009, v. 54, N 3, c. 439–465

[3] *Шкляев А.В.*, Предельные теоремы для случайного блуждания при условии большого уклонения максимума. Теория вероятностей и ее применения, 2010, v. 55, N 3, c. 590–598.

[4] *Козлов М.В.*, О больших уклонениях максимума крамеровского случайного блуждания и процесса ожидания. Теория вероятностей и ее применения, 2012 (в печати).

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Linear approximation of random processes and fields [1]

Konrad Abramowicz, Oleg Seleznjev[2]

1 Introduction

Let a random field defined on a d-dimensional unit cube and with finite second moment be observed at a finite number of points. Suppose further that the points are vertices of hyperrectangles, and that these hyperrectangles are generated by a grid in the cube. At any unsampled point we approximate the value of the field by a piecewise linear multivariate interpolator, which is a natural extension of a one dimensional piecewise linear interpolator. The approximation accuracy is measured by the integrated mean squared error. Following [2] we extend the concept of local stationarity for random fields and focus on fields satisfying this condition. Approximation of stochastic processes from this class is studied in our previous works (see, e.g., [3], [1]). For q.m. (quadratic mean) continuous locally stationary random fields we derive the exact asymptotic behavior of the approximation error. A method is proposed for determining the asymptotically optimal knots (sample points) allocation between the mesh dimensions. Additionally, for q.m. continuous and continuously differentiable fields, we determine asymptotical upper bounds for the approximation integrated q.m. error (IMSE). These results can be used in various problems in numerical analysis of random functions, in environmental and geo-sciences, in image processing, and in simulation studies.

2 Multivariate piecewise linear interpolation

Let $X = X(t), t \in \mathcal{D} := [0,1]^d$, be defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Assume that for every t, the random variable $X(t)$ lies in the normed linear space $L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ of zero mean random variables with finite second moment and identified equivalent elements with respect to P. We set $||\xi|| := (\mathbf{E}\xi^2)^{1/2}$ for all $\xi \in L^2(\Omega)$ and consider the approximation by the piecewise linear interpolator based on the normed linear space $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ of q.m. continuous random processes. We define the integrated mean norm for any $X \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ by setting $||X|| := (\int_{\mathcal{D}} ||X(t)||^2 dt)^{1/2}$. For $k \leq d$, let $(l_1, \ldots, l_k)$, $\sum_{j=1}^{k} l_j = d$, be a vector of positive integers and $L_i := \sum_{j=1}^{i} l_j, i = 0, 1, \ldots, k, L_0 = 0$, defining a partition of a d-vector $t = (t_1, \ldots, t_d)'$ into k components,

$$t_{\{j\}} := (t_{L_{j-1}+1}, \ldots, t_{L_j})' \in [0,1]^{l_j}, \quad t = (t'_{\{1\}}, \ldots, t'_{\{k\}})'.$$

For a vector $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $0 < \alpha_j < 2$, $j = 1, \ldots, k$, we define the following α-norm for $t \in [0,1]^d$, $||t||_\alpha := \sum_{j=1}^{k} ||t_{\{j\}}||^{\alpha_j}$ with the Euclidean norms $||t_{\{j\}}||^2 = t'_{\{j\}} t_{\{j\}}, j = 1, \ldots, k$. Following [2], we say that a random field $X(t), t \in [0,1]^d$, is *locally stationary* if there exists a positive

[1]This work was supported by the Swedish Research Council grant 2009-4489

[2]Umeå University, Dept. Mathematics and Math. Statistics, SE-90187 Umeå, Sweden, E-mail: oleg.seleznjev@math.umu.se

continuous function $c(t)$ such that, for some α-norm

$$||X(t+s) - X(t)||^2/||s||_\alpha \to c(t) \quad \text{as } s \to 0 \text{ uniformly in } t \in [0,1]^d.$$

Assume additionally that $c(t)$ is isotropic within the all isotropic components $t_{\{1\}}, \dots, t_{\{k\}}$. Let $h_j \in \mathcal{C}([0,1])$, $j = 1, \dots, k$, be positive and continuous density functions, say, *generating densities*, and assume that for k isotropic directions, the generating densities are the same, i.e., $h(t) := (h_1^*(t_1), \dots, h_d^*(t_d))' = (h_1(t_1), \dots, h_1(t_{l_1}), \dots, h_k(t_{L_{k-1}+1}), \dots, h_k(t_d))'$. Let the random field X be sampled at the distinct (*design*) points (or *knots*) defined by $h(t)$. Consider a *regular grid* T_n defined by the corresponding one-dimensional grids

$$\int_0^{t_{i,j}} h_i^*(v)dv = \frac{j}{n_i^*}, \quad j = 0, 1, \dots, n_i^*, \quad i = 1, \dots, d,$$

where the numbers of points $(n_1^*, \dots, n_d^*) = (n_1, \dots, n_1, \dots, n_k)$ and $n_1, \dots, n_k$ correspond to k isotropic directions with $l_1, \dots, l_k$ identical components. Thus the cube $[0,1]^d$ is partitioned into $N = \prod_{j=1}^d n_j^*$ disjoint d-rectangles $\mathcal{D}_i$ defined by one vertex $t_i \in [0,1]^d$ and the corresponding main diagonal $r_i \in [0,1]^d$, i.e., $\mathcal{D}_i = \{t : t = t_i + r_i * s, s \in [0,1]^d\}$, where $'*'$ denotes coordinate-wise multiplication.

For a process $X \in \mathcal{C}([0,1]^d)$ and $t \in \mathcal{D}_i$, we define the *multivariate piecewise linear interpolator* by

$$H_1(X, T_n)(t) := \mathbf{E}_\eta X(t_i + r_i * \eta), \quad t = t_i + r_i * s,$$

where $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d)'$ and $\eta_1, \dots, \eta_d$ are independent Bernoulli random variables $\eta_j \in Be(s_j)$, $j = 1, \dots, d$. Then $H_1(X, T_n)$ is also a continuous function, e.g., double linear interpolator for $d = 2$.

Theorem 1. *Let $X \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ be a local stationary random field. The approximation error (IMSE) of multivariate piecewise linear interpolation*

$$||X - H_1(X, T_n)||^2 \sim \sum_{i=1}^k \frac{b_{\alpha_j} c_{\alpha_j}}{n_j^{\alpha_j}} > 0 \ \text{as } n_1, \dots, n_k \to \infty,$$

where

$$b_{\alpha_j} := \int_{\mathcal{D}_j} ||B_j(s_{\{j\}}) - \mathbf{E}_\eta B_j(s_{\{j\}} * \eta_{\{j\}})||^2 ds_{\{j\}} > 0, \ c_{\alpha_j} := \int_{\mathcal{D}} \frac{c(t)}{h_j(t_{L_j})^{\alpha_j}} dt > 0,$$

and B_j is an isotropic fractional Brownian field defined on $\mathcal{D}_j$ with covariance function $r_j(s_{\{j\}}, t_{\{j\}}) := \frac{1}{2}(||s_{\{j\}}||^{\alpha_j} + ||t_{\{j\}}||^{\alpha_j} - ||t_{\{j\}} - s_{\{j\}}||^{\alpha_j})$.

References

[1] *Abramowicz K., Seleznjev O.*, Spline approximation of a random process with singularity. J. Statist. Plann. Inference, 2011,v. 141, p. 1333–1342.

[2] *Berman S.M.*, Sojourns and extremes of Gaussian process. Ann. Probab., 1974, v. 2, p. 999–1026.

[3] *Seleznjev O.*, Spline approximation of random processes and design problems. J. Statist. Plann. Inference, 2000, v. 84, p. 249–262.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Inventory model type of (s,S) with subexponential distributed demands[1]

Rovshan T. Aliyev[2]

In present study, stochastic process $X(t)$ describing inventory model type of (s,S) with a heavy tailed distributed demands having finite variance is considered. The asymptotic expansion for the large values $\beta = S - s$ for the ergodic distribution of process $X(t)$ based on the main result of the study Geluk and Frenk (2011) is obtain.

1 Introduction

Let $\{\xi_n\}$ and $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$- are two independent sequences of random variables defined on probability space$(\Omega, \Im, \mathbf{P})$, such that variables in each sequence independent and identically distributed. Suppose that ξ_n and η_n take only positive values and these distribution functions be denoted by

$$\Phi(t) = \mathbf{P}\left\{\xi_1 \leq t\right\},\ t > 0, \quad F \equiv F(x) = \mathbf{P}\left\{\eta_1 \leq x\right\}, x > 0.$$

Let introduce also so called equilibrium distribution

$$F_1(x) = \frac{1}{m_1}\int_0^x \bar{F}(u)du, \quad \bar{F}(u) = 1 - F(u).$$

Define independent renewal sequence $\{T_n\}$ and $\{Y_n\}$ as follows using the initial sequences of the random variables $\{\xi_n\}$ and $\{\eta_n\}$ as:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i,\ \ Y_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i,\ n = 1,2,...;\ T_0 = Y_0 = 0.$$

Define also sequence of integer valued random variables:

$$N_0 = 0, N_{n+1} = \min\left\{k \geq N_n + 1 : S - (Y_k - Y_{N_n}) < s\right\}, n = 0,1,2,...$$

Let $\tau_n = T_{N_n},\ n = 1,2,...;\ \tau_0 = 0$ and $\nu\left(t\right) = \max\left\{n \geq 0\ :\ T_n \leq t\right\}$.
Thus the following stochastic process can be constructed:

$$X(t) = S - Y_{\nu(t)} + Y_{N_{\text{k}}},\ as\ \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \quad k = 0,1,2,...$$

Our purpose in this study is to investigate asymptotic behaviour of ergodic distribution $Q_{W_\beta}(x)$ of the process $W_\beta(t) \equiv \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$, as sufficiently large values of parameter $\beta = S - s$.

[1]This work was supported by Science Development Foundation under the President of the Republic of Azerbaijan grant EIF-2011-1(3)-82/30/1.

[2]Baku State University, Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics. E-mail: `aliyevrt@mail.ru`

2 Basic results

For the formulation of the main result we need the following

Definition 1. (Klüppelberg, 1988). A distribution F on $[0,\infty)$ is said to belong to the class L^*, if $F(x)>0$ for all $x>0$,

$$m_1=\int_0^{\infty}\bar{F}(x)dx<\infty,\qquad \int_0^{x}\bar{F}(x-t)\bar{F}\left(t\right)dt{\sim}2m_1\bar{F}\left(x\right),\qquad x\to\infty.$$

The class L^* forms an important subclass of the subexponential class L introduced in Chistyakov (1964). In study Geluk and Frenk (2011) under the conditions $F(x)$ is non-singular and $F_1\in L^*$, obtained following asymptotic expansion for the renewal function $U(x)$ as $x\to\infty$:

$$U(x)=\frac{x}{m_1}+\frac{m_2}{2m_1^2}-\frac{1}{m_1}\bar{G}_1(x)+O\left(\bar{F}_1(x)\right),$$

where $\bar{G}_1(x)=\int_x^{\infty}\bar{F}_1(u)du$, $F_1(x)=\frac{1}{m_1}\int_0^x\bar{F}(u)du$, $m_k=E\left(\eta_1^k\right)$, $k=1,2$. Note that, $F_1\in L^*$ implies that $m_2=E\eta_1^2<\infty$.

Based on this result we have proved the following

Theorem 1. *Let initial sequences* $\{\xi_n\}$ *and* $\{\eta_n\}$, $n\geq 1$, *– satisfies the following supplementary conditions:* 1) $E\xi_1<\infty$, 2) η_1*- is a non-arithmetic random variable. Suppose* $F(x)$ *is non-singular and* $F_1\in L^*$. *Then for the each* $x\in(0,1)$ *as* $\beta\to\infty$

$$Q_{W_\beta}(x)=x-m_{21}x\frac{1}{\beta}-\left[\bar{G}_1(\beta(1-x))-(1-x)\bar{G}_1(\beta)\right]\frac{1}{\beta}+O\left(\frac{\bar{F}_1(\beta)}{\beta}\right),$$

where $m_{21}=m_2/2m_1$.

Acknowledgments. The author is grateful to prof. T.A. Khaniyev for valuable remarks and suggestions.

References

[1] *Aliyev R.T., Khaniyev T.A., Kesemen T.*, Asymptotic expansions for the moments of a semi-Markovian random walk with Gamma distributed interference of chance, Communications in Statistics - Theory and Methods, 2010, v. 39, 1, p. 130–143.

[2] *Asmussen S.*, Ruin Probabilities. World Scientific, Singapore,2000.

[3] *Borovkov A.A.*, On subexponential distributions and asymptotics of the distribution of the maximum of sequential sums. Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, 2000, v. 43, N 6, p. 1235–1264.

[4] *Chistyakov V.P.*, A theorem on sums of independent positive random variables and its application to branching random processes. Theor. Probab. Appl., 1964, v. 9, p. 640–648.

[5] *Gavirneni S.*, An efficient heuristic for inventory control when the customer is using a (s; S) policy. Operations Research Letters, 2001, v. 28, p. 187–192.

[6] *Geluk J.L., Frenk J.B.G.*, Renewal theory for random variables with a heavy tailed distribution and finite variance. Statistics and Probability Letters, 2011, v. 81, p.77–82.

[7] *Klüppelberg C.*, Subexponential distributions and integrated tails. Journal of Applied Probability, 1988, v. 25, N 1, p.132–141.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Limit theorem for the critical branching process with non-homogeneous immigration

Jakhongir B. Azimov[1]

1 Introduction

Let μ_n be a number of particles of the Galton-Watson (G-W) branching process at the moment n $(n = 0, 1, \ldots, \mu_0 = 1)$ with the generating function (g.f.)

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j, \quad p_j \geq 0, \ \ j = 0, 1, \ldots, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1, \ \ |x| \leq 1.$$

The zero state is absorbing for the process μ_n , that is, if $\mu_N = 0$ for some $N > 0$, then $\mu_n = 0$ for all $n > N$. In [1]. J.H. Foster considered G-W process modified to allow immigration of particles whenever the number of particles is zero. If $\mu_n = 0$, then, at the moment n,ξ_n particles immigrate to the population, where the number of particles evolves by the law of the G-W process with g.f. $F(x)$. The asymptotic behavior of branching processes with state-dependent immigration were studied by many authors (see, for instance, [1]–[3]). Assume that the intensity of the immigration decreases tending to 0, when the number of descendants increases. Limit theorems for such processes have been studied in [4]. Thus, the immigration is given with g.f.

$$g_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j(n) x^j, \ \ |x| \leq 1, \ \ q_j(n) \geq 0, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} q_j(n) = 1, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Let Z_n be a number of particles of this process at the moment n. Suppose, that

$$F(x) = x + (1 - x)^{1+\nu} L(1 - x)$$

where $0 < \nu \leq 1$ and $L(x)$ is a slowly varying function (s.v.f.) as $x \to 0$.

Introduce the function

$$M(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{N(k)}{k^{1/\nu}}$$

where $N(x)$ is a s.v.f. as $x \to \infty$ such that

$$\nu N^{\nu}(x) L(N(x)/x^{1/\nu}) \to 1.$$

We consider the case of $M(n) \to M < \infty$ as $n \to \infty$.

[1]National University of Uzbekistan, Institute of Mathematics. E-mail: jakhongir20@rambler.ru

2 Main results

Put $\alpha_n = \mathbf{E}\xi_n, \quad \beta_n = \mathbf{D}\xi_n + \alpha_n^2 - \alpha_n$.

We suppose that $\sup\limits_{0 \le n < \infty} \alpha_n < \infty$, $\sup\limits_{0 \le n < \infty} \beta_n < \infty$, $0 < \alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ as $n \to \infty$.

Denote

$$Q_1(n) = \alpha_n \sum_{k=0}^{n} (1 - F_k(0)), \qquad Q_2(n) = (1 - F_n(0)) \sum_{k=0}^{n} \alpha_k,$$

where $F_0(x) = x, \quad F_{n+1}(x) = F(F_n(x))$.

Theorem 1. *Assume that*

$$\alpha_n \sim \frac{l(n)}{n^r}, \;\; \beta_n = o(Q_1(n)), \quad n \to \infty,$$

where $r \ge 0$ and $l(n)$ is a s.v.f. as $n \to \infty$, if $r = 0$ then $l(n) = o(1), \quad n \to \infty$, and

$$\frac{Q_1(n)}{Q_2(n)} \to \theta$$

as $n \to \infty$, $0 \le \theta < \infty$.

Then for $x \ge 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\{Z_n(1 - F_n(0)) < x | Z_n > 0\} = \frac{\theta + G(x)}{1 + \theta},$$

where $\int\limits_0^\infty e^{-\tau x} dG(x) = 1 - \tau(1 + \tau^\nu)^{-1/\nu}$.

References

[1] *Foster J.*, A limit theorem for a branching process with state-dependent immigration. Ann. Math. Stat., 1971, v. 42, N 5, p. 1773–1776.

[2] *Pakes A.*, A branching processes with state-dependent immigration component., Adv. Appl. Prob., 1971, v. 3, p. 301–314.

[3] *Formanov Sh.K., Azimov J.B.*, Markov branching processes with a regularly varying generating function and immigration of a special form, Theor. Prob. and Math. Stat., 2002, v. 65, p. 181–188.

[4] *Mitov K., Yanev N.*, Critical Galton-Watson processes with decreasing state-dependent immigrations. J. Appl. Probab., 1984, v. 21, p. 22–39.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Ergodicity of a collective random walk on a continuous circle[1]

Michael Blank[2]

We discuss ergodicity conditions for a collective random walk of a configuration of randomly wandering particles on a continuous circle.

1 Introduction

We consider a collective random walk of a configuration consisting of n particles on a unit continuous circle. Each particle without interactions with others performs an independent random walk and the interaction between particles consists in the prohibition for particles to overrun each other. The i-th particle in the configuration at time $t \in \mathbb{Z}_+$ is characterized by the position of its center $x_i^t \in S := [0,1)$, the radius $r_i \geq 0$ of the ball (representing the particle), and the distribution of jumps P_i (i.e. the particle makes a jump equal to a random value ξ distributed according to P_i). In general our theory covers both positive and negative jumps, but to simplify presentation we discuss here only the case of nonnegative jumps, i.e. $P_i([0,1]) = 1$. We refer the reader for the general account on interacting particle systems to [2] and for the results about exclusion type processes in continuum to [1].

We say that a particle configuration $x^t := \{x_1^t, \ldots, x_n^t\}$ is *admissible* it it satisfies the following inequality:

$$x_i^t + r_i + r_{i+1} \leq x_{i+1}^t \qquad \forall i.$$

Here and in the sequel arithmetic operations with metric elements (x_i, r_i etc.) are taken modulo 1 and we set $x_{n+1}^t := x_1^t$. In distinction to the arithmetic operations the comparison between the metric elements is performed according to the *clockwise order* as elements of the unit circle.

Finally the local dynamics of an individual particle is defined by the relation

$$x_i^{t+1} = \min\{x_i^t + v_i^t,\ x_{i+1}^t - r_i - r_{i+1}\}, \tag{1}$$

where the random variable v_i^t is chosen according to the distribution P_i. The moment of time when the i-th particle is stopped by the $(i+1)$-th particle will be referred as the moment of *interaction* between these particles.

Depending on updating rules discrete time processes under consideration may be classified into two types: with *parallel* and sequential *updating*. In the former case all particles are trying to move simultaneously which leads to an arbitrary number of simultaneous interactions. In the later case at each moment of time only one particle is chosen to jump according to a certain rule (e.g. by a random choice) and thus at most a single interaction may take place. The sequential updating in a sense is equivalent to continuous time collective random walk in which a random alarm clock is attached to each particle and the particle moves only when the clock rings.

[1]This work was supported by RFBR and ONIT grants.
[2]Russian Academy of Sci., Inst. for Information Transmission Problems. E-mail: `blank@iitp.ru`

In both situations the updating rule together with the local dynamics (1) uniquely defines the dynamics of gaps

$$\Delta_i^t := x_{i+1}^t - x_i^t - r_i - r_{i+1}$$

between the particles. Obviously Δ_i^t is admissible if $\Delta_i^t \geq 0$ and $\sum_i (\Delta_i^t + 2r_i) = 1$.

2 Basic results

Theorem 1. (Ergodicity for parallel updating) *Let $\forall i$ the distribution of jumps P_i satisfy the following non-degeneracy condition*

$$\forall \varepsilon > 0 \ P_i([0, \varepsilon]) > 0 \text{ and } \exists \varepsilon' > 0 \ P_i([\varepsilon', 1]) > 0. \tag{2}$$

Then the Markov process $\Delta^t := \{\Delta_i^t\}$ with parallel updates is uniquely ergodic, namely for each admissible initial Δ^0 the distributions of random variables Δ^t converges as $t \to \infty$ to a limit which does not depend on Δ^0.

The non-degeneracy condition (2) is a rather distant generalization of a simple law $P_i := (1-p)\delta_0 + p\delta_\sigma$, when a particle makes a jump of length $\sigma > 0$ with the probability $p > 0$ or stays put otherwise.

Theorem 2. (Ergodicity for random sequential updating) *Let $\forall i$ $P_i(\{0\}) < 1$. Then the Markov process $\Delta^t := \{\Delta_i^t\}$ with random sequential updates is uniquely ergodic.*

Consider now a purely deterministic setting when instead of random walks the local dynamics of individual particles is governed by deterministic dynamical systems and the updating is sequential (i.e. each time the particle with the next index (modulo n) is chosen). Denote by W_i the process generating the values of local jumps v_i^t.

Theorem 3. (Synchronization) *Let the processes W_i be not close to each other in the sense that $\forall t_0 \geq 0$ and for each i there exists $\tau_i < \infty$ such that*

$$\sum_{t=t_0}^{t_0+\tau_i} (v_i^t - v_{i+1}^t) > 1 \quad \text{or} \quad \sum_{t=t_0}^{t_0+\tau_i} (v_{i+1}^t - v_i^t) > 1. \tag{3}$$

Then for any initial admissible $x^0, \acute{x}^0$ the processes $x^t, \acute{x}^t$ are getting synchronized with time, namely $\sum_i^n |\Delta_i^t - \acute{\Delta}_i^t| \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

The aim of the condition (3) here is to guarantee that subsequent particles will interact in finite time. Observe that assuming that the condition (3) holds almost surely one gets the same result in the random setting as well.

References

[1] *Blank M.*, Metric properties of discrete time exclusion type processes in continuum. J. Stat. Phys., 2010, v. 140, N 1, p. 170-197. [math.DS+math.PR/0904.4585]

[2] *Liggett T.M.*, Interacting particle systems. Springer-Verlag, N.-Y., 1985.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Asymptotic expansion for the distributions of canonical V-statistics[1]

Igor S. Borisov and Nadezhda V. Volodko[2]

In the paper we discuss the results on the asymptotic expansion for the distributions of canonical V-statistics.

1 Introduction

The short asymptotic expansion is obtained for the distribution function of a canonical V-statistic of third order. The result is mainly based on the two papers by I. S. Borisov and E. A. Solov'ev [3] and by I. S. Borisov and N. V. Volodko [4]. The analogous result for canonical U-statistics of second order was obtained by V. Bentkus and F. Götze [2]. Moreover, there are papers devoted to the similar asymptotic approximations for the goodness-of-fit statistics: T. R. C. Read [6], M. Siotani and Y. Fujikoshi [7], V. V. Ulyanov and V. N. Zubov [8], J. A. Asylbekov, V. N. Zubov and V. V. Ulyanov (2011).

Let $\{X_i\}$ be a sequence of i.i.d. random variables in a separable metric space $\mathfrak{X}$. Denote

$$V_n(f) := (n^d)^{-1/2} \sum_{1\le i_1,...,i_d\le n} f(X_{i_1}, ..., X_{i_d}),$$

where $\mathbf{E}f^2(X_1, ..., X_d) < \infty$ and $\mathbf{E}f(t_1, \ldots, t_{k-1}, X_k, t_{k+1}, \ldots, t_d) = 0$ for every $k \le d$ and all $t_j \in \mathfrak{X}$; in this case, the kernel $f(t_1, ..., t_d)$ and V-statistic $V_n(f)$ are called *canonical*. Let $\{e_i(t);\ i \ge 0\}$ be an orthonormal basis in the separable Hilbert space $L_2(\mathfrak{X}, P)$ such that $e_0(t) \equiv 1$. Then every canonical kernel from $L_2(\mathfrak{X}^d, P^d)$ admits the representation

$$f(t_1, ..., t_d) = \sum_{i_1,...,i_d=1}^{\infty} f_{i_1...i_d} e_{i_1}(t_1)...e_{i_d}(t_d),$$

where the multiple series $L_2(\mathfrak{X}^d, P^d)$-converges.

2 Basic results

Let $x \in \mathbf{R}^\infty$. Introduce the notation (well-defined under the conditions below)

$$\|x\| = \Big(\sum_{i,j,k} |f_{ijk}|(|x_i|^3 + |x_j|^3 + |x_k|^3)\Big)^{1/3}, \quad \xi_i = \{e_k(X_i)\}_k, \quad \sigma^2 := \mathbf{E}\|\xi_1\|^2.$$

---

[1]This work was supported by RFBR grants N 11-01-00285, 11-01-12006-офи-м-2011.

[2]Sobolev Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences. E-mail: `sibam@math.nsc.ru`, `nvolodko@gmail.com`

Moreover, introduce the following regularity condition:

(R). *The kernel* $f(t_1, t_2, t_3)$ *is continuous in* $\mathfrak{X}^3$ *(in every argument), and all the basis elements* $e_k(t)$ *are continuous and bounded uniformly in* t *and* k.

Theorem. *Let restriction (R) be valid and the following conditions be fulfilled:*
(I) $\sum_{i,j,k=1}^{\infty} |f_{ijk}| < \infty$; **(II)** *for every fixed* i, *the infinite-dimensional vector* $\{f_{iik}\}_k$ *cannot be represented as a linear combination of vectors* $\{f_{ljk}\}_k$ *if* $\min(l, j) < i$. *Then*

$$\mathbf{P}\big(V_n(f) \le z\big) = \mathbf{P}\big(F(\tau) \le z\big) + \frac{1}{6\sigma\sqrt{n}} \mathbf{E} g_z^{(3)}(0)[\xi_1^3] + R_n(z),$$

where $\tau = \{\tau_i\}$ *is a sequence of independent random variables with the standard normal distribution,*

$$F(\tau) = \sum_{i \ne j \ne k} f_{ijk} \tau_i \tau_j \tau_k + \sum_{i \ne j} f_{iij}(\tau_i^2 - 1)\tau_j + \sum_i f_{iii}(\tau_i^3 - 3\tau_i),$$

and the above multiple series converges almost surely, $g_z^{(3)}(x)[\cdot]$ *is the third Frechèt derivative of* $g_z(x) := \mathbf{P}(F(\tau + x) < z)$ *in the Banach space* $l_f^3 := \{x \in \mathbf{R}^\infty : \|x\| < \infty\}$, *which is well defined, and*

$$\sup_{z \in \mathbf{R}} |R_n(z)| \le C(f) n^{-1}.$$

References

[1] *Asylbekov Zh. A., Zubov V. N., Ulyanov V. V.*, On approximating some statistics of goodness-of-fit tests in the case of three-dimensional discrete data. Siberian Math. J., 2011, v. 52, N 4, p. 571–584.

[2] *Bentkus V., Götze F.*, Optimal bounds in non-Gaussian limit thorems for U-statistics. Ann. Probab., 1999, v. 27, N 1, p. 454–521.

[3] *Borisov I. S., Soloviov E. A.*, The second-order approximation for the distributions of smooth functionals of sums of independent B-valued random variables. Proceedings of Sobolev Institute of Math., Novosibirsk, Sobolev Inst. of Math., 1993, v. 20, p. 3–31.

[4] *Borisov I. S., Volodko N. V.*, Orthogonal series and limit theorems for canonical U- and V-statistics of stationary connected observations. Siberian Adv. Math., 2008, v. 18, N 4, p. 244–259.

[5] *Götze F., Ulyanov V. V.*, Asymptotic distribution of χ^2-type statistics. Preprints der Forschergruppe spektrale Analysis and stochastische Dynamik. 2003. Universität Bielefeld. 15 p. (Preprintreihe 03-033).

[6] *Read T. R. C.*, Closer asymptotic approximations for the distributions of the power divergence goodnes-of-fit statistics. Ann. Inst. Stat. Math., 1984, v. 36, p. 59–69.

[7] *Siotani M., Fujikoshi Y.*, Asymptotic approximations for the distributions of multinomial goodnes-of-fit statistics. Hiroshima Math. J., 1984, v. 14, p. 115–124.

[8] *Ulyanov V. V., Zubov V. N.*, Refinement on the convergence of one family of goodness-of-fit statistics to chi-squared distribution. Hiroshima Math. J., 2009, v. 39, p. 133–161.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

The invariance principle for canonical U- and V-processes based on observations under mixing conditions [1]

Borisov I.S., Zhechev V.A. [2]

The talk is devoted to proving the invariance principle for sequences of normalized U- and V-statistics (the so-called U- or V-processes with paths in $D[0,1]$)

$$U_n(t) := n^{-m/2} \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_m \leq [nt]} f(X_{i_1}, ..., X_{i_m}), \quad t \in [0,1],$$

$$V_n(t) := n^{-m/2} \sum_{i_1, \ldots, i_m \leq [nt]} f(X_{i_1}, ..., X_{i_m}), \quad t \in [0,1],$$

of an arbitrary order $m \geq 2$ with canonical (degenerate) kernels f, defined on samples from a stationary sequence of observations $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ satisfying φ- or α-mixing. The corresponding limit distributions coincide with those of the respective processes (which are well defined under suitable conditions)

$$U(t) := \sum_{k_1=1}^{\infty} ... \sum_{k_m=1}^{\infty} f_{k_1 \ldots k_m} t^{m/2} \Pi_{j=1}^{\infty} H_{v_j(i_1, \ldots, i_m)}(t^{-1/2} w_j(t)), \quad t \in [0,1],$$

$$V(t) := \sum_{k_1=1}^{\infty} ... \sum_{k_m=1}^{\infty} f_{k_1 \ldots k_m} w_{k_1}(t) ... w_{k_m}(t), \quad t \in [0,1],$$

where $\{w_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ is a sequence of dependent Wiener processes with a known joint covariance, $\{f_{k_1 \ldots k_m}\}$ are the expansion coefficients of the kernel f with respect to an orthonormal basis in $L_2(\mathcal{L}(X_1)^m)$, $H_k(x)$ are Hermite polynomials, and $v_j(i_1, ..., i_m)$ is the number of subscripts among $i_1, ..., i_m$ equal to j.

Under suitable conditions, we prove that, for any measurable in $D[0,1]$ functional $g(\cdot)$ continuous at the points of $C[0,1]$, the sequence $g(U_n)$ (resp. $g(V_n)$) converges in distribution to the random variable $g(U)$ (resp. $g(V)$) and the corresponding multiple series a.s. converge for every $t \in [0,1]$, and moreover, the processes $U(t)$ and $V(t)$ are a.s. continuous.

In the 1980's, there were obtained some limit theorems for U-processes of arbitrary orders with canonical kernels, based on independent observations. The limit random processes are represented as infinite polynomials of independent Wiener processes [1] or multiple stochastic integrals with respect to the stochastic product-measure generated by the so-called two-parametric Kiefer process [2, 3]. There is also a number of results on the limiting behavior of canonical U- and V-statistics for independent observations [4] and for φ-, α-mixing trials [5].

[1] Работа поддержана грантами РФФИ 11-01-00285, 11-01-12006-офи-м-2011.

[2] Институт математики им. С.Л. Соболева; Новосибирский государственный университет. E-mail: sibam@math.nsc.ru

References

[1] *Ronzhin A. F.*, Functional limit theorems for U-statistics. Math. Notes, 1986, v. 40, N 5, p. 886–893.

[2] *Denker M., Grillenberger C., Keller G.*, A Note on Invariance Principles for v. Mises' Statistics. Metrika, 1985, v. 32, p. 197–214.

[3] *Dehling H., Denker M., Philipp W.*, The almost sure invariance principle for the empirical process of U-statistic structure. Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist., 1987, v. 23, N 2, p. 121–134.

[4] *Rubin H., Vitale R.*, Asimptotic distribution of symmetric statistics. Ann. Statist., 1980, v. 8, N 1, p. 165–170.

[5] *Borisov I. S., Volodko N. V.*, Orthogonal series and limit theorems for canonical U- and V-statistics of stationary observations. Math. Proceedings, Sobolev Inst. of Math., 2008, v. 11, N 1, p. 25–48.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

The Spacefilling Curve Heuristic for the Traveling Salesman Problem[1]

P. Charyyev[2]

Let L_n^{SFC} denote the length of the path connecting n random points uniformly distributed over the unit square obtained by the spacefilling curve heuristic. For a broad class of spacefilling curves, we prove that for some number K, we have, for all $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|L_n^{SFC} - \mathbf{E}L_n^{SFC}\right| \geq t\right) \leq K \exp\left(-t^2/K\right).$$

1 Introduction

The famous Traveling Salesman Problem (TSP) requires to find the shortest tour through n fixed points in the plane. The TSP is NP-complete and thus, many heuristics are available where deterministic analyses have been carried out.

Here, we consider the stochastic version of the problem, where the points are chosen uniformly on the unit square. The first remarkable result was given by Beardwood, Halton and Hammersley [1]: If we let L_n^{OPT} be the length of the shortest path connecting n random points uniformly distributed over the unit square, they showed that

$$\frac{L_n^{OPT}}{\sqrt{n}} \to \beta_{TSP} \quad \textit{for some constant} \quad 0 < \beta_{TSP} < 1, \quad \textit{with probability one.} \tag{1}$$

A number of studies have proved that the random variable L_n^{OPT} is concentrated about its mean. But, by using more powerful martingale inequalities Rhee and Talagrand [4] put an end to a line of investigation on the tail bounds by showing that,

$$\mathbb{P}\left(\left|L_n^{OPT} - \mathbf{E}L_n^{OPT}\right| \geq t\right) \leq K \exp\left(-t^2/K\right), \quad \textit{where } K \textit{ is a constant.} \tag{2}$$

Their result states that the L_n^{OPT} is highly concentrated about its mean and the tail bound decays as rapidly as the Normal distribution.

Next, we introduce the Spacefilling Curve (SFC, [5]) Heuristic. By a spacefilling curve ψ, we mean a continuous surjective mapping from $[0,1]$ onto $[0,1]^2$. The main idea behind the spacefilling curve heuristic applied to the TSP is to find a path through a set of n points by simply visiting the points in the order as they appear on the curve.

To get efficient results, one requires a spacefilling curve to be as smooth as possible. Many of the Classical spacefilling curves are Lipschitz continuous of order $1/2$ and they are self-similar. Moreover, many of them are measure preserving, in turn, this property helps us to transfer a problem about random variables in $[0,1]^2$ to a simpler problem about random variables in $[0,1]$.

[1]This work was supported by Bogazізi University.
[2]Bogazізi University, Faculty of Mathematics. E-mail: polat.chariyev@boun.edu.tr

2 Basic results

Let's denote by L_n^{SFC} the length of the path connecting n random points uniformly distributed over the unit square obtained by the spacefilling curve heuristic. Similar results to (1) was given by Platzman and Bartholdi [3]. They showed that for a specific class of SFCs ψ there are constants β^+ and β^- such that

$$\beta^+ = \limsup_{n\to\infty} \frac{L_n^{SFC}}{\sqrt{n}} \quad \textit{and} \quad \beta^- = \liminf_{n\to\infty} \frac{L_n^{SFC}}{\sqrt{n}}, \quad \textit{where} \quad \beta^+ - \beta^- > 0. \tag{3}$$

Further development come from Gao and Steele [2], which is very close to (1). If a heuristic path built on ψ satisfies some properties given in [2], then there is a continuous function φ of period 1 such that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n^{SFC}}{\sqrt{n}\log_p n} = 1 \quad \textit{almost surely,} \tag{4}$$

where p is the integer appearing in properties [2]

As for Complete Convergence of the random variable L_n^{SFC}, a weaker but similar result to (2) was again proved by Gao and Steele [2]. If a spacefilling curve ψ has the bimeasure preserving property [2], then there are constants A and B such that for all $t \geq 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|L_n^{SFC} - \mathbf{E}L_n^{SFC}\right| \geq t\right) \leq B\exp\left(\frac{-At^2}{\log t}\right).$$

But, still the problem has not been solved completely. The natural question is whether we can remove the tedious log expression or not? Keeping further estimation, for some special curves we have obtained a Gaussian tail bound for the random variable L_n^{SFC}. Namely, we have proved the following

Theorem 1. *If a Space-filling curve ψ has the bimeasure preserving property, and a geometric construction (Paono, Hilbert, Moore, Lebesgue, Sierpinski, etc...), we then have*

$$\mathbb{P}\left(\left|L_n^{SFC} - \mathbf{E}L_n^{SFC}\right| \geq t\right) \leq K\exp(-t^2/K), \quad \textit{where} \quad K \quad \textit{is a constant.}$$

We hope that our result can be generalized to a wider class of SFC curves where they satisfy some properties given in [2].

Acknowledgments. I am grateful to my Thesis Supervisor Serdar Altok for his valuable remarks and suggestions.

References

[1] *Beardwood J., Halton J.H., Hammersley J.M.*, The Shortest Path Through Many Points. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1959, v. 55, p. 299–327.

[2] *Gao J., Steele J.M.*, General Spacefilling Curve Heuristics and Limit Theory for the Traveling Salesman Problem. Jour. Complex., 1994, v. 10, p. 230–235.

[3] *Platzman L.K., Bartholdi J.J.*, Spacefilling Curves and the Planar Traveling Salesman Problem. J. Assoc. Comput. Mach., 1989, v. 36, N 4, p. 719–737.

[4] *Rhee W. T., Talagrand M.*, A Sharp Deviation for the Stochastic Traveling Salesman Problem. Ann. Probab., 1989b, v. 17, p. 1–8.

[5] *Sagan H.*, Space-Filling Curves. Springer-Verlag, New York, USA, 1994.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Asymptotic expansions and Roth's theorem

Geoffrey Decrouez[1], and Peter Hall[2]

The bootstrap, at least in its conventional forms, does not perform well when applied to lattice-valued data. The inherent discreteness of lattice distributions confounds standard bootstrap methods for constructing confidence intervals with good coverage accuracy. However, in certain problems involving lattice-valued random variables, where more than one sample is involved, this difficulty can be overcome by ensuring that the ratios of sample sizes are quite irregular. For example, at least one of the ratios of sample sizes should be a reasonably good rational approximation to an irrational number. Results from number theory, in particular Roth's theorem, can be used to demonstrate theoretically the advantages of this approach. This project was motivated by a problem in risk analysis involving quarantine searches of shipping containers for pests and other environmental hazards.

1 Asymptotic expansions

Let $K \geq 2$ be an integer, and assume that, for $k = 1, \ldots, K$, the distribution of the random variable $X(k)$ is lattice with maximum lattice edge width e_k, where $0 < e_k < \infty$ and satisfies Cramér's smoothness condition $\max_{1\leq k\leq K} \mathbf{E}\{X(k)^4\} < \infty$. For each k let $X_{k1}, \ldots, X_{kn_k}$ each be distributed as $X(k)$. Assume that all the random variables X_{kj} are independent, and put $\bar{X}_k = n_k^{-1} \sum_{1\leq j\leq n_k} X_{kj}$. We consider Edgeworth approximations to the distribution of $S_n = \sum_{k=1}^{K} \bar{X}_k$, assuming that the sample sizes n_k are all of the same order. In particular, we parametrise $n_1, \ldots, n_K$ in terms of a divergent integer-valued parameter n, and we assume that, for constants B_1 and B_2 satisfying $0 < B_1 < B_2 < \infty$, we have $B_1 n \leq \min_{1\leq k\leq K} n_k \leq \max_{1\leq k\leq K} n_k \leq B_2 n$ for all n.

Theorem 1. *Assume that the summands X_{kj} are as described above. Suppose too that, for distinct integers k_1 and k_2 in the range $1 \leq k_1, k_2 \leq K$, at least one of the following two conditions holds:* (i) *the ratio n_{k_1}/n_{k_2} is fixed and e_{k_1}/e_{k_2} is an algebraic irrational number, or* (ii) *the ratio e_1/e_2 is rational and $|(n_{k_1}/n_{k_2}) - \rho| = O(n^{\xi-(3/2)})$ for all $\xi > 0$, where ρ is an algebraic irrational number. Then*

$$\mathbf{P}(S_n \leq \mu + \sigma_n x) = \Phi(x) + n^{-1/2}\frac{1}{6}\beta_n \left(1 - x^2\right) \phi(x) + O(n^{\xi-1}), \quad \textit{for any } \xi > 0, \tag{1}$$

holds uniformly in x. Here Φ and ϕ are the standard normal distribution and density functions, respectively, $\mu = \mathbf{E}(S_n) = \sum_k \mathbf{E}\{X(k)\}$, $\sigma_n^2 = var(S_n)$, and $\beta_n = n^{-1/2}\mathbf{E}(S_n/\sigma_n)^3$.

Edgeworth expansion (1) has the same form that it would enjoy if the distributions were nonsingular, up to terms of order $n^{\xi-1}$ for all $\xi > 0$. Condition (ii) in the statement of Theorem 1 is satisfied if n_1/n_2 is a continued-fraction approximation to ρ (specifically, if n_1/n_2 is a "convergent" of ρ), where ρ is any irrational number. The proof of Theorem 1 relies on the

[1]The University of Melbourne, Department of Mathematics and Statistics, and Australian Centre of Excellence for Risk Analysis (ACERA). E-mail: `dgg@unimelb.edu.au`

[2]The University of Melbourne, Department of Mathematics and Statistics. E-mail: `halpstat@ms.unimelb.edu.au`

Thue-Siegel-Roth theorem (Roth, 1955) which asserts that, for each algebraic irrational number ρ and each $\epsilon > 0$, the inequality

$$\left|\frac{n_1}{n_2} - \rho\right| \leq \frac{1}{n_2^{2+\epsilon}}$$

has no more than a finite number of solutions (n_1, n_2).

2 The bootstrap

Suppose that the distribution of each $X(k)$ is either Bernoulli with $\mathbf{P}\{X(k) = 1\} = 1 - \mathbf{P}\{X(k) = 0\} = \theta_k$, where $0 < c_k \leq \theta_k \leq d_k < 1$, or Poisson with mean θ_k, where $0 < c_k \leq \theta_k \leq d_k < \infty$. Let $\hat{\mu} = \sum_k \bar{X}_k$. For each k, draw a resample $\mathcal{X}_k^* = \{X_{k1}^*, \ldots, X_{kn_k}^*\}$ by sampling randomly, conditional on $\mathcal{X} = \cup_k \mathcal{X}_k$, from the distribution of $X(k)$ with $\theta_k = \hat{\theta}_k$, the maximum likelihood estimate of θ_k, and such that the X_{kj}^*s are independent conditional on $\mathcal{X}$. Compute $\bar{X}_k^* = n_k^{-1} \sum_j X_{kj}^*$; put $\hat{\mu}^* = \sum_k \bar{X}_k^*$; given $\alpha \in (0,1)$, let $s_\alpha = s_\alpha(\theta_1, \ldots, \theta_K)$ denote the α-level quantile of the distribution of $\hat{\mu} - \mu$, and let $\hat{s}_\alpha = \inf\{s \mid \mathbf{P}(\hat{\mu}^* - \hat{\mu} \leq s \mid \mathcal{X}) \geq \alpha\}$, the parametric bootstrap estimator of s_α. The naive α-level, upper percentile-bootstrap confidence intervals for μ with nominal coverage probabilities $1 - \alpha$, is given by $\mathcal{I}_\alpha = (-\infty, \hat{\mu} - \hat{s}_\alpha]$. It can be coverage-corrected using the double bootstrap so as to improve performance. Let $\hat{\theta}_k^*$ denote the estimator of θ_k computed from $\mathcal{X}_k^*$, rather than $\mathcal{X}_k$, using the same method employed previously to calculate $\hat{\theta}_k$. Put $\mathcal{X}^* = \cup_k \mathcal{X}_k^*$, and draw a resample $\mathcal{X}_k^{**} = \{X_{k1}^{**}, \ldots, X_{kn_k}^{**}\}$ by sampling randomly, conditional on $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^*$, from the distribution of $X(k)$ with $\theta_k = \hat{\theta}_k^*$, such that the X_{kj}^{**}s are independent conditional on $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^*$. Let $\mathcal{I}_\alpha^*$ denote the bootstrap form of $\mathcal{I}_\alpha$, given by $\mathcal{I}_\alpha^* = (-\infty, \hat{\mu}^* - \hat{s}_\alpha^*]$, where, $\hat{s}_\alpha^* = \inf\{s \mid \mathbf{P}(\hat{\mu}^{**} - \hat{\mu}^* \leq s \mid \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^*) \geq \alpha\}$, $\hat{\mu}^{**} = \sum_k \bar{X}_k^{**}$ and $\bar{X}_k^{**} = n_k^{-1} \sum_j X_{kj}^{**}$. The double-bootstrap estimator of the coverage, $\pi_\alpha = \mathbf{P}(\theta \in \mathcal{I}_\alpha)$, of the interval $\mathcal{I}_\alpha$ is given by $\hat{\pi}_\alpha = P(\hat{\theta} \in \mathcal{I}_\alpha^* \mid \mathcal{X})$. Given a desired coverage level $1 - \alpha_0$, we choose $\alpha = \hat{\alpha}_0$ so as to make $\hat{\pi}_\alpha$ as close as possible to $1 - \alpha_0$, and then take our final confidence interval to be $\mathcal{I}_{\hat{\alpha}_0}$. Let z_α be the α-level quantile of Φ.

Theorem 2. *Assume that the summands X_{kj} are as described above, and that at least one of the conditions* (i) *and* (ii) *in Theorem 1 hold. Then:* (a) *The percentile-bootstrap confidence interval $\mathcal{I}_\alpha$ has coverage given by*

$$\mathbf{P}(\mu \in \mathcal{I}_\alpha) = 1 - \alpha + n^{-1/2} p_{\mathcal{I}}(z_\alpha)\phi(z_\alpha) + O\left(n^{\epsilon-(3/4)}\right), \tag{2}$$

for each $\epsilon > 0$, uniformly in $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ for any α_1, α_2 satisfying $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. *Here $p_{\mathcal{I}}$ is and even, quadratic polynomial.* (b) *The coverage-corrected confidence interval $\mathcal{I}_{\hat{\alpha}_0}$ satisfies*

$$\mathbf{P}(\mu \in \mathcal{I}_{\hat{\alpha}_0}) = 1 - \alpha_0 + O\left(n^{\epsilon-(3/4)}\right) \quad \textit{for each } \epsilon > 0. \tag{3}$$

A comparison of (2) with (3) shows clearly the advantages of double bootstrap coverage correction, for an appropriate choice of sample size, which reduces coverage error from order $n^{-1/2}$ to order $n^{\epsilon-(3/4)}$ for all $\epsilon > 0$. The discontinuous nature of coverage probability prevents this level of error reduction in conventional problems involving lattice distributions. The coverage error using the double bootstrap for smooth distribution generally has coverage error of order n^{-1}. See, for example, Chapters 1–3 of [1].

Acknowledgments. The authors are grateful to A.Robinson for providing quarantine data.

References

[1] *Hall P.*, The Bootstrap and Edgeworth Expansion. Springer, New York, 1992

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Characterizations of probability distributions

Boyan Dimitrov[1], Zohel Khalil[2]

In the paper we present our results on the characterizations of probability distributions via properties of variables in random sums and various applied processes.

1 Introduction

Starting in 1987, we found various specific situations where the results of interaction between sequences of independent random variables (r.v.) have exponential distribution. Little relax of the basic conditions produce other distributions which contain the exponential class. These observations brought us to numerous characterizations of the exponential [2], [3], [6], geometric [5], and similar to these Almost-Lack-of-Memory (ALM-) distributions [1], [4]. We report here the essentials of these characterizations.

2 Characterizations of the exponential and geometric distributions

The following general setups represent the main results [2]:

Let $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ be two sequences of independent identically distributed random variables (r.v.) with cumulative distribution functions (cdf) $F_X(x) = \mathbf{P}\{X_n \le x\}$ and $F_Y(y) = \mathbf{P}\{Y_n \le y\}$ correspondingly. Introduce the random number N by the equation

$$N = \inf\{\, n : \ \ Y_n \, > \, X_n \, , \ \ n \ge 1 \} \, .$$

Define the r.v.

$$Z = \sum_{n=1}^{N-1} Y_n \, + X_N \, . \tag{1}$$

Theorem 1. *Let X_n be continuously distributed as a r.v. X. The equality $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ holds if and only if for the r.v. Z in (1) the equation*

$$F_Z(x) = F_X(x) \tag{2}$$

is fulfilled for any $x > 0$, for $F_Y(y) = 1 - e^{-\mu y}$, and for a sequence of values of the parameter μ with finite limit.

The novelty here was that Z represents the past history of the process and not the future, as the usual Lack-of-Memory property says.

Van Harn and Steutel [7] proved that Theorem 1 holds if equation (2) is fulfilled for one exponential Y with some $\mu > 0$. This condition also can be weakened.

[1]Kettering University, Department of Mathematics. E-mail: `bdimitro@kettering.edu`
[2]Concordia University, Department of Mathematics and Statistics, retired professor

For the discrete X and Y in [5] was proven that fulfilment of (2) for one non-degenerated Y is necessary and sufficient condition for X to have geometric distribution.

We studied numerous service disciplines with non-reliable servers, where the coincidence in distribution between blocking times characterizes the exponential service time [2], [3], [6].

3 Characterizations of the ALM-distributions

We noticed [1], [4], that equation (2) holds when $\mathbf{P}\{Y = c\} = 1$ not only for exponentially distributed X, but also for a larger class of probability distributions, which we called Almost-Lack-of-Memory (ALM) distributions. Explicitly, it ie true

Theorem 2. *The cdf $F_X(t)$ of the r.v. X has the form*

$$F_X(t) = 1 - \alpha^{\left[\frac{t}{c}\right]}\left(1 - (1-\alpha)F_{X_0}(t - \left[\frac{t}{c}\right] c)\right), \quad t \geq 0,$$

where $\alpha \in (0,1)$, and $F_{X_0}(t)$ is a cdf with support on the interval $[0, c)$ if and only if the equality (2) between the r.v.'s X and Z, defined by (1), is fulfilled for any $x > 0$ and for some Y with $\mathbf{P}\{Y = c\} = 1$, where $c > 0$.

Multiple applications show interesting properties of the ALM distributions and their usefulness in modeling of insurance, risk, environmental studies, and recently, in reliability.

References

[1] *Chukova S., Dimitrov B. and Khalil Z.* A characterization of probability distributions similar to the exponential. Canadian Jour. of Statistics, 1993, v. 21, N 3, p. 269–276.

[2] *Dimitrov B. and Khalil Z.*, On a new characterization of the exponential distribution related to a queuing system with an unreliable server, J. Appl Probab. , 1990, v. 27, p. 221–226.

[3] *Dimitrov B. and Khalil Z.*, Some characterizations of the exponential distribution based on the service time properties of an unreliable server, Stability Problems for Stochastic Models (Editors V. V. Kalashnikov, and V. M. Zolotarev). Lecture Notes in Mathematics, 1546, Springer 1993, p. 17–25.

[4] *Dimitrov B., Chukova S. and Khalil Z.*, Definitions, characterizations and structural properties of probability distributions similar to the exponential, J. of Statistical Planning and Inference, 1995, v. 43, N 1, p. 271–287.

[5] *Khalil Z., Dimitrov B., and Dion J.-P.*, A characterization of the geometric distribution related to random sums, Commun. in Statist. Stochastic Models, 1991, v. 7, N 4, p. 726–729.

[6] *Khalil Z. and Dimitrov B.* , The service time properties of unreliable server characterize the exponential distribution. Adv. Appl. Prob. 1994, v. 26 N 1, p. 172–182.

[7] *Van Harn K. and Steutel F.W.*, On a characterization of the exponential distribution. J. Appl. Prob., 1991, v. 28, N 4, p. 947–949.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Multitype branching processes in Markovian random environment[1]

Elena E. Dyakonova[2]

The asymptotics of the survival probability is found and limit theorems for the number of particles are established for the critical multitype Galton-Watson branching process evolving in a random environment generated by a Markov chain with a countable number of states. The results obtained generalize and strength a number of known results established earlier for the critical branching processes (with one or several types of particles) evolving in a random environment generated by a sequence of independent and identically distributed random variables.

Let $\zeta = \{\zeta_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ be an irreducible positive recurrent Markov chain with a countable state space $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k, \ldots\}$. With each $\theta \in \Theta$ we associate a p-dimensional vector $\mathbf{f}^{(\theta)}(\mathbf{s}) = (f_1^{(\theta)}(\mathbf{s}), \ldots, f_p^{(\theta)}(\mathbf{s}))$, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_p) : 0 \le s_i \le 1,\ i = 1, \ldots, p$, of probability generating functions

$$f_i^{(\theta)}(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{t}\in\mathbf{N}_0^p} \mathbf{F}_i^{(\theta)}(\{\mathbf{t}\})\mathbf{s}^{\mathbf{t}}, \qquad \mathbf{t} \in \mathbf{N}_0^p = \{\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_p) : t_i = 0, 1, 2, ...\},$$

corresponding to the p-dimensional probability measures $\mathbf{F}_i^{(\theta)}(\{\mathbf{t}\})$.

Consider a Galton–Watson branching process $\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), \ldots, Z_p(n))$, $n = 1, 2, \ldots$, evolving in the random environment ζ, which describes the evolution of a population with p types of particles where $Z_i(n)$, $i = 1, \ldots, p$, is the number of type i particles in the n-th generation of the process. More precisely, it is assumed that, given $\zeta_n = \theta$, all the $Z_i(n)$ type i particles of the n-th generation reproduce according to the reproduction law generated by the p-dimensional generating function $f_i^{(\theta)}(\mathbf{s})$, independently of the other particles of this generation and of the prehistory of the process. Let

$$M^{(\theta)} = \|M^{(\theta)}(i,j)\|_{i,j=1}^p = \left\| \frac{\partial f_i^{(\theta)}(\mathbf{1})}{\partial s_j} \right\|_{i,j=1}^p$$

be the mean matrix corresponding to the generating vector-function $\mathbf{f}^{(\theta)}(\mathbf{s})$. We assume that the elements of all matrices $M^{(\theta)}$, $\theta \in \Theta$, are positive.

Suppose that the mean matrix $M^{(\theta_1)}$ of the state θ_1 has a particular form:

$$M^{(\theta_1)} = \rho^{(\theta_1)} \|u_i v_j\|_{i,j=1}^p,$$

where $\rho^{(\theta_1)} > 0, v_i > 0, u_i > 0, 1 \le i \le p, \sum_{i=1}^p u_i = 1, \sum_{i=1}^p u_i v_i = 1$. Let the initial state of the Markov chain ζ be $\theta_1 : \zeta_1 = \theta_1$. Denote by η the first return time of the Markov chain ζ to θ_1. Set

$$M_\eta = \prod_{i=1}^{\eta-1} M^{(\zeta_i)}.$$

[1]This work was supported by the RFBR grant N 11-01-00139 and the programm "Dynamic Systems and Control Theory" of RAS.

[2]Steklov Mathematical Institute RAS. E-mail: `elena@mi.ras.ru`

Let ρ be the Perron root of M_η and $\{X_i, i \geq 1\}$ be a sequence of independent random variables with the same distribution as $X = \ln \rho$, and independent of X. Set

$$S_0 = 0, \qquad S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad n \geq 1.$$

Introduce the class $\mathcal{C}_\beta$, $0 < \beta < 1$, of all matrices $A = \|A(i,j)\|_{i,j=1}^p$ with positive elements and such that

$$\beta \leq \frac{A(i_1, j_1)}{A(i_2, j_2)} \leq \beta^{-1}, \qquad 1 \leq i_1, i_2, j_1, j_2 \leq p.$$

We need the following assumptions.

Condition A0. There exists a number $0 < \beta < 1$ such that $M^{(\theta)} \in \mathcal{C}_\beta$ for all $\theta \in \Theta$.

Condition A1. There exists $\delta > 0$ such that $\mathbf{E}\, \eta^{2+\delta} < \infty$.

Condition B1. There exists a number $0 < \alpha < 1$ such that $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 0) = \alpha$.

Let $0 =: \gamma_0 < \gamma_1 < \cdots$ be strictly descending ladder moments of $\{S_n, n \geq 0\}$. Introduce the function

$$V(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_{\gamma_i} \geq -x), x \geq 0; \quad V(x) = 0, x < 0.$$

Let, further,

$$\mathbf{f}^{1,\eta}(\mathbf{s}) = (f_1^{1,\eta}(\mathbf{s}), \ldots, f_p^{1,\eta}(\mathbf{s})) = \mathbf{f}^{(\zeta_1)}(\mathbf{f}^{(\zeta_2)}(\ldots \mathbf{f}^{(\zeta_{\eta-1})}(\mathbf{s}) \ldots)),$$

and let $\mathbf{F}_i^{1,\eta}(\{\mathbf{t}\})$ be the p-dimensional probability measure on $\mathbf{N}_0^p$ corresponding to the generating function $f_1^{1,\eta}(\mathbf{s})$:

$$f_i^{1,\eta}(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{N}_0^p} \mathbf{F}_i^{1,\eta}(\{\mathbf{t}\}) \mathbf{s}^{\mathbf{t}}, \; i = 1, \ldots, p.$$

Set

$$\mathbf{N}_d^p = \{\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_p) : \mathbf{t} \in \mathbf{N}_0^p, \; \max_{1 \leq i \leq p} t_i \geq d\}$$

and introduce the random variable

$$\varkappa(d) = \frac{1}{\rho^2} \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{N}_d^p} \sum_{i,j,k=1}^{p} \mathbf{F}_i^{1,\eta}(\{\mathbf{t}\}) t_j t_k.$$

Condition B2. There exist $\varepsilon > 0$ and $d \geq 0$ such that

$$\mathbf{E}\,(\ln^+ \varkappa(d))^{1/\alpha+\varepsilon} < \infty, \quad \mathbf{E}\,(V(X)(\ln^+ \varkappa(d))^{1+\varepsilon}) < \infty.$$

One of our results looks as follows (see [1] and [2]):

Theorem 1. *If conditions* A0, A1, B1 *and* B2 *are valid then, as* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(Z_1(n) + \cdots + Z_p(n) > 0 \,|\, Z_1(1) + \cdots + Z_p(1) = 1) \sim \frac{l(n)}{n^{1-\alpha}},$$

where α *is from condition* B1 *and* $l(n)$ *is a function slowly varying at infinity.*

References

[1] *Dyakonova E.E.* Multitype Galton-Watson branching processes in Markovian random environment. Theory Probab. Appl., 2011, v. 55, N 3, p. 592–601 (in Russian).

[2] *Dyakonova E.E.* Multitype branching process evolving in Markovian environment. Theory Probab. Appl. (in print).

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Limit theorems for small deviations of iterated processes[1]

Andrei N. Frolov[2]

In this paper we discuss various results on asymptotic behavior of probabilities of small deviations for some iterated stochastic processes.

1 Introduction

Many years significant attention was paid to investigations of an asymptotic behavior of probabilities of small deviations for sums of independent random variables and various classes of stochastic processes. The most important studied classes of stochastic processes are processes with independent increments and Gaussian processes. It is of essential interest to derive new results for other classes of stochastic processes. In this paper, we describe the results for some iterated processes. We only deal with the logarithmic asymptotics of probabilities of small deviations.

Consider two independent stochastic processes $\xi(t)$ and $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, defined on the same probability space. Assume that $\Lambda(t)$ takes non-negative real values. The stochastic process $\xi(\Lambda(t))$, $t \geqslant 0$, is called the iterated process.

In particular, compound Poisson and Cox processes are iterated processes which play an important role in actuarial and financial mathematics as models for claim processes.

First we find a relationship between the asymptotics of probabilities $\mathbf{P}(M(\Lambda(t)) \leqslant y_t)$ and $\mathbf{P}(M(t) \leqslant y_t)$, where $M(t)$ is a stochastic process with positive, non-decreasing trajectories and y_t is a function with $y_t \to \infty$ as $t \to \infty$. Then we put $M(t) = \sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} |\xi(u)|$. This yields the results on the asymptotic behavior of

$$\log \mathbf{P}\Big(\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} |\xi(\Lambda(u))| \leqslant y_t \Big).$$

We also consider examples of $\xi(t)$ from various classes of stochastic processes.

2 Results and applications

Let $M(t), \Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, be independent stochastic processes defined on the same probability space. Assume that, with probability 1, $M(0) = \Lambda(0) = 0$, $M(t) < \infty$ and $\Lambda(t) < \infty$ for all $t > 0$, $M(\infty) = \Lambda(\infty) = \infty$, $M(t)$ has non-decreasing trajectories and $\Lambda(t)$ has non-decreasing continuous trajectories.

[1]This work was partially supported by Federal Program "Scientific and teaching staff of innovative Russia" , project 1.1-111-128-033.

[2]St.Petersburg State University, Faculty of Mathematics and Mechanics. E-mail: `Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru`

Suppose that there exist positive functions $B(t)$ and $\zeta(t)$, $t > 0$, such that $B(t) \to \infty$ and $\zeta(t) \to 0$ as $t \to \infty$, $\limsup\limits_{t\to\infty} B(ct)/B(t) < \infty$ for all $c > 0$, and the relation

$$\log \mathbf{P}\Big(M(t) \leqslant y_t\Big) = -t\zeta(y_t)(1 + o(1)) \quad \text{as} \quad t \to \infty, \tag{1}$$

holds for every positive function y_t with $y_t \to \infty$, $y_t = o(B(t))$ and $t\zeta(y_t) \to \infty$ as $t \to \infty$. Note that $\zeta(t)$ and $B(t)$ are regularly varying functions in many applications.

It may happen that a structure of $M(t)$ yields (1). Nevertheless, we will consider (1) as a form of result on the asymptotics of small deviation probabilities.

Put $\lambda_t = \operatorname{ess\,inf} \Lambda(t)$ and $V_t(\lambda) = \mathbf{P}(\Lambda(t) < \lambda)$.

Our first result is the following theorem.

Theorem 1. *Assume that* $\lambda_t \sim \tilde{\lambda}_t$ *as* $t \to \infty$, *where* $\tilde{\lambda}_t$ *is a continuous, strongly increasing function. Suppose that* $\lambda_t \to \infty$ *as* $t \to \infty$ *and for all* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{t\to\infty} V_t((1+\varepsilon)\lambda_t) > 0. \tag{2}$$

Then

$$\log \mathbf{P}\Big(M(\Lambda(t)) \leqslant y_t\Big) = -\lambda_t\zeta(y_t)(1 + o(1)) \quad \text{as} \quad t \to \infty \tag{3}$$

for every positive function y_t *with* $y_t \to \infty$, $y_t = o(B(\tilde{\lambda}_t))$ *and* $\lambda_t\zeta(y_t) \to \infty$ *as* $t \to \infty$.

The important partial case is $\Lambda(t) = \Lambda f(t)$, where Λ is a non-negative random variable and function $f(t) \to \infty$ as $t \to \infty$. If $\hat{\lambda} = \operatorname{ess\,inf} \Lambda > 0$ then (2) holds and one can replace λ_t by $\hat{\lambda} f(t)$ in (3). If $\hat{\lambda} = 0$ then the asymptotic in (3) may be quite different.

We apply general results for $M(t) = \sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t} |\xi(u)|$, where $\xi(t)$ belongs to various classes of stochastic process. Sum processes, processes with independent increments, compound Cox processes, compound renewal processes and self-similar processes are considered.

References

[1] *Frolov A.N.*, On small deviation probabilities of compound Cox processes. Zapiski Nauchnyh Semin. POMI, 2006, v. 339, p. 163–175. (In Russian)

[2] *Martikainen A.I., Frolov A.N., Steinebach J.*, On small deviation probabilities of compound renewal processes. Teor. Veroyatn. i ee Primen., 2007, v. 52, N. 2, 366–375. (In Russian)

[3] *Aurzada F., Lifshits M.A.*, On the small deviation problem for some iterated processes. Electronic Journal of Probab., 2009, v. 14, p. 1992–2010.

[4] *Lifshits M.A.*, Bibliography of small deviation probabilities. 2010. http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/smalldev/biblio.pdf

[5] *Frolov A.N.*, Limit theorems for small deviation probabilities of some iterated stochastic processes. Zapiski Nauchnyh Semin. POMI, 2011, v. 396, p. 218–232. (In Russian)

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Limit Theorems in Fisher- and Entropic Distance

Friedrich Götze[1]

In the classical Central Limit Theorem the rate convergence in the entropy distance to normal distributions and related asymptotic expansions of this distance are investigated in the entropic and Fisher information distance. Variants of this questions for stable limit theorems are discussed together with the behavior of such distances for convolutions.

This is joint work with G. Chistyakov and S. Bobkov.

Analogous results hold for the Voiculescu free entropy for the n-fold free additive convolution in free probability.

This is joint work with G. Chistyakov.

[1]Bielefeld University, Faculty of Mathematics. E-mail: goetze@math.uni-bielefeld.de

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Second order approximations for slightly trimmed means[1]

Nadezhda Gribkova[2]

The talk is based on the joint work [4] with Roelof Helmers (CWI, Amsterdam, The Netherlands).

Let $X_1, X_2, \dots$ be a sequence of i.i.d. real-valued random variables with common distribution function (*df*) F, and for each integer $n \geq 1$ let $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ denote the order statistics based on the sample $X_1, \dots, X_n$. Let $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$, $0 < u \leq 1$, $F^{-1}(0) = F^{-1}(0^+)$, denote the left-continuous inverse function of F, and F_n, F_n^{-1} — the empirical *df* and its inverse respectively, put $f = F'$ to be a density when it exists.

Let k_n and m_n be sequences of integers such that $0 \leq k_n < n - m_n \leq n$, and $r_n := k_n \wedge m_n \to \infty$, as $n \to \infty$. Put $\alpha_n = k_n/n$, $\beta_n = m_n/n$, and suppose that $\alpha_n \vee \beta_n \to 0$, as $n \to \infty$.

Consider a population slightly trimmed mean (*s.t.m.*) and its sample version given by

$$\mu_n = \int_{\alpha_n}^{1-\beta_n} F^{-1}(s)\, ds, \qquad T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=k_n+1}^{n-m_n} X_{i:n} = \int_{\alpha_n}^{1-\beta_n} F_n^{-1}(s)\, ds.$$

The first order asymptotic properties of *s.t.m.*'s were investigated by Csörgo et al. [1]. In particular, these authors obtained a necessary and sufficient condition for the existence of $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ such that the distribution of the properly normalized slightly trimmed sum $a_n^{-1}(T_n - b_n)$ tends to the standard normal law.

The second order asymptotic properties of trimmed means with fixed truncating percentages were investigated in [2]–[3]: the validity of the one-term Edgeworth expansion for a (Studentized) trimmed mean and bootstrapped trimmed mean were established and simple explicit formulas of the first leading terms of these expansions were found.

In the present work we extend our previous results to the case of *s.t.m.* (i.e. the case when $\alpha_n \vee \beta_n \to 0$).

Let $\xi_\nu = F^{-1}(\nu)$, $0 < \nu < 1$, denote the ν-th quantile of F, and $W_i(n)$, denote X_i Winsorized outside of $(\xi_{\alpha(n)}, \xi_{1-\beta(n)}]$, i.e. $W_i(n) = \xi_{\alpha(n)} \vee (X_i \wedge \xi_{1-\beta(n)})$.

Put $\mu_{W_{(n)}} = \mathbf{E} W_i(n)$, $\sigma^2_{W_{(n)}} = \mathbf{D}(W_i(n))$ and define the *df* of the normalized T_n:

$$F_{T_n}(x) = \mathbf{P}\left(\sigma^{-1}_{W_{(n)}} n^{1/2} \Big(T_n - \mu_n \Big) \leq x \right).$$

Define two sequences

$$\gamma_{3,W_{(n)}} = \mathbf{E}(W_i(n) - \mu_{W_{(n)}})^3, \qquad \delta_{2,W_{(n)}} = -\alpha_n^2 \frac{\left(\mu_{W_{(n)}} - \xi_{\alpha_n}\right)^2}{f(\xi_{\alpha_n})} + \beta_n^2 \frac{\left(\mu_{W_{(n)}} - \xi_{1-\beta_n}\right)^2}{f(\xi_{1-\beta_n})}.$$

Also introduce

$$\lambda_{1_{(n)}} = \frac{\gamma_{3,W_{(n)}}}{\sigma^3_{W_{(n)}}}, \qquad \lambda_{2_{(n)}} = \frac{\delta_{2,W_{(n)}}}{\sigma^3_{W_{(n)}}},$$

[1]The work is partially supported by RFBR grant, project SS-1216.2012.1.
[2]St.-Petersburg State University, Mathematics and Mechanics Faculty. E-mail: nv.gribkova@gmail.com

and for any real x define

$$G_n(x) = \Phi(x) - \frac{\phi(x)}{6\sqrt{n}}\Big(\big(\lambda_{1_{(n)}} + 3\lambda_{2_{(n)}}\big)(x^2-1) + 6\sqrt{n}\frac{b_n}{\sigma_{W_{(n)}}}\Big), \tag{1}$$

where Φ is standard normal df, $\phi = \Phi'$, $b_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(-\frac{\alpha_n(1-\alpha_n)}{f(\xi_{\alpha_n})} + \frac{\beta_n(1-\beta_n)}{f(\xi_{1-\beta_n})}\right)$, b_n is a bias term (cf. [2]–[4]).

Let RV_ρ^∞ be a class of nonnegative regularly varying in the infinity functions: $g \in RV_\rho^\infty \Leftrightarrow g(x) = |x|^\rho L(|x|)$, for $|x| > x_0$, with some $x_0 > 0$, $\rho \in R$, and $L(x)$ is a positive slowly varying function at infinity.

Suppose that $\limsup_{n\to\infty} \frac{n^s}{k_n \wedge m_n} < \infty$ for some $0 < s < 1$.

Here is our main result on asymptotic approximation of the Edgeworth type to a *s.t.m.* for 'heavy' tailed F.

Theorem 1. *Suppose that $f \in RV_\rho^\infty$, where $\rho = -(1+\gamma)$, $0 < \gamma < 2$, and assume that*

$$|f(x+\triangle x) - f(x)| = O\Big(f(x)\,\Big|\,\frac{\triangle x}{x}\,\Big|\Big),$$

whenever $\triangle x = o(|x|)$, as $|x| \to \infty$.

Then

$$\sup_{x\in R}|F_{T_n}(x) - G_n(x)| = O\left(\frac{(\log k_n)^{5/4}}{k_n^{3/4}} + \frac{(\log m_n)^{5/4}}{m_n^{3/4}}\right), \quad n \to \infty\,. \tag{2}$$

Furthermore, in absence of symmetry (which is specified in [4] exactly)

$$|G_n(x) - \Phi(x)| \asymp k_n^{-1/2} + m_n^{-1/2}, \quad as \;\; n \to \infty, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

In [4] we establish also the Berry–Esseen type results and derive optimal bounds of the order $O\big(r_n^{-1/2}\big)$ for the normal approximation to T_n. The optimality of the latter bound (in case of 'heavy' tailed F, i.e. when $\mathbf{E}X_1^2 = \infty$) follows directly from relation (3).

Our method of proof is based on a stochastic approximation of a *s.t.m.* by a U-statistic of degree two with a kernel depending on n. We use also some special Bahadur–Kiefer type representations (cf. [4]–[5]).

A version of Theorem 1 for a Studentized *s.t.m.* is also established in [4].

References

[1] *Csörgő S., Haeusler E., Mason D.M.*, The asymptotic distribution of trimmed sums. Ann. Probab., 1988, v. 16, p. 672–699.

[2] *Gribkova N.V., Helmers R.*, The empirical Edgeworth expansion for a Studentized trimmed mean. Math. Methods Statist., 2006, v. 15, p. 61–87.

[3] *Gribkova N.V., Helmers R.*, On the Edgeworth expansion and the M out of N bootstrap accuracy for a Studentized trimmed mean. Math. Methods Statist., 2007, v. 16, p. 142–176.

[4] *Gribkova N.V., Helmers R.*, Second order approximations for slightly trimmed sums, Theory Probab. Appl., 2012, v. 57, (to appear); e-print: arXiv:1104.3347v1 [math.PR].

[5] *Gribkova N.V., Helmers R.*, On the Bahadur – Kiefer representation for intermediate sample quantiles. *(submitted paper)*; e-print: arXiv:1106.2260v1 [math.PR].

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

On limits of equilibrium distributions induced by finite submatrices of infinite nonnegative matrices[1]

Boris M. Gurevich[2]

A problem from Thermodynamic Formalism for countable state symbolic Markov chains is considered.

With every irreducible nonnegative matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ one can associate a stochastic matrix $P(A) = (p_{i,j})_{i,j=1}^n$ defined as follows. Let $\lambda = \lambda(A)$ be the maximal eigenvalue (Perron number) of A and let $u(A) = (u_1, \dots, u_n)$ be the corresponding positive eigenvector (defined uniquely up to a positive factor); then $p_{i,j} = u_j/\lambda u_i$, $1 \leq i, j \leq n$. Since $P(A)$ is irreducible along with A, the corresponding Markov chain has the unique stationary distribution $\pi(A)$. By $\pi(A)$ and $P(A)$ one can construct the Markov measure μ_A on the sequence space

$$X(A) = \{(x_i,\, i \in \mathbb{Z}) : a_{x_i,x_{i+1}} > 0\}.$$

This measure is invariant under the shift transformation S on $X(A)$ and can be called the A-equilibrium measure (or the A-equilibrium distribution), because it maximizes a functional $\mathcal{P}_A$ (related to Statistical Physics) that is defined on the set of S-invariant probability measures (see, for example, [1]). The measure μ_A was first considered by W. Parry [2] for $0,1$-matrices, in which case $\mathcal{P}_A(\mu)$ is the entropy of S with respect to the invariant measure μ. Note that in the general case $\mathcal{P}_A(\mu_A) = \log \lambda(A)$.

Now assume that A is an infinite nonnegative matrix and A_n is its $n\times n$-submatrix occupying the north-west corner of A. Even if A is irreducible (which will be assumed below), A_n can be reducible for all n. However if n is large enough there exists an irreducible submatrix A'_n of A_n (not necessarily unique) such that $\lambda(A'_n) = \lambda(A_n)$ and hence $\mathcal{P}_{A'_n}(\mu_{A'_n}) = \log \lambda(A_n)$. This brings up the natural question: what is the asymptotic behavior of the equilibrium measures $\mu_{A'_n}$ as $n \to \infty$? (All these measures can be viewed as defined on $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$.)

It seems likely that the first to consider this question was M.I. Malkin [3], who also dealt with infinite $0,1$-matrices. He stated two conditions under which taken together a submatrix A'_n with $\lambda(A'_n) = \lambda(A_n)$ is unique for each n and the measure $\mu_{A'_n}$ weakly converges to the equilibrium measure μ_A defined for the infinite matrix A exactly in the same way as it was done above for a finite matrix; here $\lambda(A)$ is defined as $\sup \lambda(A')$ over all finite submatrices A' of A. Note that for an infinite A, an equilibrium measure not necessarily exists (while is always unique), since the corresponding Markov chain can have no stationary (probability) distribution.

The first of Malkin's conditions is $\lim_{n\to\infty} \lambda(\hat{A}_n) < \lambda(A)$, where $\hat{A}_n$ is the infinite submatrix of A formed by rows an columns numbered $n+1, n+2, \dots$ (the south-east corner of A). The

[1]This work is partially supported by RFBR grant N 11-01-00982.

[2]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: gurevich@mech.math.msu.su

second condition is not so explicit; it is stated in terms of the Artin-Masur dynamical zeta-function [4] related to periodic points of the transformation S on the subsets $X(\hat{A}_n) \subset X(A)$. It would be desirable to eliminate this second condition while not losing the result. Simple examples show that this condition can not be just omitted. It turns out, however, that the first condition can be modified a little so that the conclusion will remain true with no other conditions.

By the matrix A we construct the directed graph $G(A)$ with vertex set $V = \mathbb{N}$ and edge set $E = \{(i,j) \in V \times V : a_{i,j} > 0\}$. If $(i,j) \in E$, i.e. it is an edge of $G(A)$, we say that $a_{i,j}$ is its weight; if $\gamma = (i_0, \dots, i_k)$ is a path of length k in $G(A)$, we say that the product $a_{i_0,i_1}, \dots, a_{i_{k-1},i_k}$ is the weight of γ. Let $i, j \le n$ and let $w_k^{(n)}(i,j)$ be the weight sum over all paths γ of length k in $G(A)$ starting at i, ending at j and such that only these two vertices of γ belong to A_n.

Introduce the generating function

$$\varphi_{i,j}^{(n)}(z) = \sum_{k=2}^{\infty} w_k^{(n)}(i,j) z^k$$

and denote the radius of convergence of this power series by $R_n(i,j)$. Note that if A_n is irreducible, then the radius of convergence of the similar power series related to paths in $G(A_n)$ is $1/\lambda(A_n)$.

Theorem 1. *Let A be an irreducible infinite nonnegative matrix with $\lambda(A) < \infty$. Assume that there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $\min_{1 \le i,j \le n} R_n(i,j) > 1/\lambda(A)$. Then there exists an A-equilibrium measure μ_A and every sequence $\mu_{A'_n}$ weakly converges to μ_A.*

A somewhat different approach to the problem considered here was suggested in [5] and [6].

References

[1] *Alekseev V. M., Yakobson, M. V.*, Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems. Phys. Rep. 1981, v. 75, N 5, p. 287–325.

[2] *Parry W.*, Intrinsic Markov chains. Trans. Amer. Math. Soc., 1964, v. 112, N 1, p. 55–66.

[3] *Malkin M.I.*, Countable topological Markov chains with meromorphic zeta-functions. Random and Computational Dynamics, 1994, v. 2, p. 247–259.

[4] *Artin M., Mazur B.*, On periodic points. Ann. Math., 1965, v. 81, p. 82–99.

[5] *Gurevich B.M.*, Finite approximations of infinite nonnegative matrices and the convergence of equilibrium distributions (Russian). Dokl. Akad. Nauk, 1996, v. 347, N 6, p. 732–735.

[6] *Gurevich B.M., Savchenko S.V.*, Thermodynamic formalism for symbolic Markov chains with a countable number of states (Russian). Uspekhi Mat. Nauk, 1998, v. 53, N 2, p. 3–106; translation in Russian Math. Surveys, 1998, v. 53, N 2, p. 245–344.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

The Markov Q-process as a special class of branching process allowing immigration

Azam A. Imomov[1]

We discuss some properties of the Markov Q-process.

1 Introduction

The Q-process may be interpreted as branching process allowing immigration but unlike classical one herewith an immigration stream fully hang on internal process (see [2]). So, in a sense Q-processes are generalization of branching processes with state-dependent immigration.

Markov Q-process (MQP) as continuous time analogue of Q-process is originally defined in paper of the author [3]. This paper considers some properties of the MQP; see [1, 3].

Let $Z(t),\ t \geq 0$, denote a population size at time t in the continuous time homogeneous Markov branching process with initial state $Z(0) = 1$ and transition probabilities

$$P_{ij}(t) = \mathbf{P}\left\{Z(t+\tau) = j \mid Z(\tau) = i\right\}, \quad \tau \geq 0, \quad i, j \in \mathbf{N}_0,$$

where $\mathbf{N}_0 = \{0\} \cup \mathbf{N}$ ($\mathbf{N} = 1, 2, \ \dots$). The probabilities $P_{1j}(t)$, in turn, are set by relation

$$P_{1j}(\varepsilon) = \delta_{1j} + a_j\varepsilon + o\left(\varepsilon\right), \quad \varepsilon \to 0, \tag{1}$$

where δ_{ij} is the Kronecker's delta; probability densities $\{a_j,\ j \in \mathbf{N}_0\}$ are such that $a_j \geq 0$ for $j \neq 1$, $0 < a_0 < -a_1$ and $\sum_{j\in\mathbf{N}_0} a_j = 0$; see [4, pp.24-26]. Put generating functions (GFs) $f(x) := \sum_{j\in\mathbf{N}_0} a_j x^j$ and $\Phi(t;x) := \sum_{j\in\mathbf{N}_0} P_{1j}(t)x^j$. Let $a := f'(1)$ and $f''(1) < \infty$.

The MQP $\{W(t),\ t \geq 0\}$ is homogeneous Markov process with transition matrix

$$\mathbf{P}\left\{W(t+\tau) = j \mid W(\tau) = i\right\} = \frac{jq^{j-i}}{i\beta^t}P_{ij}(t) =: Q_{ij}(t),$$

where $\beta = \exp\left\{f'(q)\right\}$ and $q =$ smallest root of $f(x) = 0$ in $x \in (0;1]$; see [3].

2 Basic results

We see that for studying of states change of MQP it is enough to set probabilities $Q_{1j}\left(t\right)$. Using relation (1), we find out that

$$Q_{1j}\left(\varepsilon\right) = \delta_{1j} + q_j\varepsilon + o\left(\varepsilon\right), \quad \varepsilon \to 0,$$

where $q_0 = 0$, $\ q_1 = a_1 - f'(q) < 0$; $\ q_j = jq^{j-1}a_j \geq 0$, $\ j \in \mathbf{N}\backslash\left\{1\right\}$.

[1]Institute Mathematics & Information Technologies of Uzbek Academy Sciences, Karshi State University; Uzbekistan. E-mail: imomov_azam@mail.ru

Let $G_i(t;x) := \sum_{j\in\mathrm{N}} Q_{ij}(t)x^j$ and $g(x) := \sum_{j\in\mathrm{N}} q_j x^j$. We easily see $g(x) = x\left[f'(qx) - f'(q)\right]$. Throughout assume $b := \sum_{k\in\mathbf{N}} kq_k = g'(1)$ is finite. The GF $G_i(t;x)$ looks like

$$G_i(t;x) = x\left[\frac{\Phi(t;qx)}{q}\right]^{i-1} \exp\left\{\int_0^t b\left(\frac{\Phi(\tau;qx)}{q}\right)d\tau\right\}, \tag{2}$$

where $b(x) = g(x)/x$.

We discuss asymptotic properties of MQP. These depend on parameter a. In the case $a = 0$, we see $W(t) \to \infty$ with probability 1. But we have the following theorem.

Theorem 1. *Let $a = 0$. Then for all $x > 0$*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{W(t)}{\mathbf{E}W(t)} \le x\right\} \to 1 - e^{-2x} - 2xe^{-2x}, \quad t \to \infty.$$

In the case $a \neq 0$ we obtain following theorems.

Theorem 2. *Let $a \neq 0$. Then the variable $W(t)$ tends in mean square and with probability one to the random variable W having finite mean and finite variance:*

$$\mathbf{E}W = 1 + \gamma, \qquad \mathbf{Var}W = \gamma,$$

where $\gamma := qf''(q)/|f'(q)|$.

Theorem 3. *Let $a \neq 0$. Then $G_i(t;x) = U(x)\left(1 + o(1)\right)$ as $t \to \infty$, where*

$$U(x) = \frac{q|f'(q)|}{f(qx)} x(1-x)\exp\left\{\int_{qx}^q \left[\frac{1}{s-q} - \frac{f'(q)}{f(s)}\right]ds\right\}.$$

The limiting GF $U(x) = \sum_{k\in\mathbf{N}} u_k x^k$ forms the stationary distribution and

$$Q_{ij}(t) = u_j\left(1 + o(1)\right), \quad t \to \infty.$$

Acknowledgments. The author is grateful to Prof. A.N.Startsev for his valuable suggestions.

References

[1] *Imomov A.A.*, A differential analog of the main lemma of the theory of Markov branching processes and its applications. Ukrainian Math. Journal, 2005, v. 57, N 2, p. 307–315.

[2] *Imomov A.A.*, Q-processes as the Galton-Watson Branching Processes with Immigration. In Proceedings of IX FAMET Conference: Financial and Actuarial Mathemetics and Eventoconvergence of Technology, 2010, p. 148–152. (in Russian)

[3] *Imomov A.A.*, On Markov analogue of Q-processes with continuos time. Theory of Probab. and Math. Statistics, 2011, N 84, p. 58–64.

[4] *Sevastyanov B.A.*, Branching Processes. Nauka, Moscow, 1971. (in Russian)

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Finite approximation of random graphs[1]

Vadim A. Kaimanovich[2]

We prove that stochastically homogeneous random graphs can be approximated by finite graphs under the condition that the corresponding equivalence relation is amenable.

1 Introduction

Invariant measures play a fundamental role in probability, theory of dynamical systems and ergodic theory. Although usually invariance is defined with respect to a single transformation or a (semi-)group of transformations, one can also talk about it in more general situations. Feldman and Moore [5], exploring the idea that numerous properties of measure class preserving group actions can actually be expressed just in terms of the associated orbit equivalence relation, developed a theory of measures (quasi-)*invariant with respect to a countable equivalence relation*. Although they did not consider any additional leafwise graph structures, at about the same time Plante [8] essentially introduced graphed equivalence relations (in terms of finitely generated holonomy pseudogroups) in the topological context of foliations. It was only in 1990 that Adams [1] defined a *graphed equivalence relation* in the purely measure-theoretical setup. Later this notion was used by the first author [6] in order to clarify the relationship between amenability of an equivalence relation and amenability of its leafwise graphs.

A graphed equivalence relation on a probability space naturally gives rise to a map from this space to the space of rooted graphs $\mathcal{G}$ (i.e., a *random rooted graph*). It assigns to any point from the state space its leafwise graph with this very point as the distinguished vertex. *Stochastic homogenization* [7] of a certain family of infinite graphs consists in finding a probability measure invariant with respect to an equivalence relation whose classes are endowed with graph structures from this family. The role of such a measure is then similar to the role of an invariant measure for a usual dynamical system.

The space of rooted graphs itself has a natural "root moving" equivalence relation $\mathcal{R}$: two rooted graphs are equivalent if they are isomorphic as unrooted graphs. This equivalence relation is endowed with an intrinsic graph structure: two equivalent rooted graphs are neighbours if their roots are neighbours in the common graph Γ. Moreover, if Γ is *rigid*, i.e., its isometry group is trivial, then the graph on its equivalence class is precisely Γ itself. Denote by $\mathcal{G}_{\not\circlearrowright} \subset \mathcal{G}$ the space of rooted rigid graphs. For rigid graphs the problem of stochastic homogenization reduces to finding an invariant probability measure on the corresponding subspace of $\mathcal{G}_{\not\circlearrowright}$.

The *unimodularity* condition for measures on $\mathcal{G}$ introduced by probabilists [3, 2] is closely related to invariance. Although these two conditions may differ if the underlying graphs are not rigid, they do coincide for measures concentrated on $\mathcal{G}_{\not\circlearrowright}$.

[1]Partially supported by funding from the Canada Research Chairs program.

[2]University of Ottawa, Department of Mathematics and Statistics. E-mail: `vkaimano@uottawa.ca`, `vadim.kaimanovich@gmail.com`

2 The result

Benjamini and Schramm [3] noticed that any weak limit of uniform measures on a sequence of finite graphs is necessarily a unimodular measure. Which unimodular measures admit a *finite approximation* of this kind? This problem is closely related with the notion of *soficity* [9]. Namely, a group is sofic if and only if the delta measure on its Cayley graph is finitely approximated.

Theorem 1. *If the equivalence relation* $(\mathcal{G}_{\not\circlearrowright}, \mathcal{R})$ *is amenable with respect to an invariant measure* m*, then the measure* m *is finitely approximated.*

This statement is a counterpart of the classical fact that amenable groups are sofic and in principle could be deduced from the general theory of sofic equivalence relations developed by Elek and Lippner [4]. However, we give a direct proof based on comparing the above approximation property with the approximation provided by the *martingale convergence theorem* for an increasing sequence of finite partitions of $\mathcal{G}_{\not\circlearrowright}$ convergent to $\mathcal{R}$ (existence of such a sequence follows from equivalence of amenability and hyperfiniteness for measured equivalence relations). This is the first use of the martingale theorem in this context.

References

[1] *Adams S.,* Trees and amenable equivalence relations, Ergodic Theory Dynam. Systems, 1990, v. 10, N 1, p.1–14.

[2] *Aldous D., Lyons R.,* Processes on unimodular random networks, Electron. J. Probab., 2007, v.12, N 54, p. 1454–1508 (electronic).

[3] *Benjamini I., Schramm O.,* Recurrence of distributional limits of finite planar graphs, Electron. J. Probab. 2001, v. 6, N 23, 13 pp. (electronic).

[4] *Elek G., Lippner G.,* Sofic equivalence relations, J. Funct. Anal., 2010, v. 258, N 5, p. 1692–1708.

[5] *Feldman J., Moore C.C.,* Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I, Trans. Amer. Math. Soc. 1977, v. 234, N 2, p. 289–324.

[6] *Kaimanovich V.A.,* Amenability, hyperfiniteness, and isoperimetric inequalities, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1997, v. 325, N 9, p. 999–1004.

[7] *Kaimanovich V.A.,* Random walks on Sierpiński graphs: hyperbolicity and stochastic homogenization, Fractals in Graz 2001, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2003, p. 145–183.

[8] *Plante J. F.,* Foliations with measure preserving holonomy, Ann. of Math. 1975, v. 102, N 2, p. 327–361.

[9] *Weiss B.,* Sofic groups and dynamical systems, Sankhyā Ser. A 2000, v. 62, N 3, p. 350–359, Ergodic theory and harmonic analysis (Mumbai, 1999).

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Theorems on large deviations for the sums of a random number of summands

Aurelija Kasparavičiūtė [1], Leonas Saulis [2]

We present our results on large deviation theorems for the sums of a random number of summands.

1 Introduction

Large deviation theory is still being rapidly developed, because of problems in various areas of mathematics which require development of large deviation theory. The theory of large deviations for the sums offers interesting problems when the number of summands is itself a random variable (r.v.'s).

By

$$Z_N = \sum_{j=1}^{N} a_j X_j, \qquad Z_0 = 0, \tag{1}$$

we denote a sum of a random number of summands. Here $\{X, X_j, j \geq 1\}$ is a family of independent identically distributed random variables (r.v.'s) with variance $\mathbf{D}X = \sigma^2 > 0$, mean $\mathbf{E}X = \mu < \infty$ and with a distribution function $F_X(x) = \mathbf{P}(X < x)$, for all $x \in \mathbb{R}$. In this scheme of summation we have to consider two cases: $\mu \neq 0$ and $\mu = 0$. In addition, it is assumed that $0 \leq a_j < \infty$, and a non-negative integer-valued r.v. N with mean $\mathbf{E}N = \alpha$ variance $\mathbf{D}N = \beta^2$ and a distribution $\mathbf{P}(N = l) = p_l$, $l \in \mathbb{N}_0$ is independent of X_j.

Denote $T_{N,r} = \sum_{j=1}^{N} a_j^r$, $T_{l,r} = \sum_{j=1}^{l} a_j^r$, $r, l \in \mathbb{N}_0$, we assume $T_{0,r} = 0$, $r = 1, 2, \ldots$, and $0^0 = 1$. It is clear, $\mathbf{E}T_{N,r} = \sum_{l=0}^{\infty} T_{l,r} p_l$, $\mathbf{D}T_{N,r} = \mathbf{E}T_{N,r}^2 - (\mathbf{E}T_{N,r})^2$.

We restrict our attention to the research of the upper estimates of the normal approximation to the sum $\tilde{Z}_N = (Z_N - \mathbf{E}Z_N)/(\mathbf{D}Z_N)^{1/2}$, large deviation theorems both in the Cramer and power Linnik zones and exponential inequalities for a tail probability $\bar{F}_{\tilde{Z}_N}(x) = \mathbf{P}(\tilde{Z}_N \geq x)$, under some assumptions for the r.v.'s X, $T_{N,1}$, $T_{N,2}$ kth order moments and cumulants. In particular, we say that the r.v. X with $\sigma^2 > 0$ satisfies condition (B_γ) if there exist constants $\gamma \geq 0$ and $K > 0$ such that

$$|\mathbf{E}X^k| \leq (k!)^{1+\gamma} K^{k-2} \mathbf{E}X^2, \qquad k = 3, 4, \ldots. \tag{B_γ}$$

Furthermore, we suppose that the r.v.'s $T_{N,1}$, $T_{N,2}$ satisfy conditions (L) and (L_0), respectively, if there exist constants $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ and $p \geq 0$ such that

$$|\mathit{\Gamma}_k(T_{N,1})| \leq \frac{1}{2} k! K_1^{k-2} (\mathbf{D}T_{N,1})^{1+(k-2)p}, \qquad k = 2, 3, \ldots, \tag{L}$$

and

$$|\mathit{\Gamma}_k(T_{N,2})| \leq k! K_2^{k-1} (\mathbf{E}T_{N,2})^{1+(k-1)p}, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{L_0}$$

[1] Vilnius Gediminas Technical University, Faculty of Fundamental Sciences. E-mail: aurelija.kasparaviciute@vgtu.lt

[2] Vilnius Gediminas Technical University, Faculty of Fundamental Sciences. E-mail: lsaulis@fm.vgtu.lt

The first condition we use if $\mu \neq 0$, and the second one if $\mu = 0$.

The discount version of large deviations and the version when $a_j \equiv 1,\ j = 1, 2, ...$ were considered, besides examples in the case N has concrete probability laws: Poisson, Bernoulli, negative binomial were obtained as well.

Undoubtedly there are a large amount of literature on theorems of large deviations for the sum of a random number of summands under different assumptions and with various applications, however in our knowledge, there are only a few papers on large deviations in case the cumulant method is used, for instance, we refer the reader to the paper [4].

2 The upper estimate for the kth order cumulants

It should be noted, that for achieving the purpose of the paper, we used the cumulants method offered by V.Statulevičius (1966) and developed by R.Rudzkis, L.Saulis and V.Statulevičius (1978).

Since we are interested not only in the convergence to the normal distribution but also in a more accurate asymptotic analysis of the distribution, at first we must find the accurate upper estimate for the kth order cumulants $\mathit{\Gamma}_k(\tilde{Z}_N)$, $k = 3, 4, ...$
Denote $a = \sup\{a_j, j = 1, 2, ...\} < \infty$, $(b \vee c) = \max\{b, c\},\ b,\ c \in \mathbb{R}$. Lemma 1 below presents the accurate upper estimate for $\mathit{\Gamma}_k(\tilde{Z}_N)$ in two cases: $\mu = 0$ and $\mu \neq 0$.

Lemma 1. *If for the r.v. X with variance $\sigma^2 > 0$, condition (B_γ) is fulfilled and the r.v. $T_{N,1}$, $T_{N,2}$, satisfy conditions (L), (L_0), respectively, then*

$$|\mathit{\Gamma}_k(\tilde{Z}_N)| \leq (k!)^{1+\gamma}/\mathit{\Delta}_*^{k-2}, \qquad k = 3, 4, ..., \tag{2}$$

where

$$\mathit{\Delta}_* = \begin{cases} \mathit{\Delta}_N, & \text{if } \mu \neq 0, \\ \mathit{\Delta}_{N,0}, & \text{if } \mu = 0. \end{cases}$$

Here

$$\mathit{\Delta}_N = L_N^{-1}\sqrt{\mathbf{D}Z_N}, \quad L_N = 2\big(K_1|\mu|(\mathbf{D}T_{N,1})^p \vee (1 \vee \sigma/(2|\mu|))aM\big),$$

where $\mathbf{D}Z_N = \sigma^2\mathbf{E}T_{N,2} + \mu^2\mathbf{D}T_{N,1}$, $M = 2(\sigma \vee K)$.

$$\mathit{\Delta}_{N,0} = L_{N,0}^{-1}\sqrt{\mathbf{D}Z_N}, \quad L_{N,0} = 2aM\big(1 \vee K_2(\mathbf{E}T_{N,2})^p/(4a^2)\big),$$

where $\mathbf{D}Z_N = \sigma^2\mathbf{E}T_{N,2}$, and constants K_1, K_2, p are defined by conditions (L), (L_0).

In accordance with the general lemmas on large deviations (see [3]) and estimate (2), we proved large deviation theorems both in the Cramer and power Linnik zones.

References

[1] *Statulevičius. V.*, On large deviations. Z. Wahrsch. Verw. Geb., 1966, v. 6, p. 133–144.

[2] *Rudzkis. R, Saulis L., Statulevičius. V.*, A general lemma of large deviations. Lith. Math. J., 1978, v. 18, N 2, p. 99–116.

[3] *Saulis. L., Statulevičius. V.*, Limit Theorems for Large Deviations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1991.

[4] *Kasparavičiūtė. A., Saulis. L.*, Theorems on large deviations for randomly indexed sum of weighted random variables. Acta Appl. Math., 2011, v. 116, N 3, p. 255–267.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Approximation in probability of tensor product-type random fields of increasing parametric dimension [1]

Alexey A. Khartov[2]

In the paper we provide some results on the approximation of Gaussian tensor product-type random fields.

Consider a sequence of Gaussian tensor product-type random fields X_d, $d \in \mathbb{N}$, given by

$$X_d(t) = \sum_{k\in\widetilde{\mathbb{N}}^d} \prod_{l=1}^{d} \lambda_{k_l}^{1/2}\, \xi_k \prod_{l=1}^{d} \psi_{k_l}(t_l), \quad t \in [0,1]^d, \tag{1}$$

where $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ and $(\psi_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ are all positive eigenvalues and eigenfunctions of covariance operator of process X_1, $(\xi_k)_{k\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ are standard Gaussian random variables, and $\widetilde{\mathbb{N}}$ is a subset of natural numbers. The eigenvalues $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ satisfy the assumption $\Lambda := \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \lambda_i < \infty$. For any $d \in \mathbb{N}$ sample paths of X_d almost surely belong to $L_2([0,1]^d)$ supplied with a norm $\|\cdot\|_{2,d}$.

Recall that, for example, Wiener-Chentsov's Brownian sheet and Brownian pillow admit such a representation.

The numbers $\prod_{l=1}^{d} \lambda_{k_l}$, $k \in \widetilde{\mathbb{N}}^d$, are eigenvalues of the covariance operator of X_d. We approximate X_d, $d \in \mathbb{N}$, with finite sum of series (1) corresponding to n maximal eigenvalues. Let us denote this sum by $X_d^{(n)}$. It is well known (see [6]) that $X_d^{(n)}$ provides the minimal average quadratic error among all linear approximations to X_d having rank n.

The *average approximation complexity* (see [3]-[5])

$$n_d^{avg}(\varepsilon) := \min\Big\{ n \in \mathbb{N} : \mathbf{E}\, \|X_d - X_d^{(n)}\|_{2,d}^2 \leqslant \varepsilon^2\, \mathbf{E}\, \|X_d\|_{2,d}^2 \Big\} \tag{2}$$

was investigated in [2] and [1].

Consider the *probabilistic approximation complexity*

$$n_d^{pr}(\varepsilon,\delta) := \min\Big\{ n \in \mathbb{N} : \mathbf{P}\left(\|X_d - X_d^{(n)}\|_{2,d}^2 > \varepsilon^2\, \mathbf{E}\, \|X_d\|_{2,d}^2 \right) \leqslant \delta \Big\}. \tag{3}$$

In the paper [2], the logarithmic asymptotic behaviour of $n_d^{pr}(\varepsilon,\delta)$ is obtained for any fixed ε as $d \to \infty$. In the same assumptions as in [2], we investigate its exact asymptotics.

The asymptotic properties of (2) and (3) can be properly understood in the language of a simple auxiliary probabilistic distribution

$$\mathbf{P}(U = -\ln \lambda_i) = \kappa(\lambda_i) \cdot \frac{\lambda_i}{\Lambda}, \quad i \in \widetilde{\mathbb{N}},$$

[1]This work was supported by the Program “Leading Scientific Schools” (project 1216.2012.1).
[2]St.Petersburg State University, Department of Mathematics and Mechanics.
E-mail: AlexeyKhartov@gmail.com

where $\kappa(\lambda_i) = \#\{j \in \widetilde{\mathbb{N}} : \lambda_j = \lambda_i\}$ is the multiplicity of λ_i.

We assume that the following characteristics of U exist

$$\begin{aligned} E &:= \mathbf{E}\, U = \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} (-\ln \lambda_i)\, \frac{\lambda_i}{\Lambda}, \\ \sigma^2 &:= \mathbf{Var}\, U = \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} (-\ln \lambda_i - E)^2\, \frac{\lambda_i}{\Lambda}. \end{aligned}$$

Let q_ε denote the quantile defined by $\Phi(q_\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2$, where Φ is the standard Gaussian distribution function.

Theorem 1. *Suppose $\sigma^2 > 0$ and $\mathbf{E}|U|^3 < \infty$. For any $\varepsilon \in (0,1)$ and $\delta_d \in (0,1)$ such that*

$$\lim_{d\to\infty} \frac{-\ln(\min\{\delta_d, 1-\delta_d\})}{d^{-1/2}(\Lambda e^E)^d\, e^{q_\varepsilon \sigma d^{1/2}}} = 0, \tag{4}$$

we have

$$\lim_{d\to\infty} \frac{n_d^{pr}(\varepsilon, \delta_d)}{n_d^{avg}(\varepsilon)} = 1.$$

Remark 1. If $\sigma^2 > 0$, then $\Lambda e^E > 1$ (see [2]). Therefore the assumption (4) is extremely mild.

References

[1] *Khartov A.A*, Average approximation of tensor-product type random fields of increasing dimension. Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI, 2011, v. 396, p. 233–256 (in Russian); J. Math. Sci., 2012, (in English), to appear.

[2] *Lifshits M.A., Tulyakova E.V.*, Curse of dimentionality in approximation of random fields. Probab. Math. Stat., 2006, v. 26, N 1, p. 97–112.

[3] *Novak E., Wózniakowski H.*, Tractability of Multivariate Problems. Volume I: Linear Information. EMS Tracts Math. 6, European Math. Soc. Pub. House, Zürich, 2008.

[4] *Novak E., Wózniakowski H.*, Tractability of Multivariate Problems. Volume II: Standard Information for Functionals. EMS Tracts Math. 12, European Math. Soc. Pub. House, Zürich, 2010.

[5] *Novak E., Sloan I.H., Traub J.F., Wózniakowski H.*, Essays on the Complexity of Continuous Problems. European Math. Soc. Pub. House, Zürich, 2009.

[6] *Ritter K.*, Average-case Analysis of Numerical Problems, Lecture Notes in Math. No 1733, Springer, Berlin, 2000.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Analog of Gnedenko problem for stochastic processes[1]

Yury S. Khokhlov[2]

In the paper we discuss some extension of the class of selfsimilar processes.

1 Introduction

Let $(X_n, n \geq 1)$ be a sequence of independent random variables (r.v.). Consider the sums $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ and normalized sums

$$S_n^* = A_n^{-1}(S_n - B_n), \tag{1}$$

where $A_n > 0$ and $B_n \in R^1$ are some constants. Let $\mathcal{L}(Y)$ denote the distribution of r.v. Y. Assume that the following convergence

$$\mathcal{L}(S_n^*) \Rightarrow \mu \ , \ n \to \infty, \tag{2}$$

holds.

It is well known that in the case of independent and identically distributed random variables we get so called stable limit distribution.

Lamperti ([1]) has investigated more general situation. Let $(X(t), t \geq 0)$ be some stochastic process, $A(\lambda), \lambda \geq 0$, be some real function such that $A(\lambda) > 0$, $A(\lambda) \nearrow \infty$, $\lambda \nearrow \infty$.

Let the following convergence

$$\frac{X(\lambda \cdot t)}{A(\lambda)} \Rightarrow Y(t) \ , \ \lambda \to \infty \ , \tag{3}$$

holds. Lamperti ([1]) has proved that any limit process $Y = (Y(t), t \geq 0)$ in (3) is selfsimilar.

Stochastic process $Y = (Y(t), t \geq 0)$ is said to be **self-similar** (ss) if for some $H \in R^1$ and all $c > 0$

$$(Y(ct), t \geq 0) \stackrel{d}{=} (c^H Y(t), t \geq 0) \ . \tag{4}$$

The number H is said to be the **Hurst parameter** of this ss process and we call this process Y an *H-ss process*.

In what follows we say that the stochastic process $X = (X(t), t \geq 0)$ belongs to the **domain of attraction** of self-similar process $Y = (Y(t), t \geq 0)$ with Hurst exponent H and write $X \in \mathcal{D}(Y, H)$. Function $A(\lambda)$ is said to be the **normalizing function** for the process X.

In the fifties B.V. Gnedenko posed the problem of description of the class $\mathcal{G}_r$ of all limit laws μ for the normalized sums of the form (1) where $\{X_n\}$ is a sequence of independent random variables whose distributions belong to a finite set $\mathcal{F} = \{\nu_1, \ldots, \nu_r\}$. It is well known that $\mathcal{G}_1$

[1]This work was supported by RFBR grants N 12-01-00287.

[2]Peoples' Friendship University of Russia, Department of Probability Theory and Mathematical Statistics. E-mail: yskhokhlov@yandex.ru

coincides with the class of stable distributions. The initial conjecture was that $\mu \in \mathcal{G}_r$ can be represented as a convolution not more than r different stable distributions. It was proved in [3] for the case $r = 2$. Later A.A. Zinger ([2]) has obtained the complete description of $\mathcal{G}_r$ for $r \geq 3$. In this case the class $\mathcal{G}_r$ is broader than the class of compositions of stable distributions.

2 Basic results

Let we have r independent stochastic processes $(X_j(t), t \geq 0)$, $j = \overline{1, r}$, real function $(A(\lambda), \lambda > 0)$ such that $A(\lambda) > 0$, $A(\lambda) \nearrow \infty$ as $\lambda \nearrow \infty$, and real functions $c_j(\lambda)$, $j = \overline{1, r}$, such that for all j $c_j(\lambda) > 0$, $c_j(\lambda) \nearrow \infty$ as $\lambda \nearrow \infty$, $c_1(\lambda) + \ldots + c_r(\lambda) = \lambda$.

Assume that the following convergence

$$\frac{X_1(c_1(\lambda)t) + \ldots + X_r(c_r(\lambda)t)}{A(\lambda)} \Rightarrow Y(t) \ , \tag{5}$$

as $\lambda \to \infty$, holds.

We need to describe the class of limit stochastic processes $Y = (Y(t), t \geq 0)$ in (5). We have proved the following

Theorem 1. *Suppose a stochastic process $Y = (Y(t), t \geq 0)$ is continuous in probability at $t = 0$ and the distribution of $Y(t)$ is nondegenerate for each $t > 0$. Then Y is the limit process in some scheme* (5) *if and only if there exist independent stochastic processes $(Z_1(t), t \geq 0)$, ... , $(Z_k(t), t \geq 0)$, $k \leq r$, real functions $b(\lambda)$, $b_j(\lambda)$, $j = \overline{1, k}$, $\lambda > 0$, such that*

1) $b_j(\lambda) \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{k} b_j(\lambda) = \lambda$, $\lambda > 0$,
2) $b_j(\lambda) \nearrow \infty$, $\lambda \nearrow \infty$,
3) $b(\lambda) > 0$, $b(\lambda) \nearrow \infty$, $\lambda \nearrow \infty$, *and the following representation*

$$Y(t) \stackrel{d}{=} \frac{Z_1(b_1(\lambda)t) + \ldots + Z_k(b_k(\lambda)t)}{b(\lambda)} \ , \tag{6}$$

holds for all $\lambda > 0$.

Again the class of limit processes is broader than the class of sums of independent selfsimilar processes. We give some description of this class of stochastic processes.

References

[1] *Lamperti J.W.* Semi-stable stochastic processes. Transactions of the American mathematical Society, 1962, v. 104, p. 62–78.

[2] *Zinger A.A.* On a class of limit distributions for normalized sums of independent random variables. Theory Probab. Appl., v. 10, N 4, p. 607–626.

[3] *Zolotarev V.M., Korolyuk V.S.* On a hypothesis proposed by B.V. Gnedenko. Theory Probab. Appl., v. 6, N 2, p. 431–435.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

A limiting description of the minimax control in the two-armed bandit problem

A.V.Kolnogorov[1]

Limiting estimates of minimax strategy and minimax risk in the two-armed bandit problem are discussed. Results can be applied to parallel processing of data.

1 Introduction

Two-armed bandit problem belongs to the theory of statistical decisions [1]. Let ξ_n, $n = 1, \dots, N$, be a controlled random process which values are interpreted as incomes, depend on currently chosen alternatives only and which are described by normal distribution densities

$$f(x|m_\ell) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-(x-m_\ell)^2/2\right\}$$

if the ℓ-th alternative is applied ($\ell = 1, 2$). The process is described by a vector parameter $\theta = (m_1, m_2)$ with the set of admissible values $\Theta_N = \{(m_1, m_2) : |m_1 - m_2| \le 2cN^{-1/2}\}$ where $0 < c < \infty$.

A control strategy σ starts with applying both alternatives by $M_0 = \varepsilon_0 N$ times and then continues with applying currently chosen alternatives by $M = \varepsilon N$ times. Obtained incomes for currently chosen alternatives are summarized. So, their distributions can be close to normal although original distributions of the process are not those. An important feature of the strategy is that it allows the parallel processing of grouped data. Let's denote by

$$L_N(\sigma, \theta) = N(m_1 \vee m_2) - \mathbf{E}_{\sigma,\theta}\left(\sum_{n=1}^{N} \xi_n\right), \quad R_N(\Theta_N) = \inf_{\{\sigma\}} \sup_{\Theta_N} L_N(\sigma, \theta),$$

the loss function with respect to the greatest possible total income $N(m_1 \vee m_2)$ (under complete information) and the corresponding minimax risk. Here $\mathbf{E}_{\sigma,\theta}$ is the mathematical expectation provided that σ and θ are fixed. A direct determination of minimax strategy and minimax risk is practically impossible. It is shown in [2] that they can be found as Bayes' ones corresponding to the worst prior distribution on Θ_N.

2 Basic Results

Denote $m_1 = u+v$, $m_2 = u-v$, then $\theta = (u+v, u-v)$, $\Theta_N = \{\theta : |v| \le cN^{-1/2}\}$. Asymptotically the worst prior distribution density can be chosen as $\nu_a(u, v) = \kappa_a(u)\rho(v)$, where $\kappa_a(u)$ is a uniform density at $|u| \le a$ and $\rho(v) = \rho(-v)$ is a symmetric density and $a \to \infty$. Denote by n_1, n_2 and by X_1, X_2 total numbers of choosing and total incomes for choosing of both alternatives by the point of time $n = n_1 + n_2$ and $Z = X_1 n_2 - X_2 n_1$.

[1]Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Institute of Electronic and Information Systems. E-mail: Alexander.Kolnogorov@novsu.ru

Theorem 1. *Let's put* $s = ZN^{-3/2}$, $t_1 = n_1N^{-1}$, $t_2 = n_2N^{-1}$, $w = vN^{1/2}$, $\varepsilon = MN^{-1}$, $\varepsilon_0 = M_0N^{-1}$, $\varrho(w) = N^{-1/2}\rho(v)$. *Alternatives are applied by turn at* $t_1 + t_2 \le 2\varepsilon_0$. *Further the optimum strategy is determined recurrently "from the end", i.e. by solving the equation*

$$r_\varepsilon(s,t_1,t_2) = \min_{\ell=1,2} r_\varepsilon^{(\ell)}(s,t_1,t_2), \tag{1}$$

where $r_\varepsilon^{(1)}(s,t_1,t_2) = r_\varepsilon^{(2)}(s,t_1,t_2) = 0$ *at* $t_1 + t_2 = 1$,

$$\begin{aligned} r_\varepsilon^{(1)}(s,t_1,t_2) &= \varepsilon g^{(1)}(s,t_1,t_2) + t_2^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} r_\varepsilon(s+x,t_1+\varepsilon,t_2)h_\varepsilon\left(\tfrac{s\varepsilon - t_1x}{t_2}, t_1\right)dx, \\ r_\varepsilon^{(2)}(s,t_1,t_2) &= \varepsilon g^{(2)}(s,t_1,t_2) + t_1^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} r_\varepsilon(s+x,t_1,t_2+\varepsilon)h_\varepsilon\left(\tfrac{s\varepsilon - t_2x}{t_1}, t_2\right)dx \end{aligned} \tag{2}$$

at $t_1 + t_2 < 1$, $t_1 \ge \varepsilon_0$ *and* $t_2 \ge \varepsilon_0$. *Here*

$$\begin{gathered} g^{(\ell)}(s,t_1,t_2) = \int\limits_0^\infty 2wg(s,(-1)^{\ell+1}w,t_1,t_2)\varrho(w)dw, \quad \ell = 1,2, \\ g(s,w,t_1,t_2) = (2\pi t_1t_2(t_1+t_2))^{-1/2}\exp\left(-\tfrac{(s+2wt_1t_2)^2}{2t_1t_2(t_1+t_2)}\right), \\ h_\varepsilon(s,t) = \left(\tfrac{t+\varepsilon}{2\pi t\varepsilon}\right)^{1/2}\exp\left(-\tfrac{s^2}{2t\varepsilon(t+\varepsilon)}\right). \end{gathered}$$

If $r_\varepsilon^{(\ell)}(s,t_1,t_2)$ *has currently smaller value then the* ℓ*-th alternative is currently optimal. At all* s *and all* t_1, t_2, *for which the solutions of the equations* (1), (2) *are defined, there exists a limit*

$$r(s,t_1,t_2) = \lim_{\varepsilon\to+0} r_\varepsilon(s,t_1,t_2),$$

which is Lipschitz in s, t_1, t_2. *For the minimax risk on* $\Theta_N = \{|m_1 - m_2| \le 2cN^{-1/2}\}$ *the asymptotic estimate holds*

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1/2}R_N(\Theta_N) = \sup_\varrho\left(4\varepsilon_0\int_0^c w\varrho(w)dw + \int_{-\infty}^\infty r(s,\varepsilon_0,\varepsilon_0)ds\right).$$

Under some additional restrictions, $r(s,t_1,t_2)$ is a generalized solution of partial differential equation

$$\min_{\ell=1,2}\left(\frac{\partial r}{\partial t_\ell} + \frac{r}{t_\ell} + \frac{s}{t_\ell}\cdot\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{t_{\overline{\ell}}^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + g^{(\ell)}(s,t_1,t_2)\right) = 0,$$

where $\overline{\ell} = 3 - \ell$, $t_1 > \varepsilon_0$, $t_2 > \varepsilon_0$, $2\varepsilon_0 < t_1 + t_2 < 1$. Initial and boundary conditions are the following:

$$\lim_{t_1+t_2\to1} r(s,t_1,t_2) = 0, \quad \lim_{s\to+\infty} r(s,t_1,t_2) = \lim_{s\to-\infty} r(s,t_1,t_2) = 0.$$

References

[1] *DeGroot Morris H.*, Optimal Statistical Decisions. McGraw-Hill Company, New York, St Louis, San Francisco, London, Sydney, Toronto, Mexico, Panama, 1970.

[2] *Kolnogorov A.V.*, Finding Minimax Strategy and Minimax Risk in a Random Environment (the Two-Armed Bandit Problem). Automation and Remote Control, 2011, v. 72, No. 5, pp. 1017—1027.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Weak convergence of random sums[1]

Victor Korolev[2], Victor Kruglov[3]

B. V. Gnedenko was deeply interested in a thorough study of the asymptotic behavior of randomly indexed random sequences and, in particular, of sums of a random number of random variables. His interest to these problems originated from some important problems of reliability theory, storage control and queuing theory. He initiated the investigations of this problem in the setting of a double array limit scheme. In 1969 the famous paper [1] was published where the so-called transfer theorem was proved establishing sufficient conditions for the weak convergence of random sums of independent identically distributed random variables under the assumption of independence of indices and summands. B. V. Gnedenko also posed the problem of describing *criteria*, that is, *necessary and sufficient conditions* for the convergence of random sums. The so-called partial inverses of the transfer theorem and criteria under some rather loose additional assumptions were published in [2, 3, 4]. The final solution and some important corollaries are presented in this communication.

Let $\{X_{n,j}\}_{j\geq 1}$, $n = 1, 2, \ldots$, be a double array of row-wise independent and identically distributed random variables (r.v.'s). Let $\{N_n\}_{n\geq 1}$ be a sequence of nonnegative integer-valued r.v.'s such that for each $n \geq 1$ the r.v.'s $N_n, X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots$ are independent. Denote $S_{n,k} = X_{n,1} + \ldots + X_{n,k}$. The symbol $\Longrightarrow$ will denote weak convergence. By the distribution function (d.f.) $F(x)$ of a r.v. X we assume $\mathsf{P}(X \leq x)$. The Lévy distance (which metrizes weak convergence in the space of d.f.'s) will be denoted $L(\cdot, \cdot)$. By the weak convergence of a sequence of r.v.'s we mean that of the corresponding d.f.'s. Similarly, by the Lévy distance between r.v.'s we mean that between their d.f.'s. In what follows the convergence will be meant as $n \to \infty$. For $q \in (0, 1)$ the greatest lower bound of the q-quantiles of the r.v. N_n will be denoted $l_n(q)$. The median of $X_{n,1}$ will be denoted μ_n. Let v be an arbitrary positive number. The indicator function of a set A will be denoted $\mathbf{1}(A)$. Denote

$$\beta_n = \mathsf{E}(X_{n,1} - \mu_n)\mathbf{1}(|X_{n,1} - \mu_n| < v), \quad \gamma_n = \mathsf{E}(X_{n,1} - \mu_n - \beta_n)\mathbf{1}(|X_{n,1} - \mu_n - \beta_n| < v),$$

$$\Delta_n = \mathsf{E}\left(\frac{(X_{n,1} - \mu_n - \beta_n - \gamma_n)^2}{1 + (X_{n,1} - \mu_n - \beta_n - \gamma_n)^2}\right).$$

Let ε_n be the Lévy distance between $N_n(\Delta_n + |\gamma_n|)$ and the r.v. degenerate at zero. Let $[a]$ be the integer part of a number a. Let

$$k_n = \begin{cases} l_n\big(1 - \frac{1}{n+1}\big), & \text{if } \Delta_n + |\gamma_n| = 0,\\ [|\gamma_n|^{-1}], & \text{if } \Delta_n = 0,\ |\gamma_n| > 0,\\ [2\varepsilon_n/(\Delta_n + |\gamma_n|)] + 1, & \text{if } \Delta_n > 0,\end{cases} \qquad a_n = k_n(\mu_n + \beta_n).$$

[1]This work was supported by RFBR grants No. 11-01-00515a, 11-07-00112a, 11-01-12026-ofi-m and by the Ministry for Education and Science (state contract 16.740.11.0133).

[2]Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Institute for Informatics Problems, Russian Academy of Sciences. E-mail: victoryukorolev@yandex.ru

[3]Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics. E-mail: krugvictor@dataforce.net

To each r.v. Z put into correspondence the set $\mathcal{M}(Z)$ containing all triplets of r.v.'s (Y, U, V) which provide the representation of the characteristic function (ch.f.) $f(t)$ of the r.v. Z in the form $f(t) = \mathsf{E}\big(h^U(t)e^{itV}\big)$ where $h(t)$ is the ch.f. of the r.v. Y. For any r.v. Z the set $\mathcal{M}(Z)$ contains at least two triplets $(1, 0, Z)$ and $(Z, 1, 0)$.

The sequence of triplets $\{(Y_n, U_n, V_n)\}_{n\geq 1}$ from $\mathcal{M}(Z)$ is weakly compact if an arbitrary sequence of natural numbers $\mathcal{N}$ contains a subsequence $\mathcal{N}_1$ such that the sequences $\{Y_n\}_{n\in\mathcal{N}_1}$, $\{U_n\}_{n\in\mathcal{N}_1}$ and $\{V_n\}_{n\in\mathcal{N}_1}$ weakly converge (each to its limit).

Theorem 1. *Assume that $N_n \to \infty$ in probability. The convergence of non-randomly centered random sums*

$$S_{n,N_n} - c_n \Longrightarrow Z$$

to a r.v. Z takes place with some c_n if and only if there exists a weakly compact sequence of triplets $\{(Y_n, U_n, V_n)\}_{n\geq 1}$ such that $(Y_n, U_n, V_n) \in \mathcal{M}(Z)$ for each $n = 1, 2, \ldots$, $L(S_{n,k_n} - a_n,\, Y_n) \to 0$, $L(N_n/k_n,\, U_n) \to 0$, $L(a_nN_n/k_n - c_n,\, V_n) \to 0$.

Let $\Phi(x)$ be the standard normal d.f.

Theorem 2. *Assume that $N_n \to \infty$ in probability. The convergence*

$$\mathsf{P}\left(S_{n,N_n} - c_n \leq x\right) \Longrightarrow \Phi\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)$$

takes place with some $\sigma > 0$ and real c_n, α if and only if there exist real numbers $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ and positive numbers $\{b_n\}_{n\geq 1}$ and $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ such that

(i) $b_n\sigma_n^2 \leq \sigma^2$, $\sup_n |\alpha_n| < \infty$, $\sup_n b_n < \infty$, $\sup_n \sigma_n < \infty$;

(ii) $L\Big(\mathsf{P}\big(S_{n,k_n} - a_n \leq x\big),\ \Phi\Big(\dfrac{x-\alpha_n}{\sigma_n}\Big)\Big) \longrightarrow 0$;

(iii) $L(N_n/k_n,\ b_n) \to 0$;

(iv) $L\Bigg(\mathsf{P}\big(a_nN_n/k_n - c_n \leq x\big),\ \Phi\bigg(\dfrac{x-\alpha+\alpha_nb_n}{\sqrt{\sigma^2-\sigma_n^2b_n}}\bigg)\Bigg) \longrightarrow 0$.

We also present some recent results dealing with the convergence of the distributions of regular statistics constructed from samples with random sizes to generalized hyperbolic distributions.

References

[1] *Gnedenko B. V., Fahim H.* On a transfer theorem. Soviet Math. Dokl., 1969, v. 187, N 1, p. 15–17.

[2] *Szász D., Freyer B.* A problem of summation with a random index. Lit. Mat. Sbornik, 1971, v. 11, N 1, p. 181–187.

[3] *Szász D.* On the classes of limit distributions for sums of a random number of identically distributed random variables. Theory Probab. Appl., 1972, v. 17, N 3, p. 424–439.

[4] *Gnedenko B. V., Korolev V. Yu.* Random Summation: Limit Theorems and Applications. Boca Raton: CRC Press, 1996.

[5] *Kruglov V. M.* Weak compactness of random sums. Theory Probab. Appl., 1998, v. 43, N 2, p. 248–271.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

On estimation of the Orey index for a class of Gaussian processes

Kestutis Kubilius[1]

In the paper we give an extended definition of the Orey index for Gaussian processes which may not have stationary increments and consider the asymptotic properties of its estimator.

For real mean zero Gaussian process with stationary increments Orey [2] (see also [1]) suggested following definition of index.

Definition 1. Let X be a real-valued mean zero Gaussian stochastic process with stationary increments and continuous in quadratic mean. Let σ_X be the incremental variance of X given by $\sigma_X^2(h) = \mathbf{E}[X(t+h) - X(t)]^2$ for $t, h \geq 0$. Define

$$\widehat{\beta}_* := \inf\left\{\beta > 0 : \lim_{h\to 0} \frac{h^\beta}{\sigma_X(h)} = 0\right\} = \limsup_{h\to 0} \frac{\ln \sigma_X(h)}{\ln h} \tag{1}$$

and

$$\widehat{\beta}^* := \sup\left\{\beta > 0 : \lim_{h\to 0} \frac{h^\beta}{\sigma_X(h)} = +\infty\right\} = \liminf_{h\to 0} \frac{\ln \sigma_X(h)}{\ln h}\,. \tag{2}$$

If $\widehat{\beta}_* = \widehat{\beta}^*$ then X has the Orey index β_X.

If Gaussian process with stationary increments has Orey index then almost all sample paths satisfy a Hölder condition of order γ for each $\gamma \in (0, \beta_X)$. For fractional Brownian motion index $\beta_X = H$.

The purpose of this paper is to introduce extension of the definition of the Orey index for Gaussian processes which may not have stationary increments. Our goal is to estimate the Orey index for Gaussian process from discrete observations of its sample paths.

References

[1] *Norvaiša R. and Salopek D.M.*, Estimating the Orey Index of a Gaussian Stochastic Process with Stationary Increments: An Application to Financial Data Set. Canadian Mathematical Society Conference Proceedings, 2000, v. 26, p. 353–374.

[2] *Orey S.*, Gaussian sample functions and the Hausdorff dimension of level crossings. Z. Wahrsch. verw. Gebiete, 1970, v. 15, p. 249–256.

[1] VU Institute of Mathematics and Informatics. E-mail: `kestutis.kubilius@mii.vu.lt`

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

On the inclusion–exclusion method for general random walks with two boundaries

Vladimir I. Lotov[1]

We discuss the application of inclusion–exclusion method to general random walks with two boundaries.

In the well-known paper [1], B.V.Gnedenko and V.S. Korolyuk obtained an explicit formula and limit theorem for the distribution of the distance between two empirical distributions. The problem can be reduced to the probability that trajectory of a simplest random walk does not leave the strip during finitely many steps. The authors applied the inclusion–exclusion method and calculated successively the probability of a trajectory to reach the level, then the probability that trajectory crosses the strip at least once, at least twice, etc.

In order to find the probability measure of the trajectories that cross the strip at least m times, the authors applied symmetric transformations to the parts of trajectories between successive exits of the strip. This was possible due to the absence of overshoots over boundaries. Unfortunately, this approach does not allow us to calculate these probabilities for general random walks because of overshoots.

We further show that these difficulties disappear if, instead of probabilities, we operate with Laplace–Stieltjes transforms of the corresponding measures. Our method allows us to find the distributions in boundary problems for random walks that have starting position at a random point, say, at the first exit time.

Introduce necessary notation. Let $\{X_n,\ n \geq 1\}$ be a sequence of i.i.d. random variables, $S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad n \geq 1$. Denote

$$R_-(z,\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda S_n\}; S_n < 0\right) \right\},$$

$$R_+(z,\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda S_n\}; S_n \geq 0\right) \right\}.$$

These functions are known as factorization components since

$$1 - z\mathbf{E}\, e^{\lambda X_1} = R_+(z,\lambda) R_-(z,\lambda), \qquad |z| < 1, \quad \mathrm{Re}\,\lambda = 0.$$

Given a function g such that

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\, dG(x), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |dG(x)| < \infty,$$

(g can depend on z as well) we define the operators $\mathcal{L}_t^-$ and $\mathcal{L}_t^+$:

$$(\mathcal{L}_t^- g)(z,\lambda) = R_-(z,\lambda)\left[R_-^{-1}(z,\lambda) g(\lambda)\right]^{(-\infty,t]},$$

[1] Novosibirsk State University, Dept. of Mathematics and Mechanics. E-mail: lotov@math.nsc.ru

$$(\mathcal{L}_t^+ g)(z,\lambda) = R_+(z,\lambda)\left[R_+^{-1}(z,\lambda)g(\lambda)\right]^{[t,\infty)}$$

for $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Here we use the notation

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y}\, dG(y)\right]^D = \int\limits_D e^{\lambda y}\, dG(y)$$

for every measurable $D \subset R$. Explicit expressions for $(\mathcal{L}_t^{\pm} g)(z,\lambda)$ are available in the case of rational functions $R_{\pm}(z,\lambda)$. Asymptotic representations for $(\mathcal{L}_t^{\pm} g)(z,\lambda)$ as $|t| \to \infty$ are also obtained under the Cramér type condition; they have exponentially small remainders [2].

For an arbitrary stopping time $\tau \geq 0$, on the event $\{\tau < \infty\}$ we introduce the random variables

$$\tau_+(t) = \inf\{n \geq \tau : S_n \geq t\}, \qquad \tau_-(t) = \inf\{n \geq \tau : S_n \leq t\}.$$

The following assertion was proved in [3].

Theorem. *For any real t, $|z| < 1$, and $\operatorname{Re}\lambda = 0$, we have*

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_{\pm}(t)} \exp\{\lambda S_{\tau_{\pm}(t)}\};\ \tau_{\pm}(t) < \infty\right) = \mathcal{L}_t^{\pm}\mathbf{E}\left(z^{\tau}\exp\{\lambda S_{\tau}\};\ \tau < \infty\right).$$

We remark that the distribution of steps before τ and after τ can be different. For arbitrary positive numbers a and b, introduce the random variable

$$N = N_{a,b} = \inf\{n \geq 1 : S_n \notin (-a, b)\}$$

and the Laplace–Stieltjes transform

$$Q(z,\lambda) = \mathbf{E}\left(z^N \exp\{\lambda S_N\};\ S_N \geq b\right).$$

It follows immediately from the above theorem that (here $e(\lambda) \equiv 1$)

$$Q(z,\lambda) = (\mathcal{L}_b^+ e)(z,\lambda) - (\mathcal{L}_b^+\mathcal{L}_{-a}^- e)(z,\lambda) + (\mathcal{L}_b^+\mathcal{L}_{-a}^-\mathcal{L}_b^+ e)(z,\lambda) - \dots\ .$$

This is realization of the inclusion-exclusion method for a general random walk.

Another application of these operators: let η be the number of upcrossings of the strip (with boundaries at the levels $-a$ and b) by the trajectories of a random walk. We consider the case when $\eta < \infty$. It is easy to see that, for any $k \geq 1$,

$$\mathbf{P}(\eta \geq k) = \lim_{z\to 1}((\mathcal{L}_b^- \mathcal{L}_{-a}^+)^k e)(z, 0).$$

References

[1] *Гнеденко Б.В., Королюк В.С.*, О максимальном расхождении двух эмпирических распределений. ДАН СССР, 1951, т. 80, N 4, с. 525–528.

[2] *Lotov V.I.*, Limit theorems in a boundary crossing problem for random walks. Siberian Math. J.,1999, v. 40, N 5, p. 925–937.

[3] *Лотов В.И.*, Об одном подходе в двуграничных задачах. Статистика и управление случайными процессами. Сборник статей под ред. А.Н. Ширяева, Москва, 1989, с. 117-121.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

On the Gaussian approximation for the binomial law[1]

Sergey V. Nagaev[2],
Vladimir I. Chebotarev[3], **Konstantin V. Mikhaylov**[4]

We find the majorant for the standardized error of Gaussian approximation for binomial distribution. As a consequence we obtain the bound $C_0 < 0.4138$ for the absolute constant in the Berry–Esseen inequality for two-point distributions.

Let S_n be the number of successes in Bernoulli trials with the probability of a succes p. Without loss of generality we may assume $0 < p \leq 0.5$. Denote

$$\Delta(n,p) = \max_{x\in\mathbb{R}} \Big|\mathbf{P}\Big(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\Big) - \Phi(x)\Big|,$$

where $\Phi(x)$ is the standard normal law. In the case under consideration the Lyapunov ratio coincides with the ratio equals $\frac{p^2+q^2}{\sqrt{npq}}$. Let us denote

$$E(n,p) = \Delta(n,p)\,\frac{\sqrt{npq}}{p^2+q^2}, \quad \mathcal{E}(p) = \frac{2-p}{3\sqrt{2\pi}\,\left[p^2 + (1-p)^2\right]}.$$

It follows from [1] that

$$\lim_{n\to\infty} E(n,p) = \mathcal{E}(p)$$

(see also [2]).

Our conjecture is the following bound: for every $n \geq 1$ and $0 < p \leq 0.5$

$$E(n,p) < \mathcal{E}(p). \tag{1}$$

We found the majorant $\overline{E}(n,p)$ such that

$$E(n,p) < \overline{E}(n,p),$$

and for every $0 < p \leq 0.5$

$$\overline{E}(n,p) \downarrow \mathcal{E}(p), \quad n \uparrow \infty.$$

The correlation between the conjecture, our majorant and the real behavior of $E(n,p)$ is illustrated on Figure 1.

[1]This work was fulfilled under the partial support by grants: Siberian Branch of RAS N 56, Far-Eastern Branch of RAS 12-II-0-01M-005, 12-I-OMN-01.

[2]Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk. E-mail: nagaev@math.nsc.ru
[3]Computing Centre FEB RAS, Khabarovsk. E-mail: chebotarev@as.khb.ru
[4]Computing Centre FEB RAS, Khabarovsk. E-mail: mikv.regs@gmail.com

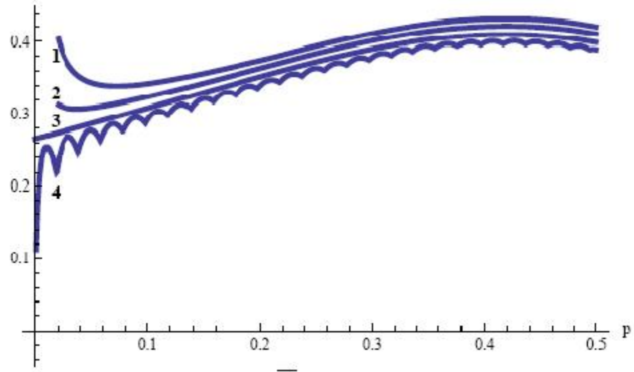


Fig. 1. 1 – the graph of $\overline{\overline{E}}(200, p)$ for $p \in [0.02, 0.5]$,
2 – the graph of $\overline{E}(800, p)$ for $p \in [0.02, 0.5]$,
3 – the graph of $\mathcal{E}(p)$,
4 – the graph of $E(50, p)$

We proved that for every $p \in (0, 0.5]$

$$\overline{E}(n, p) < 0.4138$$

if $n \geq 1600$. On the other hand, we found by using a computer that for each $n \leq 1600$

$$\max_{0 \leq p \leq 0.5} E(n, p) < \max_{0 \leq p \leq 0.5} \mathcal{E}(p) = C_E = \frac{\sqrt{10} + 3}{6\sqrt{2\pi}} = 0.409732\ldots .$$

Thus, for all $n \geq 1$

$$\max_{0 \leq p \leq 0.5} E(n, p) < 0.4138.$$

This result and our method give grounds to expect that the best constant in the Berry–Esseen inequality for two-point distributions is equal to C_E.

References

[1] *Esseen C.G.*, A Moment Inequality with an Application to the Central Limit Theorem. Scand. Aktuarietidskr. J., 1956, v. 39, p. 160–170.

[2] *Nagaev S.V., Chebotarev V.I.* On the Bound of Proximity of the Binomial Distribution to the Normal One. Doklady Mathematics, 2011, v. 83, N 1, p. 19-21.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Large deviations of U-empirical Kolmogorov statistics with statistical applications[1]

Ya. Yu. Nikitin[2]

We describe the logarithmic large deviation asymptotics for U-empirical Kolmogorov-type statistics and calculate their efficiencies when used as the goodness-of-fit test statistics.

1 Introduction

Let $X_1, X_2, ...$ be i.i.d. observations with continuous df F. Let F_n be empirical df based on first n observations. The famous Kolmogorov statistic is the distribution-free statistic defined by

$$D_n = \sup_t |F_n(t) - F(t)|.$$

B.V. Gnedenko has made outstanding contribution to the theory of related statistics, see [1]. The large deviation asymptotics of statistic D_n was found in [2].

Theorem 1. *For any $a \in (0,1)$ we have $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(D_n > a) = -f_0(a)$, where the function $f_0(a)$ is continuous on $(0,1)$, and $f_0(a) \sim 2a^2$ as $a \to 0$.*

This result enables to find the Bahadur efficiency of various Kolmogorov-type tests, see [3].

We are interested in U-empirical generalizations of Theorem 1 and their applications to the goodness-of-fit testing. Let $h(x_1, ..., x_m)$ be a real-valued symmetric kernel of degree $m \geq 1$. Consider the U-empirical df

$$G_n(t) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1\leq i_1 < \ldots < i_m \leq n} \mathbf{I}\{h(X_{i_1}, ..., X_{i_m}) < t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Denote $G(t) = \mathbf{P}(h(X_1, ..., X_m) < t), t \in \mathbb{R}$, and assume that G is continuous. The U-empirical generalization of statistic D_n has the form $DU_n = \sup_t |G_n(t) - G(t)|$ and coincides with the Kolmogorov statistic when $m = 1$ and $h(t) = t$. Another useful statistic is $SU_n = \sup_t |G_n(t) - F_n(t)|$. Statistics of this type naturally appear in nonparametric statistics.

2 Main results

Consider two families of kernels $\Theta(x_1, \ldots, x_m; t) = \mathbf{I}\{h(x_1, ..., x_m) < t\} - G(t)$ and $\Psi(x_1, \ldots, x_m; t) = \mathbf{I}\{h(x_1, ..., x_m) < t\} - m^{-1} \sum_{i=1}^m \mathbf{I}\{x_i < t\}$, depending on $t \in \mathbb{R}$. Let $\theta(s; t) = \mathbf{E}(\Theta(X_1, ..., X_m; t)|X_1 = s)$ and $\psi(s; t) = \mathbf{E}(\Psi(X_1, ..., X_m; t)|X_1 = s)$ be their projections with the variance functions $\sigma^2_\theta(t) = \mathbf{E}\theta^2(X_1; t)$ and $\sigma^2_\psi(t) = \mathbf{E}\psi^2(X_1; t)$. Finally, denote $\theta_0^2 = \sup_t \sigma^2_\theta(t)$, $\psi_0^2 = \sup_t \sigma^2_\psi(t)$.

[1]This work was supported by RFBR grant 10-01-00154, by the grants NSh-1216.2012.1 and FZP 2010-1.1-111-128-033.

[2]Saint-Petersburg State University, Faculty of Mathematics and Mechanics. E-mail: `yanikit47@mail.ru`

We say that the families of kernels $\Theta(\cdot\,;t)$ and $\Psi(\cdot\,;t)$ are *non-degenerate* if their variance functions $\sigma^2_\theta(t)$ and $\sigma^2_\psi(t)$ vanish only in a finite number of points.

Theorem 2. *Assume that the families of kernels $\{\Theta(\cdot\,;t)\}$ and $\{\Psi(\cdot\,;t)\}, t \in \mathbb{R}$, are non-degenerate. Then for sufficiently small $a > 0$ we have*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(DU_n > a) = -f_1(a), \quad \lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(SU_n > a) = -f_2(a),$$

where the functions $f_1(a)$ and $f_2(a)$ are continuous in the neighborhood of zero, and moreover

$$f_1(a) \sim a^2/2m^2\theta_0^2, \quad f_2(a) \sim a^2/2m^2\psi_0^2, \quad \text{as}\, a \to 0.$$

Similar results hold for the one-sided variants of these statistics, see [4]. This large deviation asymptotics is indispensable by the evaluation of local Bahadur efficiency of Kolmogorov-type tests of fit based on the characterization of distributions by the equidistribution of statistics.

The following example (one among many, see [4]) illustrates this. Consider the famous characterization of normality due to G. Polya (1923): *Let X and Y be i.i.d. centered rv's. Then X and $(X+Y)/\sqrt{2}$ have the same distribution iff X and $Y \in N(0, \tau^2)$ with some $\tau^2 > 0$.*

According to this result, we can use the statistic

$$PO_n = \sup_t \left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\le i<j\le n} \mathbf{I}\{X_i + X_j < t\sqrt{2}\} - n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{I}\{X_k < t\} \right|$$

to test the composite hypothesis H_0 that the initial sample has the centered normal distribution with some unknown variance. It follows from Theorem 2 that under H_0 for small $a > 0$ there exists a continuous function v such that

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(PO_n > a) = v(a) \sim -6a^2, \;\; a \to 0.$$

This implies that for the shift and skew alternatives the local Bahadur efficiency of the scale-free test based on PO_n is equal to 0.328. Note that the integral test based on the same characterization has under same alternatives much higher efficiency 0.966 [5].

References

[1] *Gnedenko B.V., Korolyuk V.S.* On the maximum discrepancy between two empirical distributions. Dokl. Acad. Nauk. SSSR, 1951, v. 80, N 4, p. 525-528.

[2] *Abrahamson I. G.* Exact Bahadur efficiencies for the Kolmogorov-Smirnov and Kuiper one- and two-sample statistics. Ann. Math. Stat., 1967, v. 38, N 5, p. 1475–1490.

[3] *Nikitin Y.* Asymptotic efficiency of nonparametric tests. Cambridge University Press, 1995.

[4] *Nikitin Ya.Yu.* Large deviations of $U-$empirical Kolmogorov-Smirnov tests, and their efficiency. Journ. of Nonparam. Statist., 2010, v. 22, N 5, p. 649–668.

[5] *Litvinova V.V., Nikitin Ya.Yu.* Two families of normality tests based on Polya type characterization, and their efficiencies. Journ. of Mathem. Sciences, 2006, v.139, N 3, p. 6582 -6588.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

A note on characteristic functions

Saulius Norvidas[1]

We give a characterization of $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ to be a characteristic function of a probability measure in the context of the analytic continuation of φ in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. If φ corresponds to a symmetric distribution on $\mathbb{R}$, then a similar problem for harmonic continuation of φ was solved in [1]. Recall that $\omega : (a, b) \to \mathbb{R}$, is said to be completely monotonic if $\omega \in C^\infty$ and $(-1)^n\omega^{(n)}(x) \geq 0$ for $x \in (a, b)$ and $n = 0, 1, 2, \ldots$. If $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a bounded continuous even function, then φ is a characteristic function if and only if $\varphi(0) = 1$ and the Poisson transform of φ

$$y \to u_\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}\,\varphi(t)\,dt$$

is completely monotonic for $x = 0$ and $y \in [0, \infty)$ [1]. If φ is a complex-valued, then this statement fails in general. Some other form of this theorem (in other terms and for absolutely integrable and infinitely differentiable φ satisfying more other conditions) has been shown by Egorov [2].The harmonic function u_φ is the real part of the usual Cauchy transform of φ

$$k_\varphi(z) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{z-t}\,dt,$$

$z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. This integral is convergent for $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, but not in the case of an arbitrary $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$. Therefore, we shall use the following modified Cauchy transform of φ

$$K_\varphi(z) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{z-t} + \frac{t}{t^2+1}\Big)\varphi(t)\,dt.$$

Now K_φ is well defined for any $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, and determine an analytic function in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^-$, where $\mathbb{C}^+$ and $\mathbb{C}^-$ denote the upper and the lower half-planes in $\mathbb{C}$, respectively. Let us write $k_\varphi^{(\pm)}(z) = k_\varphi(z)$ for $z \in \mathbb{C}^\pm$, and $K_\varphi^{(\pm)}(z) = K_\varphi(z)$ for $z \in \mathbb{C}^\pm$.

A function $\omega(x)$ is said to be absolutely monotonic on (a, b) if and only if $\omega(-x)$ is completely monotonic on $(-b, -a)$.

Theorem 1. Suppose that $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is a bounded continuous function and $\varphi(0) = 1$. Then φ is a characteristic function if and only if there is a constant $a_\varphi \in \mathbb{R}$ such that:

(**i**) $a_\varphi + K_\varphi^{(+)}(iy)$ is completely monotonic for $y \in (0, \infty)$, and

(**ii**) $-\Big(a_\varphi + K_\varphi^{(-)}(iy)\Big)$ is absolutely monotonic for $y \in (-\infty, 0)$.

References

[1] *Norvidas S.*, On harmonic continuation of characteristic functions. Lithuanian Math. J., 2010, v. 50, N 4, p. 418–425.

[2] *Egorov A.V.* , On the theory of characteristic functions. Russian Math. Surveys, 2004, v. 59, N 3, p. 567–568.

[1]Vilnius University Institute of Mathematics and Informatics, Akademijos str. 4, LT-08663, Vilnius, Lithuania. E-mail: norvidas@gmail.com

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Mean magnetic energy in Riemannian spaces of constant curvature

Alexey S. Rubashny[1], **Dmitry D. Sokoloff**

The energy growth of the mean magnetic energy driven by a small-scale dynamo in Euclidean and Lobachevsky spaces is discussed. We show that the properties of the rather simple evolution equation for random media in curved spaces like Lobachevsky space are quite different from those for Euclidean space.

Abstract

Dynamo problems in cosmological plasmas give a physical motivation to study dynamos in the Lobachevsky and spherical geometries because these are possible geometries for the spatial part of the Friedmann cosmological models. A naive interpretation of the results for dynamos in Riemannian spaces is that a dynamo in a curved space is more or less the same as a dynamo in Euclidean space. Standard methods of dynamo theory presume however in a lot of places that the space is Euclidean. The difficulties related to this fact are discussed in [1].

In the paper we provide an explicit solvable example of a particular dynamo problem in a curved space compared with a similar problem in the Euclidean space. We compare temporal growth of the mean magnetic energy $\mathcal{E}$ in a turbulent flow of an electrically conducting fluid driven by a small-scale dynamo in Euclidean and Lobachevsky spaces. The governing parameters of the dynamo, such as the rms turbulent velocity and the correlation scale of turbulence, are presumed to vary randomly in space so the dynamo growth rate is a Gaussian random field. Since such a field is unbounded in unbounded space and can achieve, with a low probability, very large values of $\mathcal{E}$, it can grow super-exponentially in both cases. The super-exponential growth of $\mathcal{E}$ in Euclidian space, known since the 1980s, can be considered as a statement that the mean energy growth rate is determined up to a weakly growing factor proportional to $\sqrt{\ln t}$ [2]. We demonstrate that the super-exponential growth of $\mathcal{E}$ in Lobachevsky space is a much more radical phenomenon, where $\mathcal{E}$ grows as $\exp\{\mathrm{const} * t^{5/3}\}$. We stress that extrapolating the properties of small-scale dynamos in Euclidean space to curved geometries such Lobachevsky space is not straightforward and requires some care. The effects under discussion becomes however important only if the spatial scale of domain in which the small-scale magnetic field is excited exceeds the radius of curvature.

References

[1] *Rubashny A., Sokoloff D.*, Magnetic field correlation tensor in spaces of constant curvature. Moscow Univ. Phys. Bull. 2010, N 65, p. 155–158.

[2] *Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Molchanov S.A., Sokoloff D.D.*, Intermittency of passive field in random media. Sov. Phys. JETP 1985, N 62, p. 1188–1194.

[1]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: `alex.rubashny@gmail.com`

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Limit theorems for functionals of random fields and statistical applications

Ludmila M. Sakhno[1]

Let $X(t)$, $t \in I$, be a real-valued measurable strictly stationary zero-mean random field, where I is $\mathbb{R}^d$ or $\mathbb{Z}^d$. Suppose that all order moments exist and the field $X(t)$ has spectral densities of order $k = 2, 3, ...$, that is, there exist the complex-valued functions $f_k(\lambda_1, ..., \lambda_{k-1}) \in L_1\left(\mathbb{S}^{k-1}\right)$ such that the cumulant function of order k is given by

$$c_k(t_1, ..., t_{k-1}) = \int_{\mathbb{S}^{k-1}} f_k(\lambda_1, ..., \lambda_{k-1}) e^{i\sum_{j=1}^{k-1}(\lambda_j, t_j)} d\lambda_1 ... d\lambda_{k-1},$$

where $\mathbb{S} = \mathbb{R}^d$ or $(-\pi, \pi]^d$ for the continuous-parameter or discrete-parameter cases respectively.

We consider the estimators for the integral functionals of the cumulant spectral densities of orders $k = 2, 3, ...$ (or spectral functionals):

$$J_k(\varphi) = \int_{\mathbb{S}^{k-1}} \varphi_k(\lambda_1, ..., \lambda_{k-1}) f_k(\lambda_1, ..., \lambda_{k-1}) d\lambda_1 ... d\lambda_{k-1}$$

for an appropriate function φ_k and based on observations $X(t), t \in D_T$.

We study the asymptotic behavior of the empirical spectral functionals and formulate various types of conditions for their asymptotic normality. These results are then used for parametric estimation in the spectral domain. Namely, we present an approach for statistical parameter estimation based on the minimum contrast principle and the explicit formulae for cumulant spectral densities of the second and higher orders for considered models. Conditions for consistency and asymptotic normality of corresponding estimates are provided.

References

[1] *Anh V. V., Leonenko N. N., Sakhno, L. M.*, Statistical inference using higher-order information. J.Multivriate Anal., 2007, v. 98, N 4, p. 706–742.

[2] *Anh V. V., Leonenko N. N., Sakhno, L. M.*, Evaluation of bias in higher-order spectral estimation. Probab. Theory and Math. Stat., 2009, v. 80, p. 1-14.

[3] *Avram F., Leonenko N., Sakhno L.*, On a Szegö o type limit theorem, the Hölder-Young-Brascamp-Lieb inequality, and the asymptotic theory of integrals and quadratic forms of stationary fields. ESAIM: Probability and Statistics, 2010, v. 14.

[1]National Taras Shevchenko University of Kyiv, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: lms@univ.kiev.ua

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

A Stone-type decomposition of the renewal measure with exact asymptotics of the summands

Mikhail S. Sgibnev[1]

A Stone-type decomposition $U = U_1 + U_2$ of the renewal measure U is established. Banach algebras of measures are used with given functional $\mathcal{L}$ describing a certain asymptotic property of their elements. The values of $\mathcal{L}$ at U_1 and U_2 are given in terms of the value of $\mathcal{L}$ at the probability distribution generating the renewal measure U.

1 Introduction

Let F be a probability distribution on $\mathbb{R}$ with positive mean $\mu = \int_{\mathbb{R}} x\, F(dx)$, and let $U = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}$ be the corresponding renewal measure; here $F^{1*} := F$, $F^{(n+1)*} := F * F^{n*}$, $n \geq 1$, and $F^{0*} := \delta_0$, the atomic measure of unit mass at the origin. Suppose that, for some $m \geq 1$, F^{m*} has a nonzero absolutely continuous component. Stone [1] showed that then there exists a decomposition $U = U_1 + U_2$, where U_2 is a finite measure and U_1 is absolutely continuous with bounded continuous density $h(x)$ such that

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \frac{1}{\mu}, \qquad \lim_{x\to-\infty} h(x) = 0. \tag{1}$$

A similar decomposition $U = U_1 + U_2$ was established in [2] via Banach-algebraic techniques which allowed us to extract rather detailed supplementary information about the asymptotic properties of the summands U_1 and U_2 depending on the corresponding properties of the underlying distribution F. Notice that in [1] and [2] the measures U_1 and U_2 were constructed differently. Nevertheless, in both cases the measure U_1 was absolutely continuous with bounded continuous density $h(x)$ satisfying the relations (1).

2 Main result

Consider the collection $S(r_1, r_2)$ of all complex-valued measures κ such that

$$\|\kappa\| := \int_{\mathbb{R}} \max(e^{r_1 x}, e^{r_2 x})\, |\kappa|(dx) < \infty;$$

here $|\kappa|$ stands for the total variation of κ. The collection $S(r_1, r_2)$ is a Banach algebra with norm $\|\cdot\|$ by the usual operations of addition and scalar multiplication of measures, the product of two elements ν and κ of $S(r_1, r_2)$ is defined as their convolution $\nu * \kappa$. The unit element of $S(r_1, r_2)$ is the measure δ_0.

Define the Laplace transform of a measure κ as $\hat{\kappa}(s) := \int_{\mathbb{R}} \exp(sx)\, \kappa(dx)$. Let ν be a finite complex-valued measure. Denote by $T\nu$ the σ-finite measure with the density $v(x; \nu) :=$

[1]Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. E-mail: sgibnev@math.nsc.ru

$\nu((x,\infty))$ for $x \geq 0$ and $v(x;\nu) := -\nu((-\infty,x])$ for $x < 0$. If $\int_{\mathbb{R}} |x|\,|\nu|(dx) < \infty$, then $T\nu$ is a finite measure whose Laplace transform is given by $(T\nu)^\wedge(s) = [\hat{\nu}(s) - \hat{\nu}(0)]/s$, $\Re s = 0$, the value $(T\nu)^\wedge(0)$ being defined by continuity as $\int_{\mathbb{R}} x\,\nu(dx)$.

Let $\mathcal{A}$ be a Banach algebra of measures such that (i) $\mathcal{A} \subset S(r_1,r_2)$ and (ii) each homomorphism $\mathcal{A} \mapsto \mathbb{C}$ is the restriction to $\mathcal{A}$ of some homomorphism $S(r_1,r_2) \mapsto \mathbb{C}$. Let $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ be a Banach algebra having properties (i) and (ii) and let there exist a continuous linear functional $\mathcal{L} : \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{C}$ such that $\mathcal{L}(\delta_0) = 0$ and

$$\mathcal{L}(\kappa * \theta) = \mathcal{L}(\kappa)\hat{\theta}(r_2) + \hat{\kappa}(r_2)\mathcal{L}(\theta)$$

for all $\kappa, \theta \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. Moreover, if $\kappa, T\kappa \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, then $\mathcal{L}(\kappa) = r_2\mathcal{L}(T\kappa)$. Concrete examples of such algebras $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ may be found in [3], [4], [5] and others. The functional $\mathcal{L}$ describes the asymptotic behavior of measures in terms of a given function, e.g., $\mathcal{L}(\kappa) = \lim_{x\to\infty} \kappa((x,\infty))/\tau(x)$.

Let L be the restriction of Lebesgue measure to $[0,\infty)$. The absolutely continuous part of any distribution F will be denoted by F_c, and its singular component by F_s, i.e., $F_s = F - F_c$.

In what follows, F will denote a probability distribution with finite mean $\mu > 0$ such that $F \in S(r_1,r_2)$, $r_1 \leq 0 \leq r_2$; $(F^{m*})_s^\wedge(r_i) < 1$, $i = 1,2$, for some integer $m \geq 1$; and $\hat{F}(s) \neq 1$ for all $s \in \mathbb{C}$ such that $r_1 \leq \Re s \leq r_2$ and $s \neq 0$.

Theorem 1. *let $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ be a Banach algebra with the stated properties. Suppose F, $TF \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. Then the renewal measure $U = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}$ admits a Stone-type decomposition $U = U_1 + U_2$, where $U_2 \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ and the measure $U_1 = L/\mu - rTU_2$ for some $r > r_2$ is absolutely continuous with bounded continuous density $h(x)$. Moreover,*

$$\mathcal{L}(U_2) = \begin{cases} \dfrac{r_2\mathcal{L}(F)}{(r_2 - r)[1 - \hat{F}(r_2)]^2} & \text{if } r_2 > 0, \\ -\dfrac{\mathcal{L}(TF)}{r\mu^2} & \text{if } r_2 = 0. \end{cases}$$

If, in addition, $T^2F \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, then $U_1 - L/\mu \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ and

$$\mathcal{L}\left(U_1 - \frac{L}{\mu}\right) = \begin{cases} \dfrac{r\mathcal{L}(F)}{(r - r_2)[1 - \hat{F}(r_2)]^2} & \text{if } r_2 > 0, \\ \dfrac{\mathcal{L}(T^2F)}{\mu^2} & \text{if } r_2 = 0. \end{cases}$$

References

[1] *Stone C.*, On absolutely continuous components and renewal theory, Ann. Math. Statist., 1966, v. 37, p. 271–275.

[2] *Sgibnev M.S.*, Stone's decomposition of the renewal measure via Banach-algebraic techniques, Proc. Amer. Math. Soc., 2002, v. 130, p. 2425–2430.

[3] *Rogozin B.A., Sgibnev M.S.*, Banach algebras of measures on the line, Siberian Math. J., 1980, v. 21, p. 265–273.

[4] *Sgibnev M.S.*, Banach algebras of functions with the same asymptotic behavior at infinity, Siberian Math. J., 1981, v. 22, p. 467–473.

[5] *Sgibnev M.S.*, Banach algebras of measures of class $\mathcal{S}(\gamma)$, Siberian Math. J. 1988, v. 29, p. 647–655.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Bootstrap for U-Statistics of Stationary Processes[1]

Olimjon Sh. Sharipov[2], Martin Wendler[3]

1 Introduction

We consider the nonoverlapping bootstrap, proposed by Carlstein [1], for the sample mean and for U-statistics. Let $(X_n)_{n\in N}$ be a sequence of r.v.'s. Let $p \in N$ be the block length such that $p = p(n) = o(n)$, $p \to \infty$ as $n \to \infty$. We introduce the following blocks of indices and r. v.'s:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_i &= \left(X_{(i-1)p+1}, \dots, X_{ip}\right), \\ \mathrm{B}_i &= \{(i-1)p+1, \dots, ip\}, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

where $k = k(n) = \left[\frac{n}{p}\right]$ is the number of blocks. We consider a new sample $X_1^*, \dots, X_{kp}^*$, which is constructed by choosing randomly and independently blocks k times with

$$\mathbf{P}\left((X_1^*, \dots, X_p^*) = \mathrm{I}_i\right) = \frac{1}{k} \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

U-statistics play an important role in nonparametric statistics because many estimators and test statistics can be written at least asymptotically as U-statistics. Well-known examples include the sample variance, Gini's mean difference, and the χ^2 goodness of fit test statistic. For simplicity of notation, we concentrate on the case of bivariate U-statistics.

A U-statistic with a symmetric and measurable kernel $h : R^2 \to R$ is defined as

$$U_n(h) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \le i < j \le n} h(X_i, X_j).$$

The key tool in the analysis of U-statistics is the Hoeffding-decomposition [3] of $U_n(h)$ into a so-called linear part and a degenerate part

$$U_n(h) = \theta + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} h_1(X_i) + U_n(h_2)$$

with

$$\begin{aligned} \theta &:= \mathbf{E} h(X_1, X_2), \\ h_1(x) &:= \mathbf{E} h(x, X_2) - \theta, \\ h_2(x, y) &:= h(x, y) - h_1(x) - h_1(y) - \theta. \end{aligned}$$

Let $(X_n)_{n\in N}$ be a stationary process. We will use the following definitions.

[1]This work was supported by DFG (German Research Foundation).
[2]National University of Uzbekistan, Institute of Mathematics. E-mail: osharipov@yahoo.com
[3]Ruhr-Universität Bochum. E-mail: Martin.Wendler@rub.de

1. A kernel has uniform r-moments, if for all $k \in N_0$
$$\iint |h(x_1, x_2)|^r \, dF(x_1) \, dF(x_2) \leq M,$$
$$\int |h(x_1, x_k)|^r \, dP(x_1, x_k) \leq M.$$

2. A kernel h is called P-Lipschitz-continuous with constant $L > 0$, if
$$\mathbf{E}\left[|h(X,Y) - h(X',Y)| \, \mathbf{1}_{\{|X-X'| \leq \epsilon\}}\right] \leq L\epsilon$$
for every $\epsilon > 0$, every pair X and Y with the common distribution $\mathcal{P}_{X_1, X_k}$ for some $k \in N$ or $\mathcal{P}_{X_1} \times \mathcal{P}_{X_1}$ and X' and Y also with one of these common distributions. With $\mathbf{1}_A$, we denote the indicator function of a set A.

It is clear that every Lipschitz-continuous kernel function is P-Lipschitz-continuous.

2 Main results

To bootstrap a U-statistic we can apply the nonoverlapping block bootstrap and plug the observations $X_1^\star, \ldots, X_{kp}^\star$ in (see [2]):
$$U_n^\star(h) = \frac{2}{pk(pk-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq pk} h\left(X_i^\star, X_j^\star\right).$$

Below we will give one of our results for strongly mixing processes (with mixing coefficients $\alpha(n)$, for the definition see [4]). By $\mathbf{P}^\star, \mathbf{E}^\star, \mathrm{Var}^\star$ we denote the probability, expectation and variance conditionally on $(X_n)_{n \in N}$.

Theorem 1. *Let $(X_n)_{n \in N}$ be a strongly mixing stationary process and h a kernel with uniform $2+\delta$-moments for a $\delta > 0$ and P-Lipschitz-continuous with constant $L > 0$. Assume that the following conditions hold:*
$\mathbf{E}|X_1|^\gamma < \infty$ *for a* $\gamma > 0$, *and* $\alpha(n) = O(n^{-\rho})$ *for a* $\rho > \frac{3\gamma\delta + \delta + 5\gamma + 2}{2\gamma\delta}$.
Then a.s. as $n \to \infty$
$$\mathrm{Var}^\star\left[\sqrt{pk} U_n^\star(h)\right] - \mathrm{Var}\left[\sqrt{n} U_n(h)\right] \to 0,$$
$$\sup_{x \in R} \left| \mathbf{P}^\star\left[\sqrt{pk}\left(U_n^\star(h) - \mathbf{E}^\star[U_n^\star]\right) \leq x\right] - \mathbf{P}\left[\sqrt{n}\left(U_n(h) - \theta\right) \leq x\right] \right| \to 0.$$

References

[1] *Carlstein E.*, The use of subseries values for estimating the variance of a general statistic from stationary sequence. Ann. Stat., 1986, v. 14, p. 1171–1179.

[2] *Dehling H., Wendler M.*, Central limit theorem and the bootstrap for U-statistics of strongly mixing data. J. Multivariate Anal. 2010, v. 101, p.126–137.

[3] *Hoeffding W.*, A class of statistics with asymptotically normal distribution. Ann. Math. Stat., 1948, v. 19, p. 293–325.

[4] *Ibragimov I.A., Linnik Y.V.*, Independent and stationary sequences of random variables. Groningen, Wolters-Noordhoff, 1971.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Functional central limit theorem for the measure of Gaussian excursion sets[1]

Alexey P. Shashkin[2]

A functional central limit theorem for the Hausdorff measure of Gaussian excursion sets is established.

1 Introduction

Excursion sets of Gaussian random fields have attracted much attention in recent years due to their applications in image analysis, tomography and astrophysics. Such excursion sets generate several geometrical characteristics, among which the most important are the Minkowsky functionals (volumes, surface area, Euler characteristics etc.). It is interesting to consider the behavior of these random quantities, while the random field is observed in some bounded domain. Starting from the classical Rice formula for the expectation of the level crossings number of a smooth Gaussian random process, many results concerning moments computation and asymptotical normality have been established. These achievements are due to Cramér, Belyaev, Cuzick, Piterbarg and many other scientists, see [1], [2] and references therein. For random fields with a d-dimensional Euclidean space taken as index set, a natural analogue of the number of level crossings is the $(d-1)$-dimensional Hausdorff measure of the level sets. Adler, Wschebor, Taylor etc. gave expressions for expectations and higher-order moments [1], and Kratz and Leon provided a method for establishing asymptotical normality based on Wiener-Ito expansions [3]. There are also several generalizing papers where non-Gaussian random fields are studied [1, ch. 15], [4].

A natural question is whether one can study these geometrical characteristics for all real levels simultaneously, thereby obtaining a random process, and prove limit theorems for the corresponding processes under proper normalization. When considering volumes, this amounts to a variant of empirical processes convergence [5]. However, for other Minkowsky functionals this question has not been addressed before (while similar problem concerning local times of a smooth Gaussian process was solved in [6]). In the next section the functional central limit theorem for the random process of level set measures is stated.

2 Basic results

Let $d > 2$ and $X = \{X(s), s \in \mathbb{R}^d\}$ be a centered, stationary and isotropic Gaussian random process with covariance function R. We assume that its realizations are C^1, almost surely (thus

[1]This work was supported by RFBR grant N 10-01-00397.

[2]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: ashashkin@hotmail.com

R is of C^2 class) and that

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big(|R(s)|+\sum_{j,k=1}^{d}\Big|\frac{\partial^2 R(s)}{\partial s_j \partial s_k}\Big|\Big)ds<\infty.$$

Using the rescaling if necessary we assume also that $\mathsf{Var}X(s)=1$ and $\mathsf{Var}(\partial X(s)/\partial t_j)=1$, for $s\in\mathbb{R}^d$ and $j=1,\dots,d$.

Denote by $\mathcal{H}_k$ the k-dimensional Hausdorff measure of a bounded Borel subset of $\mathbb{R}^d$. For $u\in\mathbb{R}$ and $t>0$, set

$$N_t(u):=\mathcal{H}_{d-1}(\{s\in[0,t]^d:\ X(s)=u\})$$

to be the Hausdorff measure of the level set of X determined by the level u, taken inside a cube $[0,t]^d$. Note that with probability one $N_t(u)$ coincides with the surface area of the excursion set $\{s\in[0,t]^d:\ X(s)\ge u\}$.

Take $Z_t(u):=(Z_t(u)-\mathsf{E}Z_t(u))/t^{d/2}$, where $t>0$ and $u\in\mathbb{R}$. Then one has

Theorem 1. *Suppose that all assumptions above hold. Then the random processes $Z_t(\cdot)$ converge in distribution in $C(\mathbb{R})$, as $t\to\infty$, to a centered Gaussian process $Z=\{Z(u),u\in\mathbb{R}\}$ with covariance function*

$$cov(Z(a),Z(b))=\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\mathsf{E}(\|\nabla X(0)\|\|\nabla X(s)\||X(0)=a,X(s)=b)p_{X(0),X(s)}(a,b)-$$

$$(\mathsf{E}\|\nabla X(0)\|)^2\frac{e^{-a^2/2-b^2/2}}{2\pi}\Big)ds,$$

where $p_{X(0),X(s)}$ stands for the density of $(X(0),X(s))$.

Acknowledgments. The author thanks Professors A.V.Bulinski and E.Spodarev for useful discussions.

References

[1] *Adler R.J., Taylor J.E.*, Random Fields and Geometry. Springer-Verlag, 2007.

[2] *Kratz M.*, Level crossings and other level functionals of stationary Gaussian processes. Probab. Surv., 2006, v. 3, p. 230–288.

[3] *Kratz M., León J.*, Central limit theorems for level functionals of stationary Gaussian processes and fields. J. Theoret. Probab., 2001, v. 14, N. 3, p. 639–672.

[4] *Bulinski A., Spodarev E., Timmerman F.*, Central limit theorems for the excursion sets volumes of weakly dependent random fields. Bernoulli (in print), `arXiv:1005.0483v1`.

[5] *Meschenmoser D., Shashkin A.*, Functional central limit theorem for the volume of excursion sets generated by associated random fields. Statist. Probab. Lett., 2011, v. 81, N. 6, p. 642–646.

[6] *Elizarov A.I.*, Central limit theorem for the sojourn time and local time of a stationary process. Theory Probab. Appl., 1988, v. 33, N. 1, p. 161–164.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

New moment-type estimates for the accuracy of the normal approximation for sums of independent random variables[1]

Irina Shevtsova[2]

Let $\mathcal{F}_3$ be the class of all distribution functions (d.f.'s) $F(x)$ satisfying the conditions

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^3\,dF(x) < \infty.$$

Let $X_1, \ldots, X_n$ be independent random variables defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ with the corresponding d.f.'s $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_3$. Denote

$$\sigma_j^2 = \mathsf{E}X_j^2, \quad \beta_{1,j} = \mathsf{E}|X_j|, \quad \beta_{3,j} = \mathsf{E}|X_j|^3, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2, \quad \ell_n = \frac{1}{B_n^3}\sum_{j=1}^n \beta_{3,j}, \quad \overline{F}_n(x) = \mathsf{P}(X_1 + \ldots + X_n < xB_n),$$

$$\Delta_n = \Delta_n(F_1, \ldots, F_n) = \sup_x |\overline{F}_n(x) - \Phi(x)|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$\Phi(x)$ being the standard normal d.f. Assume that $B_n > 0$. It is easy to verify that under the above assumptions for all $n \geqslant 1$

$$\ell_n \geqslant \frac{1}{B_n^3}\sum_{j=1}^n \sigma_j^3 \geqslant n^{-1/2}.$$

We prove that for all $n \geqslant 1$ the following bounds take place:

$$\Delta_n \leq \frac{2\ell_n}{3\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}B_n^3}\sum_{j=1}^n \beta_{1,j}\sigma_j^2 + \left\{ \begin{array}{ll} 6\ell_n^{5/3}, & F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_3, \\ 3\ell_n^2, & F_1 = \ldots = F_n \in \mathcal{F}_3. \end{array} \right. \tag{1}$$

Here the constants $2/(3\sqrt{2\pi}) = 0.2659\ldots$ and $(2\sqrt{2\pi})^{-1} = 0.1994\ldots$ are optimal in the sense that the value of the coefficient at ℓ_n in (1) cannot be less than $2/(3\sqrt{2\pi})$ for any finite value of the coefficient at the second term, and the coefficient at the second term in (1) cannot be less than $(2\sqrt{2\pi})^{-1}$ provided that the coefficient at the first term is equal to $2/(3\sqrt{2\pi})$. Inequality (1) improves the results of H. Prawitz (1975) and V. Bentkus (1991, 1994) where the function $\sum_{j=1}^n \sigma_j^3 \geqslant \sum_{j=1}^n \beta_{1,j}\sigma_j^2$ was used in the second term and no concrete values of the constants in the remainder were given.

[1]This work was supported by RFBR grants No. 11-01-00515a, 11-07-00112a, 11-01-12026-ofi-m and by the Ministry for Education and Science (grant MK–2256.2012.1, state contract 16.740.11.0133).

[2]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics. E-mail: ishevtsova@cs.msu.su

We also prove another moment-type estimate: for all $n \geqslant 1$ and $c \geqslant 2/(3\sqrt{2\pi})$

$$\Delta_n \le c\ell_n + \frac{K(c)}{B_n^3}\sum_{j=1}^n \sigma_j^3 + \begin{cases} 3\ell_n^{7/6} \wedge A(c)\ell_n^{4/3}, & F_1,\ldots,F_n \in \mathcal{F}_3, \\ 2\ell_n^{3/2} \wedge A(c)\ell_n^2, & F_1 = \ldots = F_n \in \mathcal{F}_3, \end{cases} \tag{2}$$

where

$$K(c) = \left.\frac{1-\theta+2(\theta+2)p(\theta)-2(\theta+3)p^2(\theta)}{6\sqrt{2\pi p(\theta)(1-p(\theta))}}\right|_{\theta=6\sqrt{2\pi}c-3},$$

$$p(\theta) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\theta+1}{\theta+3}}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\arctan\sqrt{\theta^2+2\frac{\theta-1}{\theta+3}}\right), \quad \theta \geqslant 1,$$

$A(c) > 0$ being a decreasing function of c given in the explicit form, $A(c)$ takes finite values for all $c > 2/(3\sqrt{2\pi})$, but $A(c) \to \infty$ as $c \to 2/(3\sqrt{2\pi})$. The value of $K(c)$ in (2) cannot be lowered for any value of $c \geqslant 2/(3\sqrt{2\pi})$. It can be made sure that $K(c)$ decreases monotonically and alters its sign in a single point $c = (\sqrt{10}+3)/(6\sqrt{2\pi}) = 0.4097\ldots$ In particular, with this value of c estimate (2) implies the inequality

$$\Delta_n \le \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}}\cdot\ell_n + \begin{cases} 4\ell_n^{4/3}, & F_1,\ldots,F_n \in \mathcal{F}_3, \\ 3\ell_n^2, & F_1 = \ldots = F_n \in \mathcal{F}_3, \end{cases}$$

which improves the result of G. P. Chistyakov (1996, 2001) with respect to the remainder (in Chistyakov (2001) the remainder has the form $O\big(\ell_n^{40/39}|\ln\ell_n|^{7/6}\big)$ with an unknown constant), whereas for $c = 2/(3\sqrt{2\pi})$ estimate (2) implies the inequality

$$\Delta_n \le \frac{2\ell_n}{3\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{6\pi}}\sum_{j=1}^n\frac{\sigma_j^3}{B_n^3} + \begin{cases} 3\ell_n^{7/6}, & F_1,\ldots,F_n \in \mathcal{F}_3, \\ 2\ell_n^{3/2}, & F_1 = \ldots = F_n \in \mathcal{F}_3, \end{cases}$$

which improves the results of H. Prawitz (1975) and V. Bentkus (1991, 1994) with respect to the second term, since

$$0.1569\ldots = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{6\pi}} < \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} = 0.1994\ldots$$

An improved analog of inequality (1) is obtained for the case where the random summands have symmetric distributions improving the corresponding results of V. Bentkus (1991, 1994) and G. P. Chistyakov (1996, 2001). Analogous results are also presented for the case where the random summands possess absolute moments of order $2+\delta$ with some $0<\delta<1$.

References

[1] *Shevtsova I.G.* On the accuracy of the normal approximation for sums of independent random variables. Doklady Mathematics, 2012, v. 443, N 5, to appear (in Russian).

[2] *Shevtsova I.G.* On the accuracy of the normal approximation for sums of independent symmetric random variables. Doklady Mathematics, 2012, v. 443, N 6, to appear (in Russian).

[3] *Shevtsova I.G.* Moment-type estimates with asymptotically optimal structure for the accuracy of the normal approximation. Proceedings of the Conference on Stochastic Models and their Applications, 2012, University of Debrecen, Hungary, to appear.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

A probabilistic approximation of the Cauchy problem solution of some evolution equations.

Natalya Smorodina[1]

We construct an analogy of a probabilistic representation of the Cauchy problem solution of the equation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x)u$, where σ is a complex number.

[1]St.Petersburg State University, St.-Petersburg, Russian Federation.
E-mail: `smorodin@ns2691.spb.edu`

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Cluster analysis for solar butterfly diagrams

Dmitry Sokoloff and Egor Illarionov[1]

We investigate to what extent the wings of solar butterfly diagrams can be separated without an explicit usage of Hale's polarity law as well as the location of the solar equator. We apply two algorithms of cluster analysis for this purpose, namely DBSCAN and C-means, and demonstrate their ability to separate the wings of contemporary butterfly diagrams based on the sunspot group density in the diagram only.

1 Introduction

The physical nature of the solar activity cycle is associated with an activity wave propagation from solar mid-latitudes to the solar equator. The waves can be easily seen in the well-known butterfly diagram as inclined wide strips of increased sunspot density. More specifically, a cycle contains one wave in each solar hemisphere. Sunspots, as places where magnetic lines of an initially toroidal magnetic field rise above the solar surface or return back into the solar interior, can be associated with each other in sunspot groups. A polarity of a given group can be introduced according to the magnetic field direction in the leading spot of the group. The polarity law by Hale says that each of the activity waves (wings of the butterfly diagram) in a given cycle has a preferred polarity of sunspot groups, while the northern and southern activity waves of a given cycle have opposite polarities. Activity waves in a given hemisphere in two consecutive cycles have opposite polarities as well.

In previous studies, two approaches were employed to separate cycle wings. The first approach relies on the magnetic field sign in the leading polarity of sunspot groups or Hale's polarity law. The second approach uses the latitudinal migration of the emergence locations of sunspot groups, also known as Spörer's law. It implies that sunspots appear at mid-latitudes at the beginning of a sunspot cycle; the sunspot formation zone then gradually migrates to the equator, reaching latitudes below 10° at the end of the cycle. The mean latitudes of sunspot groups are usually determined by the center of mass for the northern and southern hemispheres, but boundaries of the cycle branches are determined visually.

The ability of the visual method is limited, however. Several percent of the sunspot groups do not follow Hale's polarity law. A consistent determination of the exact number of the groups which violate the law requires, however, a well-defined algorithm for the activity wave identification. Sometimes it is not obvious to which cycle and activity wave a particular sunspot group belongs. This makes an explicit formulation of an algorithm desirable which separates the groups between cycles and activity waves. The desired algorithm is expected to avoid an explicit usage of the group polarities to be used in particular to estimate the accuracy of Hale's polarity law. Of course, the activity waves isolated by the desired algorithm should agree in general with the visual impression, but a deviation from the traditional identification may be used to extract some physical information concerning the underlying dynamo action.

[1]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: `d_sokoloff@hotmail.com`

The desired algorithm being of some interest for contemporary activity cycles becomes especially important for the historical butterfly diagrams obtained from archive data because the polarity of the groups can be determined for the last century only. The aim of this paper is to present a method for the above described aim and discuss how it works with contemporary as well as historical data.

2 Basic results

Illarionov et al. [1] apllied two algorithms of cluster analysis for this purpose, namely DBSCAN and C-means, and demonstrated their ability to separate the wings of contemporary butterfly diagrams based on the sunspot group density in the diagram only. Here we present a result of a systematic application of the approach suggested to all solar cycles for which data of sunspot telescopic observations are available.

The C-means algorithm gives, as a by-product, a possibility to estimate the migration rate for the wings in the butterfly diagram. It simply corresponds to the inclination of the ellipses, which approximate the clusters obtained, with respect to the time axis. Estimates for the migration rate obtained for Cycles 12 – 22 are given in Table 1.

Table 1. The migration rate in $°\mathrm{year}^{-1}$ for the individual wings in the butterfly diagram.

Cycle	Northern hemisphere	Southern hemisphere
12	3.6	5.4
13	4.4	6.5
14	6.3	7.6
15	4.9	4.5
16	4.7	3.5
17	5.6	4.2
18	4.2	4.3
19	3.3	2.3
20	5.7	6.0
21	3.8	3.4
22	4.7	4.0

References

[1] *Illarionov E., Sokoloff D., Arlt R., Khlystova A.*, Cluster analysis for pattern recognition in solar butterfly diagrams. Astronomische Nachrichten, 2011, v. 332, N 6, p. 590–596.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

On the Borel-Cantelli lemma

Alexei V. Stepanov[1]

We present a generalization the first part of the Borel-Cantelli lemma.

1 Introduction

Suppose $A_1, A_2, \cdots$ is a sequence of events on a common probability space and that A_i^c denotes the complement of event A_i. The Borel-Cantelli lemma, presented below as Lemma 1, is used extensively for producing strong limit theorems.

Lemma 1. (1) *If, for any sequence $A_1, A_2, \cdots$ of events, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$, then $\mathbf{P}(A_n \text{ i.o.}) = 0$, where i.o. is an abbreviation for "infinitively often".*

(2) *If $A_1, A_2, \cdots$ is a sequence of independent events and if*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty, \tag{1}$$

then $\mathbf{P}(A_n \text{ i.o.}) = 1$.

The independence condition in the second part of the Borel-Cantelli lemma is weakened by a number of authors; see the works [3], [4] and the references therein.

The first part of the Borel-Cantelli lemma is generalized in [2] and [1]. These results are presented below as Lemma 2 and Lemma 3, respectively.

Lemma 2. *Let $A_1, A_2, \ldots$ be a sequence of events such that $\mathbf{P}(A_n) \to 0$. If $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n A_{n+1}^c) < \infty$, then $\mathbf{P}(A_n \text{ i.o.}) = 0$.*

Lemma 3. *Let $A_1, A_2, \ldots$ be a sequence of events such that $\mathbf{P}(A_n) \to 0$. If for some $m \geq 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n^c \ldots A_{n+m-1}^c A_{n+m}) < \infty$, then $\mathbf{P}\{A_n \text{ i.o.}\} = 0$.*

In the next section, we present a new generalization of the first part of the Borel-Cantelli lemma. This generalization states that the identity $\mathbf{P}(A_n \text{ i.o.}) = 0$ might be true when $\mathbf{P}(A_n) \to 0$ and condition (1) holds.

2 Results

Lemma 4. *Let $A_1, A_2, \ldots$ be a sequence of events such that $\mathbf{P}(A_n) \to 0$. Let (1) hold true,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n A_{n+1}) = \infty$$

[1]Department of Mathematics, Izmir University of Economics, 35330, Balcova, Izmir, Turkey; E-mail: `alexeistep45@mail.ru; alexei.stepanov@ieu.edu.tr`

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\mathbf{P}(A_n) - \mathbf{P}(A_n A_{n+1})] < \infty.$$

Then $\mathbf{P}(A_n \ i.o.) = 0$.

The following theorem can be derived from Lemma 4.

Theorem 1. *Let* $Y_1, Y_2, \ldots$ *be a sequence of dependent random variables such that* $Y_n \xrightarrow{p} \mu$, *where* μ *is a constant. Let for all small* $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(Y_n \notin [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]) = \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(Y_n \notin [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon], Y_{n+1} \notin [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]) = \infty,$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\mathbf{P}(Y_n \notin [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]) - \mathbf{P}(Y_n \notin [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon], Y_{n+1} \notin [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon])] < \infty.$$

Then $Y_n \xrightarrow{a.s.} \mu$.

References

[1] *Balakrishnan N., Stepanov A.*, Generalization of the Borel-Cantelli lemma. The Mathematical Scientist, 2010, v. 35, N 1, p. 61–62.

[2] *Barndorff-Nielsen O.*, On the rate of growth of the partial maxima of a sequence of independent identically distributed random variables. Math. Scand., 1961, v. 9, p. 383–394.

[3] *Petrov V.V.*, A note on the Borel-Cantelli lemma. Statist. Probab. Lett., 2002, v. 58, p. 283–286.

[4] *Petrov V.V.*, A generalization of the Borel-Cantelli Lemma. Statist. Probab. Lett., 2004, v. 67, p. 233–239.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

On Cornish–Fisher Expansions and its Applications[1]

Vladimir V. Ulyanov[2]

The talk is a report of the state-of-the-art in Cornish-Fisher expansions and its applications on the base of recent publications.

In statistical inference it is of fundamental importance to obtain the sampling distribution of statistics. However, we often encounter situations where the exact distribution cannot be obtained in closed form, or even if it is obtained, it might be of little use because of its complexity. One practical way of getting around the problem is to provide reasonable approximations of the distribution function and its quantiles, along with extra information on their possible errors. It can be made with help of Edgeworth and Cornish–Fisher expansions (EE and CFE resp.). Recently the interest for CFE stirred up because of intensive study of VaR (Value at Risk) models in financial mathematics and financial risk management (see [1] and [2]).

In the talk we discuss new approaches to CFE appeared in last years. We consider as well the computable error bounds for CFE in the case when there are error bounds for EE of the distributions of statistics. The results are illustrated for t- and chi-squared statistics. The Bartlett type corrections will be also considered.

The Theorems below are the joint results of V.V.Ulyanov, Y.Fujikoshi and M.Aoshima (see e.g. Ch.5 in [3])

Theorem 1. *Suppose that for the distribution function of a statistic U we have*

$$F(x) \equiv \mathbf{P}\{U \le x\} = G(x) + R_1(x),$$

where for remainder term $R_1(x)$ there exists a constant c_1 such that

$$|R_1(x)| \le d_1 \equiv c_1\epsilon, \ \ (\epsilon = n^{-1/2} \text{ or } n^{-1}).$$

Let x_α and u_α be the upper $100\alpha\%$ points of F and G respectively, that is

$$\mathbf{P}\{U \le x_\alpha\} = G(u_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Then for any α such that $1 - d_1 > \alpha > d_1$ we have

(1) $u_{\alpha+d_1} \le x_\alpha \le u_{\alpha-d_1}$,

(2) $|x_\alpha - u_\alpha| \le d_1/g(u_{(1)})$, *where g is the density function of the limiting distribution G and*

$$g(u_{(1)}) = \min_{u\in[u_{\alpha+d_1},u_{\alpha-d_1}]} g(u).$$

[1]This work was supported by RFBR grants N 11-01-00515, 11-01-12104.

[2]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics. E-mail: vladim53@yandex.ru

Theorem 2. *In the notation of Theorem 1 we assume that*

$$F(x) \equiv \mathbf{P}\{U \le x\} = G(x) + \epsilon g(x)a(x) + R_2(x),$$

where for remainder term $R_2(x)$ there exists a constant c_2 such that

$$|R_2(x)| \le d_2 \equiv c_2\epsilon^2.$$

Let $T = T(u)$ be a monotone increasing transform such that

$$\mathbf{P}\{T(U) \le x\} = G(x) + \tilde{R}_2(x) \quad \text{with} \quad |\tilde{R}_2(x)| \le \tilde{d}_2 \equiv \tilde{c}_2\epsilon^2.$$

Let $\tilde{x}_\alpha$ and u_α be the upper $100\alpha\%$ points of $\mathbf{P}\{T(U) \le x\}$ and G, respectively. Then for any α such that $1 - \tilde{d}_2 > \alpha > \tilde{d}_2$ we have

$$|\tilde{x}_\alpha - u_\alpha| \le \tilde{d}_2/g(u_{(2)}),$$

where

$$g(u_{(2)}) = \min_{u \in [u_{\alpha+\tilde{d}_2}, u_{\alpha-\tilde{d}_2}]} g(u).$$

Theorem 3. *We use the notation of Theorem 2. Let $b(x)$ be a function inverse to T, i.e. $b(T(x)) = x$. Then*

$$x_\alpha = b(\tilde{x}_\alpha) \quad \text{and} \quad b(x) = x - \epsilon a(x) + O(\epsilon^2)$$

and for α such that $1 - \tilde{d}_2 > \alpha > \tilde{d}_2$ we have

$$|x_\alpha - b(u_\alpha)| \le |b'(u^*)| \frac{\tilde{d}_2}{g(u_{(2)})},$$

where

$$|b'(u^*)| = \max_{u \in [u_{\alpha+\tilde{d}_2}, u_{\alpha-\tilde{d}_2}]} |b'(u)|.$$

References

[1] *Jaschke S.*, The Cornish-Fisher-expansion in the context of delta-gamma-normal approximations. J. Risk, 2002, v. 4, N 4, p. 33–52.

[2] *Ulyanov V.V.*, Cornish-Fisher Expansions, International Encyclopedia of Statistical Science (Ed. M.Lovric), Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2011, p. 312–315.

[3] *Fujikoshi Y., Ulyanov V.V. Shimizu R.*, Multivariate Statistics : High-Dimensional and Large-Sample Approximations, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Hoboken, N.J., 2010.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Large Deviations for Branching Random Walks[1]

Elena B. Yarovaya[2], Stanislav A. Molchanov

Resolvent analysis of the spectrum of a bounded symmetric operator with multi-points potential is used to investigate branching random walks with large deviation and a few sources of branching. The limit theorems on asymptotic behavior of the Green function for transition probabilities are established. A special attention is paid to the case when the spectrum of the evolution operator of mean numbers of particles contains only one positive isolated eigenvalue.

1 Introduction

Works of B. V. Gnedenko and his school, especially the asymptotic results of the theory of stochastic processes, in particular birth-death processes, are proved to be of importance in problems of the reliability and queuing theories [1]. The problems of the modern reliability and queuing theory arisen recently require to involve new classes of random processes. One of such classes [2, 3], which was called the branching random walk (BRW) or branching walk, is represented by the birth-death processes with walking particles.

Supercritical BRW on $\mathbf{Z}^d$ with a single center of branching was studied in [4] for a wide class of symmetric and symmetrizable operators, generators of underlying random walk. Our purpose is to investigate BRWs on $\mathbf{Z}^d$ with large deviations for underlying random walks. In [5] the new approach based on the resolvent analysis of evolutionary operators has been proposed to study a continuous model of homopolymers on $\mathbf{R}^d$ with path large deviations for Brownian motion. However, [5] does not cover the case of BRW on $\mathbf{Z}^d$.

2 Model and Basic results

We consider a continuous-time symmetric BRW on $\mathbf{Z}^d$ where the particles can reproduce one counterpart at a few lattice points (the sources of branching) with large deviations for a random walk. The random walk generator is defined by the operator

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{z\neq 0} \left(f(x+z) - f(z)\right) q(z),$$

in the space $l^p(\mathbf{Z}^d)$ [4] , $1 \le p \le \infty$, where $q(z) = q(-z)$, therefore $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ in $l^2(\mathbf{Z}^d)$. It is assumed also that $\sum_{z\neq 0} q(z) = -q(0) = 1$, and the set of vectors $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbf{Z}^d$ such that $z = \sum_{i=1}^{k} z_i$ and $q(z_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, is exist for every $z \in \mathbf{Z}^d$. Moreover, for $\lambda \in \mathbf{R}^d$ the series $\sum_{z\neq 0} q(z)(e^{(\lambda,z)} - 1)$ converges. The rate of the particle division is given by the potential

[1]The first author was supported by RFBR grant N 10-01-00266

[2]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: yarovaya@mech.math.msu.su

$\beta V(x)$, $x \in \mathbf{Z}^d$, on a finite set

$$V(x) = \sum_{l=1}^{N} V_l \delta(x - x_l), \quad V_l > 0.$$

Limit theorems are obtained for transition probabilities $p(t, x, y)$ as $|y - x| \to \infty$, satisfying $\partial_t p = \mathcal{L} p$ with the initial conditions $p(0, x, y) = \delta_y(x)$, and their Green functions

$$G_\mu(x, y) = \int_0^\infty e^{-\mu t} p(t, x, y)\, dt, \quad \mu \geq 0.$$

In particular, it is shown that for every fixed $\mu > 0$ the Green function $G_\mu(x, y)$ has the asymptotic representation

$$G_\mu(x, y) \asymp \frac{e^{-|y-x| h_\mu(y-x/|y-x|)}}{|y - x|^{\frac{d-1}{2}}} r_\mu(y - x/|y - x|), \quad |y - x| \to \infty,$$

where functions h_μ and r_μ are defined by the characteristics of BRW.

The spectrum of the evolution operator generating the mean numbers of particles $\mathcal{H}_\beta = \mathcal{L} + \beta V(\cdot) I$ consists of two components: the pure absolutely continuous spectrum $\sigma_{ac}(\mathcal{H}_\beta) \subset [-2, 0]$ and the discrete spectrum $\sigma_d(\mathcal{H}_\beta)$, containing at most N non-negative eigenvalues. If $d = 1, 2$ (the recurrent case) then $\sigma_d(\mathcal{H}_\beta) \neq \emptyset$ for any $\beta > 0$. If $d \geq 3$ then one can find $\beta_{cr} > 0$ such that $\sigma_d(\mathcal{H}_\beta) = \emptyset$ for $\beta < \beta_{cr}$ and $\sigma_d(\mathcal{H}_\beta) \neq \emptyset$ for $\beta > \beta_{cr}$. Special attention is paid to the case when $\operatorname{card} \sigma_d(\mathcal{H}_\beta) = 1$ and the relative eigenvalue $\lambda_0(\beta)$ is positive. In this case the asymptotic behavior of $\lambda_0(\beta)$ when $\beta \to \beta_{cr}$ is as follows

$$\begin{aligned}
&\lambda_0(\beta) = c_1 \beta^2, && d = 1,\\
&\lambda_0(\beta) = e^{-c_2/\beta}, && d = 2,\\
&\lambda_0(\beta) = c_3(\beta - \beta_{cr})^2, && d = 3,\\
&\lambda_0(\beta) = c_4(\beta - \beta_{cr}) \ln^{-1}((\beta - \beta_{cr})^{-1}), && d = 4,\\
&\lambda_0(\beta) = c_d(\beta - \beta_{cr}), && d \geq 5,
\end{aligned}$$

where c_i, $i \in \mathbf{N}$, are positive constants. If $\beta > \beta_{cr}$ then for every fixed $\mu > 0$ the asymptotic behavior of the eigenfunction $\psi_0(x, \beta)$ has the representation: $\psi_0(x, \beta) \asymp G_{\lambda_0(\beta)}(0, x)$. If $\beta \to \beta_{cr}$ for $d \geq 3$ or $\beta \to 0$ for $d = 1, 2$ then $\lambda_0(\beta) \to 0$, and the expression for the eigenfunction is obtained in the explicit form

$$\psi_0(x, \beta) \asymp e^{-\sqrt{\lambda_0(\beta)}|x|(1+o(1))}.$$

References

[1] *Gnedenko B.V, Belyaev Yu.K, Solov'ev A.D.* Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti (Mathematical Methods in the Reliability Theory). Moscow, Nauka, 1965.

[2] *Vatutin V.A., Topchii V.A. Yarovaya E.B.* Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers. Teoriya Jmovirnostej ta Matematichna Statistika, 2003, v. 69. p. 158–172.

[3] *Yarovaya E.B.* Models of Branching Walks and their Use in the Reliability Theory. Automation and Remote Control, 2010, v. 71, N 7, p. 1308 - 1324.

[4] *Yarovaya E.B.* Supercritical Branching Random Walks with a Single Source. Communications in Statistics — Theory and Methods, 2011, v.40, N 16, p. 2926–2945.

[5] *Cranston, M., Koralov, L., Molchanov, S., Vainberg, B.* Continuous model for homopolymers. J. Funct. Anal., 2009, v. 256. N 8, p. 2656–2696.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Explicit rates of approximation in the CLT for quadratic forms[1]

Andrei Yu. Zaitsev[2]

In this talk we discuss the recent results obtained by the author jointly with Friedrich Götze (Bielefeld University) and published in [3] and [4].

Let $X, X_1, X_2, \ldots$ be i.i.d. $\mathbb{R}^d$-valued real random vectors. Assume that $\mathbf{E}\,X = 0$, $\operatorname{cov} X = \mathbb{C}$, $\mathbf{E}\,\|X\|^2 = \sigma^2$ and that X is not concentrated in a proper subspace of $\mathbb{R}^d$. Let G be a mean zero Gaussian random vector with the same covariance operator as that of X. We study the distributions of non-degenerate quadratic forms $\mathbb{Q}[S_N]$ of the normalized sums $S_N = N^{-1/2}\,(X_1 + \cdots + X_N)$ and show that, without any additional conditions,

$$\Delta_N = \sup_x \Big| \mathbf{P}\big\{\mathbb{Q}\,[S_N] \le x\big\} - \mathbf{P}\big\{\mathbb{Q}\,[G] \le x\big\} \Big| = \mathcal{O}\big(N^{-1}\big),$$

provided that $d \ge 5$ and the fourth moment of X exists. Furthermore, we provide explicit bounds of order $\mathcal{O}\big(N^{-1}\big)$ for Δ_N for the rate of approximation by short asymptotic expansions and for the concentration functions of the random variables $\mathbb{Q}[S_N + a]$, $a \in \mathbb{R}^d$. The order of the bounds is optimal. It extends previous results of Bentkus and Götze [1] (for $d \ge 9$) to the case $d \ge 5$, which is the smallest possible dimension for such a bound. Moreover, we show that, in the finite dimensional case and for isometric $\mathbb{Q}$, the implied constant in $\mathcal{O}\big(N^{-1}\big)$ has the form $c_d\,\sigma^d\,(\det \mathbb{C})^{-1/2}\,\mathbf{E}\,\|\mathbb{C}^{-1/2}\,X\|^4$ with some c_d depending on d only. This answers a long standing question about optimal rates in the central limit theorem for quadratic forms starting with a seminal paper by C.-G. Esseen [2].

References

[1] *Bentkus V., Götze F.*,Uniform rates of convergence in the CLT for quadratic forms in multidimensional spaces. Probab. Theory Rel. Fields, 1997, v. 109, N 3, p. 367–416.

[2] *Esseen C.-G.*, Fourier analysis of distribution functions. Acta Math., 1945, v. 77, p. 1–125.

[3] *Гётце Ф., Зайцев А.Ю.*, Равномерные оценки точности аппроксимации короткими асимптотическими разложениями в центральной предельной теореме для квадратичных форм. Записки научных семинаров ПОМИ, 2010, т. 384, с. 105–153.

[4] *Götze F., Zaitsev A.Yu.*, Explicit rates of approximation in the CLT for quadratic forms. Preprint arXiv:1104.0519, 2011.

[1]Research supported by the SFB 701 in Bielefeld, by grants RFBR 10-01-00242 and 11-01-12104 and by the Program of Fundamental Researches of Russian Academy of Sciences “Modern Problems of Fundamental Mathematics”.

[2]St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute. E-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Strong limit theorems for risk processes with stochastic premiums

Nadiia M. Zinchenko[1]

Author's results concerning strong invariance principle for the superposition of random processes are discussed; their applications to investigation the asymptotics of classical risk processes and risk processes with stochastic premiums are presented.

1 Introduction

Since 1949, when famous book by B.V. Gnedenko and A.N. Kolmogorov was published, till our days the interest to limit theorems for sums of random variables does not decrease. In this work we present strong invariance principle (**SIP**, another term - a.s. approximation) for random sums $\xi(t) = \sum_{i=1}^{M(t)} z_i$, $M(t)$ - point process, as well as a number of results about the rate of growth and magnitude of fluctuation of such sums with emphasis on applications to risk processes in a rather general scheme. It worth to mention that B.V. Gnedenko and his students obtained a lot of interesting results for convergence of random sums (see, for instance, [1],[2]).

Within the risk models with stochastic premiums the risk process $U(t)$, $t \geq 0$, is defined as

$$U(t) = u + Q(t) = u + \Pi(t) - S(t) = u + \sum_{i=1}^{N_1(t)} y_i - \sum_{i=1}^{N(t)} x_i, \qquad (1)$$

where: $u \geq 0$ is an initial capital; point process $N(t)$ models the number of claims in the time interval $[0, t]$; positive random variables (r.v.) $\{x_i : i \geq 1\}$ are claim sizes; point process $N_1(t)$ is interpreted as a number of polices bought during $[0, t]$; r.v. $\{y_i : i \geq 1\}$ stand for sizes of premiums paid for corresponding polices.

We call $U(t)$ (or $Q(t)$) the *Cramér-Lundberg risk process with stochastic premiums* if $N(t)$ and $N_1(t)$ are two independent Poisson processes with intensities $\lambda > 0$ and $\lambda_1 > 0$; $\{x_i\}$ and $\{y_i\}$ are two sequences of positive i.i.d.r.v. independent of the Poisson processes and of each other with d.f. $F(x)$ and $G(x)$, respectively, $\lambda_1 \mathbf{E} y_1 > \lambda \mathbf{E} x_1$. This model, being a natural generalization of the classical Cramér-Lundberg risk model, was studied in [2-4].

We say that a random process $Q(t), t \geq 0$, admits the a.s. approximation by the random process $\eta(t)$ if $Q(t)$ (or stochastically equivalent process $Q'(t)$) can be constructed on the rich enough probability space together with $\eta(t)$, in such a way that a.s.

$$|Q(t) - \eta(t)| = o(r_1(t)) \vee O(r_1(t)), \qquad (2)$$

where $r_1(.)$ is a non-random function.

[1]Nizhyn State Mukola Gogol University, Faculty of Physics and Mathematics. E-mail: znm@univ.kiev.ua

2 Main results

Our main tools in proving SIP for the risk processes are general SIP-type theorems for the superposition of the random processes [4], as a consequence a number of SIP-type theorems for random sums are obtained. Concrete assumptions on summands clear up the type of $\eta(t)$ and the form of $r_1(.)$. For i.i.d.r.v. it is natural to consider Wiener process $W(t)$ or α-stable Lévy process $Y_\alpha(t)$ as an approximation process $\eta(t)$ in (2), also in model (1) it is natural to suppose that premiums have distributions with light tails or tails which are lighter than for claim sizes. For catastrophic accidents claims can be so large that they have infinity variance, i.e. belong to the domain of attraction of a certain stable law. Thus, for Cramér-Lundberg risk process with stochastic premiums we have:

Theorem 1. (I) *If in model* (1) *both premiums* $\{y_i\}$ *and claims* $\{x_i\}$ *have moments of order* $p > 2$, *then there is a Wiener process* $\{W_{\tilde{a},\tilde{\sigma}^2}(t), t \geq 0\}$ *with* $\tilde{a} = \lambda_1 m_1 - \lambda\mu_1$, $\tilde{\sigma}^2 = \lambda_1 m_2 + \lambda\mu_2$, $m_k = \mathbf{E}\mathbf{y}_1^k$, $\mu_k = \mathbf{E}x_1^k$, $k = 1, 2, ...$, *such that a.s.*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Q(t) - W_{\tilde{a},\tilde{\sigma}^2}(t)| = o(T^{1/p}). \tag{3}$$

(II) *If premiums* $\{y_i\}$ *and claims* $\{x_i\}$ *are light-tailed with finite moment generating function in some positive neighborhood of zero, then a.s.*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Q(t) - W_{\tilde{a},\tilde{\sigma}^2}(t)| = O(\log T). \tag{4}$$

Theorem 2. *Suppose that claim sizes* $\{x_i\}$ *are attracted to* α*-stable law with* $1 < \alpha < 2$, $\beta \in [-1, 1]$ *and satisfy some additional conditions on their characteristic function, premiums* $\{y_i\}$ *are i.i.d.r.v. with finite variance, then for some* $\varrho_0 = \varrho_0(\alpha, \beta) > 0$ *a.s.*

$$\left|Q(t) - (\lambda_1 m_1 - \lambda\mu_1)t - (\lambda + \lambda_1)^{1/\alpha} Y_{\alpha,\beta}(t)\right| = o(t^{1/\alpha - \varrho}), \quad \rho \in (0, \rho_0). \tag{5}$$

General Sip-type theorems [4] give also the possibility to investigate more general cases when $\{y_i\}$ and $\{x_i\}$ are sequences of dependent r.v., for example, associated or weakly dependent, $N(t)$ and $N_1(t)$ can be renewal processes, Cox processes, ets. Using (3) - (5) with appropriate error term we transfer the results about the asymptotic behavior of the Wiener and stable Lévy processes on the rate of growth of risk process $Q(t)$ and its increments $Q(t + a_t) - Q(t)$ on intervals, whose length a_t grows as $t \to \infty$. In such a way various modifications of the LIL and Erdös-Rényi-Csörgő-Révész type SLLN for risk processes are obtained.

References

[1] *Gnedenko B.V., Korolev V.Yu.*, Random Summation: Limit Theorems and Applications, Boca–Raton, Florida: CRT Press, 1996.

[2] *Korolev V.Yu., Bening V.E., Shorgin S.Ya.*, Mathematical Foundations of Risk Theory, M: Fizmatlit, 2007 (in Russian).

[3] *Zinchenko N., Andrusiv A.*, Risk processes with stochastic premiums, Theory of Stoch. Processes, 2008, v.14 (27), N 3-4, p. 189–208.

[4] *Zinchenko N.*, Strong invariance principle for a superposition of random processes, Theory of Stoch.Processes, 2010, v. 16(29), N 1, p. 130–138.

СЕКЦИЯ 2

Стохастическая теория экстремумов
Stochastic Extreme Value Theory

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Сходимость почти наверное для рекордов[1]

О. И. Клесов[2]

В докладе, основанном на совместных исследованиях с А. Духаном (Франция) и Й. Штайнебахом (Германия), рассматривается дуальность в поведении рекордов и моментами рекордов для сходимости почти наверное.

1 Введение

Изучается предельное поведение рекордных моментов и количества рекордов для так называемой F^α-схемы (см. [5]).

Пусть $\{X_k, k \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Чтобы избежать лишних усложнений, мы предположим, что общая функция распределения является непрерывной; поэтому события типа $\{X_i = X_j\}$ имеют вероятность 0, если $i \neq j$.

Пусть $L(1) = 1$. Следующие члены последовательности $\{L(n)\}$, которые мы называем *моментами рекордов*, построенными по последовательности $\{X_n\}$, определим рекуррентно по формуле

$$L(n) = \min\{k > L(n-1) : X_k > X_{L(n-1)}\}, \qquad n \geq 2. \tag{1}$$

Мы считаем, что $\inf \emptyset := +\infty$.

Мы также рассматриваем последовательность

$$\mu(n) = \#\{k : L(k) \leq n\}, \qquad n \geq 1, \tag{2}$$

значениями которого являются количества рекордов до момента n.

В теории рекордов известно, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(n)}{\ln n} = 1 \qquad \text{п.н.}, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln L(n)}{n} = 1 \qquad \text{п.н.} \tag{4}$$

(см., например, [2]). Мы покажем, что фактически эти два соотношения являются эквивалентными в случае независимых и одинаково распределенных случайных величин.

Основной целью доклада является показать, что этот результат можно доказать и для F^α-схемы, в которой случайные величины $\{X_n\}$ не обязательно имеют одинаковые распределения. В то время как слабая сходимость изучена достаточно хорошо для этого класса случайных величин (см., например, [4]), сходимость почти наверное еще не получила достаточного внимания.

[1]Работа поддержана Государственным агентством по вопросам науки, инноваций и информатизации Украины

[2]Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт”. E-mail: klesov@math.un-paderborn.de

Для общей F^α-схемы мы докажем аналоги соотношений (3) and (4), причем окажется, что первое из них всегда влечет второе. Обратная импликация верна не всегда.

Сначала мы докажем несколько результатов для сходимости почти наверное для числа рекордов μ. Мы увидим, что существует значительное разнообразие нормировок для μ, заменяющих $\ln n$ в (3). И нормировки и предельные константы зависят от характеристик F^α-схемы. Затем, в качестве следствий, мы получим соответствующие результаты для сходимости почти наверное и для L. Решающим на этом этапе доказательства является факт независимости в совокупности индикаторов

$$I_n = \begin{cases} 1, & \text{если } X_n > \max\{X_1, \dots, X_{n-1}\}, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(см. [3] или [1]).

2 Один из результатов

Понятно, что для моментов рекордов и количества рекордов имеет место равенство

$$\mu(L(n)) = n, \qquad n \geq 1.$$

Часть результатов этого доклада основана на следующей лемме для числовых последовательностей $\{L(n)\}$ и $\{\mu(n)\}$ (не обязательно связанных с рекордами), которые удовлетворяют более общее условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(L(n))}{n} = 1. \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть μ — неубывающая последовательность, а L — последовательность натуральных чисел, для которой выполнено* (5)*. Тогда условия* (6) *и* (7) *эквиваленты:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(n)}{\ln n} = 1, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln L(n)}{n} = 1. \tag{7}$$

Список литературы

[1] *Borovkov K., Pfeifer D.*, On record indices and record times. J. Statist. Plann. Inference, 1995, v. 45, N 1–2, p. 65–79.

[2] *Gut A.*, Probability: A Graduate Course. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

[3] *Невзоров В. Б.*, О рекордных моментах и межрекордных временах для последовательностей неодинаково распределенных величин. Записки научн. семин. ЛОМИ, 1985, т. 142, N 1, р. с. 109–118.

[4] *Невзоров В. Б.* Рекорды. Математическая теория. М.: Фазис, 2000.

[5] *Yang M.*, On the distribution of the inter-record times in an increasing population. J. Appl. Prob., 1975, v. 12, p. 148–154.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Нормированные приращения броуновского моста[1]

Сергей Г. Кобельков[2]

В работе обсуждается полученная автором предельная теорема для нормированных приращений броуновского моста.

1 Введение

Рассмотрим задачу нахождения асимптотики вероятности превышения уровня гауссовским случайным полем.

Пусть $e_1 + e_2 + \ldots + e_k = n$, $e_i > 0$ целое и $s_i = \sum_1^i e_j$. Пусть также имеется набор неотрицательных $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Положим $|\mathbf{t}|_\alpha = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=s_{i-1}-1}^{s_i} t_j^{(2\alpha_i)} \right)^{\alpha_i/2}$.

Справедлив следующий результат [4].

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{K}$ - *компакт в* R^n, $EX_\mathbf{t} = 0$, *и существует непрерывная матричная функция* $\mathbf{C_t}$, *такая что для любых* $\varepsilon > 0, \mathbf{t}, \mathbf{s}$, *таких что* $|\mathbf{t} - \mathbf{s}| < b(\varepsilon)$, *корреляционная функция удовлетворяет соотношению*

$$|(1-\varepsilon)(\mathbf{t}-\mathbf{s})|_\alpha \leq 1 - r(\mathbf{C_t t}, \mathbf{C_t s}) \leq |(1+\varepsilon)(\mathbf{t}-\mathbf{s})|_\alpha.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(\sup_\mathbf{K} X_\mathbf{t} > u) = H_\alpha \int_\mathbf{K} |\det \mathbf{C_t}|^{-1} d\mathbf{t} \prod_{i=1}^k u^{2e_i/\alpha_i} \Psi(u)(1+o(1)) \tag{1}$$

при $u \to \infty$, *где* $\Psi(u)$ – *хвост функции распределения стандартной гауссовской случайной величины.*

Пример 1. Для нормированных приращений броуновского моста $\frac{B_y - yB_1 - B_x + xB_1}{\sqrt{y-x}\sqrt{1-(y-x)}}$ матрица $C_\mathbf{t}$ выглядит следующим образом:

$$C_{x,h}^{-1} = \begin{pmatrix} (2h(1-h))^{-1} & 0 \\ (2h(1-h))^{-1} & (2h(1-h))^{-1} \end{pmatrix},$$

где B_x – винеровский процесс, $h = y - x$; $\det C_{x,h} = 4h^2(1-h)^2$. Заметим, что данная матрица вырождается при $h = 0$ и $h = 1$.

Зададимся вопросом, что будет происходить с вероятностью (1), если $\mathbf{K}$ меняется вместе с u. В частности, нас интересует задача нахождения асимптотики вероятности (1) для поля нормированных приращений броуновского моста при $u \to \infty$ и $y - x$ близких к 0 или 1, имеющая приложение в статистике [1].

[1]Работа поддержана грантом РФФИ N 11-01-00050.

[2]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: sergey@dodo.inm.ras.ru

2 Основные результаты

Автором доказано следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{K}_u = \cup B_{u,i}$, $i = 1, \ldots, N(u)$, *где* $B_{u,i}$ *– жордановы множества, попарно не пересекающиеся при фиксированном* u, $\mathbf{C}_{u,i}$ *— линейное преобразование в* R^n, *и для любого* $\varepsilon > 0$

$$|(1-\varepsilon)(\mathbf{y}-\mathbf{x})|_\alpha \le 1 - r(\mathbf{C}_{u,l}\mathbf{x}, \mathbf{C}_{u,l}\mathbf{y}) \le |(1+\varepsilon)(\mathbf{y}-\mathbf{x})|_\alpha$$

для всех $l, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_{u,l}, u > u_0(\varepsilon)$. *Пусть для каждого* l *множество* $\mathbf{C}_{u,l}^{-1} B_{u,l}$ *содержит шар радиуса* Cu^{-2}, *где* C *– некоторая константа, не зависящая от* u. *Тогда если*

$$\sum_l |\mathbf{C}_{u,l}^{-1} B_{u,l}| = I(u)(1+o(1)), F(u) = I(u) \prod_{k=1}^{k} u^{2l_j/\alpha_j} \Psi(u) \to 0$$

при $u \to \infty$, *то*

$$\lim_{u\to\infty} \mathbf{P}(\max_{\mathbf{K}_u} X(\mathbf{t}) > u)/(H_\alpha F(u)) \le 1.$$

Если к тому же $r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le 1 - \gamma(u)$, $\gamma(u) > 0$ *для всех* $\mathbf{x} \in B_{u,l}, \mathbf{y} \in B_{u,m}$, *таких что* $B_{u,l}$ *и* $B_{u,m}$ *не имеют общих точек границы, и* $N(u)^2 \exp(-u^2(1+\gamma(u)/4)/2) = o(F(u))$ *при* $u \to \infty$, *где* $N(u)$ *– число элементов разбиения* $B_{u,l}$, *то*

$$\mathbf{P}(\max_{\mathbf{K}_u} X(\mathbf{t}) > u) = H_\alpha F(u)(1+o(1)).$$

Данная теорема позволяет получить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $Z(x,y) = \frac{B_y - yB_1 - B_x + xB_1}{\sqrt{y-x}\sqrt{1-(y-x)}}$. *Тогда для* $u \to \infty$

$$\mathbf{P}(\sup_{x,y\in[0,1],\alpha\le y-x\le 1-\beta} Z(x,y) < u^{-1}x + u) = e^{-e^{-\tau}} + o(1), \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} u^3 e^{-u^2/2}, 0 < \beta < 1;$$

$$\mathbf{P}(\sup_{x,y\in[0,1],\alpha\le y-x\le 1-\beta} Z(x,y) < u^{-1}x + u) = e^{-e^{-\tau}} + o(1), 0 < \alpha < 1, \beta = e^{-2\sqrt{2\pi}u^{-3}e^{u^2/2}};$$

$$\mathbf{P}(\sup_{x,y\in[0,1],\alpha\le y-x\le 1-\beta} Z(x,y) < u^{-1}x + u) = e^{-2e^{-\tau}} + o(1), \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} u^3 e^{-u^2/2}, \beta = e^{-2\sqrt{2\pi}u^{-3}e^{u^2/2}}.$$

Автор выражает благодарность проф. Питербаргу В.И. за полезные обсуждения по теме работы.

Список литературы

[1] *Jarušková D., Piterbarg V.*, Log-likelihood ratio test for detecting transient change. Stat. Probab. Lett., 2011, v. 81, N 5, p. 552-559.

[2] *Kabluchko Z.*, Extreme-Value Analysis of Self-Normalized Increments. Dissertation, Mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultäten, Georg-August-Universität Göttingen, 2007.

[3] *Pickands, J.*, Asymptotic properties of the maximum in a stationary Gaussian process. Trans. Am. Math. Soc. 1969, v. 145, p. 75-86.

[4] *Питербарг В.И.*, Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: Изд-во МГУ, 1988.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Рекорды с подтверждением[1]

В.Б. Невзоров[2]

В работе обсуждаются некоторые результаты для рекордов с подтверждением.

1 Введение

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин (с.в.) $X_1, X_2, \ldots$ и максимумы $M(n) = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\},\ n = 1, 2, \ldots$. Пусть также $L(n),\ n = 1, 2, \ldots$ – последовательность верхних рекордных моментов, определяемых соотношениями $L(1) = 1$ и $L(k) = \min\{j > L(k-1) : X_j > M(L(k-1)\}$, $k = 2, 3, \ldots$, и $X(n) = X_{L(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, – соответствующая последовательность рекордных величин. Известно, что в классической ситуации, когда с.в. $X_1, X_2, \ldots$ имеют общую функцию распределения (ф.р.) F, множество всех возможных предельных (при $n \to \infty$) невырожденных ф.р. для надлежащим образом центрированных и нормированных максимумов $M(n)$ ограничивается (с точностью до параметров сдвига и масштаба) следующими тремя типами (см., например, [3, 4]):

$$H_1(x) = \exp\{-\exp(x)\},\ -\infty < x < \infty;$$
$$H_2(x) = 0,\ \text{если } x < 0,\ H_2(x) = \exp\{-x^{-\delta}\},\ \text{если } x > 0, \delta > 0;$$
$$H_3(x) = \exp\{-(-x)^{\delta}\},\ \text{если } x < 0, \delta > 0,\ \text{и } H_3(x) = 1,\ \text{если } x > 0.$$

Предельные функции распределения для верхних рекордов $X(n)$ тесно связаны с соответствующими асимптотическими распределениями для максимумов и имеют вид

$$G_i(x) = \Phi(-\ln(-\ln H_i(x))),\ i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $\Phi(x)$ – ф.р. стандартного нормального закона.

2 Результаты

При изучении «классических» рекордных величин X(n) весьма эффективным оказался следующий результат.

Представление 1. Если исходная ф.р. F имеет вид $F(x) = \max\{0, 1-\exp(-x)\}$, то для любого $n = 1, 2, \ldots$ справедливо соотношение

$$\{\mathrm{X}(k)\}_{k=1}^n \stackrel{d}{=} \{X_1 + X_2 + \ldots + X_k\}_{k=1}^n. \tag{2}$$

Выяснилось, что с «экспоненциальными» рекордами можно работать как с суммами независимых одинаково распределенных случайных величин. Из утверждений для «экспоненциальных» рекордов следовали уже (после применения так называемого преобразования Смирнова) соответствующие результаты для рекордных величин для широкого класса исходных ф.р. F.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ 10-01-00314 и грантом НШ 4472.2010.1.

[2]Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет. E-mail: vanev@mail.ru

Вслед за классической рекордной моделью были рассмотрены различные схемы , в которых исходные с.в. были зависимыми или неодинаково распределенными (см., [1, 2] и [5]). Ниже мы рассмотрим новую рекордную модель, которая может оказаться полезной в ситуации, когда, например, имеем дело с «загрязненными» выборками. Частный случай такой модели рассмотрен в статье [6].

Если в классической схеме в качестве очередного рекорда берется первое же наблюдение, превышающее все предыдущие, то в новой схеме после объявления очередной рекордной величины $\bar{X}(n)$ ждем появления k (где k заранее фиксировано) новых наблюдений, превышающих $\bar{X}(n)$. Упорядочив появившиеся значения в виде вариационного ряда $X^n_{1,k} \leq \ldots \leq X^n_{k,k}$, в качестве следующего рекорда $\bar{X}(n+1)$ назначаем порядковую статистику $X^n_{m,k}$, где $m(1 \leq m \leq k)$ также фиксировано заранее. Для исследования асимптотического поведения рекордных величин $\bar{X}(n)$ требуются результаты, аналогичные представлению 1 для классических рекордов.

Представление 2. Если $F(x) = \max\{0, 1-\exp(-x)\}$, а $1 \leq m \leq k$, определенные выше, фиксированы, то для любого $n = 1, 2, \ldots$ справедливо соотношение

$$\bar{X}(n+1) \stackrel{d}{=} \bar{X}(n) + \frac{X_1^{(n)}}{k} + \ldots + \frac{X_m^{(n)}}{k-m+1}, \tag{3}$$

где $\bar{X}(n), X_1^{(n)}, \ldots, X_m^{(n)}$ независимы и $P\{X_j^{(n)} < x\} = \max\{0, 1-\exp(-x)\}$, $1 \leq j \leq k$.

Из (3) следует, что

$$\bar{X}(n) \stackrel{d}{=} \frac{\mu_1}{k} + \frac{\mu_2}{k-1} + \ldots + \frac{\mu_m}{k-m+1}, \tag{4}$$

где $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — независимые с.в., имеющие гамма-распределение с параметром n.

Из соотношения (4), справедливого для «экспоненциальных» рекордных величин, следует, если воспользоваться стандартными методами теории рекордов, что множество предельных типов распределения для рекордных величин с подтверждением совпадает с соответствующим множеством предельных распределений (1) для классических рекордов. Естественно, что центрирующие и нормирующие константы для $X(n)$ и $\bar{X}(n)$ будут различными.

Список литературы

[1] *Ahsanullah M. and Kirmani S.N.U.A.*, Topics in extreme values. Nova Science Publishers, NY, 2008.

[2] *Ahsanullah M. and Nevzorov V.B.* Ordered Random Variables. Nova Science Publishers, NY, 2001.

[3] *Galambos J.*, The asymptotic theory of extreme order statistics. Wiley, NY, 1978.

[4] *Gnedenko B.*, Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire. Annals Mathematics, 1943, v. 44, N 3, p. 423-453.

[5] *Невзоров В.Б.*, Рекорды. Математическая теория. Фазис, Москва, 2000.

[6] *Сагателян В.К.*, Об одной новой модели рекордных величин. Вестник Санкт-Петербургского университета, серия 1, 2008, N 3, p. 144-147.

International Conference
"PROBABILITY THEORY AND ITS APPLICATIONS"
(June 26–30, 2012, Moscow)

Generalized Extreme Value Distribution and Records[1]

M. Ahsanullah[2], V.B. Nevzorov[3]

Some properties of records generated by random variables having the generalized extreme value distribution are presented.

Let $X_1, X_2, \ldots$ be independent identically distributed (i.i.d.) random variables (r.v.) and $M(n) = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, n = 1, 2, \ldots$. The theory for extremes was developed by M.Frechet ([5]), R.A.Fisher and L.H.C. Tippett ([4]), N.V. Smirnov ([7]) and others. A lot of important results for extremes were obtained by B.V. Gnedenko. It is enough to mention here his remarkable paper [6] published in 1943. It is known that there exist only three types of limiting (as $n \to \infty$) distributions for the suitably centering and normalizing maxima M(n). The corresponding cumulative distribution functions (d.f.) $F_i(ax+b)$, $a > 0, -\infty < b < \infty,\ i = 1, 2, 3$, have the form:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \exp\{-\exp(-x)\}; \\ F_2(x) &= \exp\{-x^{-\delta}\},\ x > 0, \delta > 0; \\ F_3(x) &= \exp\{-(-x)^{\delta}\},\ x < 0, \delta > 0. \end{aligned}$$

These three types of distributions (up to location and scale parameters) can be united in a new distribution by the following form:

$$H(x, \gamma) = \exp\{-(1 - \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\}, \quad -\infty < \gamma < \infty \tag{1}$$

where x's belong to the domain $\gamma x < 1$. Note that $H(x, 0)$, which corresponds to $F_1(x)$, is taken as $\lim H(x, \gamma), \gamma \to 0$. This form defines the so-called generalized extreme value distribution (see, for example, [1]). The theory of records are very close to the theory of extremes (see [1, 2]). Let us now consider a sequence of independent r.v.'s $Y_1, Y_2, \ldots,$ having a common distribution function (d.f.)(1), and the corresponding lower record values $Y_1 = Y(1) > Y(2) > \ldots$ in this sequence. It appears that the following representations are valid:

$$Y(m) \stackrel{d}{=} \frac{(1 - (W_1 + \ldots + W_m)^{\gamma})}{\gamma}, m = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

$if \gamma \neq 0;$

$$Y(m) \stackrel{d}{=} -\ln(W_1 + \ldots + W_m),\ m = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

and

$$Y(k) - Y(m) = \{\frac{W_1}{m-1} + \frac{W_2}{m-2} + \ldots + \frac{W_{m-k}}{k}\},\ k = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{4}$$

[1]The work of the second author was partially supported by RFBR grant 10-01-00314.
[2]Rider University, Lawrenceville, NJ, USA
[3]St-Petersburg State University, St-Petersburg, Russia. E-mail: vanev@mail.ru

if $\gamma = 0$, where $W_1, W_2, \ldots$ are independent exponentially distributed r.v.'s with the common d.f. $G(x) = \max\{0, 1 - \exp(-x)\}$. Some recurrence relations for moments of the lower record values $Y(n)$ were obtained in [3]. Representations (2) $-$ (4) allow us to present new results for moments and to get different properties of $Y(m)$. For example, it follows from (2) that $\mathbf{E}Y(m) = \frac{(1-\frac{\Gamma(m+\gamma)}{\Gamma(m)})}{\gamma}, m = 1, 2, \ldots,$ if $\gamma > -m$ and $\gamma \neq 0$, where $\Gamma(s)$ is the Gamma-function. If $\gamma = 0$, then $\mathbf{E}Y(m) = \nu_m,\ m = 1, 2, \ldots,$ where $\nu_1 = 0,57722\ldots$ is the Euler's constant and values ν_r, $r = 2, 3, \ldots,$ are defined by relations $\nu_r = \nu_{r-1} - \frac{1}{r-1}$. The corresponding equalities are obtained also for variances and covariances of lower record values Y(m).

Taking into account the relations (2), (3) and (4) one can investigate the asymptotic (as $m \to \infty$) behaviour of $Y(m)$. For instance, it follows from (2) that the limit distribution of r.v.'s

$$R(m, \gamma) = \frac{(1 - \gamma Y(m))^{1/\gamma} - m}{m^{1/2}}, m = 1, 2, \ldots,$$

coincides with the standard normal distribution.

There were obtained some characterizations of the generalized order extreme value distribution based on different properties of the lower records. Among others it was proved the next result.

Theorem 1. *Let $Y_1, Y_2, \ldots$ be a sequence of independent r.v.'s with absolutely continuos d.f. F(x). Then statements* (5) *and* (6) *are equivalent:*

$$F(x) = \exp\{-x^{-\delta}\},\ x > 0, \delta > 0; \tag{5}$$

$$Y^{-\delta}(n+1) \stackrel{d}{=} Y^{-\delta}(n) + W,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

where W and Y's are independent and $\mathbf{P}\{W < x\} = \max\{0, 1 - \exp(-x)\}$.

The similar characterizations are obtained also for other two types of the extreme value distributions.

References

[1] *Ahsanullah M.*, Record Values. Nova Science Publishers, NY, 1995.

[2] *Ahsanullah M. and Nevzorov V.B.*, Ordered Random Variables. Nova Science Publishers, NY, 2001.

[3] *Balakrishnan N., Chan P.S. and Ahsanullah M.*, Recurrence relations for moments of record values from generalized extreme value distribution. Communications in Statistics. Theory and Methods, 1993, v. 22, p. 1471-1482.

[4] *Fisher R.A. and Tippett L.H.C.*, Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. Proc. Camb. Phil. Soc., 1928, v. 24, p. 180-190.

[5] *Frechet M.*, Sur la loi de probabilite de l'ecart maximum. Ann. Societe Polonaise de Mathematique, 1927, v. 6, p. 92-16.

[6] *Gnedenko B.*, Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire. Annals Mathematics, 1943, v. 44, N 3, p. 423-453.

[7] *Smirnov N.V.*, Limit distribution laws for the terms of a variatioal series. Trudy Math. Inst. Steklov, 1949, v. 25, p. 5-59 (in Russian).

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

The number of crossings of Gaussian random field with a trajectory of gas atom: application to the computation of rarefied gas flows

Olga A. Aksenova[1], Iskander A. Khalidov[2], Victoria I. Sviridovich[3]

In the paper we apply our results on the number of crossings of gaussian random field with inclined straight line to direct simulation of rarefied gas flow in a channel with rough walls by Monte-Carlo method.

1 Introduction

The main purpose of this paper is to study the dependence of the macro-parameters of rarefied gas molecular flow in two-dimensional (plain or axisymmetric) channel or nozzle on surface roughness of the walls (see [1]-[5]) and on geometrical shape of the channel. Rarefied gas flow at high Knudsen numbers is investigated numerically using direct statistical Monte-Carlo simulation. The expression of scattering function V on rough surface in the form $V = \hat{S}V_0$, where the roughness operator $\hat{S}$ is fully determined by geometrical shape of roughness and by the trajectory of reflected gas atom (see [3]-[5]), allows us expanding the operator analytically. Physical and chemical parameters of the gas and of the surface are accounted by the local scattering function V_0. Our approach is based on simulating surface roughness on micro-level by a wide class of Gaussian random fields [5], unlike more simple models applied by other researchers, such as polygonal-line or conical-hole based models (see [7, 8]). Our statistical model of the roughness [4, 5] permits studying the roughness operator $\hat{S}$ by means of the random-field and random-process theory.

2 Basic results

The most principal difficulty in statistical approach is the complexity of computation of the distribution of the number of crossings of gaussian random field with inclined straight line continuum integrals, which must be approximated by the integrals of higher dimension [5], is tackled applying Rice series [5]. Numerical calculation of Rice series is the most difficult and time-consuming step of the whole computation, therefore it must be performed prior to the simulation of gas atom trajectories, so the computation time is significantly reduced. Such technique of the pre-computation of continuum integrals allows us not only minimizing computation time, but also reducing the number of the parameters. Our algorithm based on the approximation of scattering function V and of the momentum and energy exchange

[1]St.-Petersburg State University, Faculty of Mathematics and Mechanics. E-mail: olga.a.aksenova@gmail.com
[2]St.-Petersburg State Polytechnical University, Dept. of Mathematics. E-mail: khalidov@ih6208.spb.edu
[3]St.-Petersburg State University, Faculty of Mathematics and Mechanics. E-mail: ansys2@mail.ru

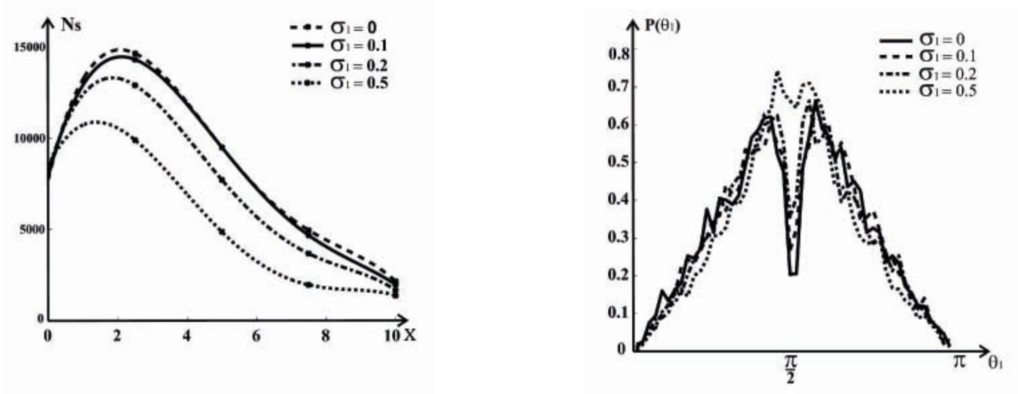


Рис. 1: The number N_s of gas molecules in a cross-section along the nozzle and the distribution $P(\theta_1)$ of gas molecules velocities for different values of roughness parameter σ_1.

coefficients (see [1]-[3]) eliminates the need for the geometrical-shape simulation in the Monte-Carlo method. Additional advantage of considered statistical approach is that not only diffuse-specular model [1], [7], but also Cercignani-Lampis scattering kernel or phenomenological models like proposed in [8] can be applied in the local scattering function V_0 approximation. For example, fig.1 shows calculated number N_s of gas molecules (i.e. numerical flow density) depending on the coordinate x of a cross-section of a nozzle with a gorge in the middle section and the distribution function of gas molecules velocities for different roughness parameters σ_1 (from 0 to 0.5).

References

[1] *Aksenova O.A., Khalidov I.A.*, Surface Roughness in Rarefied Gas Aerodynamics: Statistical and Fractal Models. St.-Petersburg University Publishers, St.-Petersburg, (in Russian), 2004.

[2] *Aksenova O.A., Khalidov I.A.*, In: Rarefied Gas Dynamics. Ed. Takashi Abe, Melville, New York, 2009, p. 677–681.

[3] *Aksenova O.A., Khalidov I.A.*, St.-Petersburg University Vestnik, 2004, v. 1, No 1, p. 61–66 (in Russian).

[4] *Barantsev R.G.*, in: Progress in Aerospace Science, 1972, v. 13, p. 1–80.

[5] *Miroshin R.N.* Intersections of Curves with Gaussian Processes, St.-Petersburg University Publishers, St.-Petersburg, 1981. (in Russian).

[6] *Gimelshein N., Duncan J., Lilly T., Gimelshein S., Ketsdever A., Wysong I.* Surface Roughness Effect in Low Reynolds Number Channel Flows. In: Rarefied Gas Dynamics. Ed. Ivanov M.S. and Rebrov A.K., Novosibirsk, 2007, p. 695–702.

[7] *Ukhov A., Porodnov B., Borisov S.* In: Rarefied Gas Dynamics. Ed. Takashi Abe. Melville, New York, 2009, p. 712–717.

[8] *Yamamoto K. , Takeuchi H., Hyakutake T.* Phys. Fluids, 2007, v. 19, 087102.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Probabilities of High Excursions of Gaussian Fields

Aleksej Bakshaev[1], Rimantas Rudzkis[2]

The paper is devoted to the problem of large excursions of smooth Gaussian random field.

1 Introduction

Let $\xi(t)$, $t \in T \subset \mathbb{R}^m$, be a smooth Gaussian random field defined on the m-dimensional interval T and $\zeta(T) = \sup_{t \in T} \xi(t)$ be its supremum. The study of the probability distribution of the random variable ζ, i.e. the probability $P(u) = \mathbf{P}\{\zeta(T) < u\}$ is a classical problem in probability theory of random fields. During the last twenty years, several methods have been introduced for investigating the behavior of $P(u)$ under different restrictions on the field ξ (see [1-5]). The majority of the cases studied before deal mostly with homogeneous Gaussian random fields and constant by t level u, which is not always justified in some applicative problems. In this work all these conditions are not assumed.
In this paper, the problem of large excursions of Gaussian field $\xi(t)$, $t \in T$, is investigated. In particular, the behavior of the probability $P = \mathbf{P}\{-v(t) < \xi(t) < u(t),\ t \in T\}$, where $u(t)$ and $v(t)$ are smooth functions, when $\forall t \in T\ u(t), v(t) \geq \chi$, $\chi \to \infty$, is considered. The work is a continuation of Rudzkis research started in [6, 7], where a new method for investigating the distribution of the maximum of Gaussian processes was introduced. We tried here to generalize it to the case of random fields. The main results of this paper were recently presented in [9].

2 Basic results

Let $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}^m\}$ be a differentiable (in the mean square sense) Gaussian random field with continuous trajectories and $\xi^{'}(t)$ be its gradient (vector-row). Assume that

$$\mathbf{E}\xi(t) \equiv 0; \ \ \mathbb{D}\xi(t) \equiv 1; \ \ \forall x, t \in \mathbb{R}^m \ \ \|R(t)x\| > \|x\|, \tag{1}$$

where $R(t) = cov(\xi^{'}(t), \xi^{'}(t))$ and $\|\cdot\|$ is an Euclidean norm in $\mathbb{R}^m$. Consider the asymptotics of the probabilities of the form

$$P := \mathbf{P}\{-v(t) < \xi(t) < u(t),\ t \in T\}, \tag{2}$$

when $\forall t \in T\ \ u(t), v(t) \geq \chi,\ \ \chi \to \infty$, and set $T = T(\chi)$ is an m-dimensional interval:

$$T = \{t = (t_1, ..., t_m)^\top : a_i \leq t_i \leq b_i,\ \ i = \overline{1, m}\},\ \ a_{(\cdot)} < b_{(\cdot)}. \tag{3}$$

For a certain functional $Q = Q_R(v, u, T)$, which is defined below, the following relationship is proved

$$P = e^{-Q} + Q \cdot o(1). \tag{4}$$

[1]Vilnius University, Institute of Mathematics and Informatics. E-mail: aleksej.bakshaev@gmail.com
[2]Vilnius University, Institute of Mathematics and Informatics. E-mail: rimantas.rudzkis@mii.vu.lt

To define the functional Q, let us introduce some additional notation. $M = \{1, ..., m\}$. For any set $D \subset \mathbb{R}$ let $\delta_x(D) = \mathbf{1}_{\{x \in D\}}$ and $\mu_T(dt) = \prod_{i \in M} \mu_i(dt_i) := \mu_1(dt_1) \times ... \times \mu_m(dt_m)$, where $\mu_i(dt_i) = dt_i + \delta_{a_i}(dt_i) + \delta_{b_i}(dt_i)$.
Further denote $J = J_t = \{i : a_i < t_i < b_i,\ i \in M\}$, $\mathbb{Y}_t = \mathbb{Y}_{1,t} \times ... \times \mathbb{Y}_{m,t}$, where

$$\mathbb{Y}_{i,t} = \begin{cases} \{0\},\ i \in J, \\ [0, \infty),\ t_i = b_i, \\ (-\infty, 0],\ t_i = a_i, \end{cases}$$

$\mu_t^*(dy) = \prod_{i \in M \setminus J} dy_i$ and $\mu_t^*(\mathbb{Y}_t) = 1$, if $J = M$.
Then $Q_R(v, u, T) = Q_R(v, T) + Q_R(u, T)$, where

$$Q_R(u, T) = \int_T \mu_T(dt) \int_{\mathbb{Y}_t} \mu_t^*(dy) \int_{u(t)}^{\infty} \phi(x) \phi(u^{'}(t) + y|R(t)) det(xR(t))_J dx. \tag{5}$$

By $\phi(\cdot)$ and $\phi(\cdot|R)$ we denote the probability density functions of normal distributions $N(0, 1)$ and $N(0, R)$, respectively. The next theorem is the main result of the paper.

Theorem 1. *Let conditions (1)-(3) be satisfied and for fixed functions $\omega(\cdot)$ and $\rho(\cdot)$ and any $t, s \in \mathbb{R}^m$ the following conditions be fulfilled*

$$\max\{\mathbf{E}\|\xi^{'}(t) - \xi^{'}(s)\|,\ \|u^{'}(t) - u^{'}(s)\|,\ \|v^{'}(t) - v^{'}(s)\|\} \leq \omega(\|t - s\|);\ \lim_{x \to 0} \omega(x) = 0; \tag{6}$$

$$|\mathbf{E}\xi(t)\xi(s)| \leq \rho(\|t - s\|);\ \lim_{x \to \infty} \rho(x) \log(x) = 0,\ \max_{x > \delta} \rho(x) < 1\ \forall \delta > 0. \tag{7}$$

Then asymptotic equality (4) holds with an uniform convergence with respect to ξ, v, u, T for which the above mentioned conditions are satisfied.

References

[1] *Adler R., Taylor J. E.*, Random Fields and Geometry. Springer, New York, 2007.

[2] *Azais J. M., Delmas C.*, Asymptotic expansions for the distribution of the maximum of a Gaussian random fields. Extremes, 2002, v. 5, N 2, p. 181–212.

[3] *Piterbarg V. I.*, Asymptotic Methods in Theory of Gaussian Random Processes and Fields. American Mathematical Society. Ser. Translations of Mathematical Monographes, 1996, v. 148.

[4] *Piterbarg V. I.*, Rice method for Gaussian random fields. Fundanientalnaya i prikladnaya matematika, 1996, v. 2, p. 187–204.

[5] *Sun J.*, Tail Probabilities of the Maxima of Gaussian Random Fields. Ann. Probab., 1993, v. 21, p. 34–71.

[6] *Rudzkis R.*, On the probability of large excursion of a nonstationary gaussian process I,II. Lithuanian Mathematical Journal, 1985, v. 25, N 1,2.

[7] *Rudzkis R.*, On Gaussian process large excursion probability density I,II. Lithuanian Mathematical Journal, 1986/1987, v. 26/27, N 3/4.

[8] *Rudzkis R.*, On the Distribution of Supremum-Type Functionals of Nonparametric Estimates of Probability and Spectral Densities. Theory of Probability and Its Applications, 1993, v. 37, N 2, p. 236–249.

[9] *Rudzkis R., Bakshaev A.*, Probabilities of High Excursions of Gaussian Fields. Lithuanian Mathematical Journal, 2012, v. 52, N 2, p. 1–18.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

On convex hulls of sequences of stochastic processes

Youri Davydov [1]

Let T be a separable metric space. Let $X_i = \{X_i(t),\ t \in T\}$ be i.i.d. copies of a process $X = \{X(t),\ t \in T\}$ with values in $\mathbb{R}^d$. Assume that X has a.s. bounded paths and consider the convex hulls

$$W_n = \mathrm{conv}\{\, X_1(t), \ldots, X_n(t),\ \ t \in T\}.$$

We are studying the existence of a limit shape for the sequence $\{W_n\}$.

Our study is closely connected with the classical theory of extrema: indeed, if T is a singleton, $T = \{t_0\}$, and $d = 1$, then the process X is simply a real random variable and W_n is the segment $[\min\{\, X_1, \ldots, X_n,\, \}\,, \max\{\, X_1, \ldots, X_n,\, \}]$.

Our first aim is to show that the phenomenon of rounding up of W_n really occurs for all bounded Gaussian processes. More exactly, we prove that with probability 1 there exists a nonrandom limit shape and give its description in terms of the correlation function of the initial process.

It is shown that in non-Gaussian cases, in contrast, the typical situation is completely different : the appropriately normalized convex hulls W_n/b_n converge weakly to the convex hull of a Poissonian point process, and this random limit shape frequently is a polytope.

The second part is a joint work with C. Dombry.

Acknowledgments. The author is grateful to the members of the seminaire "Stochastic geometry" in Lille 1 for valuable remarks and suggestions.

References

[1] *Randon-Furling J., Majumdar Satya N., Comptet A.*, Perimeter and Area of the Convex Hull of N Planar Brownian Motions, preprint, ArXiv:0907.0921v1, 6 Jul 2009.

[2] *Randon-Furling J., Majumdar Satya N., Comptet A.*, Random convex hulls and extreme value statistics, preprint, ArXiv:0912.0631v1, 3 Dec 2009.

[3] *Goodman V.*, Characteristics of normal samples, Ann. Probab., 1988, v. 16, N 3, p. 1281–1290.

[4] *Davydov Yu., Molchanov I., Zuyev S.*, Strictly stable distributions on convex cones, Electronic Journal of Probability, 2008, v. 13, p. 259–321.

[5] *Davydov Yu.*, On convex hulls of Gaussian samples. Lithuanian Mathematical Journal, 2011, v. 51, N. 2, p. 171-179.

[1] University of Lille 1, Laboratory P. Painleve. E-mail: `youri.davydov@math.univ-lille1.fr`

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Finite-time ruin probability of aggregated Gaussian processes with trend[1]

Krzysztof Dębicki, Enkelejd Hashorva, Lanpeng Ji, Zhongquan Tan[2]

Let $\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(t) - g(t), t \in [0, T]\}$ denote an aggregated Gaussian process with trend $g(\cdot)$, some measurable function. In this talk we shall discuss the exact asymptotic behavior of the finite time ruin probability

$$\mathbf{P}(\sup_{t \in [0,T]} [\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(t) - g(t)] > u), u \to \infty,$$

under some regularity conditions on the Gaussian processes. Additionally, upper and lower bounds for the ruin probability of interest will be presented, which are of interest for instance in insurance applications related to dividend payments. Furthermore, some novel results for the finite-time ruin probabilities of some general perturbed risk processes will be further discussed.

References

[1] *Adler R.J.*, An Introduction to Continuity, Extrema, and Related Topics for General Gaussian Processes, Inst. Math. Statist. Lecture Notes Monogr. Ser. 12, Inst. Math. Statist., Hayward, CA, 1990.

[2] *Berman M. S.*, Sojourns and Extremes of Stochastic Processes, Wadsworth Brooks Cole, Boston, 1992.

[3] *Borovkov K., Novikov A.*, Explicit bounds for approximation rates of boundary crossing probabilities for the Wiener process. J. Appl. Prob., 2005, v. 42, p. 82–92.

[4] *Piterbarg V., Prisyazhnyuk V.*, Asymptotic behavior of the probability of a large excursion for a nonstationary Gaussian processes. Theory of Probability and Mathematical Statistics, 1978, v. 18, p. 121–133.

[5] *Piterbarg V.*, Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. In: Transl. Math. Monographs, v. 148. AMS, Providence, RI, 1996.

[1]This work was supported by MNiSW Grant No N N201 412239 (2011-2013), the Swiss National Science Foundation Grant 200021-134785, and the National Science Foundation of China 11071182.

[2]Mathematical Institute, University of Wrocław, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław, Poland. E-mail: `debicki@math.uni.wrco.pl` (K. Dębicki); Department of Actuarial Science, Faculty of Business and Economics, University of Lausanne, UNIL-Dorigny 1015 Lausanne, Switzerland. E-mail: `enkelejd.hashorva@unil.ch` (E. Hashorva); `lanpeng.ji@unil.ch` (L. Ji) School of Mathematical Sciences, Soochow University, Suzhou, 215006, China. E-mail: `tzq728@163.com` (Z. Tan)

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

A location invariant PPWM EVI-estimator[1]

M. Ivette Gomes[2]

In this paper, we make use of the *peaks over random threshold* (PORT) methodology and the *Pareto probability weighted moments* (PPWM) of largest observations, in order to build the so-called PORT PPWM *extreme value index* (EVI)-estimators, a class of location-invariant estimators of the EVI, the primary parameter in *statistics of extremes.*

1 Introduction and preliminaries

The EVI is the parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ in the general *extreme value distribution* (EVD), $EV_\gamma(x) = \exp(-(1+\gamma x)^{-1/\gamma})$, $1+\gamma x > 0$, if $\gamma \neq 0$, and $EV_0(x) = \exp(-\exp(-x))$, $x \in \mathbb{R}$. Let $\underline{X}_n := (X_1, \ldots, X_n)$ denote a random sample of size n from F, and consider the associated order statistics (o.s.'s), $(X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n})$. The EVD appears as the limiting distribution, whenever such a non-degenerate limit exists, of the maximum $X_{n:n}$, suitably normalized. We then say that F is in the *max-domain of attraction* of EV_γ, and use the notation $F \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}(EV_\gamma)$. We shall deal with heavy right-tails, i.e. a positive EVI. Then, as first proved by Gnedenko, in [1], the right-tail function, $\overline{F} := 1 - F$, is of regular variation with an index of regular variation equal to $-1/\gamma$. Equivalently, $U(t) := F^{\leftarrow}(1-1/t)$, $t \geq 1$, with $F^{\leftarrow}(y) := \inf\{x : F(x) \geq y\}$ is of regular variation with an index of regular variation equal to γ ([2]), i.e.

$$F \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}(EV_\gamma)_{\gamma>0} \iff \overline{F} \in RV_{-1/\gamma} \iff U \in RV_\gamma. \tag{1}$$

One of the first classes of semi-parametric estimators of a positive EVI, the averages of the log-excesses over any intermediate o.s., $X_{n-k:n}$, was introduced in [3]. Consistency is achieved in the whole $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}(EV_\gamma)_{\gamma \geq 0}$ provided that $k = k_n \to \infty$ and $k/n \to 0$, as $n \to \infty$. We shall also consider the PPWM EVI-estimators, recently studied in [4], and denoted $\hat{\gamma}_{k,n}^{PPWM} \equiv \hat{\gamma}_{k,n}^{PPWM}(\underline{X}_n)$. They are valid for $0 < \gamma < 1$, and compare favourably with the Hill estimator for a wide variety of underlying models F. In order to derive the asymptotic normality of the aforementioned EVI-estimators, it is often assumed the validity of a second-order condition, like

$$\lim_{t \to \infty} \left(\ln U(tx) - \ln U(t) - \gamma \ln x\right)/A(t) = \left(x^\rho - 1\right)/\rho, \tag{2}$$

where $\rho \leq 0$ is a second-order parameter, which measures the rate of convergence in the first-order condition, in (1). Let $A_0(t)$ and $U_0(t)$ denote the A function, in (2) and the U function in (1), respectively, for unshifted models, i.e. models with a location $s = 0$.

Both aforementioned classes of EVI-estimators are scale-invariant, but not location-invariant, as often desired, and this contrarily to the PORT-Hill estimators, introduced in [5]. Such a class is based on a *sample of excesses* over a random threshold $X_{n_q:n}$, $n_q := [nq] + 1$, where $[x]$ denotes, as usual, the integer part of x, i.e. it is based on $\underline{X}_n^{(q)} := \left(X_{n:n} - X_{n_q:n}, \ldots, X_{n_q+1:n} - X_{n_q:n}\right)$. Just as in [6], we now consider the application of

[1]This work was supported by PTDC/FEDER, EXTREMA.

[2]University of Lisbon, Faculy of Sciences. E-mail: ivette.gomes@fc.ul.pt

the PORT methodology to the PPWM EVI-estimators, deriving the so-called PORT-PPWM estimators, $\hat{\gamma}_{k,n}^{PPWM(q)} := \hat{\gamma}_{k,n}^{PPWM}(\underline{X}_n^{(q)})$. These estimators are now invariant for both changes of location and scale, and depend on the *tuning parameter* q, which influences the asymptotic bias of $\hat{\gamma}_{k,n}^{PPWM}$, making this new class highly flexible, and able to overpass the *generalized Pareto probability weighted moment* estimators (GPPWM), for a large variety of underlying models $F \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}(EV_\gamma)_{\gamma>0}$. The GPPWM EVI-estimators have been studied in [7], and are scale and location invariant. See also [4], for an asymptotic comparison of the PPWM and GPPWM EVI-estimators.

2 Asymptotic behaviour of the PORT-PPWM estimators

We now state the main result in this paper, related with the shift invariant version of the PPWM EVI-estimator, i.e. the PORT-PPWM EVI-estimator. The asymptotic variance of $\hat{\gamma}_{k,n}^{PPWM(q)}$ is kept at the same level of $\hat{\gamma}_{k,n}^{PPWM}$, but the dominant component of bias changes in a few cases.

Theorem 1. *Under the second order framework in* (2)*, with* $0 < \gamma < 1/2$*, and for intermediate* k*, the asymptotic bias of the* PORT-PPWM EVI-*estimators is going to be ruled by*

$$B(t) = \begin{cases} \gamma\chi_q/U_0(t) & \text{if} \quad \gamma+\rho_0<0 \wedge \chi_q \neq 0 \\ A_0(t)+\gamma\chi_q/U_0(t) & \text{if} \quad \gamma+\rho_0=0 \\ A_0(t) & \qquad \text{otherwise}, \end{cases}$$

with $\chi_q = U(1/(1-q)) = F^{\leftarrow}(q)$*, i.e. if* k *is such that* $\sqrt{k}B(n/k) \to \lambda_{_B}$*, finite, as* $n \to \infty$*,*

$$\sqrt{k}\left(\hat{\gamma}_{k,n}^{PPWM(q)} - \gamma\right) \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \text{Normal}\left(\lambda_{_B} b^{PPWM(q)}, \sigma^2_{PPWM}\right), \qquad \textit{where}$$

$$b^{PPWM(q)} = \begin{cases} \frac{(1-\gamma)(2-\gamma)}{2} & \text{if} \quad \gamma+\rho_0<0 \wedge \chi_q \neq 0 \\ \frac{(1-\gamma)(2-\gamma)}{(1-\gamma-\rho_0)(2-\gamma-\rho_0)} & \qquad \text{otherwise} \end{cases}, \quad \sigma^2_{_{PPWM}} := \frac{\gamma^2(1-\gamma)(2-\gamma)^2}{(1-2\gamma)(3-2\gamma)}.$$

References

[1] *Gnedenko B.V.*, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. Ann. Math., 1943, v. 44, N 3, p. 423–453.

[2] *de Haan L.*, Slow variation and characterization of domains of attraction. In Tiago de Oliveira, ed., Statistical Extremes and Applications, 1984, D. Reidel, Dordrecht, p. 31–48.

[3] *Hill B.M.*, A simple general approach to inference about the tail of a distribution. Ann. Statist., 1975, v. 3, N 5, p. 1163–1174.

[4] *Caeiro F., Gomes M.I.*, Semi-parametric tail inference through probability-weighted moments. J. Statist. Plann. and Inference, 2011, v. 141, N 2, p. 937–950.

[5] *Araújo Santos P., Fraga Alves M.I. and Gomes M.I.*, Peaks over random threshold methodology for tail index and quantile estimation. Revstat, 2006, v. 4, N 3, p. 227-247.

[6] *Caeiro F., Gomes M.I. and Henriques-Rodrigues L.*, A location invariant probability weighted moment estimator of the extreme value index, 2012, Notas e Comunicações CEAUL.

[7] *de Haan L. and Ferreira A.*, Extreme Value Theory: an Introduction. Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2006.

International conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

On the heritage of Boris Gnedenko in extreme value theory

Laurens de Haan[1]

The significance of Gnedenko's 1943 contribution to extreme value theory will be discussed, as well as how it has influenced subsequent developments in the field. One of the widely used statistical tools that originated from Gnedenko's paper is the (one-dimensional) peaks-over-threshold method using the fact that the higher observations in a sample follow approximately a simple parametric distribution, the generalized Pareto distribution. By estimating the parameters of this distribution one can do inference in the (far) tail of the original distribution. I shall discuss recent extensions of these results to higher-dimensional spaces, in particular the space of continuous functions. Applications will be considered too.

[1]University of Lisbon and Erasmus University Rotterdam. E-mail: `ldehaan@ese.eur.nl`

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Continuation of max-stable laws[1]

Slobodanka Janković[2]

We investigate the continuation problems and restricted convergence concerning maxima of iid random variables.

1 Introduction

The following restricted convergence theorem on the interval, related to the work of [1], was proved in [2]:

Let $X_1, X_2, \ldots$ be a sequence of iid random variables and let $M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. If for suitable choice of constants $a_n > 0$ and $b_n \in R$, $n \geq 1$

$$\mathbf{P}(a_n^{-1} M_n - b_n < x) \to G(x), \ \ n \to \infty,$$

for all $x \in (c, d)$ such that $G(d) - G(c) > 0$, where $G(x)$ coincides on (c, d) with one of the three possible limit distributions of max*-stable type, then the convergence holds for all values of x.*

We investigate weaker conditions under which the above restricted convergence theorem still holds. These conditions are related to the set of points on which the convergence takes place.

First question is to find out on how big sets can different distributions of the max-stable type coincide, excluding the set of points on which distributions of the max-stable type take values equal to 0 or 1.

2 Basic results

Theorem 1. *Two different distributions of the* max*-stable type can coincide in at most two points in which these distributions take values different from* 0 *and* 1*.*

The consequence of the preceding theorem is that given three pairs $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$, where $x_1 < x_2 < x_3$ and $0 < y_1 < y_2 < y_3 < 1$, there exists at most one distribution G of the max-stable type satisfying $G(x_i) = y_i, i = 1, 2, 3$. What we would like to know is: given three pairs $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$, where $x_1 < x_2 < x_3$ and $0 < y_1 < y_2 < y_3 < 1$, under which conditions there exists a max-stable law G having the prescribed values $G(x_i) = y_i, i = 1, 2, 3$. And also we would like to find the criterion to determine to which of the three max-stable types Φ, Ψ or Λ belongs the limiting distribution G in that case. Next theorem gives complete answers to these questions.

[1]This work was supported by grants of the Ministry of Education and Science of Serbia.
[2]Faculty of Mathematics, University of Belgrade. E-mail: boba@matf.bg.ac.rs

Theorem 2. *Suppose three pairs of real numbers* $(x_i, y_i),\ i = 1, 2, 3,$ *satisfy* $x_1 < x_2 < x_3$ *and* $0 < y_1 < y_2 < y_3 < 1$. *There exists exactly one distribution* G *of the* max-*stable type satisfying* $G(x_i) = y_i,\ \ i = 1, 2, 3$. *The distribution* G *is of the type* Φ, Λ, Ψ *if the value of*

$$(x_3 - x_2)\ln(-\ln y_1) + (x_1 - x_3)\ln(-\ln y_2) + (x_2 - x_1)\ln(-\ln y_3)$$

is positive, zero, negative, respectively.

Theorem 3. *Let* $X_1, X_2, \dots$ *be a sequence of iid random variables with common probability distribution* F. *Suppose for suitably chosen sequences* $a_n > 0$ *and* $b_n \in R$, *satisfying*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{[nt]}}{a_n} = \alpha(t) \in (0, \infty), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{[nt]} - b_n}{a_n} = \beta(t) \tag{1}$$

for all $t > 0$, *we have*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x_0 + b_n) = G(x_0) = y_0, \tag{2}$$

for some $x_0 \in R$ *and* $y_0 \in (0, 1)$. *Then the convergence* (2) *holds for all* $x \in R$.

Theorem 3. has the following consequence:

Suppose $X_1, X_2, \dots$ is a sequence of iid random variables with common probability distribution F such that for suitably chosen sequences $a_n > 0$, and $b_n \in R$, the following convergence holds

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x_i + b_n) = G(x_i) = y_i,$$

$i = 1, 2, 3;\ \ 0 < y_1 < y_2 < y_3 < 1$. Then the condition (1) is sufficient to deduce that the above convergence holds for all $x \in R$, and the limit function G will be the unique max-stable law taking values y_i at $x_i, i = 1, 2, 3,$.

References

[1] *Gnedenko B.V.*, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. Ann. Math., 1943, v. 44, N 3, p. 423–453.

[2] *Gnedenko B. V., Senusi-Bereksi L.*, O svoistve prodolzhimosti predel'nyh raspredelenii dlya maksimal'nogo chlena posledovatel'nnosti, Vestnik Mosk. Univ., ser. Mat. Meh., v. 3, 1983, p. 11–20.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Multitype maximal branching processes[1]

Alexey V. Lebedev[2]

Maximal branching processes with several types of particles introduced by the author are discussed.

Similarities between summation theory and theory of extremal values of random variables have been well known for a long time. Thus, the central limit theorem and its analogues correspond to B.V.Gnedenko's theorem on extremal types [1], stable distributions correspond to the max-stable distributions, stable Levy processes correspond to the extremal processes (see [2, 3]).

Galton–Watson branching processes in discrete time are classical objects of investigation. For such processes it is possible to construct "extremal" analogues called the maximal branching processes (MBPs).

MBPs were introduced in [4] (in connection with models of long-range percolation) where criteria of their recurrence have been obtained. Further MBPs were generalized by the author in [5] as some Markov chains on an arbitrary measurable set $T \subset \mathbf{R}_+$. Recent results on MBPs with one type of particles are presented in [6].

Now we introduce MBPs with $d \geq 2$ types of particles (multitype MBPs or MTMBP).

Let $\xi^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_d^{(k)})$, $1 \leq k \leq d$, be random vectors with values in $\mathbf{Z}_+^d$. Introduce MBP with d types of particles as a multivariate Markov chain $Z(n) = (Z_1(n), \ldots, Z_d(n))$, $n \geq 0$, with values in $\mathbf{Z}_+^d$, given by the following stochastic recursive equation:

$$Z_k(n) = \bigvee_{j=1}^{d} \bigvee_{i=1}^{Z_j(n-1)} \xi_{i,k}^{(j)}(n), \tag{1}$$

where random vectors $\xi_i^{(j)}(n) = (\xi_{i,1}^{(j)}(n), \ldots, \xi_{i,d}^{(j)}(n))$, $n \geq 1$, $i \geq 1$, are independent and $\xi_i^{(j)}(n) \stackrel{d}{=} \xi^{(j)}$, $1 \leq j \leq d$.

Denote by F_k multivariate distribution function of vector $\xi^{(k)}$, $1 \leq k \leq d$, then (1) entails the transition probabilities formula:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(Z_1(n) \leq j_1, \ldots, Z_d(n) \leq j_d | Z_1(n-1) = i_1, \ldots, Z_d(n-1) = i_d) = \\ &= F_1^{i_1}(j_1, \ldots, j_d) \ldots F_d^{i_d}(j_1, \ldots, j_d), \quad i_k, j_k \in \mathbf{Z}_+. \end{aligned} \tag{2}$$

Thinking of distribution F_k not on $\mathbf{Z}_+^d$, but on $\mathbf{R}_+^d$, we generalize (2) as follows:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(Z_1(n) \leq y_1, \ldots, Z_d(n) \leq y_d | Z_1(n-1) = x_1, \ldots, Z_d(n-1) = x_d) = \\ &= F_1^{x_1}(y_1, \ldots, y_d) \ldots F_d^{x_d}(y_1, \ldots, y_d), \quad x_k, y_k \in \mathbf{R}_+. \end{aligned} \tag{3}$$

It is natural to define MBP with d types of particles and values in $\mathbf{R}_+^d$ as multivariate Markov chain with transition probabilities (3).

[1]This work was supported by RFBR grant N 11-01-00050.

[2]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: `avlebed@yandex.ru`

However, there arises a problem concerning multidimensionality. In one-dimensional case, for any distribution function $F(y)$ and any $s > 0$, $F^s(y)$ is also a distribution function. In multidimensional case, if $F(y_1, \dots y_d)$ is a distribution function, then $F^s(y_1, \dots y_d)$ is not always a distribution function.

Therefore we have to make some additional assumptions on properties of multivariate distribution function under consideration.

Under these assumptions we prove an ergodic theorem and some limit theorems on stationary distributions of MTMBPs. The lastest results in this area are presented in [7, 8, 9].
Acknowledgments. The author is grateful to E.V.Bulinskaya and V.I.Piterbarg for valuable remarks and suggestions.

References

[1] *Gnedenko B.V.*, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. Ann. Math., 1943, v. 44, N 3, p. 423–453.

[2] *Leadbetter M.R., Lindgren G., Rootzen H.*, Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes. Springer-Verlag, New York, Berlin, 1983.

[3] *Galambos J.*, The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, 1978.

[4] *Lamperti J.*, Maximal branching processes and "long-range percolation". J. Appl. Probab., 1970, v. 7, N 1, p. 89–98.

[5] *Lebedev A.V.*, Maximal branching processes with nonnegative values. Theory Probab. Appl., 2006, v. 50, N 3, p. 482–488.

[6] *Lebedev A.V.*, Maximal branching processes. Modern Probl. of Math. and Mech., 2009, v. 4, N 1, p. 93–106. (In Russian) http://mech.math.msu.su/probab/svodny2.pdf

[7] *Lebedev A.V.*, Limit theorems for stationary distributons of two-type maximal branching processes. Modern Probl. of Math. and Mech., 2011, v. 7, N 1, p. 29–38. (In Russian) http://mech.math.msu.su/probab/cheb190.pdf

[8] *Lebedev A.V.*, Multitype maximal branching processes with extreme value copulas. Modern Probl. of Math. and Mech., 2011, v. 7, N 1, p. 39–49. (In Russian) http://mech.math.msu.su/probab/cheb190.pdf

[9] *Lebedev A.V.*, Maximal branching processes with several types of particles. Moscow Univ. Math. Bull., 2012, N 3, p. 8–13. (In Russian)

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Distributions of clusters of extreme values

Natalia M. Markovich[1]

In the paper we discuss the author's results on the modeling clusters of extreme values.

1 Introduction

Let $\{R_n\}_{n\geq 1}$ be a stationary sequence of random variables (rvs) with marginal cumulative distribution function $F(x)$ and the extremal index $\theta \in [0,1]$, $M_n = \max\{R_1, ..., R_n\}$.
We estimate distributions of the number of inter-arrival times between events of interest arising between two consecutive exceedances of some process $\{R_n\}_{n\geq 1}$ over the threshold u

$$T_1(u) = \min\{j \geq 1 : M_{1,j} \leq u, R_{j+1} > u | R_1 > u\},$$

where $M_{1,j} = \max\{R_2, ..., R_j\}$, $M_{1,1} = -\infty$, and the number of inter-arrival times between events arising between two consecutive nonexceedances

$$T_2(u) = \min\{j \geq 1 : L_{1,j} > u, R_{j+1} \leq u | R_1 \leq u\},$$

where $L_{1,j} = \min\{R_2, ..., R_j\}$, $L_{1,1} = +\infty$.
We determine a cluster of arising extreme events as a set of exceedances over a threshold u between two consecutive non-exceedances of the underlying process.
In [1] the geometric limiting cluster size distribution $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{T_2^*(u_n) - 1 = j\} = (1-\theta)^{j-1}\theta$, where $T_2^*(u) = \min\{j > 1 : L_{1,j} > u, R_{j+1} \leq u | R_1 \leq u\}$ is proposed if thresholds u_n satisfy Leadbetter's condition $D(u_n)$ and the process R_n satisfies the $D''(x_{\rho_n})$-condition [2]. In [3] it was proved that $\overline{F}(u_n)T_1(u_n)$ are asymptotically mixed distributed under a mixing condition $\Delta^*(u_n)$ for sufficiently high thresholds u_n, for $n \geq 1$. The mixture consists of an exponential distribution with the extremal index θ as an intensity and the weight θ and a point mass at zero with the weight $1-\theta$.

Definition 1. For real u and an integer $1 \leq k \leq l$, let $\mathcal{F}_{k,l}(u)$ be the σ-field generated by the events $\{R_i > u\}$, $k \leq i \leq l$. The mixing condition $\Delta^*(u)$ is fulfilled if

$$\alpha_{n,q}(u) = \max_{1\leq k \leq n-q} \sup |\mathbf{P}(B|A) - \mathbf{P}(B)| \to 0 \qquad (1)$$

holds as $n \to \infty$, where the supremum is taken over all $A \in \mathcal{F}_{1,k}(u)$ with $\mathbf{P}(A) > 0$ and $B \in \mathcal{F}_{k+q,n}(u)$, [3].

2 Basic results

In the spirit of [3], we derive asymptotically equal, geometric like distributions of $T_1(u_n)$ and $T_2(u_n)$ corrupted by the extremal index when a sequence of sufficiently high quantiles x_{ρ_n} of

[1]Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences. E-mail: markovic@ipu.rssi.ru

the underlying process $\{R_n\}$ is used as thresholds u_n. The distributions may be applied to quality control problems arising during the transmission of a packet flow in telecommunication overlay networks like Skype or P2P TV, [4].
Let

$$1 \leq k^*_{n,1} \leq k^*_{n,2} \leq k^*_{n,3} \leq k^*_{n,4} \leq j, \qquad j = 2, 3, ..., \tag{2}$$

$k^*_{n,0} = 1$, $k^*_{n,5} = j$, $k^*_{n,i} = [jk_{n,i}/n] + 1, i = \{1, 2\}$, $k^*_{n,3} = j - [jk_{n,4}/n]$, $k^*_{n,4} = j - [jk_{n,3}/n]$, [2] be a partition of the interval $[1, j]$ for a fixed j and positive integers $\{k_{n,i}\}$ be such that

$$\{k_{n,i-1} = o(k_{n,i}), i \in \{2, 3, 4\}\}, \qquad k_{n,4} = o(n). \tag{3}$$

Theorem 1. *Let $\{R_n\}_{n\geq 1}$ be a stationary process with the extremal index θ. Let $\{x_{\rho_n}\}$ and $\{x_{\rho^*_n}\}$ be sequences of quantiles of R_1 of the levels $\{1 - \rho_n\}$ and $\{1 - \rho^*_n\}$, respectively, i.e. $\overline{F}(x_{\rho_n}) = \mathbf{P}\{R_1 > x_{\rho_n}\} = \rho_n$ and $\overline{F}(x_{\rho^*_n}) = \mathbf{P}\{R_1 > x_{\rho^*_n}\} = \rho^*_n$, that satisfy the conditions $\lim_{n\to\infty} n(1 - F(u_n)) = \tau$ and $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{M_n \leq u_n\} = e^{-\tau\theta}$ for each $0 < \tau < \infty$ if u_n is replaced by x_{ρ_n} or by $x_{\rho^*_n}$ and, $q_n = 1 - \rho_n$, $q^*_n = 1 - \rho^*_n$, $\rho^*_n = (1 - q^\theta_n)^{1/\theta}$. If there are positive integers $\{k^*_{n,i}\}$, $i = \overline{0, 5}$, satisfying (2), and $\{k_{n,i}\}$, $i = \overline{1, 4}$, satisfying (3), $q^*_{n,i} = o(\Delta_{n,i})$, where $\Delta_{n,i} = k^*_{n,i} - k^*_{n,i-1}$, and $p^*_{n,i} = o(q^*_{n,i})$, $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$, such that*

$$\alpha^*_n(x_{\rho_n}) = \max\{\alpha_{\Delta_{n,i}, p^*_{n,i}}(x_{\rho_n}), i \in \{1, 2, ..., 5\}\} = o(1) \tag{4}$$

holds as $n \to \infty$, where $\alpha_{n,q}(x_{\rho_n})$ is determined by (1), and the sequence $\{R_n\}$ satisfies the $D''(x_{\rho_n})$-condition with regard to the mixing coefficient $\alpha_{\Delta_{n,1}, p^*_{n,1}}(x_{\rho_n})$, then it holds for $j \geq 2$

$$\mathbf{P}\{T_1(x_{\rho_n}) = j\} \sim \theta^2 \rho_n (1 - \rho_n)^{(j-1)\theta}, \tag{5}$$

$$\mathbf{P}\{T_2(x_{\rho^*_n}) = j\} \sim \theta^2 q^*_n (1 - q^*_n)^{(j-1)\theta}, \tag{6}$$

as $n \to \infty$.

The results obtained in Theorem 1 are validated both for autoregressive maximum and moving maxima processes. Based on Theorem 1 upper and lower bounds for limit distributions of the return interval and the cluster duration are derived. The latter characteristics of clusters are represented as sums of a random number of terms $\sum_{i=1}^{T_1(u)} X_i$ and $\sum_{i=1}^{T_2(u)} X_i$, respectively, where the process $\{X_n\}_{n\geq 1}$ of inter-arrival times between events is assumed to be a strictly stationary sequence of rvs, jointly regularly varying with tail index $\alpha \in (0, 2)$. By means of the distributions (5) and (6) we get statistically equal means of $T_1(x_{\rho_n})$ and $T_2(x_{\rho_n})$: $\mathbf{E}(T_1(x_{\rho_n})) \sim \rho_n/(1 - (1 - \rho_n)^\theta)^2$, $\mathbf{E}(T_2(x_{\rho^*_n})) \sim \theta^2 q^*_n/(1 - (1 - q^*_n)^\theta)^2$.

References

[1] *Robinson M.E., Tawn J.A.*, Extremal analysis of processes sampled at different frequencies. J. R. Statist. Soc. B, 2000, v. 62, N 1, p. 117-–135.

[2] *Leadbetter M.R., Nandagopalan L.*, On exceedance point processes for stationary sequences under mild oscillation restrictions. Lect. Notes Statist., 51, p. 69–80, 1989.

[3] *Ferro C.A.T. and Segers J.*, Inference for Clusters of Extreme Values. J. R. Statist. Soc. B, 2003, v. 65, p. 545–556.

[4] *Markovich N.M., Krieger U.R.*, Statistical Analysis and Modeling of Skype VoIP Flows. COMCOM, 2010, v. 33, N 1, p. S11–S21, 2010.

[2] $[x]$ represents the integer part of the real number x.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Modeling time series with heavy tails and strong dependence by Gaussian copulae sequences.

Anna Mazur[1], Vladimir Piterbarg[2]

In this paper we discuss the results concerning limit theorem for maximum of Gaussian copula process with heavy tails and strong dependence.

We establish the class of copula functions for which the sequence $X_k = f(\xi_k)$, where ξ_k is a standart normal random variable, belong to Maximum Domain of Attraction of Frechet Distribution with α, (MDA(α)). After that we prove limit theorem for $X_k = f(\xi_k)$ using the correlation function $\rho(k)$ of the sequence X_k when it exists (the case of $\alpha > 2$). If $\alpha < 2$, limit theorem is proven with the help of the Leadbetter's mixing conditions.

Proposition 1. *Suppose function $g(x)$ is continuously differentiable for all x large enough, $g(x) \to 0$ and $\frac{g'(x)}{x} \to 0$ for $x \to \infty$. Then sequence of random variables $f(\xi_k)$ belongs to MDA(α), where*

$$f(x) = C\exp\left(\frac{x^2}{2\alpha} + \int_0^x yg(y)dy\right),\ C > 0.$$

Denote by GC_α the space of functions f of the form above.

Proposition 2. *Let function $f(x) \in GC_\alpha, \alpha > 2$ and ξ_k be a Gaussian stationary sequence with zero expected value, standart variance and correlation function $r(k)$. Denote by $\rho(k)$ the correlation function of process X_k where its marginal one-dimension distribution function $F = \Phi(f^{-1}) \in MDA(\alpha)$. If either $r(k)\ln k \to 0$ or $\rho(k)\ln k \to 0$ for $k \to \infty$, then*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\max_{k=1,\dots,n} X_k < d_n x) = e^{-e^{-x}},$$

where we can put either $d_n = F^{-1}(1 - \frac{1}{n})$ or $d_n = f(a_n)$, and $a_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln\ln n}{2\sqrt{2\ln n}}$.

If $\alpha < 2$, moments of copula may not exist, but limit theorem is still true. One may prove it using following proposition.

Proposition 3. *If $r(n)\ln n \to 0$ and $f \in GC_\alpha$, then Gaussian copula sequence $X_k = f(\xi_k)$ satisfies Leadbetter's mixing conditions $D(u_n)$ and $D'(u_n)$ for $u_n = xf(a_n)$ for all $x > 0$.*

References

[1] *Leadbetter M.R., Lindgren G., Rootzen H.*, Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes. Springer-Verlag, New York, Berlin, 1983.

[2] *de Haan L., Ferreira A.*, Extreme Value Theory: An Introduction. Springer, 2006.

[1]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: amfolity@gmail.com
[2]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: piter@mech.math.msu.su

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Discrimination between close hypotheses about distributions of the Weibull and the log-Weibull types by the first order statistics[1]

Igor V. Rodionov[2]

In this work the problem of discrimination between close types of distributions from Gumbel domain of attraction by the first order statistics is considered.

1 Introduction

In many statistical applications of extreme value theory, in particular, that is concerned with problems of insurance of high risks, the problem of discrimination between distributions with similar tails (probabilities of infrequent events) appears, see [1, 2]. Herewith it's often convenient to model distributions of medium values by standard distributions, that differs from the asymptotical distribution of tails. Seem, that theory of contiguality of probability measures (see [3]) is important instrument for discriminating between families of distributions with close tails and estimating the power of different criteria of discriminating. In this paper an asymptotical behavior of the ratio of likelihoods

$$R_n(t) = \frac{L(X_{n,n}, \ldots, X_{n-k_n+1,n}; \gamma + t(k_n))}{L(X_{n,n}, \ldots, X_{n-k_n+1,n}; \gamma)}$$

as $n \to \infty, k_n \to \infty, \frac{n}{k_n} \to \infty$ is considered for families of distributions:

1) $f_1(x, \gamma) = C(x) \exp(-x^\gamma), x \geq 0, \gamma > 0$;

2) $f_2(x, \gamma) = C(x) \exp(-(\ln x)^\gamma), x \geq 1, \gamma > 1$,

where $C(x) = C + C_1(\gamma)x^{-\beta} + o(x^{-\beta})$, $\beta > 0$ as $x \to \infty$.

The methods of the ratio of likelihoods and the ratio of maximal likelihoods (RML-test) are well-known and often used for discriminating between close types of distributions. In this connection papers of Antle and Dumonceaux ([4], [5], [6]) should be mentioned. The method of the ratio of maximal likelihoods was applied for discriminating between Weibull type distributions in papers of Kundu and Gupta([7], [2], [1]). In this work for the first time the method of the ratio of likelihoods applied to first k_n order statistics is considered, that allows to not consider the whole sample, like in case of the traditional method of the ratio of likelihoods and RML-method. It's possible to find the precise asymptotic of the ratio's of likelihoods distribution for families of distributions $f_1(x, \gamma)$ and $f_2(x, \gamma)$, that is the main point of this work.

---

[1]The work is supported by grant RFBR №11-01-00050

[2]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, post-graduate student. E-mail: vecsell@gmail.com

2 Main results

Theorem 1. *Suppose $n \to \infty$, $k_n \to \infty$ and $n/k_n \to \infty$, and there holds the following condition:*

$$(k_n)^{1/2} = o(\ln \frac{n}{k_n}). \tag{1}$$

Then there holds for the first and the second family of densities:

$$R_n(t) \xrightarrow{d} \exp\left(-N\left(\frac{t^2}{2\gamma^2}, \frac{t^2}{\gamma^2}\right)\right),$$

where $t(k_n) = \frac{t}{k_n^{1/2} \ln\ln \frac{n}{k_n}}$.

Author is grateful to Vladimir I. Piterbarg for scientific management on its work.

References

[1] *Gupta R.D., Kundu D.*, Discriminating between Weibull and generalized exponential distributions. Computational Statistics and Data Analysis, 2003, v. 43, N 2, p. 179–196.

[2] *Kundu D., Raqab M. Z.*, Discriminating between the generalized Rayleigh and log-normal distribution. Statistics, 2007, v. 41, N 6, p. 505-515.

[3] *Rusas G.*, Contiguality of probability measures. M.: Mir, 1975.

[4] *Antle C. E., Bain L. J.*, A Property of Maximum Likelihood Estimators of Location and Scale Parameters. SIAM Review, 1969, v. 11, N 2, p. 251-253.

[5] *Dumonceaux R., Antle C.E.*, Discrimination between the log-normal and the Weibull distributions. Technometrics, 1973, v. 15, N 4, p. 923–926.

[6] *Dumonceaux R., Antle C.E., Haas G.*, Likelihood ratio test for discrimination between two models with unknown location and scale parameters. Technometrics, 1973, v. 15, N 1, p. 19–27.

[7] *Gupta R.D., Kundu D., Manglick A.*, Probability of correct selection of Gamma versus GE or Weibull versus GE based on likelihood ratio test. Technical Report, The University of New Brunswick, Saint John, 2001.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Limit theorem for large excursions of a norm of a Gaussian vector process

Sinisa Stamatovic[1]

The properties of high level intersection sets by trajectories of Gaussian random processes and fields on the infinitely increasing time horizon are well elaborated, see [2, 3]. In contrast, there are not so many results about the limit behavior of the number of large excursions of Gaussian vector processes.

This work deals with a point process of exits of a Gaussian multidimensional not necessary smooth vector process out of an infinitely widening sphere. We consider the stationary random process

$$\chi(t) = \left(X_1^2(t) + X_2^2(t) + ... + X_n^2(t)\right)^{1/2} = ||X(t)||, \;\; t \in \mathbb{R},$$

where $X(t) = (X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t))$ is a Gaussian vector process whose components are independent copies of a Gaussian stationary process $X(t)$ with mean zero and covariance function $r(t)$.

We assume

$$r(t) = O\Big(\frac{1}{\ln t}\Big) \text{ as } t \to \infty.$$

Definition 1. We say that the point t is an a-point of upcrossing of the level u by the process $\chi(t), t \in \mathbb{R}$, if $\chi(t) = u$ and $\chi(s) < u$ for all $s \in [t-a, t)$.

Let $\mathcal{B}$ be the σ-algebra of Borel sets from $\mathbb{R}$. We consider the normalized point process $\Phi_{a,u}(B)$, $B \in \mathcal{B}$, of a-upcrossings of the level u by the process $\chi(t)$. We establish that the random point process $\Phi_{a,u}(B)$ converges weakly as $u \to \infty$ to a Cox process $\Phi(B)$, that is a normal mix (with weights $(2\pi)^{-n/2}e^{-||z||^2/2}$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in R^n$) of independent Poisson point processes with intensities $\exp\left(-\lambda/2 + \sqrt{\lambda}||z||\right)$.

Acknowledgments. The author is grateful to V.I. Piterbarg for help and suggestions.

References

[1] *Kallenberg O.*, Random measures. Academic Press, New York, 1983.

[2] *Leadbetter M.R., Lindgren G., Rootzen H.*, Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes. Springer-Verlag, New York, Berlin, 1983.

[3] *Piterbarg V.*, Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. Transl. Math. Monographs, 1996, v. 148, AMS, Providence, R.I.

[1] University of Montenegro, Faculty of Science. E-mail: `sins@ac.me`

СЕКЦИЯ 3

Теория массового обслуживания
Queueing Theory

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Актуальные задачи математической теории телетрафика[1]

Гелий П. Башарин[2], Юлия В. Гайдамака[2], Константин Е. Самуйлов[2]

Обсуждается фундаментальное изменение – сдвиг парадигмы телекоммуникаций, которое по своей значимости превосходит изменения, вызванные переходом от телеграфа к телефону, и заключается в переходе от коммутации каналов к коммутации пакетов на базе IP-технологий. Сдвиг влечет за собой изменение в фундаментальных и прикладных исследованиях, а также в области образования. Авторы акцентируют внимание на новых направлениях развития математической теории телетрафика, основанной на достижениях отечественной школы теории массового обслуживания, которую долгое время на мех.-мат. факультете МГУ возглавлял академик Б.В. Гнеденко [1, 2].

1 Введение

Природа трафика, порождаемого в сетях следующего поколения (NGN – Next Generation Network), существенно отличается от природы трафика традиционных сетей связи. Различают потоковый (streaming) и эластичный (elastic) трафик, при этом потоковый трафик передается по сети в режиме одноадресных (unicast) или многоадресных (multicast) соединений. Основное отличие между типами трафика заключается в дисциплине обслуживания. Одноадресный трафик обслуживается по дисциплине FCFS, многоадресный – по принципу «прозрачных заявок» (transparent), а эластичный – по дисциплине разделения процессора PS. Модель совместного обслуживания этих трех типов трафика определяет новое направление развития современной теории телетрафика и показывает ключевое отличие современного этапа: при переходе к сетям с коммутацией пакетов при анализе показателей качества обслуживания необходимо учитывать не только особенности буферизации данных, но и принципиально новые комбинации передаваемого трафика.

2 Модель с тремя типами трафика

В [3] показано, что стационарное распределение вероятностей состояний модели с одноадресным и многоадресным трафиком имеет мультипликативный вид, а модель с тремя типами трафика таким свойством не обладает, поэтому ее анализ значительно сложнее.

Теорема 1. *Случайный процесс* $\{\mathbf{Z}(t)\,,\ t \geq 0\}$ *на множестве состояний* $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z} = (n_1, \ldots, n_K, y_1, \ldots, y_M):\ c(\mathbf{z}) \leq C\}$, *где* $c(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{K} d_k n_k + \sum_{m=1}^{M} b_m y_m$, *является обратимым марковским процессом со стационарным распределением вероятностей состояний* $\pi(\mathbf{z}) = \pi(\mathbf{0}) \prod_{k=1}^{K} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!} \prod_{m=1}^{M} (e^{\rho_m} - 1)^{y_m}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-07-00487-а).

[2]Российский университет дружбы народов, факультет физико-математических и естественных наук. E-mail: {gbasharin,ygaidamaka,ksam}@sci.pfu.edu.ru

3 Прикладные исследования

Помимо изменений в фундаментальных исследованиях, сместились акценты в ряде прикладных областей, в рамках которых кафедра систем телекоммуникаций РУДН ведет частично финансируемые из бюджетных источников исследования. По мнению авторов, актуальными на ближайший исследовательский период до 2017 г. являются следующие проблемы.

1. Разработка методов анализа показателей качества файлообменных и потоковых одноранговых сетей (P2P – Peer-to-Peer), в том числе, времени загрузки файла (latency), задержки начала воспроизведения (startup delay), вероятности просмотра видео без перерывов воспроизведения (playback continuity) [4].

2. Анализ моделей сигнального трафика протокола установления сессий (SIP – Session Initiation Protocol), включая задачи по разработке механизмов контроля перегрузок в сети серверов протокола SIP, поставленные IETF в 2012 г. В качестве моделей используются СМО с ненадежным прибором, групповым поступлением заявок, накопителем ограниченной емкости и гистерезисным управлением нагрузкой [5].

3. Планирование межуровневого интерфейса на базе механизма мультиплексирования с ортогональным частотным разделением (OFDM – Orthogonal Frequency Division Multiplexing) в сетях подвижной связи, в том числе, оптимизационные задачи разделения радио ресурсов с использованием целевых функций полезности, определяющих уровень удовлетворенности пользователей качеством обслуживания при заданных ограничениях [6].

Список литературы

[1] *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.*, Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 5-е. М.: ЛКИ, 2010.

[2] *Башарин Г.П.*, Лекции по математической теории телетрафика: Уч. пособие. Изд. 3-е, испр. и доп. М.: РУДН, 2009.

[3] *Башарин Г.П., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В., Гудкова И.А.*, Новый этап развития математической теории телетрафика. Автоматика и телемеханика, 2009, N 12, с. 16–28.

[4] *Adamu A., Gaidamaka Y., and Samuylov A.*, Discrete markov chain model for analyzing probability measures of P2P streaming network. Lecture Notes in Computer Science, 2011, v. 6889, p. 428–439.

[5] *Абаев П.О., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е.*, Гистерезисное управление нагрузкой в сетях сигнализации. Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика», 2011, N 4, с. 55–73.

[6] *Гайдамака Ю., Ефимушкина Т., Самуйлов А., Самуйлов К.*, Обзор задач оптимального планирования межуровневого интерфейса на базе ортогонального частотного мультиплексирования в беспроводных сетях. Distributed Computer and Communication networks. Theory and Applications DCCN-2011. Moscow, 2011, p. 180–187.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Коротко о развитии математической теории телетрафика в нашей стране

Гелий П. Башарин[1], Константин Е. Самуйлов[1]

Кратко излагаются некоторые аспекты развития на рубеже XX–XXI веков отечественной теории телетрафика, на становление которой большое влияние оказал академик Б.В. Гнеденко.

1 Вторая половина XX века

В 1955 г. вышла монография А.Я. Хинчина [1], положившая начало бурному развитию ТМО (Theory of Queues) и ее приложений в СССР и во всем мире. В Киеве работу в этой области вел Б.В. Гнеденко вместе с одним из своих лучших учеников – И.Н. Коваленко. Вскоре после смерти А.Я. Хинчина (1894–1959) Б.В. Гнеденко переехал в Москву, где возглавил переданную ему А.Н. Колмогоровым кафедру ТВ мех.-мат. факультета МГУ.

В 1966 г. вышла книга Б.В. Гнеденко и И.Н. Коваленко [2], переизданная много раз в СССР и РФ, переведенная на несколько языков и многократно изданная за рубежом. Одновременно Б.В. Гнеденко организовал в МГУ и вел вместе с профессорами В.К. Беляевым и А.Д. Соловьевым городской семинар по ТМО. Более 25 лет два раза в месяц этот семинар собирал на своих заседаниях 30–40 научных работников, преподавателей и аспирантов математических и смежных дисциплин, а также инженеров, специалистов ВПК и др. Б.В. Гнеденко часто выезжал в зарубежные университеты для чтения лекций и помощи своим ученикам в подготовке и защите кандидатских и докторских диссертаций. Вокруг него создавался и работал постоянно растущий круг учеников и последователей, для которых всегда были открыты двери его квартиры в МГУ. Регулярно в различных республиках и регионах СССР проводились 10-дневные школы по ТМО.

В 1968 г. вышла книга [3] и вскоре при ИППИ, где профессор А.Д. Харкевич заведовал лабораторией теории телетрафика (ТТ), под руководством авторов этой книги начал работать ежемесячный городской семинар по ТТ и сетям ЭВМ. При поддержке ЦП НТО РЭС им. А.С. Попова один раз в два года в различных городах проводились 10-дневные школы по ТТ и сетям ЭВМ для специалистов из МЭИС, ЛЭИС, ЦНИИС, ЛОНИИС и других организаций. Большую роль сыграли статьи и книга В.Э. Бенеша [4] и собиравшийся раз в три года международный конгресс по ТТ (ITC). В конгрессах принимали участие несколько ученых из ИППИ – В.И. Нейман, А.Д. Харкевич и его преемник С.Н. Степанов, а привозимые с конгресса материалы были доступны всем заинтересованным специалистам. В 1979 г. вышла книга М.А. Шнепс-Шнеппе [5], удачно сочетающая инженерную и математическую ТТ (МТТ) и предназначенная для проектировщиков систем и сетей связи и ЭВМ, а также для специалистов и аспирантов по ТМО и вычислительной математике.

Результатом огромной научно-организационной работы Б.В. Гнеденко в СССР и странах СЭВ явилось издание в ГДР в 1983–84 гг. большого двухтомного справочно-учебного

[1]Российский университет дружбы народов, факультет физико-математических и естественных наук. E-mail: {gbasharin,ksam}@sci.pfu.edu.ru

издания [6], подготовленного коллективом из примерно 30 советских и немецких авторов. Было подготовлено издание и на русском языке, но оно, к сожалению, не вышло по финансовым причинам.

2 Конец XX и начало XXI века

Создание и развитие на рубеже XX–XXI вв. широкополосных сетей, конвергенция телекоммуникационных, компьютерных и информационных технологий стимулировали резкое повышение спроса на предоставление новых услуг в рамках единой мультисервисной сети связи (МСС). Главной проблемой, сдерживающей развитие МСС, была и остается проблема качества предоставления услуг. Для исследования этой проблемы в 1996 г. ректор РУДН академик РАО В.М. Филиппов открыл на физико-математическом факультете кафедру систем телекоммуникаций (СТ). Заведующим кафедрой стал К.Е. Самуйлов, который в 1984 г. докладывал результаты своей кандидатской диссертации на семинаре Б.В. Гнеденко и защитил ее на факультете ВМиК МГУ.

На основе читаемого им на кафедре СТ в магистратуре двухсеместрового курса лекций по МТТ Г.П. Башарин написал учебник [7] для студентов, ориентированных на работу в области систем и сетей телекоммуникаций, а также информационных технологий. В каждой из 7 глав учебника приводятся эффективные алгоритмы для расчета показателей качества обслуживания, последние разделы каждой главы содержат методические и библиографические комментарии, а в послесловии обсуждаются современные проблемы преподавания инженерной и математической ТТ в технических и классических университетах. В настоящее время преподаватели и аспиранты кафедры ведут интенсивные исследования в ряде новых областей МТТ. Обзор современных постановок задач, направлений исследований и уже полученных на кафедре СТ результатов приведен в трудах этой конференции.

Список литературы

[1] *Хинчин А.Я.*, Работы по математической теории массового обслуживания / Под ред. Б.В. Гнеденко. М.: Гос. изд. физ-мат. лит., 1963.

[2] *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.*, Введение в теорию массового обслуживания. М.: Изд-во «Наука», Глав. ред. физ-мат. лит., 1966.

[3] *Башарин Г.П., Харкевич А.Д., Шнепс М.А.*, Массовое обслуживание в телефонии / ИППИ АН СССР. Под ред. и с предисловием Б.В. Гнеденко. М.: Изд-во «Наука», 1968.

[4] *Бенеш В.Э.*, Математические основы теории телефонных сообщений / Пер. с англ. под ред. В.И. Неймана. М.: Изд-во «Связь», 1968.

[5] *Шнепс М.А.*, Системы распределения информации. Методы расчета: Справочное пособие. М.: Изд-во «Связь», 1979.

[6] Handbuch der Bedienungstheorie / Unter der Leitung von *B.W. Gnedenko und D. Konig.* Berlin: Akademie-Verlag, 1983 (Band 1); 1984 (Band 2).

[7] *Башарин Г.П.*, Лекции по математической теории телетрафика: Уч. пособие. Изд. 3-е, испр. и доп. М.: Изд-во РУДН, 2009 (Изд. 1-е, 2004; Изд. 2-е, 2007; Изд. 3-е, 2009).

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Исследование RQ-систем в полумарковской среде[1]

Вячеслав А. Вавилов[2], Анатолий А. Назаров[3]

В работе предложена математическая модель сетей случайного множественного доступа в виде однолинейной RQ-системы, функционирующей в полумарковской случайной среде. Получены асимптотические характеристики и плотность распределения вероятностей состояний системы.

1 Введение

Рассмотрим однолинейную RQ-систему, на вход которой поступают заявки от конечного числа N абонентских станций. Время генерирования заявки от одной станции имеет экспоненциальное распределение с параметром λ/N. Суммарный поток требований от всех абонентских станций поступает на обслуживание. Обслуживающая линия может находиться в состояниях: $k=0$, если она свободна; $k=1$, если занята обслуживанием заявки. Заявка, заставшая в момент поступления прибор свободным, начинает немедленно обслуживаться. Продолжительность обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Если в течение обслуживания этой заявки другие требования на прибор не поступают, то исходная заявка по завершении обслуживания покидает систему. Если во время обслуживания одной заявки поступает другая, то новая заявка переходит в источник повторных вызовов. Число заявок в источнике повторных вызовов обозначим i. RQ-система функционирует в случайной среде. В качестве математической модели случайной среды рассмотрим полумарковский процесс $s(t)$. Для определения полумарковского процесса $s(t)$ зададим стохастическую матрицу одношаговых вероятностей $p_{s_1s_2}$ переходов вложенной цепи Маркова $p_{s_1s_2} = \mathbf{P}(s(t_{n+1}) = s_2|s(t_n) = s_1)$, при этом будем полагать, что $p_{ss} = 0$. Влияние случайной среды на функционирование сети определяется зависимостью интенсивности γ/N обращения заявок из источника от состояний s среды, то есть $\gamma/N = \gamma(s)/N$. Для исследования описанной математической модели марковизируем процесс $\{k(t), i(t), s(t)\}$, введя дополнительную переменную $\zeta(t)$, имеющую смысл длины интервала времени от момента t до момента смены текущего состояния случайной среды, тогда процесс изменения значений вектора $\{k(t), i(t), s(t), \zeta(t)\}$ является марковским процессом. Обозначим $\mathbf{P}(k(t) = k, i(t) = i, s(t) = s, \zeta(t) < \zeta) = P(k, i, s, \zeta, t)$.

Для распределения вероятностей $P(k, i, s, \zeta, t)$ можно составить следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

[1]Работа поддержана грантом РФФИ N 11-01-90720-моб_ст

[2]Филиал ФГБОУ ВПО “Кемеровский государственный университет” в г. Анжеро-Судженске. E-mail: vavilovv@yandex.ru

[3]ФГБОУ ВПО “Национальный исследовательский Томский государственный университет”

$$\frac{\partial P(0,i,s,\zeta,t)}{\partial t}+\left(\lambda\left(1-\frac{i}{N}\right)+\gamma(s)\frac{i}{N}\right)P(0,i,s,\zeta,t)=\frac{\partial P(0,i,s,\zeta,t)}{\partial \zeta}-\frac{\partial P(0,i,s,0,t)}{\partial \zeta}+$$
$$+\mu P(1,i,s,\zeta,t)+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial P(0,i,s_1,0,t)}{\partial \zeta}p_{s_1 s},$$
$$\frac{\partial P(1,i,s,\zeta,t)}{\partial t}+\left(\lambda\left(1-\frac{i}{N}\right)+\mu\right)P(1,i,s,\zeta,t)=\frac{\partial P(1,i,s,\zeta,t)}{\partial \zeta}-\frac{\partial P(1,i,s,0,t)}{\partial \zeta}+$$
$$+\lambda\left(1-\frac{i}{N}\right)P(0,i,s,\zeta,t)+\gamma(s)\frac{i+1}{N}P(0,i+1,s,\zeta,t)+$$
$$+\lambda\left(1-\frac{i-1}{N}\right)P(1,i-1,s,\zeta,t)+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial P(1,i,s_1,0,t)}{\partial \zeta}p_{s_1 s}.$$

Решение $P(k,i,s,\zeta,t)$ системы будем исследовать методом асимптотического анализа [1] в условиях большого количества абонентских станций при $N\to\infty$.

2 Основные результаты

В ходе исследования показано, что асимптотическое среднее $x(\tau)$ нормированного числа заявок в источнике повторных вызовов – детерминированная функция, определяемая обыкновенным дифференциальным уравнением вида $x'(\tau)=-\psi xR_0(x)+\lambda(1-x)R_1(x)$, здесь величина ψ определяется пределом $\psi R_0(x)=\lim\limits_{\zeta\to\infty}\sum\limits_{s=1}^{S}\gamma(s)Q_0(x,s,\zeta)$, а распределение $R_k(x)$ вероятностей состояний прибора — пределом $R_k(x)=\lim\limits_{\zeta\to\infty}\sum\limits_{s=1}^{S}Q_k(x,s,\zeta)$, в котором функции $Q_k(x,s,\zeta)$ — совместное распределение вероятностей состояний прибора и среды.

Доказано, что асимптотически при $N\to\infty$ случайный процесс $y(\tau)$, характеризующий изменение величин отклонения нормированного числа заявок в источнике повторных вызовов от их асимптотического среднего, определяется стохастическим дифференциальным уравнением вида $dy(\tau)=A'(x)y(\tau)d\tau+B(x)dw(\tau)$, где $w(\tau)$ — стандартный процесс Винера, $A'(x)$ и $B(x)$ определяется следующим равенством

$$A'(x)=-\psi R_0(x)-\lambda R_1(x)-\psi x\frac{\partial R_0(x)}{x}+\lambda(1-x)\frac{\partial R_1(x)}{\partial x},$$
$$B^2(x)=\psi xR_0(x)+\lambda(1-x)R_1(x)+\eta xh_0^{(1)}(x)-\lambda(1-x)h_1^{(1)}(x)+2x'(\tau)\left(h_0^{(1)}(x)+h_1^{(1)}(x)\right),$$

здесь функции $h_0^{(1)}(x)$ и η определяются следующими равенствами

$$h_k^{(1)}(x)=\sum_{s=1}^{S}h_k^{(1)}(x,s,\zeta),\eta h_k^{(1)}(x)=\lim_{\zeta\to\infty}\sum_{s=1}^{S}\gamma(s)h_0^{(1)}(x,s,\zeta).$$

Показано, что с точностью до $o(\varepsilon)$ случайный процесс $z(\tau)=x(\tau)+\varepsilon y$, аппроксимирующий процесс изменения числа заявок в источнике повторных вызовов, является решением стохастического дифференциального уравнения $dz(\tau)=A(z)d\tau+\varepsilon B(z)dw(\tau)$. Плотность распределения вероятностей значений процесса $z(\tau)$ имеет вид

$$F(z)=\left(\frac{1}{B^2(z)}\exp\left\{\frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^z\frac{A(u)}{B^2(u)}du\right\}\right)\Big/\left(\int_0^1\frac{1}{B^2(u)}\exp\left\{\frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^z\frac{A(u)}{B^2(u)}du\right\}dz\right).$$

Список литературы

[1] *Назаров А. А., Моисеева С. П.*, Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Моделирование процессов внедрения универсальной электронной карты

Васильева О.В.[1], Туенбаева А.Н.[2]

В работе приводятся результаты математического моделирования процессов внедрения универсальной электронной карты на региональном уровне.

1 Введение

С целью обеспечения роста качества жизни граждан за счет предоставления доступа к широкому спектру государственных, муниципальных и коммерческих услуг планируется создание единой информационно-технической инфраструктуры системы выпуска, выдачи и обслуживания универсальной электронной карты (УЭК) [1]. Обеспечение взаимодействия специализированной информационной системы с инфраструктурой Электронного Правительства, а также с ведомственными информационными системами будет осуществляться посредством использования каналов связи системы межведомственного электронного взаимодействия.

Математическая модель системы выпуска, выдачи и обслуживания УЭК представляет собой сеть массового обслуживания (СеМО) [2], узлами которой являются различного вида системы массового обслуживания (СМО) с входящими потоками заявок - запросов на выпуск, выдачу УЭК и предоставление услуг. Моделирование процессов внедрения УЭК заключается в исследовании отдельных узлов СеМО, эффективность проектирования которых зависит от качества используемой информации, времени ее обработки и принятия решения. Последнее во многом определяется методами и алгоритмами обработки данных. Поэтому не менее актуальной является задача построения имитационных моделей СМО. Результаты имитационного моделирования можно использовать для анализа аналитических результатов, полученных на этапе математического моделирования, а в случае, когда получить точное решение для СМО не представляется возможным, они являются основным источником для дальнейших исследований.

2 Основные результаты

В работе исследованы марковские и немарковские RQ-системы с различными типами входящих потоков требований модифицированным методом асимптотического анализа в различных предельных условиях [3]. В результате исследований получен вид предельной характеристической функции, определены асимптотические семиинварианты, найдены аппроксимации допредельного распределения вероятностей состояний системы. Предложенный метод обобщает метод гауссовской аппроксимации и позволяет находить различ-

[1]Балтийский федеральный университет им. И.Канта, факультет информатики и прикладной математики. E-mail: ovas1@yandex.ru

[2]Балтийский федеральный университет им. И.Канта, факультет информатики и прикладной математики. E-mail: tuenbaeva_aiya@mail.ru

ные вероятностно-временные характеристики рассматриваемых систем: распределение вероятностей состояний прибора, распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов (ИПВ), характеристическую функцию состояний RQ-систем, семиинварианты. Разработан комплекс программ имитационного моделирования RQ-систем, обеспечивающий получение данных, позволяющих вычислять характеристики СМО (среднее количество заявок в ИПВ, среднюю продолжительность периода обслуживания, среднюю продолжительность периода обращения из ИПВ, среднюю продолжительность состояния конфликта, количество заявок в системе), с целью сравнения аналитических результатов с результатами моделирования. Это дает возможность более глубокого исследования поведения систем в широком диапазоне изменений значений параметров и определения оптимального построения сетевых систем с точки зрения вероятностно-временных характеристик, адекватных фактическим распределениям [4].

Каждая программа комплекса реализована в виде Windows Form приложения MS Visual studio C++ для операционной системы Windows XP или Windows 7. Все программы объединены в единый проект Windows Application.

Список литературы

[1] Федеральный закон от 27.07.2010 №210–ФЗ "Об организации предоставления государственных и муниципальных услуг". `www.consultant.ru`

[2] *Ивницкий В. А.*, Теория нестационарных моментов марковских сетей. Разомкнутые сети массового обслуживания. М.: Либроком, 2011.

[3] *Vasilyeva O., Nazarov A., Tyenbaeva A.*, Characteristic function in the asymptotic analysis of the random access network . In: Proceedings of the 11 International Conference "Reliability and Statistics in Transportation and Communication "(RelStar'11), 19–21 October 2011, Riga, Latvia. Riga: Transport and Telecommunication Institute, 2011, pp.36–44. CD-ROM. ISBN 978–9984–818–34–4.

[4] *Лоу А., Кельтон В.*, Имитационное моделирование. СПб.: Питер, 2004.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

О скорости сходимости в задаче Эрланга

Александр Ю. Веретенников[1]

Оценена скорость сходимости к стационарному режиму в немарковской задаче Эрланга.

1 Введение

Работа Эрланга [8] положила начало теории массового обслуживания. Его формулы для стационарных распределений входят в учебники [7]. Известны обобщения этих формул на "немарковские" системы [7, 10, 11]. В указанных работах установлена и сходимость к стационарным распределениям по вариации, однако, без каких-либо оценок скорости. В [2, 3] стационарный режим был получен для систем с бесконечным числом серверов. Однако, для приложений необходима *скорость сходимости*. Некоторые оценки для нее были получены лишь недавно, – см. [1, 5, 6, 12] для марковских и [9] для немарковских систем, – хотя экспоненциальные оценки для некоторых марковских случаев были известны и ранее. По-видимому, *не*-экспоненциальные оценки для *не*марковской задачи Эрланга ранее известны не были; мы не касаемся работ о вложенных марковских цепях. Вопрос об условиях, отличных от (2), ставился А.Д.Соловьевым. В работе используются методы [4].

2 Немарковская система Эрланга и основной результат

Входной поток в системе условно-пуассоновский с интенсивностью λ_n, где n – число заявок в данный момент. Входящая заявка попадает на один из бесконечного количества свободных серверов, и сразу начинается обслуживание, функция распределения времени которого обозначается через F. Все обслуживания независимы между собой и относительно входящего потока. Предполагаем, что определена функция риска или интенсивности отказов $h(t) = f(t)/(1 - F(t)),\ f(t) = F'(t)$. Если $h(t) \ge c > 0$ при всех t, то имеет место экспоненциальная сходимость, см. [9]. Превратим процесс в марковский, расширив фазовое пространство [2, 11]. Последнее будет состоять из *непересекающихся* подпространств *различной размерности* $\mathcal{X} = \{0\} \oplus \cup_{n\ge 1} R_+^n$. При $x \in R_+^n$ каждая координата обозначает прошедшее время с начала обслуживания одной из n заявок в системе. Все координаты в R_+^n "симметричны", то есть каждой вновь пришедшей заявке "присваивается" номер от 1 до $n+1$ с равными вероятностями и координата, равная времени, прошедшему с момента начала обслуживания. Пока заявка не будет обслужена, соответствующая ей координата растет с единичной скоростью. В фазовом пространстве $\mathcal{X}$ процесс является марковским. Маргинальное распределение процесса при начальном состоянии x обозначается через $\mu_x(t)$, а инвариантное вероятностное распределение – через μ. Существование и единственность μ (см. [2] и там же его явный вид) может быть обеспечено условием

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{na} < 1, \quad \text{где} \quad a^{-1} := \int_0^\infty t dF(t) < \infty. \tag{1}$$

[1]Университет Лидса, Великобритания, ИППИ РАН, Россия. E-mail: a.veretennikov@leeds.ac.uk

Теорема 1. *Пусть определена функция h и найдутся такие $C, \Lambda > 0, m > 1$, что при всех t и $n \geq 1$*

$$h(t) \geq C(1+t)^{-1}, \qquad \lambda_n \leq \Lambda n, \qquad C - \Lambda - m > 0. \tag{2}$$

Тогда существует единственное стационарное распределение μ и при любом $0 < k < C - \Lambda - m$ найдутся $C', \delta > 0$ такие, что (n_0 есть число заявок в системе при $t = 0$)

$$\|\mu_x(t) - \mu_\infty\|_{TV} \leq C'(1 + \sum_{j=1}^{n_0}(x^j)^{m+1+\delta})(1+t)^{-k-1}. \tag{3}$$

Условие (1) может не вытекать из (2), однако, (1) в теореме не предполагается.

Список литературы

[1] *Asmussen S.*, Applied probability and queues. 2nd ed. New York: Springer, 2003.

[2] *Веретенников А.Ю.*, Об эргодичности систем обслуживания с бесконечным числом обслуживающих приборов, Матем. заметки, 1977, т. 22, № 4, с. 561–570.

[3] *Веретенников А.Ю.*, Эргодичность и принцип инвариантности для многофазных систем обслуживания, Автоматика и Телемеханика, 1981, № 7, с. 70–73.

[4] *Веретенников А.Ю.*, О полиномиальном перемешивании и скорости сходимости для стохастических разностных и дифференциальных уравнений. Теория вероятностей и ее применения, 1999, т. 44, № 2, с. 317–321.

[5] *Веретенников А.Ю.*, О скорости перемешивания и сходимости к стационарному распределению в дискретной задаче Эрланга. Автоматика и Телемеханика, 2009, № 12, 59–70.

[6] *Веретенников А.Ю.*, О скорости перемешивания и сходимости к стационарному распределению в системах типа Эрланга в непрерывном времени, Проблемы передачи информации, 2010, № 4, с. 122–129.

[7] *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.*, Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.

[8] *Erlang A.K.*, The theory of probabilities and telephone conversations, Nyt Tidsskrift for Matematik B, 1909, v. 20, p. 33–39.

[9] *Kelbert M., Veretennikov A.*, On the estimation of mixing coefficients for a multiphase service system. Queueing Systems, 1997, v. 25, p. 325–337.

[10] *Коваленко И.Н.*, Об условии независимости стационарных распределений от вида закона распределения времени обслуживания. Сб. Проблемы передачи информации, М., Изд-во АН СССР, 1963, вып.11, с. 147–151.

[11] *Севастьянов Б.А.*, Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным линиям с отказами. Теория вероятностей и ее применения, 1957, т. 2, № 1, с. 106–116.

[12] *van Doorn E. A., Zeifman A. I.*, On the speed of convergence to stationarity of the Erlang loss system. Queueing Systems, 2009, v. 63, p. 241–252.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Метод просеянного потока для исследования многофазной немарковской СМО с входящим MMPP-потоком[1]

Ирина Р. Гарайшина[2], Анатолий А. Назаров[3]

В работе предложена модификация метода просеянного потока и метода асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания для исследования многофазной системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и произвольным распределением времени обслуживания. Найдено явное выражение для характеристической функции числа занятых приборов.

Рассмотрим $n-$фазную систему массового обслуживания, на вход которой поступает MMPP-поток заявок. Полагаем, что продолжительности обслуживания заявок на фазах являются независимыми случайными величинами, имеющими заданные функции распределения, одинаковые для всех приборов одной фазы. Поступившая заявка занимает один из свободных приборов первой фазы. Завершив обслуживание на k-ой фазе, заявка с вероятностью r_{k+1} $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ переходит на следующую фазу для продолжения обслуживания или с вероятностью $1 - r_{k+1}$ покидает систему. По завершению обслуживания на последней, $n-$ой фазе, заявка уходит из системы.

Обозначим i_k – число занятых приборов на k-ой фазе обслуживания $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Изменение во времени состояний $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ образует некоторый $n-$мерный случайный процесс.

Для исследования рассматриваемого процесса выполнена модификация метода просеянного потока [1], в результате использования которой осуществляется переход от исходного немарковского процесса $\{i_1(t),\ i_2(t),\ \ldots,\ i_n(t)\}$ к процессу, характеризующему число заявок, попавших в просеянные потоки, который марковизируется. Для решения уравнения для характеристической функции полученного $n-$мерного процесса использован метод асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания, что позволило получить асимптотические приближения характеристической функции числа занятых приборов на фазах первого и второго порядков.

Список литературы

[1] *Гарайшина И.Р., Моисеева С.П., Назаров А.А.*, Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2010, 204 с.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ N 11-01-90712-моб_ ст.

[2]Филиал Кемеровского государственного университета в г. Анжерпо-Судженске, факультет информатики, экономики и математики. E-mail: garayshina@ngs.ru

[3]Национальный исследовательский Томский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Анализ выборочной траектории процеса обслуживания системы $M^x|G|1|K$

Митко Димитров[1]

1 Введение

Система массового обслуживания с неординарным пуасоновым входящим потоком исследована интенсивно многими авторами за последние сорок лет. Интерес к этой модели обусловлен не только с точки зрения теорий, но и широким применением при моделировании телекомуникационных и производственных систем. Существуют разные методы исследования систем типа $M|G|1|K$ и $M^x|G|1|K$, но два из них, как метод вложеных цепей Маркова и метод дополнительных переменых, используются чаще всего. Как правило, рассматривается вложеная цепь Маркова в моменты окончания обслуживания требований. Мы применим метод предложеный S.Niu и R. Cooper [2] для исследования системы $M|G|1|K$.

Niu и Cooper рассматривают вложеную цепь Маркова в моменты начала обслуживания требований, число поступивших в систему требований во время текущего обслуживания до рассматриваемого момента t и остаточное время обслуживания. Ими предложен анализ выборочной реализаций процеса обслуживания системы на основе концепций "случайно выбранного поступавшего в систему требования". С помощью метода, предложеного Niu и Cooper мы нашли для системы $M^x|G|1|K$ стационарное распределение длины очереди и остаточного времени обслуживания в моменты поступления групп требований в систему, вероятность потери первого требования в группе требовний и вероятность потери любого требования из групы, преобразование Лапласа-Стильтьеса времени ожидания первого в группе требования и любого принятого для обслуживания, также их математические ожидания. Найдена средняя длина очереди принятых на обслуживание требования. Систему $M^x|G|1|K$ исследовали Niu и Takahashi [3] с помощью метода дополнительной пременной.

2 Основные результаты

Через $L(t)$ обозначим число требований в момент t. Если $L(t) > 0$, через $R(t)$ обозначим оствшеся время обслуживания требования на приборе. Мы будем изучать случайный процес

$$Z(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } L(t) = 0; \\ (L(t), R(t)), \text{ если } L(t) \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Для этого введем следующие обозначения: $Q_s(t)$ - число требований в очереди сразу после начала обслуживания; $Q_a(t)$ - число требований поступивших в систему во время

[1]Университет за Национално и Световно Стопанство, Болгария E-mail: `mcdimitrov@abv.bg`

текущего обслуживания до рассматриваемого момента t, в том числе и потеряные требования. Для того чтобы изучить процесс $Z(t)$, достаточно рассмотреть процесс $Z^+(t)$, который определяется следующим образом:

$$Z^+(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } L(t) = 0; \\ (Q_s(t), Q_a(t), R(t)), \text{ если } L(t) > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Мы будем исследовать процесс $Z^+(t)$ с точки зрения «случайно выбранной» поступившей в систему группы требований.

Теорема 1. *Вероятностное распределение состояний процесса Z^+, которое нашла в системе случайно выбранная поступившая группа требований с вероятностью единица задается следующим оброзом*

$$\alpha_0^+ = ((\sigma_o + \hat{\sigma}_0)\tilde{a}_0 + \rho)^{-1} (\sigma_o + \hat{\sigma}_0)\tilde{a}_0 \tag{3}$$

$$\alpha_{ij}^+(x) = (1 - \alpha_0^+)\sigma_i \nu_j(x), 0 \le i \le K-2, 0 \le j < \infty, x \ge 0 \tag{4}$$

$$\alpha_{\hat{i}j}^+(x) = (1 - \alpha_0^+)\hat{\sigma}_i \nu_j(x), 0 \le i \le K-1, 0 \le j \le \infty, x \ge 0 \tag{5}$$

Пропорция η поступивших требований, которые не теряются (принимаются на обслуживание) равна

$$[C_1 ((\sigma_0 + \hat{\sigma}_0) + \rho)]^{-1} \tag{6}$$

Из теоремы 1 можно найти распределение процесса Z с точки зрения случайно выбранной группы требований поступившей в систему обслуживания.

Теорема 2. *Вероятностное распределение состояний процесса Z, которые нашла в системе случайно выбранная поступившая в систему группа требований с вероятностью единица задается с помощью равенств*

$$\alpha_0 = ((\hat{\sigma}_0 + \sigma_0)\tilde{a}_0 + \rho)^{-1}(\sigma_0 + \hat{\sigma}_0)\tilde{a}_0 \tag{7}$$

$$\alpha_j(x) = (1 - \alpha_0) \sum_{i=0}^{j-1} (\sigma_i + \hat{\sigma}_i)\nu_{j-i-1}(x), 1 \le j \le K-1 \tag{8}$$

$$\alpha_K(x) = (1 - \alpha_0) \sum_{j=K}^{\infty} \sum_{i=0}^{K-1} \hat{\sigma}_i \nu_{j-1-i}(x) + (1 - \alpha_0) \sum_{j=K}^{\infty} \sum_{i=0}^{K-2} \sigma_i \nu_{j-i-1}(x) \tag{9}$$

Следствие. Из теоремы 2 следует, что вероятность потери первого требования в группе равна $\alpha_K(\infty)$.

Список литературы

[1] *Niu, S.-C.* Representing Workloads in $GI|G|1$ Queues through the Preemptive-Resume LIFO Queue Discipline. Queuing systems, 1988, v. 3, p. 157–178.

[2] *Niu S.-C., Cooper R. B.* Transform - free analysis of $M|G|1|K$ and Related Queues. Mathematics of Operations Research. 1993, v. 18, p. 486–510.

[3] *Frey Y., Takahashi Y.*, An $M^x|G|1|N$ queue with close-down and vacation times. Journal of Applied Mathematics and Stohastic Analysis. 1999, v. 12, N 1, p. 63–83.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Исследование потоков в системах с неограниченным числом линий

Ирина А. Захорольная[1]

В работе предлагается оригинальный метод аналитического исследования потоков в системах с неограниченным числом линий.

Исследование систем с неограниченным числом линий обслуживания в работах многих известных авторов как правило сводится в нахождению стационарных характеристик системы, а именно числа занятых приборов. Для изучения таких систем широко применяют методы асимптотического анализа, имитационного моделирования и численного анализа. Эти методы не позволяют получать точные аналитические выражения для вероятностных характеристик системы. Кроме того, при моделировании многих реальных систем, возникает необходимость учитывать возможность многократного обслуживания заявок, формирующих потоки в этих системах. В связи с вышесказанным, актуальной задачей является разработка аналитических методов исследования систем с неограниченным числом линий и нахождения вероятностных характеристик потоков в этих системах.

Предлагается метод предельной декомпозиции для исследования потоков в системах массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих линий, входящим пуассоновским потоком и повторным обслуживанием [1, 2]. Суть этого метода заключается в следующем.

Пуассоновский с интенсивностью λ входящий поток разделим по полиномиальной схеме с равными вероятностями на N независимых пуассоновских потоков с интенсивностями λ/N. Для заявок каждого из потоков определим единственную соответствующую линию обслуживания и будем рассматривать однолинейную СМО с отказами в обслуживании для тех заявок, которые поступили на периодах занятости линии. Следовательно, формируется N независимо функционирующих однолинейных систем обслуживания, исследование которых гораздо проще, чем исследование исходной системы с неограниченным числом линий. В связи с возможностью отказов в обслуживании, суммарные характеристики полученной совокупности N независимых однолинейных систем не эквивалентны соответствующим характеристикам исходной системы с неограниченным числом линий. Этот недостаток устраняется предельным переходом в суммарных характеристиках при $N \to \infty$.

Список литературы

[1] *Ананина И.А., Назаров А.А., Моисеева С.П.*, Исследование потоков в системе M|GI|∞ с повторным обращением методом предельной декомпозиции. Вестник ТГУ: Управление, вычислительные технологии и информатика. 2009, N 3 (8), с.56–67.

[1]Национальный исследовательский Томский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики. E-mail: `izax@mail2000.ru`

[2] *Ананина И.А., Назаров А.А.*, Исследование потоков в системе $M|GI|\infty$ с повторным обращением с учетом номера попытки. Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения: материалы Международной конференции в Минске 22–25 февраля 2010 г. Минск: РИВШ, 2010. С.11-14.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

О некоторых классах систем массового обслуживания[1]

А. И. Зейфман[2], А. В. Коротышева[3], Я. А. Сатин[4]

В работе обсуждаются оценки скорости сходимости для некоторых марковских систем массового обслуживания.

В заметке Б. В. Гнеденко и И. П. Макарова [1] была высказана идея о возможности применения логарифмической нормы матрицы для исследования эргодических свойств процессов рождения и гибели. Реализация этого подхода была проведена в серии работ одного из авторов настоящего доклада, см. [2]-[10]. А именно, был разработан метод, позволяющий получать точные двухсторонние оценки скорости сходимости к предельному режиму для стационарных и нестационарных процессов рождения и гибели, исследовать количественные характеристики их устойчивости, вычислять предельные характеристики.

Совсем недавно удалось расширить класс систем обслуживания, для которых удается провести подобное исследование, см. первые результаты в [11].

Рассмотрим здесь систему обслуживания, в которой интенсивности поступления и обслуживания k требований в момент t в системе обслуживания ($\lambda_k(t)$ и $\mu_k(t)$ соответственно) не зависят от числа требований, находящихся в системе в момент t, причем $\lambda_{k+1}(t) \le \lambda_k(t)$ и $\mu_{k+1}(t) \le \mu_k(t)$ при всех k и почти при всех $t \ge 0$, предполагая для простоты формулировки, что число требований $X(t)$ в системе обслуживания не превосходит $N < \infty$.

Введем вспомогательную последовательность положительных чисел $\{d_i\}$, $i = 1, \dots, N$. Положим $d = \min_{i\ge1} d_i$, $\quad g_i = \sum_{n=1}^{i} d_n$.

Рассмотрим выражения

$$\alpha_i(t) = -a_{ii}(t) + \lambda_{N-i+1}(t) - \sum_{k=1}^{i-1}(\mu_{i-k}(t) - \mu_i(t))\frac{d_k}{d_i} - \sum_{k=1}^{N-i}(\lambda_k(t) - \lambda_{i+N-1}(t))\frac{d_{k+i}}{d_i}, \qquad (1)$$

и

$$\zeta_i(t) = -a_{ii}(t) + \lambda_{N-i+1}(t) + \sum_{k=1}^{i-1}(\mu_{i-k}(t) - \mu_i(t))\frac{d_k}{d_i} + \sum_{k=1}^{N-i}(\lambda_k(t) - \lambda_{i+N-1}(t))\frac{d_{k+i}}{d_i}, \qquad (2)$$

где $a_{ii}(t) = -\sum_{k=1}^{i}\mu_k(t) - \sum_{k=1}^{N-i}\lambda_{N-k}(t)$. Положим $\alpha(t) = \min_i \alpha_i(t)$, $\beta(t) = \max_i \alpha_i(t)$ и $\xi(t) = \max_i \zeta_i(t)$. Через $\mathbf{p}(t)$ будем обозначать вектор вероятностей состояний процесса $X(t)$, а через $\| \bullet \|$ – l_1-норму.

---

[1]Работа поддержана грантом РФФИ N 11-01-12026.

[2]Вологодский государственный педагогический университет, ИПИРАН, ИСЭРТ РАН. E-mail: a_zeifman@mail.ru

[3]Вологодский государственный педагогический университет. E-mail: a_korotesheva@mail.ru

[4]Вологодский государственный педагогический университет. E-mail: yacovi@mail.ru

Теорема 1. *Пусть существует последовательность положительных чисел $\{d_i\}$ такая, что $\int_0^\infty \alpha(t)\,dt = +\infty$. Тогда $X(t)$ слабо эргодичен, при любых начальных условиях $\mathbf{p}^*(s), \mathbf{p}^{**}(s)$ и любых $s, t, \quad 0 \le s \le t$, справедлива оценка*

$$\frac{d}{2g_N} e^{-\int_s^t \xi(u)du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\| \le \|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \le \frac{4g_N}{d} e^{-\int_s^t \alpha(u)du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|. \quad (3)$$

Кроме того, найдутся начальные условия, при которых

$$\|\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{p}^{**}(t)\| \ge \frac{d}{2g_N} e^{-\int_s^t \beta(u)du} \|\mathbf{p}^*(s) - \mathbf{p}^{**}(s)\|. \quad (4)$$

Список литературы

[1] *Гнеденко Б. В., Макаров И. П.*, Свойства решений задачи с потерями в случае периодических интенсивностей. Дифф. уравнения, 1971, т. 7, с. 1696–1698.

[2] *Zeifman A.I.*, Stability for contionuous-time nonhomogeneous Markov chains. Lect. Notes Math., 1985, v. 1155, p. 401–414.

[3] *Zeifman A.I.*, Some estimates of the rate of convergence for birth and death processes. J. Appl. Probab., 1991, v. 28, p. 268–277.

[4] *Zeifman A. I.*, Upper and lower bounds on the rate of convergence for nonhomogeneous birth and death processes. Stoch. Proc. Appl., 1995. v. 59, p. 157–173.

[5] *Granovsky B. L., Zeifman A. I.*, The N-limit of spectral gap of a class of birth-death Markov chains. Appl. Stoch. Models in Business and Industry, 2000, v. 16, p. 235–248.

[6] *Granovsky B. L., Zeifman A. I.*, Nonstationary Queues: Estimation of the Rate of Convergence. Queueing Systems, 2004, v. 46, p. 363–388.

[7] *Zeifman A., Leorato S., Orsingher E., Satin Ya., Shilova G.*, Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes. Queueing Syst., 2006, v. 52, p. 139–151.

[8] *Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А.* Марковские цепи и модели с непрерывным временем. М.: Элекс-КМ, 2008.

[9] *Ван Доорн Э. А., Зейфман А. И., Панфилова Т. Л.*, Оценки и асимптотика скорости сходимости для процессов рождения и гибели. Теория вероятностей и ее применения, 2009, т. 54, с. 18–38.

[10] *Zeifman A., Korotysheva A.*, Perturbation bounds for $M_t/M_t/N$ queue with catastrophes. Stochastic models, 2012, v. 28, p. 49–62.

[11] *Сатин Я.А., Зейфман А. И., Коротышева А. В., Шоргин С. Я.*, Об одном классе марковских систем обслуживания. Информатика и ее применения, 2011, т. 5, вып. 4, с. 6–12.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Достаточное условие эргодичности экспоненциального процесса обслуживания с переналадками в случайной среде[1]

Андрей В. Зорин[2]

В работе изучается процесс обслуживания с разделением времени и переналадками конфликтных потоков, формируемых в случайной среде с экспоненциально распределенными длительностями обслуживаний и переналадок. Получено достаточное условие существования стационарного режима.

1 Введение

Рассматривается следующая система массового обслуживания. Входные потоки системы Π_1, Π_2, $\ldots$, Π_m, $m < \infty$, конфликтные и формируются в случайной среде с двумя состояниями $e^{(1)}$, $e^{(2)}$. При состоянии среды $e^{(k)}$, $k = 1$, 2, поток Π_j, $j = \overline{1, m}$, пуассоновский с интенсивностью $\lambda_j^{(k)} > 0$. Требования потока Π_j помещаются в накопитель O_j бесконечного объема. Обслуживание требований осуществляется в порядке поступления в накопители. Обслуживающее устройство имеет $n = 2m + 1$ состояний $\Gamma^{(0)}$, $\Gamma^{(1)}$, $\ldots$, $\Gamma^{(2m)}$. В состоянии $\Gamma^{(r)}$, $r = \overline{1, m}$, обслуживаются требования только из очереди O_r. После состояния $\Gamma^{(r)}$ прибор переходит в состояние $\Gamma^{(m+r)}$. В состоянии $\Gamma^{(m+r)}$ требования не обслуживаются, а прибор осуществляет акт внутренней переналадки и управления. Если в момент окончания акта внутренней переналадки и управления очереди пусты, прибор переходит в состояние $\Gamma^{(0)}$ для ожидания поступления требование. При поступлении требования начинается его обслуживание, и состояние прибора становится $\Gamma^{(j)}$, если первое требование поступило по потоку Π_j. Если по окончании акта переналадки и управления длины очередей описываются ненулевым вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то на обслуживание выбирается требование из очереди O_j и состояние прибора становится $\Gamma^{(j)}$, где $j = h(x)$ и $h(\cdot)$ — заданное отображение неотрицательной m-мерной целочисленной решетки на множество $\{0, 1, \ldots, m\}$, удовлеторяющее ограничениям: $h(x) = j$ влечет $x_j > 0$ и прообразом точки 0 является только нулевой вектор $(0, 0, \ldots, 0)$. Длительности обслуживаний и переналадок независимы и имеют экспоненциальное распределение. Средняя длительность обслуживания в состоянии $\Gamma^{(r)}$ равна $\beta_r > 0$, средняя длительность переналадки в состоянии $\Gamma^{(m+r)}$ равна $\bar{\beta}_r > 0$. Случайная внешняя среда синхронизирована с обслуживающим устройством: смена состояния случайной среды может происходить только в моменты окончания обслуживания и актов внутренней переналадки и управления. Вероятность смены состояния $e^{(k)}$ на состояние $e^{(l)}$ равна $a_{k,l}$, k, $l = 1$, 2. Итак,

[1]Работа выполнена в рамках госбюджетной НИР ННГУ им. Н.И. Лобачевского — национального исследовательского университета по теме № Н-040-0 «Математическое моделирование и создание новых методов анализа эволюционных системи систем оптимизации»

[2]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского — национальный исследовательский университет, факультет вычислительной математики и кибернетики.
E-mail: zoav1602@gmail.com

процесс смены состояния случайной среды не является марковским. После обслуживания требование из очереди O_j может с вероятностью $p_{j,r}$ поступить на повторное обслуживание в очередь O_r, а с вероятностью $p_{j,0} = 1 - \sum_{r=1}^{m} p_{j,r}$ покидает систему. Считается, что каждое требование с положительной вероятностью покидает систему за конченое число шагов. Таким образом, кроме потоков первичных требований в систему поступают потоки вторичных требований и суммарные входные потоки требований имеют сложную вероятностную структуру.

Описанная система массового обслуживания является адекватной моделью многих реальных систем, таких как вычислительные комплексы, информационные системы, комплексы микросварки и т.д., и рассматривалась многими авторами. Как правило, оптимизационная задача ставится относительно выбора наилучшего в некотором смысле отображения $h(\cdot)$ (см. [1, 2]) в стационарном режиме функционирования системы.

2 Основные результаты

Пусть $\chi(t)$ — состояние случайной среды в момент $t \geqslant 0$, $\Gamma(t)$ — состояние обслуживающего устройства в момент t, $\kappa_j(t)$ — число требований в очереди O_j в момент t, $\kappa(t) = (\kappa_1(t), \kappa_2(t), \dots, \kappa_m(t))$.

Теорема 1. *Случайный процесс*

$$\{(\Gamma(t), \kappa(t), \chi(t)); t \geqslant 0\} \tag{1}$$

при заданном начальном распределении является однородным марковским со счетным числом состояний. Марковский процесс (1) имеет только устойчивые не поглощающие состояния и консервативную инфенитезимальную матрицу.

В следующей теореме содержится основной результат работы — условие эргодичности процесса (1). Введем обозначения $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, $\bar\beta = (\bar\beta_1, \bar\beta_2, \dots, \bar\beta_m)$, $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_m^{(k)})^T$, $Q = (p_{r,s}\colon r, s = \overline{1,m})$, $I_m = (\delta_{r,s}\colon r, s = \overline{1,m})$ — единичная матрица размера $m \times m$, $\delta_{r,s}$ — символ Кронекера.

Теорема 2. *Для существования единственного стационарного распределения марковского процесса (1) достаточно выполнения неравенства*

$$(\beta + \bar\beta)(I_m - Q^T)^{-1}(a_{2,1}\lambda^{(1)} + a_{1,2}\lambda^{(2)})(a_{1,2} + a_{2,1})^{-1} < 1. \tag{2}$$

Доказательство теоремы 2 использует связь между свойствами марковского процесса со счетным числом состояний и вложенной в моменты скачков цепи Маркова [3], а также итеративно-мажорантный подход [1].

Список литературы

[1] *Федоткин М.А.*, Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. II, Литовский математический сборник, 1989, Т. 29, № 1, с. 148–159.

[2] *Зорин А.В.*, Минимизация стоимости разгрузки для экспоненциального процесса обслуживания с разделением времени. Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2011, № 4(17), с. 55-63.

[3] *Kannan D.*, An introduction to stochastic processes, Elsvier Science Ltd, 1979.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

О процессах восстановления

Виктор А. Ивницкий [1]

На оси времени последовательно расположены случайные точки $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ так, что с вероятностью 1 $t_n \geq t_{n-1}, n \geq 1, t_0 \geq 0$. В каждой из точек $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, происходит одно восстановление. Пусть $z_0 = t_0, \dots, z_n = t_n - t_{n-1}, \dots, n \geq 1$. Если $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ являются независимыми неотрицательными случайными величинами, причем $\mathbf{P}\{z_0 < x\} = \varphi^{(0)}(x)$, а $z_1, z_2, \dots, z_n$ одинаково распределены и их функция распределения $\mathbf{P}\{z_i < x\} = F(x)$, $i = 1, 2, \dots, \varphi^{(0)}(x)$ и $F(x)$ имеют произвольный вид, то последовательность моментов $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ образует *процесс восстановления* [1].

Введем обозначения: $\xi(t)$ - остаточное время с момента t до момента следующего восстановления, $\nu(t)$ - количества происшедших восстановлений до момента t,

$$n^{(k)}(t,x) = \mathbf{M}\nu(t)^k \mathbf{I}(\xi(t) < x), n^{(k)}(t) = n^{(k)}(t,\infty), k = 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{n}^{(k)}(u) = \int_0^\infty e^{-ut} n^{(k)}(t)dt, \tilde{n}^{(k)}(u,s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ut-sx} d_x n^{(k)}(t,x)dt, \alpha_i^{(0)} = \int_0^\infty x^i d\varphi^{(0)}(x),$$

$$\alpha_i = \int_0^\infty x^i dF(x), i = 1, 2, ..., \frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(i)}(u,0) = \int_0^\infty e^{-ut}\frac{\partial}{\partial x} n^{(i)}(t,0)dt, i = 0, ..., k.$$

Теорема 1. *Для $\tilde{n}^{(k)}(u,s)$ и $\tilde{n}^{(k)}(u)$ имеют место следующие формулы:*

$$\tilde{n}^{(k)}(u,s) = (u-s)^{-1}((\tilde{\varphi}(s) - (1-\tilde{\varphi}(s))\tilde{h}_1(u))\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i \frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(i)}(u,0) + n^k(0)(\tilde{\varphi}^0(s) - \tilde{h}(u)(1-\tilde{\varphi}(s))), \tag{1}$$

$$\tilde{n}^{(k)}(u) = u^{-1}(\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i \frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(i)}(u,0) + n^{(k)}(0)), \tag{2}$$

где $\frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(i)}(u,0)$ определяется по рекуррентной формуле

$$\frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(i)}(u,0) = \sum_{j=0}^{i-1} C_i^j \frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(j)}(u,0)\tilde{h}_1(u) + n^{(i)}(0)\tilde{h}(u), \tag{3}$$

$$\tilde{h}_1(u) = \tilde{\varphi}(u)(1-\tilde{\varphi}(u))^{-1}, \tilde{h}(u) = \tilde{\varphi}^0(u)(1-\tilde{\varphi}(u))^{-1}, \frac{\partial}{\partial x}\tilde{n}^{(0)}(u,0) = \tilde{h}(u).$$

Теорема 2. *Структура аналитического вида нестационарного начального момента k-го порядка количества поступивших требований рекуррентного потока $n^{(k)}(t)$ (k - произвольное целое положительное число) дается следующей формулой*

$$n^{(k)}(t) = n^{(k)}(0) + \sum_{l=0}^{k-1} A_l(t) \sum_{i=l}^{k-1} C_k^i a_l^{(i)}, \tag{4}$$

[1]Московский государственный университет путей сообщения, кафедра "Автоматизированные системы управления". E-mail: `ivnit@vniizht.ru`

где $A_l(t)$ есть свертка $H_0(t)$ и l-кратной свертки $H_1(t), H_0(t)$ - функция общего процесса восстановления (для которого $\varphi^{(0)}(x) \neq F(x)$), $H_1(t)$ - функция простого процесса восстановления (для которого $\varphi^{(0)}(x) \equiv F(x)$), $a_i^{(i)}$ определяются явными формулами и рекуррентными соотношениями

$$a_i^{(i)} = i!, a_{i-1}^{(i)} = i!(0,5(i-1)+n^{(1)}(0)), a_{i-2}^{(i)} = 0,5i!((i-2)(\frac{1}{3}+n^{(1)}(0))+0,5C_{i-2}^2+n^{(2)}(0)), \dots,$$

$$a_l^{(i)} = \sum_{j=l-1}^{i-1} C_i^j a_{l-1}^{(j)}, \dots, a_1^{(i)} = \sum_{j=0}^{i-1} C_i^j n^{(j)}(0), a_0^{(i)} = n^{(i)}(0), a_0^{(1)} = n^{(1)}(0)$$

$$a_1^{(1)} = 1, a_2^{(2)} = 2, a_1^{(2)} = 2n^{(1)}(0)+1, a_0^{(2)} = n^{(2)}(0).$$

Теорема 3. *Если имеется окрестность $0 < |u| < \varepsilon$, где ε - малое число, в которой $\tilde{\varphi}(u)$ и $\tilde{\varphi}^{(0)}(u)$ являются аналитическими функциями, то для начального момента $n^{(k)}(t) = \mathbf{M}\nu(t)^k$ процесса $\nu(t)$, где k - произвольное целое положительное число, для произвольных начальных условий $n^{(k)}(0) = \mathbf{M}\nu(0)^k$ и $\varphi^{(0)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i^{(0)} \varphi_i^{(0)}(x)$ и нерешетчатых распределений $F(x)$ и $\varphi^{(0)}(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, имеющих конечные начальные моменты 3-го и 2-го порядка соответственно, при $t \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$n^{(k)}(t) = \frac{t^k}{\alpha_1^k} + \frac{t^{k-1}}{\alpha_1^k}(k(\frac{k}{2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - (k-1)\alpha_1 - \alpha_1^{(0)}) + k!(0,5(k-1)+n^{(1)}(0))\frac{\alpha_1}{(k-1)!}) + \frac{t^{k-2}}{\alpha_1^k} \times$$

$$\times (k(k-1)((k-1)\alpha_1\alpha_1^{(0)} + 0,5(k-1)\alpha_2 + 0,5\alpha_2^{(0)} + C_{k-1}^2\alpha_1^2 - \frac{1}{\alpha_1^2}(\frac{1}{4}C_k^2\alpha_2^2 + \frac{k}{6}\alpha_3\alpha_1) + \frac{k}{2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \times$$

$$\times (\frac{k}{2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - (k-1)\alpha_1 - \alpha_1^{(0)})) + k!(0,5(k-1)+n^{(1)}(0))(\frac{k-1}{2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - (k-2)\alpha_1 - \alpha_1^{(0)}))\frac{\alpha_1}{(k-2)!} +$$

$$+(k!(0,25k+0,5n^{(1)}(0) - \frac{7}{12}) + 0,5k!((k-3)(\frac{1}{3}+n^{(1)}(0)) + n^{(2)}(0) + \frac{1}{2}C_{k-3}^2)\frac{\alpha_1^2}{(k-2)!}) + o(t^{k-2}). \tag{5}$$

Из формулы (1), обращая преобразование Лапласа $n^{(k)}(t,x)$ получаем $n^{(1)}(t,x)$ и $n^{(2)}(t,x)$. Для корреляционной функции $\nu(t)$ находим $\mathbf{M}\nu(t)\nu(t')$.

Теорема 4. *Для $\mathbf{M}\nu(t)\nu(t')$ справедлива формула*

$$\mathbf{M}\nu(t)\nu(t') = n^{(2)}(t,\infty) - n^{(2)}(t,t'-t) + \sum_{n=0}^{\infty}(\int_0^{t'-t}(n^{(2)}(t,t'-t-y_1)dF_n(y_1) -$$

$$-\int_0^{t'-t}(\int_0^{t'-t-y_1} n^{(2)}(t,t'-t-y_1-y_2)dF(y_2))dF_n(y_1) + (n+1)(\int_0^{t'-t} n^{(1)}(t,t'-t-y_1)dF_n(y_1) -$$

$$-\int_0^{t'-t}(\int_0^{t'-t-y_1} n^{(1)}(t,t'-t-y_1-y_2)dF(y_2))dF_n(y_1)). \tag{6}$$

Список литературы

[1] *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.*, Введение в теорию массового обслуживания. Москва: изд. «КомКнига» группы URSS, 2005, с. 397.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Стохастическая синхронизация больших беспроводных сетей с сервером точного времени[1]

А.Д. Манита[2]

В докладе предлагается многомерная марковская модель синхронизации внутренних времён в узлах однородных беспроводных сетей при наличии сервера эталонного времени. Обсуждаются асимптотические свойства модели на больших временах и при росте числа узлов.

Рассмотрим многомерный случайный процесс $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $t \geq 0$, который проинтерпретируем следующим образом. Имеется сеть из $N+1$ узлов (устройств), переменная $x_i(t)$ называется внутренним (локальным) временем устройства i. Абсолютное (физическое) время мы обозначаем $t \in \mathbb{R}_+$. Узлы с номерами $2, 3, \dots, N+1$ мы назовем клиентами и будем считать, что они оснащены однотипными, но не совершенными, внутренними часами, отсчитывающими автономные времена по правилам

$$x_j(t) = x_j(0) + vt + \sigma B_j(t), \qquad j = 2, \dots, N+1\,, \tag{1}$$

тогда как узел 1, называемый сервером точного времени, оснащён эталонными внутренними часами, линейно связанными с физическим временем:

$$x_1(t) = x_1(0) + rt\,. \tag{2}$$

Параметры r и v положительны, но, вообще говоря, $r \neq v$. Параметр $\sigma > 0$ отвечает силе случайного шума, сопутствующего работе несовершенных часов клиентов. Для простоты случайный шум в формуле (1) вводится с помощью независимых стандартных винеровских процессов $B_j(t)$, $j = 2, \dots, N+1$.

Для многих важных приложений, в частности, для распределенных сетей беспроводных устройств (см. [1]), критическим условием их правильной совместной работы является обеспечение синхронизации внутренних времен узлов. Технически такая синхронизация может быть обеспечена за счет обмена информацией между узлами сети. Поэтому мы усложним нашу математическую модель. Будем считать, что кроме *свободной динамики* (1)–(2) в системе имеет место *взаимодействие* следующего вида. Через *случайные* интервалы времени узлы отправляют другим узлам сообщения, содержащее информацию о текущем внутреннем времени отправителя. Считаем, что сообщения мгновенно достигают своих адресатов. Более точно, сервер 1 с интенсивностью $\alpha > 0$ формирует сообщение и отправляет его *наугад* выбранному клиенту. Независимо каждый клиент с интенсивностью $\beta > 0$ отправляет сообщения *другому* наугад выбираемому *клиенту*. Если в случайный момент времени τ клиент j получает сообщение *от узла* i, он приводит

[1] Работа поддержана грантами РФФИ № 11-01-90421 и 12-01-00897.

[2] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: manita@mech.math.msu.su

свои часы в соответствие: $x_j(\tau+0) = x_i(\tau)$. Между получением сообщений часы клиентов работают по закону свободной динамики (1).

Таким образом, мы построили идеализированную марковскую модель $x(t)$ синхронизации времени в однородной сети беспроводных устройств с выделенным эталонным сервером точного времени. Для оценки степени десинхронизации (рассогласования) в системе удобно рассматривать следующие функции на конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^{N+1}$:

$$R(x) := \frac{1}{N}\sum_{j=2}^{N+1}(x_j - x_1)^2, \qquad D(x) := \frac{1}{(N-1)N}\sum_{2\le j_1<j_2}(x_{j_2} - x_{j_1})^2.$$

Первая из них контролирует отклонение часов клиентов от точного времени, а вторая отвечает за относительное согласование между локальными часами клиентов.

В настоящем докладе мы обсудим

- существование пределов функций $\boldsymbol{R}_N(t) := \mathsf{E}\,R(x(t))$ и $\boldsymbol{D}_N(t) := \mathsf{E}\,D(x(t))$ при фиксированном N и при $t\to\infty$ (синхронизация системы на больших временах);
- существование временных шкал $t = t(N) \to \infty$, $N \to \infty$ с разным характером синхронизации, аналогично работам [2, 3, 4, 7];
- перспективы обобщения этих результатов на немарковские модели, основанные на использовании общих процессов восстановления [5] по аналогии с работой [6];
- возможные подходы к анализу неоднородных сетей, более приближенных к практическим приложениям (см. обзор [1]).

Список литературы

[1] *Simeone O., Spagnolini U., Bar-Ness Y., Strogatz S.H.*, Distributed synchronization in wireless networks. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, v. 25, N 5, p. 81–97.

[2] *Малышев В., Манита А.*, Фазовые переходы в модели синхронизации времени. Теория вероятностей и ее применения, 2005, т. 50, N 1, с. 150–158.

[3] *Манита А.Д.*, Стохастическая синхронизация в большой системе однотипных частиц. Теория вероятностей и ее применения, 2008, т. 53, N 1, с. 162–168.

[4] *Manita A.*, Brownian particles interacting via synchronizations. Communications in Statistics — Theory and Methods, 2011, v. 40, N 19-20, p. 3440–3451.

[5] *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.*, Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 4, 2007. 400 с.

[6] *Manita A.*, On Markovian and non-Markovian models of stochastic synchronization. Proceedings of The 14th Conference “Applied Stochastic Models and Data Analysis” (ASMDA), 2011, Rome, Italy, p. 886–893.

[7] *Манита А.Д.*, О фазах в эволюции многомерных взаимодействующих диффузий с синхронизацией. В сб. “Современные проблемы математики и механики”. Т. VII. Математика. Выпуск 1. К 190-летию П.Л. Чебышева. Изд. Моск. ун-та, 2011. С. 50–67.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Метод просеянного потока для исследования немарковских СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов

Светлана П. Моисеева, Анатолий А. Назаров[1]

В работе предлагается оригинальный метод исследования бесконечнолинейных систем массового обслуживания с произвольным временем обслуживания и коррелированными потоками входящих заявок.

1 Введение

Рассматривается система массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает BMAP-поток или полумарковский неординарный поток [1]. Времена обслуживания различных заявок стохастически независимы и имеют функцию распределения $B(x)$. Очевидно, что в случае произвольного распределения времени обслуживания метод «внешнего» марковизирования не применим. Для решения этой проблемы предлагается метод просеянного потока [2]. Этот метод сводит исследование процесса , характеризующего число занятых приборов, к исследованию так называемого просеянного потока, который удается марковизировать.

2 Метод просеянного потока

На оси времени t выделим некоторый момент T . Не нарушая общности, можно полагать, что $T = 0$. Определим, зависящую от времени $t \leq 0$, вероятность $S(t)$ равенством

$$S(t) = 1 - B(-t) \tag{1}$$

и будем полагать, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t \leq 0$ с вероятностью $S(t)$ формирует требование просеянного потока, а с вероятностью $1 - S(t)$ исключается из рассмотрения.

Очевидно, что заявки, не попавшие в просеянный поток, завершат своё обслуживание и покинут систему до момента времени $T = 0$, в то время как заявки просеянного потока в момент $T = 0$ будут находится в системе, занимая её приборы.

Обозначим $n(t)$ – число требований, поступивших в просеянном потоке до момента времени t . Если в некоторый начальный момент времени $t_0 < T$ система свободна, то есть, в ней нет обслуживаемых заявок, то в момент времени T выполняется равенство

$$i(T) = n(T), \tag{2}$$

где $i(T)$ – число приборов, занятых в системе в момент времени T .

[1]Национальный исследовательский Томский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики. E-mail: `smoiseeva@mail.ru`

Полагая входящий поток стационарным, для определения стационарных характеристик случайного процесса $i(T)$ начальный момент t_0 выберем из условия $t_0 = -x_0$, где x_0 – такое значение аргумента x функции распределения $B(x)$, для которого $B(x_0) = 1$, возможно $x_0 = \infty$, поэтому для всех $t \leq t_0$ вероятности $S(t) = 0$ и до момента времени t_0 требования в просеянном потоке не поступают.

Равенство (2) является основным для дальнейших исследований немарковских систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов, так как проблему исследования таких систем сводит к задаче анализа нестационарного просеянного потока, определяемого случайным процессом $n(t)$.

Найдя характеристики этого случайного процесса в произвольный момент времени $t \leq T$, положим $t = T$, тогда эти характеристики, в силу равенства (2), совпадают с характеристиками величины $i(T)$.

Предлагаемым методом проведено исследование системы BMAP|GI|∞ , а также системы с полумарковским неординарным входящим потоком BSM|GI|∞.

Применяя методы теории марковских процессов и метод характеристических функций, для каждой модели выводится дифференциально-матричное уравнение, которое определяет характеристики рассматриваемого просеянного потока.

Полученные уравнения, в общем случае, аналитически не решаются. В связи с этим предлагается их решать методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания [2].

Список литературы

[1] *Дудин А.Н., Клименок В.И.*, Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во БГУ, 2000, с. 175.

[2] *Назаров А.А., Моисеева С.П.*, Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: изд-во НТЛ, 2006, с. 112.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Исследование BSMP-потока

Анатолий А. Назаров, Светлана В. Лопухова[1]

В работе приведено исследование модели неординарного полумарковского потока.

1 Введение

Рассмотрим трехмерный однородный марковский случайный процесс $\{\eta(n), \xi(n), \tau(n)\}$ с дискретным временем $n = 0, 1, 2, \ldots$, первая и вторая компонента которого принимают значение из некоторого дискретного множества. Третья компонента $\tau(n)$ рассматриваемого процесса принимает неотрицательные значения из непрерывного множества.

Будем полагать, что марковская переходная функция $A_{k\nu}(x, v)$ [1] процесса $\{\eta(n), \xi(n), \tau(n)\}$ не зависит от значений $\tau(n) = y$, $\eta(n) = v_1$.

BSMP-потоком (Batch Semi Markovian Process) будем называть неординарный поток, для которого в моменты восстановления t_n поступают пачки заявок объемом $\eta(n + 1)$.

2 Основные результаты

Обозначим $m(t)$ - число заявок, поступивших в BSMP-потоке за время t, а характеристическую функцию этой величины обозначим $h(u, t)$. Так же обозначим $\mathbf{E}$ - единичный вектор-столбец, $\mathbf{I}$ - единичную диагональную матрицу, $\mathbf{r}$ - вектор-строку стационарного распределения вероятностей значений цепи Маркова ξ(n), a - среднее значение длины τ(n+1) интервалов между моментами поступления пачек в BSMP-потоке.

Матричную функцию $\mathbf{G}(\alpha, u)$ определим равенством

$$\mathbf{G}(\alpha, u) = \int_0^\infty e^{j\alpha x} d_x \left(\sum_{v=0}^{\infty} e^{juv} \mathbf{A}(x, v) \right).$$

Теорема 1. *Для стационарного BSMP-потока характеристическая функция $h(u, t)$ определяется равенством*

$$h(u, t) = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_0^\infty e^{-j\alpha t} \frac{1}{j\alpha} \mathbf{r} \left(\mathbf{G}(0, 0) - \mathbf{G}(\alpha, 0)\right) \left(\mathbf{I} - \mathbf{G}(\alpha, u)\right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \mathbf{G}(0, u)\right) \mathbf{E} d\alpha \qquad (1)$$

Список литературы

[1] *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.*, Введение в теорию массового обслуживания: 4-е изд. М.: изд-во ЛКИ, 2007.

[1]Томский государственный университет , факультет прикладной математики и кибернетики. E-mail: lopuchovasv@mail.ru

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Уравнение Манжерона в полумарковских процессах с дифференцированным блужданием и задерживающим экраном в нуле

Тамилла И. Насирова[1], Эльвин А. Гаджиев[2]

В этой статье нахождение преобразования Лапласа по времени, преобразования Лапласа-Стилтьеса по фазе условного распределения полумарковского процесса с дифференцированным блужданием и задерживающим экраном в нуле, приведено к решению уравнения Манжерона.

1 Введение

Чтобы найти распределение полумарковского блуждания и его основных граничных функционалов некоторые авторы воспользовались асимптотическим, факторизационным и другими методами (см. [1, 2, 3] и т.д.). В данной статье сузив класс блуждания, нахождение преобразования Лапласа по времени и преобразования Лапласа-Стилтьеса по фазе условного распределения полумарковского процесса с дифференцированным блужданием и задерживающим экраном в нуле приведено к решению уравнения Манжерона.

2 Основные результаты

Предположим, что на вероятностном пространстве $(\Omega,\, F,\, P(\cdot))$ задана четырехмерная последовательность $\left\{\xi_k^+,\, \eta_k^+,\, \xi_k^-,\, \eta_k^-\right\}_{k=\overline{1,\infty}}$ независимых одинаково распределенных, положительных независимых между собою случайных величин.

Используя эти случайные величины, построим следующие случайные процессы

$$X^{\pm}(t)=\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i^{\pm}, \quad \text{если} \ \sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^{\pm}\le t<\sum_{i=1}^{k}\xi_i^{\pm}, \ \ k=\overline{1,\infty}.$$

Эти процессы можем написать и в другой форме

$$X^{\pm}(t)=\sum_{i=1}^{\vartheta^{\pm}(t)}\eta_i^{\pm}, \quad \text{где} \ \vartheta^{\pm}(t)=k, \quad \text{если} \sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^{\pm}\le t<\sum_{i=1}^{k}\xi_i^{\pm}, \ \ k=\overline{1,\infty}.$$

Процесс $X_1(t)=X^+(t)-X^-(t)$ назовем полумарковским процессом с дифференцированным блужданием. Обозначим $\tau_k^{\pm}=\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_i^{\pm}, \quad k=\overline{1,\infty}$. Эти случайные величины расположим в порядке возрастания. Полученную последовательность обозначим через $\{\tau_k\}$, $k=\overline{1,\infty}$. Пусть $\eta_k=\begin{cases}\eta_i^{+}, & \text{если} \quad \tau_k=\tau_i^{+},\\ \eta_i^{-}, & \text{если} \quad \tau_k=\tau_j^{-}.\end{cases}$

[1]Бакинский государственный университет, факультет прикладной математики . E-mail: n-tamilla@rambler.ru

[2]Институт Кибернетики НАН Азербайджана, E-mail: userelvin@gmail.com

Построим следующий процесс $X(t) = \zeta_k$, если $\tau_k \le t < \tau_{k+1}$, $k = \overline{1,\infty}$, где $\zeta_0 = z$, $\zeta_k = \max(0, \zeta_{k-1} + \eta_k)$, $z > 0$. Этот процесс назовем полумарковским процессом с дифференцированным блужданием и задерживающим экраном в нуле . Построено интегральное уравнение для преобразования Лапласа по времени и преобразования Лапласа-Стилтьеса по фазе условного распределения полумарковского процесса с дифференцированным блужданием и задерживающим экраном в нуле Решение этого уравнения, в случае, когда случайные величины ξ_k^+, η_k^+, ξ_k^-, η_k^- имеют эрланговское распределение второго порядка, приведено к решению уравнения Манжерона

$$\frac{\partial^4 \tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|z,h)}{\partial z^2 \partial h^2} + 2\left(\lambda_- + \theta\right)\frac{\partial^3 \tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|z,h)}{\partial z^2 \partial h} + 2\mu_- \frac{\partial^3 \tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|z,h)}{\partial z \partial h^2} +$$

$$+4\left(\lambda_- + \theta\right)\mu_- \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|z,h)}{\partial z \partial h} + \mu_-^2 \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|z,h)}{\partial z \partial h} + \left(\lambda_- + \theta\right)\frac{\partial^2 \tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|z,h)}{\partial z^2} +$$

$$+2\left(\lambda_- + \theta\right)\mu_- \frac{\partial \tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|z,h)}{\partial h} + \left(\lambda_- + \theta\right)^2 \mu_- \frac{\partial \tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|z,h)}{\partial z} + \left[2\lambda_-\left(\lambda_- + \theta\right) + \theta^2\right] \times$$

$$\times \mu_-^2\, \tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|z,h) = \left(\alpha - \mu_-\right)^2 \left(2\,\lambda_- + \theta\right),$$

где $\tilde{\tilde{R}}(\theta,\alpha|z,h)$ преобразования Лапласа по времени, преобразования Лапласа-Стилтьеса по фазе условного распределения полумарковского процесса с дифференцированным блужданием и задерживающим экраном в нуле.

Список литературы

[1] *Боровков А.А.*, Об асимптотическом распределении первого пересечения. I, Мат. Заметки, 2004, v. 75, N 1, с.24–39.

[2] *Боровков А.А.*, Об асимптотическом распределении первого пересечения. II, Мат. Заметки, 2004, v. 75, N 3, с.350–359.

[3] *Лотов В.И.*, Об асимптотике распределений в двуграничных задачах для случайных блужданий, заданных на цепи Маркова. Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1989, т. 13, с. 116–136.

[4] *Насирова Т.И.*, Процессы полумарковского блуждания. Баку, Элм, 1984, 161 с.

[5] *Nasirova T.H., Ibayev E.A. and Aliyeva T.A.*, The Laplace transform of ergodic distribution of the process semi-Markovian random walk with negative drift, nonnegative jumps, delays and delaying screen at zero. Theory of Stochastic Processes. 2009, v. 15(31), N 1, p.49–60.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Исследование системы $SM|GI|\infty$ методом просеянного потока

Инна А. Семенова[1]

В работе обсуждаются результаты о методе просеянного потока для исследования систем с неограниченным числом приборов и полумарковским входящим потоком.

Одной из проблем, связанных с исследованием моделей систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов, является учет фактора произвольного времени обслуживания и коррелированного входящего потока [1]. Для исследования таких систем предлагается метод просеянного потока.

Рассмотрим систему массового обслуживания $SM|GI|\infty$, то есть систему с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает полумарковский поток заявок, заданный полумарковской матрицей $A(x)$, продолжительности обслуживания заявок имеют произвольное распределение $B(x)$. Для исследования процесса изменения числа занятых приборов предлагается метод просеянного потока, который сводит проблему исследования к задаче анализа просеянного нестационарного потока [2].

Рассмотрим трёхмерный марковский процесс $\{s(t), z(t), n(t)\}$, где $z(t)$ - длина интервала от момента времени t до момента наступления очередного события в полумарковском потоке, процесс $s(t)$, определяется равенством $s(t) = \xi(n+1)$, при $t_n < t \le t_{n+1}$, а $n(t)$ - число событий просеянного потока, для распределения вероятностей которого получена система дифференциальных уравнений Колмогорова.

Так как аналитическое решение данной системы невозможно, предлагается метод асимптотических семиинвариантов в условии растущего времени обслуживания заявки на приборе. Предложенный метод определяет вид предельной характеристической функции в форме экспоненты с показателем в виде многочлена, коэффициентами которого являются асимптотические семиинварианты соответствующего порядка. В заключении определяется область применимости полученных асимптотических результатов в допредельной ситуации.

Список литературы

[1] *Дудин А.Н., Клименок В.И.*, Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Мн: БГУ, 2000, с. 175.

[2] *Назаров А.А., Семенова И.А.*, Исследование системы MMP|GI|∞ методом просеянного потока. Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2011, N 4 (17), с. 74–84.

[1]Национальный исследовательский Томский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики. E-mail: `inna_ac@mail.ru`

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Математические модели параллельного обслуживания кратных заявок

Ирина А. Синякова[1]

В работе обсуждаются результаты автора о математических моделях параллельного обслуживания кратных заявок.

На современном этапе развития теории массового обслуживания одним из востребованных направлений является исследование систем массового обслуживания (СМО) с групповым поступлением заявок и параллельным обслуживанием.

Исследование систем с двумерным пуассоновским потоком приводится в статье украинских ученых [1], но предлагаемый авторами метод довольно сложен и неприменим для исследования аналогичных систем с произвольным временем обслуживания или непуассоновским входящим потоком.

Поэтому возникает необходимость в разработке новых математических моделей СМО, а именно, систем с вариантами обслуживания заявок неординарных входящих потоков и различными, в том числе систем с двумя и более блоками обслуживания [2].

Предлагаются новые математические модели параллельного обслуживания кратных заявок в виде СМО с несколькими блоками обслуживания, каждый из которых содержит неограниченное число приборов. На вход системы может поступать как простейший поток, так и специально коррелированные потоки k-кратных заявок такие как, MAP-поток, MMP-поток, рекуррентный поток, полумарковский поток, поток Марковского восстановления, то есть в момент наступления события в рассматриваемом потоке, в систему одновременно поступают k заявок. Дисциплина обслуживания определяется тем, что одна из этих заявок поступает в первый, другая во второй и т.д. блоки обслуживания и занимает любой из свободных приборов. Продолжительности обслуживания заявок стахостически независимы, одинаково распределены и могут иметь как экспоненциальную, так и произвольную функцию распределения.

Для рассматриваемых СМО предложены следующие методы исследования:
– метод моментов;
– метод асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания (для исследования систем с неограниченным числом приборов);
– метод просеянного потока (для исследования немарковских систем с неограниченным числом приборов, произвольным распределением времени обслуживания и непуассоновским входящим потоком).

Список литературы

[1] *Чечельницкий А.А., Кучеренко О.В.*, Стационарные характеристики параллельно функционирующих систем обслуживания с двумерным входным потоком. Сборник научных статей. Минск, 2009, вып.2, с. 262–268.

[1]Национальный исследовательский Томский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики. E-mail: irinka_asf@mail.ru

[2] *Гарайшина И.Р., Моисеева С.П., Назаров А.А.*, Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания. Томск: НТЛ, 2010, с. 204.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Сети массового обслуживания с групповыми перемещениями и потоком катастроф

Александр Н. Старовойтов[1]

Рассматривается открытая экспоненциальная сеть массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием заявок в узлах, в которую дополнительно поступает поток катастрофических сбоев (катастроф). Катастрофический сбой полностью очищает очередь узла, если она не пуста, и не оказывает никакого влияния в противном случае. Находится стационарное распределение вероятностей состояний сети в форме произведения смещенных геометрических распределений.

1 Введение

Сети массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием заявок исследовались в работах [1, 2]. В работе [2] установлены необходимые и достаточные условия представления стационарного распределения сети в форме произведения смещенных геометрических распределений. В данной работе исследуется аналогичная сеть, в которую дополнительно поступает простейший поток катастрофических сбоев. Системы массового обслуживания с катастрофическими сбоями рассматривались в работах [3, 4], сети – в работе [5].

2 Модель сети

В сеть, состоящую из N узлов, поступают независимые стационарные пуассоновские потоки сообщений с интенсивностью λ_i в i-й узел. В момент поступления сообщения в i-й узел мгновенно формируется группа заявок случайного размера X_i. Эта группа присоединяется к очереди, если очередь не пуста, в противном случае из заявок этой группы формируется новая группа заявок, которая сразу начинает обслуживаться. Механизм формирования требуемой для обслуживания группы точно такой, как описанный ниже механизм формирования группы на обслуживание после окончания обслуживания очередной группы. Предполагается, что X_i независимые целочисленные случайные величины с вероятностями значений $a_i(k) = \mathbf{P}\{X_i = k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, и конечным математическим ожиданием. В момент окончания обслуживания очередной группы на обслуживание выбирается группа заявок случайного размера Y_i, которая обслуживается целиком. Если размер требуемой на обслуживание группы больше числа заявок в очереди i-го узла, то на обслуживание выбирается некомплектная группа из этих заявок. Обслуживание групп является экспоненциальным с интенсивностью μ_i. Предполагается, что Y_i независимые целочисленные случайные величины с вероятностями значений $b_i(k) = \mathbf{P}\{Y_i = k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, производящей функцией $\breve{B}_i(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_i(k) z^k$ и конечным математическим ожиданием. В сеть также поступают стационарные пуассоновские потоки катастрофических

[1]Белорусский государственный университет транспорта. E-mail: astarovoytov@tut.by

сбоев с интенсивностью λ_i^- в i-й узел. Катастрофический сбой, поступая в i-й узел, полностью очищает очередь этого узла, если она не пуста, и не оказывает никакого влияния в противном случае ($i = \overline{1,N}$).

Обслуженная в i-м узле группа заявок мгновенно покидает сеть, посылая в j-й узел с вероятностью p_{ij} сообщение, с вероятностью p_{ij}^- катастрофический сбой, а с вероятностью p_{i0} – не посылая ничего $\left(i,j = \overline{1,N},\ \sum\limits_{j=1}^{N}(p_{ij} + p_{ij}^-) + p_{i0} = 1\right)$.

Пусть $n_i(t)$ – число заявок в i-м узле в момент времени t. Состояние сети будем описывать марковским процессом $\mathbf{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \ldots, n_N(t))$ с пространством состояний $\mathbb{Z}_+^N$, где $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \ldots\}$.

Теорема 1. *Если выполняются условия $\gamma_i/\mu_i < 1$, а размеры формируемых при поступлении групп имеют геометрическое распределение с параметром*

$$a_i = \frac{c_i(\gamma_i^- + \mu_i) - \gamma_i}{\gamma_i^- + \mu_i - \gamma_i}, \tag{1}$$

где c_i – корень уравнения $\breve{B}_i(c_i) = \gamma_i/\mu_i$, $\{\gamma_i, \gamma_i^-\}$ – решение системы уравнений трафика

$$\gamma_i = \lambda_i + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k p_{ki}, \quad \gamma_i^- = \lambda_i^- + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k p_{ki}^-, \tag{2}$$

то марковский процесс $\mathbf{n}(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет мультипликативный вид

$$p(\mathbf{n}) = p_1(n_1)p_2(n_2)\ldots p_N(n_N), \tag{3}$$

где

$$p_i(0) = 1 - \gamma_i/(\gamma_i^- + \mu_i),\ \ p_i(n_i) = (1 - p_i(0))(1 - c_i)c_i^{n_i - 1},\ \ n_i = 1, 2, \ldots;\ i = \overline{1,N}. \tag{4}$$

Автор выражает благодарность профессору Ю.В.Малинковскому за полезные обсуждения полученных результатов.

Список литературы

[1] *Miyazawa M., Taylor P.G.*, Geometric product-form distribution for a queueing network with non-standard batch arrivals and batch transfers. Adv. Appl. Prob., 1997, v. 29, N 2, p. 1–22.

[2] *Малинковский Ю.В., Коробейникова Е.В.*, Характеризация стационарного распределения сетей с групповыми перемещениями в форме произведения смещенных геометрических распределений. Автоматика и телемеханика, 2010, N 12, С. 43–56.

[3] *Chen A., Renshaw E.*, The M/M/1 queue with mass exodus and mass arrivals when empty. J. Appl. Prob., 1997, N 34, p. 192–207.

[4] *Dudin A., Nishimura S.*, A BMAP/SM/1 queueing system with markovian arrival input of disasters. J. Appl. Prob., 1999, N 36, p. 868–881.

[5] *Chao X.*, A queueing network model with catastrophes and product form solution. Operations Research Letters, 1995, N 18, p. 75–79.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Многоканальные системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком и неидентичными приборами[1]

Андрей В. Ткаченко[2]

1 Описание модели

Рассматривается система с r приборами. Времена обслуживания требований - независимые случайные величины и, если требование обслуживается на i-м приборе, то функция распределения времени обслуживания $B_i(x)$ с конечным средним μ_i^{-1}. Требования поступают на прибор по мере их освобождения. Если в момент прихода требования в систему свободно несколько приборов, то оно направляется на прибор с меньшим порядковым номером.

Входящий поток требований $X(t)$ регенерирующий. Обозначим θ_i - моменты регенерации $X(t)$, $\tau_i = \theta_i - \theta_{i-1},\ (i = 1, 2, \dots)$ - периоды регенерации, $\xi_i = X(\theta_i) - X(\theta_{i-1})$ - число требований, поступивших на i-м периоде регенерации. Предположим, что $a = E\xi_i < \infty$, $\tau = E\tau_i < \infty$. Тогда интенсивность λ потока $X(t)$ определим соотношением:

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{X(t)}{t}\ a.s.$$

Из усиленного закона больших чисел доказывается, что $\lambda = a\tau^{-1}$(см. например [1]).

2 Основные результаты

Рассмотрим случайный процесс $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))$, где $W_i(t)$ - время, через которое i-й прибор освободится от обслуживания требований, пришедших до момента t.
$\mathbf{W}(t)$ - регенерирующий случайный процесс и точки его регенерации - это моменты θ_i, для которых $\mathbf{W}(\theta_i - 0) = 0$. При некоторых дополнительных условиях процесс $\mathbf{W}(t)$ из любого состояния осуществляет переход в нулевое состояние, то есть в состояние когда все приборы свободны.

Определение 1. Процесс $\mathbf{W}(t)$ эргодичен, если существует

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\mathbf{W}(t) < \mathbf{y}\} = F(\mathbf{y}),$$

независящий от начальных условий, и $F(\mathbf{y})$ является r- мерной функцией распределения.

[1]Исследования частично поддержаны РФФИ грант 10-01-00266а
[2]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: `tkachenko.av.87@gmail.com`

Определение 2. Будем говорить, что случайный процесс $\mathbf{W}(t)$ стохастически ограничен, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$, и $\exists\, t_0$ такое, что при $t > t_0$

$$\mathbf{P}\{\mathbf{W}(t) \leq \mathbf{y}\} > 1 - \varepsilon$$

Теорема 1. *Процесс $\mathbf{W}(t)$ эргодичен тогда и только тогда, когда он стохастически ограничен. Более того, если $\mathbf{W}(t)$ не эргодичен, то $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$, $\exists\, t_0$ такое, что при $t > t_0$*

$$\mathbf{P}\{\mathbf{W}(t) \geq \mathbf{y}\} > 1 - \varepsilon \tag{1}$$

Замечание 1. Теорема 1 верна и для случайного процесса Q_n, равного числу требований в системе в момент поступления n-го требования. При этом процессы $\mathbf{W}(t), Q_n$ либо оба эргодичны, либо оба не эргодичны.

Теорема 2. *Если $\lambda < \sum_{i=1}^{r} \mu_i$, то $\mathbf{W}(t)$ и Q_n эргодичны.*

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

Лемма 1. *Если $\mathbf{W}(t)$ не эргодичен, то $\forall\, \varepsilon\ \exists\, n_0$ такое, что при $n > n_0$*

$$\mathbf{E}\nu_i(n) > \mu_i \lambda^{-1} - \varepsilon,\ i = 1, \dots, r$$

где $\nu_i(n)$ - число требований, обслуженных i-м прибором за время время между поступлениями n-го и $n+1$ требований.

Пусть выполнено условие Теоремы 2., а $\mathbf{W}(t), Q_n$ не эргодичны. Тогда последовательность $\mathbf{E}Q_n$ неограничена сверху. Однако:

$$\mathbf{E}Q_{n+1} = \mathbf{E}Q_n + 1 - \sum_{i=1}^{r} \mathbf{E}\nu_i(n) \leq \mathbf{E}Q_n + 1 - \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{r} \mu_i + r\varepsilon < \mathbf{E}Q_n,$$

где ε подобрано таким образом, чтобы $r\varepsilon < \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{r} \mu_i - 1$. Получаем противоречие неограниченности последовательности $\mathbf{E}Q_n$, а значит $\mathbf{W}(t), Q_n$ эргодичны.

Теорема доказана.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность проф. Афанасьевой Ларисе Григорьевне за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] *Afanasyeva L.G., Bashtova E.E.*, Queueing Models with Regenerative Input Flows, принято в печать Communication and Statistics. Theory and Methods, 2012, 12 с.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Построение и анализ математической модели пространственной и временной характеристик входных потоков [1]

Михаил А. Федоткин, Андрей М. Федоткин[2]

В работе впервые предлагается неклассический способ описания и изучения входных потоков движущихся неоднородных требований с использованием статистической связи пространственной и временной характеристик.

1 Введение

В современной жизни существует большое число реальных объектов (например, экспертные системы диспетчерского контроля и управления в пространстве за последовательностью взлетов и приземлений самолетов, автоматы пространственного управления технологическими и информационными сигналами производственного комплекса компьютерных схем, интеллектуальные системы регулирования транспортных потоков неоднородных машин на магистралях и т. п.), для которых адекватными вероятностными моделями являются конфликтные управляемые системы обслуживания с переменной структурой. Построение таких моделей начинается с математического описания пространственной и временной характеристик входных потоков перемещающихся в пространстве требований. В классических работах А.К. Эрланга, А.Я. Хинчина, С. Пальма, Б.В. Гнеденко и других авторов не предполагалось движение требований в пространстве и поэтому рассматривались вероятностные свойства временной характеристики потока. В настоящей работе приводятся результаты в исследовании свойств входных потоков с учетом перемещения неоднородных заявок в пространстве и во времени. При этом в потоке будем различать требования с медленным движением от требований с быстрым движением. Значит, в потоке имеется два типа требований, что и означает их неоднородность. Только требования с быстрым движением имеют возможность обгона требований с медленным движением.

2 Постановка задачи и основные результаты

Далее в работе будем рассматривать основное вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}(\cdot))$. Здесь Ω есть достоверный исход, а через $\omega \in \Omega$ обозначим описание некоторого элементарного исхода случайного эксперимента, определяющего процесс движения потока требований в пространстве до поступления ими в некоторую систему обслуживания. Множество всех наблюдаемых исходов $A \subset \Omega$ данного эксперимента составляет σ-алгебру $\mathfrak{F}$,

[1]Работа выполнена в рамках госбюджетной НИР ННГУ им. Н.И. Лобачевского — национального исследовательского университета по теме № Н-040-0 «Математическое моделирование и создание новых методов анализа эволюционных системи систем оптимизации»

[2]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского — национальный исследовательский университет, факультет вычислительной математики и кибернетики. E-mail: fma5@rambler.ru

на которой задана вероятностная функция $\mathbf{P}(A)\colon \mathfrak{F} \to [0,1]$. В некоторых случаях мы не будем явно фиксировать символ ω как аргумент каких-либо функций или величин. При этом будем помнить о том, что все случайные события и случайные элементы рассматриваются на указанном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}(\cdot))$.

Рассмотрим случайное расположение неоднородных требований потока на выбранной пространственной оси Ox в фиксированный момент t оси времени Ot и случайное расположение на оси времени Ot моментов поступления требований в систему, которая находится в некоторой фиксированной точке пространства. Пусть $\eta(t) = \eta(\omega; t)$ при $t \geqslant 0$ подсчитывает число требований, поступающих в некоторую систему массового обслуживания за промежуток времени $[0, t)$. Тогда случайный процесс $\{\eta(t)\colon t \geqslant 0\}$ дает описание временной характеристики потока. Также будем исследовать пространственный случайный процесс $\{\zeta(x)\colon x \geqslant 0\}$, где $\zeta(x) = \zeta(\omega; x)$ определяет случайное число неоднородных требований, располагающихся на промежутке $[0, x)$ оси Ox. Введенные величины $\eta(t)$ и $\zeta(x)$ непрерывны слева и в нуле полагаются равными нулю.

Между введенными случайными процессами существует сложная стохастическая зависимость. На эту зависимость указывает связь интенсивности λ потока — среднего числа требований, поступающих за единицу времени, от плотности ρ потока — среднего числа требований, которые располагаются на участке оси Ox единичной длины. При полном отсутствии требований в пространстве, т. е. при $\rho = 0$, очевидно, что и $\lambda = 0$. При максимально возможной плотности потока $\rho = \rho_{\max}$ движение требований в пространстве будет невозможным, поэтому в этом случае также $\lambda = 0$. Однако, существует оптимальная плотность ρ_{opt}, при которой достигается максимальная интенсивность $\lambda_{\max}$ потока.

Для математического описания временной и пространственной характеристик потока необходимо найти конечномерные распределения случайных процессов $\{\eta(t)\colon t \geqslant 0\}$ и $\{\zeta(x)\colon x \geqslant 0\}$, или, в лучшем случае, найти их совместное распределение. Однако эта задача настолько сложна, что неизвестны работы, в которых она рассматривается.

В данной работе была решена проблема построения и изучения математической модели пространственной и временной характеристик потока движущихся неоднородных требований при малой, средней и большой плотности ρ_{opt} и значительном расстоянии между последовательными требованиями с медленным движением. При этом для построения вероятностной модели пространственной и временной характеристики потока используется нелокальный способ (см. [1, 2]) описания потоков неоднородных заявок. Показано, что локальное описание временной характеристики стационарного движения потока неоднородных заявок можно выполнить неординарным пуассоновским потоком, когда в каждый вызывающий момент с вероятностью единица поступает ограниченное или лишь конечное число требований. Подробно изучены вероятностные свойства и свойства числовых характеристик такого потока.

Список литературы

[1] *Федоткин М.А.*, Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов, Математические вопросы кибернетики, 1998, № 7, с. 332–344.

[2] *Федоткин М.А., Федоткин А.М.*, Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко–Коваленко, Автоматика и телемеханика. РАН, 2009, № 12, с. 92–108.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Малопараметрические модели цепей Маркова высокого порядка и их приложения[1]

Юрий С. Харин[2]

Работа посвящена развитию теории вероятностно-статистического анализа новых семейств малопараметрических моделей цепей Маркова высокого порядка.

1 Введение

Универсальной математической моделью для реальных процессов (в системах массового обслуживания [1], генетике, защите информации, метеорологии, социологии и других приложениях [2]) с дискретным временем $t \in \mathbf{N}$, конечным пространством значений $\mathbf{A} = \{0, 1, \dots, N-1\}$, $2 \le N < +\infty$, и заданной достаточно большой глубиной памяти $s \in \mathbf{N}$ является однородная цепь Маркова s-го порядка ЦМ(s) $x_t \in \mathbf{A}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, определяемая обобщенным марковским свойством $(t > s)$:

$$\mathbf{P}\{x_t = i_t | x_{t-1} = i_{t-1}, \dots, x_1 = i_1\} = \mathbf{P}\{x_t = i_t | x_{t-1} = i_{t-1}, \dots, x_{t-s} = i_{t-s}\} = p_{i_{t-s},\dots,i_t}, \quad (1)$$

где $P = (p_{j_1,\dots,j_{s+1}})$ — $(s+1)$-мерная матрица вероятностей одношаговых переходов.

К сожалению, число независимых параметров ЦМ(s) экспоненциально растет при увеличении глубины памяти s: $D_{\text{ЦМ}(s)} = N^{s+1} - 1$, и для идентификации этой модели необходимы реализации огромной длительности порядка $O(N^{s+1})$. Чтобы преодолеть этот парадокс размерности предлагается использовать так называемые малопараметрические модели [2] цепей Маркова s-го порядка, определяемые малым числом параметров $d \ll D_{\text{ЦМ}(s)}$.

2 Основные результаты

Модель Джекобса-Льюиса [3] есть частный случай малопараметрической модели [2]:

$$p_{j_1,\dots,j_{s+1}} = (1-\rho)\pi_{is+1} + \sum\nolimits_{j=1}^{s} \lambda_j \cdot \delta_{i_{s-j+1}, i_{s+1}}, \quad i_1, \dots, i_{s+1} \in \mathbf{A}, \quad (2)$$

где δ_{jk} — символ Кронеккера, $\rho \in (0,1)$ и дискретные вероятностные распределения $\{\pi_i : i \in \mathbf{A}\}$, $\{\lambda_j : j \in \{1, \dots, s\}\}$ являются параметрами модели; их число $d = N + s - 1$.

MTD-модель Рафтери [4] — также пример малопараметрической модели:

$$p_{i_1,\dots,i_{s+1}} = \sum\nolimits_{j=1}^{s} \lambda_j q_{i_j, i_{s+1}}, \quad i_1, \dots, i_{s+1} \in \mathbf{A}; \quad (3)$$

$d = N^2 + s - 1$ параметрами этой модели являются стохастическая $(N \times N)$-матрица $Q = (q_{ik})$ и дискретное распределение вероятностей $\{\lambda_j\}$.

[1]Работа поддержана грантом ISTC N B-1910.

[2]Белоруский государственный университет, НИИ прикладных проблем математики и информатики. E-mail: kharin@bsu.by

Разработана [5] новая малопараметрическая модель ЦМ(s,r) — цепь Маркова s-го порядка с r частичными связями:

$$p_{i_1,\dots,i_{s+1}} = p_{J_1^{s+1}} = q_{j_{m_1},\dots,j_{m_r},j_{s+1}}, \tag{4}$$

где $J_1^{s+1} = (j_1,\dots,j_{s+1} \in \mathbf{A}^{s+1})$ — мультииндекс, r — число связей ($1 \le r \le s$); $M_1^r = (m_1,\dots,m_r)$ — целочисленный вектор с r упорядоченными компонентами, $1 = m_1 < m_2 < \dots < m_r \le s$, называемый шаблоном связей; $Q = (q_{J_1^{r+1}})$ — $(r+1)$-мерная стохастическая матрица. Если $r = s$, то ЦМ(s,s) совпадает с полносвязной цепью Маркова (1).

В докладе для малопараметрических моделей (2)-(4) представлены вероятностные свойства этих моделей, в том числе, критерии эргодичности, а также решены статистические задачи оценивания параметров и проверки гипотез по наблюдаемой реализации $X_1^n = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{A}^n$. Проиллюстрируем некоторые результаты для модели ЦМ(s,r).

Теорема 1. *ЦМ*(s,r), *определяемая* (4), *эргодична тогда и только тогда, когда*

$$\exists i \in N : \min_{J_1^s, J_{s+1+i}^{2s+i}} \sum\nolimits_{J_{s+1}^{s+i} \in \mathbf{A}^i} \prod\nolimits_{k=1}^{s+i} q_{j_{k+m_1-1},\dots,j_{k+m_r-1},j_{k+s}} > 0. \tag{5}$$

Обозначим: $H\left(\{\mu_{J_1^{r+1}}\}\right) = -\sum\nolimits_{J_1^{r+1} \in \mathbf{A}^{r+1}} \mu_{J_1^{r+1}}(M_1^r) \ln\left(\mu_{J_1^{r+1}}(M_1^r)/\mu_{J_1 r+1\cdot}(M_1^r)\right) \ge 0$, $F\left(J_i^{i+s-1}; M_1^r\right) = (j_{i+m_1-1},\dots,j_{i+m_r-1})$, $\hat\mu_{J_1^{r+1}}(M_1^r) = (n-s)^{-1} \sum\nolimits_{t=1}^{n-s} \delta_{F\left(X_t^{t+s-1}; M_1^r\right), J_1^r} \delta_{x_{t+s} j_{r+1}}$.

Теорема 2. *Оценка максимального правдоподобия (ОМП) для матрицы* Q *имеет вид:*

$$\hat q_{J_1^{r+1}} = \left\{\hat\mu_{J_1^{r+1}}(M_1^r)/\hat\mu_{J_1^{r+1}\cdot}(M_1^r),\ \text{если } \hat\mu_{J_1^{r+1}\cdot} > 0;\ N^{-1}\ \text{иначе}\right\}, \quad J_1^{r+1} \in \mathbf{A}^{r+1}.$$

Если выполняется (5) *и ЦМ*(s,r) *стационарна, то при* $n \to +\infty$ *уклонение* $\hat Q - Q$ *распределено асимптотически нормально с известной асимптотической ковариацией.*

Теорема 3. *Если* s, r *известны, то ОМП для шаблона* M_1^r *имеет вид:* $\hat M_1^r = \arg\min_{M_1^r} H\left(\{\hat\mu_{J_1^{r+1}}\}\right)$; *для стационарной ЦМ*$(s,r)$ *эта оценка состоятельна при* $n \to +\infty$: $\hat M_1^r \xrightarrow{\mathbf{P}} M_1^r$.

Теория иллюстрируется численными результатами на модельных и реальных данных.

Список литературы

[1] *Гнеденко Б.В. и др.*, Приоритетные системы обслуживания. М.: МГУ, 1973.

[2] *Харин Ю.С.*, Оптимальность и робастность в статистическом прогнозировании. Минск: БГУ, 2008.

[3] *Jacobs P.A., Lewis P.A.*, Discrete time series genereted by mixtures. J. Royal Stat. Soc. Ser. B., 1978, v. 40, N 1, p. 94–105.

[4] *Raftery A.*, A model for high-order Markov chains. J. Royal Stat. Soc. Ser. B., 1985, v. 47, N 3, p. 528–539.

[5] *Kharin Yu.S.*, Markov chain of order s with r partial connections. Discr. Math. and Appl., 2007, v. 17, N 3, p. 295–317.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Multi-channel queueing systems with regenerative input flow[1]

Larisa G. Afanasyeva[2], **Elena E. Bashtova**[3]

In the paper we discuss the ergodicity condition for systems with r channels and bounded sojourn time.

Queueing systems with r channels, regenerative input flow and bounded sojourn time are considered.

We establish the necessary and sufficient condition for ergodicity of the process describing the state of the system. The proof is based on properties of regenerative flows and results for queues with input flow controlled by a stationary and metrically transitive random sequence ([1]).

Let $A(t)$ be a regenerative flow with intensity λ ([2]), $\{\theta_i\}_{i=0}^{\infty}$ - the sequence of regeneration points, $\tau_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, ξ_i - the number of customers arriving during the ith period of regeneration. Assume that the renewal process $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$ is nonperiodic and $\mathsf{E}\tau_i = \tau < \infty$, $\mathsf{E}\xi_i = a < \infty$. We construct a multidimensional Markov chain $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ associated with trajectories of the process $A(t)$. The ergodicity property of this Markov chain leads to the fact that the sequence of inter-arrival times $\{\zeta_i\}_{i=0}^{\infty}$ may be considered as a stationary and metrically transitive one.

Consider two independent sequences of i.i.d.r.v.'s $\{\eta_i\}_{i=0}^{\infty}$ and $\{\gamma_i\}_{i=0}^{\infty}$. Let η_n be the service time of the nth customer and γ_n be the random variable that bounds its sojourn time. The r.v. γ_n could be non-proper and $\alpha = \mathsf{P}(\gamma_n = \infty)$, $b = \mathsf{E}\eta_n < \infty$.

We study an r-dimensional stochastic process $\mathbf{W}_n = (W_{n1}, \ldots, W_{nr})$, where W_{ni} is the length of the interval between the the nth arrival and the moment when i servers complete the service of the customers that have been arrived before the nth one. We obtain the functional relation $\mathbf{W}_{n+1} = f(\mathbf{W}_n, \zeta_n, \eta_n, \gamma_n)$. Then the sequence $Y_n = (\mathbf{W}_n, X_n)$ is a Markov chain and therefore ergodicity of $\{Y_i\}_{i=0}^{\infty}$ follows from stochastic boundness of $\{\mathbf{W}_i\}_{i=0}^{\infty}$.

Analizing majorizing systems S^- and S^+ we obtain that the necessary and sufficient condition for stochastic boundness of $\mathbf{W}_n$ is given by the inequality $\lambda\alpha b r^{-1} < 1$. As a corollary we get Litlle's formula for queues with a regenerative input flow. We also investigate a heavy traffic situation under the time compression asymptotics.

References

[1] *Afanas'eva L.G.*, Queueing Systems with Cyclic Control Processes. Cybernetics and Systems analisys, 2005, v. 41, N 1, p. 43–55.

[2] *Afanasyeva L.G., Bashtova E.E.*, Queueing Models with Regenerative Input Flows. Communications in Statistics: Theory and Methods, 2012

[1]This work was supported by RFBR grant N 10-01-00266-a

[2]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: afanas@mech.math.msu.su

[3]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: bashtovaelena@rambler.ru

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Stochastic Models of Transport Networks[1]

Larisa G. Afanasyeva, Ekaterina V. Bulinskaya[2]

We present the authors' recent results concerning stochastic models of transport networks.

Mathematical modeling of transport systems has a long history beginning in 1935 by the paper [1]. Many scientists contributed to this research field, so it is impossible even to mention all of them (see, e.g., [2] or [3] and references therein). Various methods (such as cellular automata, statistical mechanics, mathematical physics or queueing theory) were widely used for models analysis.

We study transport networks assuming that their nodes (vertices) are crossroads (with or without traffic lights) and arcs (edges) are the roads connecting the nodes. It is supposed that each node has two admissible motion directions. The functioning of nodes and arcs is modeled by (one- or many-server) queueing systems. At first, we treat several examples of transport models, namely, a highway (without traffic lights) with two types of cars, a single crossroads with traffic lights, then pass to hierarchial networks and estimate their capacities, thus generalizing the models introduced in [4]–[8].

The aim of the talk is investigation of several aspects of stochastic transport models, in particular, existence of stationary distribution for the processes describing the system performance under assumption that input flows are regenerative. This enables us to introduce the so-called traffic coefficients of nodes and point out the most loaded ones. The dependence of asymptotic behavior of car queues at crossroads on traffic-lights performance is also dealt with. Some numeric results are provided.

References

[1] *Greenshields B.D.*, A Study of Highway Capacity. Proc. Highway Res., 1935, v. 14, p. 448–477.

[2] *Baykal-Gürsoy M., Xiao W. and Ozbay K.*, Modeling traffic flow interrupted by incidents. European Journal of Operational Research, 2009, v. 195, p. 127–138.

[3] *Afanasyeva L.G. and Bulinskaya E.V.*, Mathematical models of transport systems based on queueing methods. Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology, 2010, v. 2(4), p. 6–21.

[4] *Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V.*, Systems reliability in case of regenerative flow of elements failures. Automation and Remote Control. 2010, v. 71, N 7, p. 1294–1307.

[5] *Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V.*, Stochastic models of transport flows. Communications in Statistics: Theory and Methods, 2011, v. 40, N 16, p. 2830-2846.

[1]The research is partially supported by RFBR grant 10-01-00266a.

[2]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: ebulinsk@mech.math.msu.su

[6] *Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V.*, Estimation of Transport Systems Capacity. The Ninth International Conference on Traffic and Granular Flow, 2011. Abstract book, Moscow, Russia, September 28 - October 1, p. 138-139

[7] *Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V.*, Hierarchial Networks with Unreliable Servers. In: Markov & Semi-Markov Processes & Related Fields 2011, Porto Carras Grand Resort, Greece, September 20-23. electronic edition

[8] *Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V.*, Asymptotic analysis of traffic lights performance under heavy-traffic assumption. Methodology and Computing in Applied Probability, 2012 (forthcoming).

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Age-distribution description and "fluid" approximation for a network with an infinite server[1]

Svetlana V. Anulova[2]

We give an approximation of the dynamics of a closed network consisting of two nodes: one server and infinite server. The result is a functional law of large numbers in terms of measure-valued processes.

In the past ten years queueing experts attended to models described by means of measure valued processes. Papers of Whitt 2010 [4] and Ramanan 2011 [2] present powerful results on infinite servers and give a thorough review of the research in the field. In their references are preceding works in this theme and altogether works, using measure valued processes for description and investigation of other queueing systems. We cite the latest here for short: Mandelbaum, Momcilovic, 2009; Decreusefond, Moyal, 2008; Gromoll, Robert, Zwart, 2008.

Our contribution is the investigation of a closed network, consisting of an infinite server GI/∞ and a FIFO GI/1 service station by means of measure-valued techniques. The number of customers n is fixed, F and P denote respectively the distributions of service times at the infinite server and the amounts of service required by customers entering the single server station. The latter has a variable service rate: when the queue length is l, it is $n\mu(n^{-1}l)$, where μ is a bounded positive function on [0, 1]. We assume that F has a bounded and continuous density and $\int_0^\infty x^2 P(dx) < \infty$. Denote: $1/\int_0^\infty xP(dx)$ by λ; the empirical distribution of the age of customers in the infinite server at moment t multiplied by n^{-1} by $\nu_t^{(n)}(du)$ ("age" means the time from entering the server up to moment t).

Definition 1. A continuous measure-valued function $\nu_t(du)$, $t \geq 0$, is the "fluid" limit of $\nu_t^{(n)}(du)$, $t \geq 0$, if for every $t \geq 0$ $\sup\limits_{s\in[0,t]} \rho(\nu_s^{(n)}, \nu_s) \to 0$ (for metric ρ see section 19.2 [1]).

Our result is a generalization of Theorem 1 [3] and Theorem 3.7 [2].

Denote for $t \geq 0, u \geq 0$ $\quad G(t) = 1 - F(t), \quad H(t;u) = \dfrac{G(t+u)}{G(u)}$.

Theorem 1. *Suppose $\nu_0^{(n)}$ has a weak limit ν_0, the equation*

$$q(t) = \int_0^\infty H(t;u)\nu_0(du) + \lambda \int_0^t G(t-s)\mu(1-q(s))ds, \ t \geq 0,$$

has a unique solution q and $q < 1$. Then a continuous measure-valued process ν_t, $t \geq 0$, with values

$$\nu_t(A) = \int_{\theta_t(A)} H(t;u)\nu_0(du) + \lambda \int_{\theta_t(A)} G(t-s)\mu(1-q(s))ds\,,$$

A being a Borel subset of $[0,\infty)$ and $\theta_t(A) = \{A - t\} \bigcap [0,\infty)$, is the "fluid" limit of $\nu_t^{(n)}$, $t \geq 0$.

[1]This work was supported by RFBR grant N 11-01-90421.

[2]Institute for Control Science. E-mail: `anulovas@ipu.ras.ru`

Remark 1. The nature of q: it is the "fluid" limit of the scaled "queue" $q^{(n)}$ — the number of customers in the infinite server at moment t multiplied by n^{-1}, $q^{(n)}(t) = \nu_t^{(n)}([0,\infty))$, $t \geq 0$, see Theorem 1 [3].

References

[1] *Hennequin P.-L. and Tortrat A.*, Théorie des probabilités et quelques applications. Paris: Masson et Cie. Editeurs 1965. VIII, 457 p.,

[2] *Kaspi H. and Ramanan K.*, Law of large numbers limits for many-server queues. Ann. Appl. Probab., 2011, v. 21, N 1, p. 33–114.

[3] *Krichagina E.V. and Puhalskii A.A.*, A heavy-traffic analysis of a closed queueing system with a $GI|\infty$ service center. Queueing Syst., 1997, v. 25, N 1-4, p. 235–280.

[4] *Pang G. and Whitt W.*, Two-parameter heavy-traffic limits for infinite-server queues. Queueing Syst., 2010, v. 65, N 4, p. 325–364.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

An open queueing network with temporarily non-active customers and rounds

Julia S. Bojarovich, Larisa N. Marchenko[1]

An open queueing network with partly non-active customers is considered. Non-active customers are in a system queue and do not get service. Customers may turn from non-active condition into condition, when they may get their service and vice versa. The form of stationary distribution and criterion of stationary distribution existence are obtained.

1 Introduction

Nowadays queueing networks with partly non-active customers become actual to a marked degree. Non-active customers are in a system queue and do not get service. We consider network, where customers may partly loose their capacity for service. Customers may turn from non-active condition into condition, when they may get their service and vice versa.

In paper [1] G. Tsitsiashvili and M. Osipova observed an open queueing network with non-active customers and established the form of stationary distribution. This paper generalizes results for network from [1]. We consider model with temporarily non-active customers and rounds of systems. We researched the form of stationary distribution and established the criterion of stationary distribution existence.

2 Basic results

Consider an open queueing network with set of systems $J = \{1, 2, \dots, N\}$. Customers arrive at the network according to Poisson processes at rates λ_i, $i \in J$. There are input Poisson flows of signals at rates ν_i and φ_i, $i \in J$. When arriving at the system $i \in J$ the signal at rate ν_i induces an ordinary customer at system, if any, to become non-active. When arriving at the system $i \in J$ the signal at rate φ_i induces an non-active customer, if any, to become an ordinary. Non-active customers are in a system queue and can not get service. Signals do not need service. Service times are independent exponentially distributed random values with parameters μ_i, $i \in J$. When arriving at the system i customer queues up to the system with the probability f_i and with the probability $1 - f_i$ the customer goes round the system $i \in J$ (such customer is considered to be served). After finishing of service process at system $i \in J$ customer is routed to system $j \in J$ with the probability $p_{i,j}$ and with the probability $p_{i,0}$ is removed from network ($\sum_{j=1}^{N} p_{i,j} + p_{i,0} = 1$), $i \in J$. Let $p_{i,i} = 0$, $i \in J$. Let $n_i(t), n'_i(t)$ are numbers of ordinary and non-active customers at system $i \in J$ at time t accordingly. Consider $X(t) = \Big((n_1(t), n'_1(t)), \dots, (n_N(t), n'_N(t))\Big)$. $X(t)$ is a continuous-time Markov chain.

[1]Gomel state university named after F. Skoryna, mathematical department. E-mail: juls1982@list.ru, lamarchenko@yandex.ru

A traffic equations system is:

$$\varepsilon_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j p_{j,i}, \quad i \in J. \tag{1}$$

One can prove that under certain conditions traffic equations system has unique non-trivial solution.

Theorem 1. *Under conditions of ergodicity:*

$$\varepsilon_i f_i < \mu_i,$$

$$\varepsilon_i f_i \nu_i < \mu_i \varphi_i, \; i = 1, \dots, N,$$

$X(t)$ *has stationary distribution:*

$$\pi(n, n') = \pi_1(n_1, n_1')\pi_2(n_2, n_2') \dots \pi_N(n_N, n_N'),$$

where

$$\pi_i(n_i, n_i') = \Big(1 - \frac{\varepsilon_i f_i}{\mu_i}\Big)\Big(1 - \frac{\varepsilon_i f_i \nu_i}{\mu_i \varphi_i}\Big)\Big(\frac{\varepsilon_i f_i}{\mu_i}\Big)^{n_i}\Big(\frac{\varepsilon_i f_i \nu_i}{\mu_i \varphi_i}\Big)^{n_i'},$$

here ε_i, $i \in J$ *– is a solution of a traffic equations system* (1).

References

[1] *Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A.*, Distributions in stochastic network models. Nova Publishers, 2008.

[2] *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.*, Введение в теорию массового обслуживания. М.: КомКнига, 2005.

[3] *Malinkovsky Yu., Bojarovich J.*, An open queueing network with partly non-active customers. Queues: flows, systems, networks: Proc. 21 International Conference "Modern Probbabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks ". Minsk, 2011, p. 34–37.

[4] *Малинковский Ю.В., Якубович О.В.*, Замкнутые сети массового обслуживания с обходами узлов заявками. Весці Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 1999, N 1, с. 119–124.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Networks with restriction on the operating time in the regimes of low degree of reliability

Yuliya E. Dudovskaya, Oksana V. Yakubovich[1]

In the paper we discuss the authors' results on the stationary distribution of open networks with the restriction on the operating time in the regimes of low degree of reliability.

1 Introduction

Open queueing networks with several types of customers, Poisson incoming flow, exponential service in the nodes and Markov routing are studied. In each of the nodes there is the only device, which can operate in several regimes.

Queueing networks with multiregime service strategies have been investigated relatively recently. The necessity of their study was caused by practical considerations, because such networks allow us consider models with partially nonreliable devices. In practice the situation when devices in the network nodes are unreliable or partially unreliable often meets. Therefore search of the models in which devices in the nodes can work in several regimes answering different degrees of their working capacity is very important. When the node transits to the regime with the bigger number (in less "reliable" regime) productivity of the node decreases. The device can partially lose working capacity (the case of complete loss of working capacity isn't considered here) both during customer service, and in a free condition from customers.

Transitions of the node from one operating regime to another one are caused by load of the node, internal possibilities of devices and also existence of the signals circulating in the network and reducing the number of an operating regime.

It is supposed that time of stay in the regimes of low degree of reliability is limited by exponential distributed random variable. After the end of the time of stay the device passes to the regime with the bigger number.

2 Model description

We consider open queueing network with M types of customers, which contains N nodes. There are two Poisson input flows: the flow of customers with the parameter λ and flow of signals with the parameter ω, which can reduce the number of regime.

Every customer of input flow passes independently from other customers to the node i and becomes the customer of the type u with the probability $p_{0(i,u)}$ $\big(\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M} p_{0(i,u)} = 1\big)$. Incoming signal of the reduction of the regime passes to the node i with the probability q_{0i} $\big(\sum_{i=1}^{N} q_{0i} = 1\big)$.

The time of customer's service in the node i has an exponential distribution with the parameter $\mu_i(n(i), l_i)$, if there are $n(i)$ customers in the node and it operates in the l_i regime. Customers are serviced in the order they have arrived in the node. After the service in the node i the customer of the type u passes to the node j immediately with the probability $p_{(i,u)(j,v)}$ as

[1]Gomel State University, Mathematical Faculty. E-mail: `dudovskaya@gmail.com, oksanavy@gmail.com`

the customer of the type v and with the probability $q_{(i,u)j}$ as the signal of the reduction of the regime. The customer can leave the node with the probability $p_{(i,u)0}$ $\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}(p_{(i,u)(j,v)}+q_{(i,u)j})+p_{(i,u)0}=1\right)$.

Every node can operate in one of l_i regimes ($l_i = \overline{0,r_i}, i = \overline{1,N}$). The state of the network is characterized by the vector $x(t) = (x_1(t), ..., x_N(t))$, where $x_i(t) = (\bar{x}_i(t), l_i(t)) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), ..., x_{in(i)}(t), l_i(t))$ describes the state of the node i at the moment t. Here $x_{i1}(t)$ — the type of customer, which is getting the service at the moment t, $x_{ih}(t)$ — the type of customer, which has the place h ($h = \overline{2, n(i)}$) in the queue, $n(i)$ — the number of customers in the node i, $l_i(t)$ — the regime of the node i at the moment t. States space for process $x_i(t)$ is $X_i = \{(0,l_i),(x_{i1},l_i),(x_{i1},x_{i2},l_i),(x_{i1},x_{i2},x_{i3},l_i),...: x_{ik} = \overline{1,M},\ k = 1,2,...; l_i = \overline{0,r_i}, i = \overline{1,N}\}$.

We define the regime 0 as the basic regime. The time of the node's work in the regime l_i has an exponential distribution. The node passes to the regime (l_i+1) ($l_i = \overline{0, r_i-1}$) with the rate $\nu_i(x_i)$ and to the regime (l_i-1) ($l_i = \overline{1,r_i}$) with the rate $\varphi_i(x_i)$, if the state of the node is x_i ($\nu_i(x_i) = 0$, if $l_i = r_i$; $\varphi_i(x_i) = 0$, if $l_i = 0$). While the regimes are switching in the node, the number of customers is not changing. Switch occurs only between the neighborhood regimes.

Since the (m_i+1) each regime has a residence time, limited by an exponentially distributed random variable with the parameter $\gamma_i(l_i)$ ($l_i = \overline{m_i+1, r_i}, i = \overline{1,N}$). After the end of the residence time in the regime l_i the device passes to the regime (l_i+1).

Thus $x(t)$ is a homogeneous Markov process with the states space $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_N$.

It is proved that performance of some conditions guarantees that described Markov process $x(t)$ is ergodic and its stationary distribution has the product form

$$p(x) = p_1(x_1)p_2(x_2)...p_N(x_N), x \in X,$$

where $p_i(x_i)$ is determined by the relations

$$p_i(x_i) = \begin{cases} \prod\limits_{a=1}^{n(i)} \frac{\alpha_{i,x_{ia}}}{\mu_i(a,l_i)} \prod\limits_{k=1}^{l_i} \frac{\nu_i(0,k-1)}{\varphi_i(0,k)+\beta_i} p_i(0,0),\ l_i \le m_i; \\ \prod\limits_{a=1}^{n(i)} \frac{\alpha_{i,x_{ia}}}{\mu_i(a,l_i)} \prod\limits_{k=1}^{m_i} \frac{\nu_i(0,k-1)}{\varphi_i(0,k)+\beta_i} \prod\limits_{k=m_i+1}^{l_i} \frac{\nu_i(0,k-1)+\gamma_i(k-1)}{\varphi_i(0,k)+\beta_i} p_i(0,0),\ l_i > m_i. \end{cases}$$

The probability $p_i(0,0)$ is found from the condition $\sum_{x_i \in X_i} p_i(x_i) = 1$. It is supposed that the production with the upper index 0 equals 1. Here $\alpha_{i,u}$, β_i ($i = \overline{1,N}, u = \overline{1,M}$) — the solutions of the traffic equations

$$\alpha_{iu} = \lambda p_{0(i,u)} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M} \alpha_{jv} p_{(j,v)(i,u)},$$

$$\beta_i = \omega q_{0i} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M} \alpha_{jv} q_{(j,v)i}.$$

References

[1] *Летунович Ю.Е.*, Неоднородные сети с ограничением на время пребывания в режимах обслуживания. Автоматика и вычислительная техника, 2010, N 5, с. 33–41.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, 26-30 June, 2012)

Stability in Infinite Service Systems

Sergey Foss[1]

We discuss stability conditions in two infinite service systems. This is a joint work with Francois Baccelli, INRIA and ENS, Paris, France.

1 Introduction

We consider two infinite service models with Poisson input:

Model 1. This is a queue where the server is the Euclidean space $\mathcal{R}^d$, and the customers are random closed sets (RACS) of the Euclidean space. The RACS arrive in the Poisson rain, are served in the First-Come-First-Served order, and no two intersecting RACS can be served simultaneously.

There is a parallel terminology: *RACS* is a *hailstone* and *service* is *melting*.

Model 2. This is a generalized Jackson network with a denumerable number of stations. We assume the locations of the stations to be points of integer lattice $\mathcal{Z}^d$, the service times to have a general distribution, and the routing decisions to be translation invariant.

For both systems, we formulate stability results and comment on their proofs.

2 Models and Main Results

2.1 Model 1: Poisson Hail on a Hot Ground

Consider a Poisson rain on the d dimensional Euclidean space $\mathcal{R}^d$ with intensity λ; by Poisson rain, we mean a Poisson point process of intensity λ in $\mathcal{R}^{d+1}$ which gives the (random) number of arrivals in all time-space Borel sets. Each Poisson arrival, say at location x and time t, brings a customer with two main characteristics:

- A grain C, which is a random closed sets (RACS) of $\mathcal{R}^d$ [11] *centered* at the origin. If the RACS is a ball with random radius, its center is that of the ball. For more general cases, the center of a RACS could be defined as e.g. its gravity center. Denote by ξ the (random) diameter of the typical RACS (i.e. the maximal distance between its points).
- A random service time σ.

We assume that the pairs (ξ, σ) are i.i.d. and do not depend on the input rate of the Poisson rain, and that the system starts at time $t = 0$ from the empty state.

The customer arriving at time t and location x with mark (C, σ) creates a hailstone, with footprint $x + C$ in $\mathcal{R}^d$ and with height (service time) σ.

These hailstones do not move: they are to be melted/served by the Euclidean space at the location where they arrive in the FCFS order, respecting some hard exclusion rules: if the

[1]Institute of Mathematics, Novosibirsk and Heriot-Watt University, Edinburgh, U.K. E-mail: `foss@math.nsc.su and s.foss@hw.ac.uk`

footprints of two hailstones have a non empty intersection, then the one arriving second has to wait for the end of the service (melting) of the first to start its service (melting). Once the service of a customer is started, it proceeds uninterrupted at speed 1. Once a customer is served (hailstone fully melted), it leaves the Euclidean space.

For $x \in \mathcal{R}^d$ and $t \geq 0$, let W_t^x be the total residual service (melting) time of all RACS that arrive before time t and whose footprint covers x.

Theorem 1. *Assume that the Poisson hail starts at time $t = 0$ and that the system is empty at that time. Assume further that the distributions of the random variables ξ^d and σ are light-tailed, i.e. there is a positive constant c such that $\mathbf{E}e^{c\xi^d}$ and $\mathbf{E}e^{c\sigma}$ are finite. Then there exists a positive constant λ_0 (which depends on d and on the joint distribution of ξ and σ) such that, for any $\lambda < \lambda_0$, the model is globally stable, in the following sense: for any bounded set A in $\mathcal{R}^d$, as $t \to \infty$, the distribution of the random field $(W_t^x,\ x \in A)$ converges to the stationary one in the total variation distance.*

Our proof includes the following steps:

- first, we observe that the model is monotone, both in the input rate and in the size and the hight of RACS – this allows to discretize both space and time;
- then we consider a purely growth model (without melting/service) and prove a new coupling result [3] which allows us to link this growth model to a branching process;
- based on results from Hall [7] and Blaszczyszyn, Rau and Schmidt [6], we conclude that, in the growth model, there is no percolation in a relatively thin strip of time and clusters areas have a light-tailed distribution; then we use an extension of results from [5] to show that the average growth is linear in time;
- finally, we prove an infinite-space generalization of the saturation rule [2] which allows us to conclude that if the input rate is smaller that that the growth rate, then the model is stable. This is a further generalization of the celebrated Loynes result for many-server queues [9].

Comments:
1. The light-tailedness of the distribution of the main characteristics allows to use the machinery of branching processes, so it is a technical assumption. On the other hand, there is an evidence (A. Holroyd and J. Martin, private communication) that the model "percolates" for any positive input rate if the tail of the distribution of the ξ^d is sufficiently heavy.
2. Theorem 1 may be extended onto tandems and, more generally, feed-forward networks of such queues (with some minor technical issues to be fixed). However, new technical tools are needed for considering networks which are not feed-forward – they are non-monotone, in general.
3. For initially empty system, we prove existence of the *minimal stationary regime* and convergence to it. There are other invariant distributions.

2.2 Model 2: Infinite Generalized Jackson Network

This is a particular case of an infinite network which is monotone.

Consider a Poisson rain on the d dimensional $\mathcal{Z}^d$ with intensity λ: the input process to each point ("station") $x \in \mathcal{Z}^d$ is Poisson with parameter λ, and all these inputs are mutually independent. Each Poisson arrival, say at location i (here i is d-dimensional vector) and time

t, brings a customer that needs to be served by the ith server during a random service time. At each server, customers form a queue and are served in the FCFS order. After the service completion at station i, a customer joins a queue at station $j \in \mathcal{Z}^d$ with probability $p_{i,j}$ for another service and, otherwise, leaves the network with probability $q_i = 1 \sum_{j \in \mathcal{Z}^d} p_{i,j}$.

We assume all service times at all stations to be i.i.d. and the transition probabilities to be *translation invariant*: probability $p_{i,j} = p_{j-i}$ depends only on difference $j - i$. Then $q_i \equiv q$ does not depend on i.

Let σ be a generic service time, η a random variable with distribution $\mathbf{P}(\eta = j) = p_j$, $j \in \mathcal{Z}^d$, and W_t^i a workload at station i at time t.. For a vector $j = (j_1, \ldots, j_d) \in \mathcal{Z}^d$, let $|j| = \max_k j_k$ be its L_∞ norm.

Theorem 2. *Assume that the Poisson rain starts at time $t = 0$ and that the system is empty at that time. Assume further that the distributions of the random variables η^d and σ are light-tailed, i.e. there is a positive constant c such that $\mathbf{E}e^{c\eta^d}$ and $\mathbf{E}e^{c\sigma}$ are finite.*
If $\rho < 1$ then the model is globally stable, in the following sense: for any finite set A in $\mathcal{Z}^d$, as $t \to \infty$, the distribution of the random vector $(W_t^i,\ i \in A)$ converges to the stationary one in the total variation distance.

Our proof of Theorem 2 is based on monotonicity of the model, a further extension of the saturation rule from [2, 3], and a careful calculation of the growth rate (this is the main technical difficulty).

Comments:

1. In the case of finite number of servers, a much more general result is available [1].
2. To the best of our knowledge, stability of infinite Jackson networks has been studied only in the Markovian case [8, 10].
3. The light-tailedness assumptions are not always crucial. For example, they are not needed if transition are directed.
4. The result may be extended onto tandems and feed-forward systems of such networks.

References

[1] *Baccelli F. and Foss S.*, Ergodicity of Jackson-Type Queueing Networks'. Queueing Systems, 1994, v. 17, p. 5–72.

[2] *Baccelli F. and Foss S.*, On the Saturation Rule for the Stability of Queues. Journal of Applied Probability, 1995, v. 32, p. 494–507.

[3] *Baccelli F. and Foss S.*, Poisson Hail on a Hot Ground. Journal of Applied Probability, 2001, v. 48A, p. 343–366.

[4] *Baccelli F. and Foss S.*, Infinite Generalized Jackson Networks. Working paper.

[5] *Biggins J.D.*, The first and last birth problems for a multitype age-dependent branching process". Advances in Applied Probability, 1976, v. 8, p. 446–459.

[6] *Blaszczyszyn B., Rau C. and Schmidt V.* Bounds for clump size characteristics in the Boolean model. Adv. in Appl. Probab. 1999, v. 31, p. 910–928.

[7] *Hall P.*, On continuum percolation. Ann. Probab. 1985, v. 13, p. 1250–1266.

[8] *Kelbert M.Ya., Kontsevich M.L. and Rybko A.N.*, On Jackson Circuits on Countable Graphs. Teor. Veroyatnost. i Primenen., 1988, v. 33, p. 379–382.

[9] *Loynes M.*, The stability of a queue with non-independentinter-arrival and service times. Proceedings of the Cambridge Phil. Society, 1962, v. 58, p. 497–520.

[10] *Martin J.*, Analysis of some large Markovian queueing networks. PhD thesis, University of Cambridge, 1999.

[11] *Stoyan D., Kendall W.S. and Mecke J.*, Stochastic Geometry and its Applications, second edition, 1995, Wiley.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Mathematical Models of Moving Particles and their Applications for Traffic

Asaf Hajiyev[1]

1. Discrete model. Consider a motion of S particles on a circle with N equidistant points. At any time $t \in T = \{0, h, 2h, .., \}$, $h > 0$, at the each point of a circle there is no more than one particle. Particles are numerating and moving counterclockwise and each particle can make a jump at the instant t to the next neighbor point in the direction of motion or stays at the same position. Denote $\xi_{i,t}$ coordinate of i-th particle at the epoch t, $\rho_{i,t} = \xi_{i+1,t} - \xi_{i,t}$ $(i = 1, 2, ..S)$ is a distance between neighbor moving particles.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P}\{\varepsilon_{i,t} = 1|\rho_{i,t} = k\} = r_k, \quad \mathbf{P}\{\varepsilon_{i,t} = 0|\rho_{i,t} = k\} = l_k, \quad r_k + l_k = 1; \\ \mathbf{P}\{\varepsilon_{i,t} = 1|\rho_{i,t} = 1, \varepsilon_{i+1,t} = 1\} = r_1, \quad \mathbf{P}\{\varepsilon_{i,t} = 1|\rho_{i,t} = 1, \varepsilon_{i+1,t} = 0\} = 0; \\ \mathbf{P}\{\varepsilon_{i,t} = 0|\rho_{i,t} = 1, \varepsilon_{i+1,t} = 1\} = l_1, \quad \mathbf{P}\{\varepsilon_{i,t} = 0|\rho_{i,t} = 1, \varepsilon_{i+1,t} = 0\} = 1 \end{array} \tag{1}$$

Similar model for motion on a line was introduced by Yu.K.Belyaev [1].

2. Nonsymmetrical model. One particle (leader) moves according to the following rule ([2]):

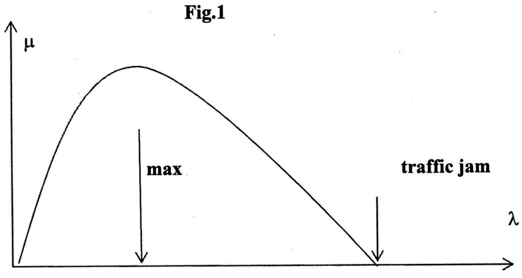
$$\begin{array}{l} \mathbf{P}\{\varepsilon_{1,t} = 1|\rho_{1,t} = k\} = r, \quad \mathbf{P}\{\varepsilon_{1,t} = 0|\rho_{1,t} = k\} = l, \quad r + l = 1; \\ \mathbf{P}\{\varepsilon_{2,t} = 1|\rho_{1,t} = 1, \varepsilon_{1,t} = 1\} = 1; \\ \mathbf{P}\{\varepsilon_{i,t} = 1|\rho_{1,t} = 1, \rho_{2,t} = 1, \ldots, \rho_{i-1,t} = 1, \rho_{1,t} > 1, \varepsilon_{1,t} = 1\} = 1 \end{array} \tag{2}$$

i.e. leader-particle can push any particle if it breaks leader movement. Other particles are moving according to (1). It is clear that leader particle makes random walk with parameters r, l.

Theorem 1. *If $r_k > 0$ and $r > 0$ then each particle makes a random walk with parameters r, l.*

This result was used for construction of road diagram (dependence of output capacity on intensity), see Fig.1.

Fig.1



3. Mathematical model with continuous motion. Consider continuous motion (in one direction) of S particles on a circle with length 1. Each particle can have speed V_1 or V_2 $(V_1 < V_2)$. Denote $V_{i,t}$ a speed of i-th particle and $\rho_{i,t}$ distance between particles i and $i+1$ in the direction of motion at the instant t. In the capacity of efficiency index we take an average

[1]Institute of Cybernetics, Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku State University. E-mail: asaf@baku-az.net

waiting (W) time for transport unit at the fixed point of a circle. S_{opt} is called an optimal numbers if $\max W(S) = W(S_{opt})$. For $t = 0$ we assume that $\rho_{1,t} = Q_1$, $V_{i,t} = V_1, \ldots, \rho_{s-1,t} = Q_1$, $V_{s-1,t} = V_1$. If $Q_1 < \rho_{i,t} < Q_2$ then particle can have speed V_1 or V_2. If $\rho_{i,t} = Q_1$ then $V_{i,t} = V_1$ and if $\rho_{i,t} = Q_2$ then $V_{i,t} = V_2$. If $V_{i,t} = V_1$, $\rho_{i,t} = Q_1$ and $\rho_{i,t}$ is increasing, then at the instant t^* when $\rho_{i,t^*} = Q_2$ i-th particle immediately changes speed from V_1 to V_2. If $V_{i,t} = V_2$, $\rho_{i,t} = Q_2$ and $\rho_{i,t}$ is decreasing, then at the instant t^{**} when $\rho_{i,t^{**}} = Q_1$ i-th particle immediately changes speed from V_2 to V_1. Such models reflect situation in traffic when large distance between transport units allows for drivers to keep high speed and short distance forces them to keep low speed. We assume that V_1, V_2, Q_1, Q_2 are given and $Q_2/V_2 < Q_1/V_1$.

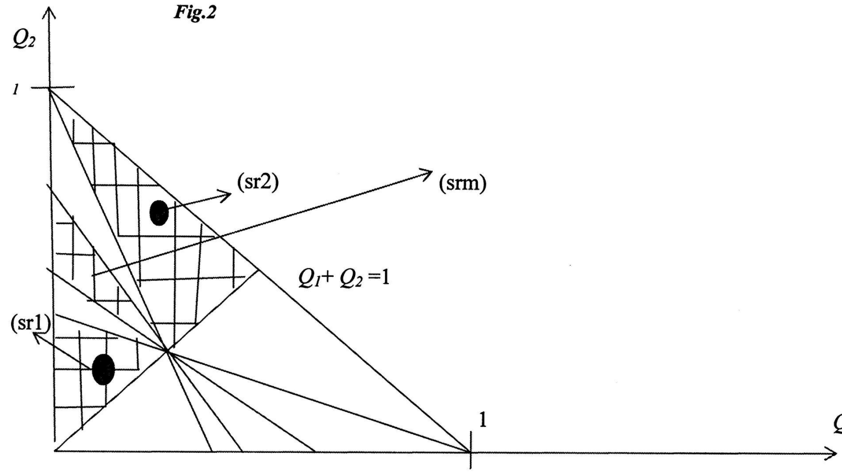
If for some t $V_{i,t} = V_1$ for any u then this regime of motion is called stable regime (*sr1*). If for some t $V_{i,t} = V_2$ for any i then this regime of motion is called stable regime (*sr2*). If for some t $V_{i,t} = V_1$ $(i = 1, 2, .., k)$ and $V_{i,t} = V_2$ $(i = k+1, k+2, .., n)$ then this regime of motion is called stable regime mixed (*srm*). If for some t $V_{i,t} = V_2$ and $\rho_{i,t} = V_1 + e$, where $Se < 2Q_1$ then this regime if called maximum saturated regime (*msr*). Saturated regime means maximum possible numbers of particles, which are moving with maximum speed V_2, i.e. $S_{sat} = (1 - Q_1)/Q_2$. Fig.2 shows dependence regimes of motion on S, Q_1 and Q_2.

Theorem 2. *If* $1 < k < S$ *then for this model is held* $W_{asr2} < W_{asmr} < W_{asr1}$.

It seems that for optimal service it is necessary to try to get saturated regime. Unfortunately, if system comes to saturated regime then small error (delay of particles) leads system to bad regime (with large waiting time of unit) and afterward the system never can come to optimal regime and moreover system passes into (asmr) regime and remains there. Optimal regime it is the state with minimal value of W.

Theorem 3. $S_{opt} = (1 - Q_1)/Q_2$.

Fig.2



References

[1] *Belyaev Yu.K.*, A simplified model of motion without overtaking. Izv. Akad. Nauk SSSR. Tekh. Kibernetika, 1969, N 3, p. 17–21.

[2] *Hajiyev A. H., Djafarova H. A., Mamedov T. Sh.*, Mathematical models of moving particles without overtaking. Doklady Math., 2010, v. 81, N 3, p. 395–398.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

On the maximum workload for a class of Gaussian queues [1]

Oleg V. Lukashenko[2], Evsey V. Morozov[3]

We present an asymptotic of the maximum of the workload process $Q(t)$ over interval $[0,\, t]$ (as $t \to \infty$) in queueing systems fed by an input process with Gaussian component whose variance is regularly varying at infinity with index $V \in (0,\, 2)$.

1 Introduction

The maximum of the workload process $Q(t)$ over a finite interval $[0,\, t]$ is an important performance measure of queueing systems. For a queue where Gaussian component is a fractional Brownian input (fBm), the asymptotics of $\max_{0\le s\le t} Q(s)$ (as $t \to \infty$) are found in [1, 4]. These results are used in present work to develop the asymptotic analysis of more general Gaussian queueing systems. More precisely, we consider the queueing system with constant service rate C fed by an input, whose Gaussian component has stationary increments and variance belonging to a class of *regularly varying functions*. We assume that the input process is defined by the formula

$$A(t) = mt + \sigma X(t),$$

where m, σ are positive constants and $X := \{X(t),\ t \ge 0\}$, $(X(0) = 0)$ is a centered Gaussian process with stationary increments. Denote the variance of $X(t)$ by $v(t)$ and note that the requirement $r := C - m > 0$ is a *stability condition*. Our main assumption is that

$$v(t) = t^V L(t), \tag{1}$$

where function $L(t)$ is slowly varying (as $t \to \infty$) and index $V \in (0,\, 2)$. Denote $\beta = (2 - V)^{-1}$ and take (arbitrary) $\varepsilon \in (0, 2 - V)$. Moreover, it is assumed that the following conditions hold as $t \to \infty$:

$$L(tL^\beta(t)) \sim L(t); \tag{2}$$

function $L(t)$ is twice differentiable on $\mathbb{R}_+$ and

$$L''(t) = o\left(\frac{1}{t^{V+\varepsilon}}\right). \tag{3}$$

Both the shape of the input and the domain of index V are highly motivated by the measurements related to the traffic of modern telecommunication systems [3]. Denote $W(t) = \sigma X(t) - rt$, then the workload $Q(t)$ at instant t (provided $Q(0) = 0$) satisfies the relation

$$Q(t) = \sup_{0\le s\le t} (W(t) - W(s)).$$

It is shown in [2] that a stationary version $Q^*(t)$ of the workload process $Q(t)$ exists.

---

[1]Supported by RFBR project N 10-07-00017.

[2]Institute of applied mathematical research, Karelian Research Center RAS. E-mail: `lukashenko-oleg@mail.ru`

[3]Institute of applied mathematical research, Karelian Research Center RAS. E-mail: `emorozov@karelia.ru`

2 Main result

Let

$$\gamma(t) = L[(\ln t)^{\beta}]\,\ln t, \;\; \theta = \frac{2}{\sigma^2(2-V)^{2-V}}\left(\frac{r}{V}\right)^{V},$$

$$M(t) = \max_{0\le s\le t} Q(s), \;\; M^*(t) = \max_{0\le s\le t} Q^*(s).$$

Theorem 1. *If the variance $v(t)$ of the Gaussian component X satisfies conditions (1)–(3) and $r > 0$ then*

$$\frac{M^*(t)}{\gamma^{\beta}(t)} \Rightarrow \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\beta}, \; \frac{M(t)}{\gamma^{\beta}(t)} \Rightarrow \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\beta}, \; t\to\infty, \tag{4}$$

where $\Rightarrow$ stands for convergence in probability.

In particular, when

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} B_{H_i}(t), \; t \ge 0,$$

where B_{H_i} are independent fBm with the Hurst parameters $H_i \in (0,\,1)$, then $v(t)$ satisfies (1), and the statement of Theorem 1 holds with $V = 2\max_i H_i$. This is an extension of the results derived in [4].

References

[1] *Hüsler J., Piterbarg V. I.*, Limit theorem for maximum of the storage process with fractional Brownian as input. Stochastic Processes and their Applications. 2004, v. 114, p. 231–250.

[2] *Konstantopoulos T., Zazanis M., De Veciana G.*, Conservation laws and reflection mappings with application to multiclass mean value analysis for stochastic fluid queues. Stochastic Processes and their Applications, 1996, v. 65, p. 139–146.

[3] *Willinger W., Taqqu M. S., Leland W. E., Wilson D.*, Self-similarity in high-speed packet traffic: analysis and modeling of Ethernet traffic measurements. Statistical Sciences, 1995, v. 10, N 1, p. 67–85.

[4] *Zeevi A., Glynn P.*, On the maximum workload in a queue fed by fractional Brownian motion. Ann. Appl. Probab. 2000, v. 10, p. 1084–1099.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

$GI|G|\infty$ Queues and their Applications to the Analysis of Traffic Models[1]

Igor V. Rudenko[2]

We consider queueing systems with infinite number of servers and identical service times during a busy period. Service times on different busy periods are independent identically distributed random variables. For the process that defines the number of customers in the system the stationary distribution and the ergodicity condition are obtained. The distribution function of the system's busy period is found.

We also consider models with group arrivals and different types of servers. The results are applied to the analysis of traffic at the non-regulated intersections. Similar models were studied in [1, 2].

The first model we analyze provides that cars on a secondary road S_2 that intersects a major one-lane road S_1 can merge into the major road if there are no cars on S_1 on the certain distance from the intersection. Using the results given in [3] for the process that is the number of waiting cars on S_2 the ergodicity condition is found, the main characteristics of the process are obtained and heavy traffic conditions are analyzed.

The second model we deal with provides that the major road is a two-lane road (with lanes S_1 and S_2) which is intersected by a secondary road S_3. A similar rule for merging into the main road is applied. The ergodicity condition is obtained and several important examples are investigated.

The considered modifications of infinite channel queues allow to take into account different types of cars motion on the major road (synchronized group motion, following the leader, free motion).

Acknowledgments. The author is grateful to professor L.G.Afanasyeva for the statement of the problem and valuable discussions.

References

[1] *Tanner G.C.*, The delay to pedestrians crossing a road. Biometrika, 1951, v. 38, p. 383–392.

[2] *Gideon R., Pyke R.*, Markov renewal modelling of Poisson traffic at intersections having separate turn lanes. Semi-Markov Models and Applications, 1999, p. 285–310.

[3] *Afanasyeva L.G.*, Stochastic boundedness of cyclic queueing systems. Journal of Mathematical Sciences, v. 59, p. 869–875.

[1]This work was partially supported by RFBR grant N 10-01-00266a.

[2]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: irudenkomr@gmail.com

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Markov models for multi-skill call centers

Manfred Schneps-Schneppe[1]

We use parallels between the older telephone switches and the multi-skill call centers. By numerical results it is shown that a call center with equally distributed skills is preferable compared to traditional grading-type design. The strong proof is given by expansion of call loss probabilities in powers of λ and of $1/\lambda$, respectively. The proof draws on papers by A. Khinchin [1] and V. Beneš [2].

Calls from different skill classes are offered to the call center according to a Poisson process with rate λ. The agents in the center are grouped according to their heterogeneous skill sets that determine the classes of calls that they can serve. Each agent group serves calls with independent and equally exponentially distributed service times with mean value equal to one. We consider a call center with no buffers, so that every arriving call either is routed immediately or blocked and lost. The objective is to calculate the call loss probability.

Traditionally, there are two types of agents in a call center: individualists (handling calls of only one type) and generalists (handling calls of any type) as Fig 1a displays: 4 agents handle calls of one type (from 4 different skills) and 2 agents are generalists. Every call flow has access to 3 agents, and the calls are looking for idle agent starting from below. We show [3] that it is advantageous to reject the traditional scheme and switch to a scheme with the same number of different skills for any agent (as is shown in Fig. 1b). Beginning with a loss probability as low as 0.25% (less than 1%), it is advantageous to use the equally distributed scheme where any agent is receiving two types of calls.

We describe the call processing by means of Markov process with a state set S of 2^v states. If x is a state, the notation $|x|$ will denote the number of calls in progress in state x. The "neighbours" of a state x are just those states which can be reached from x by adding or removing one call:

A_x: set of neighbour states accessible from x by adding a call,
B_x: set of neighbour states accessible from x by removing a call.

The Markov process matrix of transition rates become:

$$q_{xy} = \begin{cases} 1 & y \in B_x \\ \lambda\, r_{xy} & y \in A_x \\ -|x| - \lambda\, s(x) & y = x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

r_{xy} is the number of call-flows moving a system from x to the neighbour state y, and $s(x) = \sum_{y\subset A_x} r_{xy}$. We get the state probabilities p_x as the solution of the linear algebraic system:

$$[|x| + \lambda\, s(x)]p_x = \sum_{y\in A_x} p_y + \lambda \sum_{y\in B_x} p_y\, r_{yx}\,, \quad x \in S\,,$$

[1]Ventspils University College, Ventspils International Radio Astronomy Centre, Inzenieru st 101, Ventspils, LV-3601 Latvia. E-mail: manfreds.sneps@gmail.com

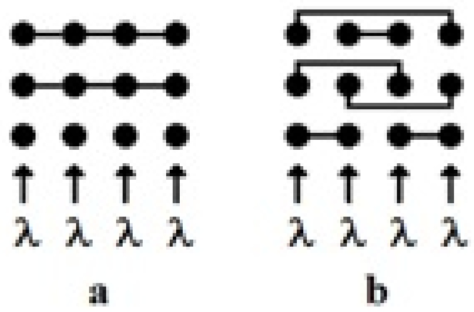


Рис. 1: *Two multi-skill call center schemes: a) grading-type, b) with equally distributed skills.*

and probability of call loss is equal to:

$$\pi = \frac{\sum_{x \subset S}[n - s(x)]p_x}{n \sum_{x \subset S} p_x}.$$

In order to study the optimal call center design principles we apply the expansion of call loss probability in powers of λ and in powers of $1/\lambda$.

Theorem 1. [4]: On optimality of grading-type call center
At $\lambda \to 0$ and given rectangular-type call center with parameters:

n = *number of skills (call flows),*
v = *number of agents,*
d = *number of available agents for each call flow,*

the optimal call center design should follow the principles:

1. *The skill-field (n, d, v) is divided (as possible) in skill-sets with 1 and n skill-points (it means that each agent has 1 or n skills), and individualists are available earlier than generalists,*

2. *If the above requirement could not be fulfilled, then skill-sets with other skill-points are available after individualists and before generalists.*

Theorem 2. [4]: On optimality of equally distributed skill-points
At $\lambda \to \infty$ and given rectangular-type call center with same parameters as above, the optimal call center design should follow the principles:

1. *The skill-field (n, d, v) is divided between agents with r or $r+1$ skills, where $r = n\,d/v$,*
2. *Agents with r skills are available earlier than agents with $r+1$ skills,*
3. *All agents have (as far as possible) same number of skills.*

References

[1] *Khinchin, A.Ya.*, Works in queueing theory (Ed.by B.V. Gnedenko), Moscow, 1963 (in Russian).

[2] *Beneš V.E.*, Markov processes representing traffic in connecting networks. Bell System Techn. J., 1963, v. 42, N 6, p. 2795–2838.

[3] *Schneps-Schneppe M.*, New principles of limited availability scheme design. Elektrosviaz, 1963, N 7, p. 40–46 (in Russian).

[4] *Sedol J., Schneps-Schneppe M.*, Some qualitative study of limited availability schemes. Problems of information transmission, 1965, v. 1, N 2, p. 88–94.

СЕКЦИЯ 4

Математическая теория надежности
Mathematical Reliability Theory

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Функционально-параметрическое направление теории надежности[1]

Олег В. Абрамов[2]

В работе обсуждаются основные положения функционально-параметрического подхода теории надежности, а также возможности и перспективы использования этого подхода в задачах обеспечения надежности аналоговых технических устройств и систем.

В современной теории надежности можно выделить несколько методологических направлений, доминирующее положение среди которых занимает вероятностно-статистическое направление. Методология вероятностно-статистического подхода базируется на эмпирически установленном факте статистической устойчивости частоты отказов, позволяющем активно использовать методы теории вероятностей и теории массового обслуживания. Расчет надежности в рамках этого направления основан на построении структурной схемы надежности исследуемой системы (модели надежности), при этом для каждого элемента и системы в целом допускаются обычно лишь два возможных состояния – работоспособности или отказа. Таким образом, любая реальная система при расчетах ее надежности заменяется некоторой логической (булевой) моделью. Методы вероятностно-статистического подхода достаточно просты и удобны для инженерных расчетов, но их использование не дает положительных результатов при решении задачи обеспечения надежности уникальных объектов и систем ответственного назначения, для которых отказы не являются массовым и статистически устойчивым явлением.

Наиболее общим и перспективным представляется исследование вопросов надежности технических систем с позиций теории блуждания точки в фазовом пространстве. Модель надежности этого типа была предложена Б.В. Гнеденко в работе (см. [1]). Она позволила обнаружить глубокую связь теории надежности с общей теорией случайных функций и сформулировать методологию подхода, который будем называть функционально-параметрическим (ФП-подходом).

ФП-подход естественным образом следует из общепринятого определения надежности как свойства объекта сохранять в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих его способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения. В соответствии с этим определением модель для определения надежности должна отражать связь показателей надежности с выполняемыми объектом функциями, условиями эксплуатации и временем.

В основу ФП-подхода положены следующие основные принципы (см. [2]).

- Процесс функционирования объекта и его техническое состояние в любой момент времени определяется конечным набором некоторых переменных - параметров объекта.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (11-08-98503 р_восток_а) и ДВО РАН (12-1-ОЭММПУ-01) по программе Отделения ЭММПУ РАН N 14.

[2]Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. E-mail: abramov@iacp.dvo.ru

- Отказы являются следствием эксплуатационных изменений параметров. Формой проявления отказа является выход параметров за пределы области допустимых значений (области работоспособности).

- Если процессы изменения параметров наблюдаемы, прогнозируемы и управляемы, то существует принципиальная возможность предотвращения отказов.

В рамках ФП-подхода задачи расчета и обеспечения надежности, возникающие на этапах проектирования, производства и эксплуатации, взаимосвязаны: все они могут быть представлены как разновидности задачи управления случайными процессами. Их решение должно основываться на результатах прогнозирования процессов изменения параметров (технического состояния) и надежности исследуемых объектов. При разработке методов прогнозирования и управления необходимо учитывать как специфику случайных процессов дрейфа параметров (они относятся к классу нестационарных и локально управляемых), так и особенности самого управления, которое имеет вид импульсной коррекции.

Математическая и вычислительная сложность методов оптимального синтеза технических систем с учетом закономерностей случайных вариаций их параметров и требований надежности, трудность получения необходимой исходной информации о параметрических возмущениях породили определенный пессимизм в отношении практической полезности (конструктивности) методов ФП-подхода. Вместе с тем в последние годы стал активно развиваться достаточно радикальный путь сокращения трудоемкости решения сложных вычислительных задач, в основе которого лежит идея распараллеливания процессов поиска конечного результата. Именно эта идея и рассматривается в докладе применительно к проблеме анализа и оптимизации параметрической надежности аналоговых технических устройств и систем.

Обсуждается идея построения эффективных параллельных алгоритмов многовариантного анализа, необходимого для вычисления статистических оценок вероятности безотказной работы при различных номинальных значениях внутренних параметров. Предложен и исследован параллельный аналог метода статистических испытаний и алгоритмы дискретного поиска номинальных значений параметров, доставляющих максимум вероятности безотказной работы.

Рассмотрена проблема проектирования аналоговых технических систем с учетом требований параметрической надежности в условиях дефицита исходной информации о параметрических возмущениях.

Список литературы

[1] *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.*, Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965.

[2] *Абрамов О.В.*, Функционально-параметрический подход в задачах обеспечения надежности технических систем. Надежность и контроль качества, 1999, N 5, с. 34–45.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Надежность комплексов восстанавливаемых систем

Ирина В. Брысина[1], **Александр В. Макаричев**[2]

Дается асимптотический анализ надежности комплексов восстанавливаемых систем.

В комплексе, состоящем из N восстанавливаемых систем, в каждой системе работают один элемент и n элементов находятся в резерве. С течением времени работающий элемент может отказать. Пусть времена между соседними отказами элементов в каждой системе независимы и одинаково распределены с экспоненциальной функцией распределения с параметром λN^{-1}. В момент отказа элемент немедленно поступает в ремонтный орган, а вместо него включается элемент из резерва системы. Длины требований по восстановлению элементов в однолинейном ремонтном органе в порядке поступления независимы и одинаково распределены с функцией распределения $G(x)$, $m_k = \int\limits_0^\infty x^k dG(x)$. Восстановленный элемент возвращается в ту систему, где он отказал. Система отказывает, если в ней отказал элемент, а резерв — пуст. Комплекс отказывает в момент отказа одной из его систем. Пусть τ — время безотказной работы комплекса с момента, когда в каждой системе резерв из n элементов, а p_0 — стационарная вероятность того, что все элементы во всех системах комплекса исправны.

Теорема 1. *Пусть $n \geq 1$, $m_{n+2} < \infty$ и $\lambda m_1 = \rho < 1$. Тогда при $\frac{\lambda m_{n+1}}{N p_0^3 m_1^n} \to 0$*

$$\mathbf{P}\left\{ \left(\frac{\lambda}{N}\right)^n P_n(\rho, m_1, \ldots, m_{n+1})\tau > x \right\} \to e^{-x},$$

где $P_n(\rho, m_1, \ldots, m_{n+1})$ — некоторая дробно-рациональная функция ρ и первых n конечных моментов времени обслуживания.

Пусть $N = 10^5$, $n = 6$, $\rho = 0,9$. Тогда при постоянном времени обслуживания снижение величины ρ вдвое увеличивает математическое ожидание времени безотказной работы комплекса более чем в 40 тысяч раз.

[1]Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», факультет ракетно-космической техники. E-mail: `iryna.brysina@gmail.com`

[2]Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, факультет транспортных систем. E-mail: `amakarichev@mail.ru`

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Оптимизация параметрической надежности в условиях неопределенности дрейфа параметров[1]

Ярослава В. Катуева[2]

В работе обсуждается проблема проектирования аналоговых технических систем с учетом требований параметрической надежности в условиях дефицита исходной информации о параметрических возмущениях.

1 Введение

В различных отраслях техники возникает необходимость решения сложных задач управления, в частности, выбора наилучших альтернатив при проектировании устройств и систем с заданными показателями качества. Существенным фактором, значительно усложняющим поиск оптимального решения, является наличие процессов деградации в самой системе и случайных воздействий на нее, влекущих, в свою очередь, изменение значений параметров системы и качества ее функционирования [1].

Процесс функционирования объекта и его техническое состояние в любой момент времени определяется конечным набором некоторых переменных - параметров объекта. Отказы являются следствием эксплуатационных изменений параметров. Отклонения параметров носят случайный характер, при этом общими свойствами практически всех процессов изменения параметров являются непрерывность и нестационарность. Поэтому внутренние параметры следует рассматривать как некоторые случайные функции времени $X(\mathbf{x}_{nom}, t)$. Следовательно, выходные параметры тоже являются функциями от случайных переменных, и условия работоспособности могут быть удовлетворены лишь с определенной вероятностью.

В реальных условиях ситуация, когда имеющаяся априорная информация о закономерностях технологических отклонений и деградации параметров позволяет достаточно полно и точно задать случайный процесс $X(\mathbf{x}_{nom}, t)$, встречается крайне редко [2]. Это объясняется тем, что ее получение связано с необходимостью проведения длительных и дорогостоящих испытаний большого числа однотипных элементов, а также быстрым старением этой информации. Поэтому возникает необходимость решения задачи анализа и оптимизации параметров технической системы в условиях неполноты исходной информации, т.е. в условиях неопределенности. В этом случае вместо статистических показателей используются некоторые детерминированные (минимаксные) критерии типа «запасов» (работоспособности, надежности и т.д.), как для внутренних, так и для выходных параметров системы [3, 4]. При этом критерий, стохастический или детерминированный,

[1]Работа поддержана грантом ДВО РАН (12-1-ОЭММПУ-01) по программе Отделения ЭММПУ РАН N 14.

[2]Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. E-mail: gloria@iacp.dvo.ru

вычисляется, как правило, численными методами, что делает невозможным использование методов оптимизации с порядком выше нулевого из-за сложности оценки частных производных целевой функции.

2 Основные результаты

Формой проявления отказа является выход параметров за пределы области допустимых значений (области работоспособности). Поэтому задача оптимизации параметрической надежности сводится к нахождению номинальной точки в пространстве параметров, для которой вероятность невыхода траектории случайного процесса деградации параметров за пределы области работоспособности была бы максимальной и может быть сформулирована следующим образом:

$$\mathbf{x}_{nom} = \arg\max P\{X(\mathbf{x}_{nom}, t) \in D_x \ , \mathbf{x}_{nom} \in B_T \cap D_x \ , \forall t \in [0, T]\}, \tag{1}$$

где $X(\mathbf{x}_{nom}, t)$ – случайный процесс изменения параметров; B_T – брус допустимых значений внутренних параметров; D_x – область работоспособности; T – заданное время эксплуатации системы.

В качестве численного значения критерия предлагается рассматривать определенным образом измеренное расстояние от точки до границ области работоспособности D_x. Отметим, что построение в n-мерном пространстве случайных прямых и определение расстояний до границ области по случайным направлениям представляет собой алгоритмически нетривиальную задачу при условии, что D_x не задана в явном виде.

Обсуждаются алгоритмы апроксимации и анализа области работоспособности, различных вариантов вычисления расстояния от номинальной точки до границ области и алгоритмы направленного поиска, необходимые для поиска номинальных значений параметров, доставляющих максимум вероятности нахождения траектории случайного процесса деградации параметров в области работоспособности [4, 5].

Список литературы

[1] *Абрамов О.В.*, Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности. М.: Наука, 1992.

[2] *Абрамов О.В., Диго Г.Б, Диго Н.Б., Катуева, Я.В. Назаров Д.А.*, Параметрический синтез технических систем в неопределенных средах. Информатика и системы управления, 2009, N 1(19), с. 55–65.

[3] *Абрамов О.В., Катуева Я.В. Назаров Д.А.*, Оптимальный параметрический синтез по критерию запаса работоспособности. Проблемы управления, 2007, N 6, с. 64–69.

[4] *Катуева Я.В.*, Анализ сложных систем в условиях неполноты информации в задаче оптимизации надежности по постепенным отказам. Информатика и системы управления, 2010, N 4(26), с. 61–68.

[5] *Катуева Я.В., Аноп М.Ф.*, Геометрический анализ области работоспособности на основе метода Монте-Карло. Информатика и системы управления, 2011, N 2(28), с. 30–40.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

О методологии построения математических моделей безопасности

В.А. Каштанов[1]

В настоящее время проблема безопасности реально протекающих процессов в различных сферах деятельности человека привлекает внимание широкого круга специалистов. О безопасности говорят сейчас на всех уровнях управления и во всех сферах жизнедеятельности.

Наличие разноплановых угроз безопасности в различных сферах деятельности требует от специалистов разработки научного подхода к исследуемой проблеме, практическая реализация которого могла бы обеспечить качественный анализ сложившейся ситуации и достоверный прогноз ее развития. Однако в настоящее время нет единого понимания проблем безопасности в различных областях, нет единой терминологии, нет общепринятого методологического подхода к анализу и решению этой проблемы.

Разобщенность не способствует созданию единой математической теории безопасности, которая необходима, поскольку только с помощью серьезных и глубоких теоретических подходов и разработок можно создать обоснованный (высококачественный) количественный (математический) прогноз развития опасных ситуаций, выработать стратегии управления и реализовать их для обеспечения безопасного течения реальных процессов. Создание математической теории позволит в дальнейшем производить количественную оценку последствий опасного и безопасного развития реальных процессов. Для создания теории необходимо определить ее предмет, ключевые понятия и законодательно их утвердить.

Прежде чем формулировать особенности математических моделей безопасности проведем анализ существующих нормативных документов. Основу этих нормативных документов составляет Федеральный закон "О безопасности"от 28.12.2010 №390-ФЗ. [1]. В этом законе *безопасность* определяется как *состояние защищенности жизненно важных интересов личности, общества и государства от внутренних и внешних угроз*. В этом определении безопасность увязывается с понятием «защищенности» и оценкой личностью возникающей ситуации (состояния) как ситуации безопасной.

В этом же определении к основным *объектам безопасности* отнесены: личность - ее права и свободы; общество - его материальные и духовные ценности; государство — его конституционный строй, суверенитет и территориальная целостность.

Основным *субъектом обеспечения безопасности* является государство, граждане, общественные и иные организации и объединения, которые принимают решения, обеспечивающие безопасность в пределах своей компетенции, на основе действующего законодательства.

Важным фактором, дестабилизирующим нормальное течение процессов, связанных с развитием личности, общества и государства, является наличие угроз безопасности. Закон определяет объект управления (объекты безопасности и процессы, связанные с развитием личности, общества и государства) и управляющие органы (субъекты обеспечения безопасности), которые принимают решения, обеспечивающие безопасность. Решения при-

[1]МИЭМ НИУ ВШЭ, Москва

нимаются в пределах компетенции соответствующего органа и на основе действующего законодательства в условиях возникновения дестабилизирующих угроз.

Безопасность в документах приписывается состояниям и определяется как свойство состояний. Если учесть, что в реальной жизни происходит последовательная смена состояний исследуемого объекта, то есть присутствует время, то мы имеем процесс развития ситуации во времени. Таким образом, приходим к определению безопасности: *безопасность есть свойство процесса функционирования системы или объекта.*

Безопасность как свойство процесса функционирования системы или объекта характеризует качество этого процесса и, если этот процесс управляемый, то безопасность характеризует качество управления. Безопасность – свойство процесса функционирования, характеризующее качество этого управляемого процесса и, следовательно, качество управления этим процессом.

Если говорить о безопасности функционирования технических систем, то очевидна связь и взаимное влияние надежности и безопасности. Поэтому при разработке моделей безопасности можно учесть опыт создания отечественной математической теории надежности, труды основоположника этого направления академика Гнеденко Б.В. и его учеников.

Теперь можно сформулировать теоретическую (математическую) проблему: при построении основ математической теории безопасности необходима разработка математических моделей эволюции реальных систем, позволяющих анализировать и количественно оценивать безопасность как свойство процессов функционирования этих систем. Эти модели должны учитывать различные характерные особенности, на наш взгляд, выявляющие суть свойства безопасности.

Проведем анализ особенностей модели безопасности и постановок проблемы.

1. *Расширение* множества факторов, оказывающих влияние на процесс функционирования системы при исследовании безопасности: учет фактора времени, фактор неопределенности (стохастическая неопределенность, наличие ненаблюдаемых параметров и состояний, ошибки в наблюдении состояний), неполнота и неточность исходных данных, человеческий фактор, факторы внешней среды (природы и целенаправленного негативного внешнего воздействия – угрозы).

2. При математическом описании процесса функционирования определяются состояния системы, ее эволюция во времени. В модели безопасности *расширяется* множество состояний - опасные, безопасные, критические, аварийные, катастрофические.

3. Формирование процесса управления и построение управляемого процесса. При этом в модели необходимо учитывать ошибки при принятии решений.

4. После построения управляемого процесса возникает проблема выбора наилучшего правила (стратегии) управления, то есть проблема решения оптимизационной задачи. Возникает задача определения рисков и ущерба и задача классификации ситуации по этим показателям (отказ, авария, катастрофа и т.п.).

5. Значимость проблемы безопасности для личности, общества и государства требует оценки многих показателей (технические, экономические, социальные показатели), а это приводит к многокритериальности оптимизационной задачи.

6. Постановка оптимизационной задачи осуществляется в условиях целенаправленного противодействия безопасному течению процесса функционирования.

Основные задачи, решение которых позволит продвинуть стоящую проблему:

1. Выработка единого подхода, выработка единой терминологии для взаимного понимания (возможно, создание стандарта терминов) — *главная задача*;

2. Определение количественных критериев (показателей), по которым можно в различных ситуациях судить об опасности (или безопасности).

3. Создание моделей внешней среды, учет человеческого фактора;

4. *Частные задачи*: классификация состояний, статистическая оценка количественных показателей.

Список литературы

[1] Федеральный закон "О безопасности". М.: КноРус, 2011.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Оптимальные планы последовательного обнаружения разладки

Ян. П. Лумельский[1]

Предложен с использованием вложенных планов новый подход для решения задач последовательного обнаружения момента разладки.

1 Введение

В математической теории надежности важное место занимают проблемы обнаружения момента разладки (Change-Point problem). Библиографию по этой проблеме и публикации авторов, которые будут нами упоминаться ниже, можно найти в обзорных статьях([1, 2]).

В докладе будет рассматриваться задача последовательного обнаружения момента разладки. Мы будем предполагать, что контролируется последовательность независимых повторных выборок объема n, то есть последовательность наблюдений имеет вид: $(X_{i1}, \dots, X_{in})$, $i = 1, 2, \dots$, (в частном случае $n = 1$). Первоначально эти наблюдения имеют распределение $F_0(x)$ (нулевая гипотеза H_0). В неизвестный момент времени, что-то случается с процессом, в результате чего распределение меняется на одно из следующих $F_h(\mathrm{x})$, $F_h(\mathrm{x}) \neq F_0(\mathrm{x})$, (альтернативные гипотезы H_h; в частном случае $h = 1, 2, ..., r$). Предполагается также, что $F_0(x)$ известно (в непараметрическом случае можно иногда ограничится для характеристики $F_0(x)$ выборкой большого объема $X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0n_1}$).

Важные научные результаты получены в задачах обнаружения разладки, когда рассматривается одна конкурирующая гипотеза $F_1(x)$ и $n = 1$. Основная задача в этом случае формулируется следующим образом. Задается $\mathbf{E}_0(T)$ — математическое ожидание числа наблюдений при принятия ложного решения о разладке (верна H_0). При этом условии ищется решающее правило, которое минимизирует $\mathbf{E}_1(T)$ — математическое ожидание числа наблюдений при H_1. В параметрическом случае такое оптимальное правило дает метод кумулятивных сумм (CUSUM), а близкое к опимальному дает решающее правило, предложенное Ширяевым-Робертсом(см.([1, 2])).

В настоящем докладе продолжены исследования, начатые в ([3],[4]). Достоинства метода вложенных планов (МВПР) для обнаружения момента разладки заключаются в нижеследующем. МВПР позволяет получать точные формулы для $\mathbf{E}_0(T)$ (нередко для $\mathbf{E}_h(T)$). МВПР основывается на параметрических и непараметрических статистических методах проверки гипотез по выборке объема n.

2 Вложенные планы контроля

Для обнаружения момента будут использоваться вложенные планы $\prod_{nes}(\Pi^{G_1}|\Pi^{G_2})$, включающие две ступени Π^{G_1} и Π^{G_2}. План первой ступени Π^{G_1} включает два параметра n и C. Используя параметрическую или непараметрическую статистилу $\mathbf{Y_i}(X_{i1}, \dots, X_{in})$,

[1]Технион, Статистическая лаборатория. E-mail: lumelski@ie.technion.ac.il

введем случайную величину Z_i следующим образом

$$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{if } Y_i\left((X_{i1}, \ldots, X_{in})|F_0(\cdot)\right) > C, \\ 0, & \text{if } Y_i\left((X_{i1}, \ldots, X_{in})|F_0(\cdot)\right) \le C. \end{cases} \tag{1}$$

Когда верна нулевая гипотеза $H_0 : F_0(x)$, тогда последовательность Z_1, $Z_2, \ldots$ является биномиальной, для которой вероятность P_0 имеет вид:

$$P_0 = \mathbf{P}(Z_i = 0 \mid F_0(x)), \quad Q_0 = \mathbf{P}(Z_i = 1 \mid F_0(x)) = 1 - P_0, \tag{2}$$

Возможны случаи, когда при H_h, можно найти вероятности

$$P_h = \mathbf{P}(Z_i = 0 \mid F_h(x)) = \mathbf{P}\left[Y_i\left((X_{i1}, \ldots, X_{in})|F_h(\cdot)\right) \le C\right]. \tag{3}$$

Вторая ступень вложенного плана контроля Π^{G_2} включает правила остановки контроля, основанные на биномиальной последовательности Z_1, $Z_2, \ldots$. Для простоты в докладе используем в качестве второй ступени план $\Pi^{G_2}(d, 2)$. Для этого плана решение о разладке принимается, когда в последних d выборках $Z_i = 1$ точно в двух выборках. Математические ожидания числа наблюдений для вложенного плана при H_0 и H_h дается формулой

$$\mathbf{E}_s(T) = \frac{n\left(2 - {P_s}^{d-1}\right)}{Q_s\left(1 - {P_s}^{d-1}\right)}, \quad s = 0, h. \tag{4}$$

Пусть для выбранного вложенного плана задана величина математического ожидания момента ложного обнаружения разладки $\mathbf{E}_0(T) = W_0 = nw_0$ и требуется найти величину C, используемую в первой ступени вложенного плана. Решая уравнение (4), найдем P_0. Основываясь на соотношениях (1) и (2), при фиксированных значениях P_0 и n вычислим C. В непараметрических задачах такой подход требует получения при малых n точных формул для функции распределения статистик Колмогорова-Смирнова и других.

Вложенные планы позволяют решить задачи обнаружения разладки для многомерных распределений, в частности, многомерного нормального. Формулиются и решаются задачи минимизации функций от $\mathbf{E}_\theta(T)$, когда при разладке на параметрическом пространстве задано априорное распределения $g(\theta)$.

Список литературы

[1] *Lai T. L.* , Sequential changepoint detection in quality control and dynamical systems. Journal R. Statist. Soc. B, 1995, v. 57, p. 1–33.

[2] *Бродский Б.Е., Дарховский Б.С.*, Проблемы и методы вероятностной диагностики. Автоматика и телемеханика, 1999, N 8, с. 3–50.

[3] *Lumelskii Ya., Gurevich, G., Feigin, P.*, Nested Plans as Sequential Quality Control Schemes for Detecting Change in Multivariate Normal Distribution. Quality Technology and Quantitative Management, 2006, v. 3, p. 493–512.

[4] *Лумельский Я.П., Фейгин П.Д.* Непараметрические критерии и вложенные последовательные планы контроля для обнаружения разладки. Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Пермь: Изд-во Перм.ун-та, 2007, вып. 20, с. 19–39.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Асимптотическое поведение отношения математических ожиданий времен до первого отказа комплексов восстанавливаемых систем

Александр В. Макаричев[1]

В работе проведено сравнение некоторых характеристик надежности комплексов восстанавливаемых систем с возвращением восстановленных элементов в систему с минимальным резервом и обычным возвращением элемента в систему, откуда он отказал.

В комплексе, состоящем из N восстанавливаемых систем, в каждой системе работают один или несколько элементов и n элементов находятся в резерве. С течением времени работающий элемент может отказать. Пусть времена между соседними отказами элементов в каждой системе независимы и одинаково распределены с экспоненциальной функцией распределения с параметром λN^{-1}. В момент отказа элемент немедленно поступает в ремонтный орган, а вместо него включается элемент из резерва системы. Длины требований по восстановлению элементов в однолинейном ремонтном органе в порядке поступления независимы и одинаково распределены с функцией распределения $G(x)$, $m_k = \int\limits_0^\infty x^k dG(x)$. Восстановленный элемент возвращается в систему, где резерв минимален. Обозначим это правило возвращения через r_0. А обычное правило возвращения элемента в ту систему, где он отказал, обозначим — r_1. Система отказывает, если в ней отказал элемент, а резерв — пуст. Комплекс отказывает в момент отказа хотя бы одной из его систем. Пусть τ — время безотказной работы комплекса с момента, когда в каждой системе резерв из n элементов, а p_0 — стационарная вероятность того, что все элементы во всех системах комплекса исправны.

Теорема 1. *Пусть $n = 2$, $m_4 < \infty$ и $\lambda m_1 = \rho < 1$. Тогда при $N \to \infty$*

$$\frac{\mathbf{M}\tau(r_0)}{\mathbf{M}\tau(r_1)} \sim \frac{1}{p_0} \sim f(\rho).$$

Отношение математических ожиданий времени безотказной работы комплексов с правилом возвращения элементов в систему с минимальным резервом и обычным правилом возвращения элемента в систему, где он отказал, как и вероятность исправности всех элементов во всех системах комплексов, асимптотически не зависит от вида функции распределения времени обслуживания отказавших элементов при фиксированном его математическом ожидании.

[1]Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, факультет транспортных систем. E-mail: `amakarichev@mail.ru`

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Модель двумерного случайного цензурирования и оценки функции выживания

Рустамжон С. Мурадов[1]

В данной работе рассмотрим задачу оценивания двумерных функций выживания при случайном цензурировании справа.

1 Введение

В медико-биологических, социологических исследованиях, в инженерии, в страховом деле, в финансовой математике и других областях исследований практического характера нас часто интересуют совместные свойства двух и более возможно независимых случайных величин (с.в.). В этих случаях интерес представляют совместные распределения нескольких неотрицательных независимых случайных величин.

На вероятностном пространстве $(\Omega, A, \mathbf{P})$ рассмотрим две последовательности $\mathbb{X} = \{(X_{1i},\, X_{2i})\,,\, i \geqslant 1\}$ и $\mathbb{Y} = \{(Y_{1i},\, Y_{2i})\,,\, i \geqslant 1\}$ - независимых одинаково распределенных случайных векторов с общими функциями выживания $F\,(x,y) = \mathbf{P}\,(X_{11} > x,\, X_{21} > y)$ и $G\,(x,y) = \mathbf{P}\,(Y_{11} > x,\, Y_{21} > y)$, $(x,y) \in \bar{R}^{+2}$. Здесь предположим, что последовательности $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ являются независимыми, функция выживания $F\,(x,y)$ непрерывная, а $G\,(x,y)$ может быть произвольной (см. [1]). Рассмотрим случай цензурирования последовательности $\mathbb{X}$, последовательностью $\mathbb{Y}$. Наблюдается выборка $\{(Z_{ki},\, \delta_{ki})\,,\; i = 1, \ldots, n\}$, где $Z_{ki} = \min\,(X_{ki}, Y_{ki})\,,\; \delta_{ki} = \mathbf{I}\,(Z_{ki} = X_{ki})\,,\; k = 1, 2$ и $\mathbf{I}(A)$- индикатор события A. Пусть $H(x,y)$ функция выживания для (Z_{11}, Z_{21}) . Тогда $H\,(x,y) = F\,(x,y)\,G\,(x,y)\,,\; (x,y) \in \bar{R}^{+2}$. В данной работе, используя экспоненциальные, множительные и степенные функционалы из [1], построим соответствующие оценки трёх типов для F. Однако в отличие от работы [1] при рассмотрении эмпирических оценок, верхний индекс суммирования, состоящего от объема выборки n заменим на пуассоновскую с.в. μ_n с параметром $\mathbf{M}\mu_n = n$, которая не зависит от $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$. Такого рода суммы возникают в страховом деле как размеры групповых страховых выплат страховой компанией клиентам в связи с осуществлением страхового случая.

2 Основные результаты

Рассмотрим оцениваемые функции при $(x,y) \in \bar{R}^{+2}$:

$$M\,(x,y) = \mathbf{P}\,(Z_{11} \leqslant x,\, Z_{21} > y)\,,\;\; N\,(x,y) = \mathbf{P}\,(Z_{11} > x,\, Z_{21} \leqslant y)\,,$$

$$\bar{M}\,(x,y) = \mathbf{P}\,(Z_{11} \leqslant x,\, Z_{21} > y,\, \delta_{11} = 1)\,,\;\; \bar{N}\,(x,y) = \mathbf{P}\,(Z_{11} > x,\, Z_{21} \leqslant y,\, \delta_{21} = 1)\,,$$

$$\Lambda_1\,(x,y) = \int\limits_0^x \frac{M\,(ds,y)}{H\,(s-,y)},\;\; \Lambda_2\,(x,y) = \int\limits_0^y \frac{N\,(x,dt)}{H\,(x,t-)}, \bar{\Lambda}_1\,(x,y) = \int\limits_0^x \frac{\bar{M}\,(ds,y)}{H\,(s-,y)},$$

[1]Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, механико-математический факультет. E-mail: `r_muradov1985@rambler.ru`

$$\bar{\Lambda}_2(x,y)=\int\limits_0^y \frac{\bar{N}(x,dt)}{H(x,t-)},\ \Lambda(x,y)=\Lambda_1(x,0)+\Lambda_2(x,y),\ \bar{\Lambda}(x,y)=\bar{\Lambda}_1(x,0)+\bar{\Lambda}_2(x,y), \quad (1)$$

$$\Lambda^c(x,y)=\Lambda_1^c(x,0)+\Lambda_2^c(x,y),\ \ \bar{\Lambda}^c(x,y)=\bar{\Lambda}_1^c(x,0)+\bar{\Lambda}_2^c(x,y),$$

где $\Lambda_1^c(x,y)=\Lambda_1(x,y)-\sum\limits_{s\leqslant x}\Lambda_1(\triangle s,y)$, $\Lambda_1(\triangle s,y)=\Lambda_1(s,y)-\Lambda_1(s-,y)$, $\Lambda_2^c(x,y)=\Lambda_2(x,y)-\sum\limits_{t\leqslant y}\Lambda_2(x,\triangle t)$, $\Lambda_2(x,\triangle t)=\Lambda_2(x,t)-\Lambda_2(x,t-)$ и аналогично определяются $\bar{\Lambda}_1^c$ и $\bar{\Lambda}_2^c$. Для построения оценок для F оценим функции (1). Сначала рассмотрим следующие эмпирические оценки H и первых четырёх вероятностей в (1) по выборке $\mathbb{V}^{(n)}$: H_n, M_n, N_n, $\bar{M}_n$, $\bar{N}_n$. Наряду с этими пятью эмпирическими оценками рассмотрим также их аналоги H_n^*, M_n^*, N_n^*, $\bar{M}_n^*$, $\bar{N}_n^*$, получаемые от них заменой верхнего предела суммирования n на с.в. μ_n. Следует однако заметить, что эти оценки обладают тем недостатком, что они могут быть больше 1. Во избежании этого недостатка, рассмотрим усеченные версии этих оценок. Например, вместо $H_n^*(x,y)$ используем $H_n^0(x,y)=1-(1-H_n^*(x,y))\,I\,(H_n^*(x,y)\leqslant 1)$. Аналогично строятся и оценки H_n^0, M_n^0, N_n^0, $\bar{M}_n^0$, $\bar{N}_n^0$. Используя эти оценки, построим соответствующие оценки и для остальных функций в (1):

$$\Lambda_{1n}(x,y)=\int\limits_0^x \frac{M_n^0(ds,y)}{H_n^0(s-,y)},\ \Lambda_{2n}(x,y)=\int\limits_0^y \frac{N_n^0(x,dt)}{H_n^0(x,t-)},\ \bar{\Lambda}_{1n}(x,y)=\int\limits_0^x \frac{\bar{M}_n^0(ds,y)}{\bar{H}_n^0(s-,y)},$$

$$\bar{\Lambda}_{2n}(x,y)=\int\limits_0^y \frac{\bar{N}_n^0(x,dt)}{\bar{H}_n^0(x,t-)},\ \Lambda_n(x,y)=\Lambda_{1n}(x,0)+\Lambda_{2n}(x,y),\ \bar{\Lambda}_n(x,y)=\bar{\Lambda}_{1n}(x,0)+\bar{\Lambda}_{2n}(x,y).$$

Рассмотрим следующие оценки для $F(x,y)$:

$$F_{1n}(x,y)=\exp\left\{-\bar{\Lambda}_n(x,y)\right\},\ \ F_{2n}(x,y)=\prod_{s\leqslant x}\left(1-\bar{\Lambda}_{1n}(\triangle s,0)\right)\prod_{t\leqslant y}\left(1-\bar{\Lambda}_{2n}(x,\triangle t)\right),$$

$$F_{3n}(x,y)=\left[H_n^0(x,y)\right]^{R_n(x,y)},\ R_n(x,y)=\frac{\bar{\Lambda}_n(x,y)}{\Lambda_n(x,y)}, \quad (2)$$

Пусть $\Delta_n=\left[0,Z_1^{(n)}\right]\times\left[0,Z_2^{(n)}\right]$, где $Z_k^{(n)}=\max(Z_{k1},...,Z_{kn})$, $k=1,2$. Следующие теоремы утверждают асимптотическую эквивалентность и состоятельность оценок (2).

Теорема 1. *Для всех* $(x,y)\in\Delta_n$ *и* $n\to\infty$ *:*

$$(I) \qquad 0\leqslant F_{1n}(x,y)-F_{2n}(x,y)=\mathrm{O}_p\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если функция выживания $G(x,y)$ *также непрерывная, то*

$$(II) \qquad |F_{1n}(x,y)-F_{3n}(x,y)|=\mathrm{O}_p\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1/2}\right).$$

Легко видеть что, из (I) и (II) также получаем $|F_{3n}(x,y)-F_{2n}(x,y)|=\mathrm{O}_p\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1/2}\right)$, $n\to\infty$.

Теорема 2. *Для всех* $(x,y)\in\Delta_n : |F_{1n}(x,y)-F(x,y)|\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty.$

Список литературы

[1] *Абдушукуров А.А., Душатов Н.Т., Мурадов Р.С.*, Непараметрические оценки двумерных распределений по неполным выборкам и их применения. Сб. Стат. методы оценивания и проверки гипотез. Пермь. Пермский госун-т. 2010. вып. 22, с. 55-64.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Оценка надежности системы с резервированием по результатам испытаний ее элементов

Игорь В. Павлов, Петр А. Левин[1]

В работе обсуждаются результаты авторов по оценке надежности сложных ситем с резервированием.

1 Введение

Оценка и прогноз показателей надежности сложных систем, исходя из статистической информации по отдельным компонентам (элементам, подсистемам) системы является одной из актуальных проблем математической теории надежности. При этом основной интерес с точки зрения приложений чаще всего представляет построение доверительных оценок для тех или иных показателей надежности системы с заданным уровнем доверия.

Связанная с этим проблема возникает в ситуации, когда система работает в переменном режиме под воздействием тех или иных переменных факторов, влияющих на ее надежность (нагрузка, температура и др.), но испытания системы или ее компонент могут быть проведены лишь в отдельных стационарных режимах.

2 Основные результаты

Данная задача рассматривается далее для модели системы из m последовательно соединенных подсистем с ненагруженным резервированием внутри отдельных подсистем. В процессе функционирования система и ее элементы могут работать в одном из k различных режимов. Каждый режим соответствует определенному уровню действующей на систему переменной кусочно-постоянной нагрузки. Предполагается, что интенсивность отказов элементов i-ой подсистемы, работающей в j-ом режиме, является некоторой функцией нагрузки, точный вид которой неизвестен, а известно лишь, что она является монотонно возрастающей. Испытания элементов в различных режимах проводились в соответствии со стандартными планами испытаний [1, 2].

Требуется, исходя из результатов испытаний, построить нижнюю доверительную границу для функции надежности системы с заданным коэффициентом доверия.

В последовательной схеме наблюдений аналогичные задачи и связанные с ними проблемы последовательного различения сложных гипотез рассматривались ранее в [3, 4, 5, 6] и др. Для модели системы с нагруженным резервированием внутри различных подсистем данная задача рассматривалась в [7, 8].

В докладе предлагается решение для модели системы, работающей в переменном режиме, с ненагруженным резервированием внутри различных подсистем.

Авторы выражают благодарность А.В.Калинкину за полезные замечания и техническую поддержку.

[1]Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, кафедра высшей математики. E-mail: ipavlov@bmstu.ru, plyovin@hotmail.com

Список литературы

[1] *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К. Соловьев А.Д.*, Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965. 524 с.

[2] *Gnedenko B.V., Pavlov I.V., Ushakov I.A.*, Statistical Reliability Engineering. John Wiley & Sons, New York, 1999. 517 p.

[3] *Павлов И.В.*, Приближенно оптимальные последовательные доверительные границы для показателей надежности систем с восстановлением. Известия АН СССР, Серия "Техническая кибернетика". 1988, N 3, с. 109–116.

[4] *Павлов И.В.*, Последовательная процедура проверки сложных гипотез с применениями к задаче Кифера-Вайсса. Теория вероятностей и ее применения, 1990, N 35, с. 293–304.

[5] *Павлов И.В.*, Нижняя граница средней длины обучающей выборки для последовательных процедур распознавания образов. Труды МИРАН им. В.А.Стеклова (ред. Ширяев А.Н., Новиков А.А), 1993, т. 202, с. 234–245.

[6] *Павлов И.В.*, О сохранении некоторых мартингальных неравенств для процессов более общего вида. Теория вероятностей и ее применения, 1996, N 41, с. 300–309.

[7] *Лёвин П.А., Павлов И.В.*, Оценка надежности систем радиоэлектроники в переменном режиме функционирования. Успехи современной радиоэлектроники, 2009, N 3, с. 73–79.

[8] *Лёвин П.А., Павлов И.В.*, Оценка надежности системы с нагруженным резервированием по результатам испытаний ее элементов. Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана, серия "Естественные науки". 2011, N 3(42), с. 59–70.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Многомерный обобщенный альтернирующий процесс как модель надежности

Владимир В. Рыков[1], Дмитрий В. Козырев[2]

Для исследования надежности сложных систем в работе вводятся и изучаются многомерные альтернирующие процессы. Получено мультипликативное представление для их стационарных вероятностей, предложен эффективный алгоритм вычисления времени достижения поглощающего состояния.

1 Введение

Большинство сложных технических систем и биологических объектов имеют иерархическую структуру и обладают встроенной системой контроля, что позволяет рассматривать их как восстанавливаемые системы. Высокая надежность таких систем может быть достигнута за счет «быстрого» восстановления их элементов.

Системам с быстрым восстановлением посвящен ряд работ. Б.В.Гнеденко [1], [2] для дублированной системы с облегченным резервированием и простейшим потоком отказов показал, что при быстром восстановлении распределение времени безотказной работы (в.б.р.) системы асимптотически экспоненциально. Аналогичный результат для случая ненагруженного резервирования с произвольно распределенными длительностями безотказной работы и восстановления был получен А.Д.Соловьевым [8]. Скорость сходимости к показательному распределению при быстром восстановлении рассматривалась в работе В.В.Калашникова [3]. Им был развит метод исследования систем надежности, опирающийся на теорию регенерирующих процессов и предельные результаты для распределения геометрических сумм. В частности, был рассмотрен пример системы ненагруженного резервирования с одним ремонтным устройством с показательным в.б.р. основного элемента и произвольно распределенным временем восстановления отказавших элементов, для которого была получена приближенная оценка скорости сходимости. Однако, вопросы анализа скорости сходимости распределения в.б.р. системы к экспоненциальному распределению для систем высокой надёжности требуют более пристального внимания.

В работах [4], [5], [6] скорость сходимости к показательному распределению при «быстром» восстановлении исследовалась численными методами для систем с разными типами резервирования, разными распределениями в.б.р. и времени ремонта элементов.

2 Основные результаты

В настоящей работе предлагается общая математическая модель надежности неоднородной восстанавливаемой системы, состоящей из n элементов с двумя состояниями: работоспособное и неисправное. Состояния такой системы описываются вектором $\mathbf{j} = (j_1, \dots j_n)$ с бинарными компонентами $j_k = \{0, 1\}$, $(k = \overline{1, n})$: 0-отказ, и 1-работоспособное состояние.

[1]Российский государственный университет нефти и газа. E-mail: `vladimir_rykov@mail.ru`
[2]Российский университет дружбы народов. E-mail: `kozyrevdv@gmail.com`

При произвольно распределённых длительностях безотказной работы и восстановления элементов соответствующий процесс является многомерным альтернирующим процессом, который с помощью дополнительных переменных $X_k(t)\,(k=\overline{1,n})$, означающих время проведенное каждой из компонент в своём состоянии с момента последнего в него попадания, превращается в многомерный кусочно-линейный марковский процесс,

$$\mathbf{Z}(t) = (\mathbf{L}(t),\, \mathbf{X}(t)) = (J_1(t), \dots J_n(t);\; X_1(t), \dots X_n(t)).$$

Показано, что стационарные вероятности таких систем с независимо работающими элементами обладают мультипликативным представлением, а для вычисления функции надежности предложен эффективный алгоритм.

Если длительности безотказной работы и ремонта элементов показательно распределены, то процесс $\mathbf{J}(t) = (J_1(t), \dots, J_n(t))$ является многомерным марковским альтернирующим процессом, соответствующие результаты для стационарных вероятностей которого вытекают из его обратимости. Для вычисления функции надежности таких систем используется матрично-аналитический метод.

Рассмотрены примеры оценки скорости сходимости распределения в.б.р. к показательному, результаты которых представлены в виде графиков и таблиц.

Список литературы

[1] *Гнеденко Б.В.*, О ненагруженном дублировании. Изв. АН СССР. Тех. кибернетика, 1964, N 4, с.3–12.

[2] *Гнеденко Б.В.*, О дублировании с восстановлением. Изв. АН СССР. Тех. кибернетика, 1964, N 5, с.111–118.

[3] *Kalashnikov V.V.*, Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications: Risk Analysis, Reliability, Queueing. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1997. 265 pages.

[4] *Козырев Д.В.*, К анализу скорости сходимости характеристик надежности систем с быстрым восстановлением. International Workshop «Distributed Computer and Communication Networks (DCCN)» proceedings, Москва, 2010, с. 232–238.

[5] *Козырев Д.В.*, Анализ асимптотического поведения характеристик надежности дублированных систем при «быстром восстановлении». Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2011, N 3, с. 49–57.

[6] *Козырев Д.В.*, Численный анализ систем надежности при быстром восстановлении и многократном резервировании. International Workshop «Distributed Computer and Communication Networks (DCCN)» proceedings, Москва, 2011, с.122–129.

[7] *Рыков В.В., Козырев Д.В.*, Анализ надежности иерархических систем: регенеративный подход. Автоматика и телемеханика, 2010, N 7, с.47–60.

[8] *Соловьев А.Д.*, Асимптотическое распределение времени жизни дублированного элемента. Изв. АН СССР, Тех. кибернетика, 1964, N 5, с.119–121.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня, 2012 года)

Показатель остаточного ресурса[1]

Гулам С. Садыхов[2]

В работе обсуждаются оценки и свойства показателя ресурса, введенного автором.

1 Введение

Для ряда технических объектов важна величина безотказной наработки (ресурса) внутри временного интервала [τ,τ+t], где значение τ больше длительности приработочного периода, а $\tau + t$ - значение времени, которое меньше момента времени начала процесса старения. Оценка этой длительности традиционными показателями «гамма-процентный ресурс» и «средний ресурс» - некорректна, поскольку в состав длительности, определяемой первым показателем, входит приработочный период, а в состав длительности, определяемой вторым показателем, входит дополнительно еще и период старения. Поэтому возникает вопрос определения нового показателя оценки длительности безотказной наработки внутри временного интервала [τ,τ+t].

2 Основные результаты

Пусть ζ - наработка до отказа невосстанавливаемого объекта при условии, что $\zeta > \tau$. Тогда случайная величина $\zeta_\tau = (\zeta - \tau)/\zeta > \tau$ равна остаточному ресурсу сверх времени τ. Образуем следующие доли остаточного ресурса:

$$\zeta(\tau, t) = \begin{cases} \frac{\zeta_\tau}{t}, \text{ если объект отказал внутри интервала;} \\ 1, \text{ если объект не отказал на этом интервале.} \end{cases}$$

Определим среднюю долю остаточного ресурса по формуле

$$J(\tau, t) = \mathbf{M}(\zeta(\tau, t)), \tag{1}$$

где $\mathbf{M}(\cdot)$ - математическое ожидание.

Теорема 1. *Справедлива следующая формула:*

$$J(\tau, t) = \frac{1}{t}\int_0^t P(\tau, x)dx,$$

где $P(\tau, x) = P(\tau + x)/P(\tau)$ - условная вероятность безотказной работы объекта на интервале времени (τ,τ+x), $P(\cdot)$- вероятность безотказной работы объекта в течение времени, указанного внутри скобок.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ N 07-08-00574-а, 10-08-00607-а.

[2]Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, факультет "Фундаментальные науки". E-mail: gsadykhov@gmail.com. Сайт: www.sadykhov.ru

Из теоремы 1 вытекают следующие свойства:

1. $P(\tau, t) \leq J(\tau, t) \leq 1$;
2. $\lim\limits_{t \to +0} J(\tau, t) = 1$;
3. $\lim\limits_{t \to \infty} J(\tau, t) = 1$ при условии, что конечен средний ресурс;
4. $\frac{\partial J(\tau,t)}{\partial t} \leq 0$.

Видно, что показатель (1), как переменная времени t, имеет схожие свойства со свойством условной вероятности безотказной работы объекта.

Свойства показателя $J(\tau, t)$ как функция другого времени τ определяются следующими утверждениями.

Теорема 2. *Для того, чтобы показатель $J(\tau, t)$ не зависел от времени τ, необходимо и достаточно, чтобы интенсивность отказов $\lambda(x) = -P'(x)/P(x)$ была бы постоянной.*

Будем считать, что объект "стареющий", если $\lambda'(x) > 0$ и "молодеющий", если $\lambda'(x) < 0$, [1].

Теорема 3. *Для стареющих объектов показатель $J(\tau, t)$ как функция времени τ монотонно убывает.*

Из теоремы 3 вытекает следующая интерполяционная оценка для стареющих объектов при $\tau < \tau_0$:

$$J(\tau, t) > J(\tau_0, t).$$

Теорема 4. *Для молодеющих объектов показатель $J(\tau, t)$ как функция времени τ монотонно возрастает.*

Для молодеющих объектов, как это следует из теоремы 4, находим следующую экстраполяционную оценку при $\tau > \tau_0$:

$$J(\tau, t) > J(\tau_0, t).$$

Теорема 5. *Пусть $\lim\limits_{\tau \to \infty} \lambda(\tau) = Z$, тогда справедливо следующее соотношение:*

$$\lim_{\tau \to \infty} J(\tau, t) = \frac{1}{Zt}(1 - \exp(-Zt)).$$

Список литературы

[1] *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.*, Математические методы в теории надежности. М.:Наука, 1965.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Аппроксимация нецентральных распределений функций с использованием предельных теорем

Николай И. Сидняев[1]

В работе обсуждается результаты автора о нецентральном χ^2-распределении.

1 Введение

Нецентральное χ^2 - распределение есть обобщение центрального χ^2-распределения. Если $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_\nu$ - независимые случайные величины, имеющие нормальные распределения с параметрами $(\lambda_1, \sigma^2), (\lambda_2, \sigma^2), ...(\lambda_\nu, \sigma^2)$ соответственно, то распределение случайной величины $\xi = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{\nu} \xi_i^2$ есть нецентральное χ^2 - распределение с ν степенями свободы и параметром нецентральности $\lambda = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{\nu} \lambda_i^2$. Если число степеней свободы ν - четное, то функция нецентрального ξ^2 - распределения выражается формулой:

$$F_\nu(x;\lambda) = \mathbf{P}\left\{\chi_\nu^2(\lambda) < x\right\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{k=m+\frac{\nu}{2}}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m \left(\frac{x}{2}\right)^k}{m!k!} e^{-\frac{(\lambda+x)}{2}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Эта формула устанавливает связь между нецентральным распределением χ^2 и распределением Пуассона:

$$\mathbf{P}\left\{\eta = m\right\} = \frac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{m!} e^{-\frac{x}{2}}, \mathbf{P}\left\{\varsigma = m\right\} = \frac{\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^2}{m!} e^{-\frac{\lambda}{2}}.$$

Из формулы (1) следует, что для произвольного положительного числа s вероятности:

$$\mathbf{P}\left\{\eta - \varsigma \geq s | x, \lambda\right\} = \mathbf{P}\left\{\chi_{2s}^2(\lambda) < x\right\} \text{ или } \mathbf{P}\left\{\eta - \varsigma \geq s | x, \lambda\right\} = \mathbf{P}\left\{\chi_{2(-s+1)}^2(x) \geq \lambda\right\}.$$

2 Основные результаты

Таким образом, формулы для функции центрального χ^2 - распределения могут быть использованы для вычисления функции распределения разности двух независимых случайных величин, подчиняющихся распределениям Пуассона [1] .

Можно убедиться, что при $\lambda \to 0$ распределение случайной величины $\chi_\nu^2(\lambda)$ стремится к распределению $\chi_\nu^2 = \chi_\nu^2(0)$, а при $\lambda \to \infty$ отношение $[\chi_\nu^2(\lambda) - \nu - \lambda] : \sqrt{2(\nu + 2\lambda)}$ асимптотически нормально с параметрами $(0, 1)$. Уточнения этих предельных теорем послужили основой получения целого ряда приближенных формул для квантилей и функции

[1]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, факультет «Фундаментальные науки». E-mail: Sidn_ni@mail.ru

нецентрального χ^2 - распределения. В настоящей работе предложено нормировать $\chi^2_\nu(\lambda)$ с помощью выражений [2] :

$$\chi'^2 = \frac{\nu+2\lambda}{\nu+3\lambda}\left[\chi^2_\nu(\lambda) + \frac{\lambda^2}{\nu+3\lambda}\right], M_{\chi'^2} = f = \frac{(\nu+2\lambda)^3}{(\nu+3\lambda)^2}.$$

Рассматривается вариант аппроксимации нецентрального χ^2 - распределения. При $y = \chi^2$ нецентральное χ^2 - распределение представлено выражением:

$$F(y;\lambda,\nu) = \int\limits_0^y \frac{e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{\lambda}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{\nu}{2}+j-1}\lambda j}{\Gamma\left[\frac{\nu}{2}+j\right]2^{2j}j!}dx.$$

После соответствующих преобразований 3 получим:

$$F(y;\lambda,\nu) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{\infty} P_{\frac{\nu}{2}+i}\left(\frac{y}{2}\right)\sum\limits_{j=0}^{i} P_j\left(\frac{\lambda}{2}\right), & \nu - \text{четное} \\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} Q_{\frac{\nu}{2}+i+1/2}\left(\frac{y}{2}\right)\sum\limits_{j=0}^{i} Q_j\left(\frac{\lambda}{2}\right), & \nu - \text{нечетное} \end{cases}$$

Список литературы

[1] *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.*, Таблицы математической статистики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 416 с.

[2] *Sidnyaev N.I., Andreytseva K.S.*, Independence of the Residual Quadratic Sums in the Dispersion Equation with Noncentral χ^2-Distribution. Applied Mathematics, 2011, v.2, N 10 (October 2011), p.1303–1308. Pub. Date: 2011-10-14, Downloads: DOI: 10.4236/am.2011.210181 Website: http://www.scirp.org/journal/am.

[3] *Haynam G.E., Govindarajulu Z., Leone F.C., Siefert P.*, Tables of the Non-Central Chi-Square Distribution - Part 1. Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Statistics. 1982, v. 13, N 3, p. 413–443.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Метод нахождения показателей структурной надежности

Николай И. Сидняев[1], Юлия С. Мельникова[2]

В работе обсуждаются результаты авторов о методе, основанном на сложении вероятностей.

1 Введение

Рассматривается структурная схема с параллельно-последовательным соединением n элементов [1]. В этих элементах могут возникать отказы, приводящие к выходу их из строя в рассматриваемый момент времени t. Точка I является входом системы, а точка J – ее выходом. Система сохраняет работоспособность, если существует хотя бы один путь из исправных элементов от входа к выходу системы. Рассматриваемая структурная схема имеет m различных путей с событиями A_i.

Пусть $X = \{X_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – множество событий элементов системы, каждый из которых может находиться в одном из двух состояний в рассматриваемый момент времени t: исправном X_i и неисправном $\overline{X}_i$.

$$X_i^{\sigma_i} = \begin{cases} X_i & \text{, если } \sigma_i = 1; \\ \overline{X}_i & \text{, если } \sigma_i = 0, \end{cases} \tag{1}$$

с вероятностями наступления этих состояний

$$\mathbf{P}(X_i^{\sigma_i}) = P_i^{\sigma_i} = \begin{cases} \mathbf{P}(X_i) = P_i & \text{, если } \sigma_i = 1; \\ 1 - \mathbf{P}(X_i) = 1 - P_i = q_i & \text{, если } \sigma_i = 0. \end{cases} \tag{2}$$

2 Основные результаты

Считается, что возникающие в системе отказы независимы. Будем полагать, что вся совокупность событий A_i соответствующих путей, $i = 1, \ldots, m$ между входом и выходом структурной схемы известна:

$$A_i = X_{\alpha_1}^{\sigma_{\alpha_1}} \cdot X_{\alpha_2}^{\sigma_{\alpha_2}} \cdot \ldots \cdot X_{\alpha_i}^{\sigma_{\alpha_i}} \cdot \ldots \cdot X_{\alpha_r}^{\sigma_{\alpha_r}}, \alpha_i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Требуется определить вероятность сохранения работоспособности системы в целом в рассматриваемый момент времени t:

$$P_{\text{сис}} = \mathbf{P}(\sum_{i=1}^{m} A_i). \tag{4}$$

[1]Московский государственный технический университет им.Н.Э.Баумана, факультет "Фундаментальные науки". E-mail: Sidn_ni@mail.ru

[2]Московский государственный технический университет им.Н.Э.Баумана, факультет "Фундаментальные науки". E-mail: jm.bmstu@yandex.ru

Теорема 1. *Если $X = \{X_i\}, i = 1, 2, \ldots, n$ – множество независимых событий, а A_j и A_k – два совместных зависимых события, имеющих вид:*

$$A_j = X_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \cdot X_{j_2}^{\sigma_{j_2}} \cdot \ldots \cdot X_{j_r}^{\sigma_{j_r}} = \bigcap_{j_i \in J} X_{j_i}^{\sigma_{j_i}}, \tag{5}$$

$$\overline{A}_k = \overline{X_{k_1}^{\sigma_{k_1}} \cdot X_{k_2}^{\sigma_{k_2}} \cdot \ldots \cdot X_{k_r}^{\sigma_{k_r}}} = \overline{\bigcap_{k_i \in K} X_{k_i}^{\sigma_{k_i}}}; \tag{6}$$

$$\mathbf{P}(X_i^{\sigma_i}) = P_i^{\sigma_i} = \begin{cases} X_i & , \textit{если } \sigma_i = 1; \\ \overline{X}_i & , \textit{если } \sigma_i = 0, \end{cases} \tag{7}$$

то произведение A_j и A_k представимо в виде суммы несовместных произведений исходных независимых событий.

Здесь J и K - множества событий X_i элементов, входящих в запись событий A_j и A_k соответствующих цепей. Доказательство строится в зависимости от того, как соотносятся друг с другом элементы множеств J и K. Выделяются две ситуации, приводящие к разным результатам.

1. В записи события $\overline{A}_k$ есть хотя бы один элемент с событием X_{k_i}, совпадающий с каким-либо событием $\overline{X}_{j_i}$ соответствующего элемента события A_j в инверсной форме (случай 1).

2. В записи события $\overline{A}_k$ нет ни одного события X_{k_i} соответствующего элемента, совпадающего с каким-либо событием $\overline{X}_{j_i}$ другого элемента события A_j (случай 2).

Доказывается теорема для каждого из названных случаев.

Список литературы

[1] *Сидняев Н.И.*, Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. М.: Издательство Юрайт, ИД «Юрайт», 2011. - 310с.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Многомерный аналог распределения Бирнбаума-Саундерса[1]

Екатерина Н. Смирнова, Юрий С. Хохлов[2]

Мы вводим многомерный аналог распределения Бирнбаума-Саундерса. Рассматриваются некоторые приложения этого распределения в моделях деградации.

1 Введение

Распределение, называемое теперь распределением Бирнбаума-Саундерса, было предложено в работе ([1]) как модель для времени разрушения некоторого объекта (процесса развития трещины). Мы предлагаем многомерный аналог этой модели, который позволяет учесть развитие трещины в пространстве.

2 Основной результат

Пусть $\{\xi_k\}$ есть последовательность независимых одинаково распределенных векторов в R^m с вектором средних μ и матрицей ковариаций A, $g(x)$, $x \in R^m$ – непрерывная вещественная положительная функция. Мы рассматриваем следующий процесс развития трещины в R^m:

$$X_{k+1} = X_k + \xi_k g(X_k) \ , \ X_0 = 0 \ .$$

Фиксируем некоторый вектор h в R^m с положительными компонентами и рассмотрим случайный вектор $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$, где τ_j есть момент первого достижения уровня h_j последовательностью $X_{k,j}$.

Мы определяем многомерное распределение Бирнбаума-Саундерса как некоторую аппроксимацию при больших $t \in R^m_+$ для вероятности $\mathbf{P}(\tau > t)$.

Список литературы

[1] *Birnbaum Z.W., Saunders S.C.*, A new family of life distribution. J. Appl. Probab., 1962, v. 6, p. 319–327.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 12-01-00287.

[2]Российский университет дружбы народов, кафедра теории вероятностей и математической статистики. E-mail: `jdubinina@mail.ru` , `yskhokhlov@yandex.ru`

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Робастность последовательного статистического принятия решений[1]

Алексей Ю. Харин[2]

В докладе представлены результаты асимптотического анализа робастности последовательных статистических критериев проверки гипотез при наличии искажений в гипотетической вероятностной модели.

1 Введение

На практике надежность [1] (оптимальные свойства) последовательных процедур [2] принятия решений часто нарушается в силу того, что гипотетическая вероятностная модель описывает реальный процесс или объект с некоторыми искажениями [3]. Поэтому представляется актуальной задача анализа робастности (устойчивости) последовательных статистических процедур принятия решений при наличии искажений, а также построение робастных последовательных процедур статистического принятия решений.

2 Краткое описание основных результатов

В работе рассматривается задача асимптотического анализа робастных последовательных статистических решающих правил для проверки гипотез при наличии искажений типа "засорений" ("выбросов") в вероятностных распределениях наблюдений и в априорных распределениях параметров.

Для процедур статистического принятия решений о параметрах модели, представимых как простыми, так и сложными гипотезами, построены асимптотические разложения по уровню искажений для вероятностей ошибочных решений и математических ожиданий среднего числа наблюдений. Построены робастные по минимаксному критерию решающие правила. Приводятся численные результаты, иллюстрирующие теорию.

Список литературы

[1] *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.*, Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965.

[2] *Ширяев А.Н.*, Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976.

[3] *Kharin A., Shlyk P.*, Robust multivariate Bayesian forecasting under functional distortions in the chi-square metric. Journal of Statistical Planning and Inference, 2009, v. 139, p. 3842-3846.

[1] Работа поддержана грантом МНТЦ B-1910.

[2] Белорусский государственный университет, факультет прикладной математики и информатики.
E-mail: KharinAY@bsu.by

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

О точности несмещенной оценки вероятности $\mathrm{P}(X < Y)$ в модели нагрузка-прочность

Владимир В. Чичагов[1]

В работе на основе больших выборок проводится сравнение оценки максимального правдоподобия и несмещенной оценки для $\mathbf{P}(X < Y)$ с использованием асимптотических разложений их среднеквадратических ошибок и предельного риск-дефекта.

Пусть случайная величина X характеризует нагрузку на элемент, а случайная величина Y – его прочность; $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_{n_1})$ и $\vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ – независимые повторные выборки из этих генеральных совокупностей. В качестве статистической оценки вероятности $P(X < Y)$ – одного из показателей надежности элемента – чаще используется оценка максимального правдоподобия, реже – несмещенная оценка $\widehat{\mathbf{P}}(X < Y)$(см. [1]).

Предполагается, что плотности распределения $f_X[x; a_1]$, $f_Y[y; a_2]$ (либо относительно меры Лебега, либо относительно считающей меры) имеют вид:

$$f_X[x; a_1] = \exp\left\{\Phi_1[a_1]T_1[x] + \Phi_{12}[a_1] + d_1[x]\right\}, \quad f_Y[y; a_2] = \exp\left\{\Phi_2[a_2]T_2[y] + \Phi_{22}[a_2] + d_2[y]\right\},$$
$$a_1 = \mathbf{E}\left(T_1[X]\right); \quad a_2 = \mathbf{E}\left(T_2[Y]\right); \quad a_i\Phi'_i[a_i] + \Phi'_{i2}[a_i] = 0,\ i = 1, 2.$$

В условиях регулярности при $n_1 \to \infty$, $n_2 \to \infty$ на основе [2] получено асимптотическое разложение дисперсии несмещенной оценки функции $G\left[a_1, a_2\right] = \mathbf{E}h(X, Y)$:

$$\mathbf{E}\left(\widehat{G}\left[a_1, a_2\right] - G\left[a_1, a_2\right]\right)^2 = \frac{(G^{(1,0)}\left[a_1, a_2\right])^2}{n_1\Phi'_1\left[a_1\right]} + \frac{(G^{(0,1)}\left[a_1, a_2\right])^2}{n_2\Phi'_2\left[a_2\right]} + \frac{(G^{(1,1)}\left[a_1, a_2\right])^2}{n_1 n_2\Phi'_1\left[a_1\right]\Phi'_2\left[a_2\right]} +$$
$$+ \frac{(G^{(2,0)}\left[a_1, a_2\right])^2}{2n_1^2(\Phi'_1\left[a_1\right])^2} + \frac{(G^{(0,2)}\left[a_1, a_2\right])^2}{2n_2^2(\Phi'_2\left[a_2\right])^2} + \mathbf{O}\left(\frac{1}{n_1^3}\right) + \mathbf{O}\left(\frac{1}{n_2^3}\right).$$

Этот результат используется для нахождения асимптотического разложения дисперсии несмещенной оценки $\mathbf{P}(X < Y)$ и предельного риск-дефекта несмещенной оценки по отношению к оценке максимального правдоподобия. Отдельно рассмотрен случай гамма-распределений случайных величин X и Y.

Список литературы

[1] *Kotz S., Lumelskii Y., Pensky M.*, The Stress-Strength Model and its Generalizations. World Scientific. 2003.

[2] *Чичагов В.В.*, Стохастические разложения несмещенных оценок в случае однопараметрического экспоненциального семейства. Информатика и ее применения, 2008, т. 2, N 2, с. 62–70.

[1]Пермский государственный национальный исследовательский университет, механико-математический факультет. E-mail: chichagov@psu.ru

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Оптимальное управление в полумарковской модели с периодически происходящими внешними воздействиями

Петр В. Шнурков[1], Татьяна Н. Дойникова[2]

В работе доказывается утверждение о существовании оптимального управления в стохастической полумарковской модели, указывается способ его нахождения.

1 Введение

В настоящей работе рассматривается некоторая стохастическая модель с управлением, которая строится на основе ПМП с поглощением. В данной модели предполагается наличие периодических внешних воздействий, которые можно считать управлением. После того, как рассматриваемый нами процесс достигает границы некоторого заданного допустимого множества состояний, он подвергается насильственному переводу во внутрь этого множества в соответствии с заданными дискретными вероятностными распределениями $\alpha^{(0)}; \alpha^{(1)}$, которые описывают управление системой. Далее процесс снова начинает эволюционировать без внешних воздействий (управления) до тех пор, пока снова не выйдет за допустимые границы. Задача управления в данной модели будет представлять собой исследование на максимум некоторого показателя качества $I(\alpha^{(0)}; \alpha^{(1)})$.

Отдельно подчеркнем прикладной смысл рассматриваемой модели, которая м.б. использована для описания различных технических или экономических систем. В технических системах она может описывать отказы и последующие восстановительные работы. В экономических системах с помощью данной модели можно описывать периодически происходящие выходы некоторого параметра за заданные допустимые границы (курс валюты, цена финансового актива, показатель уровня жизни и т.д.). Управления при этом характеризуют те экономические действия, которые производятся для возвращения данного параметра в допустимую область.

2 Описание модели

Перейдем к формальному описанию рассматриваемой стохастической модели.

Пусть $\xi^{(n)}(t)$, $n = 0, 1, 2, ...$ — последовательность независимых ПМП с поглощением и с одинаковыми вероятностными характеристиками. Обозначим через $X = \{0, 1, ..., N\}$, $N < \infty$ — множество состояний данных процессов.

Для удобства применения теории процессов с поглощением произведем обозначения состояний таким образом, что состояния $\{0\}$ и $\{1\}$ будут являться граничными и поглощающими, а состояния $\{2, ..., N\}$ — внутренними и допустимыми.

Будем предполагать, что для ПМП $\xi^{(n)}(t)$, $n = 0, 1, 2, ...$ заданы полумарковские функции $Q_{ij}(t)$, $i, j = 0, 1, ..., N$, описывающие эволюцию этих процессов.

[1]МИЭМ НИУ ВШЭ, факультет прикладной математики. E-mail: shnurkov@miem.edu.ru
[2]МИЭМ НИУ ВШЭ, факультет прикладной математики. E-mail: tatiana.doynikova@gmail.com

Введем также две системы независимых неотрицательных случайных величин $\{\Delta_n^{(0)}$, $n = 0, 1, 2, ...\}$, $\{\Delta_n^{(1)}$, $n = 0, 1, 2, ...\}$, распределения которых для каждого фиксированного n будет зависеть от дополнительного условия, связанного с данной моделью.

На основе введенных стохастических объектов конструируется модель основного СП $\xi(t)$, описывающего эволюцию системы с периодическими внешними воздействиями. Идею данной модели можно охарактеризовать следующим образом.

На интервалах времени, где внешние воздействия отсутствуют, эволюция системы описывается ПМП с поглощением $\xi^{(n)}(t)$, $n = 0, 1, 2, ...$ Обозначим через t_n момент очередного поглощения. Если в этот момент процесс поглощается в состоянии $\{i\}$, $i = 0, 1$ то время пребывания в данном состоянии описывается случайной величиной $\Delta_n^{(i)}$. При этом распределении величин $\Delta_n^{(i)}$ зависят от состояния, в которое будет переведен процесс в результате управляющего воздействия.

Введем сопровождающий СП $\eta(t)$. Рассмотрим состояния процесса $\xi(t)$ в последовательные моменты поглощения. Обозначим $\eta_n = \xi(t_n)$, где $t_1, t_2, ...$ — последовательные моменты поглощения процесса $\xi(t)$ в поглощающие состояния $\{0\}$ или $\{1\}$. Последовательность $\{\eta_n\}$ образует МЦ с двумя состояниями $\{0, 1\}$. Определим ПМП $\eta(t)$ при помощи соотношения $\eta(t) = \eta_n$ при $t_n \le t < t_{n+1}$, $n = 1, 2, ...$

Начальное состояние МЦ η_0 можно доопределить произвольным образом.

Сопровождающий ПМП $\eta(t)$ можно рассматривать как процесс с управлением. Множество допустимых управлений $U \in \{2, 3, ..., N\}$ совпадает с множеством допустимых состояний. Если в некоторый момент t_n основной процесс $\xi(t)$ оказывается в состоянии $\{i\}$, $i = 0, 1$ и тогда $\eta_n = \eta(t_n) = i$, то управление процессом $\eta(t)$ выбирается в соответствии с вероятностным распределением $\alpha^{(i)} = (\alpha_2^{(i)}, ..., \alpha_N^{(i)})$, $\sum\limits_{i=2}^{N} \alpha_i^{(i)} = 1$.

3 Основные результаты

Получили стационарный функционал дохода.

$$I = \frac{\rho_0 p_{10} + \rho_1(1 - p_{00})}{T_0 p_{10} + T_1(1 - p_{00})} = \frac{\sum\limits_{k=2}^{N} \alpha_k^{(0)}[d_k^{(0)} + r_k] \sum\limits_{k=2}^{N} \alpha_i^1 b_{i0} + \sum\limits_{k=2}^{N} \alpha_k^{(1)}[d_k^{(1)} + r_k] \sum\limits_{k=2}^{N} \alpha_i^0(1 - b_{i0})}{\sum\limits_{k=2}^{N} \alpha_k^{(0)}[\tau_k^{(0)} + m_k] \sum\limits_{k=2}^{N} \alpha_i^1 b_{i0} + \sum\limits_{k=2}^{N} \alpha_k^{(1)}[\tau_k^{(1)} + m_k] \sum\limits_{k=2}^{N} \alpha_i^0(1 - b_{i0})}$$

Где ρ_i — математическое ожидание дохода за время пребывания сопровождающего ПМП $\eta(t)$ в состоянии i; T_i — математическое ожидание времени пребывания сопровождающего ПМП $\eta(t)$ в состоянии i, $i = 0, 1$; π_i — стационарные вероятности вложенной МЦ; $\tau_k^{(i)}$ — математическое ожидание времени перевода из состояния i в состояние k; m_k — математическое ожидание времени от момента попадания в состояние k до следующего момента поглощения.

$I = I(\alpha^{(0)}; \alpha^{(1)})$ представляет собой дробно-линейный функционал от дискретных вероятностных распределений $\alpha^{(0)}; \alpha^{(1)}$. Такой функционал достигает экстремума на вырожденных распределениях вида $\alpha^{(0)^*} = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$; $\alpha^{(1)^*} = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$.

Функционал $I = I(\alpha^{(0)^*}; \alpha^{(1)^*}) = I_0(k_0, k_1)$ на вырожденных распределениях превращается в функцию от двух дискретных переменных $k_0, k_1 = \overline{2, N}$. Задача управления сводится к нахождению максимума $I_0(k_0, k_1)$.

Международная конференция
“ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ”
(Москва, 26–30 июня 2012 года).

Анализ проблемы оптимального управления запасом непрерывного продукта в стохастической полумарковской модели с периодическим прекращением потребления

Пётр В. Шнурков,[1] Алексей В. Иванов[2]

В работе рассматривается стохастическая модель управления запасом некоторого продукта при помощи управляемого полумарковского процесса.

1 Введение

Рассматривается некоторая система, предназначенная для хранения и поставки потребителю запаса продукта, объем которого описывается непрерывным параметром $x(t)$, $t \geq 0$, принимающим значения во множестве $(-\infty, \tau]$, где $\tau > 0$ (τ — максимальная вместимость хранилища). Проводится дискретизация модели; множество $(-\infty, \tau]$ разбивается на конечное число подмножеств: $[0, \tau_1^{(0)})$, $[\tau_1^{(0)}, \tau_2^{(0)})$, $\ldots$, $[\tau_{N_0-1}^{(0)}, \tau_{N_0}^{(0)}]$, где $\tau_{N_0}^{(0)} = \tau$, $(-\infty, \tau_{N_1}^{(1)}]$, $(\tau_{N_1}^{(1)}, \tau_{N_1-1}^{(1)})$, $\ldots$, $(\tau_1^{(1)}, \tau_0^{(1)})$, где $\tau_0^{(1)} = 0$.

Изменение объема запаса происходит по следующим правилам. В начальный момент функционирования системы или в момент окончания очередного пополнения планируется момент времени, в который будет сделан заказ на следующее пополнение запаса. Если в момент очередного пополнения уровень запаса принадлежит подмножеству $[\tau_i^{(0)}, \tau_{i+1}^{(0)})$, то момент следующего пополнения планируется через случайное время $\xi_i^{(0)}$, имеющее распределение $G_i^{(0)}(x)$. В запланированный момент времени производится заказ на пополнение запаса и начинается так называемый период задержки (период подготовки очередного заказа), который продолжается случайное время с заданным распределением. Во время задержки потребление запаса прекращается.

Непосредственное пополнение запаса происходит следующим образом. Если в момент заказа уровень запаса является положительным и принадлежит подмножеству состояний $[\tau_k^{(0)}, \tau_{k+1}^{(0)})$, то в результате пополнения он переходит в подмножество $[\tau_l^{(0)}, \tau_{l+1}^{(0)})$, $l \geq k$, с вероятностью $\beta_{kl}^{(0)}$. Если в момент заказа уровень запаса является отрицательным и принадлежит множеству $(\tau_k^{(1)}, \tau_{k-1}^{(1)}]$ то в результате пополнения он становится положительным и переходит в подмножество $[\tau_l^{(0)}, \tau_{l+1}^{(0)})$ с вероятностью $\beta_{kl}^{(1)}$. Таким образом, после пополнения запас всегда является положительным и дефицит продукта ликвидируется.

Если в результате пополнения процесс, описывающий уровень запаса, оказывается в подмножестве состояний $[\tau_i^{(0)}, \tau_{i+1}^{(0)})$, то состояние внутри этого подмножества (точный уровень запаса) определяется в соответствии с распределением вероятностей $B_i(x)$, заданном на множестве $[\tau_i^{(0)}, \tau_{i+1}^{(0)})$. Данные распределения описывают случайные отклонения объема

[1]МИЭМ НИУ ВШЭ, факультет прикладной математики. E-mail: `shnurkov@miem.edu.ru`
[2]МИЭМ НИУ ВШЭ, факультет прикладной математики. E-mail: `A.I.Valerevich@gmail.com`

поставки продукта. После завершения каждого пополнения эволюция процесса, описывающего уровень запаса, происходит независимо от прошлого и по правилам, которые были изложены выше. Для описания такой системы используется два случайных процесса: основной случайный процесс $x(t)$, значение которого представляет собой уровень запаса в момент времени t, и сопровождающий полумарковский управляемый случайный процесс $\zeta(t)$ с конечным множеством состояний. Управление процессом $\zeta(t)$ производится в последовательные моменты пополнения запаса t_n (после определения значения процесса $x(t_n)$). Параметр управления u_n представляет собой случайную длительность периода времени до момента следующего заказа на пополнение запаса: $u_n = \xi_k^{(0)}$, если $\zeta_n = k$.

Проблема оптимизации управления запасом в данной стохастической модели или проблема управления построенным полумарковским процессом заключается в выборе управляющих вероятностных распределений $G_k^{(0)}(x) = \mathbf{P}(\xi_k^{(0)} < x)$, $k = 0, 1, \ldots, N_0 - 1$, доставляющих экстремум некоторому показателю качества управления:

$$I\big(G_k^{(0)}(\cdot),\, k = 0, 1, \ldots, N_0 - 1\big).$$

2 Основные результаты

В ходе проведенного исследования были получены следующие основные результаты.

1) Найдены представления для переходных вероятностей вспомогательного полумарковского процесса с конечным множеством состояний.

2) Определены представления для стоимостных характеристик управляемого полумарковского процесса: математических ожиданий затрат и прибыли за время пребывания в состояниях.

3) Получены общие представления для стационарных вероятностей цепи Маркова, вложенной в управляемый полумарковский процесс, в виде функционалов от управляющих вероятностных распределений $G_i^{(0)}(x)$, $i = 0, 1, \ldots, N_0 - 1$.

4) Доказано утверждение об аналитическом представлении стационарных показателей качества управления (средних удельных затрат или средней удельной прибыли) в виде дробно-линейных функционалов от управляющих вероятностных распределений.

5) В результате проведенного исследования установлено, что оптимальной стратегией управления является детерминированная, которая задается конкретными значениями параметра управления, соответствующими каждому состоянию сопровождающего полумарковского процесса. Формально такой набор оптимальных значений параметра управления представляет собой точку глобального экстремума функции нескольких переменных. В работе находятся явные представления для таких функций, соответствующих различным видам стационарных стоимостных функционалов (средние удельные затраты, средняя удельная прибыль). Таким образом, для решения проблемы оптимального управления необходимо исследовать на экстремум некоторую заданную функцию нескольких вещественных переменных.

Список литературы

[1] Вопросы математической теории надежности. Под ред. *Б. В. Гнеденко.* М.: Радио и связь, 1983.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26–30 июня 2012 года).

Оптимальное управление инвестициями фондосоздающего сектора в динамической модели трехсекторной экономики

Пётр В. Шнурков,[1] Вероника В. Писаренко[2]

В работе рассматривается проблема оптимального управления экономической системой в рамках модели трехсекторной экономики.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления экономической системой, функционирование которой описывается динамической моделью трехсекторной экономики [1].

1. $\int_0^T A_2\theta_2 k_2^{\alpha_2}(t)\,dt+\psi\big(k_0(T),k_1(T),k_2(T)\big) \longrightarrow \max$ — целевой функционал смешанного типа. Интегральная часть целевого функционала выражает суммарный объем потребительских благ по отношению к единице трудовых ресурсов всей экономической системы произведенных за фиксированный период времени $[0,T]$, терминальная часть выражает уровень технологического развития системы в конечный момент T.

2. $\dot{k}_0=-\lambda_0 k_0+\frac{L_{1,0}}{L_{0,0}}\rho(A_1k_1^{\alpha_1}-i_1)$, $\quad\dot{k}_1=-\lambda_1k_1+i_1$, $\quad\dot{k}_2=-\lambda_2k_2+\frac{L_{1,0}}{L_{2,0}}(1-\rho)(A_1k_1^{\alpha_1}-i_1)$ — дифференциальная связь, описывающая динамику изменения параметров состояния системы $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ под воздействием управления $i_1(t)$.

3. $k_0(0)=k_{0,0}$, $k_1(0)=k_{1,0}$, $k_2(0)=k_{2,0}$ — начальные условия на основные параметры (состояния системы).

4. $i_{1,0}=\frac{I_{1,0}}{L_{1,0}}\le i_1(t)\le\gamma A_1k_1^{\alpha_1}(t)$ — ограничения на допустимое управление.

Поставленная задача представляет собой классическую задачу оптимального управления с фиксированным интервалом времени, закрепленным левым и свободным правым концами траектории.

Система необходимых условий экстремума в исходной задаче (принцип максимума) состоит из сопряженных уравнений, условий трансверсальности и условия максимума функции Понтрягина [3]. Функция Понтрягина определяется равенством

$$H(t,k_0,k_1,k_2,i_1,p_0,p_1,p_2,\lambda_0^*)=p_0[-\lambda_0k_0+l_0^{(1)}\rho(A_1k_1^{\alpha_1}-i_1)]+ \\ +p_1[-\lambda_1k_1+i_1]+p_2[-\lambda_2k_2+l_2^{(1)}(1-\rho)(A_1k_1^{\alpha_1}-i_1)]+\theta_2A_2k_2^{\alpha_2},$$

где $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ — сопряженные параметры, коэффициенты λ_0, λ_1, λ_2, $l_0^{(1)}$, $l_2^{(1)}$, ρ, A_1, A_2, θ_2 предполагаются известными.

Система сопряженных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases}\dot{p}_0=\lambda_0p_0,\\ \dot{p}_1=\lambda_1p_1-l_0^{(1)}\rho A_1\alpha_1k_1^{\alpha_1-1}p_0-l_2^{(1)}(1-\rho)A_1\alpha_1k_1^{\alpha_1-1}p_2,\\ \dot{p}_2=\lambda_2p_2-\theta_2A_2k_2^{\alpha_2}.\end{cases}$$

[1]МИЭМ НИУ ВШЭ, факультет прикладной математики. E-mail: `shnurkov@miem.edu.ru`
[2]МИЭМ НИУ ВШЭ, факультет прикладной математики. E-mail: `pisarenkoveronika@gmail.com`

Условия трансверсальности представляют собой граничные условия к сопряженному уравнению. Таким образом, получаем задачу Коши для векторного сопряженного параметра $p(t) = (p_0(t), p_1(t), p_2(t))$.

Введем вспомогательную функцию, зависящую от сопряженных параметров

$$Q(p_0, p_1, p_2) = -l_0^{(1)}\rho p_0 + p_1 - l_2^{(1)}(1-\rho)p_2.$$

С учетом введенного обозначения выражение для функции Понтрягина примет вид

$$H(t; k_0, k_1, k_2; i_1; p_0, p_1, p_2, \lambda_0^*) = Q(p_0, p_1, p_2)i_1 + [-\lambda_0 k_0 + l_0^{(1)}\rho A_1 k_1^{\alpha_1}]p_0 - \\ - \lambda_1 k_1 p_1 + [-\lambda_2 k_2 + l_2^{(1)}(1-\rho)A_1 k_1^{\alpha_1}]p_2 + \theta_2 A_2 k_2^{\alpha_2}.$$

Из условия максимума функции Понтрягина следует, что структура оптимального управления $i_{1^*}(t)$ может быть задана формулой $i_{1^*}(t) = \gamma A_1 k_1^{\alpha_1}(t)$, если $Q(p_0, p_1, p_2) > 0$, и $i_{1^*}(t) = i_{1,0}$ если $Q(p_0, p_1, p_2) < 0$.

Предположим, что функция $Q(p_0, p_1, p_2)$ принимает нулевые значения на интервале $[0, T]$ в конечном числе изолированных точек $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$, которые будем называть точками переключения управления.

В работе рассматривается четыре основных варианта управления: два варианта без переключений и два варианта с одним переключением в некоторой фиксированной точке τ, $0 < \tau < T$. Согласно этому предположению, основные параметры модели $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ и сопряженные параметры $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ будут представляться в четырех вариантах, соответствующих вариантам поведения управления.

Опишем четыре основных варианта поведения функции $Q(p_0, p_1, p_2)$ на интервале $[0, T]$: (1) $Q(p_0, p_1, p_2) > 0$ при $t \in [0, T]$; (2) $Q(p_0, p_1, p_2) < 0$ при $t \in [0, T]$; (3) существует точка $\tau \in [0, T]$ такая, что $Q(p_0, p_1, p_2) < 0$ при $0 \le t < \tau$ и $Q(p_0, p_1, p_2) > 0$ при $\tau < t \le T$; (4) существует точка $\tau \in [0, T]$ такая, что $Q(p_0, p_1, p_2) > 0$ при $0 \le t < \tau$ и $Q(p_0, p_1, p_2) < 0$ при $\tau < t \le T$.

В работе получены явные представления для основных параметров модели (состояний системы) $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ и сопряженных параметров $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ для четырех указанных выше вариантов поведения функции $Q(p_0, p_1, p_2)$ и соответствующих вариантов функции управления $i_{1^*}(t)$. Аналогичным образом можно найти представления для основных и сопряженных параметров в варианте модели, когда функция управления имеет конечное число переключений на интервале времени $[0, T]$.

Если характер функции $Q(t)$ соответствует выбранной структуре функции управления $i_1(t)$, то рассматриваемый вариант функции управления $i_1(t)$ и соответствующих параметров состояний системы $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ можно считать управляемым процессом, удовлетворяющим необходимым условиям экстремума в форме принципа максимума. Предложенный в данной работе метод позволяет определить такой управляемый процесс.

Список литературы

[1] *Колемаев В.А.*, Математическая экономика. М: Юнити-Дана, 2005.

[2] *Камке Э.*, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.

[3] *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.*, Оптимальное управление. М: Физматлит, 2007.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Исследование проблемы оптимального управления запасами в дискретной полумарковской модели

Петр В. Шнурков,[1] Жанна В. Тюменцева[2]

1 Введение

Рассмотрим стохастическую модель управления запасом товара (продукта) в некоторой торговой системе. Такая система предназначена для хранения товара и его продажи покупателям (потребителям). Объем товара характеризуется дискретным параметром. В данной модели допускается наличие неудовлетворенного спроса или дефицита,который описывается отрицательными значениями объема товара. Максимальное количество товара в системе составляет N_0 единиц, минимальное $(-N_1)$ единиц (допустимый объем неудовлетворенного спроса), где N_0, N_1 - заданные положительные числа. Периодически в системе происходит пополнение запаса.

Продажа товара происходит в моменты событий пуассоновского потока с параметром $\lambda > 0$. Каждый покупатель приобретает только одну единицу товара.

Процесс управления запасом организуется следующим образом. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ или после очередного пополнения уровень запаса равен $i, 0 \leq i \leq N_0$. Тогда планируется,что в момент, когда уровень запаса в системе становится равным $r_i, -N_1 \leq r_i < i$ производится заказ на очередное пополнение запаса. Такой заказ выполняется через заданное несулчайное время $\tau > 0$. Период времени между моментом заказа и моментом его выполнения, длительность которого равна τ, называется периодом задержки. В конечный момент периода задержки производится мгновенное пополнение запаса. Во время периода задержки потребление продукта продолжается.

Пополнение запаса описывается следующими вероятностными распределениями:

$$\{\beta_{kj}^{(0)} - \text{вероятность пополнения из } k \text{ до уровня } j \text{ при } 0 \leq k \leq N_0 - 1; j \geq k\}, \sum_{j=k}^{N_0} \beta_{kj}^{(0)} = 1;$$

$$\{\beta_{kj}^{(1)} - \text{вероятность пополнения из } k \text{ до уровня } j \text{ при } -1 \geq k \geq -N_1; j \geq 0\}, \sum_{j=0}^{N_0} \beta_{kj}^{(1)} = 1.$$

Проблема управления заключается в определении оптимального уровня товара на складе, при котором следует сделать заказ на пополнение запаса. Показателем качества функционирования системы будет служить функционал среднего удельного дохода. Роль параметра управления играет параметр r_i, характеризующий уровень товара на складе в момент заказа.

[1]МИЭМ НИУ ВШЭ, факультет прикладная математика. E-mail: shnurkov@miem.edu.ru
[2]МИЭМ НИУ ВШЭ, факультет прикладная математика. E-mail: janna.tumentseva@gmail.com

2 Основные результаты

Введем случайные процессы, описывающие функционирование системы. Пусть $\xi(t)$ — основной процесс, который описывает уровень запаса в момент t. Множество состояний процесса $\xi(t)$ $X = \{-N_1, -N_1+1, ..., -1, 0, 1, 2, ..., N_0\}$. Обозначим через $\{t_n^{(0)}, n = 0, 1...\}$ - последовательные моменты пополнения запаса; $t_0^{(0)} = 0$; $\xi_n^{(0)} = \xi(t_n^{(0)} + 0)$ — состояние системы непосредственно после пополнения.

Введем случайный процесс $\xi^{(0)}(t)$ при помощи соотношения

$$\xi^{(0)}(t) = \xi_n^{(0)} \text{ при } t_n^{(0)} \le t \le t_{n+1}^{(0)},$$

$\xi^{(0)}(t)$ — сопровождающий полумарковский процесс со множеством состояний $X^{(0)} = 0, 1, ..., N_0$; $\{\xi_n^{(0)}\}$ — вложенная цепь Маркова процесса $\xi^{(0)}(t)$.
Обозначим через $p_{ij}, i, j = 0, 1, ..., N_0$ вероятности перехода цепи Маркова, вложенной в полумарковский процесс $\xi^{(0)}(t)$. Вероятности $p_{ij}, i, j = 0, 1, ..., N_0$ могут быть выписаны явным образом через исходные параметры модели.

Введем следующие обозначения для множеств индексов
$S_0 = \{i \in \{0, 1, ..., N_0\} : r_i \ge 0\}$
$S_1 = \{i \in \{0, 1, ..., N_0\} : -N_1 + 1 \le r_i \le -1\}$
$S_2 = \{i \in \{0, 1, ..., N_0\} : r_i = -N_1\}$

Тогда система уравнений для стационарных вероятностей вложенной цепи Маркова имеет вид:

$$\pi_j = \sum_{i\in S_0} \pi_i \Big[\sum_{k=-(N_1-1)}^{-1} \frac{(\lambda\tau)^{r_i-k}}{(r_i-k)!} e^{-\lambda\tau} \beta_{kj}^{(1)} + \sum_{k=0}^{r_i} \frac{(\lambda\tau)^{r_i-k}}{(r_i-k)!} e^{-\lambda\tau} \beta_{kj}^{(0)} + \Big[\sum_{k=r_i+N_1}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} \Big] \beta_{-N_1,j}^{(1)} \Big] +$$
$$+ \sum_{i\in S_1} \pi_i \Big[\sum_{k=-(N_1-1)}^{r_i} \frac{(\lambda\tau)^{r_i-k}}{(r_i-k)!} e^{-\lambda\tau} \beta_{kj}^{(1)} + \sum_{k=r_i-N_1}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} \beta_{-N_1,j}^{(1)} \Big] + \sum_{i\in S_2} \pi_i \beta_{-N_1,j}^{(1)}, j = 0, 1, ..., N_0$$

Показателем качества управления в данной модели является стационарный функционал средней удельной прибыли, определяемый соотношением

$$I = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N_0} s_i^{(0)} \pi_i}{\sum\limits_{i=0}^{N_0} m_i^{(0)} \pi_i} = I(r_0, r_1, ..., r_{N_0}),$$

$s_i^{(0)}$ - математическое ожидание прибыли за время пребывания ПМП $\xi^{(0)}(t)$ в состоянии i;
$m_i^{(0)}$ - математическое ожидание времени пребывания ПМП $\xi^{(0)}(t)$ в состоянии i;

Данные величины также могут быть явно выражены через заданные характеристики модели. Таким образом, стационарный функционал $I(r_0, r_1, ..., r_{N_0})$ можно явно определить для любого набора параметров управления.

Формально задача управления запасом представляет собой следующую экстремальную задачу

$$I(r_0, r_1, ..., r_{N_0}) \to \max$$

на множестве значений параметров $\{-N_1 \le r_i < i, i = 0, 1, ..., N_0\}$.

Вектор $\{r_i^*, i = 0, 1, ..., N_0\}$ на котором достигается максимальное значение функции $I(r_0, r_1, ..., r_{N_0})$, определяет оптимальное решение проблемы управления запасом.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Некоторые уроки аварии на АЭС «Фукусима-1» для работ по безопасности различных технических объектов

Михаил А. Ястребенецкий[1]

Авария на АЭС «Фукусима-1» в 2011 г. (как, впрочем, и аварии на АЭС «Three Miles Islands» в 1979 и Чернобыльской АЭС в 1986 г.) оказало существенное влияние на развитие работ по безопасности не только в атомной энергетике, но и в различных отраслях техники. Уроки этой аварии для атомной энергетики широко освещены в литературе и использованы в мировой практике. Принципы этих уроков для иных критических объектов являются предметом доклада:

1. Учет не одного природного воздействия, а комбинации нескольких экстремальных (даже маловероятных) природных воздействий (землетрясения, пожары, затопления и паводки, аварии на гидротехнических сооружениях, экстремально высокие/низкие температуры, смерчи, цунами), а также отказы по общей причине из-за экстремальных воздействий и их эффектами.

2. В случае, когда на одной площадке имеется несколько объектов, - учет множественных отказов систем нескольких объектов одновременно (учет взаимовлияния объектов на одной площадке).

3. Учет потери энергоснабжения как на одном объекте, так и на всей площадке в случае нескольких объектов, определение критического времени восстановления энергоснабжения до наступления аварии.

4. Учет возможности функционирования персонала после аварии («обитаемость» пультов/щитов управления).

5. Учет всех возможных состояний объекта или по прежней мере наиболее неблагоприятных по отношению к последствиям воздействий.

6. Учет возможного разрушения инфраструктуры около объекта, включая линии связи и передачи информации.

7. Затруднения восстановления (включая доступ к щитам управления) из-за разрушения конструкций, высокой мощности дозы облучения, радиоактивного загрязнения (или химическими активными веществами).

[1]Государственный научно-технический центр ядерной и радиационной безопасности, Украина. E-mail: ma_yastreb@mail.ru

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Modeling failures in multicomponent systems with dependencies

Simon Anastasiadis, Richard Arnold, Stefanka Chukova[1]
Yu Hayakawa[2]

We propose a new model for multicomponent system accumulating damage due to a series of shocks.

1 Introduction

There is a wide range of models in reliability literature, e.g., [3] describing the behavior of complex systems. Typically component independence is assumed, but it is usually not realistic or difficult to justify. Ignoring the failure dependencies could lead to misrepresentation of the true system reliability.

2 Model formulation

Consider a system made up of n components, as in [1]. We can group these n components into $N = 2^n - 1$ nonempty subsystems, each of which experiences separate shock processes which modify the joint failure distribution of the components of the subsystem. We assume that this modification is multiplicative, i.e., the survival function of the whole system may be represented

$$\bar{F}(x_1, \ldots, x_n|\Psi) = \bar{F}_0(x_1, \ldots, x_n|\Psi_0) \prod_{r=1}^{N} \bar{F}_r(x_{r1}, \ldots, x_{rm_r}|\Psi_r) \tag{1}$$

The baseline survival function $\bar{F}_0(x_1, \ldots, x_n|\Psi_0)$ is the survival function in the absence of shocks, and $\{x_{r1}, \ldots, x_{rm_r}\}$ are the survival times corresponding to the m_r components of subsystem r.

We now consider a single specific subsystem r containing m_r components. It is subject to a set of L_r independent shock processes, with Poisson arrival rates $\mu_{r\ell}$ and shock intensities $\lambda_{r\ell}$. The effects of these shock processes affect all of the subsystem components equally, and are also multiplicative, so that their combined effects are presented by

$$\bar{F}_r(x_{r1}, \ldots, x_{rm_r}) = \prod_{\ell=1}^{L_r} \Lambda_{r\ell}(x_{r1}, \ldots, x_{rm_r}|\mu_{r\ell}, \lambda_{r\ell}). \tag{2}$$

Each decay function $\Lambda_{r\ell}(x_{r1}, \ldots, x_{rm_r}|\mu_{r\ell}, \lambda_{r\ell})$ takes the same functional form described below. Suppressing the subsystem index r and shock process ℓ, assuming that $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m$, and indexing the Poisson shock arrival times, so that in the interval $[x_{i-1}, x_i)$ there are k_i

[1]Victoria University of Wellington, New Zealand, School of Mathematics, Statistics and Operations Research. E-mail: (simon.anastasiadis, richard.arnold, stefanka.chukova)@msor.vuw.ac.nz

[2]School of International Liberal Studies, Waseda University, Japan. E-mail: yu.hayakawa@waseda.jp

shocks at times $\theta_{i1}, \ldots, \theta_{ik_i}$, conditional on a particular realisation Θ of the process the decay function is given by

$$\begin{aligned}\Lambda(x_1, \ldots, x_m|\Theta, \lambda) &= \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k_i} \exp\left(-\lambda\left[\sum_{s=i}^{m} x_s - (m-i+1)\theta_{ij}\right]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k_i} \Lambda_{ij}(x_i, \ldots, x_m|\theta_{ij}, \lambda),\end{aligned} \tag{3}$$

i.e., after a shock the survival function is scaled by an additional factor of $e^{-\lambda x}$.

We obtain the marginal decay function $\Lambda(x_1, \ldots, x_m|\mu, \lambda)$ as

$$\Lambda(x_1, \ldots, x_m|\mu, \lambda) = \exp\left(-\mu x_m + \sum_{i=1}^{m} \mu e^{-\lambda\sum_{s=i}^{m} x_s} \frac{e^{\lambda(m-i+1)x_i} - e^{\lambda(m-i+1)x_{i-1}}}{\lambda(m-i+1)}\right) \tag{4}$$

Equation(4) is the principal function describing the effect of shocks under our model.

Now, we compute the survival function of a system due to all of its subsystems:

$$\begin{aligned}\bar{F}(x_1, \ldots, x_n|\Psi_0, \{\mu, \lambda\}) = \bar{F}_0(x_1, \ldots, x_n|\Psi_0) \exp\Big(\sum_{r=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{L_r}\Big(-\mu_{r\ell}x_{r(m_r)} \\ + \sum_{i=1}^{m_r} \mu_{r\ell} e^{-\lambda_{r\ell}\sum_{s=i}^{m_r} x_{r(s)}} \frac{e^{\lambda_{r\ell}(m_r-i+1)x_{r(i)}} - e^{\lambda_{r\ell}(m_r-i+1)x_{r(i-1)}}}{\lambda_{r\ell}(m_r-i+1)}\Big)\Big),\end{aligned} \tag{5}$$

where $x_{r(1)}, \ldots, x_{r(m_r)}$ are the order statistics of the survival times of the m_r components of subsystem r.

One important special case of Eq.(5) occurs when there is only one shock process for each subsystem, and that shock process has infinite shocks $\lambda_r \to \infty$. Then the survival function is

$$\begin{aligned}\bar{F}(x_1, \ldots, x_n|\Psi) = \prod_{r=1}^{N} \exp\left(-\mu_{r\ell}x_{r(m_r)}\right) = \exp\Bigg(-\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i - \sum_{i<j}\mu_{ij}\max(x_i, x_j) \\ - \sum_{i<j<k}\mu_{ijk}\max(x_i, x_j, x_k) \ldots - \mu_{1\ldots n}\max(\forall i : x_i)\Bigg),\end{aligned} \tag{6}$$

which is the Marshall-Olkin multivariate exponential model. A further restriction to a two component system gives the standard Marshall-Olkin Bivariate exponential model [2].

Also, we propose an approach to simulating the performance of the system and provide several illustrative examples.

References

[1] *Anastasiadis S., Arnold R., Chukova S., Hayakawa Y.*, Failure Model for Multi-Component Systems with Damage Accumulation, Advanced Reliability Modelling IV, ed S. Chukova, J.Haywood, T. Dohi, McGraw Hill 2010, 9–16

[2] *Barlow R. E., Proschan F.*, Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models. TO BEGIN WITH, Silver Spring, MD, 1981.

[3] *Yu H., Chu C., Châtelet E., Yalaoui F.*, Reliability optimization of a redundant system with failure dependencies. Reliability Engineering and System Safety, 2005, v. 92, p. 1627–1634.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Markov-modulated samples and their application in reliability tasks

Alexander M. Andronov[1]

Maximum likelihood estimates are considered for a case of Markov-modulated samples.

1 Introduction

The classical sample theory supposes that sample's elements are identically distributed and independent (i.i.d.) random variables. But lately a great attention has been granted to dependence in probabilistic structures, for example, dependence between interarrival times of various flows, between service times, etc. Usually it is described by the so-called Markov-modulated processes [1]. They are used widely in environmental, medical, industrial, and sociological researches. We restrict ourselves by a case when elements of the sample are positive random variables. It is convenient to consider them as lifetimes of unreliable elements.
Let us consider sample elements $\{X_i, i = 1, ..., n\}$ modulated by a finite continuous-time Markov chain [1, 2]. For simplicity we say that the elements operate in the so-called random *environment*. The last is described by an "external" time-continuous Markov chain $J(t)$, $t \geq 0$, with a final state space $E = \{1, 2, ..., k\}$. Let $\lambda_{i,j}$ be the transition rate from state i to state j. Additionally, n binary identical elements are considered. Each component can be in two states: *up* (1) and *down* (0). The elements of system fail one by one, in random order. For a fixed state $i \in E$, all n elements have the same failure rate $\gamma_i(t)$ and are stochastically independent. When the external process changes its state from i to j at some random instant t, all elements, which are alive at time t, continue their life with new failure rate $\gamma_j(t)$. If on interval (t_0, t) the random environment has state $i \in E$, then the residual lifetime $\tau_r - t_0$ (*up*-state) of the r-th component, $r = 1, 2, ..., n$, has a cumulative distribution function (CDF) with failure rate $\gamma_j(t)$ for time moment t, and the variables $\{\tau_r - t_0, r = 1, 2, ..., n\}$ are independent . More precisely, this CDF will be

$$\mathbf{P}\Big\{\tau_r \leq t|\tau_r > t_0, \;\; J(u) = i, \;\; t_0 \leq u \leq t\Big\} = 1 - exp\Big(-\int\limits_{t_0}^{t} \gamma_i(u)du\Big), \;\; 0 \leq t_0 < t.$$

In the above described process elements of a sample $\{X_i, i = 1, ..., n\}$ are no i.i.d. anymore. Let $N(t)$ be a number of elements which are in the *up* state at time moment t. Obviously $\mathbf{P}\{N(0) = n\} = 1$. We denote for $r \in \{1, ..., n\}$, $i, j \in E$ $p_{r,i,j}(t_0, t) = \mathbf{P}\{N(t) = r, \; J(t) = j|N(t_0) = r, \; J(t_0) = i\}$. Expressions for those probabilities have been given in [3].
Our paper is devoted to a problem of statistical estimation of the descried process parameters. For that we make the following suppositions. Firstly, parameters of the Markov-modulated processes $\{\lambda_{i,j}\}$ are known. Secondly, with respect to hazard rates $\gamma_i(t)$, a parametrical setting takes place: all $\gamma_i(t)$ are known, accurate to m parameters $\beta^{(i)} = (\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, ..., \beta_{m,i})^T$, so we will write $\gamma_i(t; \beta^{(i)})$. Further, we use the $m \times k$ - matrix $\beta = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, ..., \beta^{(m)})$

[1]Transport and Telecommunication Institute. E-mail: lora@mailbox.riga.lv

of unknown parameters. Thirdly, with respect to the available sample: sample elements are fixed corresponding to their appearance, so the order statistics $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ are fixed. Finally, the states of the random environment $J(t)$ are known only for time moments $0, X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$. We wish to get the maximum likelihood estimates for the unknown parameters $\beta^{(i)} = (\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, ..., \beta_{m,i})^T$, $i = 1, ..., k$.

2 Maximum likelihood estimates

In the considered case, besides the initial state $j(0)$ of $J(0)$, a sample of size n is given: $(x, j) = \{(x_{(r)}, j(r)), \quad r = 1, ..., n\}$, where $x_{(r)}$ is the r-th order statistic of the sample and $j(r) = J(x_{(r)})$ is a corresponding state of the random environment. Setting $x_{(0)} = 0$ we rewrite the log-likelihood function as

$$ll(\beta; (x, j)) = \sum_{r=0}^{n-1} \big[ln p_{n-r,j(r),j(r+1)}(x_{(r)}, x_{(r+1)}; \beta) + ln(n-r) + ln\gamma_{j(r)}(x_{(r+1)}; \beta^{(j(r))})\big].$$

Considering gradients with respect to the column vectors $\beta^{(i)}, i = 1, ..., k$, we get maximum likelihood equations

$$\frac{\partial}{\partial \beta^{(i)}} ll(\beta; (x, j)) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{p_{n-r,j(r),j(r+1)}(x_{(r)}, x_{(r+1)}; \beta)} \frac{\partial}{\partial vec\beta^{(i)}} p_{n-r,j(r),j(r+1)}(x_{(r)}, x_{(r+1)}; \beta) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{\gamma_{j(r)}(x_{(r+1)}; \beta^{(j(r))})} \frac{\partial}{\partial \beta^{(j(r))}} \gamma_{j(r)}(x_{(r+1)}; \beta^{(j(r))}) \delta_{i,j(r)} = 0, \quad i = 1, ..., k,$$

where $\delta_{i,j(r)}$ is the Kronecker symbol.
There has been suggested a numerical method of a solution for this equation system. The elaborated technique is illustrated by a reliability estimation of the coherent series-parallel system, which operates in alternating random environment. The example shows how the *signature* approach [4, 5] can be applied for a case of a random environment existence.

References

[1] *Pacheco A., Tang L.C., Prabhu N.U..*, Markov-Modulated Processes & Semiregenerative Phenomena. World Scientific, New Jersey, London, Singapure, 2009.

[2] *Kijima M.*, Markov Processes for Stochastic Modeling. Chapman & Hall, London, 1997.

[3] *Andronov A.M., Gertsbakh I.B.*, Signatures in Markov-modulated processes. Unpublished.

[4] *Samaniego F.*, System Signatures and their Application in Engineering Reliability. Springer, New York, Berlin, 2007.

[5] *Gertsbakh I.B., Shpungin Y.*, Models of Network Reliability: Analysis, combinatorics, and Monte Carlo. CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2010.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

An approach to statistical analysis of censored data collected in survey sampling[1]

Belyaev Yuri K.[2]

Some of results obtained together with Kriström Bengt in paper [1, 2] are given in this contribution.

1 Introduction

We consider survey sampling in a population $\mathfrak{P}$ where randomly sampled individuals respond to questions on prices of new public goods or improvements of environment, e.g. quality of water, reliability of an equipment, etc. The individuals are requested to state freely chosen intervals and additionally some of them are also requested to choose in the stated interval an subinterval between suggested brackets. Each individual has his own optimal price which is a hidden point in the stated interval. We call these intervals self-selected and the unobserved points the true points. It is necessary to evaluate the distribution of the true points in $\mathfrak{P}$. One can consider self-selected intervals as censoring. In the Survival Analysis it is usually assumed that the censoring intervals are independent of true points and there are noncensored true points. The self-selected intervals may depend on the positions of their true points, and the ends of these intervals are usually rounded to simple sums of common coins or paper money. Most of results in the Survival Analysis can not be applied to such collected data.

2 Basic assumptions and sampling design

The following assumptions are introduced:

(i) each self-selected interval contains corresponding true point;

(ii) presence of dependency is admitted between the true point and the containing it self-selected interval, but different pairs of the points and intervals are values of independent identically distributed random variables (i.i.d. r.v.s);

(iii) the additional request, to select containing the true point between suggested brackets, does not change the value of the true point.

The one sample design was suggested in [3]. We consider the following two-step sampling design. In the first step each of n_1 randomly sampled individuals is only requested to state self-selected intervals. Let $\mathbf{y}_1^{n_1} = \{\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{n_1}\}$ be n_1 stated intervals $\mathbf{y}_i = (y_{Li}, y_{Ri}]$. Due to rounding the same intervals can be stated several times. Let $\mathcal{U}_{m(n)} = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{m(n)}\}, \mathbf{u}_h = (u_{Lh}, u_{Rh}]$, be collection of different intervals in $\mathbf{y}_1^{n_1}, \mathbf{u}_{h_1} \neq \mathbf{u}_{h_2}$, if $h_1 \neq h_2$. Intervals in $\mathcal{U}_{m(n)}$ are ordered by their left ends and if the left ends coincide then they are ordered by their right ends.

We can consider $\mathbf{y}_1^{n_1}$ as a realisation of multinomial process $\mathbf{Y}_1, ..., \mathbf{Y}_{n_1}, ...$ where $\mathbf{Y}_i$ are i.i.d. intervals. We call $p_c(n) = P[\mathbf{Y}_n \in \mathcal{U}_{m(n)}], n > n_1$, the coverage probability. We have found

[1]This work was supported by projects at the Department of Forest Economics, SLU.

[2]Swedish University of Agricultural Sciences (SLU) and Umeå University.
E-mail: yuri.belyaev@sekon.slu.se

unbiased estimate $\hat{p}_c(n_1), E[\hat{p}_c(n_1)] = p_c(n_1) < p_c(n)$ if $n_1 < n$. The value of $\hat{p}_c(n_1)$ can be used to finish data collecting in the first step.

The ordered ends of all intervals $\mathbf{u}_h = (u_{Lh}, u_{Rh}] \in \mathcal{U}_{m(n_1)}$ generate disjoint intervals $\mathcal{V}_k = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k\}$ called division intervals, $\mathbf{v}_j = (v_{Lj}, v_{Rj}]$. Two following sets of indexes h for $\mathbf{u}_h \in \mathcal{U}_{m(n)}$ and j for $\mathbf{v}_j \in \mathcal{U}_{m(n)}$, are defined: $\mathcal{D}_j = \{h : \mathbf{v}_j \subseteq \mathbf{u}_h\}$ and $\mathcal{C}_h = \{j : \mathbf{v}_j \subseteq \mathbf{u}_h\}$.

In the second step randomly sampled individuals state their self-selected intervals. The stated intervals are included into data collected in the second step only if they coincide with one of intervals in $\mathcal{U}_{m(n)}$. The i-th individual, who has stated $\mathbf{y}_i = \mathbf{u}_{h_i} \in \mathcal{U}_{m(n)}$, is to suggest point out the interval $\mathbf{v}_{j_i}, j_i \in \mathcal{C}_{h_i}$ that contains his true point x_i. Individuals may avoid to answer to this additional question. The data collected in the second step is the list $\mathbf{d2}_{n\cdot 2} = \{\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_{n\cdot 2}\}$ with triplets $\mathbf{z}_i = \{i, \mathbf{u}_{h_i}, NA\}$ or $\mathbf{z}_i = \{i, \mathbf{u}_{h_i}, \mathbf{v}_{j_i}\}$, NA is "no answer"to the additional question. We call these triplets singles and pairs respectively. Let $n_{p2} = \#(\mathbf{z}_i = \{i, \mathbf{u}_{h_i}, \mathbf{v}_{j_i}\}), n_{s2} = \#(\mathbf{z}_i = \{i, \mathbf{u}_{h_i}, NA\})$. The list with pairs can be used to estimate conditional probabilities $w_{hj} = P[H_i = h \mid X_i = x_i \in \mathbf{v}_j] \in W_{mk}$, where H_i is the r.v. which values are indexes: h of the stated interval $\mathbf{y}_i = \mathbf{u}_h$, and j of the pointed out interval $\mathbf{v}_j$.

3 Basic results

The described above statistical model has the following log likelihood function defined on $\breve{S}_{k-1} = \{\mathbf{q}_k = \{q_1, ..., q_k\} : 0 < q_j < 1, \sum_{j=1}^{k} q_j = 1\}$,

$$\begin{aligned}\text{llik}[\mathbf{q}_k \quad | \quad \hat{W}_{mk}, \mathbf{d2}_{n\cdot 2}] &= \frac{n_{s2}}{n_{\cdot 2}} \sum_{h=1}^{m} \frac{t_{sh}}{n_{s2}} \text{Log}\left[\sum_{j \in \mathcal{C}_h} \hat{w}_{hj} q_j\right] \\ &+ \frac{n_{p2}}{n_{\cdot 2}} \sum_{j=1}^{k} \frac{c_{pj}}{n_{p2}} \text{Log}[q_j] + \frac{1}{n_{\cdot 2}} \sum_{i=1}^{n_{\cdot 2}} \text{Log}[\hat{w}_{h_i j_i}] I[\mathbf{z}_i = \{i, \mathbf{u}_{h_i}, \mathbf{v}_{j_i}\}]. \qquad (1)\end{aligned}$$

Theorem 1. *The considered statistical model possesses the following properties:*

(i) *all standard regularity properties are valid;*

(ii) *the log likelihood* (1) *is concave function of* $\mathbf{q}_k \in S_{k-1}$;

(iii) *the unique ML-estimator* $\check{\mathbf{q}}_k$ *of* $\mathbf{q}_{trk}$ *exists, and consistent as* $n_{\cdot 2} \to \infty$;

(iv) *the normed deviations* $\sqrt{n_{\cdot 2}}(\check{\mathbf{q}}_k - \mathbf{q}_{trk})$ *can be consistently estimated by using resampled copies of data* $\mathbf{d2}_{n\cdot 2}, \mathbf{q}_{trk} = \{q_{tr1}, ..., q_{trk}\}, q_{trj} = \mathbf{P}[X_i \in \mathbf{v}_j]$.

Numerical experiments support the new approach to data analysis.

References

[1] *Belyaev Y.K. and Kriström* B., Approach to Analysis of Self-selected Interval Data. CERE WP, 2010, N 2, 1–34.

[2] *Belyaev Y.K. and Kriström* B., Analysis of contingent valuation data with self-selected rounded WTP-intervals collected by two-step sampling plans. Proceedings of the 9^{th} Conference on Multivariate Statistics. Tartu, 2011. (In print, pp 14).

[3] *Håkansson* C., A new valuation question - Analysis of and insights from interval open ended data in contingent valuation. Environmental and Resource Economics, 2008, v. 39, N 2, 175–188.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Do the Lifetimes with Periodic Rates live in Reliability?

Boyan N. Dimitrov[1]

In the paper we discuss the question if life times with periodic failure rates deserve to be studied and applied in Reliability theory. Moreover, we are confident that this class of probability distributions is a natural ancestor of the exponents.

1 Introduction

Failure rates of increasing, decreasing, or bathtub shapes are most popular in Reliability theory. My research, in collaboration with numerous colleagues from Kettering university and other institutions on properties of probability distributions used in reliability and information technology models lead me to a new class of life time distributions called Almost-Lack-of-Memory class. These distributions have periodic failure rates (PFR). In my talk I show numerous examples where these probability distributions can be met. Also established physical, analytical and probability properties of these distributions and related processes are discussed. All of these properties are equivalent. They can be used in engineering, economics, population growth, environmental modeling. Its reflection on insurance, risk and cost analysis is of interest too.

2 Examples

The following examples illustrate cases where life times with PFR:

Periodic maintenance with replacements;

Service on non-reliable server;

The time to first event in a periodic Non-Homogeneous Poisson Process (NHPP);

Periodicity in Earth' life generates periodic NHPPs namely *Car accidents, Hurricane activities, Forest fires, Flooding related events, House and car sales*;

Extended in time Bernoulli Trials (BTs) generate periodic NHPP.

3 Basic results

Here we list part of the results for life times with PFR. More can be found in [1], ... , [5].

Theorem 1. (A) *The cdf of the waiting time X up to the first event in a periodic NHPP has the form*

$$F_X(t) = 1 - \alpha^{\left[\frac{t}{c}\right]} \left(1 - (1-\alpha) F_Y(t - \left[\frac{t}{c}\right] c)\right), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

[1]Kettering University, Department of Mathematics. E-mail: bdimitro@kettering.edu

where $\alpha \in [0, 1]$, and $F_Y(y)$ is a cdf with support on the interval $[0, c)$. These are determined by the equations

– $\alpha = e^{-\int_0^c \lambda_X(u)\, du}$;

– *The r.v. Y is defined either by its cdf*

$$F_Y(y) = \frac{1}{1 - e^{-\int_0^c \lambda_X(u)\, du}} \left\{ 1 - e^{-\int_0^y \lambda_X(u)\, du} \right\}.$$

It is said that a r.v. X with a cdf of the form (1) belongs to the class of $ALM(\alpha, c, F_Y(y))$ distributions, where α, c , and $F_Y(y)$ are parameters of this class of probability distributions;

(B) *If a r.v. X has the distribution given by (1), then it satisfies*

$$\mathbf{P}\{X - nc \geq t \mid X \geq nc\} = \mathbf{P}\{X \geq t\} \tag{2}$$

for all $t \geq 0$, and for arbitrary integer $n = 0, 1, 2, \ldots$. This property is called as "Almost-Lack-of-Memory (ALM) property-[3];

(C) *If a life time r.v. X has periodic hazard distribution function of period $c > 0$ then its cdf $F_X(x)$ has the form (1).*

(D) *If a r.v. $X \sim ALM(\alpha, c, F_Y(y))$ distribution, then*

$$\mathbf{P}\{X - (nc + y) < t \mid X \geq nc + y\} = \mathbf{P}\{X - y < t \mid X \geq y\} \tag{3}$$

holds for all $t \geq 0$, for arbitrary $y \in [0, c)$, and for arbitrary integer $n = 1, 2, \ldots$.

This property explains that the ALM property is irrelevant in respect of the location of the origin within the interval $[0,\ c)$ in the scale of the periodic NHPP, discussed in section 2.

Acknowledgments. The author is grateful to all coauthors and followers for valuable contributions to this subject.

References

[1] *Chukova S., Dimitrov B. and Garrido J.*, Renewal and non-homogeneous Poisson processes generated by distributions with periodic failure rate. Statistics & Probability Letters, 1993, v. 17, p. 19 - 25.

[2] *Dimitrov B. and Chukova S.*, On the distributions having the almost lack-of-memory property. J. Appl. Prob. , 1992, v. 429, N 3, p. 691 - 698.

[3] *Dimitrov B., Chukova S. and Green D.*, Probability distributions in periodic random environment and their applications. SIAM J. Appl. Math., 1997, v. 57, N 2, p. 501-517.

[4] *Dimitrov B., Rykov V. and Krougly Z.*, Periodic Poisson Processes and Almost-lack-of-memory Distributions. Automation and Remote Control, 2004, v. 65, N 10, p. 1597-1610. (Translated from Russian)

[5] *Dimitrov B.*, Distributions with Periodic Failure Rats In Reliability, Proceedings of The 7-th Internatiional Conference on "Mathematical Methods in Reliability": Theory. Methds. Applications. (MMR2011). Edited by Lirong Cui and Xian Zhao. Beijing Institute of Technology Press, Paper id: 068, Beijing, 2011, p. 801-808.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Minimax reliability of aircraft and airline

M. Hauka, Yu. Paramonov [1]

Minimax approach to inspection program development problem under stringent limitation of number of full-scale fatigue tests of airframe is discussed

1 Introduction

Development of inspection program for limitation of fatigue failure probability (FFP) of fatigue-prone aircraft (AC) and fatigue failure rate (FFR) of airline (AL) is a problem of high priority. This problem is aggravated by stringent limitation of number of full-scale fatigue tests (only one or two airframe are tested). In previous authors publications [1-2] minimax solution of the problem was offered in assumption that in exponential approximation of fatigue crack size growth function, $a(t) = a_0 \exp(Qt)$, only one parameter of fatigue crack trajectory (PFCT) is unknown. Here we consider the case of two unknown parameters.

2 Mathematical model of the problem

Probability of failure (PF) of fatigue-prone aircraft (AC), failure rate (FR) and gain (GL) of airline (AL) for specific inspection program can be calculated using Markov Chains (MC) and Semi-Markov process (SMP) theory if parameters of corresponding models are known. Exponential approximation of fatigue crack size growth function, $a(t) = a_0 \exp(Qt)$, where a_0, Q are random variables , is used. Estimation of the parameter of distribution function of these variables, θ, and the choice of inspection program under condition of limitation of PF or FR can be made using results of observation of some random fatigue cracks in full-scale fatigue test of the airframe. For processing of acceptance AC type test, when redesign of new AC should be made if some reliability requirements are not met, the minimax decision is used. The process of operation of AC is considered as absorbing MC with $(n+4)$ states. The states $E_1, E_2, ..., E_{n+1}$ correspond to AC operation in time intervals $[t_0, t_1), [t_1, t_2), ..., [t_n, t_{SL})$, where n is an inspection number, $t_{SL}$is specified life (SL), i. e. AC retirement time. States E_{n+2}, E_{n+3}, and E_{n+4} are absorbing states: AC is descarded from service when the SL is reached or fatigue failure (FF) or fatigue crack detection (CD) take place. In corresponding matrix for operation process of AL the states E_{n+2}, E_{n+3} and E_{n+4} are not absorbing but correspond to return of MC to state E_1(AL operation returns to first interval). In matrix of transition probabilities of AC ,P_{AC} , there are three units in three last lines in diagonal, but for corresponding lines in matrix for AL, P_{AL}, the units are in first column, corresponding to state E_1. Using P_{AC} we can get the probability of FF of AC and cumulative distribution function, mean and variance of AC life. Using P_{AL} we can get the stationary probabilities of AL operation $\{\pi_1, ..., \pi_{n+1}, \pi_{n+2}, ..., \pi_{n+4}\}$. Here π_{n+3}defines the part of MC steps, when FF takes place and MC appears in state E_{n+3}. The FR, λ_F , and the gain of this process, g, are calculated using the theory of SMP with

[1] Riga Technical University, Aviation Institute. E-mail: maris.hauka@gmail.com, yuri.paramonov@gmail.com

reword, taking into accout the reword of succesful operation in one time unit, the cost of acquisition of new AC after SL, FF or CD take place,... If the gain is measured in time unit then $L_{n+3} = g/\pi_3$ is a mean time between FF; the intensity of fatigue failure $\lambda_F = 1/L_{n+3}$.

If we need only to provide AC reliability, R, then the vector $t = [t_1, t_2, ..., t_n, t_{SL}]$ should be defined by a p-set function $t(\hat{\theta})$ of estimate of parameter θ [1]. This means that $p_f(\theta, t) = \Sigma_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(T_{i-1} \leq T_d < T_c < T_i)$ should not exceed some small value $p = 1 - R$ for all unknown θ. Here random vector $[T_1, T_2, ..., T_n, t_{SL}] = t(\hat{\theta})$, T_d, T_c are times when fatigue crack become detectable (with probability 1) and critical (fatigue failure) correspondingly. But in general case we need to limit FR of AL and to have a good gain. Consider the simplified case when all intervals are equal. Then the procedure of choice of n is the following. If θ is known we calculate the gain as function of n,$g(n)$, and choose the number n_g corresponding to the maximum of gain : $n_g = \arg\max g\,(n)$. Then we calculate expected value of intensity of fatigue failure, $\lambda_F(n)$, and choose n_λ in such a way that for any $n \geq n_\lambda$ the function $\lambda_F(n)$ will be equal or less than some value λ_{FD} (the designed intensity of fatigue failure): $n_\lambda = \min\{n : \lambda_F(n) \leq \lambda_{FD}, \text{ for all } n \geq n_\lambda\}$. And finally we should choose $n = \max(n_g, n_\lambda)$. *But in fact we do not know θ and we can only get some estimate of this parameter using test results, $\hat{\theta}$.* So real intensity will be a function of random variable, $\lambda_F(\hat{\theta}, \lambda_{FD})$. We can limit the mean value of this function if we take into account that really full-scale fatigue test is an approval test. Redesign of airframe will be made (service of aircraft of tested design version of aircraft will not be allowed) if some requirement is not met (for example, if it appears, that estimate of mean time to failure is too small). If full-scale fatigue test is approved and there is no necessity to make airframe redesign let us write $\hat{\theta} \in \Theta_0$, where Θ_0 is some part of parameter space. Corresponding expected value of fatigue failure intensity function $\mathbf{E}\{\lambda_F(\hat{\theta}, \lambda_{FD}, \Theta_0)\}$, where $\lambda_F(\hat{\theta}, \lambda_{FD}, \Theta_0) = \lambda_F(\hat{\theta}, \lambda_{FD})$ if $\hat{\theta} \in \Theta_0$ and $\lambda_F(\hat{\theta}, \lambda_{FD}, \Theta_0) = 0$ if $\hat{\theta} \notin \Theta_0$, is a function of θ, which has maximum because for “bad” θ we make redesign of airframe but for “very good” we do not need any inspection.

It is shown that for this type of approval test using minimax approach by the choice of designed λ_{FD} and Θ_0 we can meet the reliability requirement defined by specific aviation regulation. Numerical examples are given.

References

[1] *Paramonov Yu., Kuznetsov A., Kleinhofs M.*, Reliabilty of fatigue-prone airframes and composite materials. RTU, Riga, 2011, 122 pages.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

On the IFR aging of bivariate lifetime distributions under binary associative operation

Nikolai Kolev, Jayme Augusto[1]

Let us consider a pair $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ of nonnegative contionuous random variables with joint survival function $S(x_1, x_2) = \mathbf{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$ and let $S_1(x_1) = \mathbf{P}(X_1 > x_1)$ and $S_2(x_2) = \mathbf{P}(X_2 > x_2)$ be the marginal survival functions, $x_1, x_2 \geq 0$.

The dependence structure of a bivariate vector $\mathbf{X}$ can be described by unique survival copula D, defined as $D(u, v) = S(S_1^{-1}(u), S_2^{-1}(v))$, where $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ and S_i^{-1} is the right continous inverse of $S_i,\ i = 1, 2$. The triplet (S_1, S_2, D) allows for a different representation of S, useful to analyse the dependence properties between X_1 and X_2.

We need to define binary operation over real numbers. A binary operation $*$ is said to be associative if $x * (y * z) = (x * y) * z$ for all real numbers x, y, z and reducible if $x * y = x * z$ and $y * x = z * x$ iff $z = y$. Possible expressions for $x * y$ are $x + y,\ xy,\ \frac{xy}{x+y}$, see Prakasa Rao (2004) for details.

Our goal is to obtain conditions such that the function

$$S_t(x_1, x_2) = \mathbf{P}(X_1 > x_1 * t, X_2 > x_2 \# t \mid X_1 > t, X_2 > t) \tag{1}$$

is a non-increasing (non-decraesing) in $x_1, x_2 \geq 0$ for all $t \geq 0$, for possible forms the associative and reducible binary operations $*$ and $\#$, various families of copulas and different natural restrictions on the marginal lifetimes.

By setting " $*$ " and "$\#$" as " $+$ " in (1), one gets

$$\mathbf{P}(X_1 > x_1 + t, X_2 > x_2 + t \mid X_1 > t, X_2 > t) = \frac{S(x_1 + t, x_2 + t)}{S(t, t)}, \tag{2}$$

i.e. the joint survival function of the random vector

$$\mathbf{X}_t = [(X_1 - t, X_2 - t) \mid X_1 > t, X_2 > t]$$

being the pair of residual lifetimes at time $t \geq 0$.

A non-increasing (non-decreasing) nature of the ratio in (2) is strongly related to stochstic comparison between vectors $\mathbf{X}$ and $\mathbf{X}_t$. Various bivariate extensions of the IFR (DFR) property have been proposed in reliability literature (e.g. Gnedenko (1983)), underlying that different definitions of the usual stochastic order can be considered in multivariate setting, see Shaked and Shanthikumar (2007).

In fact, our interest is to offer an extended IFR (DFR) aging version of bivariate lifetime distributions and to study increasing (decreasing) behaviour of the function $S_t(x_1, x_2)$ in (1). When $S_t(x_1, x_2)$ does not depend of t, one would obtain variants of the bivariate lack of memory property, see Prakasa Rao (2004) for related results. Particular cases of the problem stated have

[1]Department of Statistics, Sao Paulo University, Brazil. E-mail: kolev.ime@gmail.com

been investigated by many authors, see for instance Finkelstein and Esaulova (2005), Bassan and Spizzichino (2005) and Li and Pellerey (2011), among others.

Some of our derivations supported by classification and examples are quite unexpected, since they show once more that there is not a direct correspondence between univariate and bivariate aging.

References

[1] *Bassan B. and Spizzichino F.* Relations among univariate aging, bivariate aging and dependence for exchangeable lifetimes. Journal of Multivariate Anaysis, 2005, v. 93, p. 313–339.

[2] *Gnedenko, B.V.* Problems in Mathematical Reliability Theory (in Russian). Radio i Sviaz, Moscow, 1983.

[3] *Finkelstein M. and Esaulova, V.* On the weak IFR aging of bivariate lifetime distributions. Applied Stochastic Models in Busines and Industry, 2005, v. 21, p. 265–272.

[4] *Li X. and Pellerey F.* Generalized Marshall-Olkin distributions and related bivariate aging properties. Journal of Multivariate Anaysis, 2011, v. 102, p. 1399–1409.

[5] *Prakasa Rao B.L.S.* On bivariate lack of memory property under binary associative operation. Communications in Statistics: Theory and Methods, 2004, v. 33, p. 3103–3114.

[6] *Shaked M. and Shanthikumar J.* Stochastic Orders. Springer, New York, 2007.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Stable identification of Markov models

Anatoli I. Michalski[1]

Identification of Markov multistate model on censored data is considered as inverse problem. Stabilization of the estimates is achieved by maximization of posterior probability for the transitions intensity matrix. This leads to penalized likelihood maximization with penalty term, derived from the natural condition on time, which the process stays in not changed state.

1 Introduction

Many reliability processes are described in terms of Markov multistate models. Functioning of a technical system, service of a fire brigade, a disease development are the examples. In each example one can fix states of “good functioning”, “good health” and “bad functioning”, “pure health” or even “structural failure”, “death”. The number of states and definitions of states depend on the problem at hand. What is in common is that transitions between the states are made at random times with intensities, depending on different covariates and, possible, on time. If the matrix of transition intensities is given, then one can calculate probability that the system made transition from state S_i to state S_j for the given time. This is direct problem, which can be solved using the set of Kolmogorov equations.

Identification of transitions intensities matrix is an inverse problem and depending on the characteristics of the data can be solved with different results. If the data present the sequence of states combined with times, when the transitions between the states were made $\{S_1, t_1, ..., S_n, t_n\}$, then the maximum likelihood estimates for transitions intensities are $\hat{\lambda}_{ij} = n_{ij}/T_i$. Here n_{ij} denotes the observed number of transitions from the state S_i to the stateS_j, T_i is the total time spent by all objects at the stateS_i.

Often the states of the objects are observed not at the moments of the transitions but at the times, not dependent on the states. The example is a set of regular investigations. In this case we know the states of the object at given times but we do not know the moment of transition and we do not observe in which states the object was between times t_j and t_{j+1}. This is a case of interval censored observations. To obtain the maximum likelihood estimates for the transition intensity matrix one is to maximize the likelihood function [1]

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{M} \prod_{j=1}^{m_i - 1} p_\lambda \left(t_{ij+1}, s_{ij+1} | t_{ij}, s_{ij}\right)$$

where M – number of observed objects, m_i – number of observations for the i–th object, t_{ij} – –moment of the j–th observation for the i–th object, s_{ij} – – the state of the i–the object at the j–the observation, $p_\lambda(u, w|t, s)$ – conditional probability to reach state $w$at time u being in state s at time t if the matrix of transition intensities is λ. The last probability can be found by solving Kolmogorov differential equations with proper initial conditions [2].

[1]Institute of control sciences RAS, Moscow. E-mail: ipuran@yandex.ru

2 Maximum likelihood estimate stabilization

Maximization of likelihood $L(\lambda)$ is an ill-posed problem [3] and some kind of regularization is to be used to stabilize the maximum likelihood estimates. To do so in a consistent way we use Bayesian reasoning. Let the matrix of transition intensities λ be random matrix with a prior density function$f(\lambda)$. Consider the likelihood functional $L(\lambda)$ as a conditional likelihood to observe the sample $\{S, T\}$ for fixed matrix λ $L(\lambda) = L(S, T|\lambda)$. A posterior density for transitions intensity matrix λ is proportional to the product of the conditional likelihood and a prior density function for the matrix λ $P(\lambda|S,T) \sim L(S,T|\lambda) f(\lambda)$. Maximization of $P(\lambda|S,T)$ on λ gives the regularized maximum likelihood estimate forλ.

It is reasonable to characterize a prior distribution of the matrix λ by probability not to change the state during given time τ. Prior probability for λ takes form $f(\lambda) \sim \exp\left(-\tau \sum\limits_i |\lambda_{ii}|\right)$ and $P(\lambda|S,T) \sim L(S,T|\lambda) \exp\left(-\tau \sum\limits_i |\lambda_{ii}|\right) = L(\lambda) \exp\left(-\tau \sum\limits_i |\lambda_{ii}|\right)$. Maximum likelihood estimates than are obtained by maximization penalized likelihood

$$Q(\lambda, \tau) = \ln L(\lambda) - \tau \sum_i |\lambda_{ii}| \underset{\lambda}{\rightarrow} \max .$$

The transition intensity matrix has a property that for any i, $\sum\limits_j \lambda_{ij} = 0$, $\lambda_{ij} \geq 0$ for $i \neq j$. From this the functional to be minimized takes form

$$Q(\lambda, \tau) = \ln L(\lambda) - \tau \sum_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \underset{\lambda_{ij} \geq 0}{\rightarrow} \max .$$

In the last functional time τ is the regularization parameter and the estimates obtained are similar to 'lasso Tibshirani' estimates for regression coefficients [4].

The approach proposed allows to incorporate in the estimate additional a prior information about the states. If the typical time of stay in the state i is τ_i, then a prior distribution for matrix λ can be $P(\lambda) = \exp\left(-\sum\limits_i |\lambda_{ii}| \tau_i\right)$, which leads to maximization problem of the new penalized likelihood in form

$$Q(\lambda, \tau) = \ln L(\lambda) - \sum_i \tau_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \underset{\lambda_{ij} \geq 0}{\rightarrow} \max .$$

References

[1] *Commmmenges D.*, Inferencefor multi-state models from interval-censored data. Stat Methods Med Res., 2002, v. 11, N 2, p. 167–182.

[2] *Cox D.R., Miller H.D.*, The theory of stochastic processes. Chapman & Hall; 1965.

[3] *Engl H.W., Hanke M., and Neubauer A.*, Regularization of inverse problems, volume 375 of Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.

[4] *Tibshirani R.*, Regression shrinkage and selection via the lasso. Journal of the Royal Statistical Society, Series B., 1996, v. 58, p. 267-288.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Reliability, Risk, Safety: Management and Control

Vladimir V. Rykov[1]

The talk has not pure mathematical, but mostly methodological and terminological character. Term “Reliability” arise in the middle of last cetury, and during long time different specialists uses this term for different characteristics of reliability and only after Gnedenko’s definition this term became recognized over all scientific and engineering comunity. Now analogous situation takes place concerning terms “Risk” and “Safety”. There are many specialists, who deals with these notions, however uses different their meanings. Review of documents and papers on these subject shows the absence of unique terminology and understanding of these topics. The strong notions for these phenomena and their characteristics, as well as tools for their measurements are discussed. The main problems in Reliability, Risk and Safety analysis is not only to evaluate their different characteristics, but also to find the methods for their improvements. It could be done in terms of management and control. Under management it is supposed some finantial, organizational, asdministrative, juristical and others decisions that should be done in order to improve the relevant characteristics, while control means operative technical decisions with the same aims. Some special mathematical tools for these problems description and solution are discussed.

[1]Gubkin Russian Oil & Gas University, Leninsky prospect, 65, Moscow 119991, Russia. E-mail: vladimir_rykov@mail.ru

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Complete calculation of disconnection probability in planar graphs

Gurami Sh. Tsitsiashvili[1]

A problem of a calculation of a connectivity probability in random graphs with unreliable arcs is considered in manifold articles and monographs devoted to the reliability theory. It occurs in an analysis of electrotechnical devices, computer networks and has manifold applications to a research of honeycomb structures.

But algorithms devoted to upper and low estimates of the connectivity probability are constructed for general type networks on a base of maximal systems of disjoint frames, accelerated algorithms of a calculation of reliability polynomial coefficient, the Monte-Carlo method with some combinatory formulas and the transfer matrix method lead to large complexity and so it is worthy to develop asymptotic methods.

In this paper an analog of Burtin-Pittel asymptotic formula for disconnection probability of random graph with high reliable arcs is constructed. Its parameters are the minimal number D of arcs in cross sections and the number C of cross sections with volume D. A definition of D for a random port demands to find a maximal flow and has cubic complexity. But a definition of C has geometric complexity.

So widely used planar graphs are considered for which it is proved that a definition of coefficients D, C has no more than cubic complexity by a number of faces. And there is a lot of graphs for which this complexity is linear and smaller. These results are based on a consideration of dual graphs in which cross sections generate cycles. Numerical experiment confirms an accuracy and a performance of suggested method.

Consider non oriented connected graph G with finite sets of nodes U and arcs W. Suppose that each pair of nodes in G may be connected no more than single arc and there are not loops. Suppose that graph arcs work independently with probabilities $p(w),\ w \in W$.

Theorem 1. *If* $\overline{p}(w) = 1 - p(w) = h,\ w \in W$, *then graph disconnection probability*

$$\overline{P} \sim Ch^D,\ h \to 0. \tag{1}$$

Theorem 1 is a generalization of the Burtin-Pittel asymptotic formula.

Theorem 2. *The set of arcs which do not belong to any cycle coincides with the set of cross sections with* $D = 1$.

Assume that the graph G is planar and its each arc belongs to some cycle. Arcs of planar graph divide a plane into faces. Confront the graph G its dual graph G^*. Each face z in G accords the node z^* in G^*, each arc w in G belonging faces z_1, z_2, accords an arc w^* connecting nodes $z_1^*,\ z_2^*$ in G^*.

A set of arcs $\{w_1, \ldots, w_d\}$ in G accords some subgraph R^* in G^*. For its definition each arc $w_i,\ 1 \le i \le d$, accords a pair of faces which contain this arc. Then this pair of faces accords a pair of nodes in R^* connected by the arc w^*. Say that the graph R^* is generated by the set of arcs $\{w_1, \ldots, w_d\}$.

[1]IAM FEB RAS, 690041, Russia, Vladivostok, Radio str. 7, E-mail: guram@iam.dvo.ru

Theorem 3. *The set of cross sections $\mathcal{L}_*$ consists of all sets of arcs $\{w_1, \ldots, w_d\}$, which generate cycles with minimal length D^* in the dual graph G^* and $D = D^* \le 5$.*

This statement is a corollary of the Whithney theorem and the Euler formula.

Suppose that elements a_{ij} of the matrix A define a number of arcs which belong to $z_i \cap z_j,\ i \ne j,\ a_{ii} = 0$, in the planar graph G with n faces and m arcs.

Corollary 1. *If $\max\limits_{1 \le i,j \le n} a_{ij} > 1$, then*

$$D = 2,\ C = \frac{1}{4} \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}(a_{ij} - 1) \tag{2}$$

and a complexity of constants D, C calculation by the formula (2) is squared by n. If for $i < j$ $a_{ij} > 1$ only for $j = n$ then this complexity is linear.

Define c_i the number of cycles with length $i,\ i = 3, 4, 5$, in G^*. Elements of power $A^l,\ l > 1$, of a matrix A are denoted by $a_{ij}^{(l)}$. Harary F. and Manvel B. proved that

$$c_3 = \frac{1}{6} trA^3,\ c_4 = \frac{1}{8} \left(trA^4 - 2m - 2 \sum_{1 \le i \ne j \le n} a_{ij}^{(2)} \right),$$

$$c_5 = \frac{1}{8} \left(trA^5 - 5trA^3 - 5 \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - 2 \right) a_{ii}^{(3)} \right).$$

Corollary 2. *If $\max\limits_{1 \le i,j \le n} a_{ij} = 1$, then $D = \min(i :\ c_i > 0,\ i = 3, 4, 5),\ C = c_D$. Complexity of the constants D, C calculation is cubic by n.*

СЕКЦИЯ 5

Актуарная математика
Actuarial Mathematics

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

О некоторых задачах теории риска

Олег П. Виноградов[1]

Известно, что нахождение явного выражения для вероятности разорения в теории риска эквивалентна задаче нахождения распределения максимума случайного блуждания и стационарного распределения времени ожидания в однолинейной системе массового обслуживания. В сообщении показано, что подобная эквивалентность также имеет место и для одной задачи о баллотировке для случайных потоков (введенной автором) [5] и для нахождения математического ожидания числа частиц в ветвящемся процессе [1]. Поэтому иногда, полезно переформулировать задачу теории риска в некоторую задачу из другой стохастической модели и для ее решения использовать специфические методы, применяемые в этой модели.

К фундаментальным результатам теории риска можно отнести неравенство Лундберга, которое дает верхнюю оценку вероятности разорения. Известно несколько доказательств неравенства Лундберга. Предлагается способ доказательства этого неравенства и его различных обобщений и уточнений, основанный на оценке решений интегральных уравнений [2]. Заметим, что этот способ дает возможность получать оценки ряда вероятностных характеристик, которые являются решением линейных интегральных уравнений и, в частности, функции восстановления.

Обычно в литературе предполагается, что длины интервалов времени между соседними несчастными случаями (или исками) являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Представляет интерес отказаться от требования одинаковой распределенности интервалов между исками и рассматриваемый процесс становится в некотором смысле неоднородным процессом. Одна задача Я.Галамбоша [6] является частным случаем такого неоднородного процесса риска. В работе [4] получены явные выражения для совместного распределения момента разорения и номера выплаты, приводящей к разорению в неоднородном процессе риска. Обратим внимание на то, что, помимо этого, полученные результаты, позволяют рассмотреть ряд достаточно общих моделей функционирования страховой компании (например, рассмотреть случай зависимых и неодинаково распределенных интервалов между выплатами, причем величины выплат также неодинаково распределены и имеют достаточно общие функции распределения). Эти результаты могут также найти приложения в теории массового обслуживания. Более подробно о возможностях вышеупомянутых обобщений см. в [3].

Список литературы

[1] *Виноградов О.П.*, Ветвящийся процесс с превращениями, зависящими от возраста. Теория вероятностей и ее применения. 1964, т. 9, в. 1, с. 146–152.

[2] *Виноградов О.П.*, Об одном элементарном методе получения оценок вероятности разорения. Обозрение прикладной и промышленной математики. 1998, т. 5, в.1, с. 134–140.

[1]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: `ovinogradov@mail.ru`

[3] *Виноградов О.П.*, Вероятность разорения страховой компании в случае, когда интервалы между моментами выплат имеют неодинаковые показательные распределения. Теория вероятностей и ее применения, 1998, т. 43, в. 2, с. 352–357.

[4] *Виноградов О.П.*, О совместном распределении распределение момента разорения и номера выплаты, приводящей к разорению, в неоднородном процессе риска. Теория вероятностей и ее применения, 2006, т. 51, в.3, с. 465–475.

[5] *Виноградов О.П.*, Задача о баллотировке для случайных потоков и ее связь с задачами теории риска. Вестник Московского Университета, сер.15, Вычислительная математика и Кибернетика, 2010, N 3, с. 37–43.

[6] *Галамбош Я.*, Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Управление инвестициями в страховой компании

Юлия С. Дубинина[1]

В работе дается описание динамики капитала страховой компании с учетом инвестиций. Найдено оптимальное решение в классе двухступенчатых стратегий.

1 Введение

Важная задача при анализе финансовой устойчивости страховой компании состоит в том, чтобы правильно организовать инвестиционную политику компании. В диссертации А.О. Куркиной ([1]) находятся оптимальные решения, когда в качестве критерия оптимальности рассматривается вероятность разорения. Мы рассматриваем ту же задачу и находим оптимальное решение в классе двухступенчатых стратегий.

2 Описание модели и результатов

В нашей модели предполагается, что капитал страховой компании $R(t)$ в момент времени t описывается классическим процессом риска Крамера-Лундберга:

$$R(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} Z_j \ . \tag{1}$$

Как обычно, предполагается, что страховая компания инвестирует имеющийся в наличии капитал в рисковые и безрисковые активы. Динамика этих активов описывается уравнениями:

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)) \ , \tag{2}$$

$$dB(t) = rB(t)dt \ . \tag{3}$$

В каждый момент времени весь капитал компании перераспределяется между акциями и банковским счетом в долях $\alpha(t)$ и $1 - \alpha(t)$.

Предполагается, что в некоторый известный момент времени параметры модели меняются. При условии, что выплаты имеют показательное распределение, мы находим оптимальное решение для инвестиций в классе двухступенчатых стратегий. Это обобщает результат из диссертации А.О. Куркиной ([1]), где рассматриваются постоянные стратегии.

Список литературы

[1] *Куркина А.О.*, Стохастические модели управления инвестициями страховой компании без использования заимствований. Канд. диссертация. - М.: МИЭМ, 2011.

[1]Российский университет дружбы народов, кафедра теории вероятностей и математической статистики. E-mail: jdubinina@mail.ru

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

О применениях многотипных ветвящихся процессов к решению некоторых актуарных задач

Аброр А. Мухитдинов[1]

В работе предложены подходы по оценке ряда основных показателей демографического развития, таких как стационарного возрастного/территориального распределения населения, показателей темпа роста численности населения и т.п. и изучению их свойств, а также функционалов от траектории процесса, описывающих различные схемы актуарного финансирования страховых схем, с использованием многотипных ветвящихся процессов.

1 Введение

Рассмотрим классический процесс Гальтона-Ватсона с n типами частиц

$$\mathbf{Z}^{(r)}(t) = (Z_1^{(r)}(t), \cdots, Z_n^{(r)}(t)), \text{ где } \mathbf{Z}^{(r)}(0) = \mathbf{r} = (r_1, \cdots, r_n),\ t = 0, 1, 2, \cdots$$

Под частицами типа i будем понимать индивидуумы, возраст которых находится в интервале $(i-1, i]$. Каждая частица типа i, $i = 1, \cdots, n$ за единицу времени погибает и порождает с вероятностью l_{i+1}/l_i (l_i - показатель из таблицы смертности) одну частицу типа $i+1$, а также, если тип i принадлежит интервалу возрастов воспроизводства, порождает случайное количество ξ^i частиц первого типа. Под интервалом воспроизводства понимается множество типов $\{K, K+1, \dots M\}$, где $1 < K \leq M < n$. Здесь мы для упрощения не различаем пол индивидуума, хотя можно за счет увеличения количества типов частиц, учесть не только пол, но и региональную принадлежность, например, если есть необходимость при построении модели учесть миграцию.

Тогда, матрица средних процесса $A = [a_j^i]$ будет иметь достаточно простой вид, все элементы матрицы, кроме элементов a_{i+1}^i, $i = 1, \cdots, n-1$ и a_1^k, $k = K, K+1, \cdots M$, $1 < K \leq M < n$, будут равны нулю, а ненулевые элементы, в большинстве практических задач, будут меньше единицы.

Пусть ρ - перронов корень матрицы средних, а $\mathbf{u} = (u^1, \cdots, u^n)$ и $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ - соответственно правый и левый собственные векторы матрицы А, соответствующие перронову корню. Все элементы собственных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ неотрицательные, и могут быть подобраны так, что

$$|\mathbf{v}| = \sum_{k=1}^n v_k = 1,\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^n u^k v_k = 1.$$

Перронов корень играет роль показателя темпа роста численности населения, а вектор $\mathbf{v}$ является предельным распределением населения по возрастам.

[1]ООО "Actuarial Service Bureau". E-mail: mukhitdinov@asb.uz

2 Основные результаты

В [1], [2] получены предельные распределения оценок

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = \left(\frac{Z_i^{(r)}(t)}{|\mathbf{Z}^{(r)}(t)|}, i = 1 \div n \right), \tilde{\rho}(t) = \left(\frac{Z_i^{(r)}(t+1)}{Z_i^{(r)}(t)+1}, i = 1 \div n \right)$$

при различных предположениях изменения параметров $t, (\mathbf{u}, \mathbf{r}) \to \infty$. Также доказаны предельные теоремы для совместного распределения

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \mathbf{Z}^{(r)}(t)), i = 1 \div (n-1),$$

где $\boldsymbol{\alpha}_i$ - определенные базисные вектора подпространства, ортогонального вектору $\mathbf{v}$. Из этих результатов, как следствие, можно получить результаты [3], [4], где доказаны предельные теоремы для функционала от ветвящегося процесса вида

$$\left(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Z}^{(r)}(t) \right), \text{где} (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v}) = 0 \text{ (уравнение баланса).}$$

Данный функционал интересен тем, что он описывает поведение простейших схем социального страхования с нулевыми резервами, т.е. страховые взносы, собранные с определенного круга индивидуумов (например, трудоспособного возраста) в год, выплачиваются в тот же год получателям (например, лицам пенсионного возраста). Можно выписать и другие, более сложные функционалы от траектории процесса, описывающие различные схемы актуарного финансирования страховых схем, и изучить их свойства методами анализа ветвящихся процессов.

Список литературы

[1] *Бадалбаев И.С., Мухитдинов А.*, О предельных распределениях некоторых функционалов в многотипных ветвящихся процессах. Теория вероятностей и ее применения, 1990, т. 35, N 4, с. 642–654.

[2] *Бадалбаев И.С., Мухитдинов А.*, Предельные теоремы для некоторых функционалов в критических многотипных ветвящихся процессах. Теория вероятностей и ее применения, 1989, т. 34, N 4, с. 753–757.

[3] *Kesten H., Stigum B.P.*, Additional limit theorems for indecomposable multidimentional Galton-Watson processes. Ann. Math. Statist, 1966, v. 37, N 6, p. 1463–1481.

[4] *Athreya K., Ney P.*, Functionals of critical multitype branching processes. Ann. Probab., 1974, v. 2, N 2, p. 339–343.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Оценка вклада компоненты в общий риск по портфелю, заданному многомерным дважды стохастическим процессом

Юрий С. Хохлов[1], **Ольга И. Румянцева**[2]

В рамках решения задачи оценки риска портфеля ценных бумаг, для количественной оценки инвестиций существуют различные характеристики. Одной из них является TCE ([1]) - статистика, позволяющая оценить потери по портфелю, выходящие за пределы VaR. TCE представляет собой условное среднее количество потерь, которое может быть понесено в данный период, при условии, что потеря превышает указанное значение.

$$TCE_X(x_q) := \mathbf{E}(X|X > x_q),$$

где $x_q = \inf\{x|F_X(x) \geqslant q\} = VaR_q(X)$, которая называется условным математическим ожиданием хвоста распределения. Интерес к этой статистике обусловлен тем, что благодаря свойству когерентности, TCE очень удобна в случае, когда надо определить, какую часть от общего риска составляет риск по k-й компоненте портфеля.

Рассмотрим следующую модель: пусть $N(t) = (N_1(t), ..., N_m(t))^T$ - многомерный пуассоновский процесс с независимыми компонентами, $\lambda = 1$, $\Lambda(t) = (\Lambda_1(t), ...\Lambda_m(t))^T$ — некоторый случайный процесс с зависимыми компонентами, причём $\mathbf{E}(\Lambda_k(t)) = l_k t$, $cov(\Lambda_k(t), \Lambda_j(t)) = S_{kj}t$, $D(\Lambda_k(t)) = {S_k}^2 t$.

Рассмотрим также последовательность независимых одинаково распределенных векторов
$X_j = (X_{j1}, ...X_{jm})^T$, таких, что $\mathbf{E}(X_j) = a = (a_1, ..., a_m)^T$, и $cov(X_{ji}, X_{jk}) = \sigma_{ik}$.

Определим многомерный обобщенный процесс Кокса по правилу:

$$C_t = (C_1(t), ..., C_m(t)),\ \text{где}\ C_k(t) = \sum_{j=1}^{N_k(\Lambda_k(t))} X_{jk}.$$

(см. одномерный вариант в [2]).

Пусть $S(t) = C_1(t) + ... + C_m(t)$. Целью данной работы является оценка вклада k-й компоненты — $TCE_{C_k(t)|S}(s_q)$ в общий риск по портфелю $C(t) = (C_1(t), ..., C_m(t))$.

Список литературы

[1] *Landsman Z., Valdes E.A.*, Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions, University of Haifa Technical Report 02-04, October 2002.

[2] *Королёв В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.* Математические основы теории риска. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

[1]Российский Университет Дружбы Народов, Кафедра теории вероятностей и математической статистики. E-mail: YSkhokhlov@yandex.ru

[2]Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной Математики и Кибернетики. E-mail: Rumyantseva_Olga@mail.ru

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Исследование совместных распределений дискретно-непрерывных случайных величин

Дарья В. Семенова[1], Наталья А. Лукьянова[2]

В работе обсуждаются результаты авторов, полученные при исследовании распределений случайных векторов, компоненты которых конструируются как выпуклая комбинация произвольных непрерывных и дискретных случайных величин.

В математической статистике почти всегда имеют дело либо с дискретными, либо с непрерывными случайными величинами, но в страховании это не так. Многие функции распределения, используемые в тех или иных моделях (в частности, для моделирования страховых выплат) имеют как "непрерывно возрастающие" участки, так и некоторые положительные скачки. В работе [1] рассматриваются случайные величины смешанного типа, смеси дискретного и непрерывного распределения:

$$\rho = I \cdot \xi + (1 - I) \cdot \nu, \tag{1}$$

где ξ является непрерывной случайной величиной (н.с.в.), ν — дискретной случайной величиной (д.с.в.), а I — бернуллиевской случайной величиной с параметром $p = \mathbf{P}(I = 1)$, причем I не зависит от ξ и ν. Функция распределения $F_\rho(u) = \mathbf{P}(\rho \leq u)$ оказывается смесью (выпуклой комбинацией) случайных величин ξ и ν

$$F_\rho(u) = pF_\xi(u) + (1 - p)F_\nu \tag{2}$$

и является функцией смешанного, дискретно-непрерывного типа.

Пусть д.с.в. ν имеет вырожденное распределение, т.е. $\mathbf{P}(\nu \equiv c) = 1$, $c \geq 0$. Тогда (1) примет вид

$$\rho = I \cdot \xi + (1 - I) \cdot c = \begin{cases} \xi, & \text{с вероятностью } p, \\ c, & \text{с вероятностью } 1 - p, \end{cases} \tag{3}$$

с функцией распределения

$$F_\rho(u) = pF_\xi(u) + (1 - p)F_\nu = \begin{cases} pF_\xi(u), & u < c, \\ pF_\xi(u) + (1 - p), & u \geq c. \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим множество случайных событий

$$K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$$

под $\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ — выделенное конечное множество событий (состоящее из $N = |\mathfrak{X}|$ событий), $2^{\mathfrak{X}}$ — множество всех подмножеств $\mathfrak{X}$ [2]. Распределением вероятностей случайного множества K называется набор из 2^N вероятностей $p(X) = \mathbf{P}(K = X)$, $X \in 2^{\mathfrak{X}}$.

[1]Сибирский федеральный университет, институт математики. E-mail: dariasdv@gmail.com
[2]Сибирский федеральный университет, институт фундаментальной подготовки. E-mail: nata00sfu@gmail.com

Занумеруем N случайных величин вида (3) элементами множества $\mathfrak{X}$ в лексографическом порядке. Будем рассматривать N-мерный случайный вектор

$$\vec{\rho} = \{\rho_x,\ x \in \mathfrak{X}\} = \{I_x \cdot \xi_x + (1 - I_x) \cdot c_x,\ x \in \mathfrak{X}\},$$

где для всех $x \in \mathfrak{X}$ ξ_x — н.с.в., $c_x \geq 0$ — константа, а бернуллиевской случайной величине I_x сопоставим индикаторы

$$I_x = \mathbf{1}_K(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \notin K. \end{cases}$$

Следует отметить интересное свойство [2] суммы случайных величин смешанного типа вида (3) при всех $c_x = 0$, $x \in \mathfrak{X}$:

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}} \rho_x = \sum_{x \in K} \xi_x$$

— сумма случайного множества н.с.в. равна сумме случайных величин смешанного типа.

Теорема 1. *Пусть $\vec{\rho} = \{\rho_x,\ x \in \mathfrak{X}\}$ — случайный вектор, составленный из $N = |\mathfrak{X}|$ случайных величин смешанного типа вида (3), с совместной N-мерной функцией распределения $F(u_x,\ x \in \mathfrak{X}) = \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{x \in \mathfrak{X}} \{\rho_x < u_x\}\right)$. Тогда для функции $F(u_x,\ x \in \mathfrak{X})$ справедливо разложение*

$$F(u_x,\ x \in \mathfrak{X}) = \sum_{X \in 2^{\mathfrak{X}}} F_X(u_x,\ x \in \mathfrak{X}) \cdot p(X), \tag{5}$$

где $F_X(u_x,\ x \in \mathfrak{X}) = \mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{x \in \mathfrak{X}} \{\rho_x < u_x | e_X\}\right)$ — условные функции распределения случайного вектора $\vec{\rho}$ при условии случайного события $e_X = \left\{\left(\bigcap\limits_{x \in X} \{I_x = 1\}\right) \bigcap \left(\bigcap\limits_{x \in X^c} \{I_x = 0\}\right)\right\}$, а $p(X) = \mathbf{P}(e_X) = \mathbf{P}(K = X)$, $X \subseteq \mathfrak{X}$, вероятность такого события.

Доказанная в работе теорема 1 позволяет описывать двухуровневую структуру зависимостей и взаимодействий компонент случайного вектора $\vec{\rho}$, состоящей из случайно-множественного базиса $\{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ и количественной надстройки $\{F_X(u_x, x \in \mathfrak{X}),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — совокупности условных функций распределения. Компоненты случайного вектора $\vec{\rho}$ являются случайными величинами смешанного типа. Можно говорить о том, что случайный вектор $\vec{\rho}$ конструируется из случайного вектора $\vec{\xi}$, составленного из N н.с.в. ξ_x, $x \in \mathfrak{X}$. Таким образом количественная надстройка — это условные функции распределения, получаемые из совместного распределения случайного вектора $\vec{\xi}$.

На основе теоремы 1 в работе предлагаются методы аппроксимации совместного распределения дискретно-непрерывных случайных величин вида (3).

Список литературы

[1] *Каас Р., Гувертс М., Дэнэ Ж., Денут М.*, Современная актуарная теория риска: Пер. с анг. М.: Янус-К, 2007.

[2] *Воробьев О.Ю., Семенова Д.В.*, Портфельный сет-анализ случайных событий. Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 2005.

[3] *Ширяев А.Н.*, Вероятность. М.: МЦНМО, 2004.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Survival analysis of semi-Markov chains

Vlad Stefan Barbu[1]

Our talk is concerned with developing some elements of survival analysis for discrete-time semi-Markov processes with countable state space. From a practical point of view, this kind of models and results are interesting and useful for several applied fields, like actuarial mathematics, reliability of systems or biomedical problems. After a short presentation of infinite matrices and associated operations, we describe the discrete-time semi-Markov setting and we present some elements of Markov renewal theory. These results are applied in order to obtain closed forms for some survival indicators, like survival function, availability, mean hitting times, etc. Estimation of these quantities is also addressed. The results presented here are a direct continuation of some results of Barbu and Limnios (2010), and represent a generalization of reliability and estimation results summarized in Barbu and Limnios (2008).

References

[1] *Barbu V.S., Limnios N.*, Some algebraic methods in semi-Markov processes. In Algebraic Methods in Statistics and Probability, volume 2, series Contemporary Mathematics edited by AMS, Urbana, 19–35, 2010.

[2] *Barbu V.S., Limnios N.*, Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models toward Applications - Their use in Reliability and DNA Analysis, Lecture Notes in Statistics, vol. 191, Springer, New York, 2008.

[1]Université de Rouen, Laboratoire de Mathématiques Raphael Salem. E-mail: barbu@univ-rouen.fr

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Constrained Investment in the Dynamic Insurance Models[1]

Tatiana A. Belkina[2]

We prove that the solutions of singular problems for integro–differential equations arising in the dynamic insurance models, when a surplus is invested into a risky assets, defines a corresponding survival probability. For the Cramér-Lundberg model with exponential claims distribution, the solution of such singular problem and its asymptotic expansions are used for investigation of optimal investment strategy with constraint.

We consider insurance company whose surplus process X_t^π is governed by the equation

$$X_t^\pi = u + \int_0^t [r(1-\alpha_s)X_s^\pi + \mu\alpha_s X_s^\pi]ds + \sigma\int_0^t \alpha_s X_s^\pi dB_s + C_t - S_t, \tag{1}$$

where u is the initial surplus, the aggregate claims process S_t is a compound Poisson process with claim frequency λ and individual claim amount distribution function $F(z)$, $F(0)=0$; the aggregate premiums process C_t will be defined below. A fraction α_t of the surplus is invested at the time t into a risky asset whose price follows a geometric Brownian motion with stock return rate μ and the volatility σ, and B_t is a standard Brownian motion; it is assumed that the processes B_t, C_t, S_t are independent. The fraction $(1-\alpha_t)$ of the surplus is invested in the risk free asset with interest rate r. We suppose that all the random variables are defined on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. On this space we define the filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ generated by processes $\{X_t\}_{t\geq 0}$ and $\{B_t\}_{t\geq 0}$. There also $\pi := \{\alpha_s\}_{s\geq 0}$ denotes the control, which assumed to be predictable process.

We consider two models described by the equation (1). In the *first model* the premiums are received continuously at a constant rate c, i.e., $C_t = ct$ (the corresponding model without investment is the classical Cramér-Lundberg model). In the *second model* C_t is a compound Poisson process with premium frequency λ_1 and individual premium amount distribution function $G(y)$, $G(0)=0$, (the corresponding model without investment is named Cramér-Lundberg model with stochastic premiums (see, e.g., [1])).

The ruin time of the process X_t^π under the investment strategy π is defined as follows $\tau^\pi = \inf\{t \geq 0 : X_t^\pi < 0\}$, and the survival probability as $\varphi^\pi(x) = 1 - \mathbf{P}(\tau^\pi < \infty)$.

Denote $X_t^{(\alpha)}$ the process (1) with a constant control strategy, $\alpha_t \equiv \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, and set $\bar{\alpha} = \alpha\mu + (1-\alpha)r$, $\bar{\sigma} = \alpha\sigma$. Then the infinitesimal generator of the Markov process $X_t^{(\alpha)}$ is

$$(\mathcal{A}^{(\alpha)}f)(u) = \lambda\int_0^u f(u-z)\,dF(z) - \lambda f(u) + f'(u)[\bar{\alpha}u + c] + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2u^2f''(u), \tag{2}$$

for the first model, or it is

[1]This research was supported by the Russian Fund of Basic Research, Grants RFBR 10-01-00767 and RFBR 11-01-00219.

[2]Laboratory of Risk Theory, Central Economics and Mathematics Institute RAS, Moscow, Russia. E-mail: tati.belkina@gmail.com

$$(\mathcal{A}^{(\alpha)}f)(u) = \lambda \int_0^u f(u-z)\,dF(z) + \lambda_1 \int_0^\infty f(u+y)\,dG(y) - (\lambda+\lambda_1)\varphi(u) +$$

$$+\bar{\alpha}uf'(u) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2u^2f''(u),$$

for the second model. We proof the following *sufficiency theorem* for the survival probability which is true for the both considered cases.

Theorem 1. *Assume that the equation* $(\mathcal{A}^{(\alpha)}\varphi)(u) = 0$, $u > 0$, *has a nonnegative twice continuously differentiable on* $\mathbb{R}_+$ *solution* $\varphi(u)$ *subject to conditions* $\lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1$ *and* $0 \le \varphi(u) \le 1$. *Then this solution is the survival probability for the process* $X_t^{(\alpha)}$.

The sufficiency theorem with existence theorem makes it possible to avoid complicated probabilistic methods for the proof of upper bounds for ruin probability, as well as for the justification of twice continuously differentiability of the ruin probability. For the process with infinitesimal generator (2), the upper bound used in [2] to justify boundary condition at infinity for asymptotic expansion of survival probability.

For the two considered problems, the existence and uniqueness theorems in the case of exponential distribution functions F, G were proved in [3], [4]; there also asymptotic expansions were established.

These results have been used in particular for investigation of the optimal control problem for the process (1) with constraint allowing shortselling [5]. Described above predictable process π said to be *admissible* control if $\alpha_t \in [-b, a]$ for any t. The Hamilton-Jacobi-Bellman equation for the ruin minimization problem is

$$\sup_{\alpha\in[-b,a]} (\mathcal{A}^{(\alpha)}V)(u) = 0, \quad u > 0.$$

It was shown that under certain conditions optimal strategy includes shortselling, while the short positions are not observed for the solution of the optimization problem without constraints.

References

[1] *Boikov A.V.*, The Cramer–Lundberg model with stochastic premium process, Theory Probab. Appl., 2003, v. 47, N 3, p. 489–493.

[2] *Frolova A., Kabanov Yu. and Pergamenshchikov S.*, In the insurance business risky investments are dangerous, Finance Stochast., 2002, v. 6, N2, p. 227–235.

[3] *Belkina T.A., Konyukhova N.B. and Kurkina A.O.*, Optimal investment problem in the dynamic insurance models: II. Cramér-Lundberg model with the exponential claims, Surveys on Applied and Industrial Mathematics, 2010, v. 17, N 1, p. 3–24 [in Russian].

[4] *Belkina T.A., Konyukhova N.B. and Kurochkin S.V.*, Singular boundary value problem for the intefro-differential equation in the insurance model with stochastic premiums: analysis and numerical solution, 2012, Zh. Vychisl. Matem i Matem Fis. (submitted) [in Russian].

[5] *Belkina T., Hipp C., Luo S. and Taksar M.*, Optimal constrained investment in the Cramer-Lundberg model, 2011, Cornell University Library, arXiv:1112.4007v1 [q-fin.PM].

International Conference
"PROBABILITY THEORY AND ITS APPLICATIONS"
(Moscow, 26-30 June 2012)

Option pricing under illiquidity and transaction costs[1]

Yana I. Belopolskaya[2]

It is well understood now that real financial markets possess some friction generated by transaction costs along with restrictions on the volume of traded assets, illiquidity and so on. This leads to a feedback between the derivative asset prices and present values of underlying asset prices (see [1] – [3]). As a result European option prices are governed by fully nonlinear parabolic equations or systems. To illustrate this assume that large traders act on a market and their strategies effect the underlying asset prices. More precisely given a liquidity parameter $\rho = (\rho_{jk})_{j,k=1}^{d}$ and a semimartingale $\gamma(\tau) \in R^d$ presenting a trading strategy of a large trader, let the underlying asset prices under the objective measure P be given by

$$dS_k(\tau) = S_k(\tau)[\mu_k d\tau + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{kj} dw_j(\tau) + \rho d\gamma(\tau)], \quad S_k(t) = s_k, \quad k = 1, \dots d, \tag{1}$$

where where $w(t) \in R^d$ is P-Wiener process and $d\gamma(t)$ has the form

$$d\gamma_k(\theta) = \eta_k(\theta) d\theta + \sum_{j=1}^{d} \zeta_{kj}(\theta) dw_j(\theta) \quad k = 1, \dots, d,$$

μ_k, σ_{kj} are nonrandom and constant.

From the economic point of view this means that when a large trader buys (sells) $\gamma_k(\tau)$ assets of the k-th type (that is $|\Delta\gamma_k(\tau)| > 0$), then the price of this asset rises up (or down) by the value $S_k(\tau) \sum_{kj=1}^{d} \rho_{kj} \cdot \Delta\gamma_j(\tau)$. In particular given an option with a contract function $\Phi(s)$ the arbitrage-free price $F(t, s)$ of this option satisfies the Cauchy problem

$$F_t + \frac{1}{2} Tr Q^* \nabla^2 F Q + rs\nabla F - rF = 0, \quad F(T, s) = \Phi(s), \tag{2}$$

where $Q = s(\sigma + \rho[I - s\rho\nabla^2 F]^{-1} s\sigma\nabla^2 F)$. Similar fully nonlinear PDEs arise when one takes into account transaction costs.

We discuss here two probabilistic approaches to solve the Cauchy problem for fully nonlinear parabolic equations and systems of the form

$$F_t + M(t, F, \nabla F, \nabla^2 F) = 0, F(T, s) = \Phi(s), \tag{3}$$

where $M : [0, T] \times R^d \times R^d \otimes R^d \times R^d \otimes R^d \otimes R^d \to R^d$. Both of them are based on reducing a fully nonlinear equation (3) either to a system of semilinear parabolic equations with respect to

[1] Support of grant 4-Φ-11 SPbGASU is gratefully acknowledged.

[2] St.Petersburg State University for Architecture and Civil Engineering, mathematical department. E-mail: `Yana@yb1569.spb.edu`

a vector function $U = (F, \nabla F, \nabla^2 F, \nabla^3 F)$ or to a quasilinear system with respect to a function $V = (F, \nabla F)$ and its gradient ∇V. In the first case we have to solve a stochastic system (with coefficients depending on U) for a Markov process and its multiplicative functional while in the second case we solve a fully coupled forward-backward stochastic differential equation with coefficients depending on V and ∇V. The corresponding results could be seen in papers [3],[4].

References

[1] *Cetin U., Jarrow R., Protter P. and Warachka M.*, Pricing options in an extended Black-Scholes economy with illiquidity: theory and empirical evidence, Rev. Fin. Studies, 2006, v. 19, p. 493–529.

[2] *Bordag L.A., Frey R.*, Nonlinear option pricing models for illiquid market: scaling properties and explicit solutions. Ch. 3 in M. Ehrhardt (ed.), Nonlinear Models in Mathematical Finance: New Research Trends in Option Pricing. Nova Science Publ, Inc., NY, 2008, p. 103-–129.

[3] *Belopolskaya Ya.*, Probabilistic approach to solution of nonlinear PDEs arising in financial mathematics. J. Math. Sci., 2010, v. 167, N 4, p. 444–460.

[4] *Belopolskaya Ya., Woyczynski W.*, Probabilistic approach to viscosity solutions of the Cauchy problem for systems of fully nonlinear parabolic equations. Zap POMI., 2011, v. 396, p. 31–66.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Actuarial Mathematics and Other Applied Probability Research Fields[1]

Ekaterina V. Bulinskaya[2]

The main goal of the talk is to discuss the interplay between various branches of the Modern Applied Probability. Namely, we concentrate on the problems arising in actuarial sciences and stochastic finance, queueing and reliability, inventory and storage theory and others (see, e.g., [1]-[4]). For instance, we consider the generalizations of the classical Cramér-Lundberg model. Special attention is paid to the reinsurance models [5],[6]. We briefly describe the powerful methods based on the combination of stochastic optimization, renewal and regenerative processes technique and integro-differential equations analysis. Along with asymptotical results we provide those appropriate for the finite planning horizon [7],[8].

We also tackle the new features in the education process of the actuarial-financial specialization. It is a pleasure to mention that Professors B.V.Gnedenko and A.N.Shiryaev initiated the actuarial education at the Probability Department of the Lomonosov Moscow State University.

References

[1] *Embrechts P., Kluppelberg C., and Mikosch T.* Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer, Berlin, 1997.

[2] *Shiryaev A.N.*, Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory. World Scientific, Singapore, 1999.

[3] *Bulinskaya E.V.*, Some aspects of decision making under uncertainty. Statistical Planning and Inference, 2007, v. 137, N 8, p. 2613–2632.

[4] *Bulinskaya E.V.*, Sensitivity analysis of some applied models. Pliska Studia Mathematica Bulgarica, 2007, v.18, p. 57–90.

[5] *Bulinskaya E.V.*, Risk Theory and Reinsurance, Maylor, Moscow, 2009, 190 p. (In Russian)

[6] *Dimitrova D.S. and Kaishev V.K.*, Optimal joint survival reinsurance: An efficient frontier approach. Insurance: Mathematics and Economics, 2010, v. 47, p. 27–35.

[7] *Ladoucette S., Teugels J.* Asymptotics for ratios with applications to reinsurance. Methodology and Computing in Applied Probability, v. 9 (2), pp. 225–242, 2007.

[8] *Bulinskaya E.V.*, Stochastic Insurance Models: Their Optimality and Stability. Advances in Data Analysis, ed. Christos H. Skiadas, Birkhäuser, 2010, p.129-140.

[1]The research is partially supported by RFBR grant 10-01-00266a.

[2]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: ebulinsk@mech.math.msu.su

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Statistical analysis of russian obligatory motor third party liability insurance[1]

Evgeniy V. Chepurin[2], Ilya I. Dekhterev[3]

In the paper we discuss the authors' results on statistical analysis of russian obligatory motor third party liability (OMTPL) insurance

1 Introduction

In accordance with russian legislation every car owner in the Russian Federation must buy third party liability insurance policy from licensed insurance company. This legal provision came into force on 1 January 2004 [1], and now obligatory motor third party liability (OMTPL) insurance plays an important social and economic role in mitigating consequences of road accidents.

Actuarial mathematics includes a variety of methods for statistical and economical analysis of motor liability insurance (see [2], [3], [4]), but russian insurance market, traffic conditions and legislation impose some constraints on practical application of generally accepted techniques. Therefore, OMTPL analysis requires statistical hypothesis testing for selection of appropriate stochastic models and possible modification of standart actuarial models.

2 Basic results

In russian OMTPL insurance premium has a multiplicative structure:

$$S = S_0 \prod_{i=1}^{r} \lambda_i, \tag{1}$$

where S_0 is "base" premium, which depends on vehicle type, and $\lambda_i,\ i = \overline{1, r}$ are coefficients determined by various vehicle and driver characteristics (rate factors). A set of policies, which have identical vehicle type and rate factors, is called "elementary portfolio" (EPO). Loss ratio of the whole OMTPL insurance company portfolio is a weighted sum of individual loss ratios for EPOs:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} L_i \gamma_i, \tag{2}$$

where γ is loss ratio of overall OMTPL potrfolio, γ_i is loss ratio of individual EPOs and L_i is individual EPO portion in overall OMTPL earned premium (written premium). Therefore, overall OMTPL perfomance is determined by individual perfomance of every EPO and portfolio composition (in terms of EPOs).

[1]This study was conducted in collaboration with Federal Agency of Insurance Supervision
[2]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: echepurin@mail.ru
[3]"Rosgosstrakh" LLC, Actuarial Center. E-mail: ilya_dehterev@rgs.ru

Individual EPO can be described with the help of following stochastic model. Elementary portfolio consists of a set of policies, which generate independent flows of insurance events: $d_i(t)$ is a number of insurance accidents of the i-th policy, $\{t_{i_1} < t_{i_2} < \ldots < t_{i_{d_i}}\}$ are moments of accidents and $\{R_{i_1}, R_{i_2} \ldots, R_{i_{d_i}}\}$ are loss severities. It is a generally accepted practice to assume that loss severities are independent identically distributed continuous random variables and statistical analysis of russian OMTPL doesn't reject this hypothesis.

If we assume that $d_i(t)$ is a mixed poisson process and policies are one-year, then $d_i(1)$ (overall number of insurance events by policy) is a sufficient statistic and $\{t_{i_1} < t_{i_2} < \ldots < t_{i_{d_i}}\}$ are distributed like an ordered sample from i.i.d. uniform random variables $U(0,1)$. Therefore, in this model insurance events stochastic process is determined by overall number of insurance claims $d_i = d_i(1)$. Basic assumption for insurance events random process is poisson hypothesis:

$$H_1 \; : \; d_i \stackrel{d}{=} POIS(\theta), \; \theta > 0, \qquad H_2 \; : \; d_i \stackrel{d}{\neq} POIS(\theta), \; \theta > 0.$$

This hypothesis can be tested using characteristic property of poisson random variable (see [5]):

$$d|(S(d) = s) \stackrel{d}{=} MULTI(s; n; \overrightarrow{\pi_n}), \tag{3}$$

where $d = (d_1, \ldots, d_n)$, $S(d) = \sum_{i=1}^{n} d_i$ and $MULTI(s; n; \overrightarrow{\pi_n})$ is a polinomial random variable. In which s is trials count; n is a number of possible outcomes; $\overrightarrow{\pi_n} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$. Polinomial hypothesis with known vector $\overrightarrow{\pi_n}$ is usually tested using chi-squared statistic, but russian OMTPL has small claims frequency and $s << n$. Therefore, data grouping with asymptotic normal frequencies is not possible.

This problem can be overcomed with the help of "sufficient empirical averaging" (SEV) method. We can consider following criterion statistics:

$$T_1(d) = \max_{1 \le i \le n} \left| \frac{d_i}{n} - \frac{1}{n} \right|, \qquad T_2(d) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(d_i - s\pi_i)^2}{s\pi_i}. \tag{4}$$

Both of them measure deviation from base polinomial hypothesis, but $T_2(d)$ is preferable when there is suspicion about presence of errors in the data. Significance level for these statistics can be calculated with the help of Monte-Carlo simulations of polinomial random variable $d^* \stackrel{d}{=} d|(S(d) = s) \stackrel{d}{=} MULTI(s; n; \overrightarrow{\pi_n})$:

$$\alpha_{obs} = \mathbf{P}\{T(d^*) \ge T(d) | S(d) = s\}, \quad \widetilde{\alpha_{obs}} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{B} \mathbf{I}(T(d^*(j)) \ge T(d)), \tag{5}$$

where $\mathbf{I}$ is indicator function and B is Monte-Carlo simulations count.

References

[1] *Russian Federation*, Federal Law from 25.04.2002 N 40-ФЗ "About OMTPL".

[2] *Lemaire J.*, Automobile insurance: actuarial models, Springer-Verlag, New York, 1985.

[3] *Lemaire J.*, Bonus-malus systems in automobile insurance, Springer-Verlag, New York, 1995.

[4] *Mack T.*, Non-life insurance mathematics, Olymp-Business, Moscow, 2005.

[5] *Bolshev L.*, Probability theory and mathematical statictics, Nauka, Moscow, 1987.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Measuring Inequality in pension systems

Guglielmo D'Amico[1], Giuseppe Di Biase[2], Raimondo Manca[3]

In this paper, we present a semi-Markov model of income evolution. Furthermore by applying general pensions rules to the income process we retrieve information on the structure of pensions in the population. By using the Dynamic Theil's Entropy we can compute and produce forecasts on the income inequality in the population before and after the entrance in the pension state. The results could be useful for the planning and comparison of pension schemes.

References

[1] *Cowell F.* Measuring Inequality, 1995, LSE Handbook in Economics Series, 2nd edn, Prentice Hall, London.

[2] *D'Amico G. and Di Biase G.* Generalized Concentration Inequality Indices of Economic systems Evolving in Time, Wseas Trans. Math. 2010, v. 9(2), February, p. 140–149.

[3] *Janssen J., Manca R.* A realistic non-homogeneous stochastic pension funds model on scenario basis. Scand. Actuar. J. 1997, p. 113–137.

[1]University "G. d' Annunzio" of Chieti-Pescara, Faculty of Pharmacy. E-mail: g.damico@unich.it
[2]University "G. d' Annunzio" of Chieti-Pescara, Faculty of Pharmacy. E-mail: dibiase@unich.it
[3]University "La Sapienza" of Roma, Faculty of Economy. E-mail: raimondo.manca@uniroma1.it

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Non-Homogeneous Generalized Semi-Markov Life Insurance Models

Guglielmo D'Amico[1], Giuseppe Di Biase[2], Jacques Janssen[3], Raimondo Manca[4]

The evaluation of life insurance contracts, usually is done using models that, as time variable, take into account the age of the insured people. The problem is that, as well known, the surviving probability increases in function of the time. The life insurance models should depend on two time variables one that should follow the age, as usual it is done, the other the running of time. In this paper we will present a model in which it is possible to follow both the two time variables. The process will be constructed under a non-homogenous semi-Markov environment. A similar approach was presented in Wolthuis (2003) but with only one time variable and in a Markov environment.

References

[1] *Wolthuis H.*, Life Insurance Mathematics (The Markovian Model). II edition IAE, Amsterdam, 2003.

[1]Universitá di Chieti-Pescara G. D'Annunzio, Dipartimento del Farmaco. E-mail: `g.damico@unich.it`
[2]Universitá di Chieti-Pescara G. D'Annunzio, Dipartimento del Farmaco. E-mail: `dibiase@unich.it`
[3]Université Libre de Bruxelles E-mail: `janssenwets.jacques@gmail.com`
[4]Sapienza Universitá di Roma, MEMOTEF E-mail: `raimondo.manca@uniroma1.it`

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

The Choice between Homogeneous Parametric and non-Paramentric non-Homogeneous Semi-Markov Models

Guglielmo D'Amico[1], Giuseppe Di Biase[2], Raimondo Manca[3], Filippo Petroni[4]

The choice of the model to be applied to study the dynamic evolution of a complex phenomenon by means of a semi-Markov process is not simple. Many conditions will influence this choice. We will show how to select among the different possibilities that the semi-Markov processes offer. Furthermore we will explain the reasons why some model should be applied to study better than the other models the evolution of the observed phenomenon. Different insurance applications will be presented.

[1]Universitá di Chieti-Pescara G. D'Annunzio, Dipartimento del Farmaco. E-mail: g.damico@unich.it
[2]Universitá di Chieti-Pescara G. D'Annunzio, Dipartimento del Farmaco. E-mail: dibiase@unich.it
[3]Sapienza Universitá di Roma, MEMOTEF E-mail: raimondo.manca@uniroma1.it
[4]Universitá di Cagliari E-mail: fpetroni@gmail.com

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Homogeneous and non-homogeneous Risk Theory renewal models

Guglielmo D'Amico[1], Fulvio Gismondi[2], Jacques Janssen[3], Raimondo Manca[4]

In Lundberg (1909) the foundation of the models for the study of risk theory and in the same time of renewal processes were done. The Poisson-Poisson model (P/P) was proposed. It names in this way because it is supposed that the mean number of claims and their cost follow a Poisson distribution. Cramer (1955) generalized the P/P model defining a P/G model where G stay for general type of distribution. At last Andersen (1967) defined the G/G model. The G/G model is closer to real life insurance problems, but it is really difficult to apply. All the three models are defined in a time homogeneous environment. In each insurance contract the age of insured assumes a great relevance, but in a homogeneous environment it is not possible to take into account this relevant aspect. In Janssen, Manca (2007) it is shown how to solve numerically a homogeneous renewal process and that the renewal process can be easily solved in a discrete time environment. In the first part of this paper will be presented how to solve the G/G model in discrete time setting. Furthermore, following the results obtained in Janssen et al (2011) it will be shown how to generalize in a discrete time non-homogeneous environment the G/G model. Given that the claim amount process is function of the economic scenario, the non-homogeneity is strictly related to the time of the evaluation.

References

[1] *Andersen E.S.*, An algebraic treatment of fluctuations of sums of random variables. Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66), Vol. II. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1967.

[2] *Cramer H.*, Collective risk theory: A survey of the theory from the point of view of the theory of stochastic processes. Skandia Insurance Company, Stockholm, 1955.

[3] *Janssen J., Manca R.*, Semi-Markov risk models for finance insurance and reliability. Springer New York, 2007.

[4] *Janssen J., Manca R., Gismondi F.*, Non-homogeneous time convolutios, renewal processes and age dependent mean number of motor car accidents. Submitted (2011)

[5] *Lundberg P.* On the theory of reinsurance. (1909) In History of Actuarial Science. Vol. VII Habermann S., Sibbett T. A. (eds), 1995, p. 291-244.

[1]Universitá di Chieti-Pescara G. D'Annunzio, Dipartimento del Farmaco. E-mail: g.damico@unich.it
[2]Universitá Universita G. Marconi,Roma fulvio.gismondi@gismondieassociati.com
[3]Université Libre de Bruxelles E-mail: janssenwets.jacques@gmail.com
[4]Sapienza Universitá di Roma, MEMOTEF E-mail: raimondo.manca@uniroma1.it

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Semi-Markov Disability Insurance Models I

Guglielmo D'Amico[1], Montserrat Guillen[2], Raimondo Manca[3]

In this paper, we present a stochastic model for disability insurance contracts. The model is based on a discrete time non-homogeneous semi-Markov process to which the backward recurrence time process is joined. This permits to study in a more complete way the disability evolution and to face more efficiently the duration problem. The use of semi-Markov reward processes gives the possibility of deriving equations of the prospective and retrospective mathematical reserves. The model is applied to a sample of contracts drawn at random from a mutual insurance company.

References

[1] *D' Amico G., Guillen M. and Manca R.*, Full backward non-homogeneous semi-Markov processes for disability insurance models: a Catalunya real data application. Insur. Math. Econ., 2009, v. 45, p. 173–179.

[2] *Janssen J., Manca R.*, A realistic non-homogeneous stochastic pension funds model on scenario basis. Scand. Actuar. J., 1997, p. 113–137

[3] *Stenberg F., Manca R., Silvestrov D.*, An algorithmic approach to discrete time non-homogeneous backward semi-Markov reward processes with an application to disability insurance. Methodol. Comput. Appl. Probab., 2007, v. 9, p. 497–519.

[1]University "G. d' Annunzio" of Chieti-Pescara, Faculty of Pharmacy. E-mail: g.damico@unich.it
[2]University of Barcelona, Departament d'Econometria, Estadistica I Economia Espanyola. E-mail: mguillen@ub.edu
[3]University "La Sapienza" of Roma, Faculty of Economy. E-mail: raimondo.manca@uniroma1.it

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Semi-Markov Disability Insurance Models II

Guglielmo D'Amico[1], Montserrat Guillen[2], Raimondo Manca[3]

In the paper we discuss the authors' results on semi-Markov disability insurance models.

In this paper, we present novel advancements to the semi-Markov model for disability insurance contracts. The model is based on a discrete time non-homogeneous semi-Markov reward process to which the backward recurrence time process is joined. We derive equations for the higher order moments of the reward process and this gives the possibility of deriving higher order moments of the prospective and retrospective mathematical reserves. The model is applied to different particular kinds of insurance contracts.

References

[1] *D' Amico G., Guillen M. and Manca R.*, Full backward non-homogeneous semi-Markov processes for disability insurance models: a Catalunya real data application. Insur. Math. Econ., 2009, v. 45, p. 173–179.

[2] *Haberman S., Pitacco E.*, Actuarial models for disability insurance, 1999, Chapman & Hall.

[3] *Janssen J., Manca R.*, A realistic non-homogeneous stochastic pension funds model on scenario basis. Scand. Actuar. J., 1997, p. 113–137.

[4] *Stenberg F., Manca R., Silvestrov D.*, An algorithmic approach to discrete time non-homogeneous backward semi-Markov reward processes with an application to disability insurance. Methodol. Comput. Appl. Probab., 2007, v. 9, p. 497–519.

[1]University "G. d' Annunzio" of Chieti-Pescara, Faculty of Pharmacy. E-mail: `g.damico@unich.it`
[2]University of Barcelona, Departament d'Econometria, Estadistica I Economia Espanyola. E-mail: `mguillen@ub.edu`
[3]University "La Sapienza" of Roma, Faculty of Economy. E-mail: `raimondo.manca@uniroma1.it`

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Correlated bootstrap method for reserve risk assesment

Ilya I. Dekhterev[1]

In the paper we discuss the author's results on stochasting modelling of insurance reserves with certain interdependence structure

1 Introduction

Prudent estimation of reserves is crucial for insurance company. They constitute a part of outstanding liabilities, which is directly connected with insurance activity itself and provide a provision for future insurance payments. But as an item of the balance sheet, reserves are a "point estimate" of future liabilities (though, sometimes it is greater than expected value) and there always exists a possibility, that future payments will exceed estimated reserves. In such situation company will use it's capital to fulfill excess liabilities, but if capital isn't large enough, this company will become insolvent. Therefore, it is important to assess the whole probability distribution of future payments in addition to "point estimate" of it's expected value.

It is a common practice to assess reserves variability using one of the following methods: analytic models for claims development patterns (see [1]) and bootstrapping (see [2]). Analytic models require assumptions about random distribution of data, but such assesments and statistical hypothesis testing are difficult or impossible, because data sets can be rather small. Some analytic models use distribution-free aproach, but in such framework only mean and variance of future payments are assessed, not the whole probability distribution.

Bootstrap technique overcomes this problem with "resampling" actual data and triangle to perform Monte-Carlo simulations. Nevertheless, bootstrapping has an assumption that residuals are i.i.d, which sometimes contradicts observed patterns. For example, insurance company can change it's settlement policy and this will affect the whole part of development triangle and make residuals dependent.

The main novelity of correlated bootstrap method is that it overcomes i.i.d. assumption via sampling data which reflects observed dependence patterns in the development triangle.

2 Basic results

Insurance reserves are usually assessed using triangles of incremental claims, which consist of observations $C_{i,j}$ - sum of all claims with origin period i (accident date) and development period j (payment date relative to accident date):

[1]"Rosgosstrakh" LLC, Actuarial Center. E-mail: ilya_dehterev@rgs.ru

$$\begin{array}{llll} C_{1,1}, & C_{1,2}, & \dots, & C_{1,n} \\ C_{2,1}, & \dots, & C_{2,n-1} & \\ \vdots & & & \\ C_{n,1} & & & \end{array}$$

This incremental triangle can be transformed into triangle of cumulative claims: $D_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} C_{i,k}$.

Every boostrap technique starts with computing residuals, which are then resampled. For Chain Ladder Model (Mack) residuals are derived using the following formulas:

$$f_{i,j} = \frac{D_{i,j}}{D_{i,j-1}}; \qquad \lambda_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-j+1} D_{i,j-1} f_{i,j}}{\sum\limits_{i=1}^{n-j+1} D_{i,j-1}}; \qquad r_{i,j} = \frac{\sqrt{D_{i,j-1}}(f_{i,j} - \lambda_j)}{\sigma_j}, \tag{1}$$

Residuals form another triangle, which is used for generating pseudo residuals and pseudo data.

$$\begin{array}{llll} r_{1,2}, & r_{1,3}, & \dots, & r_{1,n} \\ r_{2,2}, & \dots, & r_{2,n-1} & \\ \vdots & & & \\ r_{n-1,2} & & & \end{array}$$

It's worth noting, that residuals triangle can be constructed using a variety of models including over-dispersed Poisson model, over-dispersed Negative Binomial model and Mack's model (see [2]).

Residuals are assumed to be identically distributed, but not independent. Residuals from different diagonals (r_{i_1,j_1} and r_{i_2,j_2}, where $i_1 + j_1 \neq i_2 + j_2$) are independent, but for residuals from the same diagonal there exists a dependence structure (for example, Gaussian copula):

$$Corr(r_{i_1,j_1}, r_{i_2,j_2}) = \rho_{j_1,j_2}, \tag{2}$$

where correlation parameters ρ_{j_1,j_2} can be assessed using actual residual triangle. Then residuals are resampled, taking into account dependence pattern (2), and standard bootstrap framework is applied. Dependence pattern should also be taken into account for future residuals, when generating lower right half of the triangle from pseudo data.

The main novelity of this method is that it can capture "systemic" events, when after some calendar date development pattern fluctuates, and the whole diagonal of residuals changes dramatically. Models, which don't take into account such kind of events, can seriously underestimate reserve risk, so modelling dependence pattern of observed reserve development is crucial for prudent assesment of risk capital for insurance company.

References

[1] *Mack T.*, Distribution-Free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates. ASTIN Bulletin, 1993, v.23, N 2.

[2] *England P., Verral R.*, Predictive Distributions of Outstanding Liabilities in General Insurance. Annals of Actuarial Science, 2006, 1.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Risk Measurement and Solvency for Long Term Pension Liabilities

Pierre Devolder[1]

Pension liabilities have a long term aspect with many intrinsic risks which makes their solvency measurement different from classical life insurance. An efficient modeling of these risks and a pertinent measurement in terms of solvency are nevertheless unavoidable in a global risk management philosophy. The purpose of this talk is to propose various stochastic models of risk measurement in continuous time combining the 3 basic risks affecting a pension plan: market, inflation and longevity risks. Applications will be proposed for DC and DB pension schemes. In particular we would like to compare classical risk measures used in finance and techniques of probability of ruin used by actuaries in risk theory and useful for portability concerns.

[1]Université Catholique de Luovaine, Institute of Statistic, Biostatistic and Actuarial Science. E-mail: `pierre.devolder@uclouvain.be`

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Insurance architecture within a risk-profit sharing structure

Emilia Di Lorenzo[1], Albina Orlando[2], Marilena Sibillo[3]

Focusing on the life insurance segment and, in particular, life and pensions annuity products, the main issues arise from the impact of financial variables (return on investment in respect of premiums/contributions and reserves), as well as demographic variables - by virtue of the improving phenomenon which over almost two decades characterizes the survival trend in the industrialized countries - and the interactions between these two risk drivers. There is little doubt that the non-systematic demographic risk component, also called micro-longevity risk, can easily be managed by means of pooling techniques, whilst the systematic demographic component (macrolongevity risk), springing out of the general trend of mortality, by virtue of its own nature, impacts in the same direction on all the policies in portfolio. Managing this risk component is a crucial challenge for insurers: a precious tool is represented by the possibility of transferring the demographic risk to capital markets, using financial contracts where survival is to be meant as an asset. However, this scenario pictures a still not fully developed market, which cannot provide an appropriate response to the needs of insurance coverage yet. Following the guidelines proposed by Denuit et al., in this paper we intend to reintroduce the contractual structure suggested by them, but characterized by further guarantees concerning profitability from the point of view of the insureds, thanks to a profit sharing system. Aim of the study is the performance analysis of a portfolio of participating survival-indexed annuities within a riskiness context set out by the adverse deviations of the demographic and financial bases, deepening the interactions between the risk due to the random fluctuations of the dynamic of the capital returns and the risk due to the systematic random fluctuations of the lifetime evolutionary trend. The analysis is performed according to a firm evaluation logic, taking into account the product attractiveness and profitability together with the perspective of a prudential capital allocation. Actually a risk adjusted performance measurements will be realized by a business project evaluation based on the portfolio surplus, so the study will consider financial and demographic issues in order to measure the economic sustainability and the profitability of the considered insurance business. From the actuarial valuation viewpoint the participating business, when connected to a pension annuity policy, gives rise to a complex contractual structure. Considering constant periodic premiums payable during the deferment period or a single premium, a correct contract management requires a fine awareness, settled at the issue time, of the evolution in time of both the insurer's obligations and the income capabilities or, more synthetically, a competent awareness of the description of the payment phase. This analysis turns on the actuarial control of the surplus. The concept of surplus rises to the main issues in participating life contracts, characterized by long-term liabilities valuable on the basis of assumptions about the future. The surplus has to be defined, valued and then distributed in a plan spreading over a wide time interval: this brings about the surplus calculation central role in the product design. In the paper we will suppose that the annuitants participate in both the

[1]University of Napoli "Federico II", Faculty of Economics. E-mail: `diloremi@unina.it`
[2]CNR, Istituto per le Applicazioni del Calcolo Mauro Picone. E-mail: `a.orlando@iac.cnr.it`
[3]University of Salerno, faculty of Economics. E-mail: `msibillo@unisa.it`

investment profits and in the mortality experience, in this way transferring the demographic risk, and not only the financial risk, to capital markets, considering survival as an asset. They will receive a benefit amount influenced by the volatility in financial and demographic scenarios, depending on the distributable surplus quota. The monetary amount we call surplus has to be accurately handled. Insurers are institutionally requested to keep the minimum solvency margin for fronting future risk, in this way guaranteeing their solvability: therefore the surplus has to be considered not only as an amount to distribute but, first of all, as the amount to reserve and to accrue for adverse evolution of the business due to its randomness. From these considerations a very careful quantification of the surplus participating quota for determining the sum the insurer will transfer to the insured's comes true. The participating quota has a very meaningful strategic role: the insurer has to attribute to it the "right" value realizing a form of equilibrium between, on one hand, the solvability obligation and the advantages to keep more money, free to invest it in several industrial activities (new product perspectives, new strategic possibilities) and on the other hand the advantages to distribute more money to the insureds (to the aims of competitiveness and product attractiveness). When the attention is focussed on the profitability analysis, in order to get a meaningful and effective description of the financial situation of the specific business line of interest, the surplus can be used as a proper financial status indicator. Among the varied different profitability measures, in the paper we will consider the Return on Equity (ROE). It is commonly referred to one year time interval, often coinciding with the balance sheet dates. As known, ROE is the ratio of profit to equity, this last being referred not to the Company surplus but to that specific part of it supporting the product or the line of products under consideration. When ROE is used in its meaning of risk measure, fundamental is how the equity at the denominator is valued. As well as profits at the numerator, the denominator implies different interpretations and meanings of the ratio. The numerical results for ROE ratio will be simply interpretable: it defines how much the total amount collected by the insurer to manage a certain insurance business, a policy or a portfolio of policies or several different portfolios, yields in a certain time interval. It is a profitability measure very quick to communicate and interpret. The empirical checking presented in the paper deals with a pension annuity participating contract with longevity indexing and develops within stochastic assumptions on both the financial and demographic risk drivers involved in the actuarial mathematical valuations. The numerical evidences are centred on the outputs of simulation procedures, employed to the financial and demographic processes involved in the surplus and equity valuations. The simulated ROE values have been got throughout the contract duration. The results have been studied considering mean, variance and skewness behaviour and meaningful applications clarify the impact of the different risk sources on the considered profit indicator.

References

[1] *Coppola M., Di Lorenzo E., Orlando A. and Sibillo M.*, Solvency analysis and demographic risk measures. The Journal of Risk Finance, 2011, v. 12, N 4, p. 252–269.

[2] *D'Amato V., Di Lorenzo E., Orlando A., Russolillo M. and Sibillo M.*, Profit Participation Annuities: A Business Profitability Analysis within a Demographic Risk Sensitive Approach. Seventh International Longevity Risk and Capital Markets Solutions Conference, Goethe University Frankfurt, Germany, September 8th-10th 2011.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Modeling the effect of health

Maria Govorun[1], Guy Latouche[2]

Health of an individual is an important factor that affects financial results of life insurance business. We implement the phase-type method introduced in [3] to incorporate the health factor to pricing, profit-testing and pension reserves modeling. For the latter we consider both deterministic and stochastic arrivals of new pensioners. We valuate the longevity risk by linking it to the improvement of the health of a population. To estimate the financial impact of this improvement we separately consider internal and external factors that influence the survival of an individual.

1 Introduction

As shown by multiple studies, human mortality has been improving in the recent years. The improvement has a positive trend, however, it is not the same for all ages and it fluctuates in time, which makes it difficult to predict. Clearly, the unpredicted mortality creates problems for life insurance organizations.

One of the main characteristics of the mortality improvement is an aging process. The aging of an individual can be defined as her/his health development, which is different from one individual to another. Thus, in order to adequately estimate financial results of insurance companies, it is important to understand the risk given by the health states of their clients.

In [3] the authors introduced a new model to describe the human's aging and mortality, which is called *phase-type aging model*. Here, a finite-state Markov process is used to model human mortality, where the phases are defined as "physiological ages". Time of death in this model follows a phase-type distribution that are broadly described, for example, in [1] and can be fitted to current mortality data. An advantage of the model is a physical interpretation that allows us to think in terms of health states of individuals instead of their real ages.

2 Main results

In the present work we investigate the effect of health on different questions of pension insurance by using the phase-type model. We show that this model can be applied to such basic problems as pricing and profit-testing.

We chose future pension reserves as our object of interest and we develop two methods to model the reserves, both of which are based on the phase-type aging model.

In our first method we assume a constant number of new pensioners coming to a pension fund per year. We define the reserves in year t as the sum of the individual reserves of the pensioners who arrived in years $0 - t$. We apply the central limit theorem to each cohort of pensioners to obtain the distribution of the total reserve and we look at its limit behavior.

In the second method we assume that new pensioners arrive according to a Poisson process with parameter λ. Here, we consider pension reserves at time t as the sum of reserves of

[1]Université Libre de Bruxelles, Département d'Informatique. E-mail: `mgovorun@ulb.ac.be`
[2]Université Libre de Bruxelles, Département d'Informatique. E-mail: `latouche@ulb.ac.be`

individuals not knowing the exact time of their arrivals. In this case, the total reserve at time t is a compound Poisson random variable with parameter λt. One of the most traditional ways to obtain the distribution of such a random variable is to apply Panjer's recursive algorithm introduced in [2]. However, due to the properties of the random variable we need to modify the algorithm. The modification is performed using the approach described in [4]. In order to justify the use of Panjer's algorithm we compare the resulting distribution of the total reserve with its normal approximation given by the central limit theorem.

By incorporating the factor of health into pension reserves, it becomes possible to estimate the risk related to the remaining lifetime of the individual, which is usually called longevity risk. We show two natural approaches to estimate this risk, where the first one takes into account the internal evolution of the human's body, and the second one is related to the development of external environmental factors.

References

[1] *Latouche G., Ramaswami V.*, Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling. ASA-SIAM, 1999.

[2] *Panjer H.H.*, Recursive evaluation of a family of compound distributions. Astin Bulletin, 1981, v.12, p. 22–26.

[3] *Lin X.S., Liu X.*, Markov aging process and Phase-Type Law of mortality. North American Actuarial Journal, 2007, v. 11, p. 92–109.

[4] *Sundt B., Jewell W. S.*, Further results on recursive evaluation of compound distributions. Astin Bulletin, 1981, v.12, p. 27–39.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Absence of Arbitrage with Small Transaction Costs

Julien Grépat[1]

For the discrete-time setting there is a plethora of criteria for various types of arbitrage, see Ch. 3 of [3]. For continuous-time models only a few results on the no-arbitrage criteria are available. In the paper [2] it was established an interesting result in this direction. A question on sufficient and necessary conditions for the absence of arbitrage was formulated not for a single model but for a whole family of them. In GRS it was considered a family of **2-asset** models with a fixed **continuous** price process and **constant** transaction costs tending to zero. The no-arbitrage criterion is very simple: the NA^w-property holds for each model if and only if each model admits a consistent price system.

We propose a generalisation of this theorem to the case of **multi-asset** models, using a geometric approach, see [1].

To prove the nontrivial implication, we exploit the fact that the universal NA^w-property holds for any imbedded discrete-time model. Using the criterion for NA^r-property we deduce the existence of consistent price systems for all the models on a "universal chain", that is a sequence of stopping times increasing stationary to T. In an analogy with GRS, we relate with this "universal chain" functions F^i, $i \le d$, and check that there is, for each i, an alternative: either $F^i = 0$, or $F^i(0+) = 1$. This is the most involved part of the proof. If all $F^i = 0$, the sets of "dual" martingales $\mathcal{M}_0^{\tau_n}(\widehat{K}^{\epsilon *} \setminus \{0\})$ are non-empty and we conclude. If there is a coordinate for which $F^i(0+) = 1$, there exists a strict arbitrage opportunity.

References

[1] *Grépat J., Kabanov Yu.*, Small transaction costs, absence of arbitrage and consistent price systems. Finance and Stochastics, to appear.

[2] *Guasoni P., Rásonyi M., Schachermayer W.*, On fundamental theorem of asset pricing for continuous processes under small transaction costs. Ann. Finance, 2010, v. 6.

[3] *Kabanov Yu., Safarian M.*, Markets with Transaction Costs. Mathematical Theory. Springer, 2009.

[1]Laboratoire de Mathématiques, Université de Franche-Comté, France. E-mail: julien.grepat@univ-fcomte.fr

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Optimal investment and reinsurance strategies

Alexander N. Gromov[1]

In this paper we discuss the existence of the optimal investment and reinsurance strategy in case of Cramer-Lundberg and Sparre-Andersen risk processes.

1 Introduction

We consider an insurance company that has a possibility to choose and buy dynamically an unlimited excess of loss reinsurance as well as invest surplus into the risky asset.

Let T_i be the occurrence time of the i-th claim, N_t the number of claims in time interval $(0;t]$ and Y_i the amount of the i-th claim. Claim sizes Y_i are i.i.d., positive with probability distribution function $G(x)$. Let $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ denote the aggregate claim process. Assume that $s > 0$ is the initial surplus and $c > 0$ is the premium intensity of the insurer. Then the risk process $R_t = s + ct - S_t$.

In case of excess of loss reinsurance the part of the claim Y the cedent has to pay is $\min\{Y, b\}$, consequently the reinsurer pays the amount $Y - \min\{Y, b\}$, where b is the retention. A reinsurance strategy is a process $b = \{b_t, t \geq 0\}$. If the reinsurance b_t is chosen at time t, the part of the premium rate left to the cedent is denoted by $c(b_t)$. We assume that function $c(b)$ is increasing (otherwise more reinsurance will be cheaper), continuous and $c(\infty) = c$.

We assume that there is a risky asset in which the company can invest the surplus. The price Z_t of this asset is modelled by geometric Brownian motion with parameters μ and σ, i.e. $Z_t = \exp\{\sigma W_t + (\mu - 2^{-1}\sigma^2)t\}$, where W_t is a standard Brownian motion. The insurer can choose the amount A_t that is invested at time t into the risky asset. We assume that processes S and W are independent, and filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ is generated by the two-dimensional process $\{S_t, W_t\}$.

In this paper we describe two different options for claim inter-arrival interval distribution. Firstly, we model risk process R_t of the cedent by a Cramer-Lundberg process with claim arrival intensity $\lambda > 0$. Secondly, we consider the Sparre-Andersen process with claim inter-arrival time distributed as Erlang(2) with scale parameter β, i.e. the claim arrival times T_i are i.i.d. random variables with density $q(x) = \beta^2 x e^{-\beta x}$. In the second case for the simplicity of the equations we assume that only investment is possible.

So we consider adapted to filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ strategies $(A, b) = \{(A_t, b_t), t \geq 0\}$ ($A = \{A_t\}$ in the second case). The surplus process R_t^{Ab} (R_t^A respectively) under the corresponding strategy satisfies the following stochastic differential equation:

$$dR_t^{Ab} = (c(b_t) + \mu A_t)dt + \sigma A_t dW_t - d\sum_{i=1}^{N_t} \min\{Y_i, b_{T_i}\}$$

and

$$dR_t^A = (c + \mu A_t)dt + \sigma A_t dW_t - dS_t$$

[1]Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics. E-mail: gromovaleksandr@gmail.com

with the initial surplus $R_0^{Ab} = s$ ($R_0^A = s$).

Our goal is to maximize the survival probability. Assume that τ^{Ab} (τ^A) is the ruin time of the company using strategy (A_t, b_t) (A_t respectively), it is given by $\tau^{Ab} := \inf\{t \geq 0 : R_t^{Ab} < 0\}$. Then the survival probability of the insurer using strategy (A_t, b_t) or (A_t) with initial surplus s is $\delta^{Ab}(s) = \mathbf{P}[\tau^{Ab} = \infty | R_0^{Ab} = s]$ ($\delta^A(s) = \mathbf{P}[\tau^A = \infty | R_0^A = s]$) and we calculate the value function $\delta(s) = \sup_{A,b}\{\delta^{Ab}(s)\}$ ($\delta(s) = \sup_A\{\delta^A(s)\}$) to find optimal strategy (A_t^*, b_t^*) ((A_t^*) respectively) where supremum is attained.

2 Hamilton-Jacobi-Bellman equation

Suppose that the function $\delta(s)$ is twice continuously differentiable, stochastic integrals with respect to Brownian motion are martingales and all limits and expectations can be interchanged. Then with method used in [1] or [4] we obtain Hamilton-Jacobi-Bellman equation for the optimal survival probability in case of Cramer-Lundberg process

$$\sup_{b\geq 0}\sup_{A\geq 0}\left\{\frac{1}{2}\sigma^2 A^2 \delta''(s) + (c(b) + \mu A)\delta'(s) + \mathbf{E}[\delta(s - \min\{Y, b\}) - \delta(s)]\right\} = 0 \qquad (1)$$

with boundary condition $\delta(\infty) = 1$ and $\delta(s) = 0$ for $s < 0$. In case of Sparre-Andersen model and investment strategy $A = \{A_t\}$ using results of [2] and [3] we evaluate the following HJB equation

$$\sup_{A\geq 0}\left\{\left(-(c + \mu A)\frac{d}{ds} - \frac{\sigma^2 A}{2}\frac{d^2}{ds^2} + \beta\right)^2 \delta(s) - \beta^2 \mathbf{E}[\delta(s - x)]\right\} = 0. \qquad (2)$$

3 Basic results

Theorem 1. *Assume that $G(x)$ has a bounded density. Then there exists a strictly increasing solution $\delta(s)$ to* (1) *(or* (2) *respectively) on* $[0, \infty)$ *such that* $\delta(\infty) = 1$ *and* $\delta(s) = 0$ *for* $s < 0$.

Theorem 2. *Let $\delta(s)$ be a strictly increasing twice continuously differentiable function that solves the HJB equation* (1) *(or* (2) *respectvely). Then the optimal strategy will be* $(A^*(R_{t-}), b^*(R_{t-}))$ *($A^*(R_{t-})$ respectively), where $A^*(s)$ and $b^*(s)$ are arguments maximizing the left-hand side in* (1) *(or* (2) *respectively).*

Acknowledgments. The author is grateful to his scientific supervisor, professor E.V.Bulinskaya for valuable remarks and suggestions.

References

[1] *Gromov A.N.*, Optimal XL reinsurance strategies. Moscow University Mathematics Bulletin, 2011, v. 66, N 4, p. 153-157

[2] *Dickson D.C.M. and Hipp C.*, Ruin probabilities for Erlang(2) risk processes. Working Paper 148, Laboratory of Actuarial Mathematics, Copenhagen University, 1997.

[3] *Hipp C. and Plum M.*, Optimal investment for insurers. Insurance: Math. Econom., 2000, v. 27, p. 215–228.

[4] *Schmidli H.*, Stochastic Control In Insurance. Springer-Verlag, London, 2008.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

On the Probability of Ruin and the Deficit at Ruin[1]

Vladimir K. Kaishev[2]

Since the seminal paper by Gerber and Shiu, [1], the study of the joint distribution of the time to ruin and the deficit at ruin, have attracted considerable research interest, under the assumptions of the classical risk model. In this paper, we consider a more general, finite-horizon risk model, under which it is assumed that the premium income to the insurance company is represented by any non-decreasing, positive real function, claim inter-arrival times may possibly be dependent and claim severities may also be dependent with any joint discrete or continuous distribution. First, we present an overview of some recent results, derived under this model, by Ignatov and Kaishev, [2] and Dimitrova and Kaishev, [3]. The latter provide explicit expressions in terms of classical and exponential Appell polynomials, for the finite-horizon probability of (non-)ruin and the density of the time to ruin. Various special cases of the general risk model, including the classical case are considered and particular ruin probability formulae are shown to easily follow from the main results. A closed form expression in terms of classical Appell polynomials for the joint distribution of the time of ruin, and the deficit at ruin is further given, for the case of Poisson claim arrivals. The theoretical and numerical properties of our ruin-probabilistic results are also discussed and explored.

References

[1] *Gerber H.U. and Shiu E.S.*, On the Time Value of Ruin. North American Actuarial Journal, 1998, v. 2, N 1, p. 48-72.

[2] *Ignatov Z.G. and Kaishev V.K.*, Finite Time Non-Ruin Probability for Erlang Claim Inter-arrivals and Continuous Inter-dependent Claim Amounts. Stochastics an Intern. J. of Prob. and Stoch. Proc., 2012. (forthcoming, http://dx.doi.org/10.1080/17442508.2011.615932)

[3] *Dimitrova D.S. and Kaishev V.K.*, On the Infinite-time Ruin and the Distribution of the Time to Ruin., 2011, submitted.

[1]This talk is based on joint work with Z. Ignatov, Sofia University.

[2]Cass Business School, City University London. E-mail: `v.kaishev@city.ac.uk`

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Maximin Efficient Designs for Discriminating between Two Polynomial Models[1]

Viatcheslav B. Melas[2]

In this paper we describe an explicit solution for the problem of maximin efficient T-optimal designs for discriminating between two polynomial regression models of $m-2$ and m degrees, where m is an arbitrary number which is more or equal 2.

1 Introduction

Let experimental results be described by the regression equation

$$y = \eta(x) + \varepsilon,$$

where $\eta(x)$ is either $\eta_1(x)$, or $\eta_2(x)$ and ε is a random error. Assume that the errors of different observations are independent identically distributed random values with zero mean and common unknown variance, and x belongs to some set to be specified below. Consider the problem of testing the hypothesis

$$H_0 \,:\, \eta(x) = \eta_1(x, \theta_1)$$

versus the alternative

$$H_1 \,: \eta(x) = \eta_2(x, \theta_2),$$

where θ_1 and θ_2 are unknown parameter vectors, by results of r_i observations in points x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n r_i = N$, N — the total number of observations. This problem is of a great practical importance (see, e.g. [1]).

Denote by ξ a discrete probability measure given by the table

$$\xi = \left(\begin{array}{ccc} x_1 & \dots & x_n \\ \omega_1 & \dots & \omega_m \end{array} \right), \tag{1}$$

which is called an approximate experimental design, $r_i \approx \omega_i N$. For an optimal choice of the design a so called T-criterion was introduced in [2]. In the recent paper [4] T-optimal designs for discriminating between the two polynomial models

$$\eta_1(x, \theta_1) = \theta_{1,0} + \theta_{1,1} x + \dots + \theta_{1,m} x^m, \tag{2}$$

$$\eta_2(x, \theta_2) = \theta_{2,0} + \theta_{2,1} x + \dots + \theta_{2,m-2} x^{m-2} \tag{3}$$

on the standard interval [-1,1] were found analytically. But these designs can be used only under the condition that the ratio $\frac{\theta_{1,m-1}}{\theta_{1,m}}$ is known. Here we consider maximin efficient version (see [5] or [3]) of the T-optimality and describe the solution for the case when the ratio belongs to a given symmetric set and the design interval is [-d, d], where d is an arbitrary real number.

[1]This work was supported by RFBR grant N 12-01-00747.
[2]St.Petersburg State University, Faculty of Mathematics and Mechanics . E-mail: `vbmelas@post.ru`

2 Basic results

Let $m \geq 2$ and ξ_m denote the design with support points in the roots $-d = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = d$ of the polynomial

$$(x^2 - d^2)\left\{U_{m-1}\left(\frac{x}{d}\right) + \beta U_{m-3}\left(\frac{x}{d}\right)\right\}$$

and weights coefficients

$$\begin{aligned}
\xi_m(\mp d) &= \frac{1+\beta}{2[m+\beta(m-2)]}, \\
\xi_m(x_j) &= \left[m - 1 - \frac{(1+\beta)U_{m-2}\left(\frac{x_j}{d}\right)}{U_m\left(\frac{x_j}{d}\right) + \beta U_{m-2}\left(\frac{x_j}{d}\right)}\right]^{-1}, \ j = 1, \ldots, m-1,
\end{aligned}$$

$U_l(x)$, $l \geq 0$ denotes l-й the Chebyshev polynomial of the second kind, $U_{-1}(x) \equiv 0$.

Note that for an arbitrary compact set $I \subset R \cup \{-\infty, \infty\}$ there exists a unique solution of the problem

$$\inf_{b \in I} \frac{b^2 + h}{R(b)}(1 - h) \to \max_{0 \leq h \leq 1/2}, \tag{4}$$

where

$$R(b) = \max_{x \in [-d,d]} \min_{q \in R^{m-1}} \left|x^m + bx^{m-1} + q^T f(x)\right|^2, f(x) = (1, x, \ldots, x^{(m-2)})^T.$$

Denote this solution by h^*.

Theorem 1. *For $\beta = 1 - 2h^*$ the design ξ_m is unique maximin T-optimal design for discriminating between the models η_1 and η_2 if $I \subset R \cup \{-\infty, \infty\}$ is an arbitrary compact symmetrical set.*

This theorem reduces the initial problem to the problem (4) that can be easily solved numerically (note that an explicit representation for $R(b)$ is found in [4]).

Optimal designs for the cases m=2, 3 and 4 and $I = [-\infty, \infty]$ were calculated and will be given in the presentation.

References

[1] *Atkinson A.C., Bogacka B. and Bogacki M.B*, D- and T-optimum designs for the kinetics of a reversible chemical reaction. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 1998, v. 43, p. 185–198.

[2] *Atkinson A.C., Fedorov V.V.*, The designs of experiments for discriminating between two rival models. Biometrika, 1975, v. 62, p. 57–70.

[3] *Dette H.*, Designing experiments with respect to standardized optimality criteria. J. Roy. Statist. Soc., Series B, 1997, v. 59, p. 97–110.

[4] *Dette H., Melas V. and Shpilev P.*, T-optimal designs for discrimination berween two polynomial models. Annals of Statistics, accepted for publication.

[5] *Müller Ch.H., Pázman A.* Applications of necessary and sufficient conditions for maximin efficient design. Metrika, 1998, v. 48, p. 1–19.

СЕКЦИЯ 6

История математики
History of Mathematics

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

О замечании Насиреддина Туси в “Тахрири Уклидис” к шестой книге “Начал” Евклида[1]

Аваз А. Бабаев[2], Валерия Ф. Меджлумбекова[3]

Трактат Насиреддина Туси (1201-1274) “Тахрири уклидис” — “Комментарии к Евклиду”, помимо изложения всех 15 книг Евклида на основе переводов Хаджжадж ибн Юсиф ибн Матара (VIII-IX вв.) и Сабита ибн Курры (836-901), содержит многочисленные замечания автора теоретического характера, позволяющие проследить за развитием идей и математических понятий во времена Туси. Ранее работами А.П.Юшкевича, Б.А.Розенфельда была выявлена роль Насиреддина Туси в развитии теории составных отношений, тесно связанной с потребностями астрономии и тригонометрии. Общеизвестно, что именно Туси был создателем тригонометрии как самостоятельной науки(“Шаклул гита” - “Трактат о полном четырехстороннике”). Отношениям величин посвящены 5 и 6 книги “Начал”. В преамбуле (определениях) к шестой книге Евклида дается следующее определение составного отношения: “Говорится, что отношение составляется из отношений, когда количества этих отношений, перемноженные между собой образуют нечто”.

Как пишет переводчик и комментатор “Начал” Мордухай–Болтовский, “то обстоятельство, что Евклид никогда не рассматривает отношение как число, конечно, является одним из серьезнейших возражений против принадлежности Евклиду этого определения, подлинность которого оспаривается Гейбергом и др. исследователями”. Далее в примечаниях комментатор пишет, что это определение сыграло важную роль в арифметизации теории пропорций и замечает, что поскольку это определение дано в неясной форме “переводчики стараются выяснить его содержание вольным переводом”. Далее он приводит различные толкования математиков 16-17 веков этого понятия, от полного отрицания подлинности (Тарталья отрицает возможность *умножения* отношений) до арифметизации, хотя и частичной.

В “Тахрири Уклидис” после четвертого понятия о делении прямой в крайнем и среднем отношении (третьего определения у Евклида) вводится понятие произведения отношений, которое определяется так “это отношение, количество которого получается умножением одной части на другие”. Здесь же Туси замечает, что это определение имеется только в варианте Сабита ибн Курры.

Следующее определение — это определение деления отношений: “это такое отношение, количество которого получается раздроблением частей отношений”.

Заметим, что согласно определению книги 5 Евклида, “отношение есть некоторая зависимость двух однородных величин по количеству, говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно могут превзойти друг друга”.

“Часть есть величина от величины, меньшая от большей, если она измеряет большую”.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики - Грант №EIF-2011-1(3)-82/19/1.

[2]Институт Математики и Механики НАН Азербайджана. E-mail: ali_babaev@inbox.ru
[3]Институт Математики и Механики НАН Азербайджана. E-mail: MLera@mail.ru

Эти определения Туси относит к евклидовым.

Далее в собственных комментариях Туси уточняет определение умножение отношений. Он вводит величину, принимаемую за единицу, и рассматривает отношение величины A к B как отношение этой единицы к величине во столько раз (крат) большей, (измеряемой ею) во сколько B больше A. Это "крат" и есть количество или, по Туси, "мера отношения". Естественно, мера есть число и "меры"двух отношении можно перемножать и результат по отношению к "единице" и будет отношением–произведением, где количество есть произведение количеств двух отношений.

Составное отношение A к C — это отношение которое получается как произведение двух отношений A к B и B к C.

Величины в данном тексте рассматриваются как геометрические величины. Туси изображает их как отрезки. Здесь же он приводит обоснование, называя его доказательством.

В "Шаклул-гита" Туси напоминает определение 5 Евклида и развивает теорию составных отношений, уже по-видимому не ограничиваясь только их кратностью, но рассматривая отношения величин, имеющих дробную меру, что позволило связать отношение величин с отношением чисел.

Заметим, что составные отношения рассматривал еще Сабит ибн Курра при доказательстве теоремы синусов (извлечение из его книги Туси помещает в "Шаклул Гита"). По-видимому, это и вызвало появление дробных мер, а затем к определению числа, которое Туси дает в трактате "Сборник по арифметике с помощью доски и пыли".

"Число — это количество, присваивающееся единице и тому, что состоит из единиц, либо абсолютно, либо относимое к совокупности, предполагающей единицу. Первое — это целые (правильные) числа, вторые — дроби".

В заключении, в качестве еще одного аргумента для подтверждения подлинности определения 5 процитируем Аристотеля: "Соотнесенным называется то, что относится как двойное к однократному, как тройное к трети и вообще как то, что в несколько раз больше, к тому что в несколько раз меньше" (Метафизика, 5 книга, глава 15).

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Киевские эпизоды жизни Б.В. Гнеденко[1]

Наталья Г. Баранец[2], Андрей Б. Верёвкин[3]

В начале 50-х годов в Киевском университете академик Б.В. Гнеденко оказался вовлечённым в конфликтную ситуацию, которую мы реконструируем, опираясь на документы из архива профессора Г.Е. Шилова (ЦМАМЛС, ф. 167).

В 1950 году Б.В. Гнеденко стал работать в Киевском университете и в Институте математики Украинской Академии наук. С университетом были связаны непредвиденные трудные моменты его научной деятельности. На механико-математическом факультете КГУ в этот период оказались с одной стороны, принадлежащие к Московской математической школе Б.В. Гнеденко и Г.Е. Шилов, а с другой – находившиеся под научным влиянием уехавшего в 1949 году из Киева академика Н.Н. Боголюбова киевляне (В.Н. Борисенко, Ф.И. Гудименко, Л.С. Дмитренко, В.Е. Дьяченко, И.А. Зозуля, И.М. Карнаухов, Ф.С. Лось, М.М. Сидляр) и приехавший из Саратова Г.Н. Положий. Руководство мех-мата КГУ не обрадовалось назначению Г.Е. Шилова заведующим кафедрой математического анализа и мешало его научно-педагогическим инициативам. Одновременно обструкции подвергался поддерживающий Шилова заведующий кафедрой теории вероятностей и алгебры академик Б.В. Гнеденко.

Описание притеснений Г.Е. Шилова на факультете изложено в его письмах А.Н. Колмогорову и в докладной записке секретарю ЦК КПУ Л.Г. Мельникову от 15 января 1953 года [1, л. 4–23], идею написания которой подсказал Колмогоров. В записке Шилова описано несправедливое отношение на факультете к Б.В. Гнеденко, и в том числе осуждение на заседаниях Учёного Совета факультета 13 и 20 октября 1952 года его книги “Очерки по истории математики в России”. Доклад о книге делал доцент Ф.С. Лось, работы Гнеденко не читавший, который “построил этот доклад по принципу злостного очернения книги и приклеивания её автору ярлыков, свидетельствующих о его политической неблагонадёжности: космополитизм, лузинщина, пренебрежение к русскому языку и презрение к русскому народу”. Лось, в частности, утверждал, что “во-первых, книг по истории математики в России для широкого читателя писать не следует, а во-вторых, что обсуждаемая книга вообще никому не нужна. . . ” [1, л. 15].

Шилов сообщил о том, как Гнеденко лишали киевских учеников, переманивая их в аспирантуру к декану Положему [1, л. 18], не давали преподавать на факультете, переведя на полставки и отдав курсы по вариационному исчислению и интегральным уравнениям доценту Лосю [1, л. 22].

О ненормальной ситуации на факультете написал секретарю ЦК КПУ Мельникову и сам Гнеденко, как и Шилов в партии не состоявший, указав в нём недостаточную научно-педагогическую квалификацию ряда преподавателей факультета, плохую организацию

[1]Работа поддержана грантом РГНФ N 11-13-73003а/В.

[2]Ульяновский государственный университет, факультет гуманитарных наук и социальных технологий. E-mail: n_baranetz@mail.ru

[3]Ульяновский государственный университет, факультет математики и информационных технологий. E-mail: a_verevkin@mail.ru

работы с аспирантами, отсутствие научных кружков, саботаж организации научной жизни: “Мои попытки изменить положение сначала путём постановки животрепещущих вопросов математического образования на совете факультета и на открытых партийных собраниях, а также обращение к руководству факультета вызывали резкое сопротивление руководства факультета и группы близких им лиц. Обо мне стали распространяться вымышленные слухи, сеяться сомнение в моей политической благонадёжности” [1, л. 24–29].

Немного иной ракурс этой истории придаёт письмо от 11 ноября 1952 года Шилову от Колмогорова, согласившегося с ненормальностью сложившихся на факультете отношений, но указавшего на необходимость компромисса с киевскими коллегами. Колмогоров считал, что члены факультета, узнав о высокой оценке работы Гнеденко и Шилова, “спокойно предпочтут потесниться и дать Вам достаточный простор для работы” [1, л. 35]. По его мнению, сами Гнеденко и Шилов отличались горячностью характера и могли настроить киевлян против себя поступками, воспринятыми как высокомерие. Колмогоров подчеркивал, что интересы науки и общего дела должны быть выше личных конфликтов и обид.

Нападки на Б.В. Гнеденко в Киевском университете привели к срыву исправленного переиздания его “Очерков по истории математики в России”. Предложения Шилова и Гнеденко о нормализации положения на мех-мате КГУ были отклонены руководством университета и республики. В результате они покинули Киев, вернувшись в Московский университет (Шилов – в 1954, а Гнеденко – в 1960). Несмотря на трудности, Б.В. Гнеденко всё-таки удалось создать в Киеве школу по теории вероятностей.

Список литературы

[1] *ЦМАМЛС*, ф. 167, оп. 1, д. 39.

Международная конференция
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Научно-методические аспекты преподавания математики в школе им. А. Н. Колмогорова (в историческом ракурсе)

Александр А. Русаков[1]

В работе анализируются методические россыпи проектирования учебных курсов математики в школе им. А. Н. Колмогорова.

> Всякое образование начинается с грамоты и школы. Поэтому судьба будущей России лежит в руках русского учителя — преподавателя школы и гимназии, а также профессора, который есть учитель учителей.
>
> *И. А. Ильин, «Творческая идея нашего будущего», 1934*

В 2013 году исполняется 50 лет от начала реализации Колмогоровского педагогического проекта — открытие физико-математической школы интерната № 18 при МГУ им. М. В. Ломоносова (ФМШ № 18). Школа открылась 2 декабря 1963 года, инициаторами создания школы были ведущие ученые страны — академики Андрей Николаевич Колмогоров, Исаак Константинович Кикоин, Иван Георгиевич Петровский и др.

Начиная с 1988 года на базе школы-интернат № 18 был организован Специализированный учебно-научный центр МГУ им. М. В. Ломоносова, (сначала возглавил СУНЦ проректор Московского университета — ведущий математик России, профессор В. В. Козлов, ныне академик, вице-президент РАН), который стал самостоятельным структурным подразделением Университета со всеми его атрибутами (появились кафедры), возникло звание «Учащийся Московского университета» с соответствующим удостоверением, правами и обязанностями. Здесь обучаются школьники десятых и одиннадцатых классов (около 360 учащихся); имеется как двухгодичный цикл обучения, так и одногодичный. Основатели школы одной из её первых задач видели возможность получить ребятам из сельской местности хорошее, наравне со столичными школьниками, физико-математическое образование. Набор происходит на местах (более 40 областей и регионов Российской Федерации, включая и московских школьников), куда выезжает команда экзаменаторов из учителей математики и физики школы, студентов, аспирантов и профессоров Московского университета. Поступление в школу на конкурсной основе, зачисление — по приказу ректора Университета.

В колмогоровской школе существуют пять специализаций обучения: физико-математическая, компьютерно-информационная, химическая, биологическая и биофизическая; для одногодичного обучения — только физико-математическая. Система обучения лекционно-семинарская. На каждом уроке по профилирующим дисциплинам работают одновременно два-три преподавателя, что позволяет обеспечить индивидуальный подход в

[1]ФГНУ «Институт информатизации образования» Российская академия образования, E-mail: vmkafedra@yandex.ru

процессе обучения и значительно повысить его эффективность. Здесь учат не столько фактам, сколько идеям и способам рассуждения, побуждая учеников к самостоятельным исследованиям. Технология обучения решению задач вырабатывалась в школе-интернате А.Н. Колмогорова с первых дней ее существования. Свойственная для коллектива школы академическая свобода даёт возможность смелых экспериментов и инновационных подходов в формировании содержания образовательных курсов и методики их преподавания. Самоконтроль преподавателя наивысшая форма выражения академической свободы, предоставленной ему в обучении, воспитании и просвещении учащихся, следуя пророческой идее А. Н. Колмогорова о необходимости и возможности всестороннего развития и воспитания школьников в школе-интернате. Он писал «Я думаю… «в душе» вы, конечно, увлечены всеми сторонами человеческой культуры, музыкой, литературой, искусством, хотите понимать жизнь человеческого общества всесторонне и всесторонне в ней участвовать». Для преподавания математического предмета формируется команда из трёх преподавателей, один из них является ведущим, ему поручается чтение лекций. На каждом уроке математики все трое участвуют в процессе обучения с собственной ролевой функцией. Творческая атмосфера в команде преподавателей это и самоконтроль, и взаимное обогащение опытом преподавания и сохранение традиций, методических находок. Основной положительной оценкой наших инновационных педагогических методик являются успешные прохождения вступительных испытаний выпускников школы на факультеты МГУ и других ведущих ВУЗов страны, высокие баллы на Государственной итоговой аттестации, а также мониторинг выпускников школы за все почти пятьдесят лет ее существования.

С уверенностью можно сказать, что оправдала себя идея А. Н. Колмогорова о том, чтобы в школе-интернате были три математических дисциплины: алгебра, геометрия и математический анализ (9 часов в неделю, по три на каждый предмет, и из них один час — лекционный) изучались *раздельно*, а не так, как в общеобразовательной школе, где курсы алгебры и математического анализа объединены в один.

Стержнем проектируемой методической системы обучения в школе-интернате должна была выступать, по мнению А. Н. Колмогорова, методико-математическая ситуация, естественно ставящая школьника в положение, когда он, осваивая новый учебный математический материал, не только накапливает сумму знаний, но в процессе успешного решения некой системы задач, у него формируется ощущение, что он *сам решил математическую задачу*, по сложности доступную студентам математических специальностей. Самое важное при этом, чтобы школьник это ощущение успешности и необходимости пронес через всю жизнь.

История становления колмогоровской школы-интернат более интересна и насыщенна, особенно в той её части, которая связана с опытно-экспериментальным формированием структуры и содержания собственно математического образования, становлением методики работы преподавателей школы-интернат с одаренными детьми, постановкой учебно-воспитательной работы.

Глобальная цель формирования общей математической одаренности, ее развитие и профессиональная ориентация школьников в естественнонаучном знании достигается методическими россыпями проектирования учебных курсов по математике. Это и спиралевидное изложение курса математического анализа (в отличие от традиционного линейного изложения), построение учебного курса с целью решения определенной (трудной даже для студента) задачи, реализация в учебном курсе взгляда на математику как на экспериментальную науку (иначе говоря, обучение происходит в форме повторного (субъективного) открытия, а не в простой передаче идей), введение в учебный процесс математического практикума (лабораторные работы по математике), инновационная методика организации творческо-поисковой деятельности учащихся, и многое другое.

Мониторинг учителей и преподавателей работавших в разные годы в школе им. А. Н. Колмогорова доказывает, что в разные времена школа для одних становилась стартовой площадкой, своего рода плацдармом для дальнейшего профессионального становления, как в области математики, так и в области педагогики и школоведения, для других — не совсем положительным опытом работы в школьном коллективе и необходимостью поиска другой траектории жизненного пути.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Проблема нефротоксического действия йодсодержащих рентгеноконтрастных веществ

Иван Г. Рядовой, Валерий Н. Тутубалин [1]

В работе обсуждается недавняя история применения вероятностно-статистических методов к медицинским проблемам.

1 Введение

Примерно сорок лет в медицине применяются йодсодержащие вещества (РКВ), вводимые в кровеносные сосуды с целью их контрастирования при рентгеновском исследовании. В частности, в случае ишемической болезни сердца возможна эндоваскулярная катетеризация сосудов сердца с лечебной целью стентирования стенозов коронарных артерий. К сожалению, в ряде случаев приходится использовать большие объемы РКВ: в отдельных случаях до 1 литра, в котором содержится более 300г йода (конечно, в виде соединения). Выведение РКВ создает большую нагрузку на почки пациента, а в некоторых случаях приводит и к опасной почечной недостаточности.

2 Основные результаты

Случаи смерти в результате воздействия РКВ на почки и даже случаи регоспитализации пациентов для диализа по причине возникшей почечной недостаточности все же слишком редки, чтобы допускать статистическое исследование. Суррогатом серьезных осложнений со стороны почек является так называемая контраст-индуцированная нефропатия (КИН), которая формально определяется как повышение концентрации креатинина крови на 25 и более процентов в ближайшие несколько суток после применения РКВ (по отношению к уровню креатинина до вмешательства), либо абсолютное повышение креатинина на 44мкМ/л и более. Частота наступления КИН составляет единицы процентов для всей популяции пациентов и поднимается до примерно 30 процентов у лиц с предшествующей почечной патологией. Чрезвычайно желательно иметь математическую формулу, выражающую вероятность события КИН через какие-то параметры, характеризующие пациента и ход эндоваскулярного вмешательства.

Подобная формула (для другой ситуации: вероятности возникновения ИБС) в виде многомерного логистического закона была опубликована в 1967 году (Фрэмингемское исследование). Для вероятности КИН имеются десятки публикаций, но в публикациях приводятся не все необходимые значения оцененных параметров. Таким образом, за время с 1967 года по недавнее время понимание основного смысла получаемой формулы было утрачено. Возникает нелегкий вопрос: годятся ли на что-нибудь результаты этих исследований? С одной стороны, налицо безграмотные ошибки, но с другой, все же тысячи

[1] ФГУ «Федеральный научный центр трансплантологии и искусственных органов» ; Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: vntutubalin@yandex.ru

наблюдений. На этот вопрос нельзя ответить, не имея собственных аналогичных данных. В Центре трансплантологии с 1999 года производилось эндоваскулярное лечение ишемической болезни сердца у больных с пересаженной почкой. Мы рассмотрели 50 случаев таких вмешательств, из них в 14 случаях имела место КИН. Путем некоторых ухищрений можно примерно восстановить необходимые параметры многомерной логистической модели из ряда зарубежных публикаций. По этим параметрам стандартным образом рассчитывается математическое ожидание и дисперсия того числа случаев КИН, которое должно было бы наблюдаться у наших больных при адекватности логистической модели и верных значениях параметров. Мы рассмотрели три варианта восстановления параметров; соответствующие математические ожидания следующие: 11.2; 14.7; 15.8. Ни одно из этих чисел не отклоняется значимо от фактического значения 14. Значит, несмотря на все недостатки, результаты упомянутых выше публикаций являются весьма ценными. В заключение рассмотрим по нашим данным вопрос об эффективности эндоваскулярного лечения. Мы сопоставили смертность пациентов после эндоваскулярного лечения с демографической смертностью, учитывающей лишь возраст и пол (использована таблица за 2009 год по данным Роскомстата). Для удобства вычислений можно таблицу смертности приблизить законом Гомперца-Мейкема (интенсивность смертности имеет вид $a+b\exp(ct)$. Математическое ожидание числа смертных случаев лиц того же возраста и пола, что и наши пациенты, за время с 1999 по 2011 годы оказалось равным 8.17. Фактическое число смертей равно 8.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Персонализация истории математического образования

Ольга А. Саввина[1]

В работе рассматривается реализация персоналистического подхода в серии «Математики-педагоги России. Забытые имена».

Историю математического образования можно описывать не только через перечисление и характеристику событий, течений и тенденций и пр., а сквозь призму судеб конкретных персоналий. Такой персоналистический подход к изложению исторических событий и фактов математического образования реализован в серии «Математики-педагоги России. Забытые имена».

Первая книга серии появилась в свет в 2006 г. Она была посвящена сербскому педагогу-математику Ф.В. Филипповичу (1878–1938). Затем вышли книги о московских ученых П.А. Некрасове (1853–1924), О.И. Сомове (1815–1877), Н.В.Бугаеве (1837–1903) и киевском педагоге-математике А.М. Астрябе (1843–1925).

Особенностью каждой книги серии является то, что в ней не просто исследуется герой, дается характеристика его личности, мировоззрения, педагогической деятельности, вклада в науку, но и реконструируется культурная среда, воссоздается образовательная ситуация, состояние науки и пр., т.е. описывается то историческое время, в которое протекала жизнедеятельность того или иного педагога.

Поэтому при выборе персоналии принимается во внимание прежде всего ее масштабность.

Помимо масштабности в качестве непременного параметра рассматривается нравственно-этическая позиция педагога-математика. В том смысле, что, чем более порядочным был человек, чем более нравственными и подвижническими были его дела и поступки, тем более его жизнь заслуживает исследования и анализа.

Не менее существенным параметром при отборе персоналии для авторов серии стала степень известности и непротиворечивости биографических сведений. Предпочтение отдавалось тем педагогам-математикам, факты о жизни и деятельности которых скудны или требуют уточнения. В частности, по архивным документам были уточнены сведения о школьных и юношеских годах Н.В. Бугаева, Ф.В. Филипповича и др.

[1]Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, физико-математический факультет. E-mail: oas5@mail.ru

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

B.V.Gnedenko in East Germany

Hans-Joachim Girlich[1]

In the talk we consider B.V.Gnedenko's work in Berlin at the Humboldt University during the whole year 1954 and discuss his part on the development of a school for applied probability in East Germany.

At the beginning of his activities as a visiting professor at the *First Mathematical Institute of Humboldt University* Boris Gnedenko (1912-1995) assessed the situation in mathematics after the war in the occupied country. He was supported by Lev Kaluzhnin (1914-1990) who worked as a professor for mathematics since 1953 in Berlin at the university and the Academy of Science, not only as a teacher but also as an expert making available Russian mathematical textbooks for German students (see the list of 70 books on pages 153/154 in [1]). L.Kaluzhnin also translated into German B.Gnedenko's lectures on *Complex analysis* I,II besides *Probability theory* in the spring and *Mathematical statistics* in the autumn of 1954. Heinrich Grell (1903-1974) organized with B.Gnedenko and L.Kaluzhnin a *Seminar on functional analysis and probability theory.* Under the participants there were four aspirants with great interest in stochastics. In regular meetings in his office B.Gnedenko discussed with them problems and exercises also to his lectures. Later, as researchers and teachers, they made probability theory to an indispensable part of mathematical research and education; it were Johannes Kerstan (1926-1997) in Jena, Klaus Matthes (1931-1998) in Berlin, Wolfgang Richter (1932-1972) in Dresden and Hans-Joachim Roßberg (born 1927) in Leipzig.

An international *Conference on probability and mathematical statistics* (the first in Germany after the war) organized by B.Gnedenko (see [2]) was an important event in Berlin in autumn of 1954. He succeeded to bring together first rank specialists with Maurice Frechet (1878-1973) and Andrei Kolmogorov (1903-1987) at the head.

After B.Gnedenko's return to Kiev German editions of his books [3, 4, 5] were published in Berlin. The first two textbooks achieved more than ten editions in Germany.

At a congress in Vilnius in 1960 B.Gnedenko suggested research on point processes to an increased extend. Results of the effort in East Germany are summarized in five monographs [6, 7, 8, 9, 10] published in the *Wiley series in probability and mathematical statistics*. In the sixties B.Gnedenko and coworkers wrote two books on applied probability which are translated in German [11, 12] promoting studies in queueing and reliability theory in our country.

In October 1975 B.Gnedenko organized a meeting at Moscow State University where was decided to make a handbook of queueing theory. 14 authors from Soviet Union and 16 from East Germany created a two-volume compendium of formulas and methods of queueing theory with more than 1100 pages published only in German [13].

For education in mathematics in grammar schools Gnedenko gave valued hints. He wrote: "In our country we have to found quickly a mathematical journal for pupils..." (see [14] p. 58). In January 1967 the first issue of the "Mathematische Schülerzeitschrift **alpha**" appeared in East Germany working effektively more than twenty years.

[1]Leipzig University, Faculty of Mathematics and Computer Scince. E-mail: `girlich@math.uni-leipzig.de`

References

[1] *Gnedenko B.V., Kaluzhnin L.A.*, O matematicheskoi0 zhizni v Germanskoi0 Demokraticheskoi0 Respublike. Uspehi mat. nauk, 1954, t.9, v.4, 133-154.

[2] *Gnedenko B.W. (Hrsg.)*, Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik in Berlin vom 19. bis 22. Oktober 1954. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

[3] *Gnedenko B.W.*, Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Akademie-Verlag, Berlin 1957. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main 1978.

[4] *Gnedenko B.W., Chintschin A.J.*, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955.

[5] *Gnedenko B.W., Kolmogorov A.N.*, Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen. Akademie-Verlag, Berlin, 1959.

[6] *Matthes K., Kerstan J., Mecke J.*, Infinitely Divisible Point Processes. John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, 1978. German Edition: Berlin, 1974.

[7] *Franken P., König D., Arndt U., Schmidt V.*, Queues and Point Processes. Akademie-Verlag, Berlin, 1981. John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, 1982.

[8] *Stoyan D.*, Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models. John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore 1983. German Edition: Akademie-Verlag, Berlin, 1977.

[9] *Stoyan D., Kendall W.S., Mecke J.*, Stochastic Geometry and Its Applications. John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore 1987. Akademie-Verlag, Berlin, 1987.

[10] *Brandt A., Franken P., Lisek B.*, Stationary Stochastic Models. Akademie-Verlag, Berlin, 1990, John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1990.

[11] *Gnedenko B.W., Beljajew J.K., Solowjew A.D.*, Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie. Akademie-Verlag, Berlin, 1968.

[12] *Gnedenko B.W., Kowalenko I.N.*, Einführung in die Bedienungstheorie. Akademie-Verlag, Berlin, 1971. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1971.

[13] *Gnedenko B.W., König D. (Hrsg.)*, Handbuch der Bedienungstheorie I: Grundlagen und Methoden, II: Formeln und andere Ergebnisse. Akademie-Verlag, Berlin,I 1983, II 1984.

[14] *Gnedenko B.W.*, Perspektiven der mathematischen Ausbildung. Probleme des Mathematikunterrichts - Diskussionsbeiträge sowjetischer Wissenschaftler. Volk und Wissen Verlag, Berlin, 1965, p. 28-59.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Kolmogorov probability theory application conditions[1]

Vladimir M. Reznikov[2]

In the paper we discuss the author's results on the Kolmogorov's methodological principles concerning the applicability of the probability theory.

1 Introduction

Kolmogorov's axiomatic probability theory has gained recognition since 1938. It became widely known after English publication of Kolmogorov, Gnedenko, Kramer's books [1, 2, 3]. All mathematicians know very well Kolmogorov's axiomatic. At the same time, probability theory application conditions defined by Kolmogorov are not so well-known. Even in the works of Gnedenko and Kramer these conditions are presented incompletely and in a modified form.

In our view, the analysis of probability theory application conditions carried out by Kolmogorov belongs to important historical and methodological problems of probabilistic theory. 1) These conditions played a certain role in the recognition of Kolmogorov's probability theory as a working discipline. In particular, in his letter to Kolmogorov Frege pointed out that full comprehension of mathematical objects comes from the understanding of their application. 2) The analysis of conditions is important in the context of the application of probabilistic mathematics, since it is the most popular mathematical discipline in applications. At the same time, numerous cases of the inadequate application of probabilistic mathematics in various sciences are known. 3) As Kolmogorov rightly observed, the advance in the foundations of probabilistic mathematics conceals a special and important problem, which is the correct application of mathematics. Other arguments for the necessity to investigate Kolmogorov's requirements for probability theory application are examined in [5].

2 Basic results

Kolmogorov probability theory application conditions became the focus of interest in connection with the investigations by Shafer and Vovk devoted to their probability theory based on game martingales and with Kolmogorov's centenary. In a number of works they demonstrated that the postulates describing probability theory application conditions in Kolmogorov turned out to be dependent. Shafer and Vovk suggested various explanations of the dependency of the postulates. This paper shows that only two of them are reasonable. The most serious explanation is related to the difficulties in a correct application of Bernoulli theorem on the basis of which the dependency of postulates is determined [4].

From the formal standpoint, as we demonstrated in [5], Kolmogorov's postulates are not dependent in the context of Bernoulli theorem. In spite of the fact that Kolmogorov gave full attention to the significance of the test independence, he did not include this condition into

[1]This work was supported by RFBR grant N 11-07-00560a
[2]Institute of Philosophy and Law SB RAS, Novosibirsk. E-mail: mathphil1976@gmail.com

the list of requirements for the probability theory application. It is to this perhaps that the mistake of Shafer and Vovk is due. In spite of the formal independence of the postulates in the context of Bernoulli theorem the explanation of their connection on the basis of difficulties in the application of Bernoulli theorem is of significance in its own right. We have demonstrated that the difficulties in the application of the theorem are caused not only by the independence test but also by the asymptotic character of the theorem as well as by other reasons.

References

[1] *Kolmogorov A. N.*, Foundations of the Theory of Probability. New-York: Chelsea Pub. Co., 1950.

[2] *Gnedenko B. V.*, The theory of probability. New-York: Chelsea Pub. Co., 1967.

[3] *Kramer H.*, Mathematical methods of statistics. Princeton University Press, 1946.

[4] *Shafer G., Vovk V.*, Probability and Finance it is only a game! New-York: Wiley-Interscience, 2001.

[5] *Резников В.М.*, Критический анализ условий применения теории вероятностей по Колмогорову. Вест. Новосиб. Ун-та. Сер. Философия. Новосибирск, 2012, т. 10, N 1, с. 19–24.

СЕКЦИЯ 7

Преподавание математики
Teaching of Mathematics

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Надпредметное содержание школьного математического образования

Алексей В. Боровских[1], Николай Х. Розов[2]

Обсуждается проблематика надпредметного содержания математического образования – правда ли, что математика «учит думать», и в чём это выражается.

1 Введение

Принято считать, что математика (точнее, изучение математики) даёт человеку «умение думать». Это выражено в целом ряде известных слоганов, принадлежащих разным великим людям. Правда, при попытке несколько точнее разобраться в том, что такое «уметь думать», и почему именно математика даёт это умение, практически все, кто эти слоганы цитирует, начинают этак расплывчато водить руками и туманно ссылаться на то, что «это видно», что «опыт показывает», что «я и сам на себе это почувствовал», и т.п. Все эти «объяснения», конечно, находятся за рамками научного понимания, а тем более, научного основания для того, чтобы делать те или иные конкретные выводы по содержанию математического образования, в первую очередь — школьного.

Довольно долго вопрос «решался» путём простого сохранения традиции и воспроизведения, с теми или иными модификациями, существующей методики обучения математике как вполне удовлетворительной и достаточно эффективной. Но времена меняются, и вопросы о том, зачем мы учим детей тому или иному предмету, осваиваем ту или иную тему, преподаём по той или иной методике приобретают значение, которого ещё совсем недавно за ними никто и не усматривал. Особенно это стало актуальным в контексте постоянных пересмотров и «модернизаций» школьных программ, «инновационных» методов обучения (которые всё более уводят нас от действительного образования к простому просвещению), новых образовательных стандартов, и пр., и пр.

Всё это можно было бы отнести к сиюминутным проблемам, но, увы, дело не в только и не столько в конъюктурных несуразицах, сколько в реальных процессах, происходящих в системе образования. Одним из фундаментальных факторов здесь оказывается изменение целей образования, прежде всего - общего [1]. Одновременно с явно просматривающейся тенденцией к утрате значимости чисто предметного знания в средней школе, происходит и другой процесс: на первый план все более выходит развитие ребенка.

Одним из главных следствий этого факта оказывается необходимость смотреть на изучение учебных предметов школьной программы не как на цель обучения, а как на средство, орудие обучения, воспитания и развития. Цель же обучения находится отнюдь не в предметной области. То, чему человек учится, что он приобретает в процессе предметного обучения, но что не связано напрямую с предметом, составляет надпредметное содержание образования. Это содержание весьма объемно и нетривиально по структуре,

[1]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, факультет педагогического образования; механико-математический факультет. E-mail: bor.bor@mail.ru

[2]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, факультет педагогического образования; механико-математический факультет. E-mail: fpo.mgu@mail.ru

и более-менее формализованное описание этого содержания и даёт, в частности, ответ на вопрос, что такое «уметь думать». А заодно оказывается, что это умение, с одной стороны, порождается не самой математикой как предметом размышлений, а скорее методикой её преподавания[2], а с другой — зависит от вещей, чрезвычайно далёких, на первый взгляд, от математики [3, 4].

Принципы преподавания математики идут из глубокой древности. Еще комментарии Прокла к «Началам» Евклида показывают, что этот труд – не изложение научной системы геометрии (как это часто представляют), а методически выверенный учебник, в котором геометрическое содержание является лишь материалом для освоения основных логических конструкций, необходимых для формирования дедуктивного мышления.

2 Основные результаты

В докладе будет, во-первых, приведена общая схема надпредметного развития школьников [5], которая позволяет разделить целый ряд относительно независимых и качественно различных процессов. Это перестройки детского сообщества и форм деятельности этих сообществ, определяемая этими перестройками смена культурных и личностных позиций, порождаемые этой сменой шаги психического развития, основные слои и линии интеллектуального и коммуникативного развития, и, только как одна из компонент системы, — чисто предметное развитие, состоящее в освоении тех или иных предметных (например, математических) действий, инструментов, концепций и т.д.

Во-вторых, будут представлены результаты сравнительного анализа надпредметного содержания учебников по математике для начальной школы [1, 5], а также различные примеры того, как надпредметное развитие порождает целый ряд методических проблем школьного курса математики, традиционно считающихся «безнадежными» (проблема произвольного треугольника, освоение многочленов, понимание текста и др.) и как понимание этого влияния позволяет решать эти проблемы совершенно естественным образом.

Список литературы

[1] *Боровских А.В., Розов Н.Х.*, Деятельностные принципы в педагогике и педагогическая логика. М.: МАКС Пресс, 2010.

[2] *Вертгеймер М.*, Продуктивное мышление. Пер. с англ. М.: Прогресс, 1987. 336 с.

[3] *Боровских А.В., Розов Н.Х.*, Метод социализации как способ преодоления произвольности условий в игре и обучении. Игра как условие и механизм развития. Матер. 2-ой Ежегодн. конф. по играм в образовании. Красногорск: Красногорский филиал РАНХиГС при Президенте РФ, 2011. С. 277-285.

[4] *Боровских А.В., Соколова Е.В.*, «Преподавание математики» в классах компенсирующего обучения. На пороге взросления. Сб. тез. докл. Третьей Всерос. научн.-практич. конф. по психологии развития М.: МГППУ, 2011. С. 235-237.

[5] *Боровских А.В., Розов Н.Х.*, Надпредметное содержание школьного курса математики. Математическое образование в школе будущего: традиции и инновации: Материалы Всероссийской заочной научно-практической конференции с международным участием. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011. 306 с. С. 84–99.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Различные подходы к изложению основ теории вероятностей и их использование для учёта стилевых особенностей восприятия студентами

Татьяна А. Бородкина[1]

В работе обсуждаются результаты исследований автора о различных подходах к изложению основ теории вероятностей и их использование для учёта стилевых особенностей восприятия студентами.

Проведённый нами анализ вузовских учебников по теории вероятностей и математической статистике, начиная с учебника С.Н. Бернштейна (1947), показал, что их авторы традиционно придерживаются объективно-ориентированного (интерсубъективного) способа изложения учебного материала, который характеризуется обезличенным, бессюжетным, монологическим способом представления информации. Практика показывает, что такие учебники более востребованы преподавателями, чем студентами. Преподаватели вынуждены были выступать в роли транслятора излагаемой в учебниках информации.

Одним из главных требований стандарта третьего поколения является повышение самостоятельности студентов, в том числе и в работе с учебной литературой. Это ставит задачу написания учебников для студентов, а не для преподавателей.

Возможность решения этой задачи предоставляет субъектно-ориентированный подход к написанию учебных текстов, идея которого состоит в использовании дополнительных возможностей метатекстов для учета стилевых различий студентов, воздействия на личностную сферу, а также отражение в тексте учебников методологических установок их авторов и учёных.

Преобразование интерсубъективного текста учебников по теории вероятностей и математической статистике в субъективно-ориентированный учебный текст мы предлагаем осуществлять с учётом следующих требований:

1. раскрытие не только логики, но и гносеологии развертывания учебного содержания с постепенным подъёмом по уровням абстракции и строгости, предъявление студентам не только научных достижений, но и заблуждений учёных (парадокс Ж.Бертрана, ошибка Ж.Даламбера и т.п.);

2. создание информационных блоков, ориентированных на различные каналы восприятия (вербальный, визуальный, кинестестический, логический), которые должны быть отделены, но не изолированы друг от друга в структуре учебника для формирования у студентов стилевой гибкости;

3. интеграция теоретического и практического материала в учебниках для активизации познавательной деятельности студентов (использование метода целесообразных задач).

[1]Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, Институт математики и компьютерных наук. E-mail: `tat10borodkina@yandex.ru`

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Элементарное доказательство теоремы Бернулли, независимость и простые числа (итоги преподавания теории вероятностей в школе–интернате им. А.Н. Колмогорова)

Олег П. Виноградов[1]

Автор в течение ряда лет читал лекции по теории вероятностей в школе–интернате им. А.Н. Колмогорова. Перед ним стал вопрос: как наиболее просто объяснить закон больших чисел школьникам, которые знакомы только с формулой классической вероятности и формулой для числа сочетаний?

В настоящем сообщении излагается доказательство теоремы Бернулли, предложенное автором и основанное на идее П.Л. Чебышева, которую он использовал при доказательстве неравенства, носящего его имя. Оно не требует знакомства с такими понятиями, как независимость, математическое ожидание и дисперсия, и которое может быть обобщено на случай, когда вероятность успеха в испытаниях Бернулли является рациональным числом. Автор на своих уроках в 10–х классах ознакомил своих учеников с этим доказательством и убедился, что оно вполне доступно для школьников, которые обучаются в классах с углубленным преподаванием математики. Полный текст опубликован в [1] и [2].

При ознакомлении учеников с понятием независимости у одного из них возник вопрос: существуют ли вероятностные пространства, в которых не существует независимых событий? При изучении этого вопроса автору удалось доказать ряд теорем [3]. Для конечных вероятностных пространств в ряде случаев ответ на этот вопрос зависит от того, является ли некоторое число простым или составным. В частности, в равновозможном вероятностном пространстве не существует независимых событий тогда и только тогда, когда число элементарных событий является простым числом. Было проведено обсуждение результатов работы [3] со школьниками.

Список литературы

[1] *Виноградов О.П.*, Что такое закон больших чисел? М.: Школа им. А.Н. Колмогорова СУНЦ МГУ, 2008, с. 20.

[2] *Виноградов О.П.*, Что такое закон больших чисел? Математика в Колмогоровской школе, Изд. СУНЦ МГУ, 2009, с. 35–46.

[3] *Виноградов О.П.*, Простые числа и независимость. Современные проблемы математики и механики. т. VII. Математика. Механика. Выпуск 1. К 190–летию П.Л. Чебышева, Издательство Московского университета, 2011, с. 16–21.

[1]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: ovinogradov@mail.ru

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Применение системы Mathematica в обучении стохастике

Галина С. Евдокимова, Роман Е. Кристалинский[1]

На наш взгляд, удобной в обучении стохастике является система Mathematica [2, 3], которая имеет очень удобный интерфейс, развитую графику. Она позволяет использовать широкий спектр общематематических, статистических функций. Основным её преимуществом является возможность реализовать символьные вычисления различного вида, возможность работать в целочисленной арифметике. Преимуществом этой системы является также наличие мощного языка программирования, позволяющего реализовать достаточно сложные алгоритмы, возможность распараллеливать вычисления, возможность широко использовать результаты, полученные в других системах компьютерной математики. Для наиболее подробного ознакомления с возможностями системы Mathematica рассмотрим примеры.

Пример 1. Имеется устройство с четырьмя типами компонент, для которых известны цены, веса и вероятности успешного функционирования.

Каждая из компонент j-го типа резервируется при помощи m_j дополнительных компонент. Требуется найти вероятность успешной работы устройства. И при заданной величине стоимостных затрат и заданном весе определить число резервных элементов каждого типа, при котором вероятность функционирования системы будет наибольшей.

Решение рассматриваемой задачи состоит из двух блоков. В первом блоке находится значение вероятности успешной работы резервированной системы. На этом этапе студенту достаточно знать основные теоремы теории вероятностей. Во втором блоке решается достаточно сложная оптимизационная задача. Для её решения обычно используется метод динамического программирования, что требует достаточно больших временных затрат. С точки зрения теории вероятностей при реализации этого блока студент новой информации не получает. Использование системы Mathematica без ущерба для дела позволяет существенным образом снизить эти затраты. При этом задача приобретает ярко выраженный прикладной характер.

Пример 2. Для генерации псевдослучайных чисел чаще всего используют так называемые математические датчики. Эти датчики обычно представляют собой рекуррентные алгоритмы, генерирующие число y_n по предыдущему числу y_{n-1}. Один из таких датчиков ([1], с. 21) работает по следующей схеме. Задаются стартовое число k_0, множитель m и делитель d. Далее последовательно вычисляются $y_1,\ y_2,\dots$ по формулам

$$k_n = (mk_{n-1}) mod\ d,\ \ y_n = \frac{k_n}{d}.$$

Какие значения можно рекомендовать для чисел m и d? Выбор простого числа $d = 2^{31} - 1$ предпочтителен для тех компьютеров, которые позволяют использовать 32 двоичных разряда для представления целых чисел. Множитель m выбирают так, чтобы последовательность $k_1, k_2, \dots$ прежде чем зациклится, пробегала все возможные значения

[1]Смоленский государственный университет. E-mail: kaf-matem@smolgu.ru

от 1 до $d-1$. В результате изучения статистических свойств датчика для различных множителей было предложено, в частности, положить $m = 630360016$.

Решение. Запишем программу, позволяющую реализовать этот алгоритм. Вводим исходные данные $K = 1;\ m = 630360016;\ d = 2^{31} - 1$; Генерируем массив из 10000 псевдослучайных чисел

$$\mathrm{X} = \mathrm{Table}[0,\mathrm{I},\{I,1,10000\}];$$
$$\mathrm{Do}[\mathrm{k} = \mathrm{Mod}[\mathrm{m\ k,d}];\quad \mathrm{X}[[\mathrm{i}]] = \mathrm{N}[\mathrm{k/d}],\ \{i,1,10000\}].$$

Проверим качество описанного датчика. Для этой цели используем критерий согласия Пирсона. Отрезок [0,1] делим на $m = [1+3.22\lg(10000)]+1 = 14$ равных частей и находим, сколько псевдослучайных чисел попадает на каждый из полученных отрезков деления.

$$m = [1 + 3.22Log[10, 10000]] + 1;$$
$$h = \frac{1}{m};$$
$$P1 = Table[0, \{i, 1, m+1\}];\ P2 = Table[0, \{I, 1, m\}];$$
$$Do[P1[[i+1]] = P1[[i]] + h, \{i, 1, m\}]$$
$$g[x] = Table[Boole[x \le P1[[i+1]]\&\&x > P1[[i]]]], \{i, 1, m\}];$$
$$Do[P2 = P2 + g[X[[i]]], \{i, 1, 10000\}].$$

Элемент массива $P2$ равен числу псевдослучайных чисел, попавших на соответствующий отрезок деления отрезка [0,1]. Соответствующая теоретическая вероятность равна длине отрезка деления, т.е.h . Находим сумму

$$S = \sum_{i=1}^{14} \frac{(P2[[i]] - 10000h)^2}{10000h};\ S = N[S]$$

$$8.3228$$

Находим квантиль распределения χ^2 с числом степеней свободы $m-1$ порядка $\beta = 0.95$.

$$S1 = Quantile[ChiSquareDistribution[m-1], 0.95]$$

$$22.362$$

Так как $S1 > S$, то на уровне значимости 0.05 можно считать, что мы получили реализации случайной величины, распределённой равномерно на отрезке [0,1]. Реализация описанного алгоритма возможна только в системе, которая может выполнять вычисления с большими целыми числами. Такой системой является Mathematica. Ни в системе MathCad, ни в системе MatLab этого сделать нельзя.

Хотелось бы отметить, что уже сейчас система Mathematica довольно активно применяется в сфере образования. К сожалению, это не относится к нашей стране. Надеемся, что в дальнейшем ситуация изменится в лучшую сторону.

Список литературы

[1] *Лагутин М.Б.*, Наглядная математическая статистика. М.: Бином, 2009. 462 с.

[2] *Collin R., Murray D.* Mathematical Statistics with Mathematica, Springer, 2002. 481 с.

[3] *Hastings K.* Introduction to Probality with Mathematica. CRC Press, 2009. 400 с.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Из опыта преподавания вероятностных дисциплин в НИУ ВШЭ - Пермь

Анатолий П. Иванов, Марина В. Радионова[1]

В работе рассмотрены особенности преподавания теории вероятностей и математической статистики в Пермском филиале Научного исследовательского университета "Высшая школа экономики".

1 Введение

Математические дисциплины являются важнейшими дисциплинами общеобразовательного цикла практически любого вуза, прежде всего потому, что математика является наиболее универсальным инструментом познания мира, овладеть которым должен любой образованный человек. Знание математики является необходимым условием изучения других наук и соответствующих им учебных дисциплин, оно позволяет знакомиться со специальной литературой, осуществлять решение профессиональных задач, продолжить образование и самообразование. Таким образом, математическая подготовка является базой общей культуры и основой профессиональной подготовки будущих специалистов [1].

Теория вероятностей является одним из классических разделов математики, а вероятностные и статистические методы в настоящее время имеют широкое прикладное значение и представляют собой самостоятельную дисциплину математического блока в вузе.

2 Основные результаты

В НИУ - ВШЭ реализована образовательная система, основанная на модульном принципе организации учебного процесса и рейтинговой оценке результатов учебной деятельности. Модульный принцип организации учебного процесса предполагает разбиение учебного года на четыре учебных модулей (9-10 недель), в пределах которых осуществляется изучение нескольких разноплановых дисциплин или их законченных частей (предметных модулей). Основу рейтинговой системы составляет 10-бальная шкала оценки результатов учебной деятельности студентов, позволяющая более объективно, чем 5-бальная система, оценить полученные результаты.

В рамках модульно-рейтинговой образовательной системы на кафедре высшей математики Пермского филиала НИУ - ВШЭ разработана специальная технология обучения математическим дисциплинам MATHEMATICS, которая имеет целью: повышение качества математической подготовки; индивидуализацию обучения; активизацию и интенсификацию самостоятельной работы студентов; развитие мышления студентов; повышение творческого начала всех участников педагогического процесса [2].

Технология MATHEMATICS предусматривает: разбиение учебного материала на предметные модули; составление плана контрольных мероприятий; определение формы кон-

[1]Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики – Пермь, кафедра высшей математики. E-mail: `M.Radionova@rambler.ru`

трольных мероприятий студентов; составление плана самостоятельной внеаудиторной учебной работы студентов; разработку информационного и дидактического обеспечения обучения; мониторинг качества знаний студентов.

Особую роль в технологии MATHEMATICS играет система мониторинга качества знаний студентов, которая позволяет: получить информацию о состоянии подготовки студентов; выявить динамику подготовки каждого студента и группы в целом; определить факторы, оказывающие значимое влияние на усвоение студентами обязательных знаний; осуществить своевременную корректировку процесса обучения. На кафедре высшей математики НИУ - ВШЭ (Пермь) разработана тестовая технология мониторинга качества знаний [3]. Ее основу составляют специальная система и особая обработка результатов тестирования, которая состоит из нескольких этапов:

1. Входной тест, который позволяет сформировать картину математических понятий и навыков, приобретенных ранее. Этот тест позволяет определить в какой степени студенты подготовлены к усвоению учебного материала.

2. На этапе изучения самого курса проводятся промежуточные срезовые тесты по каждой изучаемой теме курса. Промежуточный тест содержит основные, типовые задания на применение полученных знаний и умений, основной целью которого является проверка правильности воспроизведения и понимания студентами определений, алгоритмов.

3. На заключительном этапе при завершении изучения курса проводится итоговый тест, позволяющий получить объективную картину усвоения курса в целом.

Обработка результатов проводится на современной компьютерной технике, с использованием сканера с автоматической подачей бланков и специальных компьютерных программ, которые предназначены для ввода результатов тестирования и создания отчета для оценки знаний каждого студента и всей группы в целом в виде таблиц и диаграмм.

Для студентов значительный интерес процесса обучения представляет итоговая рейтинговая таблица, по которой наглядно видно место студента в группе. Использование технологии тестирования позволяет за минимальное время получить объективную картину усвоения программного материала по дисциплине по каждому студенту и по группам в целом.

В заключении отметим, что использование технологии MATHEMATICS в учебном процессе вуза обеспечивает мотивацию обучения, стимулирует активную самостоятельную учебную деятельность студентов, а также развитие их творческого, инициативного отношения при изучении математических дисциплин, в том числе теории вероятностей и математической статистики.

Список литературы

[1] *Плотникова Е.Г.*, Межпредметные связи при обучении математике в вузе. Вестник МГОУ. Сер.: Педагогика, 2011, N 2, С. 95—100.

[2] *Морозова А.В., Плотникова Е.Г.*, Модульно-рейтинговая технология как средство активизации деятельности студентов при обучении математике. Вузовское преподавание. Часть 1., Изд-во ЧГПУ, 2009. С. 51—56.

[3] *Иванов А.П.*, Систематизация знаний по математике в профильных классах с использованием тестов. М.: Изд-во "Физматкнига" , 2004.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Собственные, несобственные и гомеособственные интегралы

Сергей В. Костин[1]

Введено понятие гомеособственного интеграла. Приведены примеры, показывающие обоснованность и целесообразность введения этого понятия.

Как известно, теория интеграла Римана строится в два этапа, а именно, сначала вводится понятие собственного интеграла, а затем на основе него вводится понятие несобственного интеграла. Сразу отметим, что термином «собственный интеграл» мы в нашей статье называем существующий интеграл Римана. В дальнейшем для простоты мы будем рассматривать одномерный случай и соответственно наряду с термином «интеграл Римана» мы будем использовать термин «определенный интеграл».

При внимательном изучении математического анализа можно заметить, что между собственными и несобственными интегралами очень много общего, во всяком случае, значительно больше, чем между ними и «несуществующими» определенными интегралами (классическим примером такого интеграла является интеграл от функции Дирихле). Можно сказать, что собственные и несобственные интегралы — это интегралы от достаточно «хороших» функций, то есть от функций, которые если не на всем промежутке интегрирования, то во всяком случае на отдельных его частях (не содержащих особых точек данного интеграла) интегрируемы по Риману.

По нашему мнению, заслуживает определенного внимания идея объединения собственных и несобственных интегралов в один класс, который мы предлагаем назвать классом гомеособственных интегралов. Такое название связано с тем, что греческое слово homoios (по-русски «гомео») означает «сходный, подобный». Таким образом, гомеособственный интеграл — это интеграл, в определенном смысле подобный собственному интегралу.

Если гомеособственный интеграл является собственным или сходящимся несобственным интегралом, то, по определению, гомеособственный интеграл сходится. Если гомеособственный интеграл является расходящимся несобственным интегралом, то, по определению, гомеособственный интеграл расходится.

Пример 1. Имеет место следующая теорема.

Теорема (о замене переменной в гомеособственном интеграле). *Пусть непрерывно дифференцируемая и строго монотонная функция $x = \varphi(t)$ отображает промежуток $(\alpha,\ \beta)$ на промежуток $(a,\ b)$ (здесь $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$), причем производная $\varphi'(t)$ обращается в нуль не более чем в конечном числе точек промежутка $(\alpha,\ \beta)$. Тогда имеет место следующее равенство:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \pm \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

[1]Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики, кафедра высшей математики. E-mail: kostinsv77@mail.ru

Здесь берется знак «+», если функция $\varphi(t)$ *возрастающая, и знак «−», если функция* $\varphi(t)$ *убывающая.*

Равенство (1) *надо понимать следующим образом: 1) если интеграл в одной из частей равенства* (1) *является гомеособственным интегралом, то интеграл в другой части равенства* (1) *тоже является гомеособственным интегралом; 2) если гомеособственный интеграл в одной из частей равенства* (1) *сходится, то гомеособственный интеграл в другой части равенства* (1) *тоже сходится, причем значения этих интегралов связаны соотношением* (1).

Легко привести примеры, которые показывают, что в результате замены переменной интегрирования собственный интеграл может превратиться в несобственный интеграл и наоборот. Однако свойство интеграла быть гомеособственным интегралом и, более того, свойство интеграла быть сходящимся (расходящимся) гомеособственным интегралом инвариантно относительно замены переменной интегрирования.

Пример 2. Пусть функция $f(x,\ p)$ непрерывна (как функция двух переменных x и p) на множестве $\Pi = (a,\ b] \times P$ (здесь $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, P — произвольный промежуток). Рассмотрим интеграл

$$I(p) = \int\limits_a^b f(x,\ p)\,dx, \tag{2}$$

зависящий от параметра $p \in P$.

Обычно понятие равномерной сходимости вводят почему-то лишь для несобственных интегралов. На самом деле это понятие играет важную роль для любых интегралов, зависящих от параметра (собственных, несобственных, а также собственных при одних и несобственных при других значениях параметра). Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть, например, интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{2xp}{(x^2+p^2)^2}\,dx$. Этот интеграл при любом значении параметра $p \in \mathbb{R}$ является собственным интегралом и, тем не менее, значение этого интеграла имеет разрыв в точке $p = 0$. Это связано с тем, что интеграл сходится неравномерно относительно параметра p в точке $x = 0$.

По нашему мнению, понятие равномерной сходимости надо вводить не для несобственных, а для гомеособственных интегралов. В рассматриваемом нами частном случае определение равномерной сходимости выглядит следующим образом.

Определение. Гомеособственный интеграл (2) называется *равномерно сходящимся* относительно параметра p на промежутке P, если:
1) при любом значении параметра $p \in P$ гомеособственный интеграл (2) сходится;
2) $(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, a_1 \in (a,\ b))\ (\forall\, a_2 \in (a,\ a_1))\ (\forall\, p \in P)\colon \left|\int\limits_a^{a_2} f(x,\ p)\,dx\right| < \varepsilon.$

Понятие равномерной сходимости играет важную роль в ряде теорем, относящихся к интегралам, зависящим от параметра. В частности, имеет место следующая теорема.

Теорема (о непрерывности гомеособственного интеграла по параметру). *Пусть гомеособственный интеграл* (2) *сходится равномерно относительно параметра* p *на промежутке* P. *Тогда функция* $I(p)$ *непрерывна на промежутке* P.

Мы привели два примера использования понятия гомеособственного интеграла. По нашему мнению, рассмотренные нами примеры показывают обоснованность и целесообразность введения понятия гомеособственного интеграла.

Международная конференция
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Опыт и проблемы организации соревнований по математике

Елена Н. Куликова[1], **Александр А. Русаков**[2]

В работе обсуждаются вопросы совершенствования методики подготовки, проведения и организации олимпиад по математике.

Наша средняя школа (аналогично и высшая школа) находится на распутье: *с одной стороны, она стремится к обновлению, с другой — пытается сохранить свои лучшие традиции.* Для того чтобы осознать настоящие и предвосхитить грядущие проблемы математического образования, вызванные, в частности, модернизацией средней и высшей школы, возникает необходимость напомнить, что по инициативе академиков П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова в 1935 году — Московский Университет им. М. В. Ломоносова проводит первую математическую олимпиаду школьников. В настоящее время олимпиады проводятся почти по всем предметам и почти на всех уровнях (от класса до международного масштаба).

«Венгрия в течение очень многих поколений была одной из лучших, а зачастую и самой лучшей на математических олимпиадах. Молодежь там была очень сильна. Потом вся эта молодежь начинала заниматься научной работой. Но им хотелось заниматься той научной работой, для которой ничего не надо дополнительно выучивать. Поэтому они брались за элементарные и очень трудные задачи. В итоге венгерской математической школы не существует» [1].

Никто не отрицает положительные стороны математических соревнований (Кубок памяти А. Н. Колмогорова, Уральский турнир юных математиков, Турнир им. М. В. Ломоносова, Математический Турнир городов, Конкурс-игра «Кенгуру» и др.), их используют в качестве стимула духа соперничества — в этом сила математических олимпиад. Сила потому, что в детском возрасте призыв посоревноваться находит отклик в душе почти каждого человека. Все детские игры несут в себе элемент соревнования. Этим и объяснялся огромный успех олимпиад [2]. Не может средний школьник, не обладающий определенными знаниями, умениями и навыками в математике выдержать такое напряжение.

Дети каких родителей могут участвовать сегодня в различных математических конкурсах? Кружки, «помощь репетиторов» (кому доступны мобильные технологии «сопровождения» питомцев), и др. — это дополнительное образование! А расходы на поездки (например, учащиеся (не москвичи) СУНЦ МГУ им. М. В. Ломоносова, ставшие победителями, и включенные по праву в команду города, должны оплачивать сами проезд и участие)?

Было бы логично предположить, что победители будут, прежде всего из регионов с большим населением или с большим городским населением (из расчета, что талантливые, одаренные дети рождаются равномерно), или из регионов, где сильные физико-математические школы, иначе где сложившееся добротное математическое образование (по результатам сдачи экзаменов в 9-ых, 11-ых классах), или, например, из регионов с хорошим

[1]Центр дополнительного образования, г. Москва, E-mail: `e_kolgan@mail.ru`

[2]ФГНУ «Институт информатизации образования» Российская академия образования, E-mail: `vmkafedra@yandex.ru`

экономическим развитием. Анализ победителей 4-го и 5-го этапа Всероссийской олимпиады по математике показывает, что успешность выступления школьников на олимпиадах не сильно зависит от этих факторов. Успешность определяется, в первую очередь, от работы со школьниками квалифицированных учителей, педагогов имеющих фундаментальное математическое образование. Именно ими накоплен большой дидактический материал, опубликованный в виде сборников задач математических олимпиад различного уровня. Хорошо известны методические рекомендации по проведению сборов российской команды по математике. Говоря о проблемах, связанных с обучением детей с математическими способностями (талантливых), следует отметить проблему разработки эффективных методик преподавания углубленного курса математики. Очевидна необходимость соответствия психологических закономерностей развития математического мышления учащихся и системы предлагаемых заданий. Начинать организацию школьного олимпиадного движения по математике необходимо, по нашему мнению, не со школьной олимпиады и даже не с работы предметного кружка, а прежде всего с психологической диагностики учащихся по выявлению их одаренности по данному предмету. Организовать в каждом классе группу детей, желающих получать дополнительные знания и подготовку по предмету, не забывая о том, что учащиеся, не посещающие занятий кружка, являются резервом данного направления и также требуют к себе пристального внимания. Иначе говоря, нужна методика выявления математических способностей школьников и организационные меры по ее повсеместному внедрению.

«Принцип Дирихле» — одна из классических тем олимпиадного кружка по математике. Тема, которая в нашей методике организации работы с детьми более раннего возраста 5–7 классы, является центральной [3]. С целью развития содержания образования ориентированного на способных школьников (речь идет в первую очередь о композиции творческих заданий), разработана система задач на принцип Дирихле, с методическими рекомендациями. Созданы тесты по этой теме, которые могут быть включены в систему автоматического контроля проверки освоения материала или использоваться при самообучении для самоконтроля.

Недопустимый разнобой и семантическая несостоятельность понятийно-категориального аппарата методики, разнообразие организационных форм, и значимости математических олимпиад требуют уточнения, обсуждалась классическая математическая олимпиада, а не только олимпиада, связанная с поступлением в конкретный ВУЗ. Насколько необходимо это количественное изобилие? Учебный процесс выпускного (да и 10 классов) существенно деформирован подготовкой к ЕГЭ, системой промежуточной аттестации и тренингов (обучение еще не закончилось). Печально наблюдать прогуливающих («блуждающих») по уважительной причине занятия старшеклассников, пробующих свои силы на различных математических конкурсах, без соответствующей подготовки, спохватившихся на последней стадии обучения в школе.

Действительно ли, нам всем уже стало понятно значение математических олимпиад?

Список литературы

[1] *Цфасман М.*, Судьбы математики в России.
`http://www.polit.ru/lectures/2009/01/30/matematika.html`

[2] *Русаков А.А., Сердюков В.А.*, Об активных формах обучения в школе и вузе. Актуальные проблемы обучения математике (К 155-летию со дня рождения А. П. Киселева):

труды Всероссийской заочной научно-практической конференции. — Орел: Издательство ОГУ, Полиграфическая фирма «Картуш», 2007. С. 235–239.

[3] *Куликова Е. Н., Русаков А. А.*, О разработке электронного тренажера для подготовки школьников к олимпиадам по математике. Информатизация сельской школы (Инфосельш-2008): Труды V Всероссийского научно-методического симпозиума. Анапа; М.: ООО «Пресс-Атташе», 2008. С. 297–305.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Вопросы организации дистанционного преподавания математики

Дмитрий Р. Мартыненко[1]

В работе обсуждаются основные проблемы, возникающие при организации дистанционных курсов обучения, и варианты их решения.

В 2011 году на Механико-математическом факультете МГУ впервые были организованы дистанционные курсы повышения квалификации учителей математики. Первый дистанционный курс получил название «Современные подходы к преподаванию математики в школе», в его структуре были выделены 3 части: «Методы решения задач с параметрами и других нестандартных задач» (объем – 36 ч), «Особенности преподавания школьного курса геометрии» (объем – 24 ч) и «Подготовка презентаций для сопровождения учебного процесса» (объем – 12 ч).

Первая и вторая части курса включали в себя теоретический материал, тренировочную работу, практические задания и зачетную работу. Тренировочные работы носили тестовый характер: слушателям предлагались обучающие задания тестового типа, которые могли быть пройдены неограниченное число раз для достижения наилучшего результата. При повторном прохождении одного и того же теста условия некоторых заданий могли меняться. Некоторые из обучающих заданий были снабжены подсказкой, которой можно было воспользоваться, если задача вызывала серьезные трудности. Практические задания предполагали такие формы работы слушателей, как отыскание ошибок в предложенных решениях, составление заданий по заданной теме, подготовка полных текстов решений и их содержательный и методический анализ. Как первая, так и вторая части курса заканчивались зачётной работой в форме теста, который допускалось проходить не более двух раз, причём время выполнения было ограничено.

Третья часть включала в себя теоретический материал и предполагала выполнение трех практических заданий по подготовке мультимедийных презентаций и сценария выступления. Задания выполнялись слушателями на собственных компьютерах с использованием собственного программного обеспечения. Созданные файлы загружались для проверки (в оболочке курса) и оценивались по критериям, доступным для слушателей. Задание считалось выполненным при условии его соответствия всем критериям. В противном случае слушателю направлялась информация о том, каким критериям работа не соответствует и какие действия должны быть предприняты для устранения недостатков. Количество попыток было неограниченным (до момента окончания приёма заданий), система оценивания – зачет/незачет. При успешном прохождении всех заочных зачётных работ слушателям предлагалось написать итоговую очную зачётную работу на механико-математическом факультете МГУ, по результатам которой выдавались удостоверения о краткосрочном повышении квалификации.

В сообщении планируется поставить основные проблемы, возникающие при организации дистанционных курсов, и наметить дальнейшие перспективы работы.

[1]Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: dmr2@couo.ru

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Особенности методики обучения стохастике в средней школе

Владимир Д. Селютин[1]

В работе освещаются результаты по формированию статистического мышления школьников в свете идей Б. В. Гнеденко.

1 Введение

В конце 60-тых годов прошедшего столетия внимание научно-педагогической общественности привлекли идеи академика Б. В. Гнеденко о необходимости формирования статистического мышления школьников [1]. Они дали толчок многочисленным научно-методическим исследованиям проблем организации обучения детей стохастике. С наступлением XXI века вероятностно-статистический материал был включен Государственным образовательным стандартом в содержание обязательного минимума математической подготовки учащихся общеобразовательной школы. В настоящее время, несмотря на многочисленные трудности становления, новая стохастическая линия начинает занимать полноправное место среди традиционно сложившихся содержательно-методических линий школьного курса математики. Однако, появившиеся в материалах ЕГЭ задания на подсчет вероятностей событий ориентируют на вузовские варианты построения усеченного курса теории вероятностей, на изучение «чистых» математических моделей случайных явлений. При этом оказывается вне поля зрения мировоззренческий аспект, который определяет сформулированные Б. В. Гнеденко цели введения элементов стохастики в школу: «ознакомление школьников с закономерностями более широкого типа, чем классический детерминизм, а именно — со статистическими закономерностями» [1].

2 Основные результаты

Выдвинуты и обоснованы принципы построения стохастической содержательно-методической линии школьного курса математики. Принцип прикладной направленности: построение вероятностной модели реальной ситуации и интерпретация внутримодельной задачи являются неотъемлемыми компонентами процесса обучения стохастике. Принцип интегративности выражает необходимость интегрировать школьную математику посредством стохастического содержания, оказывать благотворное влияние на укрепление внутрипредметных связей. Принцип межнаучности выражает необходимость максимально реализовывать межпредметные связи для взаимообогащения математики со смежными дисциплинами и формирования единой научной картины мира. Принцип перманентности выражает необходимость длительного целенаправленного периода формирования статистического опыта детей, их вероятностной интуиции. Принцип созидания выражает необходимость становления и открытия знаний заново, то есть инспирирования

[1]Орловский государственный университет, физико-математический факультет. E-mail: selutin_v_d@mail.ru

математического открытия понятий и методов стохастики в ходе руководимой учителем самостоятельной творческой деятельности учащихся. Принцип миропонимания выражает необходимость мировоззренческой направленности обучения стохастике в средней школе, формирования вероятностного восприятия окружающей действительности, научной картины мира. Реализация данных принципов обеспечивает достижение поставленных целей обучения стохастике учащихся средней общеобразовательной школы.

Выявлены процессуальные особенности обучения стохастике в школе и разработаны организационные средства формирования первоначальных статистических представлений школьников: стохастические игры, статистические эксперименты (эксперименты со случайными исходами), статистические исследования, мысленные статистические эксперименты, моделирование (имитация).

Проанализирован опыт первых лет обучения школьников новому материалу: несмотря на методически удачное фрагментарное изложение в ряде учебников, элементы стохастики пока еще остаются не охваченными внутрипредметными связями и им не удается преодолеть статус «инородности» внутри традиционной математики. Новое содержание представлено в учебниках преимущественно в виде отдельных разделов или параграфов, в которых слабо задействованы сведения из других частей тех же учебников. Традиционные разделы, с другой стороны, остаются без изменений, тогда как использование статистико-вероятностных понятий могло бы способствовать закреплению изученного материала «обычных» тем математики. Отнесенное на конец последней четверти учебного года изучение, должно быть сопряжено с повторением пройденного материала, а не заменять его. Для этого необходимо позаботиться о внутрипредметном взаимодействии нового содержания обучения со старым, о реализации интегрирующего потенциала стохастики, который до настоящего времени не используется с должным эффектом. Надо использовать благоприятные возможности, которые создаются с появлением стохастики для возникновения новых, глубоко обоснованных внутрипредметных связей, и которые позволяют органически переплести ее в канве традиционно изучаемого материала. В этих целях проведено исследование, в рамках которого предложена методика обучения элементам комбинаторики, статистики и теории вероятностей, отвечающая целям укрепления внутрипредметных взаимосвязей и основанная на применении когерентно-стохастических задач при согласованном изучении стохастических и традиционных математических понятий. Статистико-вероятностное содержание органично переплетается внутри традиционных тем математики, способствуя их закреплению. При этом открываются резервы поиска учебного времени для новой стохастической линии.

Выделены компоненты методической готовности учителя к обучению школьников стохастике: целевой, содержательно-математический, алгоритмический, прикладной, вероятностно-прогностический, логико-вероятностный, эвристический, экспериментально-исследовательский, имитационный, междисциплинарный, внутрипредметный, дифференцированно-оценочный, воспитательный, организационно-деятельностный [2].

Список литературы

[1] *Гнеденко Б.В.*, Статистическое мышление и школьное математическое образование. Математика в школе, 1968, N 1, с. 8–16.

[2] *Селютин В.Д.*, Внутрипредметные связи и профессиональная компетентность. Образовательные технологии, 2010, N 3, с.111–123.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Особенности преподавания математической статистики в техническом вузе

Ирина Э. Симонова, Ирина А. Тарасова[1]

В работе обсуждается опыт авторов преподавания теории вероятностей и математической статистики в техническом вузе.

Современный этап совершенствования профессионального образования характеризуется переходом на новые Федеральные Государственные Образовательные Стандарты третьего поколения (ФГОС ВПО, 2010). Компетентностный подход, заложенный в основу ФГОС-3, предполагает усиление профессиональной направленности обучения. Требуется также формирование общепрофессиональной компетенции (ОК) в области "работы с компьютером как средством управления информацией".

Важность и необходимость связи теории вероятностей и математической статистики с практическими задачами Б.В.Гнеденко подчеркивал еще полвека назад: "Теория вероятностей развилась из потребностей практики... В связи с широким развитием предприятий, производящих массовую продукцию, результаты теории вероятностей используются для организации самого процесса производства"(см. [1], с. 13, 1961 г.).

На кафедре прикладной математики Волгоградского государственного технического университета (ВолгГТУ) более 15 лет ведется работа по статистическому исследованию экспериментальных данных, разработке и модернизации соответствующих учебных курсов. Обработка массивов экспериментальных данных требует привлечения статистических пакетов. В центре компьютерно-инженерных технологий "КИТ"при кафедре прикладной математики ВолгГТУ проводится обучение студентов и научно-исследовательская работа с использованием пакетов Statgraphics и SPSS, а также CurveExpert и DataFit. При разработке учебных курсов большой поддержкой для авторов стали книги Ю.Н.Тюрина и А.А.Макарова "Статистический анализ данных на компьютере"и В.П.Носко "Эконометрика для начинающих".

Использование информационных технологий играет особенно важную роль в организации научно-исследовательской работы студентов. В центре "КИТ"ВолгГТУ накоплен опыт применения ППП в студенческих научных исследованиях. На региональные конкурсы студенческих работ в 2000-2011 г.г. было представлено несколько работ, занявших призовые места.

Подчеркнем,что усиление прикладной направленности курса "Теория вероятностей и математическая статистика"способствует активизации учебной и научной работы студентов, служит хорошим стимулом для изучения предмета и основой для применения полученных знаний в профессиональной деятельности.

Список литературы

[1] *Гнеденко Б.В.*, Курс теории вероятностей. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1961.

[1]Волгоградский государственный технический университет. E-mail: `simonova-vstu@mail.ru`

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Б.В.Гнеденко о проблемах математического образования в школе, ВУЗе и университете

Владимир М. Тихомиров[1]

Борис Владимирович Гнеденко в своем творчестве уделял большое внимание проблемам математического образования на всех уровнях. Его основные публикации на эту тему были выполнены в период очень высокого уровня математического образования в нашей стране.

В докладе, после анализа работ Б. В. Гнеденко, будет рассказано о некоторых изменениях, произошедших за последние два десятилетия в нашей стране и в мире, которые необходимо учитывать при планировании математического образования в будущем.

За эти годы *изменился государственный строй, изменилась ментальность молодежи и произошел неслыханной силы информационный взрыв*.

При новом строе нет системы государственного трудоустройства, распределения выпускников, планирования профессиональной занятости. За последние десятилетия упал престиж научного творчества и очень ослабел уровень школьной подготовки и заинтересованности в знаниях. А помимо этого внезапно на всех нас обрушилась информационная революция, при которой каждому школьнику и студенту открылся доступ к персональным компьютерам и интернету.

В докладе будут обсуждаться проблемы образования, которые возникли в связи со всеми этими радикальными переменами.

[1]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: vmtikh@gmail.com

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Актуарное образование в США и Великобритании

Геннадий И. Фалин[1]

Мы рассказываем о современных программах подготовки и методах аттестации актуариев в США и Великобритании - странах с высоким уровнем образования, развитым финансовым сектором экономики, признанными во всем мире традициями преподавания и практического применения актуарной науки.

В Великобритании основной актуарной организацией является Институт и Факультет Актуариев (Institute and Faculty of Actuaries - ИФА). Мы описываем структуру этой организации, типы членства, общую структуру программы подготовки и аттестации актуариев (учебные курсы и типы специализации), актуарные звания и дипломы, подробно говорим о процедуре сдачи экзаменов. В частности, мы рассказываем о новой профессиональной квалификации "Дипломированный специлист по анализу предпринимательских рисков"(Chartered Enterprise Risk Analyst - CERA).

Основным союзом актуариев в США является Общество Актуариев (Society of Actuaries). Так же как и для ИФА, мы описываем структуру этой организации, типы членства, общую структуру программы подготовки и аттестации актуариев (учебные курсы и типы специализации), актуарные звания и дипломы, подробно говорим о процедуре сдачи экзаменов.

Хотя с точки зрения актуарной профессии актуарное образование, полученное в университете, рассматривается лишь как основа для дальнейшего полноценного профессионального образования, мы говорим и об актуарной подготовке в университетах (на примере Оксфордского университета и университета лондонского Сити).

Список литературы

[1] http://www.soa.org/

[2] http://www.actuaries.org.uk/

[3] http://www.ceraglobal.org/

[4] Student Handbook 2011/2012. The Institute and Faculty of Actuaries (the Actuarial Profession), October 2011.

[5] Our members. The year in numbers 2009-2010. The Actuarial Profession, 2011.

[6] Annual Report of the Institute and Faculty of Actuaries 2010/2011. The Actuarial Profession, 2011.

[1]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: `g.falin@mail.ru`

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Развитие пространственного воображения школьников на основе использования виртуальных конструкторских сред

Т.А. Чернецкая[1]

Современная система общего среднего образования в России характеризуется рядом важных нововведений, среди которых можно выделить переход на новые Федеральные государственные стандарты образования в основной школе, компьютеризацию школы, информатизацию образовательного процесса. Все это не могло не сказаться на формировании содержания школьного математического образования, подходы к которому претерпели существенные изменения, отвечающие требованиям сегодняшнего дня. Существенно важным является тот факт, что в современных условиях иначе расставляются акценты в методических подходах к преподаванию математики: важными становятся виды, формы, характеристики учебной деятельности учащихся в процессе освоения содержания курса, направленные на достижение целей и выполнение требований к результатам обучения.

В Примерной программе общеобразовательного учреждения по математике предусмотрено значительное увеличение активных форм работы на уроке и дома, направленных на вовлечение учащихся в математическую деятельность, на обеспечение понимания ими математического материала и развития интеллекта, приобретение практических навыков и умений проводить рассуждения, доказательства. Наряду с этим в программе уделяется внимание использованию компьютеров и информационных технологий для усиления визуальной и экспериментальной составляющей обучения математике, реализации практической направленности в обучении математике на основе таких дидактических возможностей современных средств информационных и коммуникационных технологий, как компьютерная визуализация учебной информации и компьютерное моделирование изучаемых или исследуемых объектов.

Особенно важно реализовать такие новые подходы к преподаванию математики в школе при изучении курса геометрии. Согласно новым ФГОС, цель содержания раздела «Геометрия» – развить у учащихся пространственное воображение и логическое мышление путем систематического изучения свойств геометрических фигур на плоскости и в пространстве и применения этих свойств при решении задач вычислительного и конструктивного характера. Существенная роль при этом отводится развитию геометрической интуиции при условии сочетания наглядности в обучении со строгостью геометрических знаний.

Еще одним важным новшеством в основной школе является введение в учебный процесс междисциплинарных учебных программ «Формирование ИКТ-компетентности обучающихся» и «Основы учебно-исследовательской и проектной деятельности». Важные результаты этих программ в части создания графических объектов и моделирования могут быть достигнуты на основе использования виртуальных конструкторских сред.

Обладают ли виртуальные геометрические чертежи и модели какими-либо преимуществами по сравнению с их «бумажными» прототипами? На наш взгляд, да. Прежде всего, сам процесс построения на компьютере более эффективен в целях обучения решению гео-

[1]Фирма «1С». Методист отдела образовательных программ. E-mail: `chet@1c.ru`

метрических задач, т. к. требует от ученика полного понимания алгоритма построения и точности его исполнения – машину не обманешь. Не менее ценной методически является и возможность проверки правильности построения путем вариации данных в процессе самоконтроля: если при построении были допущены ошибки, то при вариации динамическая модель неизбежно «рассыплется». При этом возможность динамического изменения чертежа и наблюдения за траекториями его точек (с помощью инструмента рисования следов) открывает новые способы организации экспериментальной, исследовательской, творческой деятельности всех участников учебного процесса: хорошо известно, что большие затруднения у учащихся вызывает анализ заданной геометрической конфигурации, особенно, если описанная в задаче ситуация может быть реализована не единственным образом. Ну и наконец, машина освобождает учителя от утомительной процедуры проверки: в современных конструкторских средах по математике, как правило, задания снабжены механизмом автоматической проверки не только вычислений, но и построений. Таким образом, использование виртуальных конструкторских сред на уроках геометрии позволяет реализовать субъект-субъектный подход в обучении геометрии: ученики получают инструмент для геометрических открытий, а учителя – замечательное педагогическое средство: смоделировав заранее геометрический эксперимент, учитель может подвести учеников к самостоятельному осознанию новых идей.

При этом, безусловно, несмотря на все преимущества использования виртуальных компьютерных сред, важным остается и обучение школьников решению геометрических задач на построение с помощью обычных циркуля и линейки.

Список литературы

[1] Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=2587.

[2] Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=6400.

[3] «1С:Математический конструктор 4.5» http://obr.1c.ru/product.jsp?id=781.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Обучение студентов-филологов теории вероятностей и математической статистике в рамках дисциплины "Основы математической обработки информации"

Мария В. Шабанова[1], Ирина В. Кокорина[2]

В работе представлен результат работы по созданию методической системы обучения теории вероятностей и математической статистике студентов-филологов в соответствии с требованиями ФГОС ВПО.

Стандарты нового поколения поставили перед системой высшего математического образования задачу *усиления его профессиональной направленности*, особенно в тех направлениях и профилях профессиональной подготовки, где вместо привычной дисциплины "математика", "математика и информатика" введена дисциплина "Основы математической обработки информации". К числу таких профилей подготовки относятся филологические: "Иностранный язык", "Русский язык", "Литература", реализуемые в рамках общего направления подготовки 050100.62 "Педагогическое образование".

Исходя из анализа трудов отечественных и зарубежных лингвистов и математиков, содержание данного курса должно включать математические основы методов обработки информации, опирающихся на положения теории вероятностей и математической статистики, так как именно они находят сегодня наиболее широкое применение в лингвистических исследованиях.

Полученные нами данные говорят о необходимости выделения в курсе "Основы математической обработки информации"для студентов филологических направлений подготовки целого раздела, посвященного вопросам теории вероятности и математической статистики (ТВиМС). Решение задачи усиления профессиональной направленности курса мы видим также в дополнении традиционных вопросов таких разделов профессионально ориентированным содержанием.

Профессионально ориентированное содержание мы предлагаем "влатать" в содержание раздела посредством профессионально-ориентированных и профессиональных лингвистических задач. Так, например, на лекции, посвящённой теоремам сложения и умножения вероятностей, может быть рассмотрена практико-ориентированная задача из труда Р.Г. Пиотровского ([1], с.125): "Для расчёта памяти автомата, распознающего устную речь, и построения алгоритма его работы приходится вычислять вероятность совпадения хотя бы одной из словоформ обрабатываемого текста с соответствующей лексемой, заданной в словаре автомата. Выбрано два одинаковых по объёму отрывка текста, из каждого

[1]Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, институт математики и компьютерных наук, кафедра методики преподавания математики. E-mail: shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru

[2]Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Северодвинский филиал, кафедра естественнонаучных дисциплин и информационных технологий. E-mail: kokorina_ira@mail.ru

отрывка случайным образом выбирается слово. Нужно определить вероятность того, что хотя бы одно из двух выбранных слов будет местоимением ***он***".

Решение: Согласно данным частотного словаря ([2], с.123) значение статистической вероятности появления местоимения ***он*** в тексте равно 0,0099.

Обозначим события A="Первое слово - местоимение ***он***"; B="Второе слово-местоимение ***он***". Тогда событие $A+B$="хотя бы одно из двух выбранных слов будет местоимением ***он***". Применим теорему о вероятности суммы для двух совместных событий: P(A + B) = P(A) + P(B) − P(AB).

$$P(A+B) = 0,0099 + 0,0099 - 0,0099 \cdot 0,0099,$$

т.к. A и B – независимые и совместные события.

Профессиональные лингвистические задачи мы предлагаем включать в содержание практических занятий.

Лабораторные работы предусматривают проведение студентами фрагментов статистического исследования на лингвистическом материале. Именно на лабораторных работах студенты получают навыки применения математических методов на практике также с помощью компьютерных программ. Так, например, на первой лабораторной работе проводится первичная группировка данных, полученных студентами самостоятельно при обработке самостоятельно выбранных текстов. В пакете анализа данных SPSS студенты исследуют полученные данные с помощью получения и анализа различных графических представлений и описательных статистик выборки. Результатом этого исследования является выдвижение гипотезы о нормальности распределения в геонеральной совокупности, что проверяется с помощью одного из критериев согласия. На следующей работе, используя свойство нормальности, студенты строят доверительные интервалы для среднего значения и дисперсии генеральной совокупности и находят минимально необходимый объём выборки в лингвистическом исследовании. Выдвигая предположение о том, что изучаемый признак можно считать стилистической особенностью данного автора, проверяется гипотеза о значимости различия средних значений данного признака у двух различных авторов. Выдвигая гипотезу о корреляционной зависимости двух признаков изучаемой лингвистической совокупности, студенты проводят корреляционный анализ, строят линии регрессии.

Если обучение студентов ТВиМС будет организованно указанным образом, то, по нашему мнению, оно достигнет своей цели: студенты овладеют методами обработки лингвистической информации, что позволит им применить эти методы при выполнении курсовых и дипломных работ, а также в их будущей профессиональной деятельности.

Список литературы

[1] *Пиотровский Р.Г., Бектаев К.Б., Пиотровская А.А.*, Математическая лингвистика [Текст]. Учебное пособие для пед. ин-тов. М., "Высш. Школа" , 1997.

[2] *Ляшевская О.Н., Шаров С.А.*, Частотный словарь современного русского языка (на материалах Национального корпуса русского языка). М.: Азбуковник, 2009.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Профессионально-прикладная направленность обучения стохастике в профильных классах общеобразовательной школы

Сергей В. Щербатых[1]

Умение целенаправленно и грамотно применять полученные в процессе обучения теоретические знания по тому или иному предмету на практике может служить одним из критериев оценки уровня культурного развития человека. Поэтому одним из направлений в преподавании математики должно стать освещение вопросов её профессионально-прикладной направленности. Данное обстоятельство обуславливает появление в школьном математическом образовании практико-ориентированных задач, иллюстрирующих большое влияние математики, в частности стохастики, на решение важных задач народного хозяйства и техники.

Все стохастические задачи условно можно поделить на четыре типа задач: чисто *математические* (используются, когда необходимо проверить фактическое знание учащимися основных формул и теорем изучаемой теории, а также применение этих знаний в стандартных ситуациях), *иллюстративно-прикладные* (в них прикладное содержание выступает иллюстрацией математического), *функционально-прикладные* (основная функция задач состоит в освоении умения прилагать те или иные математические навыки к практическим ситуациям) и *профессионально-прикладные* (предназначены для освоения умения использовать математику в профессиональной или модельно-профессиональной деятельности). Последние два типа задач тесно связаны с реализацией профессионально-прикладной направленности.

Под **профессионально-прикладной направленностью обучения стохастике** *будем понимать целенаправленный отбор и рациональное использование в процессе обучения содержания материала (чаще задач), ориентированного на показ применимости науки о случайном к описанию процессов реальной действительности, в дальнейшей профессиональной деятельности старшеклассников, а также выбор адекватных форм, методов и средств обучения для передачи и усвоения учащимися отобранной системы знаний.*

Объём понятия «профессионально-прикладная направленность обучения стохастике» составляет всё разнообразие приложений науки о случайном к естествознанию, гуманитарным дисциплинам, технике, конкретной профессиональной деятельности будущего специалиста. В качестве ведущих компонентов реализации профессионально-прикладной направленности выступают профессионально-прикладные задачи, формы, методы и средства обучения стохастике в профильных классах общеобразовательной школы.

Существо профессионально-прикладной направленности выражается в иллюстрации программного материала конкретными содержательными примерами их применения в других областях науки, в смежных дисциплинах, в систематическом использовании функционально-прикладных и профессионально-прикладных задач, содержание которых соответствует профилю будущей профессиональной деятельности старшеклассни-

[1]Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, физико-математический факультет, доцент, кандидат педагогических наук. E-mail: shcherserg@mail.ru

ков. Профессионально-прикладная направленность, реализуемая в рамках профильного обучения, является тем инструментом, который позволяет осуществлять непрерывность математического образования, преемственность и безболезненный переход от школы к вузу.

Под **профессионально-прикладной стохастической задачей** *будем понимать задачу, возникающую в реальной жизненной ситуации либо профессиональной деятельности специалиста определённого направления, в большинстве своём содержащую математические термины и адаптированную для учащихся с учётом профиля обучения, для решения которой необходимо привлечение стохастического аппарата.*

Система профессионально-прикладных задач выполняет роль основного инструмента в процессе усвоения стохастических понятий, аксиом и теорем, устанавливая, таким образом, связь стохастики с реальным миром, с будущей профессиональной деятельностью учащихся профильных классов.

Нами выделены следующие **требования** к профессионально-прикладным стохастическим задачам, а именно, задачи должны:

1) служить основным образовательным целям обучения стохастике в профильных классах общеобразовательной школы;

2) быть ориентированными на развитие стохастического мышления старшеклассников, их познавательного интереса к изучению математики;

3) предусматривать органическую связь с системой математических понятий школьного курса математики;

4) отражать существенные законы и факты из других предметных областей;

5) включать содержание, приближенное к тематике будущей профессиональной деятельности;

6) быть разнообразными по содержанию.

Задачи с профессионально-прикладным содержанием в школьной математике практически не встречаются. Связано это с тем, что этап построения математической модели нематематической ситуации требует больших знаний и стохастической культуры. В этой связи возникла проблема подбора и разработки задач профессионально-прикладного характера, которые могут использоваться в обучении стохастике. Материал для составления профессионально-прикладных задач можно заимствовать из различных отраслей народного хозяйства в результате знакомства с современной технической литературой, различными справочниками, а также при изучении программ социально-экономического развития Российской Федерации.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

International collaboration in identifying mathematics research grants

Ekaterina D. Gnedenko[1]

My experience teaching undergraduate economics in the United States has led to some interesting observations. The microeconomics courses I teach require an applied understanding of matrix algebra, calculus, and statistics. One thing I've noticed is that while my students are all enthusiastic and willing to learn about economics, some lack the basic mathematics skills to understand the very important underlying economics concepts being taught. Often, I've resorted to visualizations, such as supply and demand functions on a chart, in lieu of mathematics because that's the only way that most undergraduate students are able to understand concepts that would be much easier to understand if they had the necessary mathematics prerequisites. On the other hand, my experience in Russian education, presents the opposite problem. Mathematical theory was never skimped in my undergraduate education and has prepared me for all of the economics theory required for a Ph.D. However, if there were any weakness in the mathematics education in Russia, it is in the area of application to real world problems. I am suggesting that a better link be made between mathematical theory and application. This has been a key ingredient in the success of great Russian scholars, such as my Grandfather B.V. Gnedenko. In the US and in Russia, military applications have often driven researchers to apply innovative mathematical and statistical techniques to applied problems to arrive at new solutions. My hope is that support for this research and development process continues, and evolves, so that our governments will see the value of investing in education programs that improve the link between mathematics and various other research domains in the social sciences, especially economics.

In my research, I've tried repeatedly to create a link between Moscow State University and economics problems I am working on, however I've had little success because of the non-existence of sufficient research grants to support this collaboration. It's the greatest gift to be mathematically talented; however we are currently missing a great opportunity to leverage this talent because the collaborative research programs and grants do not exist to support this synergy. It's important to develop programs that would teach scholars the basic skills to create healthy collaborations and apply for research funding through grants, both domestically and abroad.

Several recent examples of successful mutual collaboration between scientists from the Russian Federation and the United States can be found on the following website:

http://www2.ed.gov/programs/fipserussia/index.html

[1]Tufts University. E-mail: `ekaterina.gnedenko@tufts.edu`

СЕКЦИЯ 8

Разное
Miscellanea

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

О случайности целочисленных последовательностей по Арнольду

Павел В. Бибиков[1]

Целью данной работы является вычисление и исследование дискретного среднего значения параметра стохастичности Арнольда целочисленной последовательности в кольце $\mathbb{Z}_m$. Полученные результаты применяются для эмпирического исследования случайности геометрических прогрессий в $\mathbb{Z}_m$ и последовательности простых чисел.

1 Введение

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_m$ и последовательность $0 \leqslant x_1 < \ldots < x_T \leqslant m-1$ в нем. Для измерения «случайности» этой последовательности В.И. Арнольдом в [1] был введен так называемый *параметр стохастичности*

$$R := T \cdot \frac{(x_2-x_1)^2 + (x_3-x_2)^2 + \ldots + (x_T - x_{T-1})^2 + (x_1 - x_T)^2}{m^2}.$$

Также в [1] было доказано, что среднее значение параметра стохастичности равно

$$R_*(T) = \frac{2T}{T+1} = 2 + o(1) \quad \text{при } T \to \infty.$$

Согласно Арнольду, последовательность $\{x_k\}$ можно назвать *случайной*, если $R \approx R_*$, и *неслучайной* в противном случае.

Однако в [1] рассматривается усреднение по *всем вещественным* последовательностям, в то время как с точки зрения исходной (целочисленной) задачи естественнее было бы изучить среднее значение параметра стохастичности только по *целочисленным* последовательностям. Это среднее значение мы обозначим через $\widehat{R}(m,T)$ и будем называть *дискретным среднем значением параметра стохастичности*.

2 Основные результаты

Имеет место следующая

Теорема 1. *Дискретное среднее значение $\widehat{R}(m,T)$ параметра стохастичности равно*

$$\widehat{R}(m,T) = \frac{2T}{T+1} - \frac{T(T-1)}{m(T+1)} < R_*(T).$$

Для того, чтобы исследовать поведение дискретного среднего $\widehat{R}(m,T)$, будем считать, что $m = m(T)$ — функция от T и что $m(T) \to \infty$ при $T \to \infty$.

[1]Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. E-mail: tsdtp4u@proc.ru

Теорема 2. *1. Если $\alpha T \leqslant m = m(T) \leqslant \beta T$, то при $T \to \infty$ имеют место неравенства*

$$\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) + o(1) \leqslant \widehat{R}(m,T) \leqslant \left(2 - \frac{1}{\beta}\right) + o(1).$$

В частности, если $m(T) \sim \gamma T$ при $T \to \infty$, то

$$\widehat{R}(m,T) = \left(2 - \frac{1}{\gamma}\right) + o(1).$$

2. Если $\lim_{T\to\infty} m(T)/T = 0$, то при $T \to \infty$

$$\widehat{R}(m,T) = \frac{2T}{T+1} + o(1) = 2 + o(1).$$

Рассматривая графики функций $\widehat{R}(m,T)$ и $R_*(T)$ по T при фиксированном m, легко видеть, что у дискретного среднего $\widehat{R}$ есть единственный максимум T_0, причем при $T < T_0$ средние практически совпадают, а при $T > T_0$ дискретное среднее гораздо меньше обычного.

Теорема 3. *Максимум дискретного среднего $\widehat{R}(m,T)$ по T достигается в точке*

$$T_0 = \sqrt{2(m+1)} - 1 \sim \sqrt{2m} \qquad \textit{при } m \to \infty.$$

Формула для T_0 наводит на мысль о связи средних значений параметра стохастичности с известной «задачей о днях рождения» (см. [1]). А именно, в теории вероятностей хорошо известна следующая задача. Пусть T — количество членов случайной последовательности в $\mathbb{Z}_m$ (в частном случае $m = 365$ — количество дней в году, а T — количество студентов в группе). При каких T высока вероятность того, что все элементы этой последовательности различны? Хорошо известно, что эта вероятность высока лишь при $T \ll T_0$, а при $T \gg T_0$ эта вероятность мала.

По всей видимости, это означает, что при $T > T_0$ близость параметра стохастичности R к среднему $R_*(T)$ является плохим критерием случайности целочисленной последовательности: вероятность того, что он правильно отражает поведение данной последовательности, крайне мала.

Это наблюдение также дает повод усомниться в выводах Арнольда (см. [1]) о наличии «расталкивания» элементов геометрических прогрессий вида $\{a^k\}$ в $\mathbb{Z}_m$, т.к. эти выводы были сделаны им на основе сравнения параметра стохастичности R со средним $R_*(T)$ (а не со средним $\widehat{R}(m,T)$) для достаточно больших T (которые в среднем, согласно гипотезе Ф. Аикарди, равны $cm/\ln m \gg T_0$).

В работе приводятся вычисления параметра стохастичности геометрических прогрессий в кольцах $\mathbb{Z}_m$ и последовательности простых чисел и их сравнения с дискретным средним $\widehat{R}$. Эти вычисления показывают, что и геометрические прогрессии, и последовательность простых чисел могут называться случайными по Арнольду.

Список литературы

[1] *Арнольд В.И.*, Группы Эйлера и арифметика геометрических прогрессий. М.: МЦНМО, 2003.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Стохастические свойства ортогональных инвариантов матрицы Уишарта

Павел А. Кашицын[1]

В работе обсуждаются результаты автора о стохастических свойствах ортогональных инвариантов матрицы Уишарта.

1 Введение

Пусть $W_p(n, \Sigma, \Delta)$ — случайная $(p \times p)$-матрица, распределенная по Уишарту с параметром нецентральности Δ:

$$W_p(n, \Sigma, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i + m_i)(\xi_i + m_i)^T, \sum_{i=1}^{n} m_i m_i^T = \Delta, \tag{1}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — н.о.р. p-векторы $N_p(0, \Sigma)$. Поскольку $(p \times p)$-матрица $W_p(n, I_p, \Delta)$ является почти наверное неотрицательно определенной, то характеристическое уравнение $\det(W_p(n, I_p, \Delta) - lI_p) = 0$ имеет корни $l_1 \geq \ldots \geq l_p \geq 0$, где неравенства выполнены почти наверное. Кроме того, поскольку Δ является неотрицательно определенной матрицей $(\Delta \geq 0)$, то ее собственные значения неотрицательны: $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_p \geq 0$. Будем обозначать через $\sigma_k = \sigma_k(l_1, \ldots, l_p)$ элементарный симметрический многочлен степени k от $l_1, \ldots, l_p$: $\sigma_k(l_1, \ldots, l_p) = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq p} l_{i_1} \ldots l_{i_k}$, где $1 \leq k \leq p$.

2 Основные результаты

Теорема 1. *Случайный вектор $(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ стохастически возрастает при росте собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ параметра нецентральности Δ матрицы Уишарта.*

Автор благодарен профессору Ю.Н.Тюрину за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] *Groeneboom P., Truax D.R.*, A monotonicity property of the power function of multivariate tests. Indagationes Mathematicae., 2000, v. 11, p. 209–218.

[2] *Perlman M.D., Olkin I.*, Unbiasedness of invariant tests for MANOVA and other multivariate problems. Ann. Math. Statist., 1980, v. 8, p. 1326–1341.

[3] *Richards D.S.P.*, Total positivity properties of generalized hypergeometric functions of matrix argument., 2004, v. 116, N 114, p. 907–922.

[1]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: pavel.kash@gmail.com

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Неравенства для мартингалов со значениями в некоторых пространствах случайных величин

Владимир А. Лебедев[1]

В работе обсуждается обобщение ряда мартингальных неравенств на нормы в некоторых пространствах случайных величин.

1 Введение

В моей докторской диссертациии [1] получила дальнейшее развитие теория L_p-значных случайных мер как стохастических интеграторов достаточно общего вида и изучаются стохастические дифференциальные уравнения с такими мерами. Основы теории L_p-значных случайных мер заложены Бихтелером и Жакодом [2], рассматривавшими случаи $p = 0$ и $1 \leq p < \infty$, большинство результатов которых легко распространяется на случай общего p, $0 \leq p < \infty$. Представляет интерес обобщение этой теории на стохастические интеграторы со значениями в пространствах случайных величин, отличных от L_p, и здесь наиболее интересны банаховы пространства Орлича, Марцинкевича и Лоренца [3]. Наиболее естественным обобщением пространств L_p являются пространства Орлича, которые при $M(x) = |x|^p$ для $1 < p < \infty$ совпадают с L_p, хотя N-функция $M(x)$ может иметь и более общий вид. Несколько иначе устроены пространства Марцинкевича и Лоренца даже со степенной ψ-функцией. Так, при $\psi(x) = |x|^p$ для $0 < p < 1$ пространство Марцинкевича M_ψ содержит L_q для $q \geq 1/(1-p)$ и содержится в L_q для $q < 1/(1-p)$, но шире, чем $L_{1/(1-p)}$. С другой стороны, при той же $\psi(x) = |x|^p$ для $0 < p < 1$ пространство Лоренца Λ_ψ содержит L_q для $q > 1/p$ и содержится в L_q для $q \leq 1/p$, но уже, чем $L_{1/p}$.

2 Основной результат

Для обобщения теории L_p-значных случайных мер хотя бы на выделенные пространства, если они содержат L_q для некоторого q, $1 < q < \infty$, нужно прежде всего обобщение ряда мартингальных неравенств. При этом, по-видимому, легко обобщаются неравенства, сводящиеся к исходным применением вогнутой или медленно растущей функции. Самым же принципиальным является обобщение неравенств Буркхольдера–Дэвиса–Ганди. Здесь надо проверить гипотезу, что для мартингала M при любом $t \in \mathbb{R}_+$ величина $M_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|$ тогда и только тогда принадлежит одному из этих пространств, когда ему принадлежит квадратный корень значения его опциональной квадратичной характеристики $[M, M]_t$, причём для некоторых строго положительных констант c и C

$$c\|[M, M]_t^{1/2}\| \leq \|M_t^*\| \leq C\|[M, M]_t^{1/2}\|, \tag{1}$$

где $\|\cdot\|$ — соответствующая норма.

[1]Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет. E-mail: `vlebedev49@mail.ru`

Эта проблема решается положительно для пространств Орлича. Именно, справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Справедливы неравенства* (1) *для любой из двух основных норм* $\|\cdot\|$ *на пространстве Орлича с* N*-функцией, удовлетворяющей* Δ_2*-условию.*

В основе доказательства теоремы лежит теорема 2.1 из [4], согласно которой для всякой выпуклой умеренной функции F существуют строго положительные константы c и C такие, что для всякого локального мартингала M

$$c\mathbf{E}F(M^*_\infty) \leq \mathbf{E}F([M,M]^{1/2}_\infty) \leq C\mathbf{E}F(M^*_\infty).$$

Заметим в связи с этим, что если N-функция M удовлетворяет Δ_2-условию, т.е. такова, что

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{M(2u)}{M(u)} < \infty,$$

то её легко подправить вблизи нуля с сохранением эквмвалентности нормы, чтобы она стала умеренной в смысле [4], т.е. такой, что

$$\sup_{u>0} \frac{M(au)}{M(u)} < \infty$$

для некоторого $a > 1$.

Список литературы

[1] *Лебедев В.А.*, L^p-значные случайные меры и стохастические уравнения (докторская диссертация). М.: 2006, защищена в МИРАН им. В.А.Стеклова.

[2] *Bichteler K., Jacod J.*, Random measures and stochastic integration. Lect. Notes Control Inform. Sci., 1983, v. 49, p. 1–18.

[3] Функциональный анализ (Справочная математическая библиотека), 2-е изд. М.: Наука, 1972.

[4] *Lenglart E., Lépingle D., Pratelli M.*, Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. Lect. Notes Math., 1980, v. 784, p. 26–48.

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

Алгоритм восстановления потенциальной функции по единственной реализации

Иван А. Лыков, Геннадий П. Быстрай[1]

При малых флуктуациях нелинейная система описывается нормированной функцией плотности вероятности $g(x)$, связанной с потенциальной функцией системы F через уравнение Фоккера-Планка [1, 2]: $\partial g/\partial t = \nabla(g\nabla F)+\nabla^2(Dg)$, где D – коэффициент диффузии.

По известной реализации можно получить $g(x)$, исходя из предположения эргодичности временного ряда. Это позволяет для длинного ряда заменить усреднение по ансамблю усреднением по времени и восстановить $g(x)$ с помощью разбиения диапазона значений на множество интервалов. Для каждого диапазона определяется значение $g(x)$, с помощью которой возможно восстановление $F(x)$ по решению уравнения Фоккера-Планка в стационарном случае [2]: $0 = \nabla(g\nabla F)+\nabla^2(Dg)$, тогда $g(x) = g_0 \cdot e^{-F(x)/D}$. Отсюда следует выражение для потенциала: $F(x)/D = -\ln(g(x)/g_0)$. Аппроксимация F возможна полиномом n степени (элементарные катастрофы складки, сборки, ласточкин хвост и т.п.) с определением точек устойчивых и неустойчивых равновесий системы.

Метод применим для анализа нелинейных систем по длинным временным рядам с определением количества и типа точек равновесия, времён релаксации к минимумам F. Исследовались $g(x)$ для координаты z системы уравнений Лоренца (180000 выборок ($900t_0$), $\sigma = 7, r = 28, b = 8/3$), сердечной мышцы при патологии (39000 выборок (150 с.) ЭКГ с монитора Холтера) и индекса Доу-Джонса (1486 выборок (дней) с 24.03.2005 по 17.02.2011); а также соответствующие им потенциальные функции. Для системы уравнений Лоренца потенциал, восстановленный по временному ряду (полином 4-й степени – катастрофа сборки), совпадает с детерминистическим [4]. Анализ показывает, что для экономических систем, миокарда можно ограничиться полиномом 6-й степени (катастрофа «ласточкин хвост»). Вычисления выполнены с помощью программного продукта [5].

Список литературы

[1] *Николис Г., Пригожин И.*, Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 511 с.

[2] *Белоцерковский О.М.*, Экономическая синергетика: Вопросы устойчивости. О.М. Белоцерковский, Г.П. Быстрай, В.Р. Цибульский. Новосибирск: Наука, 2006. 116 с.

[3] *Гилмор Р.*, Прикладная теория катастроф. М.: Мир. 1984. Т.1. 350 с. Т.2. 285 с.

[4] *Кузнецов С.П.*, Динамический хаос (курс лекций). М.:Изд. Физ.-мат. лит. 2001. 296с.

[5] *Лыков И.А., Найдич А.М., Быстрай Г.П., Охотников С.А.*, Св-во о гос. рег. ПрЭВМ №2011619008 «Нелинейный и статистический анализ сигналов ЭКГ». Роспатент. Зарегистрировано 18 ноября 2011 г.

[1]Уральский Федеральный Университет, Институт Естественных Наук, кафедра общей и молекулярной физики. E-mail: `Gennadyi.Bystrai@usu.ru`

Международная конференция
"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ"
(Москва, 26-30 июня 2012 года)

О моделировании решения гиперболического уравнения со случайными условиями

Анна И. Сливка-Тилищак[1]

В работе предложено новый метод построения моделей решений краевых задач для гиперболических уравнений со случайными начальными условиями.

В работе строится модель, которую можно реализовывать на компьютере, что приближает решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L(u), \quad L(u) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{dx_j}\right) - \mathrm{a}(X)u, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \xi(X), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \eta(X), \, u|_S = 0, \quad t \in [0, T], \tag{2}$$

для гиперболического уравнения со случайными начальными условиями с заданными надежностью и точностью в равномерной метрике. Рассматриваются строго субгауссовые случайные поля [1] как начальные условия. Известно, что при определенных условиях решение краевой задачи можно изобразить в виде

$$u(X,\ t) = \sum_{\text{к}=1}^{\infty}\left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t\right)V_k(X), \tag{3}$$

где $V_k(x)$ — известные функции, A_k и B_k — случайные величины, совместные распределения которых известны. Метод моделирования краевой задачи (1)–(2) заключается в том, что сначала с определенной точностью моделируются начальные условия, за которыми подсчитывают приближенные значения для A_k и B_k, а именно $\widetilde{A}_k$ и $\widetilde{B}_k$, а за модель решения рассматривается сумма

$$\widetilde{u}(X,\ t) = \sum_{\text{к}=1}^{N}\left(\widetilde{A}_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + \widetilde{B}_k \sin\sqrt{\lambda_k}t\right)v_k(X). \tag{4}$$

Удается найти значение N та точность приближения моделей $\widetilde{A}_k$ и $\widetilde{B}_k$ к A_k и B_k, за которых модель (4) приближает решение (3) с заданной надежностью и точностью в равномерной метрике.

Список литературы

[1] *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.*, Metric Characterization of Random Variables and Random processes. American Mathematical Society, Providence, Rhode, 2000. 257 p.

[1]Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка, механико-математический факультет. E-mail: aslyvka@tn.uz.ua

[2] *Довгай Б.В., Козаченко Ю.В., Сливка-Тилищак А.И.*, Краевые задачи математической физики с случайными факторами. Монография, «Киевский университет», 2008. 175 с.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Fractional partial differential equations driven by fractional Gaussian noise

Mahmoud M. El-Borai , Khairia El-Said El-Nadi[1]

Some fraction parabolic partial differential equations driven by fraction Gaussian noise are considered. Initial-value problems for these equations are studied. Some properties of the solutions are given under suitable conditions and with Hurst parameter less than half.

In this note stochastic partial differential equations of the form:

$$dv(x,t) = dB_H(t) + f(x,t,L_2u(x,t))dt, \tag{1}$$

are considered, where $0 < H < \frac{1}{2}$, $t > 0, x \in R^n$,

$$v(x,t) = \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} - L_1 u(x,t), \tag{2}$$

$$L_1 u = \sum_{|q| \le 2m} a_q(x) D^q u, \; L_2 u = \sum_{|q| \le 2m-1} b_q(x) D^q u,$$

$$D^q = D_1^{q_1} ... D_n^{q_n}, D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, 0 < \alpha < 1,$$

R^n is the n-dimensional Euclidean space, $q = (q_1, ..., q_n)$ is an n-dimensional multi index $|q| = q_1 + ... + q_n$, $B_H(t)$ is fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in [0, \frac{1}{2}]$, $B_H(0) = \mathbf{E}[B_H(t)] = 0$, for all $t \in R = (-\infty, \infty)$ and

$$\mathbf{E}[B_H(t) B_H(s)] = \frac{1}{2} \left\{ |s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H} \right\}, \; s, t, \in R,$$

($\mathbf{E}[X]$ denotes the expectation of a random variable X). If $H = \frac{1}{2}$, then $B_H(t)$ coincides with classical Brownian motion $B(t)$. For $H \neq \frac{1}{2}$, $B_H(t)$ is not a semi martingale, so one cannot use the general theory of stochastic calculus for semi martingale on $B_H(t)$ (see [1], [2], [3]).

References

[1] *Nualart D. and Ouknine Y.*, Regularization of differential equations by fractional noise Stoch. Proc. Appl., 2002, v. 102, p. 103–116.

[2] *El-Borai M.M.*, Some probability densities and fundamental solution of fractional evolution equations. Chaos, Soliton and Fractals, 2002, v. 14, p. 433–440.

[3] *El-Nadi K.*, On some stochastic parabolic differential equations in a Hilbert space. Journal of Appl. Math. and Stoch. Analysis, 2005, v. 2, p. 167–179.

[4] *E-Borai M.M., El-Nadi K., Mostafa O.L. and Ahmed H.M.*, Volterra equations with fractional stochastic integrals. Mathematical problems in engineering, 2004, v. 5, p. 453–468.

[1]Faculty of Science, Alexandria University, Alexandria. E-mail: m_m_elborai@yahoo.com, khairia_el_said@hotmail.com

International conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moskow, 26-30 June 2012)

Importance sampling for estimation of moderate deviation probabilities

Mikhail S. Ermakov[1]

Recent years importance sampling has become the standard tool for the estimation of probabilities of rare events. The especial interest represents effective importance sampling allowing to attain serious reduction of computational burden. The efficiency of importance sampling was proved (see Sadowsky and Bucklew [2]) if rather strong assumptions holds, that often can not be verified for test statistics and estimators. In paper we show that the effective importance sampling correctly works for calculation of moderate deviation probabilities of statistics having the Hadamard derivative.

Let
$\Im$ - the σ-field of Borel sets in Hausdorff topological space S,
Λ - the set of all probability measures in $(S, \Im)$,
$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d.r.v.'s with pm P_0 in $(S, \Im)$,
$\hat{P}_n$ - the empirical measure of $X_1, \ldots, X_n$.

For given statistics $T(\hat{P}_n)$ our goal is to estimate the moderate deviation probabilities $V_n \doteq P_0(T(\hat{P}_n) - T(P_0) > b_n)$ with $b_n > 0, b_n \to 0, nb_n^2 \to \infty$ as $n \to \infty$.

The estimation is based on the following importance sampling procedures.

For a given probability measure Q_n having the densities $q_n(x) = \frac{dQ_n}{dP_0}(x)$ with $q_n(x) \neq 0$ for all $x \in S$ we simulate k- independent samples $Y_1^{(i)}, \ldots, Y_n^{(i)}, 1 \le i \le k$ with pm Q_n. After that we take

$$\hat{V}_n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \chi(T(\hat{Q}_n^{(i)}) - T(P_0) > b_n) \prod_{j=1}^{n} q_n^{-1}(Y_j^{(i)})$$

as the estimator of V_n. Hereafter $\hat{Q}_n^{(i)}$ stands for the empirical probability measure of $Y_1^{(i)}, \ldots, Y_n^{(i)}$.

It is easy to see that $\hat{V}_n$ is unbiased estimator of V_n

$$\mathbf{E}_{Q_n} \hat{V}_n = V_n \tag{1}$$

Hereafter $\mathbf{E}_{Q_n}$ stands for the mathematical expectation w.r.t. pm Q_n.

We treat the case of statistics $T(\hat{P}_n)$ having the influence function, that is, we suppose that $T(Q) - T(P_0)$ with $Q \in \Lambda$ admits local linear approximation $\int_S g\, d(Q - P_0)$ (see B below) with the influence function g.

We make the following assumption (see Arcones [1]).

A. The function g belongs the set Φ, where Φ is the set of functions $f, \mathbf{E}[f(X)] = 0$ such that

$$\lim_{n \to \infty} (nb_n^2)^{-1} \log[nP_0(|f(X_1)| > nb_n)] = -\infty.$$

[1]Institute of mechanical engineering problems RAS. E-mail: `erm2512@mail.ru`

Define the set Λ_Φ of all probability measures $Q \in \Lambda$ such that $\int_S |f| dQ < \infty$ for all $f \in \Phi$. Denote $\Lambda_{0\Phi}$ the set of all charges $G = Q - R$ with $Q, R \in \Lambda_\Phi$. Define the τ_Φ-topology as the coarsest topology in $\Lambda_{0\Phi}$ that makes continuous for all $f \in \Phi$ the map $\Lambda_{0\Phi} \ni G \to \int_S f\, dG$.
B1. The functional $T(P)$ is continuous in τ_Φ-topology.

B2. For any pm $Q, Q << P_0, q = \frac{dQ}{dP_0}, ||q||_2 < \infty$ and any sequence pms $Q_n, Q_n << P_0, q_n = \frac{dQ_n}{dP_0}, ||q_n - q|| \to 0$ as $n \to \infty$, there holds

$$\lim_{n\to\infty} h_n^{-1} \left(T(P_0 + h_n(Q_n - P_0)) - T(P_0) - h_n \int_S g d(Q_n - P_0) \right) = 0 \tag{2}$$

with $h_n \to 0$ as $n \to \infty$.

Lemma 1. *Assume* A *and* B1,B2. *Then*

$$\lim_{n\to\infty} (nb_n^2)^{-1} \ln V_n = -\frac{1}{2}\sigma_g^2 \tag{3}$$

with $\sigma_g^2 = \int_S g^2 dP_0$.

Hence, using $\mathrm{Var}_{Q_n} \hat{V}_n \geq 0$, for each importance sampling procedure, we get

$$\liminf_{n\to\infty} (nb_n^2)^{-1} \ln \mathbf{E}_{Q_n}[V_n^2] \geq -\sigma_g^{-2} \tag{4}$$

We say that importance sampling procedure is asymptotically efficient if the equality in (4) is attained. Thus, if importance sampling procedure is asymptotically efficient, one can hope that an amount of simulation does not have exponential growth with increasing accuracy.

Theorem 1. *Assume* A *and* B1, B2. *Let we implement the importance sampling procedure based on the pms Q_n with the densities $q_{1n}(x) = \lambda_n + b_n h(x)\chi(h(x) > -\delta b_n^{-1})$ or $q_{2n}(x) = c_n \exp\{b_n h(x)\}\chi(|h(x)| < \delta b_n^{-1})$ where λ_n, c_n are normalizing constants, $0 < \delta < 1$ and $\mathbf{E}[h(X)] = 0, \mathbf{E}|h(X)| < \infty, \mathbf{E}[h^2(X)] < \infty$. Then the importance sampling procedure is asymptotically efficient iff $h = \sigma_g^{-2} g$.*

We prove also other versions of Theorem. We apply these results to the problems of estimation of moderate deviation probabilities of rank statistics, L and M estimators, the Kaplan-Meier estimator, the empirical quantile process and the empirical copular function.

References

[1] *Arcones M.A.*, Moderate deviations of empirical processes. In ed. E.Gine, C.Houdre and D.Nualart. Stochastic Inequalities and Applications, p. 189-212. Boston, Burkhauser, 2003.

[2] *Sadowsky J.S. and Bucklew J.A.*. On Large Deviation Theory and Asymptotically Efficient Monte-Carlo Estimation. IEEE Trans. on Inf. Theory. 1990, v. 36, p. 579-588.

International conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Integrals calculation by Monte Carlo method with a given accuracy and reliability

Yuriy Yu. Mlavets[1]

Definition 1. A continuous even convex function $U = \{U(x), x \in \mathcal{R}\}$ is called a $\mathcal{C}$-function if $U(x)$ is monotonically increasing function for $x > 0$ and $U(0) = 0$.

Definition 2. Let U be an arbitrary $\mathcal{C}$-function. The Orlicz space of random variables $L_U(\Omega)$ is defined as a family of random variables, where for each $\xi \in L_U(\Omega)$ there exists a constant $r_\xi > 0$ such that $\mathsf{E}U\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty$.

The space $L_U(\Omega)$ is a Banach space with respect to the norm $\|\xi\|_U = \inf\{r > 0;\ \mathsf{E}U\left(\frac{\xi}{r}\right) \le 1\}$ (Luxemburg norm).

Definition 3. A Orlicz space $L_U(\Omega)$ has the property $\mathbf{H}$ if for any centered independent random variables $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ from $L_U(\Omega)$ the following inequality holds $\|\sum_{k=1}^n \xi_i\|_U^2 \le C_U \sum_{k=1}^n \|\xi_i\|_U^2$, where C_U is some absolute constant.

Theorem 1. *Let $Y = \{Y(t), t \in \mathbf{T}\}$ be a random process. Y belongs to an Orlicz space $L_U(\Omega)$ such that the condition* g *holds for U and $L_U(\Omega)$ has the property $\mathbf{H}$ with the constant C_U. Let $(\mathbf{T}, w)$ be a compact metric space and Y be separable process on $(\mathbf{T}, w)$, $N_w(u)$ be the metric massiveness. There exist a continuous function $\sigma = \{\sigma(h),\ 0 \le h \le \sup_{t,s\in\mathbf{T}} \rho(t,s)\}$, such that $\sigma(h) \to 0$, when $h \to 0$, that $\sup_{\rho(t,s)\le h} \left\|Y(t) - Y(s)\right\|_U \le \sigma(h)$ and $\int_0^{\delta_0} U^{(-1)}(N_w(\sigma^{(-1)}(u)))du < \infty$.*

Let $X(t) = Y(t) - m(t)$, where $m(t) = \mathsf{E}X(t)$ and $X_k(t)$ be independent copies of $X(t)$, $S_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k(t)$. Then for all $\varepsilon > 0$ the following inequality holds $P\{\sup_{t\in\mathbf{T}} |S_n(t)| > \varepsilon\} \le \frac{1}{U\left(\dfrac{\varepsilon}{B(t_0,\theta)}\right)}$, where t_0 is any point from $\mathbf{T}$, $0 < \theta < 1$, $B(t_0,\theta) = \|X(t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int_0^{\delta_0\theta} \nu(N_w(\sigma_1^{(-1)}(u))du$, where $\sigma_1(h) = \left(1 + \dfrac{d_U}{U^{(-1)}(1)}\right)\sigma(h)$, $\delta_0 = \sigma_1\left(\sup\limits_{t,s\,\in\,\mathbf{T}} \rho(t,s)\right)$, $\nu(n)$ – majorant characteristic of $L_U(\Omega)$ space.

This theorem is used for calculation of the integral $\int \dots \int_{R^d} f(\vec{x})d\vec{x}$ by Monte Carlo method with a given reliability and accuracy in $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ spase.

References

[1] *Kozachenko Yu.V. and Mlavets Yu.Yu.*, Probability of large deviations of sums of random processes from Orlicz space Monte Carlo Methods Appl. 2011, v. 17, N 2, p. 155–168.

[1]Uzhgorod National University, faculty of Mathematics. E-mail: `yura-mlavec@ukr.net`

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Odd-order pseudo-processes and stable laws

Enzo Orsingher[1] and Mirko D'Ovidio[2]

We obtain generalized Cauchy r.v.'s by composing pseudo processes of odd-order with positively skewed stable random variables. We show that the distributions obtained are solutions of higher-order Laplace equations and also of second order equations. By composing the pseudo processes with iterated positively skewed stable random variables we obtain laws whose structure is studied.

In this work we consider higher-order heat-type equations

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^n \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} \\ u(x,0) = \delta(x) \end{cases} \tag{1}$$

and show that the general solution has a probabilistic representation of the form

$$u_{2n+1}(x,t) = \frac{1}{\pi x} \mathbf{E}\left[e^{-b_n x G^{2n+1}(\frac{1}{t})} \sin\left(a_n x G^{2n+1}(\frac{1}{t}) \right) \right] \tag{2}$$

where

$$a_n = \cos\frac{\pi}{2(2n+1)}, \quad b_n = \sin\frac{\pi}{2(2n+1)} \tag{3}$$

and the law of $G^\gamma(t)$ is the generalized gamma distribution

$$g^\gamma(x,t) = \gamma \frac{x^{\gamma-1}}{t} e^{-\frac{x^\gamma}{t}}, \quad x>0, t>0, \ \gamma>0. \tag{4}$$

It is possible to construct pseudo-processes with sign-varying density whose properties have been analysed by several authors in the last decades. Attention was devoted to the third-order equation where (2) can be written as

$$u_3(x,t) = \frac{1}{\sqrt[3]{3t}} Ai\left(\frac{x}{\sqrt[3]{3t}} \right). \tag{5}$$

We have able to show that the composition

$$X_{2n+1}(T_{\frac{1}{2n+1}}), \quad t>0 \tag{6}$$

is a genuine r.v. whose distribution given by

$$\mathbf{P}\{X_{2n+1}(T_{\frac{1}{2n+1}}) \in dx\}/dx = \frac{t\cos\frac{\pi}{2(2n+1)}}{\pi\left((x+(-1)^{n+1} t \sin\frac{\pi}{2(2n+1)})^2 + t^2 \cos^2\frac{\pi}{2(2n+1)} \right)}. \tag{7}$$

[1]Sapienza University of Rome, Faculty of Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica. E-mail: enzo.orsingher@uniroma1.it

[2]Sapienza University of Rome, Faculty of Ingegneria Civile ed Industriale. E-mail: mirko.dovidio@uniroma1.it

The $T_{\frac{1}{2n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, are positively skewed stable processes of order $\frac{1}{2n+1}$. Result (7) shows that the r.v.'s (6) have asymmetric Cauchy distribution with location parameter $(-1)^{n+1}tb_n$ and scale parameter ta_n. Furthermore, (7) solves the Laplace equation

$$\frac{\partial^{2n+1}u}{\partial t^{2n+1}} + \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} = 0 \tag{8}$$

and also the second-order equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\sin\frac{\pi}{2(2n+1)}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}. \tag{9}$$

We note that $T_{\frac{1}{3}}$ has distribution

$$\mathbf{P}\{T_{\frac{1}{3}}(t) \in ds\} = \frac{t}{s}\frac{1}{\sqrt[3]{3t}}Ai\left(\frac{t}{\sqrt[3]{3t}}\right)ds \tag{10}$$

and

$$\mathbf{P}\{X_3(T_{\frac{1}{3}}(t)) \in dx\} = \frac{dx}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{t}{x^2+xt+t^2} \tag{11}$$

and solves a remarkable relationship between Airy functions and Cauchy distribution. Furthermore, we show that

$$\mathbf{E}e^{i\beta X_3(T^1_{\frac{1}{3}}\dots(T^m_{\frac{1}{3}})\dots)} = e^{-t|\beta|^{\frac{1}{3^{n-1}}}(\cos\frac{\pi}{2\,3^n}+i\frac{\beta}{|\beta|\sin\frac{\pi}{2\,3^n}})} \tag{12}$$

is a stable law with skewness parameter

$$\theta = \frac{\tan\frac{\pi}{2\,3^n}}{\tan\frac{\pi}{2\,3^{n-1}}} \neq \pm 1. \tag{13}$$

The result (12) is generalized to

$$X_{2n+1}(T^1_{\frac{1}{2n+1}}\dots(T^m_{\frac{1}{2n+1}})\dots) \tag{14}$$

where again an asymmetric stable r.v. appears.

References

[1] *Accetta G. and Orsingher E.*, Asymptotic expansion of fundamental solutions of higher order heat equations. Random Oper. Stochastic Equations, 1997, N 5, p. 217–226.

[2] *Bernstein F.*, Über das Fourierintegral $\int_0^\infty e^{-x^4}\cos tx\,dx$, Math. Ann., 1919, N 79 p. 265 – 258.

[3] *Lévy P.*, Sur une application de la derivée d'ordre non entier au calcul des probabilités. C.R. Acad. Sci., 1923, N 179, p. 1118–1120.

[4] *Orsingher E. and D'Ovidio M.*, Probabilistic representation of fundamental solutions to $\frac{\partial u}{\partial t} = k_m\frac{\partial^m u}{\partial x^m}$, submitted

[5] *Orsingher E. and D'Ovidio M.*, Higher-order Laplace equations and hyper-Cauchy distributions, submitted.

International Conference
"PROBABILITY THEORY and its APPLICATIONS"
(Moscow, June 26-30, 2012)

Lower bounds on the convergence rate of the Markov symmetric random search

Alexey S. Tikhomirov[1]

The convergence rate of the Markov random search algorithms designed for finding the extremizer of a function is investigated. It is shown that, for a wide class of random search methods that possess a natural symmetry property, the number of evaluations of the objective function needed to find the extremizer accurate to ε cannot grow slower than $|\ln \varepsilon|$.

1 Introduction

Let the objective function $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ (where, for instance, $X = \mathbb{R}^d$) take its minimal value at a single point x_*. Consider the problem of finding the global minimizer x_* of this function up to a given accuracy ε (approximation by argument). One way of solving this problem is to use random search algorithms (see [1]–[3]). Such algorithms have long been used for solving difficult optimization problems. However, theoretical results for the convergence rate of those algorithms are scarce (see [2]). This paper is devoted to the theoretical analysis of the convergence rate of the Markov random search algorithms designed for finding the global extremizer. Note that the simulated annealing algorithm, which is a well-known stochastic global optimization algorithm, belongs to this class.

The *optimization space* is defined as a set X equipped with a metric ρ. In this paper, we consider the case $X = \mathbb{R}^d$ and the Euclidean metric ρ. The closed ball of radius r centered at the point x is denoted by $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^d, \text{ such that } \rho(x, y) \le r\}$.

Throughout this paper, we assume that the objective function $f\colon \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ is measurable, and takes its minimum value at a unique point $x_* = \arg\min\{f(x), \text{ such that } x \in \mathbb{R}^d\}$.

A *random search* is defined as an arbitrary sequence of random variables $\{\xi_n\}_{n\ge 0}$ taking values in $\mathbb{R}^d$. Following [2], we give a general scheme of Markov random search algorithms.

Algorithm 1 (A general scheme of Markov algorithms).

Step 1. Set $\xi_0 = x$ and set iteration number $n = 1$.

Step 2. Obtain a point η_n in $\mathbb{R}^d$ by sampling from a distribution $P_n(\xi_{n-1}, \cdot\,)$. The *transition probability* $P_n(\xi_{n-1}, \cdot\,)$ depends on the iteration number n and on the preceding search point ξ_{n-1}.

Step 3. Set

$$\xi_n = \begin{cases} \eta_n & \text{with probability } Q_n, \\ \xi_{n-1} & \text{with probability } 1 - Q_n. \end{cases}$$

Here Q_n is the *acceptance probability*; this probability may depend on η_n, ξ_{n-1}, $f(\eta_n)$, $f(\xi_{n-1})$.

Step 4. Check a stopping criterion. If the algorithm does not stop, substitute $n + 1$ for n and return to Step 2.

[1]Novgorod State University. E-mail: `Tikhomirov.AS@mail.ru`

Here, x is the starting point of the search. Different rules of specifying the acceptance probabilities Q_n and the transition probabilities $P_n(x, \cdot\,)$ lead to different variants of the Markov random search algorithms. We will consider the Markov random search whose transition probabilities $P_n(x, \cdot\,)$ have *symmetric densities* $p_n(x, y)$ of the form

$$p_n(x, y) = g_{n,x}\bigl(\rho(x, y)\bigr), \tag{1}$$

where ρ is a metric and $g_{n,x}$ are nonincreasing nonnegative functions defined on $(0, +\infty)$. The Markov search defined by Algorithm 1 with the transition probabilities with densities (1) is called the *Markov symmetric random search*.

We use a random search for finding the minimizer x_* with a given accuracy ε (approximation with respect to the argument). In this case, we want the search to hit the ball $B_\varepsilon(x_*)$. Denote by $\tau_\varepsilon = \min\{n \geq 0$, such that $\xi_n \in B_\varepsilon(x_*)\}$ the time when the search first hits the ε-neighborhood of the global minimizer. The distribution of the random variable τ_ε provides sufficient information about the quality of the random search (see [2, p. 127]). Indeed, τ_ε steps of Algorithm 1 require $\tau_\varepsilon + 1$ evaluations of f.

2 Lower bounds on the convergence rate

The main result of this paper is Theorem 1. It is proved in this theorem that the computational effort of the Markov symmetric random search needed to guarantee the required accuracy ε of the solution cannot grow slower than $|\ln \varepsilon|$.

Theorem 1. *Let the function $f\colon \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ take its minimum value at a unique point x_*. Consider the Markov symmetric random search $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ defined by Algorithm 1 whose transition probabilities have densities of form* (1). *Let x be the starting point of the search, $0 < \varepsilon < \delta = \rho(x, x_*)$, and $n \in \mathbb{N}$. Then, it holds that*

$$\mathsf{E}\,\tau_\varepsilon \geq \ln(\delta/\varepsilon) + 1, \quad \mathsf{P}(\tau_\varepsilon \leq n) \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\ln^i(\delta/\varepsilon)}{i!}. \tag{2}$$

Let the optimization space $X = \mathbb{R}$ and $f(x) = |x|$. In this case it is easy to construct the Markov symmetric random search with $\mathsf{E}\,\tau_\varepsilon = 2\ln(\delta/\varepsilon) + 2$. This result shows that estimates (2) are accurate estimates of the convergence rate.

References

[1] *Ermakov S.M.*, *Zhigljavsky A.A.*, On the Random Search of Global Extremum. Teor. Veroyatn. Ee Primen., 1983, N 1, p. 129–136.

[2] *Zhigljavsky A.*, *Žilinskas A.*, Stochastic Global Optimization, Springer, Berlin, 2008.

[3] *Tikhomirov A.*, *Stojunina T.*, *Nekrutkin V.*, Monotonous Random Search on a Torus: Integral Upper Bounds for the Complexity. Journal of Statistical Planning and Inference, 2007, v. 137, p. 4031–4047.

[4] *Tikhomirov A.S.*, Lower Bounds on the Convergence Rate of the Markov Symmetric Random Search. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2011, v. 51, N 9, p. 1524—1538.

СОДЕРЖАНИЕ

Секция 8. Разное (Miscellanea) 369

Научное издание

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»,

посвященная 100-летию со дня рождения Б.В.Гнеденко
(Москва, 26–30 июня 2012 года)
Тезисы докладов

Под редакцией А.Н. Ширяева, А.В. Лебедева.

Подготовка оригинал-макета: А.В. Лебедев