К.М. ИВАНОВ, А.А. МИТЮШОВ,
Э.И. УЛЬЯНОВ, Д.В.УСМАНОВ,
П.М. ВИННИК

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

К.М. ИВАНОВ, А.А. МИТЮШОВ,
Э.И. УЛЬЯНОВ, Д.В. УСМАНОВ,
П.М. ВИННИК

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Санкт-Петербург
2011

УДК 620.22:539.4.012
М55

М55 **Механические** свойства материалов при сложном нагружении / К.М. Иванов [и др.]; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2011. – 150 с.
ISBN 978-5-85546-631-7

В настоящей монографии с системных позиций рассмотрены основные положения теории и практики сложного нагружения в механике деформируемых сред. Приведена классификация процессов сложного нагружения. Особое внимание уделено влиянию вида нагружения на механические свойства материалов.

Для инженеров и научных работников, специализирующихся в области испытаний механических свойств и оценки прочности конструкций, а также для магистрантов и аспирантов вузов соответствующего профиля.

УДК 620.22:539.4.012

Р е ц е н з е н т ы: чл.-корр. РАН, д-р техн. наук, проф. СПбГПУ *А.И. Рудской*; президент Санкт-Петербургской инженерной академии, засл. деятель науки и техники, д-р техн. наук, проф. *А.И. Федотов*

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета

ISBN 978-5-85546-631-7

ВВЕДЕНИЕ

Современная технологическая и конструкторская подготовка производства требует привлечения современных численных методов определения полей напряжений и деформаций. К числу этих методов относится метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий проводить математическое моделирование процессов настолько полно, насколько это необходимо. К настоящему времени разработаны эффективные алгоритмы и программное обеспечение метода, обеспечивающие решение задач механики и термодинамики. Широко применяется МКЭ при технологической подготовке штамповочного производства, где особенно важно знать параметры напряженно-деформированного состояния. В этом случае цель моделирования состоит в определении механических и термодинамических величин, описывающих состояние обрабатываемого материала в произвольный момент времени. Это позволяет определить технологические параметры процесса, оценить изменение структуры и свойств обрабатываемого материала, установить практически целесообразные способы управления процессом.

Однако практически неограниченные возможности численных методов, в частности МКЭ, находятся в противоречии с низким качеством реологических моделей материалов. В большинстве расчетов используются простые реологические модели упругопластического тела, не всегда адекватно отражающие механические свойства материалов в условиях больших деформаций.

В результате многочисленных исследований были разработаны теории сложного нагружения, учитывающие немонотонность изменения параметров процесса деформирования. Наиболее известными из них являются теории А.А. Ильюшина и Г.А. Смирнова-Аляева. Однако практического применения они не получили. В то же время выполненные в последние годы исследования механизмов пластической деформации свидетельствуют о сложном характере протекающих процессов.

В настоящей монографии рассмотрены и обобщены феноменологические теории сложного нагружения, описывающие изменение механических свойств материалов. Особое внимание уделено использованию в численных расчетах реологических моделей материалов, учитывающих сложный характер нагружения.

Книга написана по материалам исследований, проводимых в Балтийском государственном техническом университете «Военмех» им. Д.Ф. Устинова.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ

1.1. Сложное нагружение. Теория А.А. Ильюшина

Впервые основные идеи теории сложного нагружения были сформулированы А.А. Ильюшиным, а затем им же разработана достаточно строгая теория процессов сложного нагружения для случая малых пластических деформаций [1.1]. Основным содержанием этой теории является идея о функциональной зависимости физических величин, характеризующих напряжено-деформированное состояние (НДС), от истории нагружения (деформирования). До появления в 1950-х годах работ А.А. Ильюшина определяющие соотношения в различных теориях пластичности имели вид функций, связывающих параметры НДС в данный момент времени, не зависящие от предыстории деформирования. Положения этой теории подтвердились в экспериментах В.С. Ленского [1.2]. Однако, несмотря на это, теория А.А. Ильюшина не получила широкого распространения в расчетной практике. Последнее можно объяснить сложностью реализации алгоритмов расчета НДС с использованием данной теории, а также сложностью определения некоторых эмпирических констант, используемых при описании свойств материала. Кроме того, эта теория справедлива только при малых деформациях для первоначально изотропного тела.

Основу теории А.А. Ильюшина составляют условие однозначности, постулат изотропии, гипотеза о разгрузке и постулат пластичности, принцип запаздывания, которые формулируются при следующих предположениях.

1. В исходном состоянии тело является изотропным и не имеющим начальных напряжений и деформаций.

2. Считается, что любую точку деформированного тела можно окружить малой областью, которая находится в однородном напряженно-деформированном состоянии. При этом предполагается, что однородная деформация в элементарном объеме неоднородно деформируемого тела и однородная деформация тела конечных размеров (образца) при одинаковых напряжениях и внешних условиях протекают одинаково. На основании этой гипотезы можно рассматривать образцы конечных размеров, находящиеся в однородном напряженно-деформированном состоянии. Часто это допущение называют постулатом макроскопической определимости А.А. Ильюшина.

3. Производные перемещений точек по координатам считаются малыми, поэтому их квадратами, а также вращениями элементов тела можно пренебречь.

4. Реономные (явно зависящие от времени) свойства материалов не рассматриваются.

Пространства девиаторов деформаций и напряжений. Как известно, тензор деформации можно представить в виде суммы шарового тензора и девиатора:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{\text{ср}}\,\delta_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij}\,, \tag{1.1}$$

причем среди элементов девиатора деформации $\bar{\varepsilon}_{ij}$ лишь пять независимых величин, так как $\bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ji}$; $\bar{\varepsilon}_{xx} + \bar{\varepsilon}_{yy} + \bar{\varepsilon}_{zz} = 0$.

Будем считать, что задан процесс в деформациях, если заданы $\varepsilon_{\text{ср}}(t)$ и $\bar{\varepsilon}_{ij}\,(t)$. Аналогичным образом можно представить тензор напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{\text{ср}}\,\delta_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}\,, \tag{1.2}$$

причем $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ji}$; $\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy} + \bar{\sigma}_{zz} = 0$. Следовательно, среди $\bar{\sigma}_{ij}$ тоже пять независимых величин. Будем считать, что задан процесс в напряжениях, если заданы $\sigma_{\text{ср}}(t)$ и $\bar{\sigma}_{ij}\,(t)$.

Рассмотрим процесс деформации в параметрах $\bar{\varepsilon}_{ij}\,(t)$, так как $\varepsilon_{\text{ср}}$ связано с $\sigma_{\text{ср}}$, а давление p = - $\sigma_{\text{ср}}$ можно отнести к внешним параметрам. Так как среди $\bar{\varepsilon}_{ij}$ только пять независимых величин, то девиатор деформации можно представить в виде вектора $\vec{э}$ в пятимерном пространстве Э$_5$ с декартовым базисом $\vec{e}_j$, j = 1,2,...,5. В пространстве Э$_5$ процесс деформирования для фиксированной точки тела изображается траекторией деформации э(t), которую описывает конец вектора $\vec{э}$.

Вектор $\vec{э}$ через свои компоненты выражается следующим образом:

$$\vec{э} = э_1\bar{e}_1 + э_2\vec{e}_2 + э_3\vec{e}_3 + э_4\vec{e}_4 + э_5\vec{e}_5. \tag{1.3}$$

Интенсивность деформации выражается через длину вектора $\vec{э}$:

$$\left|\vec{э}\right| = \sqrt{\sum_{j=1}^{5} э_j^2} = \sqrt{2\sum_{k,l}\left(\bar{\varepsilon}_{kl}\bar{\varepsilon}_{kl}\right)} = \sqrt{3}\varepsilon_i, \quad k,l = (x,y,z). \tag{1.4}$$

Обозначим производную по времени от траектории деформации $\dfrac{d\left[э(t)\right]}{dt} = \dot{э}(t)$; тогда для длины дуги траектории деформации $s(t)$ от начального момента до времени t можно записать:

$$ds(t) = \left|\, d\left[\vec{э}\right]\right| = \sqrt{\sum_{j=1}^{5}\left[\dot{э}_j(t)\dot{э}_j(t)\right]}dt = \sqrt{\sum_{k,l}\left[\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}(t)\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}(t)\right]}\, dt;$$

$$s(t) = \int_0^t \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{5}\left[\dot{э}(\tau)\dot{э}(\tau)\right]}\right)d\tau$$

или

$$s(t) = \int_0^t \left(\sqrt{\sum_{k,l}\left[\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}(t)\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}(t)\right]}\right)d\tau = \Gamma_i = \sqrt{3}\mathrm{e}_i, \tag{1.5}$$

где $\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl} = \dfrac{d\bar{\varepsilon}_{kl}}{dt}$ – компоненты девиатора скорости деформации; Γ_i – степень деформации сдвига; e_i – степень деформации; τ – параметр, введенный для различия текущего времени и пределов интегрирования, $0 \le \tau \le t$.

Для описания процесса деформации также используются параметры внутренней геометрии траектории деформации, так называемой кривизны траектории, являющиеся производными вектора $\vec{\text{э}}$ по длине дуги s:

$$\aleph_1 = \frac{d^2[\vec{\text{э}}]}{ds^2}; \quad \aleph_2 = \frac{d^3[\vec{\text{э}}]}{ds^3}; \quad \aleph_3 = \frac{d^4[\vec{\text{э}}]}{ds^4}; \quad \aleph_4 = \frac{d^5[\vec{\text{э}}]}{ds^5}, \tag{1.6}$$

$$\vec{\text{Э}}^2 = \sum_{i=1}^{s} \text{Э}_i \vec{e}_i, \quad \vec{\text{Э}}^2 = |\text{Э}|^2 = \sum_{i,j} e_{ij} e_{ij} = 3/2\varepsilon_i^2.$$

Компоненты девиатора деформации выражаются через компоненты вектора $\vec{\text{э}}$ следующим образом [1.1]:

$$\begin{aligned}
&\bar{\varepsilon}_{xx} = \sqrt{\frac{2}{3}}[\text{э}_1 \cos\beta + \text{э}_2 \sin\beta]; \quad \bar{\varepsilon}_{xy} = \sqrt{\frac{2}{3}}\text{э}_3 \cos\frac{\pi}{6};\\
&\bar{\varepsilon}_{yy} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[-\text{э}_1 \sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) + \text{э}_2 \cos\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right)\right]; \quad \bar{\varepsilon}_{yz} = \sqrt{\frac{2}{3}}\text{э}_4 \cos\frac{\pi}{6}; \\
&\bar{\varepsilon}_{zz} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\text{э}_1 \sin\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) - \text{э}_2 \cos\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right)\right]; \quad \bar{\varepsilon}_{zx} = \sqrt{\frac{2}{3}}\text{э}_5 \cos\frac{\pi}{6},
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где β – произвольное постоянное число.

Аналогично в пятимерном пространстве девиатора напряжений Σ_5 с декартовым базисом $\vec{q}_j$, $j = 1,2,\ldots 5$, вводится вектор

$$\vec{\sigma} = \sigma_1\vec{q}_1 + \sigma_2\vec{q}_2 + \sigma_3\vec{q}_3 + \sigma_4\vec{q}_4 + \sigma_5\vec{q}_5. \tag{1.8}$$

Интенсивность напряжений выражается через длину вектора $\vec{\sigma}$:

$$|\vec{\sigma}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{5}\sigma_j^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k,l}(\bar{\sigma}_{kl}\bar{\sigma}_{kl})} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i, \quad k,l = (x,y,z). \tag{1.9}$$

Выражения компонентов девиатора напряжений через компоненты вектора $\vec{\sigma}$ аналогичны (1.7):

$$\begin{aligned}
&\bar{\sigma}_{xx} = \sqrt{\frac{2}{3}}[\sigma_1 \cos\beta + \sigma_2 \sin\beta]; \quad \bar{\sigma}_{xy} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_3 \cos\frac{\pi}{6};\\
&\bar{\sigma}_{yy} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[-\sigma_1 \sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) + \sigma_2 \cos\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right)\right]; \quad \bar{\sigma}_{yz} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_4 \cos\frac{\pi}{6}; \\
&\bar{\sigma}_{zz} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\sigma_1 \sin\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) - \sigma_2 \cos\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right)\right]; \quad \bar{\sigma}_{zx} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_5 \cos\frac{\pi}{6}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Путем наложения пространства напряжений Σ_5 на пространство девиатора деформаций $Э_5$ строится образ процесса как совокупности траектории деформации и множества векторов напряжений, построенных в соответствующих точках траектории (рис. 1.1).

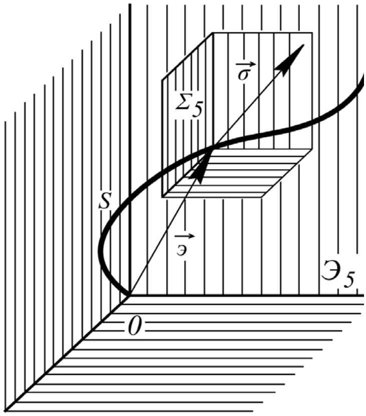


Рис. 1.1. Образ процесса деформирования в пространстве девиатора деформации $Э_5$

Условие однозначности. При заданном начальном состоянии, заданном изменении во времени внешних параметров и заданном процессе деформирования (т.е. изменении во времени тензора деформации) тензор напряжений и другие подобные тензоры (упругих деформаций, пластических деформаций и т.п.) в каждый момент времени определяются единственным образом. Условие однозначности постулирует, что отклонения в значениях тензора напряжений будут малы, если малы отклонения в значениях внешних параметров и тензора деформаций, т.е. связи между различными параметрами, возникающие в процессе деформации, будут локально устойчивыми.

Постулат изотропии. Согласно постулату изотропии, сформулированному А.А. Ильюшиным, образ процесса инвариантен по отношению к преобразованиям вращения и отражения в пространстве $Э_5$. В этом случае длина и направление вектора напряжения относительно траектории деформации в каждый момент времени зависят только от ее внутренней геометрии. Это означает, что при повороте всей траектории как жесткой линии изображенные на ней векторы напряжений поворачиваются вместе с ней без изменения.

Для описания векторов напряжений и других параметров в каждой точке траектории деформации используют единичные векторы естественного ортогонального базиса (так называемый *сопровождающий базис Френе*):

$$\overline{p}_1 = \frac{d[\vec{Э}]}{ds}; \quad \overline{p}_2 = \frac{1}{\aleph_1}\frac{d^2[\vec{Э}]}{ds^2}; \quad \overline{p}_3 = \frac{1}{\aleph_2}\frac{d^3[\vec{Э}]}{ds^3};$$
$$\overline{p}_4 = \frac{1}{\aleph_3}\frac{d^4[\vec{Э}]}{ds^4}; \quad \overline{p}_5 = \frac{1}{\aleph_4}\frac{d^5[\vec{Э}]}{ds^5}. \tag{1.11}$$

Из постулата изотропии следует разложение вектора напряжений в естественном репере траектории деформации:

$$\vec{\sigma} = A_1\overline{p}_1 + A_2\overline{p}_2 + A_3\overline{p}_3 + A_4\overline{p}_4 + A_5\overline{p}_5. \tag{1.12}$$

где $A_k = A_k[s(t), \aleph_m(t)]$, $k = 1,...,5$; $m = 1,....4$ – функционалы, зависящие только от внутренней геометрии траектории деформации.

На основании выражения (1.12), считая входящие в него функционалы найденными, можно записать законы связи компонентов девиаторов и тензоров напряжений и деформации:

$$\overline{\sigma}_{ij} = A_1\overline{\varepsilon}_{ij} + A_2\frac{d\overline{\varepsilon}_{ij}}{dt} + A_3\frac{d^2\overline{\varepsilon}_{ij}}{dt^2} + A_4\frac{d^3\overline{\varepsilon}_{ij}}{dt^3} + A_5\frac{d^4\overline{\varepsilon}_{ij}}{dt^4};$$
$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + A_{k+1}\frac{d^k\left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{\text{ср}}\delta_{ij}\right)}{dt^k}, \quad k = 0,...,4, \tag{1.13}$$

где средняя деформация $\varepsilon_{\text{ср}}$ и гидростатическое давление p также зависят от внутренней геометрии траектории деформации: $\varepsilon_{\text{ср}} = \varepsilon_{\text{ср}}[s(t), \aleph_m(t)]; \quad p = p[s(t), \aleph_m(t)]$.

Гипотеза о разгрузке. Основные положения гипотезы о разгрузке рассмотрены в [1.3]. Для каждой точки траектории деформации (нагружения) существует поверхность $F = 0$, являющаяся инвариантом предшествующей траектории (до точки K), разделяющая область пассивных и активных деформаций; внутри поверхности F пластическая деформация $\vec{Э}^p$ остается постоянной, а упругая $\vec{Э}^e$ – однородной линейной функцией напряжения (и наоборот):

$$\vec{Э}^e = \left(E_{ij}\right)\vec{\sigma}; \quad \vec{\sigma} = \left(\Sigma_{ij}\right)\vec{Э}^e, \tag{1.14}$$

причем матрицы коэффициентов упругости $\left(E_{ij}\right)$ и $\left(\Sigma_{ij}\right)$ зависят только от активных участков траектории (до точки K) и являются симметричными и обратными.

Отсюда следует, что (1.14) справедливо и вне поверхности F, причем (E_{ij}) и (Σ_{ij}) зависят еще и от активного участка траектории вне F.

Постулат пластичности. Рассмотрим элементарную работу dA вектора девиатора напряжений $\vec{\sigma}$ при приращении вектора девиатора деформации $d\vec{Э}$: $dA = \vec{\sigma} \cdot d\vec{Э}$. Полная работа определяется интегралом по длине траектории деформации s:

$$A = \int_0^s \vec{\sigma} \cdot d\vec{Э}. \tag{1.15}$$

Согласно постулату пластичности работа напряжений A по любой замкнутой траектории в пространстве деформаций $Э_5$ равна нулю, если на всей траектории не происходит изменение пластической деформации (траектория разгрузки), и положительна, если хотя бы на некоторых участках траектории пластическая деформация не остается постоянной.

Принцип запаздывания. Для упругопластичного материала сформулирован и экспериментально подтвержден принцип запаздывания. Согласно этому принципу значение и ориентация вектора напряжений относительно траектории деформации зависят от внутренней геометрии не всей предшествующей траектории, а только предшествующего участка длины h. Длина h называется *следом запаздывания.* Это существенно упрощает установление связи между напряжениями и деформациями, поскольку необходимо анализировать уже не всю траекторию деформации, а только небольшой ее участок h.

Рассмотрим некоторые следствия из принципа запаздывания.

1. Если до точки K траектория деформации располагалась в n-мерном подпространстве $Э_n$ пространства $Э_5$ $(1 \le n \le 5)$, а, начиная с точки K, целиком располагается в $(n\text{-}k)$-мерном подпространстве $Э_{n-k}$ $(1 \le n - k \le n)$, то на расстоянии от точки K, превышающем h, вектор напряжений располагается в подпространстве $Э_{n-k}$.

2. В частности, если, начиная с точки K, траектория деформации прямолинейна, то на расстоянии от точки K, превышающем h, вектор напряжений направлен по этой прямой.

3. На траектории деформации малой кривизны вектор напряжений направлен по касательной к траектории: $\frac{\vec{\sigma}}{|\vec{\sigma}|} = \vec{p}_1$, где $\frac{\vec{\sigma}}{|\vec{\sigma}|}$ –

единичный вектор напряжении; $\vec{p}_1$ – единичный вектор касательной к траектории (1.11).

Траектория деформации называется траекторией малой кривизны, если во всех ее точках главная кривизна $h^2\aleph_1 << 1$. Кривизну $\aleph_1$ называют главной кривизной траектории.

Все процессы деформирования можно квалифицировать по виду траектории. В работе [1.4] предложено по величине кривизны траектории $\aleph_1$ или по радиусу кривизны $\rho = \dfrac{1}{\aleph_1}$ в точках, принадлежащих траектории, выделить следующие группы процессов:

1) $\aleph_1 << \chi$, в идеальном случае $\aleph_1 = 0$ – процессы простого нагружения;

2) $\aleph_1 < \chi$ – процессы малой кривизны;

3) $\aleph_1 \approx \chi$ – процессы средней кривизны;

4) существуют точки, в которых $\aleph_1 > \chi$, – процессы большой кривизны;

5) существуют точки, в которых $\aleph_1 << \chi$, – процессы с изломами траектории, где χ – некоторое число, принятое в качестве классификационного критерия, значение которого характерно для процессов средней кривизны.

В общем случае траектория деформации может состоять из участков различной кривизны.

В настоящее время в рамках теории малых упругопластических деформаций с учетом принципа запаздывания и рассмотренной выше классификации разработаны теории процессов нагружения по прямолинейным траекториям, траекториям малой [1.1] и средней кривизны [1.5], двух- и многозвенным ломаным [1.1, 1.4].

При анализе процессов обработки металлов давлением широкое применение нашли две теории пластичности: деформационная теория и теория течения. Можно показать, что они вытекают из общей теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина как частные случаи, например *деформационная теория* – это теория процессов нагружения по прямолинейным траекториям.

Теория течения вытекает из теории процессов малой и, в некоторых случаях, средней кривизны. Применение этой теории для анализа процессов большой кривизны с изломами траектории в общем случае неоправданно. В то же время широкое ее применение при расчете процессов обработки металлов давлением основано на том, что в этих процессах (исключая импульсные методы обработки металлов) во всех точках тела реализуются траектории малой кривизны. Для этого достаточно, чтобы внешние нагрузки изменялись плавно, а именно, чтобы на длине процесса порядка следа запаздывания отклонение траектории внешних нагрузок (в соответствующем пространстве) от прямой линии было меньше длины предшествующего участка этой траектории.

1.2. Монотонность деформации

Г.А. Смирновым-Аляевым [1.6] и его учениками развит подход к описанию процессов конечной пластической деформации в условиях сложного нагружения, базирующийся на понятии монотонности.

Будем понимать под конечной пластической деформацией ситуацию, когда квадратами градиентов перемещений точек и вращением элементов тела при анализе деформированного состояния пренебречь нельзя.

Введенное Г.А. Смирновым-Аляевым [1.7] понятие монотонности протекания процесса пластической деформации является естественным обобщением понятия простого нагружения по А.А. Ильюшину на случай конечных поворотов. Математическая формулировка понятия монотонности протекания деформации при конечном формоизменении дана в статье В.М. Розенберг [1.8].

Рассмотрим основные положения монотонных процессов по Г.А. Смирнову-Аляеву, следуя указанным источникам. Для этого представим процесс конечного формоизменения как последовательность малых деформаций. Это позволит обоснованно обобщить теорию малых деформаций на случай конечного формоизменения.

Условия монотонности процесса пластической деформации части или частицы тела можно сформулировать следующим образом:

1) материальное волокно рассматриваемой частицы, претерпевающее в данной стадии процесса наиболее быстрое удлинение (или укорочение), и во всех предыдущих стадиях также явилось быстро удлиняющимся (или укорачивающимся);

2) вид малой деформации, происходящей при переходе в текущую стадию из предшествующей, весьма близкой, остается постоянным.

Первое условие монотонности накладывает ограничения на направляющий тензор деформации. Согласно этому условию главные оси тензора логарифмической деформации совпадают с фиксированными материальными волокнами, хотя эти главные оси и изменяют в общем случае свое направление относительно любой условно-неподвижной системы координат.

Второе условие монотонности предполагает неизменность в течение всего процесса характеристики деформированного состояния. Если процесс конечного формоизменения разбить на бесконечное число стадий, происходящих за бесконечно малый промежуток времени *dt*, то мгновенное состояние деформирующейся материальной частицы удобно рассматривать в скоростях деформации. Выражение для показателя вида скорости деформации можно записать следующим образом: $\nu_{\dot{\varepsilon}} = \dfrac{2\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}$, где $\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_3$ – главные компоненты скорости деформации.

Второе условие монотонности можно сформулировать так: в течение всего процесса деформирования вид скорости деформации остается неизменным. Такая формулировка равносильна условию неизменности отношений главных компонентов скорости деформации, т.е.:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_1}{3 - \nu_{\dot{\varepsilon}}} = \frac{\dot{\varepsilon}_2}{2\nu_{\dot{\varepsilon}}} = \frac{\dot{\varepsilon}_3}{-3 - \nu_{\dot{\varepsilon}}}. \qquad (1.16)$$

Рассмотрим формоизменение некоторой материальной частицы, представляющей окрестность точки *M* в условиях однородной конечной монотонной деформации. Введем в рассмотрение переносную начальную систему координат с центром в точке *M*. Предположим, что ось *MX* совпадает с первой главной осью скорости деформации, ось *MY* – со второй и *MZ* – с третьей.

Согласно первому условию монотонности сечение рассматриваемой материальной частицы плоскостью нулевого значения начальной координаты *X* в любой стадии деформации должно совпадать с координатной плоскостью *YMZ* (оси *MY* и *MZ* неизменно совпадают с одними и теми же материальными элементами рассматриваемой части тела). Это значит, что значению $X = 0$ начальной координаты должно соответствовать значение $x = 0$ текущей координаты. Деформация рассматриваемой частицы предполагается однородной, поэтому любое сечение частицы, параллельное данному до деформации, должно оставаться параллельным ему в любой стадии деформации. Следовательно, любому данному значению начальной координаты X в пределах размеров рассматриваемой частицы должно соответствовать значение текущей координаты x, не зависящее от начальных координат Y и Z. Аналогичный вывод можно сделать относительно координат Y и Z.

Тогда в пределах материальной частицы в окрестности точки M три принятых направления координатных осей равенства, связывающие начальные и текущие координаты, могут быть аппроксимированы следующими линейными зависимостями:

$$\begin{aligned}
(x - x_M) &= (\partial x / \partial X)(X - X_M) = f_1(t)(X - X_M);\\
(y - y_M) &= (\partial y / \partial Y)(Y - Y_M) = f_2(t)(Y - Y_M);\\
(z - z_M) &= (\partial z / \partial Z)(Z - Z_M) = f_3(t)(Z - Z_M).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

При этом составляющие вектора скорости в окрестностях точки M будут равны:

$$\upsilon_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{f}_1(t)(X - X_M) = \frac{\dot{f}_1(t)}{f_1(t)}(x - x_M);$$

$$\upsilon_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{f}_2(t)(Y - Y_M) = \frac{\dot{f}_2(t)}{f_2(t)}(y - y_M);$$

$$\upsilon_z = \frac{\partial z}{\partial t} = \dot{f}_3(t)(Z - Z_M) = \frac{\dot{f}_3(t)}{f_3(t)}(z - z_M).$$

Компоненты скорости деформации определяются равенствами

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{xx} &= \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} = \frac{\dot{f}_1(t)}{f_1(t)}; \quad \dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x}\right) = 0;\\
\dot{\varepsilon}_{yy} &= \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} = \frac{\dot{f}_2(t)}{f_2(t)}; \quad \dot{\varepsilon}_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}\right) = 0;\\
\dot{\varepsilon}_{zz} &= \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = \frac{\dot{f}_3(t)}{f_3(t)}; \quad \dot{\varepsilon}_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Поскольку оси *X, Y, Z* совмещены соответственно с первой, второй и третьей главными осями скорости деформации, можно записать:

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\varepsilon}_1; \quad \dot{\varepsilon}_{yy} = \dot{\varepsilon}_2; \quad \dot{\varepsilon}_{zz} = \dot{\varepsilon}_3. \tag{1.19}$$

Подставив (1.18) в (1.16), получим

$$\frac{1}{3-\nu_{\dot{\varepsilon}}}\frac{\dot{f}_1(t)}{f_1(t)} = \frac{1}{2\nu_{\dot{\varepsilon}}}\frac{\dot{f}_2(t)}{f_2(t)} = \frac{-1}{3+\nu_{\dot{\varepsilon}}}\frac{\dot{f}_3(t)}{f_3(t)}. \tag{1.20}$$

Согласно второму условию монотонности $\nu_{\dot{\varepsilon}}$ не зависит от времени, что позволяет проинтегрировать равенства (1.20) по времени процесса. В результате

$$\frac{1}{3-\nu_{\dot{\varepsilon}}}\ln\left(\frac{f_1(t)}{f_1(t_0)}\right) = \frac{1}{2\nu_{\dot{\varepsilon}}}\ln\left(\frac{f_2(t)}{f_2(t_0)}\right) = \frac{-1}{3+\nu_{\dot{\varepsilon}}}\ln\left(\frac{f_3(t)}{f_3(t_0)}\right).$$

Поскольку в начальный момент времени t_0 текущие координаты считаем совпадающими с начальными, с учетом равенств (1.17) получим

$$\begin{gathered} f_1(t_0) = f_2(t_0) = f_3(t_0) = 1, \\ \frac{\ln f_1(t)}{3-\nu_{\dot{\varepsilon}}} = \frac{\ln f_2(t)}{2\nu_{\dot{\varepsilon}}} = \frac{\ln f_3(t)}{-3-\nu_{\dot{\varepsilon}}}. \end{gathered} \tag{1.21}$$

При принятых направлениях координатных осей функциональная связь текущих координат с начальными в окрестности материальной точки *M* определяется равенствами (1.17), в силу которых уравнение эллипсоида, преобразованного деформацией из начальной элементарной сферы с центром в материальной точке *M*, будет имеет вид

$$\left[\frac{x-x_M}{f_1(t)}\right]^2 + \left[\frac{y-y_M}{f_2(t)}\right]^2 + \left[\frac{z-z_M}{f_3(t)}\right]^2 = \rho_0^2.$$

Полуоси этого эллипсоида определяются равенствами: $\rho_1 = \rho_0 f_1(t); \quad \rho_2 = \rho_0 f_2(t); \quad \rho_3 = \rho_0 f_3(t)$. Таким образом, второе уравнение в системе (1.21) можно привести к виду

$$\frac{\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)}{3-\nu_{\dot{\varepsilon}}}=\frac{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right)}{2\nu_{\dot{\varepsilon}}}=\frac{\ln\left(\frac{\rho_3}{\rho_0}\right)}{-3-\nu_{\dot{\varepsilon}}}.$$

Сопоставив эти равенства с (1.16), можно сделать вывод о том, что при монотонно протекающем процессе конечного формоизменения главные компоненты тензора логарифмических деформаций пропорциональны главным компонентам скорости деформации.

Полученный факт позволяет доказать, что при монотонной деформации произвольного элементарного объема логарифмические деформации представляют собой сумму бесконечно малых главных деформаций, соответствующих отдельным этапам формоизменения; производные логарифмических деформаций по времени равны главным компонентам тензора скорости деформации, а интенсивность конечной деформации $\varepsilon_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}$ совпадает со степенью деформации по А.А. Ильюшину: $\varepsilon_i=\mathrm{e}_i=\int\limits_{t_0}^{t}\left[\dot{\varepsilon}_i(t)\right]dt$, где интегрирование по времени выполняется вдоль траектории движения элемента объема.

Таким образом, конечную монотонную деформацию элементарного объема можно количественно характеризовать, сопоставляя начальную и конечную конфигурации.

Полученные факты позволяют установить связь между тензором напряжений и тензором конечных деформаций путем обобщения зависимостей теории малых упругопластических деформаций. При этом основные положения теории конечной монотонной деформации сводятся к следующим:

1) среда изотропна;

2) среднее напряжение пропорционально относительному изменению объема, имеющему упругий характер;

3) девиатор напряжений и девиатор логарифмических деформаций пропорциональны.

При этом главные оси конечной монотонной деформации совпадают с главными осями напряжений. Кроме того, при монотонном формоизменении между интенсивностью напряжений и интенсивностью логарифмических деформаций может быть установлена однозначная функциональная зависимость:

$$\sigma_i = \Phi(e_i) = \Phi(\varepsilon_i), \tag{1.22}$$

отражающая сопротивляемость материала при данном температурно-скоростном режиме его пластической обработки и не зависящая ни от показателя вида деформации ν_ε, ни от схемы деформированного состояния.

Таким образом, при исследовании процессов конечного формоизменения справедливы основные положения деформационной теории пластичности при выполнении условий монотонности. Это позволяет достаточно просто определять параметры напряженного состояния по известному полю конечных деформаций в условиях монотонности протекания процесса.

Следует отметить, что процессы простого нагружения по А.А. Ильюшину, предполагающие неподвижность главных осей, на практике встречаются крайне редко. Однако, как показывают экспериментальные исследования, реальные процессы листовой и объемной штамповки удовлетворяют (в некоторых случаях приближенно) условиям монотонности. Эти условия выделяют из всего многообразия процессов конечного формоизменения такие, которые подчиняются определенной закономерности, обеспечивающей возможность применения для их анализа деформационной теории пластичности. В то же время немонотонные процессы не являются бессистемными, хаотически протекающими. Многие из них подчиняются другим, отличным от условий монотонности закономерностям, обеспечивающим однозначность их протекания. Для них характерны частичное нарушение условий монотонности и систематическое отклонение от законов деформационной теории. Условия монотонности позволяют классифицировать процессы конечного формоизменения с точки зрения закономерностей их протекания.

Выберем в качестве критериев классификации параметры, характеризующие выполнение условий монотонности.

Для проверки выполнения первого условия монотонности необходимо определить отклонение главных осей тензора скорости деформации от материальных волокон, совпадающих с этими осями в начале рассматриваемого процесса. Поскольку главные оси тензора скорости деформации взаимно ортогональны, то достаточно оценить отклонение только одной, главной, оси. В рассматриваемой классификации имеет значение только факт выполнения условий монотонности, поэтому для оценки выполнения первого условия достаточно ввести угол α между первой главной осью тензора скорости деформации и материального волокна, с которым эта ось совпала в начале процесса. В общем случае для фиксированной материальной частицы угол α будет являться функцией времени t.

В качестве параметра, характеризующего выполнение второго условия монотонности, можно использовать показатель вида деформированного состояния ν_ε (для монотонных процессов он совпадает с показателем вида скорости деформации $\nu_{\dot{\varepsilon}}$). Согласно классификации (табл. 1.1) все процессы конечного формоизменения можно разбить на четыре группы: монотонные, односдвиговые, однонаправленные и сложного нагружения.

Т а б л и ц а 1.1

Классификация процессов конечного формоизменения

Вид процесса	Параметры, характеризующие условия монотонности
Монотонный	a = const, ν_ε = const
Односдвиговый	a = var, ν_ε = const
Однонаправленный	a = const, ν_ε = var
Сложного нагружения	a = var, ν_ε = var

Монотонные процессы характеризуются постоянством параметров a и ν_ε во времени. Для них строго выполняются законы деформационной теории пластичности.

Односдвиговые процессы характеризуются нарушением первого (a = var) и выполнением второго (ν_ε = const) условий. Впервые односдвиговые процессы были исследованы В.П. Чикидовским [1.7]. Они часто встречаются в процессах разделительной штамповки (отрезка, вырубка, пробивка), а также в процессах, характеризующихся возникновением зон интенсивных сдвигов в очаге деформации.

Для однонаправленных процессов характерно выполнение первого и нарушение второго (ν_ε = var) условий монотонности, которые реализуются, например, на свободной поверхности заготовки, осаживаемой шероховатыми плитами [1.7]. В этом случае вид деформированного состояния изменяется от сжатия в начальной стадии до сдвига в заключительной при неизменном положении главных осей скорости деформации.

Односдвиговые и однонаправленные процессы характеризуются систематическим отклонением от законов деформационной теории. Процессы сложного нагружения реализуются, когда нарушаются два условия монотонности (a = var, ν_ε = var). При этом законы деформационной теории пластичности не выполняются.

1.3. Математический анализ условий монотонности и однозначности деформации

Необходимые условия монотонности деформации. В теории пластичности деформация в точке, скорость деформации и напряженное состояние точки характеризуются соответственно, например, тензором малых деформаций T_ε, тензором скоростей деформации $T_{\dot\varepsilon}$ и тензором напряжений T_σ. Допущения различных теорий пластичности приводят к условиям совпадения главных осей тех или иных тензоров. Так, в рамках теории малых упругопластических деформаций главные оси напряженного состояния (т.е. тензора T_σ) совпадают по направлению и индексу с главными осями деформации (т.е. тензора T_ε). В рамках же теории пластического течения совпадают по направлению и индексу главные оси напряженного состояния (т.е. тензора T_σ) и главные оси скорости деформации (т.е. тензора $T_{\dot\varepsilon}$).

Первое условие монотонности деформации, в свою очередь, налагает требование совпадения главных осей тензоров T_ε и $T_{\dot\varepsilon}$. Условие совпадения по направлению главных осей двух произвольных симметричных матриц A и B порядка n с алгебраической точки зрения означает существование такой ортогональной матрицы P, для которой выполняются сразу два равенства:

$$P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \ P^T \cdot B \cdot P = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & 0 \\ & \mu_2 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & \mu_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1,...,\lambda_n$ и $\mu_1,\ldots,\mu_n$ – собственные числа матриц A и B соответственно, а P^T обозначает транспонированную к матрице P матрицу (напомним, что ортогональность матрицы P означает выполнение условий $P^T \cdot P = E$ и $\det P = 1$.)

Как известно (см., например, [1.9, с.82, теорема 5]), необходимым и достаточным условием совпадения по направлению главных осей матриц A и B указанного вида является коммутативность A и B, т.е. выполнение равенства $A{\cdot}B = B{\cdot}A$. Отсюда следует необходимое условие монотонности деформации**:** функции $\varphi_1(X,Y,Z,t)$, $\varphi_2(X,Y,Z,t)$, $\varphi_3(X,Y,Z,t)$, выражающие текущие координаты через начальные, должны удовлетворять трем равенствам:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}\left(\frac{\partial\dot\varphi_1}{\partial Y}+\frac{\partial\dot\varphi_2}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial Y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}\right)\frac{\partial\dot\varphi_2}{\partial Y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial\dot\varphi_2}{\partial Z}+\frac{\partial\dot\varphi_3}{\partial Y}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial Y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}\right)\frac{\partial\dot\varphi_1}{\partial X}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial Y}\left(\frac{\partial\dot\varphi_1}{\partial Y}+\frac{\partial\dot\varphi_2}{\partial X}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial\dot\varphi_1}{\partial Z}+\frac{\partial\dot\varphi_3}{\partial X}\right);$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}\left(\frac{\partial\dot\varphi_1}{\partial Z}+\frac{\partial\dot\varphi_3}{\partial X}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial Y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial\dot\varphi_2}{\partial Z}+\frac{\partial\dot\varphi_3}{\partial Y}\right)+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial X}\right)\frac{\partial\dot\varphi_3}{\partial Z}=$$

$$=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial X}\right)\frac{\partial\dot\varphi_1}{\partial X}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial Z}+\frac{\partial\dot\varphi_3}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial\dot\varphi_1}{\partial Y}+\frac{\partial\dot\varphi_2}{\partial X}\right)+\frac{\partial\varphi_3}{\partial Z}\left(\frac{\partial\dot\varphi_1}{\partial Z}+\frac{\partial\dot\varphi_3}{\partial X}\right);$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial Y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial\dot\varphi_1}{\partial Z}+\frac{\partial\dot\varphi_3}{\partial X}\right)+\frac{\partial\varphi_2}{\partial Y}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial Z}+\frac{\partial\dot\varphi_3}{\partial Y}\right)+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial Y}\right)\frac{\partial\dot\varphi_3}{\partial Z}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial\dot\varphi_1}{\partial Y}+\frac{\partial\dot\varphi_2}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial Z}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial Y}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial Y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial Z}\left(\frac{\partial\dot\varphi_2}{\partial Z}+\frac{\partial\dot\varphi_3}{\partial Y}\right);$$

или в компонентах малой деформации и скорости деформации.

Подчеркнем, что указанные условия ни в коем случае не являются достаточными для выполнения первого условия монотонности деформации, так как обеспечивают совпадение главных осей лишь по направлению, но не по индексу.

Однозначность процесса деформации для несжимаемого тела в условиях плоского деформированного состояния. Установим условия, при которых процесс деформации будет в той или иной степени однозначным (монотонным, односдвиговым или однонаправленным), если предположить, что в любой момент времени имеет место плоское деформированное состояние несжимаемого тела.

Предположим, что оси координат расположены так, что деформации по оси η отсутствуют. В рассматриваемом случае текущие координаты ξ, ζ, η произвольной точки M зависят от начальных координат точки и времени: $\xi = \varphi(x, y, t)$, $\zeta = \psi(x, y, t)$, $\eta = z$. Здесь x, y, z – начальные координаты точки M, t – время. Будем полагать функции $\varphi(x, y, t)$, $\psi(x, y, t)$ непрерывными вместе с их частными производными.

Как известно, якобианы текущих координат по начальным и начальных по текущим взаимно обратны, причем при условии несжимаемости они равны единице согласно [1.10]. Поэтому

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & 0 \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

откуда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 1\,.$$

Естественно считать, что $\varphi(x, y, t) = x$, $\psi(x, y, t) = y$. Тогда составляющие вектора перемещения точки M задаются равенствами:

$$u_x = \varphi(x, y, t) - x,\ u_y = \psi(x, y, t) - y,\ u_z = 0.$$

Для компонентов малой деформации любой частицы получаем

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - 1, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - 1, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0,$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

Тогда тензор малых деформаций

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - 1 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Главные компоненты малой деформации (если $\gamma_{xy} \neq 0$):

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \sqrt{\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)^2 + \gamma_{xy}^2}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = 0,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} - \sqrt{\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)^2 + \gamma_{xy}^2}}{2}.$$

Расположение главных осей малой деформации в этом случае определяется векторами

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} + \sqrt{\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)^2 + \gamma_{xy}^2} \\ \gamma_{xy} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} - \sqrt{\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)^2 + \gamma_{xy}^2} \\ \gamma_{xy} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Значение параметра вида деформации, очевидно, таково:

$$\nu_{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{\sqrt{\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)^2 + \gamma_{xy}^2}}.$$

Пусть $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ – проекции вектора скорости материальной точки M на координатные оси в текущий момент времени. Так как составляющие вектора скорости $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ можно считать зависящими функционально от начальных координат x, y, z и от времени t, то, дифференцируя составляющие вектора перемещений u_x, u_y, u_z по времени, получаем $\upsilon_x = \dot{\varphi},\ \upsilon_y = \dot{\psi},\ \upsilon_z = 0$.

Отсюда компоненты вектора скорости (т.е. скорости деформаций) определяются равенствами:

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} = \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x}, \qquad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} = \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial x},$$

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} = \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial y}, \qquad \dot{\gamma}_{xz} = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} = 0,$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = 0, \qquad \dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} = 0.$$

Тогда тензор скоростей малых деформаций имеет вид

$$T_{\dot{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial x}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial x}\right) & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial y} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Главные компоненты скорости малой деформации (при $\dot{\gamma}_{xy} \neq 0$):

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} + \sqrt{(\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{yy})^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2}}{2},$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = 0,$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = \frac{\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} - \sqrt{(\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{yy})^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2}}{2}.$$

Расположение главных осей скорости малой деформации в этом случае определяется векторами

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{yy} + \sqrt{(\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{yy})^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2} \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{yy} - \sqrt{(\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{yy})^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2} \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из условия несжимаемости $\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = 0$, так как $\dot{\varepsilon}_2 = 0$, то $\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_3 = 0$.

Подставляя полученные выражения для $\dot{\varepsilon}_1$ и $\dot{\varepsilon}_3$, получаем

$$\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} = 0, \ \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial y} = 0.$$

Учитывая возможность изменения порядка нахождения частных производных и интегрируя по t, находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = T_1(x, y), \tag{1.23}$$

где $T_1(x,\ y)$ – некоторая произвольная функция. Существенным является то, что априори левая часть зависит от времени, а фактически, благодаря условию несжимаемости, – нет.

Заметим, что из равенства $\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_3 = 0$ немедленно следует, что значение параметра вида скорости деформации равно нулю:

$$\nu_{\dot{\varepsilon}} = \frac{2\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3} = 0.$$

Таким образом, второе условие монотонности деформации для несжимаемого тела в условиях плоского деформированного состояния всегда выполнено, т.е. деформация всегда является по крайней мере односдвиговой.

Установим, при каких условиях главные оси малой деформации и скорости малой деформации совпадают. Будем пока полагать, что $\gamma_{xy} \neq 0$ и $\dot{\gamma}_{xy} \neq 0$.

Так как при плоском деформированном состоянии вторые главные оси малой деформации и ее скорости одинаковы, то для совпадения всех осей необходимо и достаточно, чтобы координаты векторов первых (и, соответственно, третьих) осей были пропорциональны друг другу:

$$\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} + \sqrt{\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)^2 + \gamma_{xy}^2}}{\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{yy} + \sqrt{\left(\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{yy}\right)^2 + \dot{\gamma}_{xy}^2}} = \frac{\gamma_{xy}}{\dot{\gamma}_{xy}},$$

$$\frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}-\sqrt{\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right)^2+\gamma_{xy}^2}}{\dot\varepsilon_{xx}-\dot\varepsilon_{yy}-\sqrt{\left(\dot\varepsilon_{xx}-\dot\varepsilon_{yy}\right)^2+\dot\gamma_{xy}^2}}=\frac{\gamma_{xy}}{\dot\gamma_{xy}}.$$

Домножая обе части равенств на знаменатели, получаем

$$\dot\gamma_{xy}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})+\dot\gamma_{xy}\sqrt{\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right)^2+\gamma_{xy}^2}=$$
$$=\gamma_{xy}(\dot\varepsilon_{xx}-\dot\varepsilon_{yy})+\gamma_{xy}\sqrt{\left(\dot\varepsilon_{xx}-\dot\varepsilon_{yy}\right)^2+\dot\gamma_{xy}^2},$$
$$\dot\gamma_{xy}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})-\dot\gamma_{xy}\sqrt{\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right)^2+\gamma_{xy}^2}=$$
$$=\dot\gamma_{xy}(\dot\varepsilon_{xx}-\dot\varepsilon_{yy})-\dot\gamma_{xy}\sqrt{\left(\dot\varepsilon_{xx}-\dot\varepsilon_{yy}\right)^2+\dot\gamma_{xy}^2}.$$

Сложим и вычтем полученные равенства:

$$\begin{gathered}\dot\gamma_{xy}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})=\gamma_{xy}(\dot\varepsilon_{xx}-\dot\varepsilon_{yy}),\\ \dot\gamma_{xy}\sqrt{\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right)^2+\gamma_{xy}^2}=\gamma_{xy}\sqrt{\left(\dot\varepsilon_{xx}-\dot\varepsilon_{yy}\right)^2+\dot\gamma_{xy}^2}.\end{gathered}\tag{1.24}$$

Если преобразовать первое уравнение к виду

$$\left(\dot\varepsilon_{xx}-\dot\varepsilon_{yy}\right)=\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right)\frac{\dot\gamma_{xy}}{\gamma_{xy}}$$

и подставить полученное выражение во второе уравнение, то получим

$$\dot\gamma_{xy}\sqrt{\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right)^2+\gamma_{xy}^2}=\gamma_{xy}\sqrt{\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right)^2\left(\frac{\dot\gamma_{xy}}{\gamma_{xy}}\right)^2+\dot\gamma_{xy}^2},$$

откуда

$$\dot\gamma_{xy}\sqrt{\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right)^2+\gamma_{xy}^2}=\gamma_{xy}\left|\frac{\dot\gamma_{xy}}{\gamma_{xy}}\right|\sqrt{\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right)^2+\gamma_{xy}^2},$$

$$\left(\frac{\dot\gamma_{xy}}{\gamma_{xy}}-\left|\frac{\dot\gamma_{xy}}{\gamma_{xy}}\right|\right)\sqrt{\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right)^2+\gamma_{xy}^2}=0.$$

Так как подкоренное выражение в предположении, что $\gamma_{xy} \neq 0$, положительно, то второе уравнение системы может выполняться только при условии равенства выражения в скобке нулю. Это будет иметь место при $\frac{\dot{\gamma}_{xy}}{\gamma_{xy}} > 0$. Так как $\gamma_{xy} \neq 0$, то

$$\left(\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial\dot{\psi}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) > 0. \tag{1.25}$$

Рассмотрим теперь первое уравнение системы (1.24). Если перенести слагаемые правой части влево и разделить уравнение на γ_{xy}^2, то, благодаря предположенной непрерывности частных производных, $(\varepsilon_{xx})'_t = \dot{\varepsilon}_{xx}$ и т.п., получим

$$\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{\gamma_{xy}}\right)'_t = 0.$$

Следовательно, после интегрирования по t

$$\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{\gamma_{xy}} = T_2(x, y),$$

где $T_2(x, y)$ – некоторая произвольная функция. Окончательно

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - 1 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - 1\right) = T_2(x, y)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right). \tag{1.26}$$

Таким образом, для того чтобы главные оси и скорости малой деформации (а следовательно, в допущениях теории пластического течения, и напряжений) совпадали, функции φ и ψ, выражающие зависимость текущих координат от начальных, должны удовлетворять системе, составленной из уравнений (1.23), (1.24), (1.26) и неравенства (1.25):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial y}=T_2(x,y)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=T_1(x,y),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}=1, \tag{1.27}$$

$$\left(\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial y}+\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)>0$$

при некоторых произвольных функциях $T_1(x,y)$ и $T_2(x,y)$.

Например, положим $T_1(x,y)=2$, а $T_2(x,y)=1$. Как известно, одним из методов решения двумерных задач в напряжениях является использование функции напряжения. Поступим сходным образом. Возьмем некоторую функцию $F(x,y,t)$ и положим

$$\varphi(x,y,t)=x+\frac{\partial F}{\partial y},\quad \psi(x,y,t)=y-\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Тогда второе уравнение (1.27) выполняется тождественно, а первое сведется к уравнению

$$2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

которому должна удовлетворять функция $F(x,y,t)$. Например, видно, что функция $F(x,y,t)=(ax^2+bxy+(a+b)y^2)t$ при произвольных значениях параметров a и b удовлетворяет данному уравнению.

Предполагая, что $b\neq 0$ (для определенности возьмем $b>0$), для такой функции $F(x,y,t)$ получаем функции $\varphi(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t)$:

$$\varphi(x,y,t)=x+(bx+2(a+b)y)t,$$
$$\psi(x,y,t)=y-(2ax+by)t.$$

Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=1+bt,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=2(a+b)t,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-2at,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=1-bt.$$

Из условия $J=1$ получаем

$$(1 + bt)(1 - bt) + 2at\, 2(a + b)t = 1 - b^2t^2 + 4a^2t^2 + 4abt^2 = 1,$$

откуда $4a^2 + 4ab - b^2 = 0$ или $a = \dfrac{\left(\pm\sqrt{2}-1\right)b}{2}$. Положим, например, $a = \dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)b}{2}$.

Компоненты малой деформации и скорости деформации:

$$\varepsilon_{xx} = bt, \quad \gamma_{xy} = 2bt, \quad \varepsilon_{yy} = -bt,$$
$$\dot\varepsilon_{xx} = b, \quad \dot\gamma_{xy} = 2b, \quad \dot\varepsilon_{yy} = -b.$$

Укажем, что условие $\dot\gamma_{xy} \cdot \gamma_{xy} > 0$, очевидно, выполнено.

Тензоры малой деформации и скорости малой деформации:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} bt & bt & 0 \\ bt & -bt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; T_{\dot\varepsilon} = \begin{pmatrix} b & b & 0 \\ b & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Главные компоненты малой деформации и скорости малой деформации:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{2}bt, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = -\sqrt{2}bt,$$
$$\dot\varepsilon_1 = \sqrt{2}b, \quad \dot\varepsilon_2 = 0, \quad \dot\varepsilon_3 = -\sqrt{2}b.$$

Параметры вида деформации и скорости деформации совпадают: $\nu_\varepsilon = \nu_{\dot\varepsilon} = 0$. Главные оси малой деформации и скорости тоже совпадают:

$$\left(\sqrt{2}+1 \quad 1 \quad 0\right), \quad (0 \quad 0 \quad 1), \quad \left(1-\sqrt{2} \quad 1 \quad 0\right).$$

Таким образом, для взятых функций φ и ψ процесс деформации будет монотонным, причем в любой момент времени деформированное состояние будет плоским.

Заметим, что при выбранных функциях φ и ψ произойдет перемещение частиц по прямым, определяемым уравнениями

$$\xi = x + \left(x + \left(\sqrt{2}+1\right)y\right)bt, \quad \zeta = y - \left(\left(\sqrt{2}-1\right)x + y\right)bt, \quad \eta = z,$$

причем на прямой $y=\left(1-\sqrt{2}\right)x$ частицы перемещаться не будут, выше и ниже прямой $y=\left(1-\sqrt{2}\right)x$ будут перемещаться в противоположных направлениях, причем, тем быстрее, чем дальше они находятся от указанной прямой.

Теперь рассмотрим случай, когда хотя бы одна из величин $\dot{\gamma}_{xy}, \gamma_{xy}$ равна нулю. Заметим, что если $\gamma_{xy}=0$, то, очевидно, и $\dot{\gamma}_{xy}=0$. Следовательно, возможны два случая:

1) $\gamma_{xy}=\dot{\gamma}_{xy}=0;$

2) $\gamma_{xy}\neq 0,\ \dot{\gamma}_{xy}=0.$

Итак, если $\gamma_{xy}=0$, то

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\left|\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right|}{2}=\left[\begin{array}{ll}\varepsilon_{xx} & \text{при } \varepsilon_{xx}>\varepsilon_{yy},\\ \varepsilon_{yy} & \text{при } \varepsilon_{xx}<\varepsilon_{yy},\end{array}\right.$$

$$\varepsilon_2=0,$$

$$\varepsilon_3=\frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}-\left|\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right|}{2}=\left[\begin{array}{ll}\varepsilon_{yy} & \text{при } \varepsilon_{xx}>\varepsilon_{yy},\\ \varepsilon_{xx} & \text{при } \varepsilon_{xx}<\varepsilon_{yy},\end{array}\right.$$

главные оси при $\varepsilon_{xx}>\varepsilon_{yy}$ определяются векторами (1 0 0), (0 0 1), (0 1 0), при $\varepsilon_{xx}<\varepsilon_{yy}$ – (0 1 0), (0 0 1), (1 0 0).

Для главных компонентов скорости деформации аналогично получим

$$\dot{\varepsilon}_1=\frac{\dot{\varepsilon}_{xx}+\dot{\varepsilon}_{yy}+\left|\dot{\varepsilon}_{xx}-\dot{\varepsilon}_{yy}\right|}{2}=\left[\begin{array}{ll}\dot{\varepsilon}_{xx} & \text{при } \dot{\varepsilon}_{xx}>\dot{\varepsilon}_{yy},\\ \dot{\varepsilon}_{yy} & \text{при } \dot{\varepsilon}_{xx}<\dot{\varepsilon}_{yy},\end{array}\right.$$

$$\dot{\varepsilon}_2=0,$$

$$\dot{\varepsilon}_3=\frac{\dot{\varepsilon}_{xx}+\dot{\varepsilon}_{yy}-\left|\dot{\varepsilon}_{xx}-\dot{\varepsilon}_{yy}\right|}{2}=\left[\begin{array}{ll}\dot{\varepsilon}_{yy} & \text{при } \dot{\varepsilon}_{xx}>\dot{\varepsilon}_{yy},\\ \dot{\varepsilon}_{xx} & \text{при } \dot{\varepsilon}_{xx}<\dot{\varepsilon}_{yy},\end{array}\right.$$

главные оси при $\dot{\varepsilon}_{xx}>\dot{\varepsilon}_{yy}$ определяются теми же векторами: (1 0 0), (0 0 1), (0 1 0), при $\dot{\varepsilon}_{xx}<\dot{\varepsilon}_{yy}$ – (0 1 0), (0 0 1), (1 0 0).

Параметр вида скорости деформации по условию несжимаемости равен нулю: $\nu_{\dot{\varepsilon}} = 0$. Таким образом, если $\gamma_{xy} = 0$, то при условии $(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})(\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{yy}) > 0$, т.е.

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial\dot{\psi}}{\partial y}\right) > 0,$$

процесс деформации будет монотонным, причем в любой момент времени деформированное состояние будет плоским.

Заметим, что примером монотонной деформации для такого случая может являться уже рассмотренный, при соответствующем выборе осей координат (необходимо, чтобы перемещение частиц происходило параллельно одной из осей координат). При условии

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial\dot{\psi}}{\partial y}\right) < 0.$$

процесс деформации будет лишь односдвиговым.

Если же $\gamma_{xy} \neq 0$, но $\dot{\gamma}_{xy} = 0$, то главные оси и скорости малой деформации заведомо не совпадают, так как по две координаты первого и третьего векторов главных осей малой деформации ненулевые, а у первого и третьего векторов главных осей скорости деформации только по одной координате являются ненулевыми. Следовательно, в этом случае выполнено только условие постоянства (в данном случае равенства нулю) параметра вида скорости деформации. Поэтому процесс является лишь односдвиговым.

Таким образом, для несжимаемого тела при плоском деформированном состоянии деформация всегда является по крайней мере односдвиговой, а при определенных условиях – монотонной.

Библиографический список к разд. 1

1.1. *Ильюшин, А.А.* Пластичность (Основы общей математической теории) / А.А. Ильюшин. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.

1.2. *Ленский, В.С.* Экспериментальная проверка основных постулатов теории упругопластических деформаций / В.С. Ленский // Вопр. теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961.

1.3. *Прикладная* теория пластичности: учебное пособие / К.М. Иванов [и др.]; под ред. К.М. Иванова. СПб.: Политехника, 2009. 375 с.

1.4. *Васин, Р.А.* Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении / Р.А. Васин // Упругость и неупругость. Вып. 1. М.: МГУ, 1971. С. 59-126.
1.5. *Малый, В.И.* Разложение функционала напряжений по малому параметру / В.И. Малый // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1967. № 2. С. 73-80.
1.6. *Смирнов-Аляев, Г.А.* Сопротивление материалов пластическому деформированию / Г.А. Смирнов-Аляев. Л.: Машиностроение, 1978. 307 с.
1.7. *Смирнов-Аляев, Г.А.* Экспериментальные исследования в обработке металлов давлением / Г.А. Смирнов-Аляев, В.П. Чикидовский. Л.: Машиностроение, 1972. 360 с.
1.8. *Розенберг, В.М.* О принципе монотонности деформации при конечном формоизменении металлов / В.М. Розенберг // Прогрессивная технология кузн.-штампов. пр-в. М.-Л.: Машгиз, 1952. С. 69-85.
1.9. *Беллман, Р.* Введение в теорию матриц / Р. Беллман. М. Наука, 1976.
1.10. *Дель, Г.Д.* Технологическая механика / Г.Д. Дель [и др.]. Тула, 1988.

2. МОНОТОННЫЕ ПРОЦЕССЫ НАГРУЖЕНИЯ

2.1. Растяжение

Простое растяжение. Простым линейным растяжением называется один из основных видов напряженного состояния малого материального объема, вызывающее в нем деформацию растяжения, т.е. превращающее сферу в эллипсоид, одна из трех главных осей которого удлиняется, а две другие укорачиваются. Две из трех составляющих напряжений при этом равны нулю, а третья больше нуля. При простом линейном растяжении $\sigma_2=\sigma_3=0$ и $\sigma_1 > 0$. В этом случае

$$\nu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = -1; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 > 0; \quad \varepsilon_1 > 0.$$

В полной мере указанная схема реализуется при испытании на растяжение цилиндрических образцов.

Диаграмма растяжения. В результате обработки диаграмм разрывных машин мы получаем зависимость растягивающей силы P от неупругой составляющей удлинения образца. Пусть l_0 – начальная длина образца, l – его длина в напряженно-деформированном состоянии и σ_1 – растягивающее напряжение.

Согласно закону Гука длина образца, нагруженного силой P, после снятия этой нагрузки должна быть равна: $l - l\sigma_1/E$.

При обработке машинной диаграммы мы исключаем влияние деформаций пресса и приспособлений обратного хода, а также, частично, влияние местных деформаций образца в зоне перехода к головке и снимаем с диаграммы ряд значений растягивающей силы P, соответствующих ряду значений величины

$$\Delta l = l - \left(l\sigma_1 / E\right) - l_0. \tag{2.1}$$

Следуя обычно принимаемому допущению о сохранении объема, т.е. полагая, что объем деформируемого тела изменяется только за счет упругих деформаций, будем считать, что объем образца после разгрузки равен его первоначальному объему:

$$W_0 = F_0 l_0 = \left(l - l\sigma_1 / E\right)F = \left(l_0 + \Delta l\right)F.$$

Здесь F_0 – начальная площадь поперечного сечения образца; F – площадь его поперечного сечения в деформированном состоянии;

$$\sigma_1 = \frac{P}{F} = \frac{P}{F_0}\frac{l_0 + \Delta l}{l_0}. \tag{2.2}$$

При простом растяжении в условиях линейной схемы напряжений ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2} = \sigma_1 . \tag{2.3}$$

Для каждой расчетной точки диаграммы, зная значения Δl и P, можно вычислить по формуле (2.2) $\sigma_i = \sigma_1$, причем значения l_0 и F_0 должны быть известны по данным предварительных замеров образца перед испытанием.

Длина образца в напряженно-деформированном состоянии

$$l = \frac{l_0 + \Delta l}{1 - \sigma_i / E},$$

где Δl – см. формулу (2.1).

Первая главная деформация определится равенством

$$\varepsilon_1 = \ln\frac{l}{l_0} = \ln\frac{l_0 + \Delta l}{l_0\left(1 - \sigma_i / E\right)} = \ln\frac{l_0 + \Delta l}{l_0} - \ln\left(1 - \sigma_i / E\right) = \\ = \ln\frac{l_0 + \Delta l}{l_0} + \frac{\sigma_i}{E}, \tag{2.4}$$

отношение σ_i / E мало по сравнению с единицей.

Исходя из

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3),$$

при $\sigma_2=\sigma_3=0$ и $\sigma_1=\sigma_i$

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\frac{1-2\mu}{E}\sigma_i,$$

но $\varepsilon_2=\varepsilon_3$ и интенсивность деформации при монотонном линейном растяжении

$$\varepsilon_i=\sqrt{\left(\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}\right)^2+\frac{1}{3}(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2}=\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}= \tag{2.4a}$$

$$=\ln\frac{l_0+\Delta l}{l_0}+\frac{\sigma_i}{E}-\frac{1-2\mu}{3}\frac{\sigma_i}{E}=\ln\frac{l_0+\Delta l}{l_0}+\frac{2(1+\mu)}{3E}\sigma_i,$$

т.е. $\varepsilon_i=\ln\dfrac{l_0+\Delta l}{l_0}+\dfrac{\sigma_i}{3G}$, где G – упругий модуль сдвига.

Итак, мы имеем формулы (2.1) – (2.4а) для расчета функциональной зависимости σ_i от ε_i по начальным значениям размеров испытываемого образца (l_0 и F_0) и данным его испытания на разрывной машине (P, Δl).

Как при расчетах на прочность деталей машин и строительных конструкций, так и при проектировании технологических процессов обработки металлов давлением знание зависимости интенсивности напряженного состояния σ_i (сопротивляемости) металла от степени его деформированного состояния e_i представляется совершенно обязательным. Эта функциональная связь имеет место для данного материала независимо от вида НДС. Естественно, что эта «единая кривая» связи σ_i с e_i существует только при конкретных, неизменных внешних условиях (постоянная скорость деформирования при атмосферном давлении и комнатной температуре). Мы не касаемся здесь влияния на эту функциональную связь таких важных факторов, как температурно-скоростные условия обработки, микроструктура материала и т.п.

Следовательно, функциональная связь σ_i и e_i может быть установлена при любом виде НДС при монотонном или хотя бы приближенно-монотонном процессе. Наиболее точный путь – испытание образцов на простое растяжение с последующей аппроксимацией связи σ_i–e_i аналитическим выражением.

Проблема качественной обработки результатов испытаний на простое растяжение, равно как и нахождение наиболее достоверной аппроксимации зависимости σ_i–e_i, давно уже является предметом изучения исследователей, однако до сих пор далека от разрешения. Установление такой зависимости осложняется тем, что во второй стадии процесса после появления шейки на испытуемом образце процесс деформации становится неоднородным вдоль оси образца и возникает объемная схема напряженного состояния (всестороннее неравномерное растяжение).

На протяжении нескольких десятков лет при обработке результатов испытания на растяжение, зафиксированных машинной диаграммой, было предложено несколько методов.

1. Построение эффективной диаграммы растяжения в координатах: по оси абсцисс – относительное удлинение $\varepsilon = \Delta l/l_0$, по оси ординат – эффективные напряжения растяжения $\sigma_{эф} = P/F_0$.

Очевидна условность этой диаграммы, по характеру своему не отличающейся от машинной: процесс деформации растяжения образца слагается, как известно, из двух стадий: устойчивого, равномерного по длине, и сосредоточенного в области шейки при отсутствии остаточных удлинений в остальном объеме образца. Применение к обеим стадиям растяжения одного и того же метода расчета является грубым приближением.

2. Построение истинной диаграммы растяжения в координатах: по оси абсцисс – степень деформации $e = (F_0 - F)/F_0$, величина, характеризующая относительное поперечное сужение (применимая, очевидно, к обеим стадиям растяжения); по оси ординат – истинные напряжения растяжения $\sigma_1 = P/F$.

В отличие от предыдущей диаграммы здесь при построении учитывается переменность площади поперечного сечения образца в течение всего процесса. Но данная диаграмма не устанавливает значения интенсивности напряженного состояния во второй стадии процесса, когда $\sigma_i \neq \sigma_1$.

3. В целях обобщения результатов испытания на простое растяжение на любой вид НДС необходимо строить диаграмму в обобщенных координатах. По оси абсцисс откладывается степень деформации $e_i = \ln(F_0/F)$. В формулировке Ильюшина

$$e_i = \int_0^t \dot{\varepsilon}_i dt .$$

Выражение степени деформации для количественной оценки формоизменения широко применяется в СМПД [2.1, 2.2]. При монотонном процессе деформирования степень деформации e_i численно равна интенсивности главных логарифмических деформаций ε_i, определяемой выражением

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \qquad (2.5)$$

По оси ординат откладываем количественную характеристику напряженного состояния:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \qquad (2.6)$$

Для стадии равномерного растяжения $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; $\sigma_1 > 0$ и равенство (2.6) приводится к простому виду:

$$\sigma_i = \sigma_1. \qquad (2.7)$$

Однако на второй стадии процесса, когда наблюдается локализация очага деформации в зоне шейки, напряженное состояние становится объемным (всестороннее растяжение) и значение σ_i будет несколько меньше, чем вычисленное по формуле (2.7), т.е.

$$\sigma_i = \eta\sigma_1, \qquad (2.8)$$

где η – поправочный коэффициент, меньший единицы и зависящий от степени шейкообразования. Чем интенсивнее развивается шейка, тем больше значения растягивающих напряжений σ_2 и σ_3 и тем меньше значение коэффициента η.

На рис. 2.1 приведен график зависимости коэффициента η от отношения $F_у/F_{min}$, характеризующей степень шейкообразования. В момент разрыва F_{min} принимается равным $F_ш$.

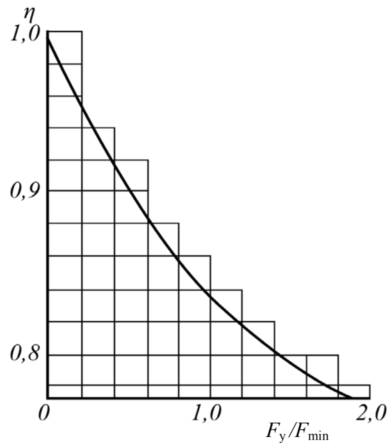


Рис. 2.1. Зависимость коэффициента η от отношения $F_у/F_{min}$

Интенсивность главных логарифмических деформаций определяется в общем случае выражением (2.5), которое алгебраически приводится к виду

$$\varepsilon_i = \sqrt{\left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_3\right)^2}. \qquad (2.9)$$

Нетрудно убедиться в том, что правые части (2.5) и (2.9) равны. Действительно, квадрат правой части обоих равенств приводится к виду

$$\frac{4}{9}\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1\varepsilon_3\right).$$

При простом растяжении $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ и, следовательно,

$$\varepsilon_i = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}.$$

В большинстве случаев при построении обобщенной кривой деформационного упрочнения упругими слагаемыми деформации можно пренебречь. В этом случае сумма трех главных логарифмических деформаций равна нулю и $\varepsilon_i = \varepsilon_1$.

В отдельных случаях требуется учесть упругие слагаемые деформации. Тогда

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1\text{пл}} - \mu\frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{2\text{пл}} - \mu\frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{3\text{пл}} - \mu\frac{\sigma_3}{E},$$

где $\varepsilon_{1\text{пл}}$, $\varepsilon_{2\text{пл}}$, $\varepsilon_{3\text{пл}}$ – остаточные (пластические) слагаемые деформации, удовлетворяющие условию несжимаемости: $\varepsilon_{1\text{пл}}+\varepsilon_{2\text{пл}}+\varepsilon_{3\text{пл}} = 0$; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона. В этом случае

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{1\text{пл}} + \frac{2(1+\mu)}{3E}\sigma_i = \varepsilon_{1\text{пл}} + \frac{\sigma_i}{3G}.$$

Процесс растяжения цилиндрического образца разделяется на две стадии. На первой стадии растягивающее усилие растет или сохраняет приближенно постоянное значение. Очаг деформации охватывает всю цилиндрическую часть образца. Поля деформаций и напряжений в плоскости поперечного сечения однородны. Эта стадия процесса монотонна. Вторая стадия характеризуется концентрацией очага деформации в области шейки. Деформации в плоскости поперечного сечения остаются однородными. Напряженное состояние становится объемным, появляются радиальные и тангенциальные растягивающие напряжения. Первая стадия соответствует участку до точки $P_{\max}$ машинной диаграммы (рис. 2.2), а вторая – от точки $P_{\max}$ до точки разрыва R.

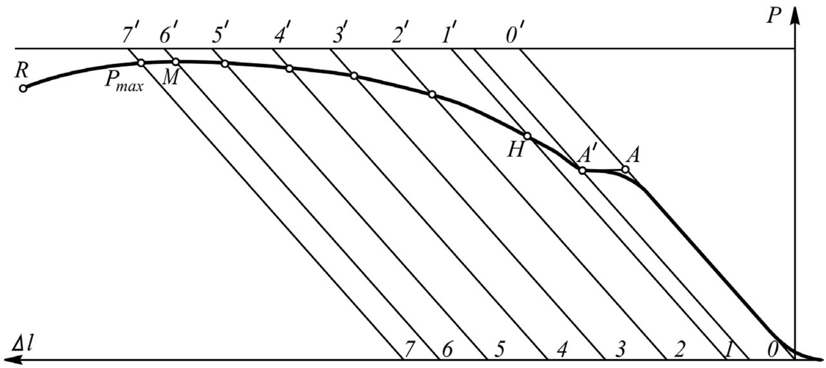


Рис. 2.2. Машинная диаграмма при испытании образца на растяжение

Участок до точки $P_{\max}$ называется участком устойчивой стадии процесса растяжения. Он характеризуется тем, что образец не теряет своей цилиндрической формы. Для этого участка справедливо равенство

$$F = F_0 \frac{l_0}{l_0 + \Delta l}.$$

При наличии экспериментально полученной таблицы зависимости усилия P от Δl можно вычислить координаты точек кривой зависимости $\sigma_i – e_i$ на участке устойчивой стадии по формулам

$$\sigma_i = \frac{P}{F} = \frac{P}{F_0} \frac{l_0}{l_0 + \Delta l}; \quad e_i = \varepsilon_i = \ln \frac{l_0}{l_0 + \Delta l}.$$

При необходимости приближенного учета упругих составляющих степень деформации e_i определяется по формуле (2.4а).

Конец участка устойчивой стадии (точка B на диаграмме $\sigma_i – e_i$ характеризуется $P_{\max}$ и $\Delta l_{\text{у}}$. Координаты этой точки на этой диаграмме:

$$\sigma_i = \sigma_у = \frac{P_{max}}{F_у} = \frac{P_{max}}{F_0}\frac{l_у}{l_0} = \sigma_в = \frac{l_у}{l_0}; \quad \varepsilon_i = \varepsilon_y = \ln\frac{l_у}{l_0}.$$

Построение диаграммы σ_i–e_i от точки B до точки разрыва R на основании машинной диаграммы не представляется возможным, так как очаг деформации занимает незначительный (и неопределенный) объем металла в зоне шейки. Координаты точек этого участка диаграммы можно было бы вычислить по формулам

$$\sigma_i = \eta\frac{P}{F_{max}} = \eta\frac{P}{F_0}\frac{F_0}{F_{min}}\eta; \quad e_i = \ln\frac{F_0}{F_{min}}, \tag{2.10}$$

где F_{min} – минимальная площадь сечения шейки в данной стадии процесса на растяжение.

Необходимость введения коэффициента η объясняется, как уже отмечалось, тем, что в зоне минимального сечения после образования шейки два главных напряжения σ_2 и σ_3, действующие в направлениях, перпендикулярных направлению действия растягивающей силы, можно считать равными нулю только на контуре сечения, а в большей части сечения эти напряжения являются напряжениями растяжения. Поэтому среднее по сечению

$$(\sigma_i)_{ср} = \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)_{ср} < (\sigma_1)_{ср}$$

и, следовательно,

$$(\sigma_i)_{ср} F_{min} < (\sigma_1)_{ср} F_{min} = P.$$

Таким образом, поправочный коэффициент η должен быть меньше единицы.

Значение η зависит в основном от отношения $F_у/F_{min}$, где $F_у$ – приближенное значение площади сечения образца вне шейки, практически равное площади сечения расчетной части этого образца в момент образования шейки. Для определения значения η можно пользоваться диаграммой, приведенной на рис. 2.1. Следовательно, построение диаграммы σ_i–e_i от точки B до разрыва возможно в том случае, когда известны текущие значения площади поперечного сечения шейки F_{min} во второй стадии процесса.

Однако без большого ущерба для точности построения можно производить вычисления по формулам (2.10) только для одной, конечной точки машинной диаграммы, а именно – точки разрыва.

Не затрагивая здесь такие факторы пластичности, как усталость, ползучесть, старение металлов, а также влияние на поведение металлов температуры и скорости, перейдем к рассмотрению примера.

П р и м е р 1. Наиболее распространены испытания на разрывных машинах, имеющих записывающее устройство. Чаще всего испытания проводятся на машинах типа пресса Гагарина, например ИМ-4А, которые растягивают образец с постоянной скоростью 1…2 мм/мин. Размеры цилиндрических образцов регламентированы ГОСТ 1497–73 «Методы испытания на растяжение». В исследовательской практике обычно пользуются короткими образцами. В нашем случае испытывается образец из малоуглеродистой стали. В результате измерений диаметра образца в трех сечениях получено значение $d_0 = 6{,}01$ мм.

Машинная диаграмма испытания на разрыв образца приведена на рис. 2.2. Начало отсчета на диаграмме определяется следующим образом. Во время испытания необходимо следить за тем, чтобы «нулевая» линия нагрузки была четко определена. На рисунке это линия справа от нуля. Прямая, проведенная как продолжение этой линии, является осью абсцисс. Точка пересечения наклонной прямой, проведенной так, чтобы она совпадала с максимальным количеством точек линии нагрузки OA с осью абсцисс, принимается за начало отсчета (начало координат).

Графическое построение для определения пластической составляющей $\Delta l_{пл}$ удобно вести следующим образом. Выше машинной диаграммы проводится линия, параллельная оси абсцисс. Началом отсчета на этой второй оси служит точка $0'$. Влево от точек 0 и $0'$ на равных расстояниях, кратных 50 или 100 мм (в зависимости от длины устойчивого участка на машинной диаграмме), откладываются точки 1 и $1'$, 2 и $2'$, 3 и $3'$ и т.д. Эти точки попарно соединяются отрезками наклонных прямых. Кроме того, через отдельные характерные точки машинной диаграммы проводятся дополнительные наклонные прямые (например, через точку A' – конца площадки текучести, если она выражена через точку P_{max} – конец площадки максимального усилия). Каждая наклонная прямая, проведенная через точку оси абсцисс, соответствующей определенному значению абсолютного остаточного удлинения, пересекает машинную кривую в точке, ордината которой соответствует (в масштабе машинной диаграммы) нагрузке, вызвавшей данное удлинение образца. Для построения диаграммы $\sigma_i – e_i$ на участке $P_т – P_{max}$ должно быть не менее четырех-пяти расчетных точек.

В результате обработки машинной диаграммы получены значения абсолютного пластического удлинения и усилий, их вызывающих (табл. 2.1).

Т а б л и ц а 2.1

Точка	A	A'	H	2	3	4	5	M	B	
Δl, мм	0	0,64	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	6,61	-
P, Н	8000	8000	9400	11100	11900	12300	12400	12500	12600	9400

Площади сечения образца определяются по значениям диаметров, измеренных в процессе проведения испытания:

$d_0 = 6{,}01$ мм – $F_0 = 28{,}39$ мм^2,
$d_у = 5{,}48$ мм – $F_у = 23{,}59$ мм^2,
$d_ш = 3{,}36$ мм – $F_ш = 8{,}878$ мм^2.

Предел текучести:

$\lg \sigma_т = \lg P_т - \lg F_0 = 2{,}9031 - 1{,}4531 = 1{,}4500$; $\sigma_т = P_т/F_0 =$ $= 281{,}8$ МПа.

Предел прочности:

$\lg \sigma_в = \lg P_{max} - \lg F_0 = 3{,}1004 - 1{,}4531 = 1{,}6473$; $\sigma_в = P_{max}/F_0 =$ $= 443{,}9$ МПа.

Интенсивность деформации в конце площадки текучести (точка A') :

$\varepsilon_т = \ln 3{,}364 - \ln 3{,}300 = 1{,}2131 - 1{,}1939 = 0{,}0192$;

$$\varepsilon_т = \ln \frac{l_0 - \Delta l_y}{l_0} = 0{,}0192.$$

Интенсивность деформации в момент начала образования шейки (точка B) :

$\varepsilon_v = \ln 3{,}961 - \ln 3{,}300 = 0{,}1826$; $\varepsilon_y = \ln \dfrac{l_0 + \Delta l_0}{l_0} = 0{,}1826.$

Истинное напряжение в момент максимума усилия при растяжении:

$\lg(l_у/l_0) = \lg l_у - \lg l_0 = 1{,}5978 - 1{,}5185 - 0{,}0793$; $\lg \sigma_в = 1{,}6473$;

$\lg\sigma_у = \lg \sigma_в + \lg(l_у/l_0) = 0{,}0793 + 1{,}6473 = 1{,}7266$;

$\sigma_у = P_{max}/F_у = \sigma_в\, l_у/ l_0 = 532{,}8$ МПа.

Интенсивность деформации в момент разрушения:

$\varepsilon_{раз} = \ln 28{,}39 - \ln 8{,}878 = 3{,}3461 - 2{,}1836 = 1{,}1625$; $\varepsilon_{раз} = \ln F_0/F_ш =$ $= 1{,}1625$.

Для вычисления интенсивности напряженного состояния в момент разрушения образца необходимо определить значение η.

Входное число вспомогательного графика в данном случае

$$\lg\frac{F_у}{F_{\min}} = \ln\frac{F_у}{F_ш} = \ln\frac{F_0}{F_ш} - \ln\frac{F_0}{F_н} = \varepsilon_{раз} - \varepsilon_y = 0{,}9799.$$

По диаграмме определяется η = 0,843,

$\lg P_{раз} - \lg F_ш = 2{,}9731 - 0{,}9483 = 2{,}0248$; $\lg \eta = 1{,}9256$; $\lg \sigma_{раз} =$ $= 1{,}9504$;

$\sigma_{раз} = \eta\, P_{раз}/F_ш = 892{,}1$ МПа.

Координаты основных опорных точек диаграммы σ_i–e_i сведем в табл. 2.2, а координаты промежуточных точек – в табл. 2.3. Для контроля вычисляется значение диаметра образца в момент начала образования шейки.

Т а б л и ц а 2.2

Координаты опорных точек диаграммы

Точка	e_i	σ_i, МПа
A – начало пластического деформирования (начало площадки текучести)		281,8
A′ – конец площадки текучести	0,0192	281,8
B – конец устойчиво го периода	0,1826	532,8
R – точка разрушения	1,1625	892,1

В силу условия постоянства объема $F_0 l_0 = F_у l_у$

$$(\pi/4)\, d^2_0 l_0 = (\pi/4)\, d^2_у l_у\ ,$$

откуда

$$d_у = d_0 = \sqrt{F_0 / F_у}; \quad \lg(F_0 / F_у) = 0{,}0793; \quad \lg\sqrt{F_0 / F_у} = 0{,}0396;$$

$$\lg\sqrt{F_у / F_0} = 1{,}9604; \quad \lg d_0 = 0{,}779; \quad \lg d_у = 0{,}7394; \quad d_у = 5{,}487.$$

Замером было получено 5,48 мм. Разницу меньше 0,01 мм можно считать приемлемой.

Координаты точек диаграммы σ_i–e_i по данным обработки машинной кривой на участке до точки P_{max} вычисляются по формулам

$$\sigma_i = \frac{P}{F} = \frac{P}{F_0}\frac{l_0 + \Delta l}{l_0}; \quad e_i = \varepsilon_i = \ln\frac{l_0 + \Delta l}{l_0}$$

при $\Delta l / l_0 < 0{,}2$ $\quad e_i = \ln\frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0 + 0{,}5\Delta l}.$

Таблица 2.3

Координаты промежуточных точек зависимости σ_i–e_i

Координаты	Номер точки					
	1 (точка *H*)	2	3	4	5	6 (точка *M*)
Δl	1	2	3	4	5	6
$l = l_0 + \Delta l$	34	35	36	37	38	39
$\ln l$	3,5264	3,554	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
$\ln l_0$	3,4965	3,4965	3,4965	3,4965	3,4965	3,4965
ε_i	0,0299	0,0589	0,0870	0,1144	0,1411	0,1671
P	940	1110	1190	1230	1240	1250
$\lg l$	1,5315	1,5441	1,5563	1,5682	1,5798	1,5911
$\lg l_0$	1,5185	1,5185	1,5185	1,5185	1,5185	1,5185
$\lg\frac{F_0}{F} = \lg\frac{l}{l_0}$	0,0130	0,0256	0,0378	0,0497	0,0613	0,0726
$\lg\frac{1}{F_0}$	$\bar{2}{,}5469$	$\bar{2}{,}5469$	$\bar{2}{,}5469$	$\bar{2}{,}5469$	$\bar{2}{,}5469$	$\bar{2}{,}5469$
$\lg\frac{1}{F}$	$\bar{2}{,}5469$	$\bar{2}{,}5469$	$\bar{2}{,}5469$	$\bar{2}{,}5469$	$\bar{2}{,}5469$	$\bar{2}{,}5469$
$\lg P$	2,9731	3,0453	3,0755	3,0899	3,0934	3,0969
$\lg\sigma_i = \lg\frac{P}{F}$	1,5330	1,6178	1,6602	1,6865	1,7016	1,7164
σ_i	34,12	44,48	45,73	48,59	50,30	52,05

Аппроксимация зависимости σ_i–e_i. Многие авторы аппроксимируют кривую σ_i–e_i степенной зависимостью вида

$$\sigma_i = A\ \varepsilon_i^m \tag{2.11}$$

Для того чтобы эта зависимость удовлетворяла условиям, когда известно только, что при $\varepsilon_i = \varepsilon_{i\,у}$ $\sigma_i = \sigma_у$, $d\sigma_i / d\varepsilon_i = \sigma_у$, необходимо и достаточно принять

$$m = \varepsilon_{iу}; \quad A = \sigma_у m^{-m}. \tag{2.12}$$

Значения констант A и m могут быть легко вычислены, когда известны основные механические характеристики металла. Действительно,

$$m = \varepsilon_{iу} = \ln(1 + \delta_у); \quad \sigma_у = \sigma_в(1 + \delta_у).$$

Выражение (2.11) можно записать в следующем виде:

$$\sigma_i = \sigma_у \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{iу}} \right)^{\varepsilon_{iу}}. \tag{2.13}$$

Дифференцируя равенство (2.13) по ε_i, после сокращений получаем

$$\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \sigma_y \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{iу}} \right)^{\varepsilon_{iу}-1}. \tag{2.14}$$

Поскольку правые части (2.13) и (2.14) обращаются в $\sigma_у$ при $\varepsilon_i = \varepsilon_{iу}$, выражение (2.13) удовлетворяет условиям $\sigma_i = \sigma_у$ и $\dfrac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} - \sigma_у$.

Выражение (2.13) является наиболее распространенной аналитической аппроксимацией функциональной зависимости $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$. Однако и оно при больших деформациях, по-видимому, несколько завышает значения напряжений.

В 1964 г. В.М. Розенберг предложила кривую деформационного упрочнения при растяжении аппроксимировать следующими выражениями:

$$\sigma_i = (\sigma_i)_{пред} - C\left(\frac{F}{F_0} \right) - C_1 \left(\frac{F}{F_0} \right)^N \tag{2.15}$$

или

$$\sigma_i = (\sigma_i)_{\text{пред}} - Ce^{-e_i} - C_1 e^{-Ne_i}\,. \tag{2.16}$$

Постоянные $(\sigma_i)_{\text{пред}}$, C и C_1 определяются расчетом. Значения F/F_0 и σ_i – для двух точек M и H (см. рис. 2.2) восходящей ветви машинной кривой (причем точка M выбирается вблизи точки $P_{\max}$, а точка H – в начале восходящей ветви кривой) и для точки разрушения считаем известными из эксперимента.

Принимая во внимание, что последний член выражения для точки разрушения в пределах практической точности равен нулю, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}
\sigma_{iH} = (\sigma_i)_{\text{пред}} - C(F_H/F_0) - C_1(F_H/F_0)^N,\\
\sigma_{iM} = (\sigma_i)_{\text{пред}} - C(F_M/F_0) - C_1(F_M/F_0)^N,\\
\sigma_{i\text{раз}} = (\sigma_i)_{\text{пред}} - C(F_{\text{ш}}/F).
\end{gathered} \tag{2.17}$$

Решая ее относительно константы C, после некоторых элементарных преобразований получаем формулу

$$C = \frac{\sigma_{i\text{раз}} - \sigma_{iM} - (\sigma_{i\text{раз}} - \sigma_{iH})(F_M/F_H)^N}{F_M/F_0 - F_{\text{ш}}/F_0 - (F_H/F_0 - F_{\text{ш}}/F_0)(F_M/F_H)^N}. \tag{2.18}$$

Значение $(\sigma_i)_{\text{пред}}$ определяется из третьего уравнения (2.17), значение коэффициента C_1 – из первого.

Показатель степени N зависит в основном от химического состава материала. Значением этого показателя можно задаваться и в случае необходимости дальнейшего его корректирования. Так, при испытании конструкционных сталей можно рекомендовать его равным 25. При испытании сплавов на медной основе $N = 10$.

Таким образом, для определения аппроксимирующей зависимости в виде (2.15) или (2.16) необходимо в результате испытания на простое растяжение определить координаты трех точек: двух – на восходящей ветви кривой упрочнения (H и M) и точки разрыва, определяемых по методике, изложенной выше.

П р и м е р 2. Аппроксимируем полученную зависимость, показанную на рис. 2.2.

Параметры расчетных точек, необходимых для определения постоянных уравнения (2.15). Точка H (точка *2* при обработке машинной диаграммы); $F_H/F_0 = 0{,}9705$; σ_{iH} =341,2 МПа.

Точка M (точка 6):

$F_M/F_0 == 0{,}8461$; $\sigma_{i\,M} = 520{,}5$ МПа;

точка разрыва R:

$F_{ш}/F_0 = 0{,}3127$; $\sigma_{i\text{ раз}} = 892{,}1$ МПа.

Показатель степени $N = 25$. Определим коэффициент C:

1. $\lg\dfrac{F_H}{F_0}\dfrac{F_0}{F_M} = 0{,}0726 - 0{,}0130 = 0{,}596$; $\lg\left(\dfrac{F_H}{F_M}\right)^{25} = 25\cdot 0{,}0596 = 1{,}4900$;

$$\lg\left(\frac{F_M}{F_H}\right)^{25} = 2{,}5100; \quad \sigma_{i\text{раз}} - \sigma_{iH} = 89{,}21 - 34{,}12 = 550{,}9;$$

$$\lg(\sigma_{i\text{раз}} - \sigma_{iH}) - \lg\left(\frac{F_M}{F_H}\right)^{25} = 1{,}7412 - \bar{2}{,}5100 = 0{,}2511;$$

$$(\sigma_{i\text{раз}} - \sigma_{iH})\left(\frac{F_M}{F_H}\right)^{25} = 1{,}789; \; \sigma_{i\text{раз}} - \sigma_{iM} = 892{,}1 - 520{,}5 = 371{,}2.$$

Числитель равен: 37,16 - 1,789 = 35,378.

2. $F_H/F_0 - F_{ш}/F_0 = 0{,}9705 - 0{,}3127 = 0{,}6578$;

$$\lg\left(\frac{F_H}{F_0} - \frac{F_{ш}}{F_0}\right) - \lg\left(\frac{F_M}{F_H}\right)^{25} = \bar{1}{,}8181 - \bar{2}{,}5100 = \bar{2}{,}3281;$$

$$\left(\frac{F_H}{F_0} - \frac{F_{ш}}{F_0}\right)\left(\frac{F_M}{F_H}\right)^{25} = 0{,}02128;$$

$$\frac{F_M}{F_0} - \frac{F_{ш}}{F_0} = 0{,}8461 - 0{,}3127 = 0{,}5334.$$

Знаменатель равен: 0,5334 - 0,0213 = 0,5121. Таким образом, $C = \dfrac{35{,}378}{0{,}5121} = 69{,}08$.

3. $(\sigma_i)_{\text{пред}} = \sigma_{i\text{раз}} + C(F_{ш}/F_0) = 89{,}21 + 69{,}08\cdot 0{,}3127 = 110{,}81$;

$\lg C - \lg(F_{ш}/F_0) = 1{,}8393 + \bar{1}{,}4952 = 1{,}3345$; $C(F_{ш}/F_0) = 21{,}60$;

$C_1 = \left[(\sigma_1)_{\text{пред}} - C(F_{ш}/F_0) - \sigma_{iH}\right](F_0/F_M)^{25} = 20{,}39$;

$\lg C - \lg(F_H/F_0) = 1{,}8393 + \bar{1}{,}9870 = 1{,}8263$; $C(F_H/F_0) = 67{,}04$;

$$(\sigma_1)_{\text{пред}} - C(F_H/F_0) - \sigma_{iH} = 110{,}81 - 67{,}04 - 34{,}12 = 9{,}65;$$

$$\lg(F_0/F_H)^{25} = 25 \cdot 0{,}0130 = 0{,}3250; \quad \lg 9{,}65 = 0{,}9845; \quad \lg C_1 = 1{,}3095.$$

Аналитическое выражение уравнения (2.15) принимает вид

$$\sigma_i = 110{,}81 - 69{,}08\ (F/F_0) - 20{,}39\ (F/F_0)^{25}. \qquad (2.19)$$

Расчет координат точек аппроксимирующей зависимости σ_i–e_i, определяемой уравнением (2.19), сведен в расчетную табл. 2.4.

Таблица 2.4

Координаты точек зависимости $\sigma_i = 110{,}8 - 69{,}08(F/F_0) - 20{,}39\ (F/F_0)^{25}$

Координаты	Номер точки							
	2 (точка H)	3	4	5	6	7	8	9
F/F_0	0,9705	0,9428	0,9166	0,8919	0,8684	0,8461	0,8309	0,3127
$\lg F/F_0$	0,0130	0,0256	0,0378	0,0497	0,0613	0,0726	0,0804	0,5048
$\lg(F/F_0)^{25}$	0,3250	0,6400	0,9450	1,2425	1,5325	1,8150	2,0100	-
$\lg C$	1,8393	1,8393	1,8393	1,8393	1,8393	1,8393	1,8393	1,8393
$\lg F/F_0$	1,9870	1,9744	1,9622	1,9503	1,9387	1,9274	1,9196	1,4952
$\lg C F/F_0$	1,8263	1,9137	1,8015	1,7836	1,7788	1,7663	1,7588	1,3345
$\lg C_1$	1,3095	1,3095	1,3095	1,3095	1,3095	1,3095	1,3095	1,3095
$\lg(F/F_0)^{25}$	1,6750	1,3600	1,0550	2,7575	2,4675	2,1850	3,9900	-
$\lg C_1(F/F_0)^{25}$	0,9845	0,6095	0,3645	0,0671	1,7770	1,4345	1,2995	-
$(\sigma_i)_{\text{пред}}$	110,81	110,81	110,81	110,81	110,81	110,81	110,81	110,81
$C(F/F_0)$	67,04	65,12	63,31	61,65	59,38	57,40	57,40	21,60
$C_1(F/F_0)^{25}$	9,65	4,67	2,32	1,17	0,100	0,31	0,13	-
σ_i	34,12	41,02	45,18	47,99	50,23	52,07	53,27	89,21
$\sigma_{i\text{оп}}$	34,12	41,48	45,73	48,59	50,50	52,05	53,28	89,21

В таблице для сравнения приведены опытные значения напряжений $\sigma_{i\ \text{оп}}$, практически точно совпадающие с вычисленными по формуле (2.19). Отклонения не превышают возможных погрешностей опыта.

Предложенная В.М. Розенберг аппроксимация зависимости σ_i–e_i многочленом достаточно гибка, чтобы точно отобразить кривую упрочнения на всех ее участках, и ее применение существенно облегчает решение инженерных задач в области прочностных и технологических расчетов, так как многочлен может быть легко проинтегрирован. С его помощью можно просто определить удельную механическую работу пластического формоизменения тела с заданной степенью деформации, т.е. вычислить интеграл $A_{\text{уд}} = \int_0^{e_i} \Phi(e_i) de_i$, что при других видах аппроксимации затруднительно.

***Уточнение аппроксимации зависимости* σ_i–e_i.** Единое описание разнообразных явлений при пластическом деформировании металлов дает математическая теория пластичности. Одной из основных задач теории ОМД является анализ технологических процессов на основе использования общих соотношений теории пластичности с учетом реальных свойств обрабатываемого материала, граничных и начальных условий, физико-механических эффектов пластического деформирования. Конечная цель такого анализа – определение механических и термодинамических величин, описывающих состояние обрабатываемого металла в произвольный момент времени. Это позволяет вычислить технологические параметры, оценить изменение структуры и свойств обрабатываемого материала, установить практически целесообразные способы управления процессом.

Однако реализация указанного подхода обычно связана с принципиальными трудностями, возникающими при решении краевых задач теории пластичности, что вынуждает прибегать к весьма сильным ограничениям и допущениям. Полученные таким образом приближенные решения во многих случаях не удовлетворяют требованиям повышенной точности, предъявляемым в новых условиях.

При разработке технологических процессов ОМД необходимо знать зависимость напряжений текучести материала σ_i от степени деформации e_i, отражаемую кривой упрочнения. Как указывают авторы [2.4], какими бы достоверными ни были теоретические исследования и полученные на их основе математические модели, неточное знание зависимости $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ зачастую делает полученные результаты не пригодными для практики. Поэтому проблема качественной обработки результатов испытаний на простое растяжение, как и нахождение наиболее правильной аппроксимации кривой упрочнения давно является предметом изучения многих исследователей [2.1, 2.4].

Традиционное феноменологическое описание пластической деформации твердых тел приводится в рамках механики сплошных сред и теории дислокаций. Обширные исследования и данные, изложенные в работе [2.1], показали, что соотношение истинных напряжений и истинной деформации при одноосном растяжении различных кристаллических тел носит параболический характер. В работах [2.4, 2.5] приведены рекомендации по определению истинных напряжений в шейке растянутого образца.

Выдвигаемые трактовки механизма упрочнения на разных стадиях (участках) растяжения связывают обычно с накопленной в объеме металла некоторой плотности дислокаций, необходимой для обеспечения заданной степени деформации.

В работе [2.4] проанализированы различные кривые упрочнения, наиболее точная их аппроксимация показательной функцией приведена в работе [2.1] и, на её основе, в [2.4] предложена аппроксимация, пригодная для испытания на растяжение и сжатие.

В последние годы сформированы новые подходы к проблеме пластичности и прочности. Работа [2.6] впервые дает четкое представление о структурных уровнях деформации твердых тел и иерархии этих уровней, которые не функционируют изолированно, а напротив, взаимодействуют, и общая картина деформации и упрочнения является результатом этих взаимодействий. Показано, что качественное изменение в дислокационной структуре является причиной стадийности пластического течения. Возникновение каждого типа дислокационной структуры происходит при некотором значении скалярной плотности дислокаций.

Из физической теории деформации и упрочнения [2.6] известна связь напряжения течения с плотностью дислокаций: $\sigma_i = f(\rho^{1/2})$, где ρ – плотность дислокаций. Именно эта зависимость предопределила анализ построенных соотношений $\sigma = f(\varepsilon)$ и построение диаграммы в координатах $\sigma - \varepsilon^{1/2}$, на которой отчетливо проявились стадии пластического течения (точка перегиба – изменение коэффициента упрочнения).

Таким образом, пластическое деформирование (растяжение образцов) представляет собой стадийный процесс. Модель такого типа позволяет более адекватно описать реальные процессы растяжения образца, т.е. существенно повысить точность моделирования динамики процесса растяжения и его параметров и тем самым точность прогнозирования механических свойств $(\sigma_i - \varepsilon_i)$ и определение НДС в очаге пластической деформации заготовок.

Постановка задачи математического описания процесса пластического формоизменения в случае простого нагружения (немонотонной деформации) приводит к системе из 12 уравнений с 12 неизвестными:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial z} = 0; \qquad (2.20)$$

$$\frac{\partial\tau_x}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} = 0; \qquad (2.21)$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} = 0; \qquad (2.22)$$

$$\sigma_x - \sigma_{\text{ср}} = \frac{2\sigma_i}{3\dot{\varepsilon}_i}\left(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_{\text{ср}}\right); \qquad (2.23)$$

$$\sigma_y - \sigma_{\text{ср}} = \frac{2\sigma_i}{3\dot{\varepsilon}_i}\left(\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_{\text{ср}}\right); \qquad (2.24)$$

$$\sigma_z - \sigma_{\text{ср}} = \frac{2\sigma_i}{3\dot{\varepsilon}_i}\left(\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_{\text{ср}}\right); \qquad (2.25)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\dot{\varepsilon}_i}\dot{\gamma}_{xy}; \qquad (2.26)$$

$$\tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\dot{\varepsilon}_i}\dot{\gamma}_{yz}; \qquad (2.27)$$

$$\tau_{xz} = \frac{\sigma_i}{3\dot{\varepsilon}_i}\dot{\gamma}_{xz}; \qquad (2.28)$$

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{d}{dt}\frac{\partial u_x}{\partial x}, \dot{\varepsilon}_y = \frac{d}{dt}\frac{\partial u_y}{\partial y}, \dot{\varepsilon}_z = \frac{d}{dt}\frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right), \dot{\gamma}_{yz} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right), \dot{\gamma}_{xz} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right);$$

$$3\dot{\varepsilon}_{ср} = \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = \frac{1-2\mu}{2(1+\mu)} \cdot \frac{3\sigma_{ср}}{G}; \tag{2.29}$$

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_z\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{xz}^2\right)}; \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial e_i}{dt} + \frac{\partial e_i}{\partial x}\frac{\partial u_x}{dt} + \frac{\partial e_i}{\partial y}\frac{\partial u_y}{dt} + \frac{\partial e_i}{\partial z}\frac{\partial u_z}{dt} + = \dot{\varepsilon}_i; \quad \sigma_i = f\left(e_i\right). \tag{2.31}$$

Важнейшим в этой системе является уравнение (2.31), выражающее связь интенсивности напряжений и степени деформации. От качества заложенной в него функции будут во многом зависеть точность и устойчивость решения всей системы.

Выводы по результатам испытания образцов.

I. Начало текучести. Этап равномерной деформации:

$$\sigma_{iт} = \sigma_{i0,2} = P_{0,2}/F_0, \quad \left(\sigma_i\right)_j^{rv} = \left(P_j^{rv}/F_0\right) \cdot \left(l_0 + \Delta l_j^{rv}\right)/l_0,$$

$$\left(\varepsilon_i\right)_j^{rv} = \ln\left(\left(l_0 + \Delta l_j^{rv}\right)/l_0\right).$$

II. Этап сосредоточенной деформации.

II.1. Обработка по методике В.М. Розенберг и Г.А. Смирнова-Аляева для момента, предшествующего разрыву (рис. 2.3, 2.4):

$$\sigma_{iр} = \eta \cdot P_р/F_ш, \quad \varepsilon_{iр} = \ln\left(F_0/F_ш\right).$$

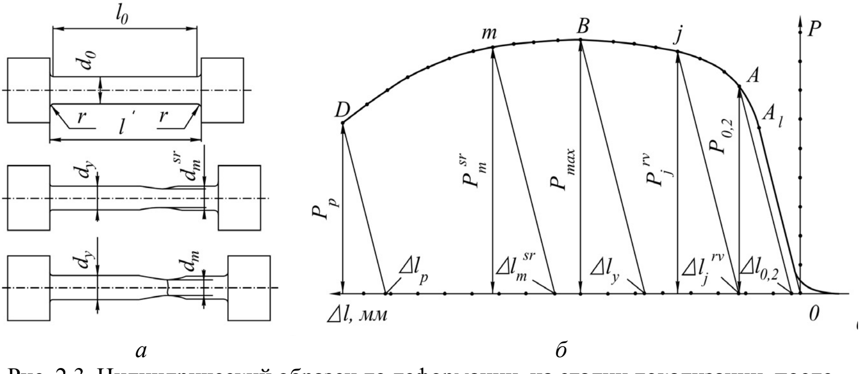


Рис. 2.3. Цилиндрический образец до деформации, на стадии локализации, после разрушения (*а*); диаграмма P–Δl с расчётными и характерными точками (*б*)

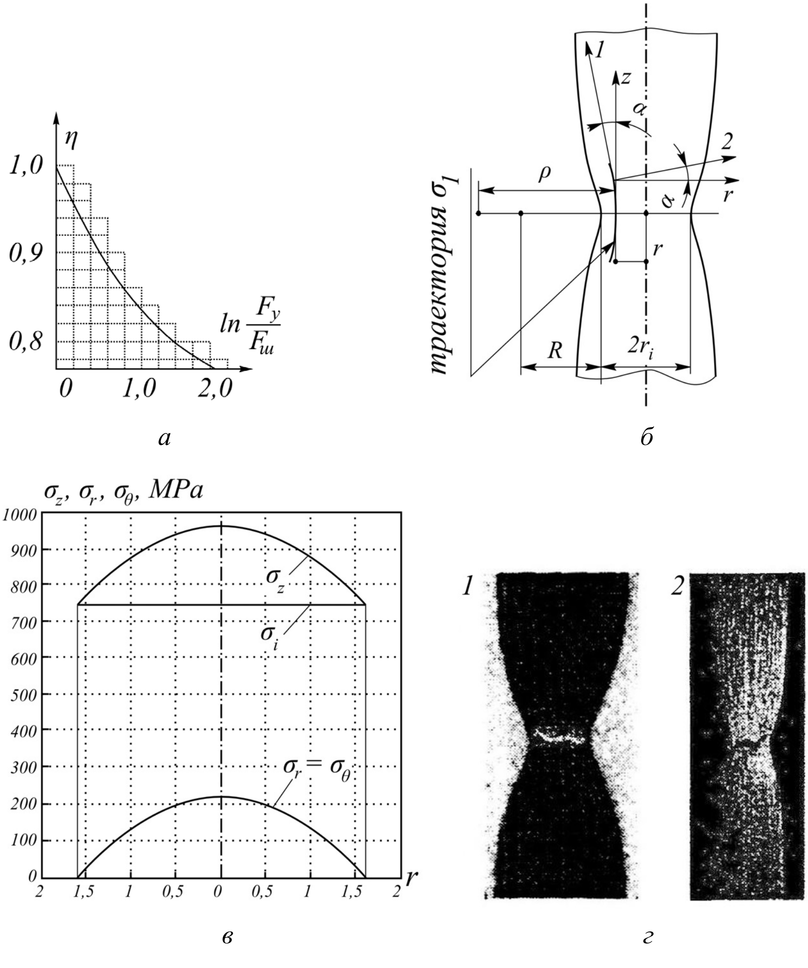


Рис. 2.4. График $\eta - \ln(F_y/F_ш)$ к методике В.М. Розенберг и Г.А. Смирнова-Аляева (*а*); расчётная схема к методике Н.Н. Давиденкова и Н.И. Спиридоновой (*б*); напряжения в минимальном сечении шейки образца из стали 18ЮА (*в*); *г*: *1*– рентгеновский снимок алюминиевого образца перед разрушением (Мак-Грегор), *2* – макрошлиф медного образца после разрушения (Д. Микловиц, Р. Андерсон)

II.2. Обработка по методике Н.Н. Давиденкова и Н.И. Спиридоновой. Компоненты напряжения:

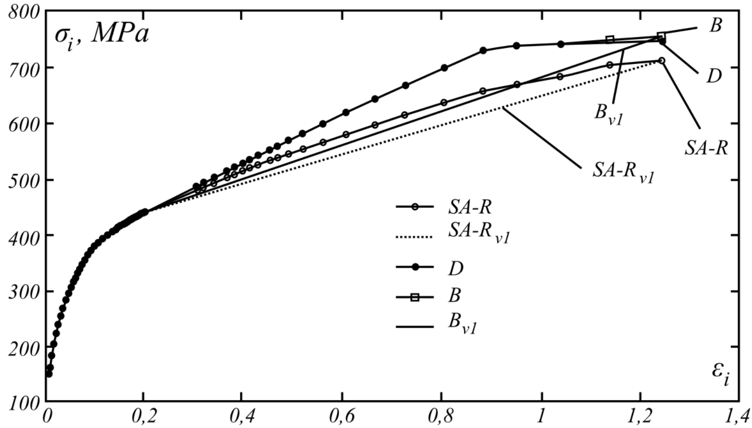
$$\sigma_{r,\theta} = \sigma_i \cdot (r_1 / 2R) \cdot \left(1 - r^2 / r_1^2\right), \quad \sigma_z = \sigma_i \cdot \left(1 + r_1 / 2R - r^2 / 2 r_1 R\right).$$

Интенсивность напряжений: $\sigma_i = (P/F)(1/(1 + r_1/4R))$.

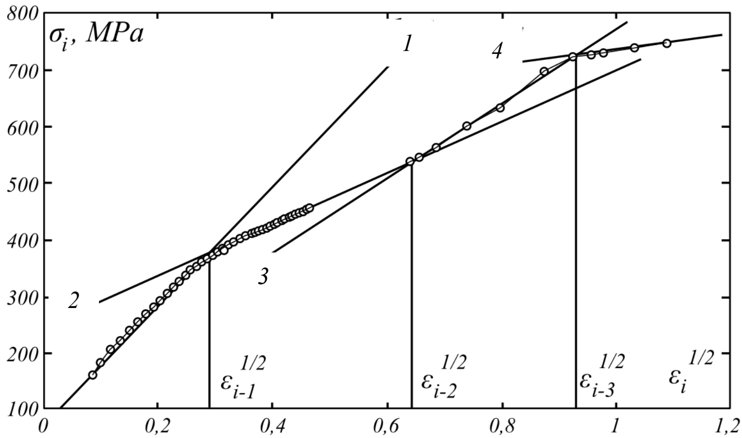
II.3. Обработка по методике П. Бриджмена. Интенсивность напряжений

$$\sigma_i = (P/F)(1/([1 + 2R/r_1] \cdot \ln[1 + r_1/2R])).$$

Результаты испытания приведены на рис. 2.5, 2.6 и в табл. 2.5, 2.6.

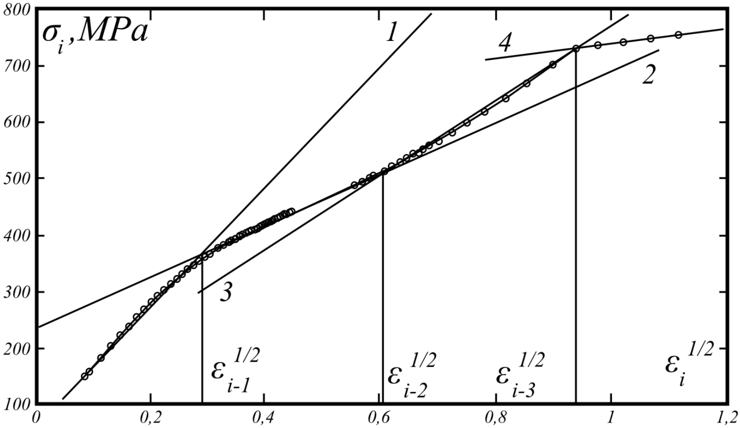


а

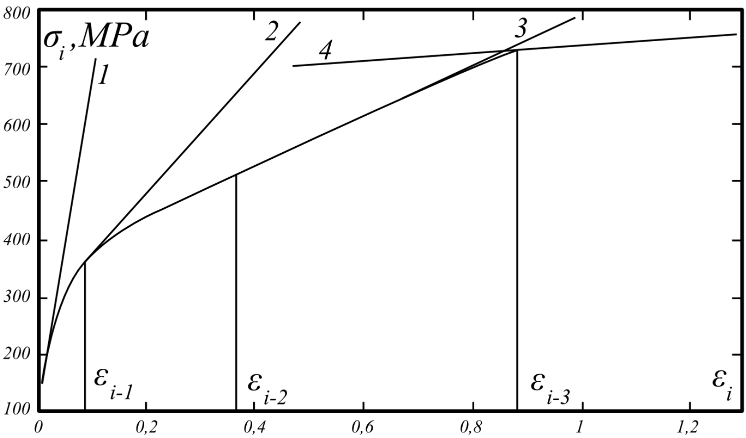


б

Рис. 2.5. Графики $\sigma = f(\varepsilon)$ для образца № 32, построенные по методике Смирнова-Аляева (*SA-R*), Давиденкова–Спиридоновой (*D*), Бриджмена (*B*) (*а*); точки излома кривой $\sigma = f(\varepsilon)$ для образца № 31 в координатах σ_i–$\varepsilon_i^{1/2}$ (*б*)



а



б

Рис. 2.6. Точки излома кривой $\sigma = f(\varepsilon)$ для образца № 32 в координатах σ_i–$\varepsilon_i^{1/2}$ (*а*); касательные в точках излома кривой в координатах σ_i–ε_i (*б*)

Т а б л и ц а 2.5

Точки излома кривой $\sigma_i - \varepsilon_i$ для образцов №№ 31 и 32

Участок		1			2			3			4		
Образец		$\varepsilon_i^{1/2}$	ε_i	σ_i МПа	$\varepsilon_i^{1/2}$	ε_i	σ_i МПа	$\varepsilon_i^{1/2}$	ε_i	σ_i МПа	$\varepsilon_i^{1/2}$	ε_i	σ_i МПа
32	Н	-	$\varepsilon_{i\text{т}} = 0$	151,10	0,2935	0,0861	364,11	0,6074	0,3689	514,35	0,9392	0,8820	729,43
	К	0,2935	0,0861	364,11	0,6074	0,3689	514,35	0,9392	0,8820	729,43	-	$\varepsilon_{i\text{р}} = 1{,}2444$	$\sigma_{i\text{р}} = 752{,}35$
31	Н	-	$\varepsilon_{i\text{т}} = 0$	160,59	0,2872	0,0825	368,87	0,6378	0,4069	539,46	0,9218	0,8497	723,32
	К	0,2872	0,0825	368,87	0,6378	0,4069	539,46	0,9218	0,8497	723,32	-	$\varepsilon_{i\text{р}} = 1{,}1815$	$\sigma_{i\text{р}} = 746{,}83$

Т а б л и ц а 2.6

Касательные в точках излома кривой $\sigma_i - \varepsilon_i$ для образца № 32

Тангенс угла наклона касательной, МПа	Образец № 32
$\text{tg}\alpha_1$	5640,84
$\text{tg}\alpha_2$	1039,21
$\text{tg}\alpha_3$	439,15
$\text{tg}\alpha_4$	69,12

II.4. Предлагаемая измененная аппроксимационная зависимость Г.А. Смирнова-Аляева–В.М. Розенберг на промежутке между точками излома $\varepsilon_{i-j} \le \varepsilon_i \le \varepsilon_{i-(j+1)}$:

$$\left(\sigma_i\right)_j = \left(\sigma_{i\text{пр}}\right)_j - (C)_j \exp\left(-\varepsilon_i + \varepsilon_{i-j}\right) - \left(C_1\right)_j \exp\left((N)\left(-\varepsilon_i + \varepsilon_{i-j}\right)\right).$$

Система уравнений для определения коэффициентов:

$$\left(\sigma_{i\text{пр}}\right)_j - (C)_j - \left(C_1\right)_j = \left(\sigma_i\right)_j; \quad (C)_j + (N)_j\left(C_1\right)_j = \text{tg}\alpha_j;$$

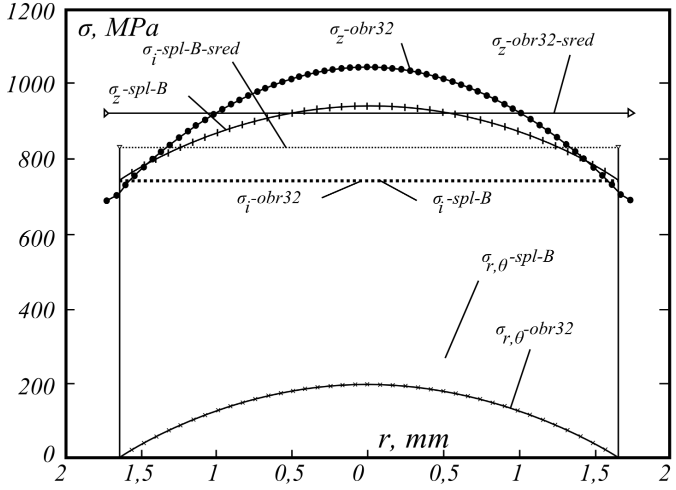
$$\left(\sigma_{i\text{пр}}\right)_j - (C)_j \exp\left(\varepsilon_{i-j} - \varepsilon_{i-(j+1)}\right) - \left(C_1\right)_j \exp\left((N)_j\left(\varepsilon_{i-j} - \varepsilon_{i-(j+1)}\right)\right) = \left(\sigma_i\right)_{j+1};$$

$$(C)_j \exp\left(\varepsilon_{i-j} - \varepsilon_{i-(j+1)}\right) + (N)_j\left(C_1\right)_j \exp\left((N)_j\left(\varepsilon_{i-j} - \varepsilon_{i-(j+1)}\right)\right) = \text{tg}\alpha_{j+1}.$$

II.5. Аппроксимация кубическими сплайнами. Для k-го промежутка между экспериментальными точками

$$(\sigma(_i)_k = \sum_{q=1}^{4}\left(a_q\right)_k\left(\varepsilon_i - \left(\varepsilon_i\right)_k\right)^{q-1}, \quad \left(\varepsilon_i\right)_k \le \varepsilon_i \le \left(\varepsilon_i\right)_{k+1}.$$

На рис. 2.7 показаны результаты КЭ моделирования процесса растяжения цилиндрического образца при использовании зависимости σ_i–ε_i в виде сплайн-аппроксимации.



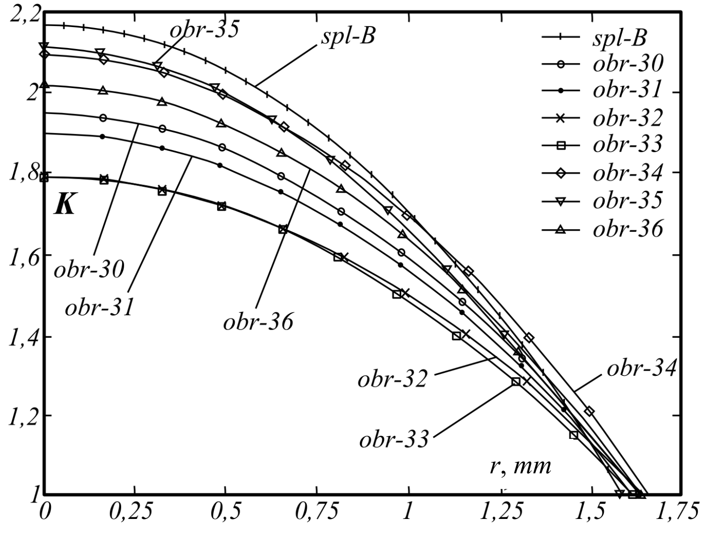


Рис. 2.7. Распределение параметров напряжений и характеристики схемы по радиальной координате в минимальном сечении шейки, сравнение экспериментальных данных и результатов моделирования

Выводы по результатам испытания образцов.

1. По результатам испытания цилиндрических образцов растяжением из проволоки диаметром 10 мм (ТУ14-1-4437-88, материал – сталь 18ЮАГОСТ803-66), изготовленной заводом «Днепроспецсталь», определены характеристики пластичности и сопротивления деформированию, предусмотренные ГОСТ 1497–84, и функциональная связь между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформации.

2. На этапе равномерной деформации характеристики сопротивления деформированию определили по расчётным формулам, учитывающим изменение площади образца, на этапе сосредоточенной деформации использовали методики расчёта Г.А. Смирнова-Аляева и В.М. Розенберг, Н.Н. Давиденкова и Н.И. Спиридоновой, а также методику П. Бриджмена.

3. Используя данные ряда исследователей, а также результаты собственного моделирования процесса растяжения образца методом конечного элемента, установлено, что образец разрушается в центре минимального сечения шейки при значении коэффициента жесткости схемы напряженного состояния: по Давиденкову $K = +1{,}606$; по Бриджмену $K = +1{,}775$ (образец 32); для образца №34: по Давиденкову $K = +2{,}091$; по Бриджмену $K = +1{,}931$; по данным конечно-элементного расчёта $K = +2{,}170$ (образец 32). В литературе же, как правило, указывают величину жесткости, как при линейном напряжённом состоянии: $K = +1{,}0$.

4. Конечно-элементный расчёт показал, что в минимальном сечении шейки распределение интенсивности деформации в радиальном направлении неравномерно, но так как наклон кривой интенсивности напряжения на этих стадиях минимален, то распределение интенсивности напряжений в радиальном направлении близко к равномерному.

5. Поэтапные измерения диаметра шейки в минимальном сечении и радиуса кривизны позволили получить функциональную зависимость «интенсивность деформации–интенсивность напряжения» в виде кривой с существенно изменяющейся кривизной.

6. Методика Г.А. Смирнова-Аляева и В.М. Розенберг на этапе сосредоточенной деформации даёт меньший уровень интенсивности напряжений, чем методика П. Бриджмена; значения интенсивности напряжений, рассчитанные по методике Н.Н. Давиденкова и Н.И. Спиридоновой, незначительно отличаются от значений по Бриджмену в сторону понижения.

7. График интенсивности напряжений, построенный в координатах $\sigma_i - \sqrt{\varepsilon_i}$, позволил выявить четыре секущих, определяющих три излома кривой $\sigma_i - \varepsilon_i$, характеризующих смену механизма деформации.

8. Аппроксимация функциональной зависимости $\sigma_i - \varepsilon_i$ на всём промежутке от момента перехода материала в пластическое состояние ($e_{i\text{т}}$) до разрушения ($s_{i\text{р}}$) одним степенным выражением вида $\sigma_i = (\sigma_i)_{\text{пр}} - Ce^{-\varepsilon_i} - C_1 e^{-N \cdot \varepsilon_i}$, не учитывает смену механизма деформации, и поэтому даже варьирование параметра «N» в рекомендованных пределах (10...30) не делает модели, построенные на основе такой функциональной зависимости, адекватными реальному процессу деформирования.

9. В качестве решения задачи аппроксимации кривой $\sigma_i - \varepsilon_i$ предложено использовать кусочно-определённую зависимость Г.А. Смирнова-Аляева и В.М. Розенберг по участкам между изломами экспериментальной кривой. Как альтернативный вариант предложена аппроксимация кубическими сплайнами, хорошо отражающая экспериментальную кривую.

2.2. Сжатие

Вид деформации «сжатие». Напряженно-деформированное состояние сжатия вызывает в малом материальном объеме тела деформацию превращения сферы в эллипсоид с одной укороченной главной осью и двумя другими удлиненными, т.е. $\varepsilon_1 > 0$; $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_3 < 0$.

В самом общем (не обязательно идеально монотонном) случае сжатия из трех главных компонентов скорости деформации два положительны, а один (наибольший по абсолютному значению) отрицателен: $\dot{\varepsilon}_1 > 0$; $\dot{\varepsilon}_2 > 0$ и $\dot{\varepsilon}_3 < 0$.

В случае линейного сжатия $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_2$, при этом вид НДС определяется формулой

$$\nu = \frac{2\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3} = 1 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}.$$

При классическом осуществлении формоизменения металлов сжатием методом обжатия низких цилиндров как относительно устойчивом виде деформации за весь процесс испытания этот процесс осложняется наличием контактного трения между торцами цилиндра и обжимными опорами. Изучая влияние контактного трения при обжатии цилиндров в целях ослабления или возможно полного его устранения, исследователи шли различными путями, используя конические опоры, два цилиндрических образца равных диаметров, но различных высот, торцевые цилиндрические выточки и др.

Обжатие образцов с торцевыми цилиндрическими выточками. Одним из эффективных способов непосредственного устранения фактора контактного трения при обжатии цилиндрических образцов является метод испытания, предложенный в 1940 г. М.В. Расстегаевым [2.9] и детально разработанный В.А. Крохой.

При обжатии цилиндрических образцов с торцевыми цилиндрическими выточками, заполненными твердой смазкой (рис. 2.8), контактное трение практически отсутствует до тех пор, пока окончательно не отогнутся деформируемые в процессе обжатия цилиндра буртики и вследствие этого полностью не выдавится смазка. Обычно это происходит при степенях деформации порядка $\varepsilon_i = 0{,}9\ldots1{,}2$ и гарантированной одноосности обжатия, поверяемой измерениями диаметров по всей высоте цилиндров, а также равной твердости по всем плоскостям поперечных и продольных сечений обжимаемых образцов.

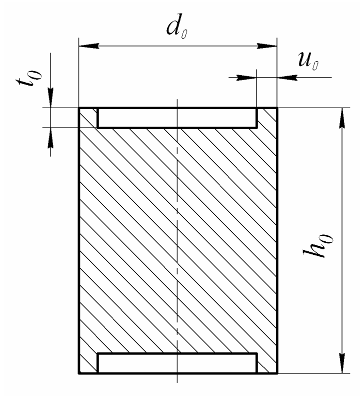


Рис. 2.8. Цилиндрический образец с торцевыми выточками

Специальной дополнительной проверкой доброкачественности и надежности рассматриваемого метода, проведенной Крохой, было установлено, что в результате применения метода микроструктурных измерений были получены параметры одноосности обжатия цилиндра в пределах вышеуказанных степеней деформации.

Так, обжатый до степени деформации $\varepsilon_i = 0{,}92$ цилиндрический образец из предварительно термообработанного технического железа разрезался вдоль оси по диаметру. В отдельных точках изготовленного микрошлифа (рис. 2.9) проводились микроструктурные измерения, выборочные данные которых представлены в табл. 2.7.

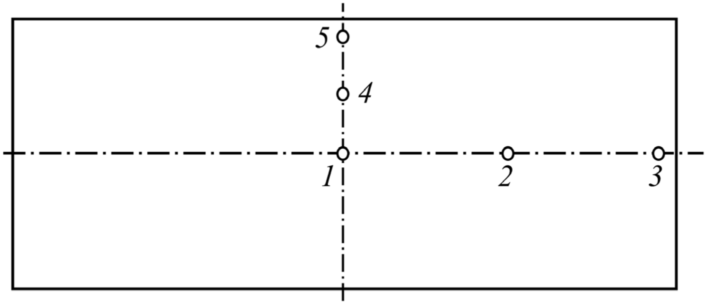


Рис. 2.9. Микрошлиф диаметрального сечения обжатого цилиндрического образца

Таблица 2.7

Результаты микроструктурного анализа цилиндрического образца с торцевыми выточками, обжатого до степени деформации ε_i = 0,92

Точка	ε_i	β_ε, °
1	0,930	55,5
2	0,896	51,0
3	0,863	53,0
4	0,918	57,5
5	0,883	54,0

Как видно из таблицы, рассчитанная с помощью микроструктурных измерений интенсивность деформированного состояния ε_i в различных точках микрошлифа (в пределах точности метода) примерно одинакова и достаточно близка к значению степени деформации, устанавливаемой из уравнения $\varepsilon_i = \ln(h_0/h)$.

Что касается углов β, характеризующих вид деформированного состояния, то в интервале 51…60° они (в пределах точности метода) свидетельствуют о примерном постоянстве по объему образца вида деформации, а именно линейного сжатия.

Характер распределения напряжений на контактной поверхности определялся экспериментально путем обжатия образцов пуансоном, имеющим по торцу узкую вертикальную щель. Как показал Е.П. Унксов, по форме гребешка металла, затекшего в щель пуансона, можно судить о характере эпюры нормальных напряжений на контактной плоскости, а по высоте гребешка – о пропорциональном в данной точке нормальном напряжении сжатия. В результате проведенных экспериментов установлено, что при обжатии образцов с торцевыми цилиндрическими выточками, заполненными смазкой, следует различать две основные стадии пластической деформации. Начальная стадия – при достижении напряжения порядка предела текучести металла, неодинакового на контактной поверхности напряженного состояния (на буртиках несколько большего по сравнению с областью торцевой выточки). Это объясняется превосходством модуля упругости буртиков по сравнению с таковым смазочного слоя. Однако, учитывая, что площадь буртиков составляет в начальной стадии деформации всего 3…5% от общей площади торцевой поверхности образца, напряжения, возникающие в зоне выточки, будут несущественно отличаться от усредненных. После смятия буртиков начинается вторая стадия – процесс объемного деформирования образца с образованием «бочки». С этого момента распределение нормальных напряжений принимает другой характер: начинают существенно возрастать нормальные напряжения в центральной части контактных площадей образцов с деформирующими плитами машины, т.е. начинает формироваться распределение нормальных напряжений, характерное для случая осадки образцов с плоскими несмазанными торцами.

Напряжения на торцевой поверхности в начальной стадии обжатия определялись путем решения уравнений равновесия совместно с условием пластичности, а во второй стадии – по известной формуле Зибеля–Губкина, установленной для случая обжатия в торец цилиндрического образца с гладкими торцами.

Как показали результаты многочисленных экспериментов, проведенных на цилиндрических образцах с выточками (на разных металлах, разной формы и смазках), ошибка (исключая визуальные ошибки и погрешности инструментария и обработки) в определении интенсивности напряженного состояния обжатия составляет не больше 3%.

Приведем краткие данные по размерам буртиков. Для цилиндрических образцов с исходным диаметром d_0 = 7,0…30,0 мм ширину буртика рекомендуется принимать равной: u_0 = 0,5…0,8 мм; причем большие значения u_0 следует устанавливать для более пластичных материалов. Первоначальная высота h_0 буртиков зависит от механических свойств материала, учитываемых коэффициентом Пуассона согласно уравнению

$$h_0 = \frac{u_0 \mu \left(1 - 0{,}25\mu^2\right)}{1 - \mu}. \tag{2.32}$$

Приведем значения μ для некоторых металлов:

Углеродистые стали с повышенным содержанием марганца 20 Г, 30Г, 40Г, 50Г, 60Г	0,22
Стали Х13, 2Х13, 30ХНМ	0,27
Железо, малоуглеродистые стали и высоколегированные стали типа 3Х13, 20Н5, ЗОХНЗ	0,28
Цинк, стали с большим содержанием углерода, сталь 40ХНЗ	0,29
Хром, молибден	0,31
Алюминий, дюралюминий, никель	0,33
Титан, магниевые сплавы	0,34
Серебро	0,37
Медь	0,375
Золото	0,42
Свинец	0,44

Напряженно-деформированное состояние цилиндров, испытуемых на обжатие. При осевом обжатии цилиндров между плоскопараллельными бойками (плитами) направление наиболее быстрого укорочения приближенно совпадает с направлением действия сжимающей силы, т.е. с направлением оси OZ.

Среднее по высоте значение компонента скорости деформации в этом направлении

$$\dot{\varepsilon}_z = \varepsilon_3 = \frac{1}{h}\frac{dh}{dt} = \left(\frac{d\varepsilon_z}{dt}\right)_{\text{ср}} < 0, \tag{2.33}$$

где h – переменная во времени высота. Интегрируя, получаем $(\varepsilon_z)_{\text{ср}} = \ln(h_0/h) = -\ln(h_0/h) < 0$. Интенсивность скорости деформации определится равенством

$$\dot{\varepsilon}_i = \sqrt{\dot{\varepsilon}_3^2 + \frac{1}{3}\left(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2\right)^2}. \tag{2.34}$$

Если разность $\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2$ невелика по сравнению с абсолютным значением $\dot{\varepsilon}_3$, то вторым членом подкоренного выражения правой части равенства (2.34) можно пренебречь по сравнению с первым членом. При этом

$$\left(\dot{\varepsilon}_i\right)_{\text{ср}} = \frac{d[\ln(h_0 / h)]}{dt}, \quad \text{но} \quad \dot{\varepsilon}_i = \frac{de_i}{dt}.$$

Интегрируя, получаем

$$\left(e_i\right)_{\text{ср}} = \ln(h_0 / h). \tag{2.35}$$

Таким образом, если при обжатии тела плоскопараллельными бойками можно полагать, что разность двух положительных главных компонентов скорости деформации в большей части объема этого тела невелика по сравнению с абсолютным значением отрицательного главного компонента, то усредненное по объему значение степени деформации можно принять равным $\ln(h_0/h)$. При этом интенсивность напряжений σ_i можно условно считать постоянной по объему тела, определяя ее значение по кривой σ_i–ε_i в соответствии с усредненной степенью деформации, заданной равенством (2.35).

В этом отношении операция обжатия плоскопараллельными бойками является характерным примером пластического формоизменения, при котором можно (по крайней мере при приближенном определении потребного усилия) принять интенсивность напряженного состояния σ_i постоянной по объему деформируемого тела не только в горячем, но и в холодном его состоянии. Однако в последнем случае необходимо учитывать изменение σ_i при переходе из одной стадии процесса в другую.

Строго говоря, в процессе обжатия тела с плоскопараллельными торцами интенсивность скорости деформации нельзя считать постоянной по объему, поскольку влияние сил трения на торцах обусловливает переменность деформированного состояния, а также переменность площади поперечного сечения по высоте.

Тем не менее если речь идет только о приближенном вычислении потребного усилия обжатия, то условное допущение постоянства площади поперечного сечения обжимаемого тела по высоте вполне приемлемо. Действительно, при обжатии относительно высоких цилиндров круглого сечения наблюдается явление бочкообразования: площадь поперечного сечения, делящего обжимаемый цилиндр на две равные части, оказывается заметно больше отношения объема к высоте, однако это практически не влияет на усилие обжатия, так как напряжения сжатия вдоль контура такого сечения значительно меньше, чем при линейном сжатии, благодаря наличию напряжений растяжения в тангенциальном направлении. Поэтому, вычисляя потребное усилие при обжатии круглого цилиндра, можно определять условное значение F – площади поперечного сечения:

$$F = F_0 h_0 / h, \tag{2.36}$$

где h – высота в рассматриваемой стадии обжатия; h_0 и F_0 – исходные значения высоты и площади. В этом случае можно принимать условно деформацию монотонной (линейное сжатие), равной: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$; $e_i = \varepsilon_i = \ln(h_0 / h)$; $\varepsilon_z = \varepsilon_3 = -\varepsilon_i$. При этом $\sigma_1 = \sigma_2$;

$$\sigma_1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \sigma_3\right)^2 + \frac{3}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_2 - \sigma_3. \tag{2.37}$$

Значение σ_i можно считать постоянным по объему обжимаемого цилиндра.

Однако величина гидростатического давления заведомо переменна: она заметно возрастает по мере приближения к оси симметрии, поскольку в осевой зоне увеличение размеров частиц в направлениях, перпендикулярных направлению обжимающей силы, благодаря наличию сил трения на торцевых срезах затруднено.

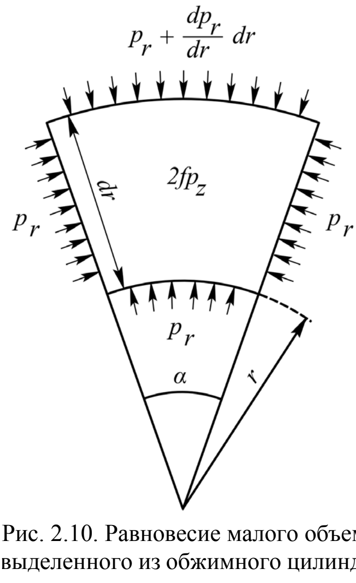


Рис. 2.10. Равновесие малого объема, выделенного из обжимного цилиндра

Рассмотрим условие равновесия выделенного из обжимаемого цилиндра объема, ограниченного двумя меридиональными плоскостями, образующими между собой малый угол α, двумя частями опорных площадок и двумя концентричными поверхностями радиусов r и $r + dr$ (рис. 2.10).

Полагаем $\sigma_z = -p_r$ и $\tau_{zr} = \tau_{конт}$ – напряжения (нормальное и касательное) на торцевых площадках, $\sigma_r = \sigma_\theta = -p_r$ – нормальные напряжения на цилиндрических и меридиональных гранях выделенного объема. Приравнивая нулю равнодействующую всех сил, приложенных к этому объему, имеем

$$p_r r\alpha h - \left(p_r + \frac{dp_r}{dr} dr \right)(r + dr)\alpha h + 2p_r h \sin\frac{\alpha}{2} dr - 2\tau_{\text{конт}} r\alpha dr = 0 .$$

Замечая, что (при малых α) 2sin α /2 = α, получаем после очевидных сокращений

$$-\frac{dp_r}{dr} h - 2\tau_{\text{конт}} = 0 . \quad (2.38)$$

Принимая во внимание равенство (2.37), имеем при принятых обозначениях p_z - p_r = σ_i . В предположении, что σ_i постоянно по объему обжимаемого тела,

$$-\frac{dp_z}{dr} = \frac{dp_r}{dr} = -\frac{2\tau_{\text{конт}}}{h} .$$

Контактное касательное напряжение при любых значениях радиуса r не может быть больше произведения fp_z, где f – коэффициент трения, а также не может быть больше $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$.

При обжатии круглого цилиндра можно принять $\tau_{\max} = \sigma_i/2$. Таким образом, получаем две зоны значений радиуса r: в пределах первой $\tau_{\max} = fp_z \le \sigma_i /2$, в пределах второй $\tau_{\max} = \sigma_i /2 \le fp_z$. Для первой зоны

$$\frac{dp_z}{dr} + \frac{dp_z}{h} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{dp_z}{p_z} + \frac{2f}{h} dr = 0; \quad \text{и} \quad \ln p_z = \frac{2fr}{h} = \text{const} = C_1, \quad (2.39)$$

для второй

$$\frac{dp_z}{dr} + \frac{\sigma_i}{h} = 0 \qquad \text{и} \qquad p_z + \frac{\sigma_i}{h} r = \text{const} = C_2. \quad (2.40)$$

На границе первой и второй зон

$$\tau_{\max} = fp_z = \sigma_i /2, \text{ т.е. } p_z = \sigma_i /2f.$$

Кроме упомянутых двух зон, в непосредственной близости от оси симметрии располагается третья, в пределах которой $\tau_{\text{конт}} < \sigma_i/2 < fp_z$. На самой оси симметрии (при r = 0) $\tau_{\text{конт}} = 0$. Равнодействующее обжимающее усилие

$$P = 2\pi \int_{0}^{\sqrt{F/\pi}} p_z r dr = 2\pi \int_{0}^{(d_0/2)\sqrt{h_0/h}} p_z r dr. \qquad (2.41)$$

При заданном равенствами (2.39) и (2.40) законе распределения значений удельного усилия p_z по площади F выражение (2.41) может быть приведено к виду

$$P = F k_f \sigma_i, \qquad (2.42)$$

где F – см. (2.24); $k_f = \psi(\varphi, f)$ – так называемый коэффициент подпора, $\varphi = d/h$; σ_i – усредненное по объему обжимаемого тела значение интенсивности напряжений, определяемого по кривой σ_i–ε_i для данного материала в соответствии со значением e_i [см. (2.35)]; $d = d_0\sqrt{h_0/h}$ – диаметр окружности, площадь которой F.

Значения k_f – ψ для случая обжатия круглого цилиндра могут быть определены по заранее составленной таблице в зависимости от двух аргументов: φ и f.

Рассмотрим примеры сопоставления опытных данных с результатами вычислений усилий обжатия круглых цилиндров по формулам (2.35), (2.36) и (2.42) с использованием вспомогательной таблицы значений $k_f = \psi(\varphi, f)$.

П р и м е р 1. Сталь 35Х (табл. 2.8). Ожидаемое значение коэффициента контактного трения f = 0,30…0,35.

П р и м е р 2. Латунь Л62 (табл. 2.9). Ожидаемое значение коэффициента контактного трения f = 0,15.

П р и м е р 3. Сталь 10кп (табл. 2.10), f = 0,25…0,35.

Т а б л и ц а 2.8

Размеры обжимаемых цилиндров из стали 35Х и результаты вычислений

d_0, мм	10,00	9,927	9,953	9,947	9,96	9,963
h_0, мм	11,76	10,79	10,82	9,85	8,78	8,91
h, мм	4,52	4,52	4,51	4,43	4,47	4,49
Результаты вычислений						
$\lg F_0 = \lg \frac{\pi}{4} d_0^2$	1,8951	1,8887	1,8909	1,8905	1,8917	1,8919
$\lg F = \lg F_0 \frac{h_0}{h}$	2,3104	2,2665	2,2709	2,2375	2,1849	2,1896
$(e_i)_{ср} = \ln \frac{h_0}{h}$	0,956	0,870	0,836	0,799	0,675	0,685
σ_i	76,03	76,03	76,03	76,03	76,03	76,03

Результаты вычислений						
$\varphi = \dfrac{d_0}{h}\sqrt{\dfrac{h_0}{h}}$	3,568	3,394	3,417	3,348	3,123	3,126
$k_f = \psi \begin{cases} f = 0{,}30 \\ f = 0{,}35 \end{cases}$	1,433 1,501	1,402 1,470	1,406 1,474	1,394 1,461	1,354 1,420	1,355 1,421
Расчетные значения усилия						
$P = F\sigma_i k_f \begin{cases} f = 0{,}30 \\ f = 0{,}35 \end{cases}$	222600 233200	196800 206500	199500 209200	183100 192000	157600 165300	159000 167200
Опытные значения усилия						
$P_{\text{оп}}$, Н	236000	216000	216000	196000	169000	170000

При обжатии в торец плоскопараллельными бойками тел произвольного контура в плане компоненты скорости деформации в различных направлениях, перпендикулярных направлению действия сжимающей силы, различны, поскольку удлинения волокон в направлениях, перпендикулярных направлению хода инструмента, затруднены не в одинаковой степени.

В общем случае $\dot{\varepsilon}_2 \neq \dot{\varepsilon}_1$ и

$$\nu = \frac{2\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3} = 1 - 2\frac{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3} < 1.$$

С другой стороны,

$$\nu = \frac{2\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3} = \frac{3\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3} - \frac{\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}.$$

Второй член правой части последнего равенства равен нулю в силу закона несжимаемости, а первый положителен, так как $\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3 > 0$ и $\dot{\varepsilon}_2 > 0$. Предельный случай соответствует значению $\nu = 0$. Этот случай возможен при обжатии полосы, длина которой во много раз превосходит ширину. Такая полоса в пределах практической точности не удлиняется в процессе деформации.

В средней части по длине такой полосы имеет место плоская деформация: размер любой частицы в направлении длины полосы остается строго неизменным $\dot{\varepsilon}_2 = 0$; $\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_3 = 0$. Можно принять

$$\dot{\varepsilon}_3 = \frac{1}{k}\frac{dh}{dt} = -\frac{d[\ln(h_0 / h)]}{dt},$$

откуда

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{d[\ln(h_0/h)]}{dt}; \quad \dot{\varepsilon}_i = \sqrt{\dot{\varepsilon}_2^2 + \frac{1}{3}\left(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3\right)^2} = \frac{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{d[\ln(h_0/h)]}{dt};$$

$$e_i = (e_i)_{cp} = \int_0^t e_i dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\frac{h_0}{h}.$$

Т а б л и ц а 2.9

Размеры обжимаемых цилиндров из латуни Л62 и результаты вычислений

d_0, мм	10,027	10,06	9,997	9,94	9,95	9,897
h_0, мм	17,067	17,027	20,10	19,05	18,97	20.01
h, мм	5,567	5.693	2.43	5,427	5,33	6,30
Результаты вычислений						
$\lg F_0 = \lg\frac{\pi}{4}d_0^2$	1,8975	1,9003	1,8949	1,8899	1,8907	1,8861
$\lg F = \lg F_0\frac{h_0}{h}$	2,3840	2,3761	2,3899	2,4355	2,4421	2,3880
$\left(e_i\right)_{\text{ср}} = \ln\frac{h_0}{h}$	1,122	1,095	1,140	1,251	1,270	1,156
σ_i	71,1	71,0	71,2	71,7	71,8	71,3
$\varphi = \frac{d}{h} = \frac{d_0}{h}\sqrt{\frac{h_0}{h}}$	3,154	3,056	2,750	3,431	3,522	2,800
$k_f = \psi(\varphi, f)(f = 0{,}15)$	1,162	1,155	1,132	1,182	1,189	1,136
Расчетные значения усилия						
$P = F\sigma_i k_f(f = 0{,}15)$	200000	195000	197800	230800	236200	197900
Опытные значения усилия						
$P_{\text{оп}}$, Н	198000	198000	198000	238000	237000	197000

Как и в случае обжатия цилиндра, при расчете потребного усилия обжатия длинной полосы можно принять допущение о постоянстве σ_i по объему деформируемого тела. Разница состоит в том, что при обжатии полосы значение σ_i определяется по кривой σ_i–ε_i данного материала для значения

$$e_i = \left(e_i\right)_{\text{ср}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\frac{h_0}{h}. \tag{2.43}$$

[а не $e_i = \ln(h_0/h)$, как для цилиндра].

Т а б л и ц а 2.10

Размеры обжимаемых цилиндров из стали 10кп и результаты вычислении

d_0, мм	10,04	9,967	9,963
h_0, мм	10,05	6,83	7,80
h, мм	3,70	3,23	3,39
Результаты вычислений			
$\lg F_0 = \lg \frac{\pi}{4} d_0^2$	1,8985	1,8923	1,8919
$\lg F = \lg F_0 \frac{h_0}{h}$	2,3325	2,2175	2,2538
$(e_i)_{ср} = \ln \frac{h_0}{h}$	0,999	0,749	0,833
σ_i	55	55	55
$\varphi = \frac{d}{h} = \frac{d_0}{h}\sqrt{\frac{h_0}{h}}$	4,472	4,488	4,459
$k_f = \psi(\varphi, f)\begin{cases} f = 0{,}25 \\ f = 0{,}30 \\ f = 0{,}35 \end{cases}$	1,482 1,588 1,661	1,485 1,590 1,664	1,480 1,586 1,659
Расчетные значения усилия			
$P = F\sigma_i k_f \begin{cases} f = 0{,}25 \\ f = 0{,}30 \\ f = 0{,}35 \end{cases}$	175300 187800 196500	134800 144300 151000	146000 154500 163700
Опытные значения усилия			
$P_{оп}$, Н	190000	127000	142000

Направим ось OX вдоль длинного ребра полосы, ось OY – по ширине полосы; ось OZ совместим с направлением хода инструмента (с направлением обжатия). В таком случае направление наиболее быстрого укорочения, т.е. третья главная ось напряженного состояния, будет (точно или приближенно) совпадать с осью OZ, а направление наиболее быстрого удлинения материальных волокон – с осью OY. При этом получим

$$\sigma_z = \sigma_3 = -p_z; \quad \dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_3 = -\frac{d[\ln(h_0/h)]}{dt} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\varepsilon}_i;$$

$$\sigma_y = \sigma_1 = -p_y; \quad \dot{\varepsilon}_y = \dot{\varepsilon}_1 = -\frac{d[\ln(h_0/h)]}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\varepsilon}_i;$$

$$\sigma_x = \sigma_2 = -p_x; \quad \dot{\varepsilon}_x = \dot{\varepsilon}_2 = 0.$$

Уравнения пластического течения:

$$\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} = \frac{p_z + p_y}{2} - p_x = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\dot{\varepsilon}_i}\left(\dot{\varepsilon}_2 - \frac{\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_3}{2}\right);$$

$$\sigma_y - \sigma_z = p_z - p_y = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\dot{\varepsilon}_i}\left(\dot{\varepsilon}_e - \dot{\varepsilon}_z\right)$$

принимают вид

$$\frac{p_z + p_y}{2} - p_x = 0; \quad p_z - p_y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_i. \qquad (2.44)$$

Совместим плоскость XOZ с плоскостью вертикальной симметрии обжимаемой полосы, а плоскость ZOY с ее поперечным сечением (рис. 2.11) и обозначим b ширину полосы.

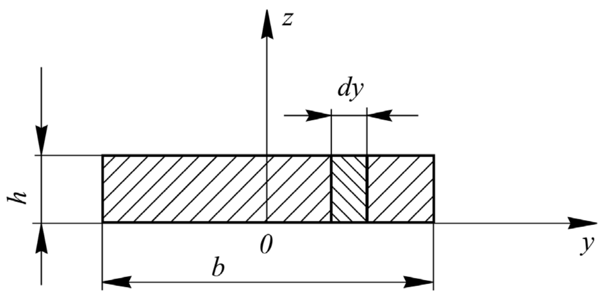


Рис. 2.11. Выделенный параллелепипед с малыми ребрами высотой, равной высоте обжимаемого цилиндра

Рассмотрим теперь условия равновесия мысленно выделенного малого параллелепипеда, два размера которого сколь угодно малы (dx и dy), а третий размер – в направлении оси OZ – конечный, равный полной высоте h обжимаемой полосы в рассматриваемой стадии ее деформации. В направлениях OZ и OX на этот параллелепипед действуют соответственно две равные, но противоположно направленные силы. Приравняв нулю равнодействующую сил, действующих на грани этого параллелепипеда в направлении оси OY, получим

$$p_y h dx - \left(p_y + \frac{dp_y}{dy}dy\right)h dx - 2\tau_{\text{конт}} dy dx = 0.$$

После очевидных сокращений

$$-\frac{dp_y}{dy}h - 2\tau_{\text{конт}} = 0, \text{ т.е. } \frac{dp_y}{dy} + \frac{2\tau_{\text{конт}}}{h} = 0. \tag{2.45}$$

Примем во внимание, что при допущении постоянства σ_i $\frac{dp_y}{dy} = \frac{dp_z}{dy}$ [см. (2.45)]

$$\frac{dp_z}{dy} + \frac{2\tau_{\text{конт}}}{h} = 0. \tag{2.46}$$

В рассматриваемом случае

$$\tau_{\text{конт}} \le (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \sigma_i/3, \tag{2.47}$$

с другой стороны,

$$\tau_{\text{конт}} \le fp_z. \tag{2.48}$$

При обжатии полосы получаются три зоны (в данном случае три диапазона значений переменной y):

1) зона, в пределах которой неравенство (2.48) обращается в равенство, т.е.

$$\tau_{\text{конт}} = fp_z, \tag{2.49}$$

эту зону называют зоной Кулонова трения;

2) зона, в пределах которой неравенство (2.47) обращается в равенство, т.е.

$$\tau_{\text{конт}} = \sigma_i/\sqrt{3}, \tag{2.50}$$

эту зону называют зоной Прандтлева трения;

3) в непосредственной близости от плоскости симметрии обжимаемой полосы зона, в пределах которой

$$\tau_{\text{конт}} < fp_z \ \text{ и } \ \tau_{\text{конт}} < \sigma_i/\sqrt{3},$$

эту зону называют зоной полного торможения.

Подставляя (2.49) в (2.46), получаем после очевидных преобразований

$$\frac{dp_z}{p_z} + \frac{2fdy}{h} = 0.$$

Интегрируя, получаем для зоны Кулонова трения

$$\ln p_z + 2fy/h = \text{const} = C_1. \tag{2.51}$$

Для зоны Прандтлева трения

$$p_z + (2/\sqrt{3})y\sigma_i / h = \text{const} = C_2\,. \qquad (2.52)$$

На границе зон Кулонова и Прандтлева трений

$$\tau_{\text{конт}} = \sigma_i / \sqrt{3} = fp_z,$$

т.е. $p_z = \sigma_i / f\sqrt{3}$.

Равнодействующая обжимающая сила

$$P = 2L\int_0^{b/2} p_z dy, \qquad (2.53)$$

где L – длина обжимаемой полосы; b – ее ширина. При $y = b/2$ можно условно считать $p_y = 0$. Тогда, в силу (2.44), $p_z = 2\sigma_i / \sqrt{3}$.

Равенство (2.51) принимает вид

$$\ln p_z + \frac{2fy}{h} = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_i\right) + \frac{fb}{h},$$

откуда для зоны Кулонова трения

$$\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{p_z}{\sigma_i} = \frac{f(b-2y)}{h}\,. \qquad (2.54)$$

На границе с зоной Прандтлева трения $p_z = \sigma_i / f\sqrt{3}$.

Соответствующее значение координаты $y = y_r$ определится равенством (2.54), в силу которого

$$\ln\frac{1}{2f} = \frac{f\left(b-2y_r\right)}{h},$$

откуда

$$y_r = \frac{b}{2} - \frac{h}{2f}\ln\frac{1}{2f} \qquad (2.55)$$

при $p_z = \sigma_i / f\sqrt{3}$.

Равенство (2.52) для зоны Прандтлева трения принимает вид

$$p_z + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{y}{h}\sigma_i = \frac{\sigma_i}{f\sqrt{3}} + \frac{2\sigma_i}{\sqrt{3}h}\left(\frac{b}{2} - \frac{h}{2f}\ln\frac{1}{2f}\right) = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{f} + \frac{b}{h} - \frac{1}{f}\ln\frac{1}{2f}\right),$$

т.е. для этой зоны (при $y < y_r$)

$$p_z = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{f} + \frac{b}{h} - \frac{2y}{h} - \frac{1}{f}\ln\frac{1}{2f}\right). \tag{2.56}$$

Решив равенство (2.54) относительно p_z для зоны Кулонова трения (т.е. при $y > y_r$), получим

$$p_z = \frac{2\sigma_i}{\sqrt{3}} e^{\frac{f(b-2y)}{h}}. \tag{2.57}$$

Если известно исходное значение F_0 и площадь F, то значение F в заданной стадии процесса деформации определится равенством (2.36).

Значение σ_i определится по кривой σ_i–e_i для данного материала (при $e_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\frac{h_0}{h}$).

Коэффициент подпора при обжатии длинной полосы вычисляется по формуле

$$k_f = \frac{2}{\sqrt{3}}\psi_1(\varphi, f), \tag{2.58}$$

где ψ_1 (φ, f) – функция от двух аргументов φ и f, значения которой можно определить по заранее составленной таблице (табл. 2.11).

Входное число φ в случае обжатия плоскопараллельными бойками длинной и относительной узкой полосы вычисляется по формуле

$$\varphi = 2b/h = 2b_0h_0/h^2. \tag{2.59}$$

Мы рассмотрели два предельных случая вычисления потребного усилия при обжатии тел с односвязным контуром: обжатие круглого цилиндра и обжатие узкой полосы. В первом случае увеличение размеров обжимаемого тела во всех направлениях, перпендикулярных направлению действия сжимающей силы, практически в равной степени возможно. Во втором случае в одном из направлений, перпендикулярных направлению обжатия, удлинение волокон предельно затруднено.

Т а б л и ц а 2.11

Определение вспомогательных величин ψ и ψ_1

	f													
	0,10		0,15		0,20		0,25		0,30		0,35		0,40	
	ψ	ψ_1	ψ	ψ_1	ψ	ψ_1	ψ	ψ_1	ψ	ψ_1	ψ	ψ_1	ψ	ψ_1
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	1,025	1,017	1,037	1,025	1,050	1,033	1,062	1,042	1,075	1,050	1,087	1,058	1,100	1,067
2	1,050	1,033	1,075	1,050	1,100	1,067	1,125	1,083	1,150	1,100	1,175	1,117	1,200	1,133
3	1,098	1,050	1,151	1,075	1,208	1,100	1,268	1,125	1,332	1,150	1,398	1,175	1,438	1,200
4	1,142	1,067	1,223	1,100	1,312	1,133	1,410	1.167	1,510	1,200	1,580	1,233	1,620	1,267
5	1,186	1,102	1,297	1,156	1,423	1,212	1,563	1,271	1,675	1,331	1,751	1,394	1,793	1,459
6	1,231	1,137	1,375	1,212	1,544	1,292	1,517	1,377	1,840	1,469	1,920	1,566	1,964	1,612
7	1,278	1,171	1,459	1,268	1,676	1,374	1,870	1,490	2,004	1,617	2,088	1,707	2,132	1,752
8	1,328	1,205	1,551	1,325	1,813	1,460	2,028	1,610	2,169	1,759	2,255	1,843	2,301	1,889'
9	1,380	1,240	1,650	1,385	1,955'	1,551	2,187	1,740	2,334	1,890	2,422	1,976	2,468	2,032
10	1,435	1,276	1,757	1,448	2,101	1,648	2,347	1,872	2,500	2,021	2,589	•2,108	2,636	2,156
11	1,493	1,312	1,871	1,513	2,250	1,751	2,509	1,997	2,665	2,150	2,755	2,239	2,803	2,287
12	1,554	1,350	1,991	1,581	2,041	1,862	2,670	2,121	2,831	2,278	2,922	2,368	2,970	2,417
13	1,619	1,389	2,117	1,653	2,555	1,980	2,833	2,245	2,996	2,406	3,089	2,497	3,167	2,546
14	1,687	1,429	2,247	1,729	2,710	2,096	2,996	2,370	3,162	2,533	3,'255	2,625	3,304	2,674
15	1,760	1,471	2,380	1,809	2,866	2,212	3,160	2,495	3,328	2,660	3,422	2,753	3,470	2,802
16	1,837	1,514	2,518	1,893	3,024	2,329	3,324	2,619	3,494	2,787	3,588	2,881	3,637	2,930
17	1,918	1,558	2,658	1,981	3,183	2,447	3,448	2,744	3,660	2,914	3,755	3,008	3,804	3,057
18	2,005	1,604	2,800	2,075	3,343	2,566	3,653	2,868	3,826	3,040	3,922	3,135	3,971	3,185
19	2,096	1,653	2,954	2,183	3,503	2,685	3,818	2,993	3,992	3,167	4,088	3,262	4,137	3,312
20	2,191	1,700	3,091	2,277	3,663	2,805	3,983	3,118	4,158	3,293	4,255	3,389	4,304	3,438
21	2,291	1,751	3,239	2,381	3,825	2,926	4,148	3,243	4,325	3,419	4,421	3,515	4,471	3,565
22	2,394	1,804	3,389	2,486	3,987	3,047	4,313	3,368	4,491	3,545	4,588	3,638	3,638	3,691
23	2,502	1,858	3,540	2,593	4,149	3,168	4,478	3,492	4,657	3,671	4,755	3,767	4,804	3,818
24	2,613	1,915	3,692	2,701	4,311	3,289	4,644	3,647	4,824	3,797	4,921	3,894	4,971	3,944
25	2,727	1,974	3,846	2,811	4,474,	3,411	4,809	3,742	4,990	3,922	5,088	4,020	5,138	4,070

При обжатии тел с односвязным контуром произвольной формы, как правило, имеет место промежуточный случай: частицы обжимаемого тела претерпевают деформацию сжатия (нелинейного сжатия). Два компонента скорости деформации положительны, но не равны друг другу, а третий главный компонент отрицательный и наибольший по абсолютному значению. Ранее уже было упомянуто, что в общем случае сжатия

$$v = \frac{2\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

может изменяться от нуля (при $\dot{\varepsilon}_2 = 0$) до единицы (при $\dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_1$). Напомним, что вид напряженного состояния может быть определен не только v, но и некоторым углом β, связанным с v равенством

$$v = \frac{\mathrm{tg}(\beta - 30^{\circ})}{\mathrm{tg}30^{\circ}}.$$

При линейном сжатии $v = 1$ и $\beta = 60^{\circ}$ (обжатие круглого цилиндра) в случае, когда $v = 0$, $\beta = 30^{\circ}$ (обжатие длинной полосы).

Любой промежуточный случай обжатия тел с односвязным контуром соответствует некоторому усредненному по объему рассматриваемого тела значению β, ограниченному $30° < \beta_{ср} < 60°$.

Значение $\beta_{ср}$ для конкретного случая можно приближенно вычислить по формуле

$$\cos (180° - 3\beta_{ср}) = 4\pi F/S^2, \tag{2.60}$$

где S – периметр контура этой площади.

Покажем, что формула (2.60) справедлива в рассматриваемых нами двух предельных случаях:

1) сжатие круглого цилиндра

$F = \pi d^2/4$; $S = \pi d$; $4\pi F/S^2 = 1$; $\cos (180° - \beta_{ср}) - 1$, т.е. $180° - 3\beta_{ср} = 0$, $\beta_{ср} = 60°$ – линейное сжатие;

2) обжатие длинной полосы

$F = Lb$; $S = 2(L + b)$, $4\pi F/S^2 = \pi Lb/(L + b)^2 = \pi b/L/(1 + b/L)^2$.

При малых значениях отношения b/L значение $\cos (180° - 3\beta_{ср})$ -= $= 4\pi F/S^2$ также мало. Следовательно, $180° - 3\beta_{ср} \approx 90°$, т.е. $\beta_{ср} \approx 30°$.

Значение величины $4\pi F/S^2$ не остается в процессе деформации неизменным. Возникает вопрос: как определить его при заданной степени обжатия, т.е. при заданном отношении h_0/h, если известны исходные размеры обжимаемого тела? Значение F определяется по формуле (2.36). Приближенное значение S периметра площади F можно вычислить по формуле

$$S = S_0\sqrt{1+\frac{4\pi F_0}{S_0^2}\left(\frac{h_0}{h}-1\right)}. \qquad (2.61)$$

Нетрудно убедиться в том, что формула эта применима в случае обжатия круглого цилиндра. Действительно, в этом случае $4\pi F_0/S_0 = 1$ и формула (2.61) приводится к виду $S = S_0\sqrt{h_0/h}$, откуда $S^2 = S_0{}^2 h_0/h$ и

$$\frac{4\pi F}{S^2} = \frac{4\pi F_0 h_0/h}{S_0^2 h_0/h} = \frac{4\pi F_0}{S_0^2} = 1.$$

Отношение $4\pi F/S^2 = 1$ в случае обжатия круглого цилиндра, и это понятно, поскольку круглое сечение остается круглым и после обжатия. Подставив (2.36) и (2.61) в правую часть (2.60), получим в общем случае обжатия тел с односвязным контуром в плане

$$\cos(180^\circ - 3\beta_{\text{ср}}) = \frac{4\pi F_0 h_0/h}{S_0^2\left[1+\frac{4\pi F_0}{S_0^2}\left(\frac{h_0-1}{h}\right)\right]} = \frac{\dfrac{4\pi F_0 h_0}{S_0^2 h}}{1-\dfrac{4\pi F_0}{S_0^2}+\dfrac{4\pi F_0 h_0}{S_0^2 h}}. \qquad (2.62)$$

Правая часть этого равенства при увеличении степени обжатия (т.е. при увеличении отношения h_0/h) асимптотически стремится к единице, т.е. к тому значению, которое соответствует круглому сечению. Это означает, что при любой форме односвязного очертания заготовки после интенсивного ее обжатия плоскопараллельными бойками форма очертания деформированной пластины должна приближаться к кругу, что, как известно, фактически и наблюдается.

При вычислении потребного усилия обжатия применима формула (2.42) как в случае круглого сечения, так и в случае длинной полосы. При этом значение F условно усредненной по высоте площади поперечного сечения обжимаемого тела в обоих случаях может быть вычислено по формуле (2.36). Естественно, что формулы (2.42) и (2.36) могут быть применены и в любом промежуточном случае, т.е. при обжатии плоскопараллельными бойками тел с односвязным контуром произвольной формы. Значение интенсивности напряжений σ_i в общем случае односвязного контура произвольной формы может быть найдено по кривой σ_i–e_i для данного материала при

$$e_i = (e_i)_{\text{ср}} = \frac{1}{\cos(60^\circ - \beta_{\text{ср}})} \ln \frac{h_0}{h}, \tag{2.63}$$

где $\beta_{\text{ср}}$ определяется из (2.60) или (2.62). Понятно, что при обжатии круглого цилиндра, когда $\beta_{\text{ср}}$ = 60°, e_i определится по формуле (2.35).

В предельном случае обжатия весьма длинной полосы, т. е. при $\beta_{\text{ср}}$ = 30°, формула (2.63) приводится к виду (2.43).

Для вычисления значения k_f воспользуемся табл. 2.9. В случае круглого сечения находим в таблице значение k_f [см. (2.42)]. В случае длинной полосы k_f определяется по формуле (2.58), а φ – по формуле (2.59).

Значение входного числа в табл. 2.11 при использовании ее для вычисления усилия обжатия при произвольной форме односвязного контура можно вычислить по формуле

$$\varphi = 4F/(Sh). \tag{2.64}$$

В случае сжатия круглого сечения формула (2.64) приводится к виду $\varphi = d/h$, в случае обжатия длинной полосы – к виду (2.59).

При использовании формулы (2.64) в общем случае односвязного контура значение S в правой части равенства можно вычислить по формуле (2.56). Получив значение φ и задаваясь коэффициентом трения f, найдем в табл. 2.11 значения двух функций: $\psi(\varphi, f)$ и $\psi_1(\varphi, f)$.

Значение коэффициента k_f в общем случае односвязного контура можно вычислить по формуле

$$k_f + [\psi_1 + (\psi - \psi_1)\cos(180^\circ - 3\beta_{\text{ср}})]\frac{\cos(\beta_{\text{ср}} - 30^\circ)}{\cos 30^\circ}. \tag{2.65}$$

При $\beta_{\text{ср}}$ = 60° (обжатие круглого цилиндра) формула приводится к известному для этого случая равенству $k_f = \psi_1 = \psi(\varphi, f)$.

При $\beta_{ср}$ = 30° и cos (180° - 3$\beta_{ср}$) = 0; cos ($\beta_{ср}$ - 30°) = 1 (обжатие длинной полосы) формула (2.65) приводится к формуле (2.58).

П р и м е р 4. Требуется рассчитать усилие горячего осаживания поковки прямоугольного поперечного сечения L = 500 мм, b_0 = 320 мм высотой h_0 =120 мм до h = 80 мм. Вычисляем

$$F_0 = L_0 b_0 = 500 \times 320 = 160\,000 \text{ мм}^2; \quad S_0 = 2L_0 + 2b_0 = 1640 \text{ мм}.$$

По формуле (2.4)

$$F = 160\,000 \times 120/80 = 240\,000 \text{ мм}^2.$$

Находим отношение

$$4\pi F_0/S^2{}_0 = 4\pi \cdot 160\,000/1640^2 = 0{,}7472.$$

Пользуясь формулой (2.48), получаем

$$S = S_0\sqrt{1 + 0{,}7476\left(\frac{120}{80} - 1\right)} = 1922{,}2 \text{ мм}.$$

По формуле (2.47):

$$\cos(180^\circ - 3\beta_{ср}) = \frac{4\pi F}{S^2} = \frac{4\pi \cdot 24000}{1922{,}2^2} = \cos 34^\circ 56' = 0{,}8198;$$

$$3\beta_{ср} = 180^\circ - 34^\circ 56' = 145^\circ 4' \quad \text{и} \quad \beta_{ср} = 4821'20''$$

(близко к простому сжатию).

По формуле (2.51) находим

$$\varphi = \frac{4F}{\text{Sh}} = \frac{4 \cdot 240000}{1922{,}2 \cdot 80} = 6{,}27.$$

Установим значение усилия осаживания для предельно возможных значений f = 0,3…0,35.

Для обоих случаев находим ψ и ψ_1 :

f	φ	ψ	ψ_1
0,3	2,27	1,884	1,509
0,35	6,27	1,965	1,604

При f = 0,3 получаем по формуле (2.65)

$$k_f = [1{,}509 + (1{,}884 - 1{,}509)0{,}8198]\frac{\cos 18^\circ 21'20''}{\cos 30^\circ} = 1{,}990,$$

а при $f = 0{,}35$

$$k_f = [1{,}604 + (1{,}965 - 1{,}604)0{,}8198]\frac{\cos 18^\circ 21'20''}{\cos 30^\circ} = 2{,}082.$$

Для данного металла при данном температурно-скоростном режиме было принято σ_i = 45 МПа.

Значение потребного усилия при f = 0,3 и f = 0,35 определяется по формуле (2.42):

$P = F\sigma_i k_f$ =240000×4,5×1,990 = 21 50000 Н = 2150 тс,

$P = F\sigma_i k_f$ = 240000×4,5×2,082 = 22 50000 Н = 2250 тс.

Библиографический список к разд. 2

2.1. *Смирнов-Аляев, Г.А.* Сопротивление материалов пластическому деформированию / Г.А. Смирнов-Аляев. Л.: Машиностроение, 1978. 307 с.

2.2. *Смирнов-Аляев, Г.А.* Сопротивление материалов пластическому деформированию / Г.А. Смирнов-Аляев. Л.: Машгиз, 1961. 463 с.

2.3. *Рудской, А.И.* Математическое моделирование и проектирование технологических процессов обработки металлов давлением / А.И. Рудской, Ю.И. Рыбин, А.М. Золотов. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004.

2.4. *Бриджмен, П.* Исследования больших пластических деформаций и разрыва / П. Бриджмен. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 444 с.

2.5. *Дмитриев, А.М.* Аппроксимация кривых упрочнения металлов / А.М. Дмитриев, А.Л. Воронцов // Кузнечно-штамповочное производство. №6. 2002.

2.6. *Давиденков, Н.Н.* Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца / Н.Н. Давиденков, Н.И. Спиридонова // Заводская лаборатория. 1945, Т. XI. №6. С. 583–593.

2.7. *Панин, В.Е.* Структурные уровни деформации твердых тел / В.Е. Панин, В.А. Лихачёв, Ю.В. Гриняев. Новосибирск: Наука, 1985.

2.8. *Бурлаков, А.В.* Основы теории пластичности и ползучести / А.В. Бурлаков. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1968. 156 с.

2.9. *Расстегаев, М.В.* Новый метод равномерного осаживания образцов для определения истинного сопротивления деформации и коэффициента внешнего трения / М.В. Расстегаев // Заводская лаборатория. 1940. № 3. С. 354.

3. ОДНОСДВИГОВЫЕ И ОДНОНАПРАВЛЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ

3.1. Сдвиг. Определение напряженно-деформированного состояния «сдвиг»

Третий основной вид НДС малого материального объема мы называем общим случаем сдвига, при котором происходит удлинение вдоль одной из трех главных осей этого объема, укорочение вдоль другой и относительно малое упругое или упругопластическое изменение длины вдоль третьей.

Вид напряженного состояния малого объема, который вызывает в нем общий вид деформации сдвига, превращает малую сферу в эллипсоид с удлиненной большой главной осью, укороченной малой и незначительно измененной средней. При этом средний главный компонент напряженного состояния σ_2 приближенно равен полусумме двух крайних главных компонентов, а незначительное изменение длины третьей главной оси вызывает, в свою очередь, относительное изменение объема малой сферы: его уменьшение (сдвиг примыкает к напряженному состоянию растяжение) или увеличение (сдвиг примыкает к напряженному состоянию сжатие). Общий случай сдвига переходит в простой сдвиг, когда деформация вдоль средней главной оси осуществляется упруго и равна полусумме двух крайних главных компонентов деформации: $\varepsilon_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)/2$.

Незначительное упругое изменение длины средней главной оси вызывает незначительное упругое изменение (увеличение или уменьшение) объема малой сферы. При этом один из трех главных компонентов напряженного состояния равен полусумме двух других: $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$.

И, наконец, чистым сдвигом мы называем такой сдвиг, при котором деформация вдоль средней главной оси равна нулю, а две другие главные деформации равны друг другу, но противоположны по знаку: $\varepsilon_2 = 0$; $\varepsilon_1 = - \varepsilon_3$. Главные компоненты напряженного состояния $\sigma_2 = 0$; $\sigma_1 = - \sigma_3$. Объем малой сферы при чистом сдвиге не меняется, гидростатическое давление равно нулю.

Наложение на напряженное состояние чистого сдвига $\sigma_1 =+ k$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = - k$ (где k – некоторая заданная величина) положительного гидростатического давления $\sigma_1 = k - \Delta p$; $\sigma_2 = -\Delta p$; $\sigma_3 = -k - \Delta p$, когда $\sigma_1 + \sigma_3 = k - \Delta p - k - \Delta p = -2\Delta p$, откуда $-\Delta p = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, приводит вид напряженного состояния чистого сдвига к простому сдвигу.

3.2. Анализ процесса кручения цилиндрического стержня

Чистый сдвиг происходит при испытании механических свойств металлов путем закручивания цилиндрических образцов. При этом зависимость текущих координат цилиндрического тела от начальных (в цилиндрической же системе координат) может быть задана простой системой равенств:

$$z = Z; \quad r = R; \quad \theta = \Theta + Z\varphi/L, \tag{3.1}$$

где L – расчетная длина закручиваемого стержня; φ – переменный во времени угол закручивания.

Геометрический смысл равенств (3.1) очевиден: все материальные точки, расположенные до деформации в сечениях, ортогональных оси стержня, остаются на тех же плоскостях и после деформации и на том же расстоянии R от оси симметрии, но поворачиваются относительно этой оси на некоторый угол $\Delta\theta$, пропорциональный (в данный момент времени) расстоянию Z от условно-неподвижного сечения.

Переход к декартовым координатам осуществляется с помощью равенств

$$X = R\cos\Theta; \quad Y = R\sin\Theta; \; x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta. \tag{3.2}$$

В результате получим зависимости текущих координат от начальных:

$$\begin{aligned} x &= R\cos\left(\Theta + \frac{Z}{L}\varphi\right) = X\cos\frac{Z}{L}\varphi - Y\sin\frac{Z}{L}\varphi; \\ y &= R\sin\left(\Theta + \frac{Z}{L}\varphi\right) = X\sin\frac{Z}{L}\varphi + Y\cos\frac{Z}{L}\varphi; \\ z &= Z. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Решая систему (3.3) относительно начальных координат, получаем выражения функциональных зависимостей начальных координат от текущих:

$$
\begin{aligned}
&X = x\cos\frac{Z}{L}\varphi + y\sin\frac{Z}{L}\varphi; \\
&Y = -x\sin\frac{Z}{L}\varphi + y\cos\frac{Z}{L}\varphi; \\
&Z = z.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Если φ – известная функция от времени t, то выражения (3.3) и (3.4) вполне определяют процесс деформации стержня при кручении и закономерность его протекания во времени.

Рассмотрим процесс кручения с точки зрения Эйлера на движение сплошной среды. Поле скоростей определяет выражения составляющих вектора скорости, которые с учетом (3.3) будут равны:

$$
\begin{aligned}
&\upsilon_x = \frac{\partial}{\partial t}\left[X\cos\frac{Z}{L}\varphi - Y\sin\frac{Z}{L}\varphi\right]; \\
&\upsilon_y = \frac{\partial}{\partial t}\left[X\sin\frac{Z}{L}\varphi + Y\cos\frac{Z}{L}\varphi\right]; \\
&\upsilon_z = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Так как $\upsilon_z = 0$, от времени зависит только φ, который является функцией одного аргумента t:

$$
\begin{aligned}
&\upsilon_x = -\left[X\sin\frac{Z}{L}\varphi + Y\cos\frac{Z}{L}\varphi\right]\frac{Z}{L}\frac{\partial\varphi}{dt}; \\
&\upsilon_y = \left[X\cos\frac{Z}{L}\varphi - Y\sin\frac{Z}{L}\varphi\right]\frac{Z}{L}\frac{\partial\varphi}{dt}; \\
&\upsilon_z = 0.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Подставив выражения X, Y, Z из (3.4) в правые части (3.6), после очевидных сокращений получим

$$
\upsilon_x = -\frac{yz}{L}\frac{\partial\varphi}{dt}; \quad \upsilon_y = -\frac{xz}{L}\frac{\partial\varphi}{dt}; \quad \upsilon_z = 0. \tag{3.7}
$$

Выражения компонентов тензора скорости деформаций после подстановки значений υ_x, υ_y и υ_z из (3.7) примут вид

$$
\dot\gamma_{yz} = \frac{x}{L}\frac{\partial\varphi}{dt}; \quad \dot\gamma_{xz} = \frac{y}{L}\frac{\partial\varphi}{dt}; \quad \dot\varepsilon_x = \dot\varepsilon_y = \dot\varepsilon_z = \dot\gamma_{xy} = 0. \tag{3.8}
$$

Условие пропорциональности компонентов девиаторов тензоров напряжений и скоростей деформаций

$$\frac{\sigma_x + p}{\dot{\varepsilon}_x} = \frac{\sigma_y + p}{\dot{\varepsilon}_y} = \ldots = \frac{2\tau_{xz}}{\dot{\gamma}_{xz}}$$

с учетом (3.8) принимает вид

$$\frac{2\tau_{yz}}{\frac{x}{L}\frac{d\varphi}{dt}} = -\frac{2\tau_{xz}}{\frac{y}{L}\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}. \tag{3.9}$$

Интенсивность скорости деформации при условии (3.8) определяется выражением

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{L\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Таким образом, компоненты девиатора тензора напряжений будут равны:

$$\begin{gathered} \tau_{xz} = -\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \sigma_x + p = \sigma_y + p = \sigma_z + p = \tau_{xy} = 0. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Тензор напряжений в случае пластического кручения:

$$\begin{vmatrix} -p & 0 & -\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 0 & -p & \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & -p \end{vmatrix}.$$

Используя (3.2), можно всегда перейти к цилиндрической системе координат. В этом случае выражения (3.10) принимают вид

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = -p; \quad \tau_{zr} = \tau_{r\theta} = 0; \quad \tau_{\theta z} = \sigma_i / \sqrt{3}. \tag{3.10а}$$

На свободной поверхности закручиваемого стержня $\sigma_r = 0$, т.е. $p = 0$, и (3.10а) записываются как

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{zr} = \tau_{r\theta} = 0; \quad \tau_{z\theta} = \sigma_i / \sqrt{3}. \tag{3.10б}$$

Если σ_i зависит только от времени t и r, не изменяющегося в процессе деформации для любой материальной точки, можно показать, что выражения (3.10а) удовлетворяют условиям равновесия только в том случае, когда гидростатическое давление постоянно по всему объему деформируемого стержня.

Подставив значения компонентов напряжения в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = 0,$$

получим $\frac{\partial}{\partial r}(-p) = \frac{\partial}{\partial z}(-p) = 0$, т.е. гидростатическое давление p не зависит от r и z. Таким образом, выражения (3.10а) дают решение для напряжений для всего объема тела. Если процесс кручения осуществляется в обычных условиях, $p = 0$ во всем объеме стержня в том случае, если σ_1 зависит только от t и r. Однако полученное решение не удовлетворяет условию $\tau_{r\theta} = 0$ на оси симметрии (т.е. при $r = 0$). Следовательно, у этой оси всегда имеется упругая зона, в которой решение (3.10а) не имеет силы и удовлетворяется условие пропорциональности компонентов девиаторов напряжений и малых деформаций:

$$\frac{\sigma_x + p}{\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}}} = \ldots = \frac{2\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \ldots = 2G. \tag{3.11}$$

Компоненты малой деформации могут быть заданы равенствами, аналогичными (3.8):

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0; \quad \gamma_{yz} = \frac{x}{L}\varphi; \quad \gamma_{zx} = -\frac{y}{L}\varphi. \tag{3.12}$$

Из (3.11) получим значения компонентов напряжения для случая (3.12):

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = G\frac{x}{L}\varphi; \quad \tau_{zx} = -G\frac{y}{L}\varphi.$$

Интенсивность напряженного состояния в этом случае

$$\sigma_i = G\sqrt{3}\,\frac{\varphi}{L}\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3}G\frac{r\varphi}{L}.$$

Условие пластичности $\sigma_i = \sigma_т$ дает возможность установить границу упругой зоны:

$$r_{упр} = \frac{\sigma_т}{\sqrt{3}} \frac{1}{G} \frac{L}{\varphi}. \tag{3.13}$$

Решение (3.13) остается в силе и для этой зоны, но, с учетом выражения для определения σ_i, оно примет вид

$$\tau_{z\theta} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} = G\frac{\varphi}{L} \tag{3.10в}$$

при $r = 0$ $\tau_{z\theta} = 0$.

Таким образом, если материал не обладает свойством деформационного упрочнения, то задача пластического кручения имеет простое решение:

$$\sigma_т = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{zr} = \tau_{r\theta} = 0;$$

$$\tau_{\theta z} = G\frac{\varphi}{L}r \qquad \text{при} \qquad r \le \frac{\sigma_т}{G\sqrt{3}} = \frac{L}{\varphi} = r_{пл};$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{\sigma_т}{\sqrt{3}} \qquad \text{при} \qquad r \ge r_{пл}. \tag{3.10г}$$

Если же материал обладает свойством деформационного упрочнения, то при

$$r > r_{пл} = \frac{\sigma_т}{G\sqrt{3}} \frac{L}{\varphi}$$

напряжение $\tau_{z\theta} = \sigma_i\sqrt{3}$ будет переменным, различным при различных значениях r и трудно определимым.

Обычно о величине деформационного упрочнения судят по итоговой (результативной) деформации за весь предшествующий процесс формоизменения. Однако это возможно только при условии монотонного протекания процесса. Как известно, существуют два условия монотонности. Условие постоянства вида тензора скорости деформаций (или вида деформированного состояния) сравнительно легко поддается экспериментальной проверке, чего нельзя сказать об условии совпадения главных осей скорости деформаций с одними и теми же материальными волокнами в течение всего процесса (либо исследуемой стадии формоизменения).

Выясним, удовлетворяются ли условия монотонности при пластическом кручении цилиндрического стержня. Для этого прежде всего необходимо определить направления главных осей и величину главных компонентов тензора скорости деформации.

При определении величины главных компонентов и направлений главных осей любого, симметричного тензора второго ранга используется известная система уравнений, которая применительно к тензору скорости деформации примет вид

$$\begin{aligned}
&(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_n)\alpha_{nx} + \dot{\varepsilon}_{xy}\alpha_{ny} + \dot{\varepsilon}_{xz}\alpha_{nz} = 0;\\
&\dot{\varepsilon}_{xy}\alpha_{nx} + (\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_n)\alpha_{ny} + \dot{\varepsilon}_{xz}\alpha_{nz} = 0;\\
&\dot{\varepsilon}_{xz}\alpha_{nx} + \dot{\varepsilon}_{yz}\alpha_{ny} + (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_n)\alpha_{nz} = 0,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

где n – индексы главных осей; $\dot{\varepsilon}_{xy} = 0{,}5\dot{\gamma}_{xy}$, $\dot{\varepsilon}_{xz} = 0{,}5\dot{\gamma}_{xz}\ldots$ Условие совместности этих трех равенств

$$\begin{vmatrix}
\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_n & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{zx}\\
\cdot & \dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_n & \dot{\varepsilon}_{yz}\\
\cdot & \cdot & \dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_n
\end{vmatrix} = 0$$

есть кубическое уравнение относительно неизвестных главных компонентов $\dot{\varepsilon}_n$.

Принимая во внимание (3.8), получим определитель кубического уравнения, определяющий главные компоненты тензора скорости деформаций при пластическом кручении:

$$\begin{vmatrix}
-\dot{\varepsilon}_n & 0 & -\frac{1}{2}\frac{y}{L}\frac{d\varphi}{dt}\\
0 & -\dot{\varepsilon}_n & \frac{1}{2}\frac{x}{L}\frac{d\varphi}{dt}\\
-\frac{1}{2}\frac{y}{L}\frac{d\varphi}{dt} & \frac{1}{2}\frac{x}{L}\frac{d\varphi}{dt} & -\dot{\varepsilon}_n
\end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим

$$-\dot{\varepsilon}_n\left\{\dot{\varepsilon}_n^2 - \left[\left(\frac{1}{2}\frac{x}{L}\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{y}{L}\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\right\} = 0, \tag{3.15}$$

корни которого, главные компоненты скорости деформации, равны:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{r}{2L}\frac{d\varphi}{dt}; \quad \dot{\varepsilon}_2 = 0; \quad \dot{\varepsilon}_3 = -\frac{r}{2L}\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (3.16)$$

Показатель вида тензора скорости деформаций, а следовательно, и напряжений определяется формулой

$$\nu_{\dot{\varepsilon}} = 3\dot{\varepsilon}_2 / (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3).$$

Поскольку $\dot{\varepsilon}_2 = 0$, $\nu_{\dot{\varepsilon}}$ всегда равно нулю.

Следовательно, вид напряженного состояния в течение всего процесса пластического кручения постоянен и соответствует сдвигу. Таким образом, одно из условий монотонности при кручении удовлетворяется.

Для выяснения вопроса о соблюдении второго условия монотонности необходимо определить направления главных осей скорости деформации и проследить, совпадают ли они с одними и теми же материальными точками, т.е. сохраняют ли фиксированные материальные точки свое положение на отрезках прямых, совпадающих с направлениями главных осей скорости деформации. Подставив значения компонентов скорости деформации из (3.16) и (3.8) в систему (3.14) для первой главной оси, получим

$$-\frac{r}{2L}\frac{d\varphi}{dt}\alpha_{1x} - \frac{y}{2L}\frac{d\varphi}{dt}\alpha_{1z} = 0;$$
$$-\frac{r}{2L}\frac{d\varphi}{dt}\alpha_{1y} + \frac{x}{2L}\frac{d\varphi}{dt}\alpha_{1z} = 0;$$
$$-\frac{y}{2L}\frac{d\varphi}{dt}\alpha_{1x} + \frac{x}{2L}\frac{d\varphi}{dt}\alpha_{1y} - \frac{r}{2L}\frac{d\varphi}{dt}\alpha_{1z} = 0,$$

или, после очевидных сокращений,

$$-r\alpha_{1x} - y\alpha_{1z} = 0; \quad -r\alpha_{1y} - x\alpha_{1z} = 0; \quad -y\alpha_{1x} + x\alpha_{1y} - r\alpha_{1z} = 0.$$

В силу первых двух равенств

$$\alpha_{1x} = -\frac{y}{r}\alpha_{1z}; \quad \alpha_{1y} = \frac{x}{r}\alpha_{1z}. \qquad (3.17)$$

Из условия $\alpha_{1x}^2 + \alpha_{1y}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1$ и (3.17)

$$\frac{y^2}{r^2}\alpha_{1z}^2 + \frac{x^2}{r^2}\alpha_{1z}^2 + \alpha_{1z}^2 = 1, \quad \text{т.е.} \quad \alpha_{1z}^2 = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\alpha_{1x} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \alpha_{1y} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$
$$\alpha_{1z} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.18}$$

Обозначив x_M, y_M, z_M координаты точки в деформируемом теле, для которой определяется тензор скорости деформации, x_{M1}, y_{M1}, z_{M1} – координаты точки M_1, расположенной в данный момент вблизи точки M на первой главной оси скорости деформации, составим уравнение прямой, проходящей через эти две точки:

$$x_{M1} - x_M = -\frac{y_M}{r_M}\left(z_{M1} - z_M\right);$$
$$y_{M1} - y_M = \frac{x_M}{r_M}\left(z_{M1} - z_M\right). \tag{3.19}$$

Совершенно аналогично, так как $\dot{\varepsilon}_1$ и $\dot{\varepsilon}_3$ в (3.68) различаются только знаками, можно показать, что направляющие косинусы третьей главной оси определяются равенствами (3.18); уравнение прямой, проходящей через точки M и M_3, лежащие на этой оси, имеет вид

$$x_{M3} - x_M = \frac{y_M}{r_M}\left(z_{M3} - z_M\right); \; y_{M3} - y_M = -\frac{x_M}{r_M}\left(z_{M3} - z_M\right). \tag{3.19а}$$

Определив направляющие косинусы второй главной оси, получим

$$\alpha_{2x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \alpha_{2y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \alpha_{2z} = 0. \tag{3.18а}$$

Вторая главная ось скорости деформации, как видно из (3.18а), лежит в плоскости, параллельной плоскости xy, и уравнение прямой, соединяющей точки M и M_2, лежащие на этой оси, представится как

$$x_{M2} - x_M = x_M\left(y_{M2} - y_M\right)/\,y_M. \tag{3.19б}$$

Равенства (3.18), (3.18а), (3.19), (3.19а), (3.19б) не зависят от времени и показывают, что в любой геометрической точке деформируемого тела направления главных осей тензора скорости деформации остаются неизменными в процессе формоизменения.

Для удовлетворения условий монотонности необходимо, чтобы прямолинейный отрезок (материальное волокно), соединяющий две близкорасположенные материальные точки $\overline{M}$ и $\overline{M}_1$, в данный момент совпадающие с геометрическими точками M и M_1, лежащими на первой главной оси скорости деформации, во всех предшествующих стадиях процесса совпадали с первой главной осью скорости деформации. Иначе говоря, необходимо доказать, что две материальные точки $\overline{M}$ и $\overline{M}_1$ все время совпадают с двумя геометрическими точками M и M_1, которые лежат на неподвижной первой главной оси скорости деформации.

Любая материальная точка определяется своими начальными координатами. Функциональная зависимость текущих координат от начальных задана при пластическом кручении равенствами (3.3).

Обозначим X_M, Y_M, Z_M, X_{M1}, Y_{M1}, Z_{M1} начальные координаты материальных точек $\overline{M}$ и $\overline{M}_1$, совпадающих в рассматриваемый момент времени с геометрическими точками M и M_1; φ_t – значение угла закручивания в данный момент. В силу равенств (3.3)

$$\begin{gathered} x_M = X_M \cos\frac{Z_M}{L}\varphi_t - Y_M \sin\frac{Z_M}{L}\varphi_t; \\ x_{M_1} = X_{M_1} \cos\frac{Z_{M_1}}{L}\varphi_t - Y_{M_1} \sin\frac{Z_{M_1}}{L}\varphi_t; \\ z_M = Z_M; \quad z_{M_1} = Z_{M_1}. \end{gathered} \tag{3.20}$$

Имея в виду, что разность $z_{M1} - z_M = Z_{M1} - Z_M$ – величина малая, следовательно, $\cos(Z_{M_1} - Z_M)\varphi_t / L = 1$ и $\sin(Z_{M_1} - Z_M)\varphi_t / L = (Z_{M_1} - Z_M)\varphi_t / L,$ можно получить зависимости:

$$\begin{gathered} \cos\frac{Z_{M_1}}{L}\varphi_t = \cos\frac{Z_M}{L}\varphi_t - \left(Z_{M_1} - Z_M\right)\frac{\varphi_t}{L}\sin\frac{Z_M}{L}\varphi_t; \\ \sin\frac{Z_{M_1}}{L}\varphi_t = \sin\frac{Z_M}{L}\varphi_t - \left(Z_{M_1} - Z_M\right)\frac{\varphi_t}{L}\cos\frac{Z_M}{L}\varphi_t. \end{gathered} \tag{3.21}$$

Замечая, что $X_{M1}=X_M + (X_{M1} - X_M)$; $Y_{M1} = Y_M +(Y_{M1} - Y_M)$, подставляя (3.21) во второе выражение (3.20) и пренебрегая квадратами малых величин, получаем

$$x_{M_1}=X_{M_1}\cos\frac{Z_M}{L}\varphi_t-Y_{M_1}\sin\frac{Z_M}{L}\varphi_t-y_{M_1}\frac{Z_{M_1}-Z_M}{L}\varphi_t. \quad (3.22)$$

Вычитая почленно из (3.22) первое равенство (3.20), определим

$$\begin{gathered}x_{M_1}-x_M=\left(X_{M_1}-X_M\right)\cos\frac{Z_M}{L}\varphi_t-\left(Y_{M_1}-Y_M\right)\sin\frac{Z_M}{L}\varphi_t-\\ -y_{M_1}\frac{Z_{M_1}-Z_M}{L}\varphi_t.\end{gathered} \quad (3.23)$$

Комбинируя (3.23) и учитывая на основании (3.3) и (3.19), что

$$x_{M_1}-x_M=-y_M\frac{Z_{M_1}-Z_M}{R_M};\quad y_{M_1}-y_M=x_M\frac{Z_{M_1}-Z_M}{R_M},$$

получим следующую систему уравнений относительно X_{M1} - X_M = =Y_{M1} - Y_M:

$$\begin{gathered}\left(X_{M_1}-X_M\right)\cos\frac{Z_M}{L}\varphi_t-\left(Y_{M_1}-Y_M\right)\sin\frac{Z_{M_1}}{L}\varphi_t+\\ +y_M\left(Z_{M_1}-Z_M\right)\left(\frac{1}{R_M}-\frac{\varphi_t}{L}\right)=0;\\ \left(X_{M_1}-X_M\right)\sin\frac{Z_M}{L}\varphi_t+\left(Y_{M_1}-Y_M\right)\cos\frac{Z_M}{L}\varphi_t-\\ -x_M\left(Z_{M_1}-Z_M\right)\left(\frac{1}{R_M}-\frac{\varphi_t}{L}\right)=0.\end{gathered}$$

С учетом (3.3) решение этой системы определится равенствами

$$\begin{gathered}X_{M_1}-X_M=-Y_M\left(Z_{M_1}-Z_M\right)\left(1/R_M-\varphi_t/L\right);\\ Y_{M_1}-Y_M=X_M\left(Z_{M_1}-Z_M\right)\left(1/R_M-\varphi_t/L\right).\end{gathered} \quad (3.24)$$

Поскольку в начальный момент $x = X$; $y = Y$; $z = Z$, а точка M_1 выбрана совершенно произвольно на относительно малом расстоянии от произвольно выбранной точки M на прямой, совпадающей с первой главной осью скорости деформации, то полученное уравнение прямой (3.24) является геометрическим местом материальных точек в начальной стадии процесса. Эти точки должны будут располагаться вдоль первой главной оси скорости деформации, когда угол закручивания достигнет заданного значения φ_t:

$$\left(x - x_{\overline{M}}\right) = -y_{\overline{M}}\left(z - z_{\overline{M}}\right)\left(1/r_{\overline{M}} - \varphi_t/L\right);$$
$$\left(y - y_{\overline{M}}\right) = x_{\overline{M}}\left(z - z_{\overline{M}}\right)\left(1/r_{\overline{M}} - \varphi_t/L\right)$$

или, что равносильно,

$$-\frac{x - x_{\overline{M}}}{y_{\overline{M}}} = \frac{y - y_{\overline{M}}}{x_{\overline{M}}} = \frac{z - z_{\overline{M}}}{r_{\overline{M}} L/(L - r_{\overline{M}}\varphi_t)}. \tag{3.25}$$

Направляющие косинусы этой прямой определяются равенствами

$$\alpha_{1x} = -\frac{y_{\overline{M}}}{r_{\overline{M}}} = \frac{L - r_{\overline{M}}\varphi_t}{\sqrt{(L - r_{\overline{M}}\varphi_t)^2 + L^2}};$$
$$\alpha_{1y} = \frac{x_{\overline{M}}}{r_{\overline{M}}} = \frac{L - r_{\overline{M}}\varphi_t}{\sqrt{(L - r_{\overline{M}}\varphi_t)^2 + L^2}}; \tag{3.26}$$
$$\alpha_{1z} = \frac{L}{\sqrt{(L - r_{\overline{M}}\varphi_t)^2 + L^2}}.$$

Уравнения (3.26) показывают, что рассматриваемая прямая располагается в плоскости, перпендикулярной радиальному направлению, т.е. ортогональна прямой, соединяющей материальную точку $\overline{M}$ с точкой пересечения плоскости $z - z_M = \text{const}$ с геометрической осью симметрии.

Анализ равенств (3.26) показывает, что, во-первых, в начальный момент времени, когда $\varphi_t = 0$, равенства (3.26) тождественно равны (3.18), т.е. что в начале процесса материальное волокно совпадает по направлению с первой главной осью скоростей деформации; во-вторых, направляющие косинусы (3.26) являются функциями угла закручивания φ_t и переменны во времени, тогда как направляющие косинусы главных осей скорости деформации постоянны.

Совершенно аналогичные рассуждения приводят к таким же выводам относительно материальных волокон, в начале процесса совпадавших с третьей главной осью скорости деформации. Следовательно, первое условие монотонности не соблюдается и процесс пластического кручения нельзя считать монотонным.

Вместе с тем, поскольку условие сохранения вида удовлетворяется, то такой процесс можно назвать частично немонотонным.

Такая закономерность может быть классифицирована как признак односдвигового процесса, к какому и следует отнести кручение. Поскольку оно относится к категории процессов немонотонных, то судить по итоговой (результативной) деформации о деформационном упрочнении материала нельзя. В данном случае необходимо обращаться к более общей характеристике степени деформации.

Рассмотрим теперь кручение стержня кругового сечения с позиций тензорного анализа. За центр системы координат выберем произвольную точку O на оси стержня. Ось $O\eta$ направлена по оси стержня, оси $O\xi$ и $O\zeta$ выбраны произвольным образом перпендикулярно друг другу в поперечном сечении стержня, но так, что они образуют правую систему координат и направлены по нормали к свободной поверхности стержня.

Начальное положение любой точки M определяется тремя величинами, а именно, расстоянием $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ от точки до оси стержня, углом φ, измеряемым в плоскости $\xi O\zeta$ против часовой стрелки от положительного направления оси $O\xi$ до направления на точку M, и расстоянием z от точки до плоскости $\xi O\zeta$.

При кручении площадь поперечного сечения можно считать неизменной: все материальные точки не приближаются к оси стержня и не удаляются от нее. В направлении оси η перемещений тоже практически не происходит. Поэтому текущие координаты ξ, ζ, η точки M, очевидно, зависят только от угла закручивания Φ в данном поперечном сечении, который, в свою очередь, зависит только от времени t и начального расстояния z от точки M до плоскости $\xi O\zeta$. Таким образом, координата η постоянна, а координаты ξ и ζ изменяются:

$$\xi = R\cos(\varphi + \Phi(z,t)), \quad \zeta = R\sin(\varphi + \Phi(z,t)), \quad \eta = z. \qquad (3.27)$$

Здесь x, y, z – начальные координаты точки M, а $\Phi(z, t)$ – угол закручивания**.** В начальный момент времени, т.е. при $t = 0$, этот угол равен нулю: $\Phi(z, 0) = 0$. На оси стержня в любой момент времени он тоже равен нулю: $\Phi(0, t) = 0$.

Будем предполагать функцию $\Phi(z,t)$ непрерывной вместе с ее частными производными. Тогда составляющие вектора перемещения точки M задаются равенствами

$$\begin{aligned} u_x &= R(\cos(\varphi + \Phi(z,t) - \cos\varphi), \\ u_y &= R(\sin(\varphi + \Phi(z,t) - \sin\varphi), \\ u_z &= 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Для компонентов малой деформации любой данной частицы стержня получаем

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \\ &\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = -R\sin(\varphi + \Phi(z,t)) \cdot \Phi'_z(z,t), \\ &\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = R\cos(\varphi + \Phi(z,t)) \cdot \Phi'_z(z,t). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Тогда тензор малых деформаций имеет вид

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -R\sin(\varphi+\Phi)\cdot\dfrac{\Phi'_z}{2} \\ 0 & 0 & R\cos(\varphi+\Phi)\cdot\dfrac{\Phi'_z}{2} \\ -R\sin(\varphi+\Phi)\cdot\dfrac{\Phi'_z}{2} & R\cos(\varphi+\Phi)\cdot\dfrac{\Phi'_z}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

(здесь подразумевается, что $\Phi = \Phi(z, t)$).

Главные компоненты малой деформации таковы:

$$\varepsilon_1 = \frac{R\left|\Phi'_z(z,t)\right|}{2}, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = -\frac{R\left|\Phi'_z(z,t)\right|}{2}. \tag{3.31}$$

Расположение же главных осей малой деформации зависит от знака $\Phi'z(z, t)$. А именно, если $\Phi'z(z, t) > 0$, то направления осей определяются векторами

$$\begin{pmatrix} -\sin(\varphi+\Phi) \\ \cos(\varphi+\Phi) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\Phi) \\ \sin(\varphi+\Phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sin(\varphi+\Phi) \\ \cos(\varphi+\Phi) \\ -1 \end{pmatrix},$$

а если $\Phi'z(z,t) < 0$, то векторами

$$\begin{pmatrix} -\sin(\varphi+\Phi) \\ \cos(\varphi+\Phi) \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\Phi) \\ \sin(\varphi+\Phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sin(\varphi+\Phi) \\ \cos(\varphi+\Phi) \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. оси главных компонентов ε_1 и ε_3 меняются местами. В любом случае, так как $\Phi = \Phi(z,\ t)$, то главные оси малой деформации изменяются со временем. Значения параметра и угла вида деформации, очевидно, таковы: $\nu_\varepsilon = 0, \quad \beta_\varepsilon = 30^{\circ}$.

Пусть $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ – проекции вектора скорости материальной точки M на координатные оси в данный текущий момент времени. Так как составляющие вектора скорости $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ можно считать зависящими функционально от начальных координат x, y, z и от времени t, то, дифференцируя составляющие вектора перемещений u_x, u_y, u_z по времени, получаем

$$\begin{aligned} u_x &= -R\sin(\varphi+\Phi(z,t)\cdot\Phi'_t(z,t), \\ u_y &= R\cos(\varphi+\Phi(z,t)\cdot\Phi'_t(z,t), \\ u_z &= 0. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Откуда компоненты вектора скорости (т.е. скорости деформации) определяются равенствами:

$$\dot\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad \dot\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad \dot\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad \dot\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0,$$

$$\begin{aligned} \dot\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} &= -R\cos(\varphi+\Phi(z,t))\cdot\Phi'_t(z,t)\cdot\Phi'_z(z,t) - \\ &- R\sin(\varphi+\Phi(z,t))\cdot\Phi''_{tz}(z,t)\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} &= R\sin(\varphi+\Phi(z,t))\cdot\Phi'_t(z,t)\cdot\Phi'_z(z,t) + \\ &+ R\sin(\varphi+\Phi(z,t))\cdot\Phi''_{tz}(z,t). \end{aligned}$$

Введем обозначения: $C = \cos(\varphi+\Phi(z,t))$, $S = \sin(\varphi+\Phi(z,t))$, $A = \Phi'_t(z,t)\cdot\Phi'_z(z,t), \quad B = \Phi''_{tz}(z,t)$. Тогда тензор скоростей малых деформаций примет вид

$$T_{\dot{\varepsilon}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(-R\cdot C\cdot A-R\cdot S\cdot B) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(-R\cdot C\cdot A+R\cdot S\cdot B) \\ \frac{1}{2}(-R\cdot C\cdot A-R\cdot S\cdot B) & \frac{1}{2}(-R\cdot C\cdot A+R\cdot S\cdot B) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Главные компоненты скорости малой деформации:

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}_1=\frac{R\sqrt{(\Phi_t'(z,t)\cdot\Phi_z'(z,t))^2+(\Phi_{tz}''(z,t))^2}}{2}, \\ &\dot{\varepsilon}_2=0, \\ &\dot{\varepsilon}_3=-\frac{R\sqrt{(\Phi_t'(z,t)\cdot\Phi_z'(z,t))^2+(\Phi_{tz}''(z,t))^2}}{2}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Направления главных осей скоростей малой деформации определяются векторами

$$\begin{pmatrix} -\cos(\varphi+\Phi)\cdot\Phi_t'(z,t)\cdot\Phi_z'(z,t)-\sin(\varphi+\Phi)\cdot\Phi_{tz}''(z,t) \\ -\sin(\varphi+\Phi)\cdot\Phi_t'(z,t)\cdot\Phi_z'(z,t)+\cos(\varphi+\Phi)\cdot\Phi_{tz}''(z,t) \\ \sqrt{\left(\Phi_t'(z,t)\cdot\Phi_z'(z,t)\right)^2+\left(\Phi_{tz}''(z,t)\right)^2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\sin(\varphi+\Phi)\cdot\Phi_t'(z,t)\cdot\Phi_z'(z,t)+\cos(\varphi+\Phi)\cdot\Phi_{tz}''(z,t) \\ \cos(\varphi+\Phi)\cdot\Phi_t'(z,t)\cdot\Phi_z'(z,t)+\sin(\varphi+\Phi)\cdot\Phi_{tz}''(z,t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\Phi)\cdot\Phi_t'(z,t)\cdot\Phi_z'(z,t)+\sin(\varphi+\Phi)\cdot\Phi_{tz}''(z,t) \\ \sin(\varphi+\Phi)\cdot\Phi_t'(z,t)\cdot\Phi_z'(z,t)-\cos(\varphi+\Phi)\cdot\Phi_{tz}''(z,t) \\ \sqrt{\left(\Phi_t'(z,t)\cdot\Phi_z'(z,t)\right)^2+\left(\Phi_{tz}''(z,t)\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что $\nu=0, \quad \beta=30^{\circ}$.

Условие несжимаемости для рассматриваемого случая деформации выполняется автоматически:

$$\dot{\varepsilon}_1+\dot{\varepsilon}_2+\dot{\varepsilon}_3=\frac{R\sqrt{\left(\Phi'_t(z,t)\cdot\Phi'_z(z,t)\right)^2+\left(\Phi''_{tz}(z,t)\right)^2}}{2}+0-$$
$$-\frac{R\sqrt{\left(\Phi'_t(z,t)\cdot\Phi'_z(z,t)\right)^2+\left(\Phi''_{tz}(z,t)\right)^2}}{2}=0. \tag{3.36}$$

Применяя допущения и соотношения теории пластического течения и учитывая вычисленные ранее значения компонентов, для деформации кручения имеем

$$\sigma_{xx}=\sigma+\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{xx}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}=\sigma,$$
$$\sigma_{yy}=\sigma+\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{yy}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}=\sigma,$$
$$\sigma_{zz}=\sigma+\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{zz}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}=\sigma,$$
$$\tau_{xy}=\frac{1}{3}\dot{\gamma}_{xy}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}=0, \tag{3.37}$$
$$\tau_{xz}=\frac{1}{3}\dot{\gamma}_{xz}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}=-\frac{R}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(\cos(\varphi+\Phi(z,t))\cdot\Phi'_t(z,t)\cdot\Phi'_z(z,t)+$$
$$+\sin(\varphi+\Phi(z,t))\cdot\Phi''_{tz}(z,t)),$$
$$\tau_{yz}=\frac{1}{3}\dot{\gamma}_{yz}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}=\frac{R}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(-\sin(\varphi+\Phi(z,t))\cdot\Phi'_t(z,t)\cdot\Phi'_z(z,t)+$$
$$+\cos(\varphi+\Phi(z,t))\cdot\Phi''_{tz}(z,t))$$

(здесь σ – среднее напряжение, σ_i – интенсивность напряженного состояния, а $\dot{\varepsilon}_i$ – интенсивность скоростей деформации). Тогда тензор напряжений

$$T_\sigma=\begin{pmatrix}\sigma & 0 & \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\dot{\varepsilon}_i}(-CA-SB)\\ 0 & \sigma & \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\dot{\varepsilon}_i}(-SA+CB)\\ \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\dot{\varepsilon}_i}(-CA-SB) & \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\dot{\varepsilon}_i}(-SA+CB) & \sigma\end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

Главные компоненты напряженного состояния:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = \sigma + \frac{R}{3}\frac{\sigma_i}{\dot{\varepsilon}_i}\sqrt{\left(\Phi'_t(z,t)\cdot\Phi'_z(z,t)\right)^2 + \left(\Phi''_{tz}(z,t)\right)^2},\\
&\sigma_2 = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3.39)\\
&\sigma_3 = \sigma - \frac{R}{3}\frac{\sigma_i}{\dot{\varepsilon}_i}\sqrt{\left(\Phi'_t(z,t)\cdot\Phi'_z(z,t)\right)^2 + \left(\Phi''_{tz}(z,t)\right)^2}.
\end{aligned}$$

Из принятых допущений теории пластического течения следует, что оси главных напряжений те же, что и для скоростей деформации. Очевидно, что $\nu_\sigma = 0, \quad \beta_\sigma = 30^{\circ}$.

Нетрудно показать, что процесс кручения ни при каких условиях не может быть монотонным. Действительно, для монотонности необходимо совпадение главных осей малых деформаций и напряжений, но для такого совпадения требуется пропорциональность векторов, определяющих эти главные оси, т.е. (во введенных обозначениях)

$$\frac{-CA-SB}{-S} = \frac{-SA+CB}{C} = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{1}. \qquad (3.40)$$

Из равенства (3.40) немедленно получаем

$$\begin{aligned}
&-C^2\cdot A - S\cdot C\cdot B = S^2\cdot A - S\cdot C\cdot B,\\
&\left(S^2+C^2\right)A = 0,\\
&A = 0,
\end{aligned}$$

т.е. $\Phi'_t(z,t)\cdot\Phi'_z(z,t) = 0,$ что невозможно, так как Φ – текущий угол закручивания – не может не зависеть от расстояния до закрепленного конца стержня и от времени.

Таким образом, для деформации кручения всегда выполняется условие постоянства вида деформированного состояния. Деформация кручения всегда является частным случаем односдвигового процесса. При допущениях теории пластического течения главные оси малых деформаций и напряжений всегда не совпадают. Следовательно, деформация кручения никогда не является монотонной.

3.3. Односдвиговые процессы

Основные положения теории односдвиговых процессов. В разд. 1 рассмотрены определения и условия протекания монотонных процессов деформации, обеспечивающие их однозначность. Вместе с тем за последние два десятилетия было установлено, что монотонные деформации не являются единственно возможной закономерностью последовательности протекания процесса пластического формоизменения тела, однозначно определяющей конечную деформацию. В частности, В.П. Чикидовским было установлено, что условия протекания процесса могут быть подчинены некоторой другой закономерной последовательности, отличной от условий монотонности и, тем не менее, однозначно определяющей процесс конечного формоизменения.

Рассмотрим такие процессы, при которых условие постоянства вида деформированного состояния выполняется в течение всего процесса, а условие совпадения главных осей тензора скорости деформации с одними и теми же материальными волокнами не выполняется. Тогда на различных стадиях деформации данной частицы тела наибольшую скорость удлинения претерпевают различные волокна: сначала наиболее быстро удлиняется какое-то одно, первое волокно, затем другое, расположенное под некоторым малым углом по отношению к первому, начнет удлиняться быстрее его. На последующей стадии наиболее быстро будет удлиняться некое третье волокно, первоначально составляющее относительно больший угол с первым, и т.д.

Наибольшую скорость укорочения точно так же на различных стадиях процесса будут претерпевать различные волокна. Направление третьей оси скорости деформации, перпендикулярное двум рассмотренным направлениям, должно, для удовлетворения условиям постоянства вида, неизменно совпадать с одним и тем же волокном, и эта ось должна являться главной осью с индексом 3.

Кроме того, одно из направлений, перпендикулярное этой второй главной оси скорости деформации и составляющее равные углы с направлениями первой и третьей осей, также должно неизменно совпадать с одним и тем же волокном. Это направление, поскольку оно должно составлять равные углы (+45°) со взаимно перпендикулярными направлениями алгебраически наибольшей и наименьшей скорости деформации, будет неизменно совпадать с одним из двух направлений действия максимального касательного напряжения или с одним из двух направлений наибольшей скорости деформации сдвига.

Таким образом, в процессах, подчиняющихся приведенным условиям, сдвиговые деформации могут происходить только в одной какой-нибудь плоскости, перпендикулярной второй главной оси скорости деформации.

В связи с этим условимся данный порядок протекания процесса называть односдвиговым (моносдвиговым). Односдвиговый характер последовательности протекания процесса деформации вполне реален, так же как и монотонный. Односдвиговый процесс имеет место не только при пластическом кручении цилиндрических стержней, но и, по-видимому, в процессах вырубки, резки заготовок, а также в некоторых других, когда в очаге деформации возникают зоны интенсивных сдвигов.

Очевидно, что рассмотренный порядок протекания процесса пластической деформации материальной частицы тела заведомо не удовлетворяет условиям монотонности и в то же время подчинен определенной закономерности, хотя и отличной от закономерностей монотонного процесса. Порядок этот характеризуется постоянным видом деформации, а именно сдвигом. Однако не характеристика вида тензора деформации (или скорости деформации) приводит к существенному различию его с монотонным процессом. Деформация сдвига или близкие к нему виды деформации могут быть реализованы и при монотонном или приближенно монотонном протекании процесса. К существенному различию монотонного и односдвигового процессов приводит нарушение условия совпадения главных осей скорости деформаций с одними и теми же материальными волокнами, что не только затрудняет определение итоговой деформации, но и изменяет характер зависимости между напряжениями и деформациями.

При расчете монотонных процессов деформации обычно пользуются разобранной выше гипотезой единой кривой, которая связывает напряжения и деформации зависимостью $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, определяемой по результатам испытания металла на простое растяжение. Расчетные данные при этом хорошо согласуются с опытными. А при расчете немонотонного односдвигового процесса (например, пластического кручения) если и можно пользоваться этой зависимостью, то только в грубом приближении, при небольших деформациях, и то не для всех материалов. Известно, что вид тензора деформации, определяемый отношениями разностей его главных компонентов при монотонном или приближенно монотонном характере протекания процесса формоизменения, не влияет на функциональную зависимость $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, а также и на функциональную зависимость интенсивности напряжений от удельной механической работы, затраченной на изменение формы данной частицы: $\sigma_i = f(A_{уд})$. В этом и заключается содержание гипотезы единой кривой.

Различие в характере протекания монотонных и односдвиговых процессов пластического формоизменения в силу их необратимости не может не сказаться на характере зависимости $\sigma_i = f(A_{уд})$. Так, при односдвиговом процессе она может существенно отличаться при различных пластических деформациях от соответствующей зависимости при монотонном процессе деформации.

Установление функциональной связи интенсивности напряжений с интенсивностью итоговой деформации при односдвиговом процессе представляет существенную трудность. Дело в том, что само понятие интенсивности итоговой (не малой) деформации при немонотонном процессе становится неопределенным, так как оно не может быть установлено путем формального обобщения геометрических понятий, применяемых в теории малых пластических деформаций или в теории монотонных процессов конечного формоизменения. Понятие о главных компонентах итоговой деформации при немонотонном ее протекании (даже и закономерном, каким является односдвиговый процесс) приобретает некоторую неопределенность в силу того, что главные оси эллипсоида, в который преобразуется первоначальная сфера, не совпадают при немонотонной деформации с главными осями скорости деформации. При этих условиях применение логарифмических выражений главных компонентов деформации является необоснованным.

Формально значения главных компонентов итоговой деформации при любой закономерности протекания процесса можно определить по значениям логарифмов отношений главных осей эллипсоида, преобразованного деформацией из начальной сферы. Однако установить связь между этими выражениями и компонентами напряженного состояния или с затраченной на деформацию удельной механической работой можно только при монотонном или приближенно монотонном протекании процесса. Поэтому для установления связи между геометрической и механической сторонами задачи необходимо использовать более общее понятие, характеризующее формоизменение, – степень деформации в формулировке Ильюшина [30].

Определить степень деформации при односдвиговом процессе можно путем обобщения закономерности изменения напряженного состояния и затрачиваемой удельной механической работы, полагая, что как при малой деформации, так и при любой определенной закономерности протекания конечной пластической деформации имеет место зависимость

$$dA_{\text{уд}} = \sigma_i de_i. \tag{3.41}$$

Таким образом, мы будем рассматривать процесс с более общих позиций энергетической теории упрочнения, которая охватывает более широкий круг процессов, чем условие единой кривой, которое может быть использовано только для монотонных и приближенно монотонных процессов. При условии монотонного протекания процесса конечного формоизменения такое допущение приводит к выражению интенсивности конечных деформаций, аналогичному принятому для малых деформаций. При других закономерностях это допущение приведет к иным выражениям степени деформации. Покажем это на примере односдвигового процесса кручения.

При пластическом кручении приращение удельной механической работы определяется выражением $dA_{\text{уд}} = \tau_{\varphi z} r d(\varphi/L)$. Поскольку $\tau_{\varphi z} = \tau_{\max} = \sigma_i/\sqrt{3}$, получаем $dA_{\text{уд}} = \left(\sigma_i/\sqrt{3}\right) r d(\varphi/L) = \sigma_i de_i$, откуда $de_i = \left(r/\sqrt{3}\right) d(\varphi/L)$.

Так как при $\varphi_0 = 0$ $e_i = 0$, то после интегрирования получим известное выражение степени деформации при кручении:

$$e_i = \left(1/\sqrt{3}\right) r\varphi/L. \tag{3.42}$$

Выражение это остается в силе и для случая малых деформаций, когда

$$e_i = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4}\gamma_{\varphi z}^2} = \frac{1}{3}\gamma_{\varphi z},$$

но при малой деформации $\gamma_{\varphi z} = r\varphi/L$; мы получаем приведенное выше выражение степени деформации, не связанное с привлечением логарифмической меры деформации.

Покажем теперь, что на основании анализа кинематики процесса степень деформации определяется такой же зависимостью. За центр переносной системы координат выберем произвольную точку O на поверхности закручиваемого стержня. Ось ξ направлена по нормали к свободной поверхности, ось ζ – параллельно оси закручиваемого стержня, а ось η – по касательной к окружности, на которой зафиксирована точка O (рис. 3.1).

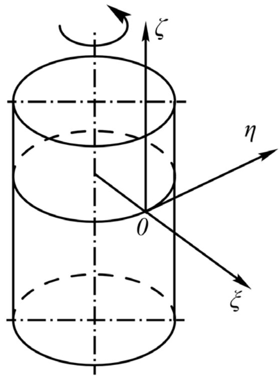


Рис. 3.1. Переносная система координат на поверхности закручиваемого стержня

В процессе кручения площадь поперечного сечения стержня не изменяется: все материальные точки не приближаются к оси симметрии и не удаляются от нее. Поэтому одна составляющая вектора скорости $\upsilon_\xi = 0$. Но и в направлении оси ζ перемещений практически не происходит, следовательно, только одна составляющая $\upsilon_\zeta = 0$, а $\upsilon_\eta \neq 0$.

Координата ζ равна расстоянию между двумя поперечными сечениями, перпендикулярными оси закручиваемого стержня и проходящими через точку O и точку с координатами ξ, ζ, η. Поэтому вектор скорости можно определить из чисто геометрических соображений: $\upsilon_\eta = r\omega\zeta/L$, где r – расстояние точки от оси симметрии; ω – угловая скорость захвата машины; L – расчетная длина стержня.

Учитывая условие несжимаемости, легко определить компоненты скорости деформации $\dot{\varepsilon}_\xi = \dot{\varepsilon}_\eta = \dot{\varepsilon}_\zeta = \dot{\gamma}_{\xi\eta} = \dot{\gamma}_{\xi\zeta} = 0$; $\dot{\gamma}_{\eta\zeta} = r\omega / L$ и интенсивность скорости деформации:

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{r\omega}{2L} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{r\omega}{L}.$$

Степень деформации определится в результате интегрирования равенства

$$\frac{de_i}{dt} = \dot{\varepsilon}_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r\omega}{L}.$$

Так как угловая скорость есть производная угла закручивания по времени, то

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{L} \frac{d\varphi}{dt}$$

и, после интегрирования,

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r\omega}{L},$$

т.е. мы получили формулу, тождественно равную (3.42). Отметим, что она справедлива как для малых, так и для конечных деформаций.

Рассмотрим более общий случай односдвигового процесса деформации некоторой малой частицы деформируемого тела. Поскольку односдвиговые процессы характеризуются тем, что сдвиговые деформации происходят только в одной плоскости, а одна из координатных осей должна совпадать с главной осью скорости деформации, то плоскости максимальных сдвигов всегда будут параллельны координатным плоскостям.

Выберем систему координат таким образом, чтобы ось Oy совпадала с направлением второй главной оси тензора скорости деформации, а ось Ox – с направлением максимального касательного напряжения. Тогда компоненты напряженного состояния должны удовлетворять следующим условиям:

1) $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$ (так как ось Oy является главной осью тензора скорости деформации, следовательно, и главной осью тензора напряжений);

2) $\sigma_x - \sigma_z = 0$ и $\tau_{xz} = \tau_{\max}$ (так как ось Ox составляет равные углы с первой и третьей главными осями тензора напряжений).

Выражение для определения интенсивности напряжений в этом случае примет вид

$$\sigma_i = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 3\tau_{xz}^2}.$$

Компоненты тензора скорости деформации определяются равенствами

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}; \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x}\right);$$

$$\dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}; \quad \dot{\gamma}_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}\right); \qquad (3.43)$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}; \quad \dot{\gamma}_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}\right).$$

При односдвиговом процессе все материальные точки, расположенные на прямых, параллельных осям Ox и Oy, на любой стадии процесса остаются на этих прямых. Следовательно,

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} = \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} = 0. \qquad (3.44)$$

Условие пропорциональности компонентов девиатора тензора напряжений компонентам девиатора тензора скорости деформации в случае односдвигового характера протекания процесса деформации принимает вид

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial x} - \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y}} = \frac{0}{\dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial x} - \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial z}} = \frac{0}{\dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial y}} = \frac{0}{\dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial z}} = \frac{2\tau_{xz}}{\dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial z}}. \qquad (3.45)$$

Следовательно, $\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}$; $\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} = 0$. Привлекая условие несжимаемости

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = 0,$$

получаем возможность определить значения всех девяти частных производных составляющих вектора скорости по координатам через две из них, а именно через $\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}$. В результате получим

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}; \quad \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}; \quad \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} = 0; \qquad (3.46)$$

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}; \quad \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}.$$

Тензор скорости деформации:

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y} & 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial z} \\ 0 & \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial z} & 0 & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, выражения двух частных производных $\dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial z}$ полностью определяют кинематическую картину пластического формоизменения при односдвиговом процессе.

Определение напряжений по известным скоростям деформации возможно лишь при известной зависимости σ_i–ε_i. Установление этой зависимости связано с определенными трудностями теоретического и методического характера. В связи с этим определить поле напряжений по известному полю скоростей можно только при допущении постоянства интенсивности напряжений по всему объему очага деформации. Такое допущение, приемлемое при анализе процессов пластического формоизменения при высоких температурах, может быть принято без значительного огрубления результатов и при анализе некоторых процессов деформации в холодном состоянии, а именно таких, когда значительное (или предельное) упрочнение достигается во всем, или практически во всем, объеме очага деформации. В этих случаях значения компонентов девиатора напряжений определяются обычным путем, поскольку условие совпадения направлений главных осей и вида тензоров напряжений и скоростей деформаций сохраняется и при немонотонном процессе.

Принимая во внимание выражение тензора скорости деформации, формулы, определяющие значения компонентов девиатора напряжений, приводятся к виду

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x + p = -\frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}; \quad \tau_{xy} = 0;\\
&\sigma_y + p = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = 0; \qquad\qquad (3.47)\\
&\sigma_z + p = -\frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}; \quad \tau_{xy} = \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Интенсивность скорости деформации определяется выражением

$$
\dot{\varepsilon} = \sqrt{\left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}\right)^2}.
$$

При анализе процессов холодного деформирования, не связанных с достижением предельного упрочнения, т.е. в тех случаях, когда допущение постоянства интенсивности напряжений по всему объему очага деформации заведомо неприемлемо, задача определения напряженного состояния существенно усложняется. При односдвиговом процессе, как и вообще при немонотонном процессе, понятие о компонентах итоговой деформации становится неопределенным и единственной характеристикой деформированного состояния процесса служит степень деформации.

Зависимость степени деформации от основных геометрических параметров исследуемого процесса может быть установлена либо на основании энергетической теории упрочнения, когда имеет место зависимость (3.41), либо на основании анализа кинематики процесса, по формуле Ильюшина: $e_i = \int \dot{\varepsilon}_i dt$. В этом случае характеристиками НДС служат две величины: степень деформации e_i и интенсивность напряжений σ_i. Функциональная зависимость между ними устанавливается для односдвиговых процессов по результатам испытания материалов на кручение.

Задача исследования односдвигового процесса существенно упрощается при условии, когда составляющая скорости υ_y не зависит от y. Это условие требует постоянства значений составляющей вектора скорости перемещений υ_y или равенства ее нулю, что наряду с условием $\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} = \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} = \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} = 0$ означает, что плоскость xy либо жестко перемещается в пространстве, либо неподвижна. В обоих случаях в ней отсутствуют какие-либо деформации. Сдвиговые деформации происходят только в плоскости, параллельной плоскости xz. В этом случае тензор скорости деформации принимает вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Не равный нулю компонент девиатора напряжений

$$\tau_{xz} = \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\dot{\varepsilon}_i}\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}.$$

Интенсивность скорости деформации определяется как

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}.$$

Тогда

$$\tau_{xz} = \sigma_i / \sqrt{3}, \tag{3.48}$$

и тензор напряжений

$$\begin{vmatrix} -p & 0 & \sigma_i/\sqrt{3} \\ 0 & -p & 0 \\ \sigma_i/\sqrt{3} & 0 & -p \end{vmatrix}.$$

В случае, если за направление второй главной оси выбрать Ox, то направление максимального касательного напряжения совпадет с осью Oy. Плоскость xy будет жесткой, а сдвиги будут происходить только в плоскости yz. В этом случае тензор скорости деформации

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} & 0 \end{vmatrix}.$$

Остальные вышеприведенные равенства будут следующими:

$$\tau_{yz} = \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\dot{\varepsilon}_i}\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}; \quad \dot{\varepsilon}_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}.$$

Тензор напряжения

$$\begin{vmatrix} p & 0 & \sigma_i/\sqrt{3} \\ 0 & p & 0 \\ \sigma_i/\sqrt{3} & 0 & p \end{vmatrix}.$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние при плоском односдвиговом процессе характеризуется тремя величинами: υ_x или υ_y, σ_i и p.

Отметим особенности протекания односдвигового процесса при плоской деформации, когда материальные точки, составляющие первоначально отрезки прямых, параллельные осям Ox и Oy, в течение всего процесса остаются на этих прямых, которые, в свою очередь, остаются параллельными тем же осям.

Эти особенности процесса позволяют задать функцию v_x таким образом, чтобы ее зависимость от t и z была линейной. В этом случае процесс характеризуется смещением плоскости, параллельной плоскости xy в направлении x, т.е. односдвиговый процесс происходит в плоскости xz. Составляющие вектора скорости перемещений: $\upsilon_y = v_z = 0$. Степень деформации будет прямо пропорциональна углу сдвига, который претерпевает материальный элемент. Функциональную зависимость между углом сдвига γ и интенсивностью напряженного состояния σ_i определяют при испытании металлов на кручение. Следовательно, НДС при плоском односдвиговом процессе характеризуется тремя величинами: γ, σ_i и p, постоянным по всему объему очага деформации.

Анализ односдвигового процесса существенно упрощается в случае плоской задачи и сводится к определению γ, по которому на основании экспериментальной зависимости σ_i–γ, получаемой в результате испытания на кручение, определяется σ_i. Таким образом, основные параметры напряженного состояния при односдвиговом процессе определяются характеристиками: p; $\sigma_i = \sqrt{3}\tau_{xz}$; $\cos 3\beta_\sigma = 0$; $\beta_\sigma = 30\,°$; главными компонентами напряжений:

$$\sigma_1 = \tau_{xz} - p; \quad \sigma_2 = -p; \quad \sigma_3 = -\tau_{xz} - p. \tag{3.49}$$

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial(-p)}{\partial z}=\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}; \quad \frac{\partial(-p)}{\partial x}=\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}; \quad \frac{\partial(-p)}{\partial y}=0,$$

т.е. значение p зависит только от граничных условий, так как τ_{xz} зависит от γ, а он постоянен во всем объеме очага деформации.

Итак, если очаг деформации при односдвиговом процессе на исследуемой стадии простирается до свободной поверхности деформируемого тела, то гидростатическое давление отсутствует и тензор напряжений характеризуется единственной величиной $\tau_{xz}=\sigma_i/\sqrt{3}$ и может быть представлен матрицей

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \sigma_i/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_i/\sqrt{3} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, односдвиговый процесс в условиях плоской деформации при отсутствии p характеризуется плоским напряженным состоянием, которое называют, как известно, чистым сдвигом. Следовательно, чистый сдвиг является частным случаем односдвигового немонотонного процесса.

Рассмотрим односдвиговые процессы в условиях осесимметричной задачи. Прежде всего отметим, что, в силу осевой симметрии, без нарушения ее, односдвиговый процесс в меридиональных плоскостях невозможен. Таким образом, односдвиговый процесс в условиях осевой симметрии может проходить в двух плоскостях.

В первом случае он проходит в меридиональной плоскости, когда направление максимальных сдвигов совпадает с осью симметрии. Концентричные цилиндрические поверхности будут смещаться относительно друг друга в направлении оси симметрии. В реологии такая деформация называется телескопической. Неисчезающими компонентами тензоров деформации и напряжения будут γ_{zr} и τ_{zr}.

Второй возможный случай реализации односдвигового процесса – смещение плоскостей поперечного сечения относительно друг друга. Сдвиговые деформации и напряжения возникают на цилиндрических поверхностях и действуют по касательной и в направлении оси симметрии: $\gamma_{z\varphi}$ и $\tau_{z\varphi}$.

Первый случай реализуется в процессах вырубки осесимметричных деталей, второй – при кручении цилиндрических стержней. Особенности этих процессов хорошо иллюстрирует рис. 3.2.

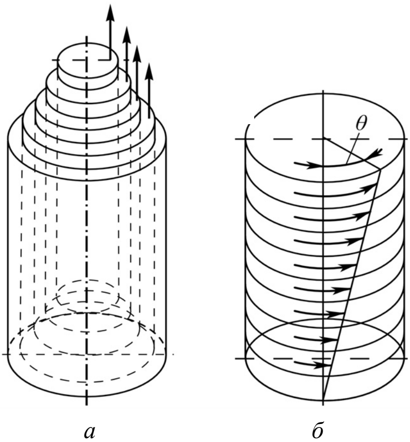


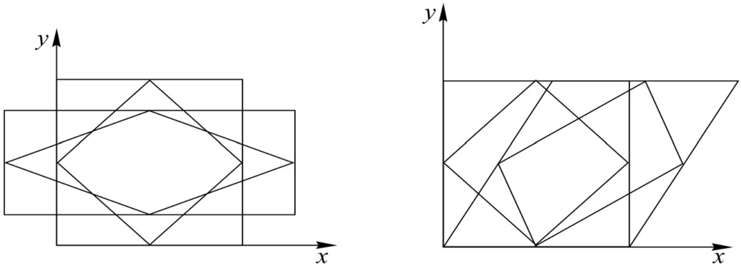
Рис. 3.2. Односдвиговый процесс в условиях осевой симметрии: *а* – в меридиональной плоскости (телескопическая деформация); *б* – смещение плоскостей поперечного сечения (кручение)

В научной и учебной литературе, в отличие от принятой нами терминологии, наблюдается разночтение. Так, Рейнер [3.1] называет деформацию при кручении простым сдвигом, а в плоских задачах – чистым сдвигом. Малинин [3.2] характеризует чистый сдвиг условием $\varepsilon_2 = 0$ и т.д. Ильюшин [3.3] и Качанов [3.4] описывают схемы напряженного состояния в принятой нами трактовке. Сторожев и Попов [3.5] не делают различий в плоской деформации, объединяя обе схемы общим термином «сдвиг».

Отметим, что как при монотонных, так и при немонотонных (односдвиговых) процессах могут быть реализованы обе схемы – чистого и простого сдвигов. Поэтому важно на практике уметь различать случаи монотонного и немонотонного сдвигов в связи с тем, что связь между деформациями и напряжениями при монотонных и немонотонных (односдвиговых) процессах различна.

Нетрудно определить по виду деформированных элементарных ячеек, к какой категории относится процесс, если характерные его параметры (главные оси деформации, направления наибольших сдвигов) совпадают с направлениями координатных осей. Так, если одна из координатных осей при немонотонном процессе совпадает с направлением максимальных касательных напряжений, то он будет характеризоваться неизменным расстоянием между сторонами элементарной ячейки, параллельными оси в течение всего процесса. В этом и состоит отличительный признак односдвигового процесса.

Монотонный сдвиг легко определяется в случаях, если стороны элементарной ячейки совпадают с направлениями главных осей деформации либо составляют с ними углы в 45°. В этих случаях формой элементарной ячейки будет либо прямоугольный параллелепипед, либо ромб (рис. 3.3).

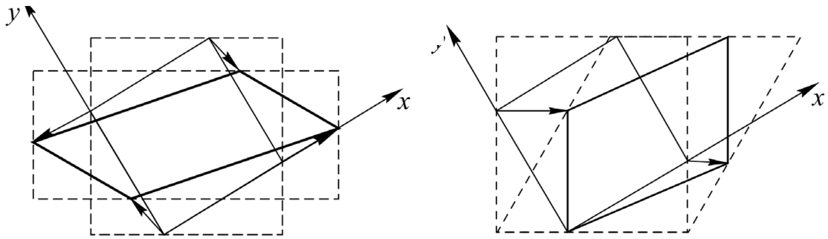


а *б*

Рис. 3.3. Деформация элементарных ячеек при монотонном (*а*) и немонотонном (*б*) сдвигах, когда стороны ячеек совпадают с осями координат

В общем случае, когда оси принятой системы координат не совпадают с указанными направлениями, квадратные элементарные ячейки при монотонном и немонотонном сдвиговых процессах преобразуются в параллелограммы (рис. 3.4). Тогда отличительными признаками монотонного и немонотонного процессов служат траектории движения узловых точек. При монотонном сдвиге точки движутся по расходящимся линиям, при немонотонном – по параллельным прямым.

Таким образом, определить категорию процесса можно по разности текущих и начальных координат расчетных точек; при немонотонном процессе эта разность для всех точек будет одинакова, при монотонном нет. Различать эти процессы на первых этапах исследования необходимо не только потому, что функциональная связь между напряжениями и деформациями различна, но и потому, что при односдвиговом процессе деформации определяются единственной характеристикой – углом сдвига γ. Поэтому если процесс заранее характеризуется как односдвиговый, то достаточно определить только γ. Напряжения при известной зависимости σ_i–e_i определяются формулами (3.48) и (3.49).



а *б*

Рис. 3.4. Деформация элементарных ячеек при монотонном (*а*) и немонотонном (*б*) сдвигах, когда стороны ячеек не совпадают с осями координат

Телескопическая деформация. За центр системы координат выберем произвольную точку O на оси стержня. Ось $O\eta$ направлена по оси стержня, оси $O\xi$ и $O\zeta$ выбраны произвольным образом перпендикулярно друг другу в поперечном сечении стержня, но так, что они образуют правую систему координат.

В случае телескопической деформации текущие координаты η, ξ , ζ произвольной точки M, очевидно, зависят только от времени t и расстояния $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ до оси стержня, причем координаты ξ и ζ постоянны, а координата η изменяется: $\xi = x$, $\zeta = y$, $\eta = z + \varphi(R + t)$. Здесь x,y,z – начальные координаты точки M, а $\varphi(R,t)$ – указанная неизвестная однозначная функциональная зависимость координаты η от R и t. Будем предполагать функцию $\varphi(R,t)$ непрерывной вместе с ее частными производными. Тогда составляющие вектора перемещения точки M задаются равенствами: $u_x = 0$, $u_y = 0$, $u_z = \varphi(R,t)$.

Для компонентов малой деформации любой данной частицы стержня получаем

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}=0,\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}=0,$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}=0,\quad \gamma_{xz}=\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}=\varphi'_R(R,t)\cdot\frac{x}{R},\tag{3.50}$$

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}=0,\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}=\varphi'_R(R,t)\cdot\frac{y}{R}.$$

Тогда тензор малых деформаций

$$T_\varepsilon=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi'_R(R,t)\cdot\dfrac{x}{2R} \\ 0 & 0 & \varphi'_R(R,t)\cdot\dfrac{y}{2R} \\ \varphi'_R(R,t)\cdot\dfrac{x}{2R} & \varphi'_R(R,t)\cdot\dfrac{y}{2R} & 0 \end{pmatrix}.\tag{3.51}$$

Главные компоненты малой деформации:

$$\varepsilon_1=\frac{|\varphi'_R(R,t)|}{2},\quad \varepsilon_2=0,\quad \varepsilon_3=-\frac{|\varphi'_R(R,t)|}{2}.$$

Расположение же главных осей малой деформации зависит от знака $\varphi'_R(R,t)$. А именно, если $\varphi'_R(R,t)>0$, то направления осей определяются векторами (x, y, R), ($-y$, x, 0), (x, y, $-R$), а если $\varphi'_R(R,t)<0$, то векторами (x, y, $-R$), ($-y$, x, 0), (x, y, $-R$). Значения параметра и угла вида деформации, очевидно, таковы: $\nu_\varepsilon=0$, $\beta_\varepsilon=30^\circ$.

Пусть $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ – проекции вектора скорости материальной точки M на координатные оси в данный текущий момент времени. Так как составляющие вектора скорости υ_x, υ_y, υ_z можно считать зависящими функционально от начальных координат x, y, z и от времени t, то, дифференцируя составляющие вектора перемещений u_x, u_y, u_z по времени, получаем $\upsilon_x=0$, $\upsilon_y=0$, $\upsilon_z=\varphi'(R,t)$.

Отсюда компоненты вектора скорости (т.е. скорости деформаций) определяются равенствами

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} = 0, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} = 0,$$

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} = 0, \quad \dot{\gamma}_{xz} = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} = \varphi''_{tR}(R,t) \cdot \frac{x}{R}, \qquad (3.52)$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = 0, \quad \dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} = \varphi''_{tR}(R,t) \cdot \frac{y}{R}.$$

Тогда тензор скоростей малых деформаций

$$T_{\dot{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi''_{tR}(R,t) \cdot \dfrac{x}{2R} \\ 0 & 0 & \varphi''_{tR}(R,t) \cdot \dfrac{y}{2R} \\ \varphi''_{tR}(R,t) \cdot \dfrac{x}{2R} & \varphi''_{tR}(R,t) \cdot \dfrac{y}{2R} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.53)$$

Главные компоненты скорости малой деформации:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\left|\varphi''_{tR}(R,t)\right|}{2}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = 0, \quad \dot{\varepsilon}_3 = -\frac{\left|\varphi''_{tR}(R,t)\right|}{2}.$$

Расположение же главных осей скоростей малой деформации теперь зависит от знака $\varphi''_{tR}(R,t)$. А именно, если $\varphi''_{tR}(R,t) > 0$, то направления осей определяются векторами (x, y, R), $(-y, x, 0)$, $(x, y, -R)$, а если $\varphi''_{tR}(R,t) < 0$, то векторами $(x, y, -R)$, $(-y, x, 0)$, (x, y, R). Легко убедиться, что $\nu = 0$, $\beta = 30°$.

Как известно, если изменения во времени упругих слагаемых деформации малы по сравнению с соответствующими изменениями пластических слагаемых, то относительное изменение объема пластически деформируемой частицы также пренебрежимо мало по сравнению с относительными изменениями ее линейных размеров и сумму главных компонентов скорости деформации в пределах практической точности можно полагать равной нулю.

Для рассматриваемого случая деформации условие несжимаемости выполняется автоматически:

$$\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = \frac{\left|\varphi''_{tR}(R,t)\right|}{2} + 0 - \frac{\left|\varphi''_{tR}(R,t)\right|}{2} = 0. \qquad (3.54)$$

Для пластического деформирования, представляющего собой необратимый физический процесс, функциональную связь напряжений и деформаций можно установить только при некоторых ограничениях условий его протекания.

В случае простой деформации можно использовать соотношения деформационной теории пластичности, однако для описания произвольных процессов сложной деформации применяются допущения и соотношения теории пластического течения. Как известно, в этой теории предполагается, что направление действия алгебраически наибольшего главного напряжения всегда совпадает с направлением наиболее быстрого удлинения материального волокна, а направление алгебраически наименьшего главного напряжения – с направлением наиболее быстрого укорочения. Вторым допущением теории пластического течения является допущение о пропорциональности девиаторов напряжений с скоростей деформаций:

$$\frac{\sigma_{xx}-\sigma}{\dot{\varepsilon}_{xx}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i},\quad \frac{\sigma_{yy}-\sigma}{\dot{\varepsilon}_{yy}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i},\quad \frac{\sigma_{zz}-\sigma}{\dot{\varepsilon}_{zz}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i},$$
$$\frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy}}=\frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i},\quad \frac{\tau_{xz}}{\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xz}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i},\quad \frac{\tau_{yz}}{\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \qquad (3.55)$$

(здесь σ – среднее напряжение, σ_i – интенсивность напряженного состояния, $\dot{\varepsilon}_i$ – интенсивность скоростей деформации).

Учитывая вычисленные ранее значения компонентов для телескопической деформации, запишем:

$$\sigma_{xx}=\sigma+\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{xx}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}=\sigma,\ \sigma_{yy}=\sigma+\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{yy}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}=\sigma,\ \ \sigma_{zz}=\sigma+\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{zz}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}=\sigma,$$
$$\tau_{xy}=\frac{1}{3}\dot{\gamma}_{xy}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}=0,\ \tau_{xz}=\frac{1}{3}\dot{\gamma}_{xz}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}=\frac{1}{3}\varphi''_{tR}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\cdot\frac{x}{R}, \qquad (3.56)$$
$$\tau_{yz}=\frac{1}{3}\dot{\gamma}_{yz}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}=\frac{1}{3}\varphi''_{tR}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\cdot\frac{y}{R}.$$

Тогда тензор напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & \frac{1}{3}\varphi''_{tR}(R,t)\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\cdot\frac{x}{2R} \\ 0 & \sigma & \frac{1}{3}\varphi''_{tR}(R,t)\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\cdot\frac{y}{2R} \\ \frac{1}{3}\varphi''_{tR}(R,t)\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\cdot\frac{x}{2R} & \frac{1}{3}\varphi''_{tR}(R,t)\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\cdot\frac{y}{2R} & \sigma \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Главные компоненты напряженного состояния:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma + \frac{1}{3}\left|\varphi''_{tR}(R,t)\right|\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \\ \sigma_2 &= 0, \\ \sigma_3 &= \sigma - \frac{1}{3}\left|\varphi''_{tR}(R,t)\right|\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Из принятых допущений теории пластического течения следует, что оси главных напряжений те же, что и для скоростей деформации, т.е. определяются знаком $\varphi''_{tR}(R,t)$. Очевидно, $\nu_\sigma = 0$, $\beta = 30°$. Таким образом для телескопической деформации всегда выполняется условие постоянства вида деформированного состояния: $\nu_\varepsilon = \nu = \nu_\sigma = 0$.

Телескопическая деформация всегда является частным случаем односдвигового процесса. Если $\varphi''_{tR}(R,t)\ \varphi'_R(R,t) > 0$, то при допущениях теории пластического течения главные оси малых деформаций, скоростей деформации и напряжений совпадают, т.е. телескопическая деформация является монотонной.

3.4. Однонаправленные процессы

Анализ однонаправленных процессов. Однонаправленные процессы характеризуются выполнением первого и нарушением второго условия монотонности. Таким образом, вид деформированного состояния остается постоянным ($\nu_\varepsilon = \text{const}$), а направления главных осей скорости деформации меняются в лагранжевом пространстве.

Примером однонаправленных процессов является НДС поверхностного слоя сжимаемых цилиндров. Как известно, при сжатии цилиндров круглого сечения плоскопараллельными бойками в ряде случаев наблюдается появление трещин на боковой бочкообразной поверхности обжатого цилиндра (рис. 3.5). Опыт показывает, что трещины при обжатии в холодном состоянии чаще всего возникают на цилиндрах, отрезаемых от прутковой калиброванной стали без предварительной обработки цилиндрической поверхности снятием стружки. Если испытуемый на обжатие цилиндр вырезается из сплошного куска, например, малоуглеродистой мягкой стали, которая при испытании на растяжение дает относительно большое поперечное сужение в шейке, то трещин обычно не наблюдается вовсе, во всяком случае, они появляются при весьма больших степенях обжатия.

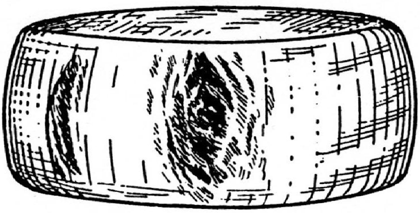


Рис. 3.5. Обжатый цилиндр со следами разрушения
на бочкообразной боковой поверхности

Оценка способности, в особенности пруткового металла, различных марок претерпевать деформацию обжатия или высадки, не выявляя при этом признаков разрушения (поверхностного растрескивания), имеет большое практическое значение в современной производственной практике. Поэтому экспериментальному изучению условий возникновения трещин на поверхности цилиндров круглого сечения при сжатии их плоскопараллельными бойками посвящен ряд специальных научных исследований.

Во-первых, учитывая неравномерность напряженного состояния круглого цилиндра при сжатии, обусловленную наличием сил контактного трения на торцевых срезах, необходимо было определить напряженное состояние металла в непосредственной близости от свободной (от внешней нагрузки) образующей поверхности цилиндра. Как известно, эта поверхность в процессе деформации обжатия преобразуется в криволинейную выпуклую поверхность – поверхность «бочки» (см. рис. 3.5).

С целью определить напряженное состояние поверхностного слоя бочки производилось экспериментальное изучение его деформации. На поверхность цилиндрического образца, предварительно тщательно обработанную, в средней по высоте части наносилась типографским способом прямоугольная сетка (приближенно квадратная). Линии сетки располагались параллельно и перпендикулярно прямолинейным образующим цилиндра. Размеры отдельных ячеек сетки тщательно измерялись до деформации и в нескольких стадиях процесса обжатия испытуемого цилиндра. Измерения производились инструментальным микроскопом. Обозначим a_0 – исходный размер (рис. 3.6) ячейки сетки в направлении, перпендикулярном прямолинейной образующей цилиндрической поверхности, т.е. вдоль касательной к поперечному сечению цилиндра. Это направление совпадает с направлением первой главной оси скорости деформации поверхностного слоя, т.е. с направлением наиболее быстрого удлинения материальных волокон.

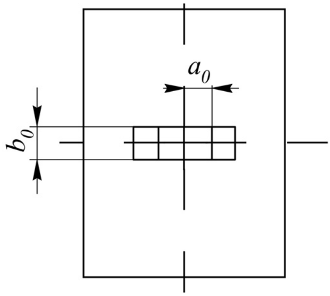


Рис. 3.6. Ячейки сетки, нанесенной на поверхность цилиндрического образца, подлежащего испытанию на обжатие

Обозначим далее b_0 исходный размер той же ячейки сетки в направлении прямолинейной образующей цилиндра, совпадающем с третьей главной осью скорости деформации, т.е. с направлением наиболее быстрого укорочения волокна. Пусть a и b – размеры той же ячейки сетки в рассматриваемой стадии процесса обжатия цилиндра. Два главных компонента итоговой деформации определятся равенствами

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 = \ln\frac{a}{a_0} > 0 \quad (\text{так как удлиняется размер } a), \\ &\varepsilon_3 = \ln\frac{b}{b_0} < 0 \quad (\text{так как удлиняется размер } b). \end{aligned} \qquad (3.59)$$

Второй главный компонент итоговой деформации определится условием постоянства объема рассматриваемой материальной частицы:

$$\varepsilon_2 = \ln\frac{a_0}{a} + \ln\frac{b_0}{b}. \tag{3.60}$$

Выясним, можно ли в рассматриваемом случае обжатия круглых цилиндров считать деформацию поверхностного слоя монотонной.

Первое условие монотонности удовлетворено: главные оси скорости деформации неизменно, во всех стадиях процесса обжатия цилиндра совпадают с одними и теми же материальными волокнами. Первая главная ось скорости деформации поверхностного слоя совпадает с нормалью к меридиональному сечению, вторая главная ось – с нормалью к свободной поверхности и третья – с направлением касательной к линии пересечения свободной поверхности с меридиональным сечением.

Главные компоненты скорости деформации определяются (в том случае, когда удовлетворено первое условие монотонности) равенствами

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{d\varepsilon_1}{dt}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{d\varepsilon_2}{dt}, \quad \dot{\varepsilon}_3 = \frac{d\varepsilon_3}{dt}. \tag{3.61}$$

Для того чтобы было также удовлетворено и второе условие монотонности, как известно, необходимо и достаточно, чтобы отношение

$$v = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3} \tag{3.62}$$

неизменно сохраняло одно и то же значение.

Возникает вопрос, удовлетворяется ли второе условие монотонности деформации поверхностного слоя круглого цилиндра при обжатии его плоскопараллельными бойками? Этот вопрос требует экспериментального выяснения.

Прежде всего заметим, что из элементарных геометрических соображений следует $\dfrac{a}{a_0} = \dfrac{d}{d_0}$, где d – диаметр испытуемого цилиндрического образца в рассматриваемом сечении и в рассматриваемой стадии его обжатия; d_0 – его исходный диаметр. Введем обозначения:

$$\eta = \lg\frac{d}{d_0} > 0 \quad (\text{так как } d > d_0),$$

$$\xi = \lg\frac{b_0}{b} > 0 \quad (\text{ так как } \; b_0 > b). \tag{3.63}$$

При этих обозначениях главные компоненты итоговой деформации определятся равенствами

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{M}\eta, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{M}\xi - \frac{1}{M}\eta, \quad \varepsilon_3 = -\frac{1}{M}\xi, \tag{3.64}$$

где M – модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным. Выражения (3.61) при этом примут вид

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{M}\frac{d\eta}{dt}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{M}\frac{d\xi}{dt} - \frac{1}{M}\frac{d\eta}{dt}, \quad \dot{\varepsilon}_3 = -\frac{1}{M}\frac{d\xi}{dt}. \tag{3.65}$$

Подставляя их в правую часть (3.62), после очевидных сокращений получаем

$$v = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{3\dfrac{d\xi}{dt} - 3\dfrac{d\eta}{dt}}{\dfrac{d\eta}{dt} + \dfrac{d\xi}{dt}} = 3\frac{\dfrac{d\xi}{d\eta} - 1}{\dfrac{d\xi}{d\eta} + 1}, \tag{3.66}$$

откуда

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{v + 3}{3 - v}. \tag{3.67}$$

Второе условие монотонности, т.е. условие неизменности значения отношения ν – характеристики вида напряженного состояния поверхностного слоя – свелось бы к условию постоянства (во всех стадиях процесса обжатия испытуемого цилиндра) производной $\dfrac{d\zeta}{d\eta}$. Величины η и ξ могут быть вычислены по данным измерения в различных стадиях процесса деформации размеров ячеек сетки и диаметра по бочке испытуемого цилиндра. Следовательно, всегда можно построить диаграмму экспериментальной зависимости ξ от η. В начальной стадии процесса η = 0 и ξ = 0.

Если бы условия протекания деформации поверхностного слоя удовлетворяли условиям монотонности, то зависимость ξ от η изобразилась бы прямой линией ($\frac{d\zeta}{d\eta}$ – постоянно), проходящей через начало координат. Это имеет место приближенно только при малых степенях обжатия (при малых η). При большой степени обжатия зависимость ξ–η изображается на диаграмме кривой линией. Значение производной при малых деформациях, равное 2 (простое сжатие), постепенно убывает по мере увеличения η. Однако при любом конечном значении η $\frac{d\zeta}{d\eta} > \frac{1}{2}$. Эти условия удовлетворены, если принять

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{m^2}{\eta^2 + m^2}, \tag{3.68}$$

где m – произвольная константа.

Интегрируя (3.68), получаем функциональную зависимость ξ от η, заданную в параметрическом виде:

$$\eta = m\mathrm{tg}\psi, \quad \xi = \frac{m}{2}(\mathrm{tg}\psi + 3\psi), \tag{3.69}$$

откуда

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{\psi}{\mathrm{tg}\psi}, \quad \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\psi. \tag{3.70}$$

Экспериментально было доказано, что равенства (3.69) практически точно аппроксимируют получаемую по данным измерений зависимость ξ–η (рис. 3.7).

Как следствие (3.69) получаем равенства (3.70). Заметим, что (3.69) содержат неизвестную константу m, тогда как в (3.70) совершенно не входят неизвестные константы и они дают вполне определенную, единую для всех случаев анализа НДС поверхностного слоя бочки при обжатии, зависимость, связывающую между собой величины $\frac{\xi}{\eta}$ и $\frac{d\xi}{d\eta}$, заданную в параметрическом виде. Этой зависимостью, т.е. равенствами (3.70), можно воспользоваться для составления специальной таблицы, при помощи которой определяется значение производной $\frac{d\xi}{d\eta}$, характеризующее вид напряженного состояния поверхностного слоя бочки (3.67), если известно (по данным измерений) значение отношения

$$\frac{\xi}{\eta} = \lg\frac{b_0}{b} : \lg\frac{d}{d_0}. \tag{3.71}$$

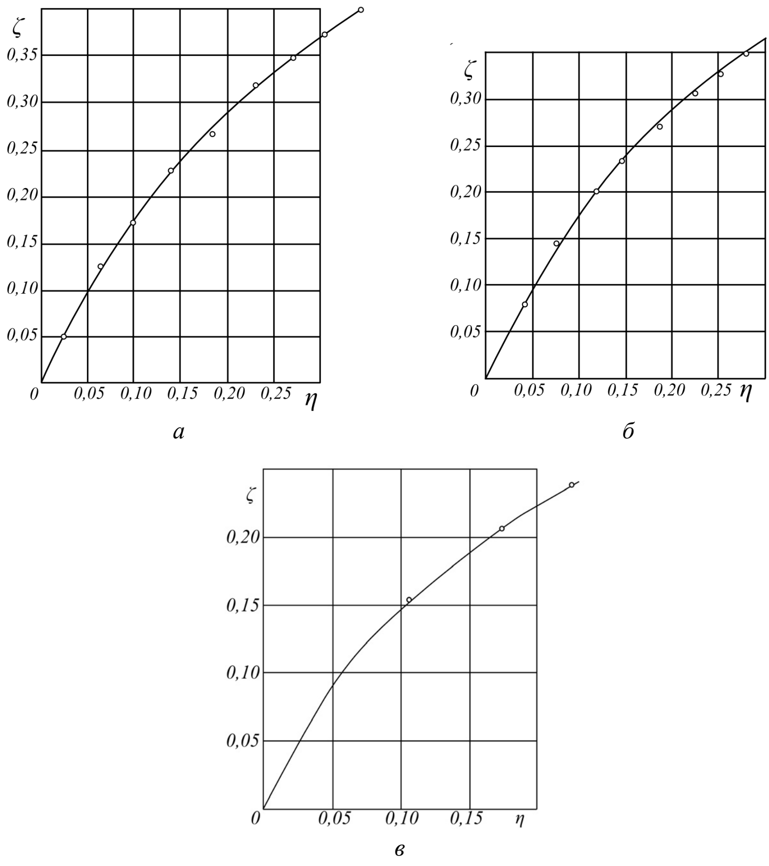


Рис. 3.7. Кривая зависимости ζ–η, аппроксимированная равенствами (3.69). Кружками обозначены данные непосредственных замеров: $m = 0{,}123$, $h_0 = 2d_0$, материал – сталь ЭЖ-1 (*а*); $m = 0{,}1187$, $h_0 = 2d_0$, материал – сталь ОХВ (*б*); $m = 0{,}0652$, $h_0 = 1{,}6d_0$, материал – сталь 35Х (*в*)

Однако в такую таблицу нужно включить еще некоторые данные. Во-первых, необходимо, чтобы той же таблицей можно было воспользоваться для определения степени деформации.

Известно, что степень деформации, как монотонной, так и немонотонной, можно было бы вычислить по формуле $\varepsilon_i = \int \dot{\varepsilon}_i dt$, $\dot{\varepsilon} = \sqrt{\dot{\varepsilon}_1^2 + \frac{1}{3}(\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3)^2}$.

Принимая во внимание равенства (3.65), запишем:

$$e_i = \frac{1}{M}\int_0^\eta \sqrt{1+\frac{1}{3}\left(2\frac{d\xi}{d\eta}-1\right)^2}\,d\eta. \tag{3.72}$$

Подставив (3.69) и (3.70), приведем (3.72) к виду

$$e_i = \frac{m}{M}\int_0^\psi \sqrt{(\cos\psi)^{-4}+3}\,d\psi. \tag{3.73}$$

Исключив неизвестную константу *m* из (3.73) и (3.69), получим

$$\frac{e_i}{\eta} = \frac{\mathrm{ctg}\psi}{M}\int_0^\psi \sqrt{(\cos\psi)^{-4}+3}\,d\psi. \tag{3.74}$$

При определении напряженного состояния поверхностного слоя при обжатии замечаем, что напряжения на свободной поверхности равны нулю ($\sigma_2 = 0$).

Принимая во внимание известные формулы теории пластического течения: $\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\dot{\varepsilon}_i}(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2)$, $\sigma_2 - \sigma_3 = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\dot{\varepsilon}_i}(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3)$ и подставляя (3.65), получаем, с учетом (3.70),

$$\begin{gathered}\sigma_1 = \sigma_\theta = \frac{\sin^2\psi}{\sqrt{1+3\cos^4\psi}}\sigma_i, -\sigma_3 = \rho_z = \frac{2\cos^2\psi}{\sqrt{1+3\cos^4\psi}}\sigma_i, \\ \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i} = \frac{1-3\cos^2\psi}{\sqrt{1+3\cos^4\psi}}.\end{gathered} \tag{3.75}$$

Используя формулы (3.70), (3.74) и (3.75), можно составить вспомогательную таблицу (табл. 3.1), пользуясь которой, с практически приемлемой точностью определить напряженное состояние поверхностного слоя цилиндрического образца при обжатии его плоскопараллельными бойками по данным измерений размеров искаженной деформацией сетки в интересующей нас стадии процесса обжатия. При этом не потребуются, несмотря на немонотонность деформации, ни кропотливые измерения в промежуточных стадиях, ни весьма затруднительные (и сомнительные в смысле реально достижимой точности) вычисления, связанные с численным дифференцированием экспериментальных зависимостей.

Таблица 3.1

Вспомогательная таблица для определения степени деформации и вида напряженного состояния поверхностного слоя «бочки» при обжатии круглых цилиндров плоскопараллельными бойками

$\frac{\eta}{m}$	$\frac{\xi}{\eta}$	$\frac{d\xi}{d\eta}$	$\frac{e_i}{\eta}$	$\frac{\rho_z}{\sigma_i}$	$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_i}$	$\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i}$
0	2,000	2,000	4,605	1,000	0	- 1,000
0,1	1,997	1,985	4,588	0,997	0,005	- 0,992
0,2	1,981	1,942	4,555	0,990	0,021	- 0,969
0,3	1,957	1,876	4,503	0,977	0,045	- 0,932
0,4	1,927	1,793	4,439	0,960	0,077	- 0,883
0,5	1,891	1,700	4,362	0,937	0,117	- 0,820
0,6	1,851	1,603	4,273	0,908	0,163	- 0,745
0,7	1,808	1,507	4,181	0,876	0,215	- 0,661
0,8	1,765	1,415	4,089	0,839	0,268	- 0,571
0,9	1,721	1,329	3,998	0,799	0,323	- 0,476
1,0	1,678	1,250	3,910	0,756	0,378	- 0,378
1,1	1,636	1,179	3,826	0,712	0,431	- 0,281
1,2	1,596	1,115	3,746	0,668	0,481	- 0,187
1,3	1,557	1,058	3,672	0,625	0,529	- 0,096
1,4	1,519	1,007	3,602	0,582	0,571	- 0,011
1,5	1,483	0,9616	3,538	0,542	0,610	+0,068
1,6	1,449	0,9214	3,478	0,505	0,645	0,140
1,7	1,417	0,8856	3,422	0,470	0,679	0,209
1,8	1,386	0,8537	3,371	0,437	0,708	0,271
1,9	1,357	0,8254	3,324	0,406	0,733	0,327
2,0	1,330	0,8000	3,281	0,378	0,756	0,378
2,1	1,304	0,7773	3,241	0,351	0,776	0,425
2,2	1,279	0,7569	3,203	0,328	0,795	0,467
2,3	1,256	0,7384	3,168	0,306	0,811	0,505
2,4	1,234	0,7219	3,135	0,286	0,825	0,539
2,5	1,219	0,7069	3,104	0,268	0,838	0,570
2,6	1,195	0,6933	3,075	0,252	0,850	0,598
2,7	1,176	0,6809	3,048	0,236	0,860	0,624
2,8	1,158	0,6697	3,023	0,222	0,870	0,648
2,9	1,141	0,6594	3,000	0,209	0,879	0,670
3,0	1,125	0,6500	2,979	0,197	0,887	0,690
3,1	1,111	0,6414	2,959	0,186	0,894	0,708
3,2	1,095	0,6334	2,939	0,175	0,900	0,725
3,3	1,081	0,6262	2,920	0,166	0,906	0,740
3,4	1,067	0,6194	2,902	0,157	0,911	0,754

Расчет параметров однонаправленного процесса. В качестве примера рассмотрим случай использования табл. 3.1 в реальной производственной практике.

Некоторая партия прутковой стали 30 диаметром 10,60…10,65 мм давала повышенный процент выхода изделий в брак по трещинам при изготовлении из нее способом холодной высадки определенных деталей крепежа (болтов). Требовалось произвести механические испытания образцов этой стали с целью получить данные для суждения о том, в чем именно выражались дефекты, явившиеся, по-видимому, причиной резко повышенного брака изделий по трещинам.

Одним из видов намеченных испытаний было обжатие плоскопараллельными бойками цилиндрических образцов высотой $h_0 \approx 2d_0$ с доведением степени обжатия до того значения, при котором начинают появляться поверхностные трещины.

Десять образцов были подвергнуты испытанию на обжатие без всякой обработки наружной цилиндрической поверхности. Результаты измерения размеров образцов до испытания показали строгое постоянство диаметра данной марки калиброванной прутковой стали. Значения исходного диаметра всех образцов колебались в весьма узких пределах – 10,64…10,65 мм, высота каждого – около 21 мм ($\approx 2d_0$). Торцевые срезы были тщательно обработаны. При обжатии пяти из этих образцов применялась хорошая смазка срезов графитом. Однако два образца потеряли устойчивость при обжатии и заметно перекосились. Никаким измерениям эти последние образцы после испытания не подвергались. Остальные три образца были обжаты до появления на их поверхности мелких трещин. Диаметр этих образцов по бочке (в среднем по высоте сечений), соответствующий моменту появления мелких трещин, был тщательно измерен.

Приводим результаты этих измерений:

d_0   10,65   10,65   10,65;
$d_б$ 14,09 13,69 13,85;
$d_б/d_0$ . . . . 1,323 1,285 1,301.

Пять образцов той же серии были подвергнуты испытанию на обжатие без всякой смазки торцевых срезов. Испытание всех этих образцов было доведено до появления мелких трещин на поверхности бочки.

Измерение диаметра всех этих образцов в среднем по высоте сечений после испытания дало следующие результаты (средние значения из нескольких замеров):

d_0	10,638	10,642	16,646	10,64	10,64;
d_6	12,998	11,846	12,103	12,735	11,901;
d_6/d_0 . . .	1,222	1,112	1,138	1,197	1,119.

Таким образом, экспериментально было доказано, что на поверхности испытуемых на обжатие образцов данной партии прутковой стали в том случае, когда поверхность не подвергается никакой предварительной обработке, трещины начинают появляться уже при относительно небольших степенях обжатия, а именно: в случае обильной смазки торцов графитом – при $d_6/d_0 \approx 1{,}3$, в случае отсутствия смазки – при $d_6/d_0 \approx 1{,}2$ и меньше.

Чтобы определить степень деформации и вид напряженного состояния поверхностного слоя при обжатии цилиндрических образцов данной партии прутковой стали, были произведены испытания двух образцов с нанесением сетки в средней по высоте части поверхности.

Размер b ячеек сетки (т.е. размер ячейки в направлении, параллельном оси) и диаметр по бочке измерялись в различных стадиях обжатия. Цилиндрическая поверхность этих двух образцов подвергалась обработке снятием стружки. Снимался весьма тонкий слой (порядка 1/8 мм). При этом диаметр образца доводился до значения $d_0 \approx 10{,}4$ мм при высоте образцов $h_0 \approx 20{,}8$ мм.

Торцевые срезы обоих образцов были тщательно обработаны. При испытании одного из образцов применена смазка срезов графитом. Испытание второго образца проводилось без смазки.

Ниже приводим таблицы результатов измерений и вычисления величин $\eta = \lg \dfrac{d}{d_0}$ и $\xi = \lg \dfrac{b_0}{b}$. Образец обточен, сталь 30 прутковая, торцевые срезы смазаны графитом (табл. 3.2). Опытные точки, построенные по координатам η, ξ, показаны на диаграмме (рис. 3.8). Испытание без смазки (табл. 3.3). Аналогичные опытные точки показаны на рис. 3.9.

Проверим возможность аппроксимировать полученные экспериментальные зависимости ξ–η плавными кривыми при помощи вспомогательной табл. 3.1. С этой целью вычислим значения отношения ξ/η для последних опытных точек, предшествующих появлению явных трещин. Пользуясь табл. 3.1, находим соответствующие этим точкам отношения η/m и, зная η, вычисляем ξ/η.

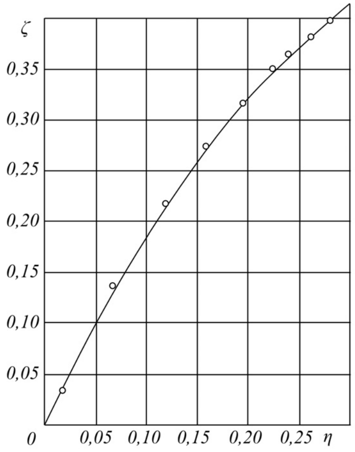


Рис. 3.8. Кривая зависимости ζ–η, аппроксимированная с помощью табл. 3.2. Кружками обозначены данные непосредственных замеров: m=0,1662, h_0=2d_0, материал – сталь 30, смазка графитом

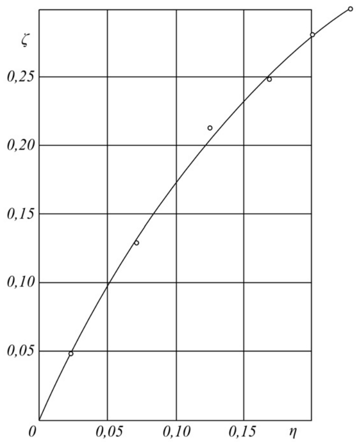


Рис. 3.9. Кривая зависимости ζ–η, аппроксимированная с помощью табл. 3.3. Кружками обозначены данные непосредственных замеров: m = 0,1126, h_0 = 2d_0, материал – сталь 30, без смазки

Таким образом, получаем по данным испытания двух образцов прутковой стали 30 Ø10,64 мм, доведенных обточкой до размеров $d_0 \approx 10{,}4$, $h_0 \approx 20{,}8$, данные, приведенные в табл. 3.4, где числа четвертой строки взяты из вспомогательной табл. 3.1.

Зная значение η в точке, соответствующей появлению трещины, вычислим η/m, найдем по таблице ξ/η и вычислим ξ (табл. 3.5).

Т а б л и ц а 3.2

Стадия обжатия	P, кН	h, мм	Средние значения из нескольких промеров		$\eta = \lg \dfrac{d}{d_0}$	$\xi = \lg \dfrac{b_0}{b}$
			d, мм	b, мм		
Исходная	0	20,8	d_0 = 10,363	b_0 =1,962	0	0
I	60	19,33	10,763	1,826	0,0164	0,0312
II	80	15,62	12,083	1,436	0,0667	0,1355
III	110	12,54	13,637	1,190	0,1192	0,2171
IV	140	10,46	14,923.	1,050	0,1584	0,2715
V	170	8,96	16,227	0,950	0,1947	0,3150
VI	200	7,75	17,360	0,882	0,2241	0,3472
VII	220	7,35	17,927	0,848	a, 2380	0,3643
VIII	250	6,55	18,947	0,810	0,2620	0,3842
IX	280	6,1	19,760	0,784	0,2803	0,3984
X *	295	5,6	20,413	—	0,2944	—

* Обнаружилась трещина

Т а б л и ц а 3.3

Стадия обжатия	P, кН	h, мм	Средние значения из нескольких промеров		$\eta = \lg\frac{d}{d_0}$	$\xi = \lg\frac{b_0}{b}$
			d, мм	b, мм		
Исходная	0	20,8	$d_0 \approx$ 10,390	b_0= 1,942	0	0
I	60	19,1	10,983	1,740	0,0241	0,0478
II	80	15,8	12,247	1,444	0,0714	0,1287
III	110	12,6	13,880	1,190	0,1258	0,2127
IV	140	10,4	15,350	1,096	0,1695	0,2485
V	170	8,9	16,543	1,016	0,2020	0,2814
VI	200	7,9	17,557	0,970	0,2278	0,3015
VII *	220	7,35	18,18	—	0,2430	-

* Явная трещина

Зная m, можно построить аппроксимированные кривые полученных нами экспериментальных зависимостей ξ–η.

При построении кривой для случая обжатия без смазки задаемся рядом табличных значений отношений m/η, ограниченных неравенством $\eta/m < 2{,}023$. Для случая обжатия со смазкой торца графитом табличные значения отношения η/m должны быть ограничены неравенством $\eta/m < 1{,}6875$. Из таблицы будем выписывать не только значения η/m, но и соответствующие им значения ξ/η.

Т а б л и ц а 3.4

Результаты обработки измерений

Получаемые параметры	Без смазки	Смазка графитом
η	0,2278	0,2803
ξ	0,3015	0,3984
ξ/η	1,324	1,421
η/m	2,023	1,6875
$\lg m$	1,0515	1,2205
m	0,1126	0,1662

Т а б л и ц а 3.5

Результаты обработки измерений

Получаемые параметры	Без смазки	Смазка графитом
η	0,2430	0,2944
η/m	2,158	1,772
ξ/η	1,289	1,395
ξ	0,3133	0,4107

П р и м е ч а н и е. Третья строка табл. 3.5 взята из вспомогательной табл. 3.1.

Координаты точек построения аппроксимированных кривых могут быть вычислены по весьма простым формулам:

$$\eta = \frac{\eta}{m} m, \quad \xi = \frac{\xi}{\eta} \eta.$$

Таким образом мы получим все точки за исключением двух последних, координаты которых получены ранее.

Результаты вычисления приведены в табл. 3.6.

Т а б л и ц а 3.6

Результаты вычисления координат точек построения аппроксимированных кривых ξ–η

Испытание без смазки $m = 0{,}1126,\ \lg m = \overline{1}{,}0515$				Испытание со смазкой графитом $m = 0{,}1662,\ \lg m = \overline{1}{,}2205$			
η/m	ξ/η	η	ξ	η/m	ξ/η	η	ξ
0	2,000	0	0	0	2,00	0	0
0,20	1,981	0,0225	0,0446	0,20	1,981	0,0332	0,0658
0,40	1,927	0,0450	0,868	0,40	1,927	0,0665	0,1281
0,60	1,851	0,676	0,1251	0,60	1,851	0,997	0,1845
0,80	1,765	0,0901	0,1590	0,80	1,765	0,1329	0,2346
1,00	1,678	0,1126	0,1889	1,00	1,678	0,1662	0,2788
1,20	1,596	0,1351	0,2156	1,20	1,596	0,1994	0,3182
1,40	1,519	0,1576	0,2394	1,40	1,519	0,2326	0,3532
1,60	1,449	0,1801	0,2610	1,50	1,483	0,2492	0,3612
1,80	1,386	0,2027	0,2809	1,60	1,449	0,2658	0,3852
1,90	1,357	0,2140	0,2903	1,6875	1,421	0,2803	0,3984
1,023	1,324	0,2278	0,3015	1,772	1,395	0,2944	0,4107
2,158	1,289	0,2430	0,3133	–	–	–	–

Аппроксимированные при помощи вспомогательной табл. 3.1 зависимости ξ–η изображены на рис. 3.8, 3.9 сплошными линиями. Рассмотрев диаграммы, мы убеждаемся в том, что эти кривые с практически приемлемой точностью аппроксимируют полученные нами экспериментальные зависимости.

Приведенные диаграммы соответствуют предельным случаям в отношении контактного трения на торцевых срезах при $h_0/d_0 \approx 2{,}0$:

а) полное отсутствие смазки (поверхности бойков и торцевые срезы образцов обезжирены; $m = 0{,}1126$);

б) обильная смазка торцевых срезов графитом ($m = 0{,}1662$).

Таким образом, мы можем воспользоваться вспомогательной табл. 3.1 для определения закономерности изменения в процессе обжатия образцов из стали 30 при $h_0/d_0 \approx 2{,}0$ (при любых вероятных условиях контактного трения на торцах) степени деформации поверхностного слоя в зоне сечения по бочке, а также отношения $\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i}$, характеризующего «жесткость» или «мягкость» схемы напряженного состояния этого поверхностного слоя.

Стадию обжатия будем определять значением отношения $d_б/d_0$ – диаметра обжимаемого цилиндра по бочке (т.е. в среднем по высоте сечении) к его исходному диаметру. Найдя по таблице логарифмов соответствующие значения $\eta = \lg\frac{d_б}{d_0}$, можно вычислить отношение η/m для двух (предельных) значений константы m, т.е. для m =0,1126 и m = 0,1662. По таблице находим и $\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i}$, затем вычисляем $e_i = \frac{e_i}{\eta}\eta$.

Результаты вычислений приведены в табл. 3.8.

Для точки, соответствующей появлению трещин, мы имели значения η и η/m (см. табл. 3.5). Для этой же точки получаем и другие параметры (табл. 3.7 и 3.8).

Т а б л и ц а 3.7

Значения e_i и $\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i}$

Получаемые параметры	Без смазки	Смазка графитом	Получаемые параметры	Без смазки	Смазка графитом
η	0,2430	0,2944	$\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i}$	0,450	0,254
η/m	2,158	1,772	e_i	0,782	0,996
e_i/η	3,219	3,385			

Т а б л и ц а 3.8

Значения степени деформации e_i и отношения $\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i}$ в различных стадиях обжатия цилиндрических образцов стали 30 при $h_0/d_0 \approx 2$

$\frac{d_б}{d_0}$	η	Без смазки m = 0,1126 $\lg m = \bar{1},0515$				Смазка графитом m = 0,1662 $\lg m = \bar{1},2205$			
		η/m	e_i/η	$\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i}$	e_i	η/m	e_i/η	$\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i}$	e_i
1,1	0,0414	0,368	4,459	–0,899	0,185	0,249	4,530	–0,951	0,188
1,2	0,0792	0,703	4,178	–0,658	0,331	0,477	4,380	–0,835	0,347
1,3	0,1139	1,012	3,900	–0,366	0,455	0,685	4,195	–0,679	0,478
1,4	0,1461	1,298	3,673	–0,098	0,537	0,879	4,017	–0,496	0,587
1,5	0,1761	1,564	3,500	+ 0,114	0,616	1,060	3,859	–0,320	0,680
1,6	0,2041	1,812	3,365	+0,278	0,687	1,228	3,725	–0,161	0,760
1,7	0,2304	2,046	3,263	+ 0,400	0,748	1,386	3,612	–0,023	0,832
1,8	0,2553	2,267	3,180	+0,492	0,812	1,536	3,516	+ 0,094	0,897
1,9	0,2788	2,476	3,111	+0,563	0,867	1,678	3,434	+ 0,194	0,957
2,0	0,3010	2,674	3,055	+0,617	0,920	1,812	3,365	+ 0,278	1,013
2,1	0,3222	2,862	3,009	+0,662	0,970	1,940	3,307	+ 0,347	1,066
2,2	0,3424	3,041	2,971	+0,697	1,017	2,061	3,257	0,407	1,115
2,3	0,3617	3,212	2,937	+0,727	1,062	2,177	3,212	0,458	1,161
2,4	0,3802	3,384	2,905	+0,752	1,104	2,289	3,172	0,501	1,206

На рис. 3.10 изображены кривые изменения степени деформации e_i и значений отношения $\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i}$ в поверхностном слое в процессе обжатия цилиндрических образцов стали 30 высотой $h_0 \approx 2d_0$. По оси ординат отложены значения степени деформации e_i, а по оси абсцисс – значения отношения, характеризующего жесткость или мягкость схемы напряженного состояния поверхностного слоя. Цифры в кружках показывают значения отношения $d_б/d_0$ – диаметра $d_б$ обжимаемого цилиндра (в среднем по высоте сечения) к исходному диаметру d_0 испытуемого образца.

Точкам, отмеченным косым крестом в кружочках, соответствуют условия, при которых фактически появились трещины на поверхности бочки при испытании на обжатие образцов прутковой стали 30 Ø10,64, доведенных обточкой до размеров $d_0 \approx 10,4$ мм, $h_0 \approx 20,8$ мм.

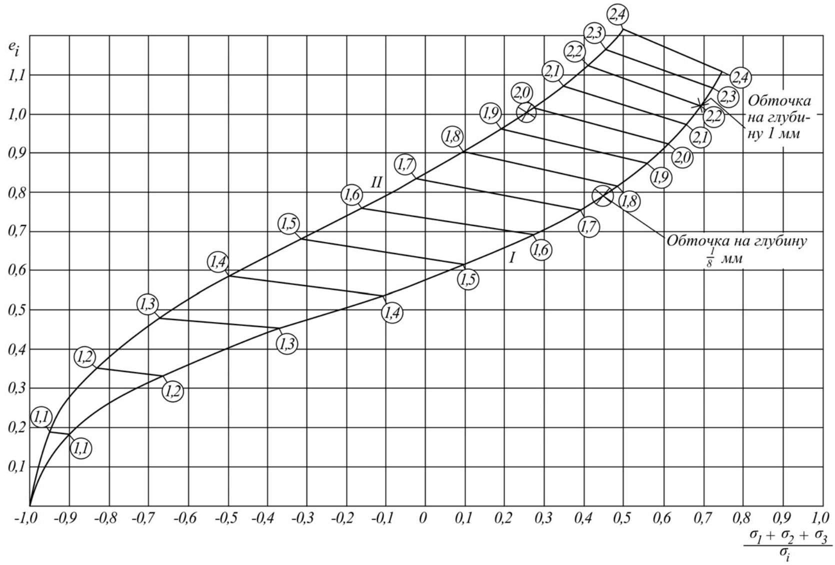


Рис. 3.10. Кривые изменения степени деформации e_i и отношения $\dfrac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i}$ в поверхностном слое в процессе обжатия цилиндрических образцов. Материал – сталь 30; *I* – кривая для случая без смазки; *II* – кривая для случая смазки графитом

Мы убеждаемся, что на поверхности этих образцов трещины возникли не только при значительно большей степени деформации, чем на поверхности необточенных образцов, но и при значительно более жесткой схеме напряженного состояния. Так, при обжатии без смазки необточенных образцов трещины возникали при отношении $d_б/d_0$ порядка 1,2, что (согласно диаграмме) соответствовало степени деформации поверхностного слоя $e_i \approx 0{,}33$ (33%) и значению $\dfrac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i} \approx -\ 0{,}65$, т.е. относительно мягкой схеме напряженного состояния. При обжатии образца из той же прутковой стали, также без смазки, но после удаления снятием стружки весьма тонкого (1/8 мм) поверхностного слоя, трещины возникли при значении $d_б/d_0$ =1,75. При этом степень деформации поверхностного слоя $e_i \approx 0{,}78$ (78%), а отношение $\dfrac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i}$ равнялось примерно 0,45, т.е. это соответствовало относительно жесткой схеме напряженного состояния.

Для того чтобы проверить влияние обточки образцов прутковой стали 30 на способность подвергаться обжатию без образования поверхностных трещин, был поставлен ряд дополнительных опытов. Испытанию на обжатие подвергались образцы, доведенные обточкой до размеров: $d_0 \approx 8{,}5$ мм, $h_0 \approx 17$мм. На поверхности этих образцов в средней по высоте части наносилась сетка, однако в промежуточных стадиях обжатия она не измерялась .

Процесс обжатия прерывался, как только обнаруживалось появление трещин на поверхности бочки испытуемых образцов. После этого измерялись значения диаметра $d_б$ в среднем по высоте сечении и размер b ячейки сетки в осевом направлении.

Из пяти испытаний без смазки торцов только три раза удалось вовремя прервать процесс обжатия. Два образца успели заметно деформироваться уже после образования трещин. Тем не менее, было выяснено, что момент появления трещин на всех пяти образцах соответствовал примерно одинаковой стадии их обжатия.

В табл. 3.9 приведены результаты измерений тех трех образцов, которые не успели ощутимо деформироваться за время от момента образования трещин до момента прекращения процесса обжатия, а также результаты обработки данных измерений при помощи вспомогательной табл. 3.1.

Таблица 3.9

Результаты обработки поверочных испытаний

Результаты измерений до деформации*			
d_0	8,447	8,457	8,503
b_0	0,9783	0,9792	1,0092
Результаты измерений после деформации*			
d_0	18,407	18,651	18,838
b_0	0,4080	0,4062	0,4175
$\eta = \lg \dfrac{d_б}{d_0}$	0,3383	0,3434	0,3455
$\xi = \lg \dfrac{b_0}{b}$	0,3797	0,3822	0,3834
ξ/η	1,122	1,113	1.110
η/m	3,020	3,080	3,100
e_i/m	2,975	2,963	2,959
$\dfrac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i}$	+ 0,694	+ 0,704	+0,708
e_i	1,006	1,017	1,0022

* Средние значения по данным нескольких измерений.

Графически (см. рис. 3.10) все три полученные точки расположились бы в непосредственной близости друг от друга. Поэтому на диаграмме приведена только одна точка, отмеченная косым крестом. Она оказалась весьма близко от кривой *I*, соответствующей условиям обжатия без смазки.

Проведенные испытания выявили данные о влиянии обточки на условия появления трещин на поверхности (табл. 3.10).

Т а б л и ц а 3.10

Значения величин $\frac{d_б}{d_0}$, e_i и $\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i}$ к моменту появления трещин (без смазки)

Условия опыта	$\frac{d_б}{d_0}$	e_i, %	$\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sigma_i}$
Без обточки	~1,2	~33	- 0,65
Обточка на глубину 1/8 мм	1,74	~ 78	+ 0,45
Обточка на глубину порядка 1 мм	2,2	~ 100	+ 0,70

Столь ярко выраженное влияние глубины обточки на способность поверхностного слоя обжимаемых цилиндров деформироваться без нарушения сплошности объясняется, по-видимому, тем, что испытуемый прутковый металл еще в процессе своего изготовления (прокат, калибровка) подвергался пластическим деформациям. В частности, поверхностный слой прутка подвергался значительному холодному наклепу еще при калибровке, после которой пруток не обрабатывался термически. Степень деформации тонкого поверхностного слоя при калибровке могла оказаться весьма высокой, во всяком случае несоизмеримо больше, чем при испытании цилиндрического образца на обжатие.

Библиографический список к разд. 3

3.1. *Рейнер, М.* Деформация и точение. Введение в реологию / М. Рейнер. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 138 с.

3.2. *Малинин, Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. М.: Металлургия, 1980. 456 с.

3.3. *Ильюшин, А.А.* Пластичность / А.А. Ильюшин. М.: Изд-во АН СССР , 1963. 272 с.

3.4. *Качанов, Л.М.* Теория пластичности / Л.М. Качанов. М.: Наука, 1989. 420 с.

3.5. *Сторожев, М.В*. Теория обработки металлов давлением / М.В. Сторожев, Е.А. Попов. М.: Машиностроение, 1977. 423 с.

4. ПРОЦЕССЫ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ

Процессы сложного нагружения достаточно разнообразны и, согласно теории А.А. Ильюшина, различаются кривизной траектории. Выделяют процессы малой, средней, большой кривизны и траектории с изломом. Траектория монотонных процессов деформации представляет собой прямую линию.

Односдвиговые и однонаправленные процессы относятся к процессам малой кривизны. Остальные характеризуются либо сильным по плавности изменением показателя вида деформированного состояния v_ε и углов (положения) главных осей деформации в лагранжевом пространстве α (процессы средней и большой кривизны), либо скачкообразным изменением указанных параметров (процессы, имеющие траектории с изломом).

С научной точки зрения, дальнейший прогресс в разработке адекватных моделей поведения материалов при сложных траекториях нагружения возможен при учете структурных факторов и анализе маханизмов деформации. Можно предположить, что резкие изменения или изломы траектории, вызванные обычно механическими нагрузками, приводят к изменению механизмов пластической деформации.

4.1. Анализ процессов сложного нагружения

Анализ деформированного состояния при сложном нагружении. Изучать процесс сложного нагружения можно на сплошных и трубчатых цилиндрических образцах, к которым приложены заранее заданные комбинации осевой силы P и крутящего момента M или осевой силы, крутящего момента и внутреннего давления соответственно. На этапе равномерной деформации от осевой силы P сплошного цилиндрического образца (рис. 4.1) функциональная связь начальных (Z, R, θ) и текущих (z, r, θ) координат может быть задана геометрическими зависимостями

$$r = R\sqrt{\frac{l_0}{l}}, \quad z = Z\frac{l}{l_0}, \quad \theta = \theta + \frac{z\varphi}{R}. \tag{4.1}$$

В декартовой системе координат эти равенства принимают вид

$$x = r\cos\theta = R\left(\frac{l_0}{l}\right)^{1/2}\cos\left(\theta + \frac{z}{R}\varphi\right),$$

$$y = r\sin\theta = R\left(\frac{l_0}{l}\right)^{1/2}\sin\left(\theta + \frac{z}{R}\varphi\right), \quad (4.2)$$

$$z = Z\frac{l}{l_0}.$$

Составляющие вектора скорости перемещения материальных точек будут равны:

$$\upsilon_x = -\frac{yz}{l}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{x}{2l}\frac{dl}{dt},$$

$$\upsilon_y = -\frac{xz}{l}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{y}{2l}\frac{dl}{dt}, \qquad (4.3)$$

$$\upsilon_z = -\frac{z}{l}\frac{dl}{dt}.$$

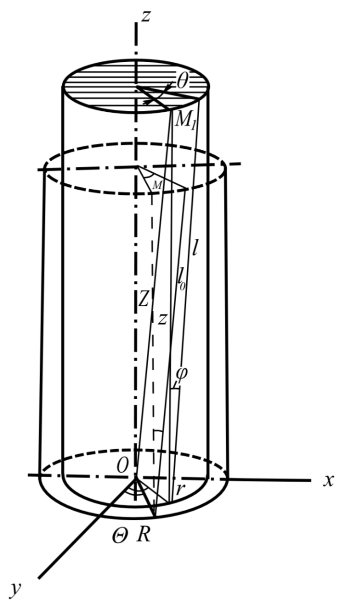


Рис. 4.1. Связь начальных и текущих координат в устойчивой стадии деформации

Компоненты тензора скорости деформации на основании (4.3) определены равенствами

$$\dot\varepsilon_x = -\frac{1}{2l}\frac{dl}{dt}. \qquad \dot\gamma_{xy} = 0,$$

$$\dot\varepsilon_y = -\frac{1}{2l}\frac{dl}{dt}, \quad \dot\gamma_{yz} = \frac{x}{l}\frac{d\varphi}{dt}, \qquad (4.4)$$

$$\dot\varepsilon_z = \frac{1}{l}\frac{dl}{dt}, \quad \dot\gamma_{zx} = -\frac{y}{l}\frac{d\varphi}{dt}.$$

Формула для определения $\dot\varepsilon_i$:

$$\dot\varepsilon_i = \sqrt{(\dot\varepsilon_z)^2 + \frac{1}{3}\left(\dot\varepsilon_x - \dot\varepsilon_y\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\dot\gamma_{yz} + \dot\gamma_{zx}^2\right)}$$

после подстановки значений (4.4) принимает вид

$$\dot\varepsilon_i^2 = \left(\frac{1}{l}\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{l}\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \qquad (4.5)$$

Для определения степени деформации e_i при сложном нагружении следует проинтегрировать (4.5) при следующих начальных условиях: $t = 0$, $e_i = 0$, $l = l_0$, $\varphi = 0$. Тогда

$$e_i^2 = \left(\ln\left(\frac{l}{l_0}\right)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{l_0}\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \qquad (4.6)$$

или

$$e_i^2 = \sum (\mathrm{e}_i)_n^2 , \qquad (4.7)$$

где $(e_i)_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{r\varphi}{l_0}$ – степень деформации при кручении; $(e_i)_2 = \ln\dfrac{l}{l_0}$ – при растяжении.

Таким образом, квадрат степени деформации процесса сложного нагружения равен сумме квадратов степеней деформации составляющих однородных процессов.

Анализ напряженного состояния при сложном нагружении. Используя зависимости (4.1), тензор напряжений в случае сложного нагружения можно представить в виде

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_z & \tau_{zz} & \tau_{z\theta} \\ \tau_{rz} & \sigma_r & 0 \\ \tau_{\theta z} & 0 & \sigma_\theta \end{pmatrix}.$$

Интенсивность напряженного состояния в этом случае

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_r)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + 3\tau_{zr}^2 + 3\tau_{z\theta}^2} \; . \qquad (4.8)$$

Последний член подкоренного выражения есть квадрат интенсивности напряжений при односдвиговом процессе: $(\sigma_i)_1^2 = 3\tau_{z\theta}^2$. Сумма всех остальных членов подкоренного выражения равна квадрату интенсивности напряжений в осесимметричной задаче:

$$(\sigma_i)_2 = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_r)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + 3\tau_{zr}^2 .$$

Таким образом, формула (4.8) может быть приведена к виду, аналогичному (4.7):

$$\sigma_i^2 = (\sigma_i)_2^2 + (\sigma_i)_1^2,$$

т.е.

$$\sigma_i^2 = \sum (\sigma_i)_n^2, \quad n = 1, 2. \tag{4.9}$$

где $(\sigma_i)_1$ – интенсивность напряжений при кручении; $(\sigma_i)_2$ – при растяжении.

Выражения (4.7) и (4.9) дают принципиальную возможность определить интенсивность напряжений и степень деформации в любой стадии процесса сложного нагружения, не прибегая к специальным испытаниям.

Определение предельной деформации при сложном нагружении. Одной из предпосылок повышения качества и оптимизации технологических процессов является прогнозирование способности материалов деформироваться без разрушения.

Из приведенного выше анализа деформированного состояния при сложном нагружении установлено, что $e_i^2 = \sum_1^n (e_i)_n^2$. Следовательно, можно предположить, что для определения предельной деформации в условиях сложного нагружения достаточно знать степени деформации каждого процесса в стадии, предшествующей разрушению. Тогда

$$e_{ip} = \sqrt{e_{i1p} + e_{i2p}}, \tag{4.10}$$

где e_{ip} – предельная деформация в условиях сложного нагружения; e_{i1p} – предельная деформация процесса кручения; e_{i2p} – предельная деформация процесса растяжения.

Обозначив $\bar{e} = \dfrac{e}{\varepsilon_{ip}}$, где ε_{ip} – предельная деформация, определяемая по результатам испытаний цилиндрических образцов на растяжение, получим

$$\bar{e}_{ip} = \sqrt{\bar{e}_{i1p}^2 + e_{i2p}^2} . \tag{4.11}$$

Анализ литературы [4.1–4.5] и результаты предварительных экспериментов позволяют представить зависимость (4.11) графически, как показано на рис. 4.2. По оси абсцисс отложена относительная степень деформации процесса кручения, по оси ординат – процесса растяжения. На графике приведены дуга и хорда единичного радиуса. Они ограничивают область предельных деформаций для сложного нагружения. Положение точки, соответствующей деформации разрушения $\overline{e}_{ip}$ в этой области, будет определено в зависимости от пути нагружения.

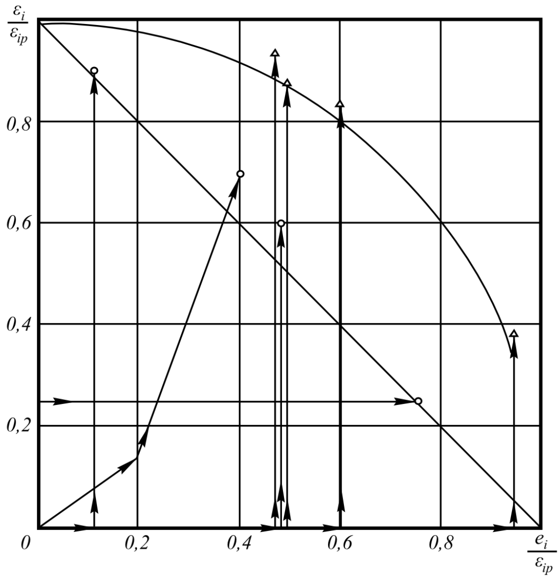


Рис. 4.2. Предельные деформации при сложном нагружении: ∘ – сталь 20; ∆ – латунь Л59; ➛ – путь деформирования

Определение функциональной зависимости σ $\boldsymbol{\sigma_i}$–$\boldsymbol{\varepsilon_i}$ ***по результатам испытания образцов на сложное нагружение.*** Для этого могут быть использованы сплошные и трубчатые цилиндрические образцы, показанные на рис. 4.3, для раздельного деформирования – на рис. 4.4.

До деформации необходимо измерять размеры d_0, R и l_0, для трубчатых образцов – S. Диаметр d_0 и толщина стенки S должны быть измерены в трех сечениях, расположенных в середине и вблизи границ цилиндрической части, в каждом из них в трех направлениях, составляющих между собой угол, равный приблизительно 120°. Для получения необходимой точности измерений можно использовать микрометр. Длину l_0 и радиус R можно измерять штангенциркулем и радиусомером соответственно. Вдоль оси образца типографской краской следует нанести сетку (рис. 4.5) для определения угла сдвига φ при кручении образца и соответственного значения степени деформации e_{i0} по формуле

$$e_{i0} = \frac{\mathrm{tg}\varphi}{\sqrt{3}}. \tag{4.12}$$

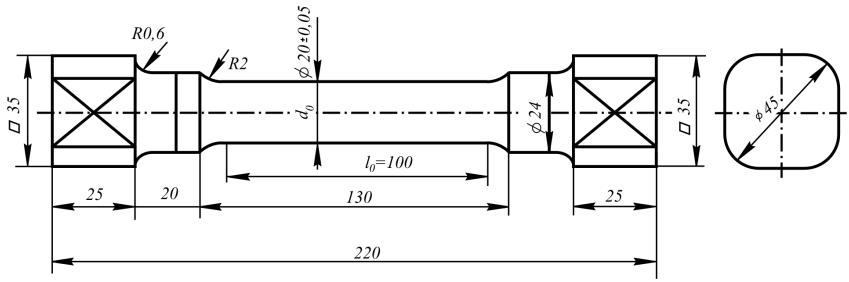


Рис. 4.3. Образец для испытания на растяжение–кручение

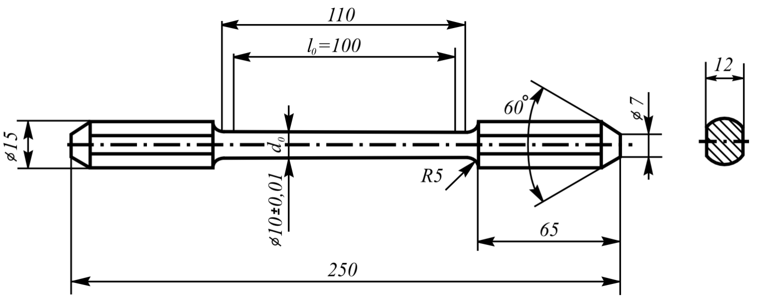


Рис. 4.4. Образец для испытания на кручение

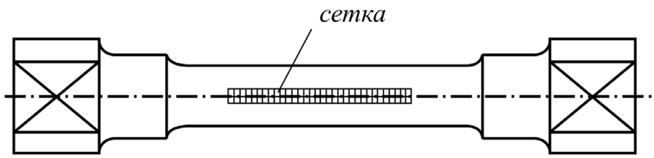


Рис. 4.5. Схема нанесения сетки

Сложное нагружение может быть реализовано на различных испытательных машинах в зависимости от пути деформирования, как показано в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Отличительные особенности вариантов реализации сложного нагружения

Отличительные особенности вариантов	Путь деформирования	Номер варианта	Оборудование для испытания
Раздельное деформирование	Растяжение (сжатие) – разгрузка – кручение до разрушения	I	Испытательные машины ИМЧ-32, КМ-50-1
Ступенчатое деформирование	Растяжение (сжатие) – кручение до разрушения или кручение до деформации, соответствующей – растяжение до разрушения	II	ЦДМУ-30
Совместное деформирование	Кручение совместно с растяжением при условии K = const. Кручение совместно с растяжением при условии $K=De_i^n$	III III	ЦДМУ-30

Примечание. 1. Технические характеристики испытательных машин приведены в приложениях.

2. K – характеристика схемы напряженного состояния; D, n – постоянные; e_i – степень деформации при совместном кручении с растяжением (сжатием).

До начала испытаний должны быть известны зависимости σ_i–ε_i, полученные при простых видах нагружения (растяжение, сжатие, сдвиг). Методики их определения подробно изложены в [4.4]. Для определения этой зависимости при сложном нагружении в целом можно использовать свойство аддитивности тензоров. Последнее позволит провести раздельный анализ НДС и использовать его результаты для определения зависимости σ_i–ε_i по формулам (4.6), (4.10).

Для I варианта сложного нагружения, а при наличии возможностей киносъемки – для II и III примем путь поэтапного деформирования. На каждом этапе следует измерять $d_{\min}$, величину растягивающего усилия P_j или крутящего момента и угла закручивания $M_{\text{кр}j}$. Степень деформации при растяжении следует вычислять по формуле

$$e_{i\text{м}} = 2\ln\frac{d_0}{d_{\min}}\,. \qquad (4.13)$$

Сопротивление деформированию при этом определит значение

$$\sigma = \frac{P_j}{F_j}, \tag{4.14}$$

где j – стадия деформирования.

Произведенное формоизменение при кручении e_{i0} и, соответственно, сопротивление деформации σ_{ic} следует вычислять по формулам

$$e_{ic} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\theta d_0}{2 l_{0p}}, \tag{4.15}$$

$$\sigma_{ic} = \sqrt{3}\, \frac{3M_{крj} + \theta \dfrac{dM}{d\theta}}{\dfrac{\pi}{4} d_0^3} \tag{4.16}$$

где θ – угол закручивания, в рад; $\theta \dfrac{dM}{d\theta}$ – соответствующий $M_{кр}$ участок ординаты, подкасательной в расчетной точке на диаграмме «M–θ» (рис. 4.6).

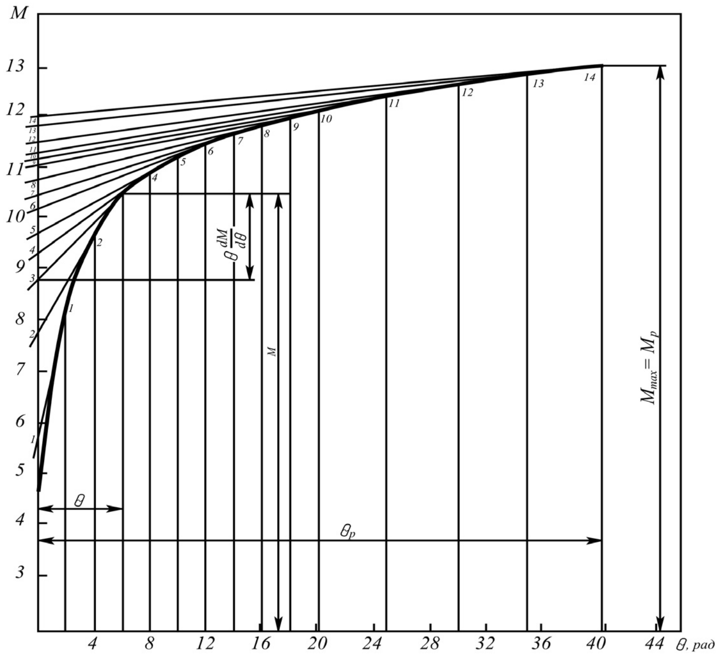


Рис. 4.6. Диаграмма «M–θ»

По результатам испытаний трубчатого образца соответственные значения следует определять по следующим формулам: нормальное напряжение

$$\sigma_z(t) = \frac{P(t)}{\pi D_0 S}, \qquad (4.17)$$

касательное напряжение

$$\tau_{\theta r}(t) = \frac{2M_{\text{кр}}(t)}{\pi D_0^2 S}. \qquad (4.18)$$

Тогда

$$\sigma_i(t) = \sqrt{\sigma_z(t)^2 + \left[\sqrt{3\tau_{\theta r}(t)}\right]^2}, \qquad (4.19)$$

$$e_i(t) = \sqrt{[\varepsilon_i(t)]^2 + \left[\varphi(t)\sqrt{3}\right]^2}. \qquad (4.20)$$

Осевую и тангенциальную составляющие степени деформации следует вычислять по формулам

$$\varepsilon_i(t) = \ln\left[1 + \frac{\Delta l(t)}{l_0}\right], \qquad (4.21)$$

$$\theta(t) = \frac{\Delta\theta(t) D_0}{2\left[l_0 + \Delta l(t)\right]}, \qquad (4.22)$$

где $\Delta l(t)$ – приращение базовой длины образца, $\Delta\theta(t)$ – приращение угла закручивания θ в рассматриваемый момент времени.

Произведенную деформацию следует регистрировать с помощью тензодатчиков.

При испытании цилиндрических образцов на кручение совместно с растяжением управляемыми параметрами являются продольная деформация и угол закручивания.

До начала испытаний следует составить программу. Методика расчета программ подробно изложена В.А. Огородниковым [4.1]. Путь деформирования задан зависимостью (4.2). При этом возможны два случая: простое деформирование, когда K = const в течение всего процесса, и сложное, когда K переменно. Постоянное значение K будет сохраняться, если отношение приращения угловой $d\varphi$ и осевой деформации de_z будет постоянным:

$$\frac{d\varphi}{de_z} = \text{const}. \qquad (4.23)$$

При этом условии получено [4.5] значение угла сдвига φ, отвечающее заданной деформации e_z:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2}{3}\sqrt{3\left(\frac{1}{K^2}-1\right)}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{3/2}, \tag{4.24}$$

где $z = l/l_0$; l, l_0 – расчетная длина в рассматриваемой стадии и до испытания соответственно.

Приведенная формула для определения tgφ справедлива в пределах изменения показателя $-1 \le K \le +1$ для различных K = const. Угол закручивания θ, соответствующий рассчитанному углу φ, вычисляем по формуле

$$\theta = \frac{\mathrm{tg}\varphi \cdot l_0}{0{,}017r}, \tag{4.25}$$

где r – радиус образца.

Расчет программ совместного кручения и растяжения с учетом истории деформирования, предусматривающий изменение характеристики K в уравнении (4.2) в течение процесса нагружения, подробно изложен в [4.1].

4.2. Механические испытания материалов на сложное нагружение

Исследование механических свойств. Экспериментальную проверку методики испытания на сложное нагружение проводили на материалах: сталь 5, сталь 35, сталь 20, латунь Л-63. Форма и размеры образцов показаны на рис. 4.3 и 4.4.

Заготовки для образцов каждой партии были изготовлены из одного прутка металла. Часть образцов (по 3 шт.) использовали для испытаний на простые виды нагружения: простое растяжение и кручение. Остальные образцы испытывали в условиях сложного нагружения по различным схемам в соответствии с табл. 4.1. Диаметр образца до деформации d_0 и диаметр устойчивой части $d_у$ измеряли микрометром с ценой деления 0,01 мм, диаметр в самой узкой части шейки $d_ш$, угол сдвига φ измеряли на микроскопе УИМ-23, погрешность измерения которого составляла 0,005 мм. Угол сдвига φ_2 определяли в месте разрушения, а в сечении, где измеряли $d_у$, – угол φ_1 по углу наклона предварительно нанесенной на образец линии, параллельной образующей.

Результаты измерений образцов и расчетов характеристик механических свойств приведены в табл. 4.2-4.6. Соответственные значения σ_i и ε_i для простых видов нагружения определены по методикам [4.4]. На рис. 4.7 изображены диаграммы зависимости σ_i–ε_i, построенные по результатам испытаний цилиндрических образцов при разных видах нагружения.

Результаты испытаний показывают, что для всех материалов диаграммы зависимости σ_i–ε_i близки к полученным по результатам испытаний на простое растяжение. Это дает основание считать, что при сложном нагружении явление упрочнения материала протекает аналогично простому растяжению, интенсивность упрочнения для этих видов нагружения примерно одинакова.

Таблица 4.2

Результаты испытаний образцов при простых видах нагружения

Схема нагружения		Простое растяжение		Кручение		
Материал образцов		Латунь Л63	Сталь 40Х		Латунь Л63	Сталь 40Х
Размеры образца	d_0, мм	20,6	20,01	d_0, мм	20,05	20,02
	$d_у$, мм	15,20	18,65	l_0, мм	130	130
	$d_ш$, мм	10,33	18,87	θ, рад	32,2	20
Характеристики механических свойств	$\varepsilon_{iу}$	0,557	0,144	$e_{i\mu}$	1,436	0,894
	ε_{ip}	1327	0,726			
	$\sigma_{iу}$, МПа	596	821	$\sigma_{i\mu}$, МПа	467	802
	σ_{ip}, МПа	882	1220			

Таблица 4.3

Результаты испытаний образцов при сложном нагружении

Схема нагружения		Раздельное деформирование по схеме $P{+}M_{max}$		Раздельное деформирование по схеме $P{+}M_{ср}$	
Материал образцов		Латунь Л63	Сталь 40Х	Латунь Л63	Сталь 40Х
Размеры образца	d_0, мм	20,6	20,0	20,05	20,0
	$d_у$, мм	16,45	18,97	16,49	18,77
	$d_ш$, мм	10,75	14,27	10,66	14,00
	α_1, град	12	8	8	7
	α_2, град	19,5	13	21,1	12,4
Характеристики механических свойств	$\varepsilon_{iу}$	0,399	0,113	0,392	0,128
	ε_{ip}	1,248	0,673	1,261	0,713
	$\sigma_{iу}$, МПа	453	759	438	854
	σ_{ip}, МПа	758	103,0	710	113,0
	$e_{iу}$	0,123	0,082	0,082	0,071
	e_{ip}	0,197	0,134	0,225	0,130

Примечание: φ_1 – угол сдвига в устойчивой части образца; φ_2 – угол сдвига в зоне шейки.

Т а б л и ц а 4.4

Результаты испытаний образцов из стали 5

Размеры образцов		Характеристики механических свойств	
Простое растяжение			
d_0, мм	20,0	ε_{iy}	0,211
$d_у$, мм	18,0	ε_{ip} $\sigma_т$, МПа	0,854 294
$d_ш$, мм	13,5	σ_{iy}, МПа σ_{ip}, МПа	692 1047
Кручение			
d_0, мм	20,0	e_{ip}	0,698
l_0, мм θ, рад	13,0 15,7	σ_{ip}, МПа	645
Совместное кручение с растяжением			
d_0, мм	20,0	ε_{iy}	0,0934
$d_у$, мм	19,0	ε_{ip}	0,262
$d_ш$, мм	17,55	σ_{iy}, МПа σ_{ip}, МПа	336 560
θ, рад	5,03	e_{ip} σ_{ip}, МПа	0,224 845

Т а б л и ц а 4.5

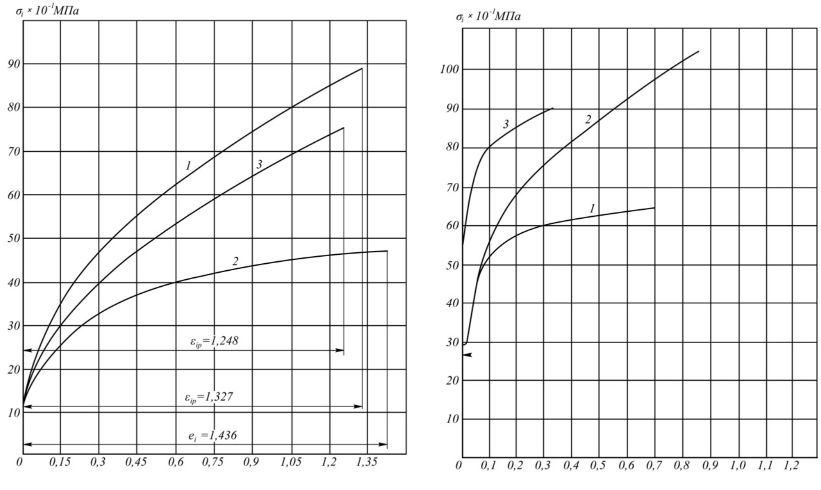
Результаты испытаний образцов из стали 35

Размеры образцов		Характеристики механических свойств	
Простое растяжение			
d_0, мм	9,94	ε_{iy}	0,157
$d_у$, мм	9,21	ε_{ip} $\sigma_т$, МПа	0,848 412,6
$d_ш$, мм	6,50	σ_{iy}, МПа σ_{ip}, МПа	765,9 1074
Кручение			
d_0, мм	10,01	e_{ip}	1,165
l_0, мм θ, рад	100 40,32	σ_{ip}, МПа	879,9
Кручение до $e_i = \varepsilon_{iy}$ + растяжение			
d_0, мм	9,98	ε_{iy}	0,130
$d_у$, мм	9,35	ε_{ip}	0,753
$d_ш$, мм	6,85	σ_{iy}, МПа σ_{ip}, МПа	787 1012
θ, рад	27,2	e_{ip} σ_{ip}, МПа	0,769 830
Кручение до e_i=0,849 (θ =1750°) + растяжение			
d_0, мм	9,66	ε_{iy}	0,027
$d_у$, мм	9,53	ε_{ip}	0,616
$d_ш$, мм	7,10	σ_{iy}, МПа σ_{ip}, МПа	839 1038
θ, рад	36,0	e_{ip} σ_{ip}, МПа	1,049 822

Т а б л и ц а 4.6

Результаты испытаний образцов из стали 20

Размеры образцов		Характеристики механических свойств	
Простое растяжение			
d_0, мм	6,01	ε_{iy}	0,251
l_0, мм	34,0	ε_{ip}	1,06
$d_у$, мм	5,30	$\sigma_т$, МПа	248
$d_ш$, мм	3,52	σ_{iy}, МПа	510
		σ_{ip}, МПа	716
Кручение			
d_0, мм	10,04	e_{ip}	1,30
l_0, мм	100	σ_{ip}, МПа	599
θ, рад	45,0		
Сложное нагружение			
d_0, мм	20,02	ε_{iy}	0,290
$d_у$, мм	18,7	ε_{ip}	0,875
$d_ш$, мм	13,7	σ_{iy}, МПа	545,2
θ, рад	6,75	σ_{ip}, МПа	708,6



а б

Рис. 4.7. Диаграммы упрочнения для простых и сложных видов нагружения: *1* – по результатам испытания на кручение; *2* – по результатам испытания на растяжение; *3* – по результатам испытания на сложное нагружение; *а* – латунь Л63; *б* – сталь 5; *в* – сталь 35; *г* – сталь 20

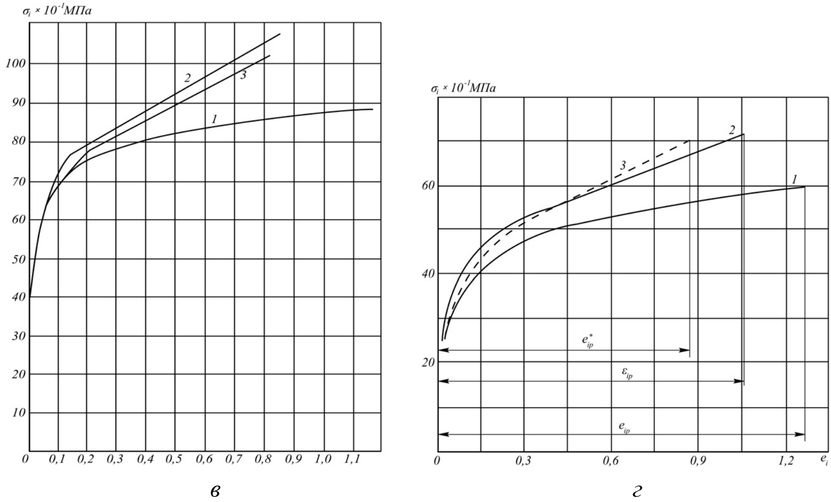


Рис. 4.7 (окончание)

Исследование предельных деформаций. Для определения предельной деформации выполнены испытания сплошных цилиндрических образцов (см. рис. 4.3 и 4.4). Виды сложного нагружения приведены в табл. 4.1.

Стандартные образцы на кручение из стали 35 и латуни ЛС-59 испытывали по режиму: «кручение–разгрузка–растяжение до разрушения». Испытание на кручение проводили на испытательной машине КМ-50. После разгрузки определяли достигнутую степень деформации по формуле

$$e_{ic} = \frac{d_0}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\theta}{l_0}, \qquad (4.26)$$

где d_0 и l_0 – диаметр и длина образца, измеренные микрометром и штангенциркулем соответственно; θ – угол закручивания, рад.

Далее образец растягивали до разрушения на испытательной машине ИМЧ-30. Степень деформации в рассматриваемой стадии нагружения определяли по формуле

$$\varepsilon_i = 2\ln\frac{d_0}{d_{\min}}, \qquad (4.27)$$

где $d_{\min}$ – наименьший диаметр образца в рассматриваемой стадии, измеренный на микроскопе УИМ-23.

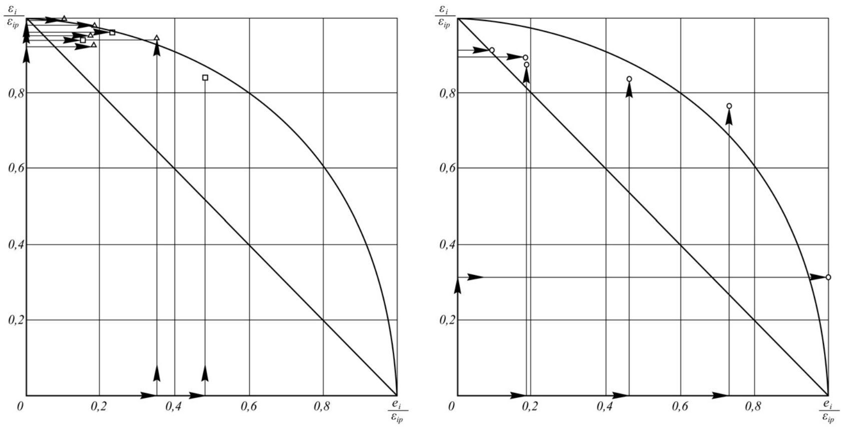
До начала испытаний для каждого материала были определены предельные степени деформации по результатам испытания на растяжение и кручение.

Результаты проведенных исследований приведены в табл. 4.7 и на рис. 4.8.

Т а б л и ц а 4.7

Предельные деформации при раздельном деформировании (кручение–растяжение)

	Латунь ЛС-59					
Вид нагружения	$e_{iм}$	e_{i0}	e_{ip}	$\bar{e}_{iм}$	e_{i0}	e_{ip}
Простое растяжение	0,334	-	0,334	1,00	-	1,00
Кручение		0,435	0,435	-	1,30	1,30
Сложное нагружение	0,125	0,314	0,338	0,37	0,94	1,01
	0,086	0,334	0,342	0,26	1,00	1,02
	0,312	0,156	0,347	0,93	0,47	1,04
	0,29	0,163	0,334	0,87	0,49	1,00
	0,277	0,119	0,336	0,83	0,60	1,00



а *б*

Рис. 4.8. Предельные деформации при сложном нагружении: *а* – ∆ – сталь 40Х; □ – латунь Л63; *б* – ∘ – сталь 35; → – путь деформирования

Проведенный в настоящей работе анализ позволил выявить область применения гипотезы «единой кривой» функциональной зависимости интенсивности напряжений (σ_i) и степени деформации ($\varepsilon_i(e_i)$), полученной по результатам испытаний на простое растяжение и кручение. Проведены эксперименты по определению механических свойств при сложном нагружении, рекомендованы способы построения диаграммы σ_i–ε_i .

В табл. 4.8 приведена классификация процессов сложного нагружения, дополненная примерами технологических процессов и рекомендациями по определению механических свойств.

Т а б л и ц а 4.8

Параметры классификации		Наименование процесса	Категория процесса	Примеры технологических процессов	Определение зависимости σ_i–ε_i
v_ε=const	α=0	Монотонный процесс	Монотонный процесс	Штамповка, гибка, вытяжка и т.п.	По результатам испытания на растяжение образцов
$v_\varepsilon \neq$const	α=0	Однонаправленный процесс	Частично немонотонный процесс	Штамповка в открытых штампах, осадка	По результатам испытания образцов на сжатие (растяжение)
v_ε=const	$\alpha \neq 0$	Односдвиговый процесс	Частично немонотонный процесс	Чистовая вырубка, резка	По результатам испытания образцов на кручение
$v_\varepsilon \neq$const	$\alpha \neq 0$	Процесс сложного нагружения	Немонотонный процесс	Сферодвижная штамповка, раскатка деталей	По результатам испытания образцов в условиях сложного нагружения (растяжение + кручение; сжатие + кручение)

Дальнейшее исследование процессов сложного нагружения необходимо проводить с учетом анализа механизмов и структурных уровней пластической деформации.

Библиографический список к разд. 4

4.1. *Огородников, В.А.* Оценка деформируемости металлов при обработке давлением/ В.А. Огородников. Киев.: Вища школа, 1983. 175 с.

4.2. *Дегтярев, В.П.* О деформационных критериях разрушения при простых и сложных нагружениях / В.П. Дегтярев // Проблемы прочности. 1972. № 7. С. 22-25.

4.3. *Пластичность* и разрушение / Колмогоров В.Л. [и др.]. М.: Металлургия, 1977. 336 с.

4.4. *Сопротивление* материалов пластическому деформированию в приложениях к процессам обработки металлов давлением / Под ред. А.В. Лясникова. СПб.: Внешторгиздат-Петербург, 1995. 527 с.

4.5. *Рене, И.П.* Обобщение метода обработки результатов искажения делительной сетки, предложенного П.О. Пашковым для исследования процессов сложного деформирования / И.П. Рене // Технология машиностроения. Тула, 1967. Вып. 1. С. 127-130.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Иванов Константин Михайлович, Митюшов Алексей Александрович, Ульянов Эдуард Иванович, Усманов Денис Владимирович, Винник Петр Михайлович

Механические свойства материалов при сложном нагружении

Редактор *Г.М. Звягина*
Корректор *Л.А. Петрова*
Подписано в печать 13.09.2011. Формат бумаги 60x84/16. Бумага документная.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 8,725 . Тираж 150 экз. Заказ № 303.
Балтийский государственный технический университет
Типография «СОТ»
198097, С.-Петербург, ул. Трефолева д. 2