Российская академия наук
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН
Научный совет РАН по механике конструкций из композиционных материалов
ФГБУН Институт прикладной механики РАН
ФГБУН Объединенный институт высоких температур РАН
ФГБУ Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
Московский физико-технический институт (Государственный университет)

МЕХАНИКА НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ И СИСТЕМ

СБОРНИК ТРУДОВ
2-й Всеросийской научной конференции

(17 – 19 декабря 2013 года, г. Москва)

Том 1.

МОСКВА

«Механика наноструктурированных материалов и систем».
Сборник трудов 2-й Всероссийской научной конференции в 3-х томах. Том 1.
Москва, 17 – 19 декабря 2013 г. – М.: ИПРИМ РАН, 2013. – 153 с.

В том 1 Сборника трудов конференции включены работы участников конференции, доложенные на секциях: «Проблемы прочности наноструктурированных композитов, адаптивных материалов и конструкций» и «Биомеханика».

Составители сборника:

Карнет Ю.Н., Муковникова И.И., Яновский Ю.Г.

Том 1

СОДЕРЖАНИЕ

Проблемы прочности наноструктурированных композитов, адаптивных материалов и конструкций

УТОЧНЕННЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ

Архипова Н.И., Ерофеев В.И.

ФГБУН Институт проблем машиностроения Российской академии наук, г. Нижний Новгород, Россия

РЕЗЮМЕ

В статье показано, что уточненные (неклассические) стержневые модели могут быть применены для описания динамических процессов в слоистых элементах конструкций. Рассуждения проводятся на примере двухслойного стержня, совершающего продольные колебания.

1. ВВЕДЕНИЕ

Наряду с инженерными (классическими) моделями в динамике стержней существуют, так называемые, уточненные или неклассические модели [1]. Эти модели учитывают дополнительные факторы, влияющие на динамический процесс, или свободны от некоторых гипотез, принятых в инженерных теориях и ограничивающих область их применимости.

Классическую теорию Д. Бернулли, принятую при описании продольных колебаний стержня, обобщают модели Релея-Лява (учет кинетической энергии поперечных движений частиц стержня), Бишопа (учет еще и потенциальной энергии сдвиговых деформаций), Миндлина-Германа (свобода от гипотезы об одноосности деформированного состояния стержня) [2,3].

Уточненные модели применяют, как правило, при описании высокочастотных волновых процессов, когда длина волны становится сравнимой с диаметром поперечного сечения стержня и инженерные модели принципиально неприменимы. Однако в упомянутом частотном диапазоне следует учитывать многомодовость волнового процесса и предпочтение, чаще всего, отдается не уточненным стержневым моделям, а моделям твердотельных многомодовых волноводов – упругий слой (задача Лэмба) и толстостенный цилиндр (задача Похгаммера-Кри) [5,6].

В публикуемой работе показано, что уточненные стержневые модели могут быть применены для описания динамических процессов в слоистых элементах конструкций. Рассуждения проводятся на примерах двухслойного стержня, совершающего продольные колебания. Задачи рассмотрены в упругой, вязко-упругой и нелинейно-упругой постановках.

2. СОСТАВНОЙ СТЕРЖЕНЬ

В работе [7] рассматривается распространение одномерных продольных волн по составному (двухслойному) полубесконечному стержню. Составной (двухслойный) стержень представляет собой совокупность двух стержней, находящихся в контакте друг с другом. Сила контактного взаимодействия предполагается линейно-упругой. Считаем также, что в начальный момент времени на левый конец стержней действует импульс кинематического или силового происхождения, а правый конец свободен.

Движение стержней описывается системой уравнений [7]:

$$\begin{cases} E_1 S_1 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \rho_1 S_1 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R\left(u_1 - u_2\right), \\ E_2 S_2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \rho_2 S_2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R\left(u_2 - u_1\right), \end{cases} \qquad (1)$$

где u_i – продольные перемещения стержней, E_i, S_i, ρ_i – их параметры (модули Юнга, площади поперечных сечений и плотности) (i=1,2), R – сила упругого взаимодействия стержней.

Система (1) может быть сведена к одному уравнению относительно перемещения u_1. Для этого достаточно выразить u_2 из первого уравнения и подставить во второе уравнение системы. В результате получим:

$$\left(1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(C_2^2 + C_1^2 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho_1 S_1}{R}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - (C_2^2 + C_1^2)\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + C_2^2 C_1^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) = 0 \qquad (2)$$

Здесь $u = u_1(x,t)$, $C_1 = \sqrt{\dfrac{E_1}{\rho_1}}$, $C_2 = \sqrt{\dfrac{E_2}{\rho_2}}$ – скорости продольных волн в стержнях.

Заметим, что аналогичное уравнение может быть получено в модели Миндлина-Германа, описывающей продольные колебания стержня [2-4]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_l^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \kappa_2^2 \dfrac{2\lambda}{H\rho}\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa_1^2 C_\tau^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \kappa_2^2 \dfrac{8\left(\lambda + \mu\right)}{H^2 \rho} w + \kappa_2^2 \dfrac{4\lambda}{H\rho}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь $u(x,t)$, $w(x,t)$ – продольные и поперечные перемещения частиц стержня, H – толщина стержня, ρ – плотность материала, $C_l = \sqrt{\dfrac{\lambda + \mu}{\rho}}$, $C_\tau = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ – скорости продольных и сдвиговых волн, λ, μ – константы Ламэ, κ_1, κ_2 – корректирующие коэффициенты, позволяющие увеличить частотный диапазон применимости модели. Система (3) сводится к одному уравнению относительно продольного смещения:

$$\begin{aligned} &4\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\left(C_l^2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda} - \frac{\kappa_2^2 \lambda}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{H^2 \rho}{2\kappa_2^2 \lambda}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \left(C_l^2 + \kappa_1^2 C_\tau^2\right)\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + C_l^2 \kappa_1^2 C_\tau^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

Таким образом, продольные колебания составного стержня можно описать уравнением Миндлина-Германа продольных колебаний некоторого гипотетического стержня, параметры которого выражаются через параметры исходных стержней следующим образом:

$$\begin{cases} 4\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda} = 1 + \dfrac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}, \\ 4\left(C_l^2 \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda} - \dfrac{\kappa_2^2 \lambda}{\rho}\right) = C_2^2 + C_1^2 \dfrac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}, \\ \dfrac{H^2 \rho}{2\kappa_2^2 \lambda} = \dfrac{\rho_1 S_1}{R}, \\ \dfrac{H^2 \rho}{2\kappa_2^2 \lambda}\left(C_l^2 + \kappa_1^2 C_\tau^2\right) = \dfrac{\rho_1 S_1}{R}\left(C_2^2 + C_1^2\right), \\ \dfrac{H^2 \rho}{2\kappa_2^2 \lambda} \kappa_1^2 C_\tau^2 C_l^2 = C_1^2 C_2^2 \dfrac{\rho_1 S_1}{R}. \end{cases} \tag{5}$$

Сведение к модели Миндлина-Германа возможно, если параметры составного стержня удовлетворяют условию $\rho_1 S_1 > 3\rho_2 S_2$, или (что то же самое) $\dfrac{h_1}{h_2} > 3\dfrac{\rho_1}{\rho_2}$, где $h_{1,2}$ – толщины стержней. Для совместности системы (5) необходимо также предположить равенство скоростей $C_l = C_1$, $\kappa_1 C_\tau = C_2$ (или наоборот). В этом случае толщина эквивалентного стержня выражается соотношением $H = \sqrt{\dfrac{\left(C_1^2 - C_2^2\right) R}{2\rho_1 S_1}}$, которая будет увеличиваться с ростом силы упругого взаимодействия стержней по закону $\sqrt{R}$ и уменьшаться как $\dfrac{1}{\sqrt{\rho_1 S_1}}$ с ростом погонной плотности первого стержня. Корректирующие коэффициенты в модели Миндлина-Германа связаны с параметрами исходных стержней зависимостями $\kappa_1^2 = 2\dfrac{C_2^2}{C_1^2}\dfrac{\rho_1 S_1 - \rho_2 S_2}{\rho_1 S_1 - 3\rho_2 S_2}$, $\kappa_2^2 = \dfrac{C_1^2 - C_2^2}{8C_1^2}\dfrac{\rho_1 S_1 - \rho_2 S_2}{\rho_2 S_2}$, что позволяет получить выражение для скорости волн сдвига в виде: $C_\tau = C_1\sqrt{2\dfrac{\rho_1 S_1 - 3\rho_2 S_2}{\rho_1 S_1 - \rho_2 S_2}}$.

В частном случае, если считать плотность одного из стержней малой (пусть $\rho_2 \to 0$), система уравнений (1) сводится к уравнению продольных колебаний стержня модели Бишопа:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho\nu^2 I_0 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \mu\nu^2 I_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0\,. \tag{6}$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона, I_0 – полярный момент инерции, а параметры эквивалентного стержня с параметрами исходных стержней связаны соотношениями:

$$\begin{cases} \rho S = \rho_1 S_1 \\ ES = E_1 S_1 + E_2 S_2 \\ \rho\nu^2 I_0 = \dfrac{\rho_1 S_1 E_2 S_2}{R} \\ \mu\nu^2 I_0 = \dfrac{E_1 S_1 E_2 S_2}{R} \end{cases} \tag{7}$$

В этом случае параметры составного стержня должны удовлетворять условию $\dfrac{E_2}{E_1} > \dfrac{S_1}{S_2}$, а полярный радиус инерции и коэффициент Пуассона эквивалентного стержня определяются соотношениями $r_p = \dfrac{2E_1S_1}{E_2S_2 - E_1S_1}\sqrt{\dfrac{E_2S_2}{R}}$, $\nu = \dfrac{E_2S_2 - E_1S_1}{2E_1S_1}$. Скорости продольной и сдвиговой волн в стержне модели Бишопа выражаются через скорость продольной волны в исходном стержне $C_0 = \sqrt{C_1^2 + \dfrac{E_2S_2}{\rho_1S_1}}, C_\tau = C_1$.

Известно (см., например, [6]), что энергия волн в диспергирующих системах переносится с групповой скоростью. Исследуем, сохраняется ли эта закономерность для слоистых элементов конструкций.

Система (1) может быть получена из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского с помощью уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t}\right)} + \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right)} - \dfrac{\partial L}{\partial u_1} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial t}\right)} + \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right)} - \dfrac{\partial L}{\partial u_2} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь лагранжиан L задается в виде:

$$L = \frac{\rho_1S_1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 - \frac{E_1S_1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{\rho_2S_2}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 - \frac{E_2S_2}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 - \frac{R}{2}(u_1 - u_2)^2. \tag{9}$$

Уравнение переноса энергии (уравнение Умова-Пойнтинга), соответствующее (8), запишется в виде:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

Здесь [3]:

$$W = \left(\frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t}\right)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + \frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial t}\right)}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right) - L\right) \tag{11}$$

– плотность энергии;

$$S = \left(\frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + \frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right)}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\right) \tag{12}$$

– плотность потока энергии.

Для лагранжиана (9) явный вид выражений (11), (12) следующий:

$$W = \frac{\rho_1S_1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{E_1S_1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{\rho_2S_2}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 + \frac{E_2S_2}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{R}{2}(u_1 - u_2)^2, \tag{13}$$

$$S=-E_1S_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)-E_2S_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right). \qquad (14)$$

Скорость переноса энергии волн введем как отношение:

$$v_{эн}=\frac{<S>}{<W>}, \qquad (15)$$

где в числителе стоит среднее значение плотности потока энергии, а в знаменателе – среднее значение плотности энергии.

Перемещения $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ считаем изменяющимися по закону бегущей гармонической волны:

$$u_1(x,t)=Ae^{i\theta}+A^*e^{-i\theta},\ u_2(x,t)=Be^{i\theta}+B^*e^{-i\theta}, \qquad (16)$$

где A, B – комплексные амплитуды, A^*, B^* – их комплексно-сопряженные значения, $\theta=\omega t-kx$ – фаза волны, ω – круговая частота, k – волновое число.

Усреднение в (15) проведено по периоду изменения фазы гармонической волны ($<S>=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(S)d\theta$, $<W>=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(W)d\theta$).

Скорость переноса энергии, вычисленная по формуле (15), описывается выражением:

$$v_{эн}=\frac{2E_1S_1\omega kR^2+2E_2S_2\omega k(-\rho_1S_1\omega^2+E_1S_1k^2-R)^2}{R^2(-\rho_1S_1\omega^2+3E_1S_1k^2-R)+(\rho_2S_2\omega^2+E_2S_2k^2+R)(-\rho_1S_1\omega^2+E_1S_1k^2-R)^2}, \qquad (17)$$

в котором учтена связь между комплексными амплитудами A и B:

$$B=-\frac{(-\rho_1S_1\omega^2+E_1S_1k^2-R)A}{R}. \qquad (18)$$

Частота и волновое число связаны законом дисперсии:

$$\omega=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\left[k^2\frac{\rho_1S_1}{R}\left(C_1^2+C_2^2\right)+\left(1+\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)\pm\sqrt{k^4\frac{\rho_1^2S_1^2}{R^2}\left(C_1^2-C_2^2\right)^2+\left(1+\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)^2+2k^2\frac{\rho_1S_1}{R}\left(C_1^2-C_2^2\right)\left(1-\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)}\right]R}{\rho_1S_1}} \qquad (19)$$

Это соотношение получается из (1) подстановкой решения в виде (16).

Групповую скорость $v_{гр}$ определим, продифференцировав (19) по волновому числу. Она равна:

$$v_{гр}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\left(k\frac{\rho_1S_1}{R}\left(C_1^2+C_2^2\right)+\frac{2k^3\frac{\rho_1^2S_1^2}{R^2}\left(C_1^2-C_2^2\right)^2+\frac{2k\rho_1S_1\left(C_1^2-C_2^2\right)\left(1-\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)}{R}}{\sqrt{k^4\frac{\rho_1^2S_1^2}{R^2}\left(C_1^2-C_2^2\right)^2+\left(1+\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)^2+2k^2\frac{\rho_1S_1}{R}\left(C_1^2-C_2^2\right)\left(1-\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)}}\right)R}{\sqrt{\frac{\left\{k^2\frac{\rho_1S_1}{R}\left(C_1^2+C_2^2\right)+\left(1+\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)+\sqrt{k^4\frac{\rho_1^2S_1^2}{R^2}\left(C_1^2-C_2^2\right)^2+\left(1+\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)^2+2k^2\frac{\rho_1S_1}{R}\left(C_1^2-C_2^2\right)\left(1-\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)}\right\}R}{\rho_1S_1}}\,\rho_1S_1} \qquad (20)$$

Если частоту, входящую в (17), заменить волновым числом по формуле (19), то убедимся, что $v_{эн}=v_{гр}$.

Таким образом, показано, что энергия упругих волн и по слоистым элементам конструкций переносится с групповой скоростью.

3. ВЯЗКО-УПРУГИЙ СТЕРЖЕНЬ

Если в контакте действует как упругая сила, пропорциональная относительному перемещению, так и сила трения, пропорциональная относительной скорости перемещения частиц срединных линий стержней.

Движение стержней, согласно [8], описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} E_1S_1\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \rho_1 S_1\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R\left(u_1 - u_2\right) + R_1\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial t}\right), \\ E_2S_2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \rho_2 S_2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R\left(u_2 - u_1\right) + R_1\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial u_1}{\partial t}\right), \end{cases} \tag{21}$$

где u_i – продольные перемещения частиц срединных линий стержней, $E_i,\ S_i,\ \rho_i$ $\left(i = 1, 2\right)$ – их параметры (модули Юнга, площади поперечных сечений и плотности), $R,\ R_1$ – коэффициенты упругого и вязкого взаимодействия стержней.

Система (21) может быть сведена к одному уравнению относительно перемещения одного из стержней, например u_1. Складывая оба уравнения системы (21), получаем связь в виде:

$$\rho_1 S_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - E_1S_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = E_2S_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \rho_2 S_2\frac{\partial^2 u_{21}}{\partial t^2}.$$

Выразим также из первого уравнения:

$$Ru_2 + R_1\frac{\partial u_2}{\partial t} = \rho_1 S_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - E_1S_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + Ru_1 + R_1\frac{\partial u_1}{\partial t}$$

и полученные соотношения подставим во второе уравнение системы. В результате получается уравнение относительно $u = u_1\left(x, t\right)$:

$$\left(1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(C_2^2 + C_1^2\frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho_1 S_1}{R}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - (C_2^2 + C_1^2)\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2} + \right.$$
$$\left. + C_2^2C_1^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) + \frac{R_1}{R}\left(\left(1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \left(C_2^2 + C_1^2\frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}\right) = 0. \tag{22}$$

Здесь $\dfrac{R_1}{R}$ – коэффициент диссипации, $u = u_1(x, t),\ C_1 = \sqrt{\dfrac{E_1}{\rho_1}},\ C_2 = \sqrt{\dfrac{E_2}{\rho_2}}$ – скорости продольных волн в стержнях.

Заметим, что продольные колебания составного стержня можно описать уравнением Миндлина-Германа продольных колебаний некоторого гипотетического стержня:

$$4\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\left(C_l^2\frac{\lambda + \mu}{\lambda} - \frac{\kappa_2^2\lambda}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{H^2\rho}{2\kappa_2^2\lambda}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \left(C_l^2 + \kappa_1^2 C_\tau^2\right)\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2} + \right.$$
$$\left. + C_l^2\kappa_1^2C_\tau^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) + \chi\left(4\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - 4\left(C_l^2\frac{\lambda + \mu}{\lambda} - \frac{\kappa_2^2\lambda}{\rho}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}\right) = 0. \tag{23}$$

Здесь $u(x, t)$ – продольные перемещения частиц стержня, H – толщина стержня, ρ – плотность материала, $C_l = \sqrt{\dfrac{\lambda + \mu}{\rho}}, C_\tau = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ – скорости продольных и сдвиговых волн, λ, μ – константы Ламэ, κ_1, κ_2 – корректирующие коэффициенты, позволяющие увеличить частотный диапазон применимости модели.

Параметры гипотетического стержня выражаются через параметры исходных стержней следующим образом:

$$\begin{cases} 4\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda} = 1 + \dfrac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}, \\ 4\left(C_l^2 \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda} - \dfrac{\kappa_2^2 \lambda}{\rho} \right) = C_2^2 + C_1^2 \dfrac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}, \\ \dfrac{H^2 \rho}{2\kappa_2^2 \lambda} = \dfrac{\rho_1 S_1}{R}, \\ \dfrac{H^2 \rho}{2\kappa_2^2 \lambda}\left(C_l^2 + \kappa_1^2 C_\tau^2 \right) = \dfrac{\rho_1 S_1}{R}(C_2^2 + C_1^2), \\ \dfrac{H^2 \rho}{2\kappa_2^2 \lambda} C_l^2 \kappa_1^2 C_\tau^2 = \dfrac{\rho_1 S_1}{R} C_2^2 C_1^2, \\ \chi = \dfrac{R_1}{R}, \\ \chi^4 \left(\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda} \right) = \dfrac{R_1}{R}\left(1 + \dfrac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right), \\ \chi^4 \left(C_l^2 \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda} - \dfrac{\kappa_2^2 \lambda}{\rho} \right) = \dfrac{R_1}{R}\left(C_2^2 + C_1^2 \dfrac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2} \right). \end{cases} \tag{24}$$

Для анализа дисперсионных и диссипативных свойств волн перейдем в уравнении (22) к безразмерным переменным $t' = \dfrac{C_2^2 \rho_2 S_2 + C_1^2 \rho_1 S_1}{\rho_2 S_2 + \rho_1 S_1} \dfrac{t}{r}$, $x' = \dfrac{x}{r}$, $u' = \dfrac{u}{u_0}$, где u_0 – характерная амплитуда волны, $r = \sqrt{\dfrac{C_1^2 + C_2^2}{(\rho_2 S_2 + \rho_1 S_1)} \dfrac{\rho_1 S_1 \rho_2 S_2}{R}}$ – некоторый пространственный масштаб, $\varphi = \dfrac{C_1^2 + C_2^2 \left(\rho_1 S_1\right)^2}{(\rho_2 S_2 + \rho_1 S_1)\left(C_1^2 + C_2^2\right)}$. В результате уравнение (24) принимает вид (штрихи над безразмерными переменными опущены):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + d\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \varphi \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \delta\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right) = 0 . \tag{25}$$

В (25) входят два безразмерных параметра, один из них $d = \dfrac{(\rho_2 S_2 + \rho_1 S_1) C_1^2 C_2^2}{\left(C_2^2 \rho_2 S_2 + C_1^2 \rho_1 S_1\right)^2 \left(C_2^2 + C_1^2\right)}$ определяет дисперсию, а

$\delta = \sqrt{\dfrac{C_2^2\rho_2 S_2 + C_1^2\rho_1 S_1}{\left(C_2^2 + C_1^2\right)\rho_2 S_2 \rho_1 S_1 R}} R_1$ – диссипацию. Для дисперсионного параметра легко получить оценку, если воспользоваться неравенством Коши между средним арифметическим и средним геометрическим $\left(a + b > 2\sqrt{ab},\ \left(a,b > 0, a \neq b\right)\right)$. Очевидно, что параметр дисперсии $d < \dfrac{1}{2}$, а наличие диссипации приводит к тому, частота и волновое число линейной волны связаны комплексным дисперсионным соотношением:

$$\omega^2 - k^2 + \omega^2 k^2 - dk^4 - \varphi\omega^4 + i\delta\omega^3 - i\delta\omega k^2 = 0. \qquad (26)$$

Уравнение (26) является биквадратным относительно волнового числа k, разрешая которое, получим зависимость в виде:

$$k_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2d}}\left(\omega^2 - 1 - i\delta\omega \pm \sqrt{\left(\omega^2 - 1 - i\delta\omega\right)^2 - 4\varphi d\omega^4 + 4id\delta\omega^3 + 4d\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (27)$$

Из (27) видно, что волновое число является комплексным $k = k' + ik''$, где $k' = \mathrm{Re}(k)$, $k'' = \mathrm{Im}(k)$. Это означает, что волна имеет постоянную распространения k' и затухает по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания k''.

На дисперсионной плоскости $\left(\omega, k'\right)$, где k' – действительная часть комплексного волнового числа k, существуют две дисперсионные ветви, выходящие из начала координат. При этом одна ветвь в низкочастотном диапазоне приближается к прямой $\omega = k'$, а в высокочастотном – выходит на асимптоту $\omega = \sqrt{\dfrac{k'\left(k'+1\right) - \sqrt{\left(k'\right)^2\left(1+4d\right) - 4\varphi}}{2\varphi}}$. Вторая ветвь выходит из начала координат по прямой $\omega = \dfrac{2\sqrt{d}}{\delta}k'$, угол наклона которой уменьшается с ростом коэффициента диссипации δ. В высокочастотном диапазоне эта ветвь приближается к асимптоте $\omega = \sqrt{\dfrac{k'\left(k'+1\right) + \sqrt{\left(k'\right)^2\left(1+4d\right) - 4\varphi}}{2\varphi}}$, не зависящей от δ.

Качественный вид дисперсионных зависимостей $\omega\left(k'\right)$ приведен на рис.1а при $d = 0{,}25;\ \delta = 0{,}1;\ \varphi = 0{,}5$.

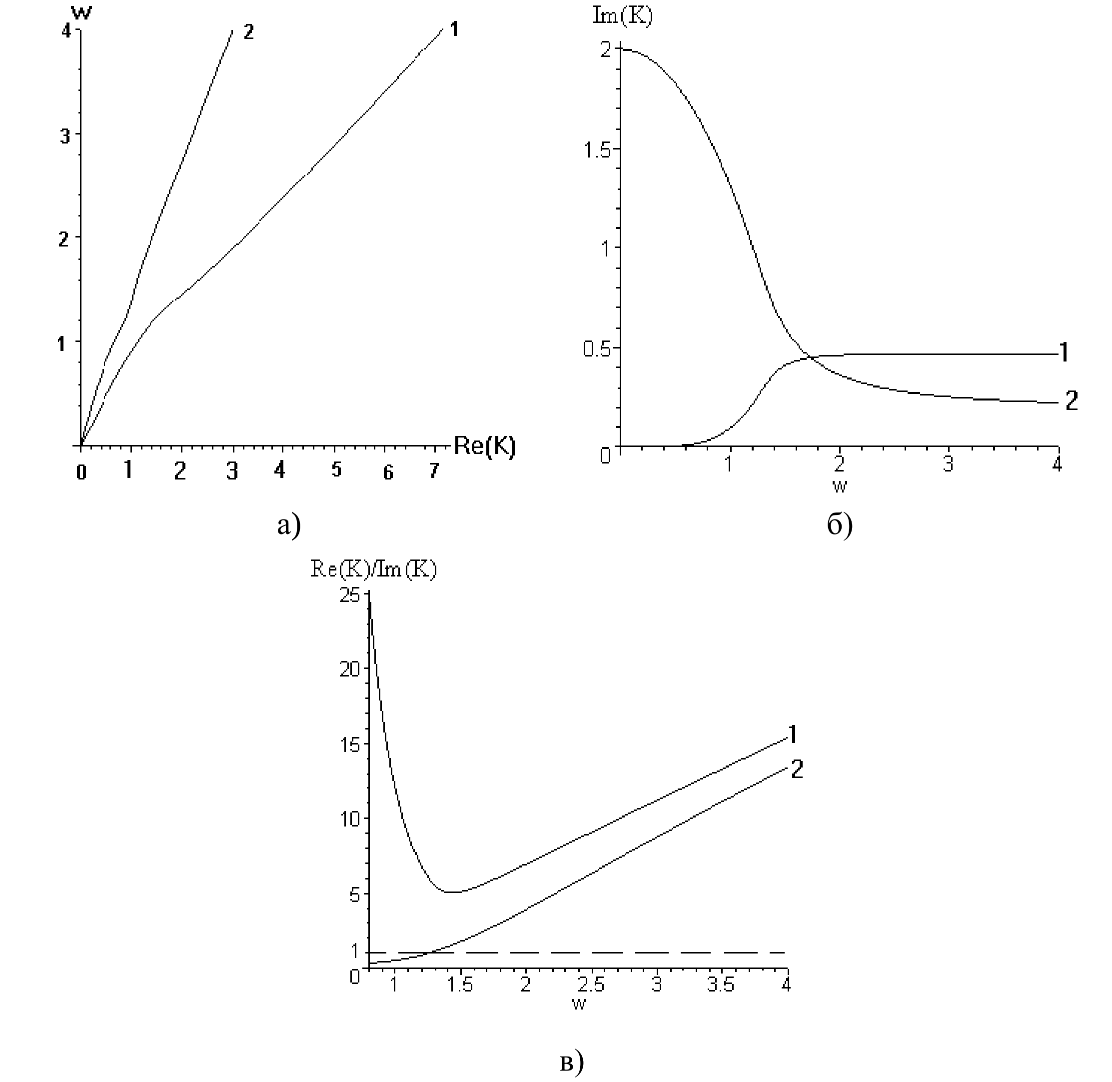


Рис.1. Дисперсионные характеристики вязко-упругой среды: а) зависимость частоты от действительной части волнового числа; б) частотная зависимость мнимой части волнового числа; в) частотная зависимость отношения действительной части волнового числа к мнимой

На рис.1б приведены зависимости мнимых частей k'' волнового числа k от частоты ω. На плоскости (k'',ω) также имеются две ветви, одна из которых выходит из начала координат и с увеличением частоты приближается к горизонтальной асимптоте $k''=\dfrac{\delta\left(1-p^2\right)}{2p\left(2dp^2-1\right)}$,

где $p=\sqrt{2\varphi}\,/\sqrt{k'\left(k'+1\right)+\sqrt{\left(k'\right)^2\left(1+4d\right)-4\varphi}}$.

Вторая ветвь k'' выходит из точки $\omega=0,\ k''=\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}$ и убывает с ростом частоты, приближаясь к горизонтальной асимптоте $k''=\dfrac{\delta\left(1-p_1^2\right)}{2p_1\left(2dp_1^2-1\right)}$, где $p_1 = \sqrt{2\varphi} / \sqrt{k'\left(k'+1\right) - \sqrt{\left(k'\right)^2\left(1+4d\right) - 4\varphi}}$. Таким образом, в низкочастотном диапазоне коэффициент затухания k'' зависит от частоты волны, а в высокочастотном диапазоне затухание становится частотно-независимым, так как в этом случае усиливается влияние дисперсионных эффектов.

На рис.1в приведены частотные зависимости отношения $\mathrm{Re}(k)/\mathrm{Im}(k)$. Неравенству $\dfrac{\mathrm{Re}(k)}{\mathrm{Im}(k)} > 1$ соответствуют области частот, где процесс распространения волны преобладает над процессом ее затухания.

В частном случае, при $\delta = 0$ из (27) получаем решение дисперсионного уравнения:

$$k_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2d}}\left(\omega^2 - 1 \pm \sqrt{\left(\omega^2-1\right)^2 - 4\varphi d\omega^4 + 4d\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (28)$$

В этом случае на дисперсионной плоскости (ω, k) существуют две дисперсионные ветви, одна из которых выходит из начала координат и имеет асимптоту $\omega = k$ в низкочастотном диапазоне, а при больших частотах выходит на асимптоту $\omega = \sqrt{\dfrac{k(k+1) - \sqrt{k^2(1+4d) - 4\varphi}}{2\varphi}}$ (см.рис.2).

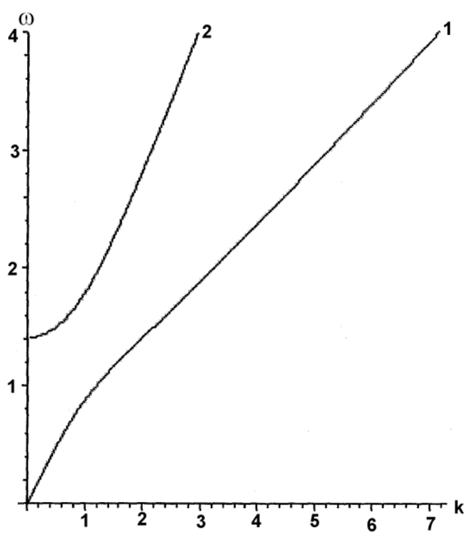


Рис.2. Дисперсионные характеристики упругой среды.

Вторая дисперсионная ветвь появляется при частотах $\omega \geq \sqrt{2}$, что соответствует в размерных переменных значению $\omega \geq 2\sqrt{\dfrac{\alpha}{I}}$. В высокочастотном диапазоне асимптотическое решение имеет вид $\omega = \sqrt{\dfrac{k(k+1) + \sqrt{k^2(1+4d) - 4\varphi}}{2\varphi}}$.

Сравнение дисперсионных зависимостей в обоих случаях показывает, что диссипация оказывает влияние на дисперсионные свойства волн только в низкочастотном диапазоне. В высокочастотном диапазоне диссипация не проявляется, так как дисперсионные ветви при $\delta = 0$ и при $\delta \neq 0$ выходят на одинаковые асимптоты.

Таким образом, на примере двухслойного стержня, совершающего продольные колебания, показано, что уточненная стержневая модель Миндлина-Германа может быть применена для описания динамических процессов в слоистых вязко-упругих элементах конструкций.

4. НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИЙ СТЕРЖЕНЬ

Если в каждом из стержней учесть геометрическую и физическую нелинейности, то динамика системы будет описываться уравнениями:

$$\begin{cases} E_1 S_1 \left(1 + \alpha_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right) \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \rho_1 S_1 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2) \\ E_2 S_2 \left(1 + \alpha_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right) \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \rho_2 S_2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1) \end{cases} \tag{29}$$

где u_i – продольные перемещения стержней, E_i, S_i, ρ_i – их параметры (модули Юнга, площади поперечных сечений и плотности) (i=1,2), R – коэффициент, характеризующий силу упругого взаимодействия стержней, $\alpha_{1,2}$ – коэффициенты, характеризующие их геометрические и физические нелинейности.

Система (29) может быть сведена к одному уравнению. Действительно, введём безразмерные переменные:

$$U = \frac{u}{u_0};\ y = \frac{x}{X};\ \tau = \frac{t}{T};\ \gamma = 1 + \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2},$$

обозначения $D = C_2^2 + C_1^2 \dfrac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}$; $X = \Lambda$; $T^2 = \dfrac{\Lambda^2 \gamma}{D}$,

где u_0 – перемещение, Λ – длина волны, удовлетворяющие соотношению $u_0 / \Lambda = 10^{-4}$, T – период волны и пренебрегая величинами, в которых степень отношения u_0 / Λ выше 3, получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\rho_1 S_1 D}{R\gamma^2 \Lambda^2} \frac{\partial^4 U}{\partial \tau^4} - \frac{\rho_1 S_1 (C_2^2 + C_1^2)}{R\gamma \Lambda^2} \frac{\partial^4 U}{\partial y^2 \partial \tau^2} + \frac{\rho_1 S_1 C_2^2 C_1^2}{R\Lambda^2 D} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} - \\ - \frac{\left(C_2^2 \alpha_2 + C_1^2 \alpha_1 \dfrac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right)}{D} \frac{u_0}{\Lambda} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{30}$$

Здесь: $C_1 = \sqrt{\dfrac{E_1}{\rho_1}}$, $C_2 = \sqrt{\dfrac{E_2}{\rho_2}}$ – скорости продольных волн в стержнях.

Решение уравнения (30) будем искать в классе стационарных волн, то есть в виде функции U=$U(y – v\tau)$, зависящей от $y – v\tau = \xi$, где v=const – скорость стационарной волны.

Уравнение в частных производных (30) сведется в этом случае к уравнению ангармонического осциллятора относительно продольной деформации $\dfrac{dU}{d\xi} = w$:

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} + aw + bw^2 = 0, \qquad (31)$$

где

$$a = \frac{v^2-1}{B};\;\; b = -\frac{1}{2}\frac{C_2^2\alpha_2 + C_1^2\alpha_1\dfrac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}}{BD}\frac{u_0}{\Lambda},\;\; B = \frac{\rho_1 S_1 D}{R\gamma^2\Lambda^2}v^4 - \frac{\rho_1 S_1(C_2^2 + C_1^2)}{R\gamma\Lambda^2}v^2 + \frac{\rho_1 S_1 C_2^2 C_1^2}{RD\Lambda^2}.$$

Заметим, что корни уравнения B=0 имеют вид:

$$v_1^2 = \frac{C_2^2\gamma}{D};\;\; v_2^2 = \frac{C_1^2\gamma}{D}.$$

Они, в частности, могут удовлетворять условию $\dfrac{C_2^2\gamma}{D} = 5 - 4\dfrac{C_1^2\gamma}{D}$ (для определенности считаем, что $C_1 > C_2$). В этом случае $0 < \dfrac{C_2^2\gamma}{D} < 1;\;\; 1 < \dfrac{C_1^2\gamma}{D} < \dfrac{5}{4}$, тогда $0 < v_1^2 < 1;\;\; 1 < v_2^2 < \dfrac{5}{4}$.

Также определим знаки корней: между корней (–): $\dfrac{C_2^2\gamma}{D} < v^2 < \dfrac{C_1^2\gamma}{D}$; вне корней(+): $v^2 > \dfrac{C_1^2\gamma}{D},\;\; v^2 < \dfrac{C_2^2\gamma}{D}$.

Анализ (31) показывает, что частными решениями уравнения (30) являются нелинейные уединенные стационарные волны (солитоны).

В первом случае, a<0, b>0 и солитон имеет положительную полярность. Амплитуда солитона A_c и его ширина Δ описываются выражениями:

$$A_c = \frac{3(v^2-1)D}{(C_2^2\alpha_2 + C_1^2\alpha_1\dfrac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2})\dfrac{u_0}{\Lambda}} \qquad \Delta = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{v^2-1}{B}}}$$

На рис.3 приведены зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости.

В данном случае с ростом скорости уединенной стационарной волны ее амплитуда возрастает, а ширина уменьшается. Такое поведение характерно для классического солитона [9].

Во втором случае, a<0, b<0 и солитон имеет отрицательную полярность. Его амплитуда и ширина описываются выражениями:

$$A_c = \frac{3(1-v^2)D}{(C_2^2\alpha_2 + C_1^2\alpha_1\dfrac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2})\dfrac{u_0}{\gamma\Lambda}} \qquad \Delta = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{1-v^2}{B}}}$$

Зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости приведены на рис.4.

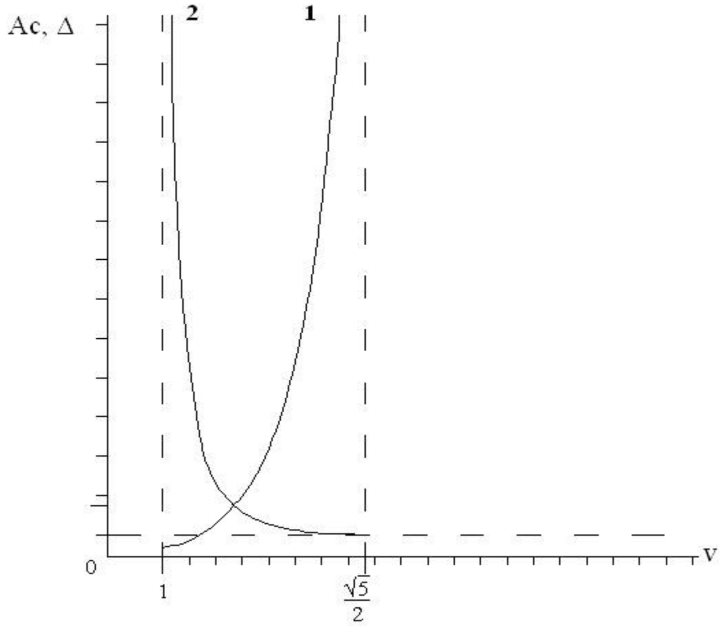


Рис.3. Зависимость амплитуды (кривая 1) и ширины (кривая 2) солитона положительной полярности от его скорости.

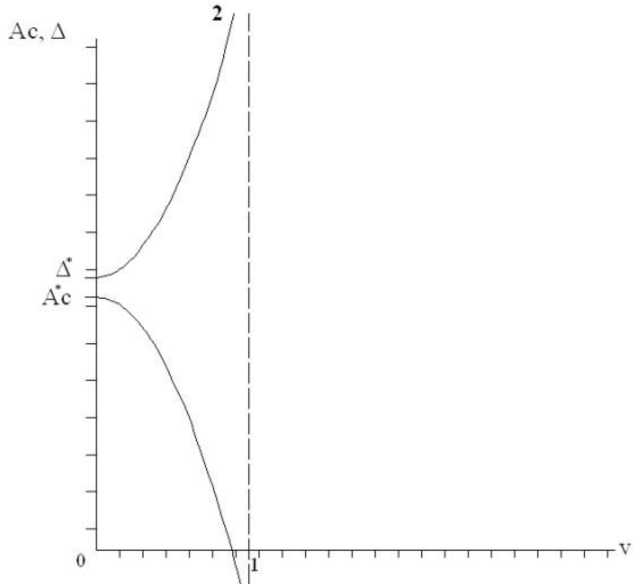


Рис.4. Зависимость амплитуды (кривая 1) и ширины (кривая 2) солитона отрицательной полярности от его скорости.

$$A_c^* = \frac{3D}{(C_2^2\alpha_2 + C_1^2\alpha_1 \frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}) \frac{u_0}{\gamma\Lambda}}; \quad \Delta^* = \frac{2}{\sqrt{\frac{RD\Lambda^2}{\rho_1 S_1 C_2^2 C_1^2}}}$$

В этом случае с ростом скорости уединенной стационарной волны одновременно увеличивается и ее амплитуда, и ширина. Такое поведение не характерно для классического солитона и является аномальным.

Таким образом, в работе показано, что в составном нелинейно-упругом стержне могут формироваться локализованные волны (солитоны) деформации, имеющие как отрицательную, так и положительную полярность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНИТИ, 1973. – 272 с.
2. *Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д.* Введение в акустическую динамику машин. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
3. *Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М.: Наука, Физматлит, 2002. – 208 с.
4. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. – М.: Машиностроение. Т1: Колебания линейных систем. 2-е изд., испр. и доп. / Под ред. В.В Болотина, 1999. – 504 с.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
6. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981. – 284 с.
7. *Товстик П.Е., Товстик Т.П.* Распространение волн по сотавному стержню / Всеросс. конф. «Волновая динамика машин и конструкций». Материалы. – Н.Новгород: Изд. «ТИРАСП», 2004. – С.110.
8. *Товстик Т.П.* Распространение продольных волн по двухслойному стержню / Моделирование динамических систем. Сборник научных трудов. – Н.Новгород: Изд-во «Интелсервис». 2011. – С.91-98.
9. *Ерофеев В.И., Клюева Н.В.* Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. – 2002. – Т.48. – №6. – С.725-740.

РАСЧЕТ ОСТАТОЧНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ, АРМИРОВАННЫХ ВИСКЕРИЗОВАННЫМИ ВОЛОКНАМИ*

Афанасьев А.В.[1], Соляев Ю.О.[2], Лурье С.А.[2,3], Рабинский Л.Н.[1], Андрюнина М.А.[4]

[1]*ФГБУ Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия*
[2]*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*
[3]*ФГБУН Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва, Россия*
[4]*ОАО «Национальный институт авиационных технологий», г. Москва, Россия*

РЕЗЮМЕ

В работе предложен подход к моделированию остаточного напряженно-деформированного состояния (НДС) слоистых композиционных материалов, армированных вискеризованными волокнами. В качестве примера рассмотрен композит из углепластика, армированный углеродными волокнами, на поверхности которых выращены массивы углеродных нанотрубок или нановолокон. Показано, что в зависимости от параметров вискеризации (длины нанотрубок и частоты их расположения на волокнах) может значительно изменяться остаточное НДС композитной панели. Показано, что на основе предложенной модели можно прогнозировать оптимальные варианты вискеризации, которые позволяют снизить анизотропию термомеханических характеристик композита, и, следовательно, уменьшить остаточные напряжения, деформации и кривизны в слоистых композиционных панелях. Для прогноза эффективных характеристик вискеризованных композитов привлекаются модели эллиптического включения и модели многослойных цилиндрических включений. Для определения остаточного НДС применяется модель термоупругости слоистых композитов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из проблем, возникающих при создании авиационных конструкций из слоистых композитов, является возникновение остаточных температурных напряжений после процесса формования. Такое поведение композита обусловлено значительной анизотропией физико-механических свойств. В последнее время широкое развитие получило исследование различных видов наномодификации волокон композита. В частности, разрабатываются технологии получения, так называемых, вискеризованных углеродных волокон, на поверхности которых выращены массивы углеродных нанотрубок [1,2]. Помимо повышения характеристик прочности и трещиностойкости, вискеризация позволяет изменить остаточное напряженно-деформированное состояние и повысить качество изготавливаемых деталей, что особенно важно при создании современных аэрокосмических систем нового поколения. В настоящей работе предложена математическая модель определения остаточного напряженно-деформированного состояния слоистых композиционных материалов с вискеризованными волокнами.

* *Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (коды проектов НШ-1387.2014.8, МК-5101.2013.8, МК-5749.2014.8) и гранта РФФИ (код проекта 14-01-00480).*

Как известно, жесткостные и температурные свойства однонаправленного слоя вдоль и поперек волокон значительно отличаются. Примером анизотропии свойств может являться коэффициент линейного температурного расширения (КЛТР). Для однонаправленного углепластика он близок к нулю в направлении ориентации волокон и равен половине значения КЛТР матрицы в поперечном направлении. Это принципиально важно для изготовления крупногабаритных авиационных конструкций. Так температура полимеризации большинства смол, применяемых в силовых авиационных конструкциях, составляет около 170°С. Процесс полимеризации сопровождается переходом связующего в вязкоупругое состояние, после чего происходит его отверждение при температуре порядка 140°С. Затем происходит выдержка и охлаждение изделия до примерно комнатной температуры, а это значит, что изменение температуры в этом случае равно -120°С. В процессе охлаждения происходит усадка полимерного связующего, приводя к появлению деформации сжатия ориентированных по-разному слоев ПКМ.

Как показывают исследования, в случае несимметричной по толщине структуры это приводит к возникновению остаточных напряжений и короблению пластин из композита. В пластинах с симметричной структурой коробление отсутствует, однако в этом случае резко возрастают остаточные температурные напряжения, значения которых могут достигать предела прочности связующего, вызывая при этом появление трещин и расслоение.

В общем случае снизить параметры остаточного напряженно-деформированного состояния можно путем влияния на физико-механические свойства композиционного материала. Ключевым параметром для исследования является коэффициент линейного температурного расширения. Снижая анизотропию КЛТР в продольном и поперечном путем наномодификации волокна можно значительно снизить компоненты остаточных напряжений и деформаций кривизны конечного изделия.

В настоящей работе исследуется композитный материал на основе эпоксидной матрицы, армированной наномодифицированными углеродными волокнами. В данном случае, наномодификация представляет из себя процесс вискеризации волокон игольчатыми частицами углерода (нановолокнами или нанотрубками). Выращивание наночастиц на поверхности волокон производят методом осаждения из газообразной фазы [1,2]. Этот процесс технологически возможно реализовать непрерывным образом, когда волокна с заданной скоростью протягивают через камеру, в которой происходит их модификация. В зависимости от скорости прохождения волокон изменяется длина вискерсов на их поверхности. В зависимости от концентрации углерода в камере меняется частота расположения вискерсов на волокнах. Эта технология используется для повышения контактной прочности между волокнами и матрицей, а также для повышения межслоевой прочности слоистого композита и снижения остаточных напряжений в его структуре. Далее будут показаны результаты моделирования влияния параметров вискеризации волокон на эффективные механические свойства и на остаточное напряженно-деформированное состояние композита, в зависимости от вариантов модификации волокон – различной длины и частоты расположения вискерсов на волокне.

Расчет эффективных свойств и остаточного НДС композита производится в несколько этапов. На первом этапе определяются свойства межфазной зоны на границе вискеризованных длинных волокон с матрицей. Считается, что эта зона обладает анизотропной композитной структурой и состоит из матрицы и вискеризующих коротких волокон, хаотично ориентированных в плоскости, перпендикулярной длинным волокнам. Для этой зоны рассчитываются эффективные свойства в случае различного объемного содержания нановолокон, что соответствует различной частоте их расположения на длинном волокне. Далее определяются эффективные свойства монослоя с использованием модели двухслойных цилиндрических включений. Дополнительный слой на волокнах моделирует зону вискеризации, свойства которой были найдены на предыдущем этапе расчета. При этом толщина дополнительного слоя вискеризации соответствует различной длине вискерсов, выращенных на волокнах. Остаточное НДС слоистого пакета рассчитывается на основе модели термоупругости слоистых композитов [3,4] с использованием найденных значений эффективных характеристик монослоя (модулей упругости, коэффициентво Пуассона и КЛТР).

2. МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВИСКЕРИЗОВАННОЙ МЕЖФАЗНОЙ ЗОНЫ

Для моделирования термомеханических характеристик вискеризованного слоя вокруг длинных ориентированных волокон будем использовать модель композита, армированного эллиптическими включениями, произвольно-ориентированными в плоскости. В данном случае эллипсами будут моделироваться короткие углеродные нановолокна, которые выращены на поверхности длинных армирующих углеродных волокон. Для данной модели эффективные термомеханические характеристики определяются с использованием метода Мори-Танака [5] и программного комплекса Digimat.

Основная задача моделирования – качественно и количественно (на основе тестовых параметров моделей) определить влияние параметров наномодификации волокон на эффективные свойства слоистого пакета и уровень остаточных напряжений и деформаций. Параметрами наномодификации в данном случае являются длина нановолокон и их частота расположения на длинных углеродных волокнах. Эти параметры в предложенной модели определяются различными значениями толщины межфазного дополнительного слоя в модели монослоя (параметр длины нановолокон), и к заданию различного объемного содержания эллиптических включений-нанотрубок в представительном фрагменте микроуровня (параметр частоты расположения нановолокон).

В качестве тестовой расчетной структуры рассматривается композит на основе эпоксидной смолы, армированный углеродными длинными волокнами, на которых выращены нановолокна углерода. Термомеханические свойства фаз композита представлены в Таблице 1.

Наноразмерные углеродные волокна в упрощенной постановке модели представлены в виде вытянутых эллипсов с соотношением полуосей 1/20. Предполагается, что в процессе изготовления получено объемное содержание нановолокон в слое вискеризации 20% или 40%, что соответствует различной частоте расположения нановолокон по окружности длинных ориентированных волокон. Материал в зоне вискеризации обладает анизотропией свойств, вследствие преимущественного расположения нановолокон в плоскости, перпендикулярной оси длинного волокна.

Вследствие этого в расчетах используется модель хаотически ориентированных эллиптических включний в плоскости, перпендикулярной к оси длинных волокон. Таким образом, рассматриваемая структура является трансверсально-изотропной с плоскостью изотропии, перпендикулярной длинным волокнам. Результаты расчетов эффективных свойств вискеризованной зоны для различного объемного содержания в нем нановолокон по методу Мори-Танака представлены в таблице 2.

Таблица 1.

Термомеханические свойства компонентов композиционного материала (предполагается изотропия свойств).

	Модуль упругости E, [ГПа]	Коэффициент Пуассона, ν	КЛТР α, [K^{-1}]	Плотность ρ, [кг/м^3]
Волокна Carbon (Thornell300)	250	0.2	$-6\cdot10^{-7}$	1760
Матрица Epon828	3	0.25	$5.4\cdot10^{-5}$	1160
Углеродные нановолокна	1000	0.16	$7.3\cdot10^{-6}$	1100

Таблица 2.

Свойства зоны вискеризации.

	f=0.2	f=0.4
E_{11}, МПа	4732	6975
E_{22}, МПа	17350	38980
$\nu_{12}=\nu_{13}$	0.23	0.23
$\nu_{23}=\nu 32$	0.31	0.315
$\nu_{21}=\nu_{31}$	0,062	0,062
G_{12}, МПа	1725	2597
G_{23}, МПа	6620	14810
$\alpha 1$, K^{-1}	5.9E-5	4.4E-5
$\alpha 2=\alpha 3$, K^{-1}	1.45E-5	1.0E-5

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МОНОСЛОЯ КОМПОЗИТА

На следующем этапе расчета решалась задача по определению эффективных характеристик монослоя, армированного волокнами, вокруг которых находится дополнительный слой (слой вискеризации). Эффективные свойства монослоя композита с вискеризованными волокнами определялись на основе модели двухслойного цилиндрического включения и самосогласованного метода [6-8]. Рассматривались различные варианты толщины слоя вискеризации, при которых его объемное содержание в композите составляло 10% или 20%. В таблице 3 представлено четыре рассмотренных варианта модификации волокон, отличающихся толщиной слоя вискеризации и объемным содержанием нановолокон (то есть, длиной нановолокон и частотой их расположения на длинных волокнах).

Результаты расчетов эффективных свойств монослоя с различными вариантами армирования представлены в таблицах 4-6. Были рассчитаны эффективные свойства композитов с объемным содержанием армирущих волокон 40,50 и 60% с различными вариантами наномодифицкации.

Таблица 3.

Варианты и параметры наномодификации.

№ модификации	Исходный композит	1	2	3	4
Объемное содержание УНТ в слое вискеризаци, %	0	20	20	40	40
Объемное содержание слоя вискеризации в композите, %	0	10	20	10	20

Таблица 4.

Эффективные свойства монослоя с объемным содержанием вискеризованных волокон 40%.

Модификация	Исходный	№1	№2	№3	№4
E_{11}, ГПа	102	104	106	160	216
E_{22}, ГПа	6,28	7,60	9,44	7,73	9,8
G_{12}, ГПа	2,74	3,32	4,09	3,09	3,48
ν_{21}	0,23	0,25	0,28	0,22	0,22
α_{11}	0,40	11,00	19,3	3,20	6,46
α_{22}	33,40	27,00	21,8	27,4	28,2

Таблица 5.

Эффективные свойства монослоя с объемным содержанием вискеризованных волокон 50%.

Модификация	Исходный	№1	№2	№3	№4
E_{11}, ГПа	126	129	131	185	242
E_{22}, ГПа	7,8	9,75	12,68	9,90	13,27
G_{12}, ГПа	3,49	4,35	5,55	4,00	4,61
ν_{21}	0,22	0,25	0,27	0,22	0,21
α_{11}	0,07	8,88	16,10	2,49	4,32
α_{22}	26,6	21,1	16,40	21,20	16,27

Таблица 6.

Эффективные свойства монослоя с объемным содержанием вискеризованных волокон 60%.

Модификация	Исходный	№1	№2	№3	№4
E_{11}, ГПа	151,00	153,5	155,7	209,7	266,8
E_{22}, ГПа	10,05	13,20	18,60	13,50	19,79
G_{12}, ГПа	4,60	5,97	8,10	5,42	7,32
ν_{21}	0,22	0,24	0,27	0,21	0,21
α_{11}	-0,15	7,33	13,70	1,98	3,65
α_{22}	20,40	15,56	11,29	15,40	10,90

Одной из основных причин использования наномодификации композита является повышение его прочностных и жесткостных характеристик. Для рассматриваемого композита характерно повышение продольного и поперечного модулей упругости при увеличении объемного содержания нановолокон в композите. Принципиальный является и изменение и соотношение коэффициентов линейного температурного расширения при наномодификации волокон. На рис.1 представлена зависимость отношения продольного КЛТР к поперечному, характеризующая анизотропию температурных свойств монослоя.

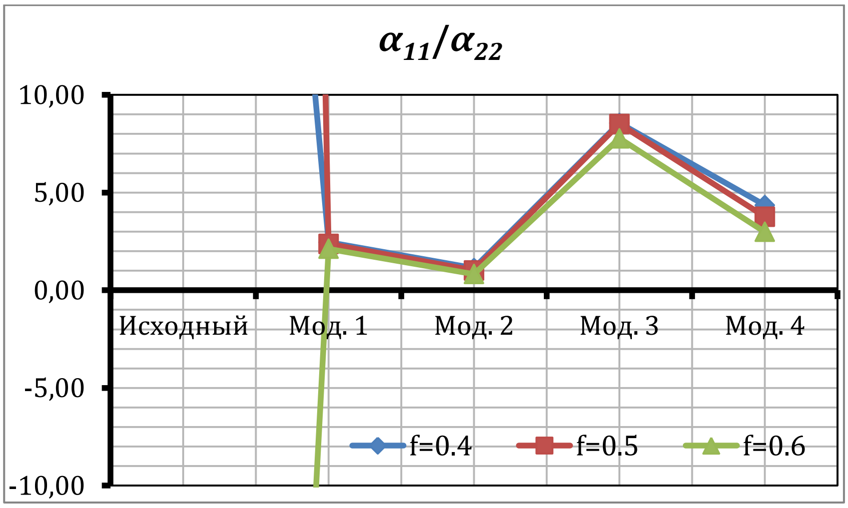


Рис.1. Изменение отношения продольного КЛТР к поперечному в зависимости от наномодификации.

Как видно из представленных зависимостей, анизотропия температурных свойств монослоя углепластика может быть снижена (с более чем 100 до 1), при этом минимальный уровень температурной анизотропии достигается во втором случае наномодификации.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ НАНОМОДИФИКАЦИИ УГЛЕРОДНОГО ВОЛОКНА НА ОСТАТОЧНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Расчеты проводились на основе адаптированной модели термоупругости слоистых композитных материалов, изложенной в работах [1,2]. Рассматривалась свободная от закрепления и внешних нагрузок панель с несимметричной по толщине структурой, подверженная охлаждению после процесса формования на 120^{o}C. Вследствие не скомпенсированной усадки полимерного связующего линейные поперечные деформации слоев будут приводить к изгибу панели и возникновению температурных напряжений в слоях.

Композит состоит из 12-ти слоев толщиной 0,22 мм с чередованием ориентации волокон в слоях 0^{o} и 90^{o}. Такая структура композиционного материала будет характеризоваться возникновением «седлообразной» формы деформированного состояния и нулевыми компонентами остаточных температурных касательных напряжений [1]. Распределение остаточных температурных напряжений по слоям для наиболее нагруженного варианта объемного содержания волокна (f=0.4) представлено на рис.2. Распределение значений для компонент кривизны показано на рис.3.

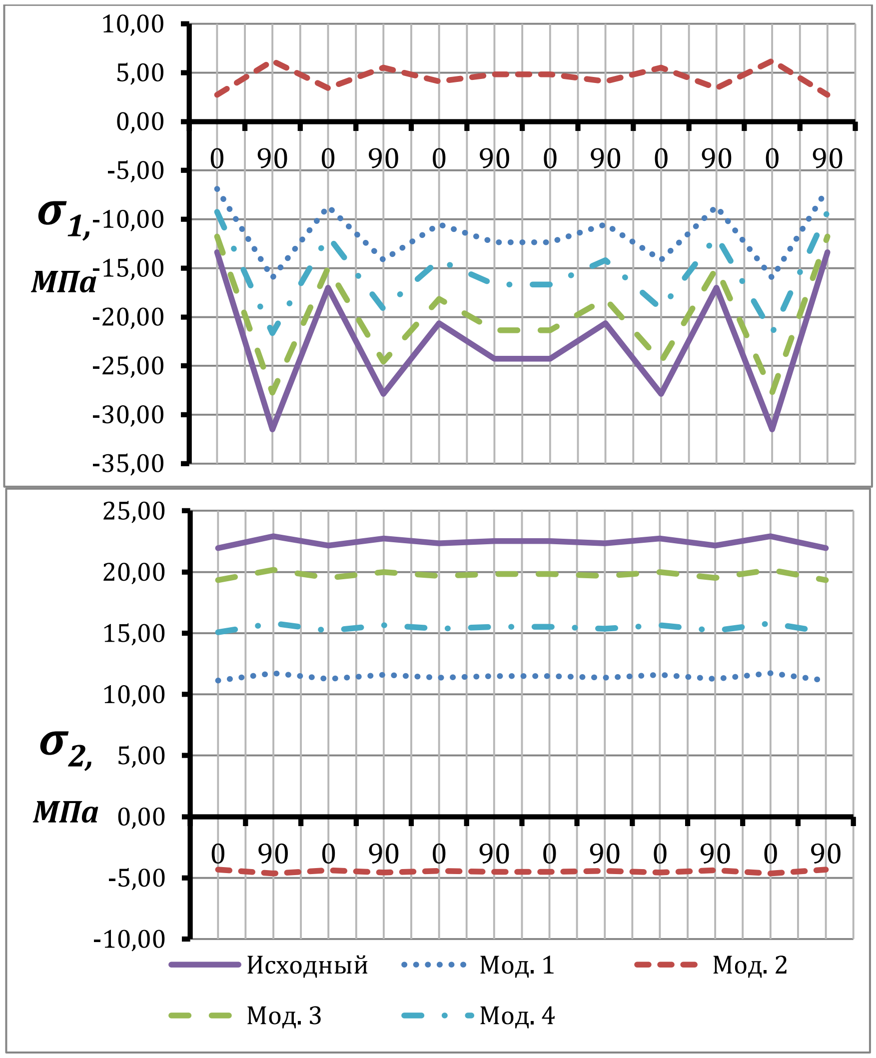


Рис.2. Распределение остаточных температурных напряжений по слоям (f=0.6).

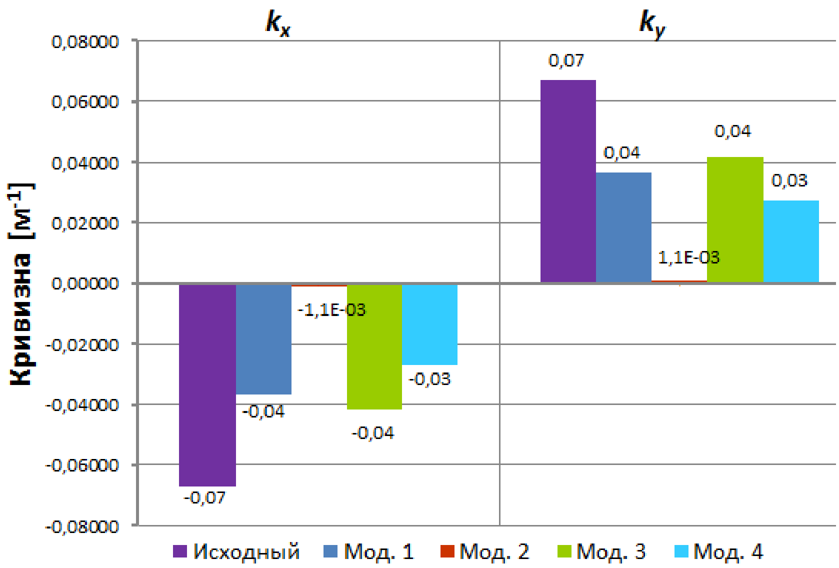


Рис.3. Зависимость компонент кривизны от наномодификации (f=0.4), м$^{-1}$.

На приведенных выше графиках распределения нормальных напряжений видно, что уровень поперечных напряжений в исходной структуре композита (с обычными волокнами) близок к пределу прочности связующего, что может привести к появлению дефектов. Наномодификация волокна в этом случае способна не только повысить характеристики прочности в поперечном направлении, но и существенно снизить уровень остаточных напряжений. Уровень изменения поперечных напряжений для наиболее нагруженного слоя (№2) рассматриваемых пластиков представлен на рис.4. Из приведенной зависимости видно, что подбор оптимальных параметров наномодификации волокна способен полностью снизить остаточные напряжения. В других случаях эффект снижения напряжений не столь заметен, а, например, в случае модификации №4 для 40%-содержания волокна остаточные напряжения превышают уровень таковых для исходного углепластика без наномодификации.

Величина компонент кривизны пластины также снижается при использовании наномодификации. Наибольшее снижение (более чем в 60 раз) достигается для углепластика с 50% содержанием волокна при выборе параметров наномодификации, соответствующих 2 варианту табл.3.

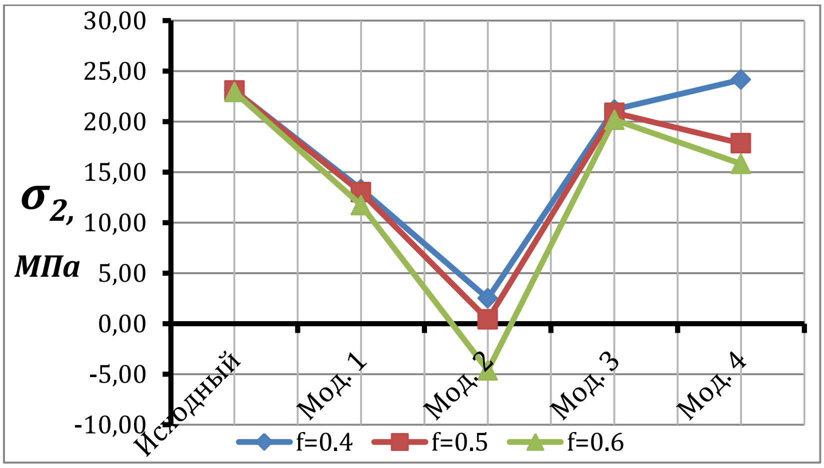


Рис.4. Распределение поперечных нормальных напряжений для слоя №2, МПа.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена методика определения остаточных напряжений и деформаций плоских панелей из полимерных композитов с наномодифицированными вискеризованными волокнами. Предложена модель учета межфазного вискеризованного слоя, основанная на решении задачи о многослойном цилиндрическом включении. Предполагается, что характеристики межфазного зоны связаны с технологическими параметрами изготовления армирующих волокон и могут быть найдены экспериментально. Задача по определению эффективных свойств вискеризованного слоя решалась с использованием метода Мори-Танака для произвольно ориентированных в плоскости эллиптических включений, моделирующих короткие нановолокна-вискерсы. Свойства монослоя определялись с использованием самосогласованного метода по модели многослойного цилиндрического включения. Найденные термомеханические характеристики монослоя подставлялись в разработанный алгоритм определения остаточных напряжений и деформаций в слоистых композитах.

Тестовые расчеты проведены для композита из углепластика. Проведенное исследование показало, что поверхностная наномодификация армирующих углеродных волокон углеродными нановолокнами может значительно повысить механические характеристики композита. На основе аналитических расчетов показано, что создание дополнительного вискеризующего слоя с объемным содержанием в композите до 20% позволит повысить продольный и поперечный модуль упругости углепластика не менее чем на 25%, по сравнению со стандартными характеристиками. При этом объемное содержание нановолокон в самом слое должно составлять не более 20%. Указанные параметры означают, что, например, на армирующих углеродных волокнах толщиной 10 мкм при их объемном содержании в 50%, следует создавать слой углеродных нанотрубок толщиной не более 0.9 мкм. Частота расположения нанотрубок должна быть подобрана таким образом, чтобы объемное содержания УНТ в наномодифицированном слое составила не более 20% (частота УНТ технологически может регулироваться, например, концентрацией катализатора при использовании метода газофазного осаждения для выращивания УНТ на поверхности армирующих волокон). В случае создания указанной оптимальной структуры покрытия, прогнозируется снижение анизотропии эффективных коэффициентов температурного расширения композита и, таким образом, значительно уменьшается уровень остаточных усадочных напряжений и деформаций, возникающих после изготовления композита. Если в исходном композите коэффициенты теплового расширения вдоль и поперек волокон составляют, приблизительно 0 и $3{\cdot}10^{-5}$, соответственно, то в композите с наномодифицированными волокнами эти величины будут составлять $2{\cdot}10^{-5}$ и $2{\cdot}10^{-5}$ для объемного содержания волокон 40%, и при повышении содержания волокон незначительно ухудшаться до соотношения $0.7{\cdot}10^{-5}$ и $1.5{\cdot}10^{-5}$. Этот результат был получен на основе проведенных последовательных расчетов в рамках механики композиционных материалов для определения эффективных характеристик наномодифицированного слоя вокруг волокон (как композита матрица композита – углеродные нановолокна) и при определении остаточного НДС в рамках модели термоупругости слоистых панелей.

Проведенные расчеты в целом показывают возможность, практически, полного исключения остаточных напряжений и деформации в композитах с различными схемами армирования (как симметричными, так и не симметричными) при создании оптимальной структуры покрытия. В данной работе приведен пример расчета симметричной структуры. Очевидно, что полученный результат должен быть уточнен при проведении экспериментальных испытаний с учетом фактических физико-механических и геометрических характеристик связующего композита, армирующих волокон и углеродных нанотрубок, однако, предложенные алгоритмы моделирования могут быть использованы для выбора оптимального направления дальнейших исследований и анализа их результатов с целью разработки технологии оптимальной наномодификации углеродных волокон.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Guz I.A., Rodger A.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J.* Predicting the properties of micro- and nanocomposites: from the microwhiskers to the bristled nano-centipedes // Phil. Trans. R. Soc. A – 2008. –Vol.366. – P.1827-1833.

2. *Guz I.A., Rushchitsky J.J., Guz A.N.* Mechanical models for nanomaterials, Handbooks of Nanophysics – Principles and Methods. – CRC. – 2011. – P.1-12.
3. *Афанасьев А.В., Дудченко А.А., Рабинский Л.Н.* Влияние структуры полимерного композиционного материала на остаточное напряженно-деформированное состояние // Инженерная физика. – 2010. – №7.
4. *Афанасьев А.В., Дудченко А.А., Рабинский Л.Н.* Влияние тканых слоев на остаточное напряженно-деформированное состояние изделий из полимерных композиционных материалов // Электр. журнал «Труды МАИ». – 2010. – №37.
5. *Mori T., Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metallurgica. – 1973. – Vol.21. – P.571-574.
6. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – М: Мир, 1982. – 335 с.
7. *Лурье С.А., Белов П.А., Рабинский Л.Н., Жаворонок С.И.* Масштабные эффекты в механике сплошных сред. Материалы с микроструктурой и наноструктурой. – М.: Издательство МАИ, 2011. – 158 с.
8. *Herve E., Zaoui A.* N-layered inclusion-based micromechanical modelling // Int. J. Engng Sci. – 1993. –Vol.31. – N1 – P.l-10.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ С НАНОРАЗМЕРНЫМ ОТВЕРСТИЕМ ПРИ УЧЕТЕ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ

Бауэр С.М., Каштанова С.В., Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия

РЕЗЮМЕ

Рассматривается влияние поверхностного эффекта на устойчивость бесконечной упругой тонкой пластины с круговым наноразмерным отверстием, находящейся под действием одноосного растяжения. Решается задача устойчивости с учетом поверхностных напряжений, действующих по границе отверстия [1], а также с учетом дополнительного вклада поверхностных напряжений, действующих в плоскостях самой пластины [2]. Проводится сравнительный анализ полученных решений.

Особенностью деформирования наноразмерных пластин и оболочек является наличие поверхностного эффекта [1,3,4], который усиливается при уменьшении геометрических размеров объекта.

Устойчивость тонких пластин с отверстием, находящихся под действием одноосного растяжения в классической постановке исследовалась в работах [5-7].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бесконечная упругая пластинка с круговым отверстием радиуса R, растянутая в бесконечности одноосно при учете поверхностных напряжений. Растягивающее напряжение на бесконечности равно P.

Поле напряжений при $r > R$ в этом случае имеет вид [8]:

$$\sigma_{rr}(r,\varphi)=\frac{P}{2}\left[1-\frac{R^2}{r^2}+\left(1-\frac{4R^2}{r^2}+\frac{3R^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi\right]+\frac{H_0\gamma_0R^2}{r^2}$$
$$+\frac{P}{2}\left\{1-\frac{(1-2H_1)R^2}{r^2}-\left[1-\frac{4(1-H_2)R^2}{r^2}+\frac{3(1-2H_2)R^4}{r^4}\right]\cos 2\vartheta\right\},$$
$$\sigma_{\varphi\varphi}(r,\varphi)=\frac{P}{2}\left[1+\frac{R^2}{r^2}-\left(1+\frac{3R^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi\right]-\frac{H_0\gamma_0R^2}{r^2}$$
$$+\frac{P}{2}\left\{1+\frac{(1-2H_1)R^2}{r^2}+\left[1+\frac{3(1-2H_2)R^4}{r^4}\right]\cos 2\vartheta\right\}, \quad (1)$$
$$\tau_{r\varphi}(r,\varphi)=-\frac{P}{2}\left[1+\frac{2R^2}{r^2}-\frac{3R^4}{r^4}\right]\sin 2\varphi$$
$$+\frac{P}{2}\left\{1+2\frac{(1-H_2)R^2}{r^2}-\frac{3(1-2H_2)R^4}{r^4}\right\}\sin 2\vartheta.$$

где

$$H_0=\frac{2\mu_s-\gamma_0}{(\lambda_s+2\mu_s)(R+M)},\quad H_1=\frac{M(1+æ)}{4(R+M)},\quad H_2=\frac{M(1+æ)}{2R+M(3+æ)},$$
$$M=\frac{(2\lambda_s+2\mu_s+\gamma_0)(2\mu_s-\gamma_0)}{(\lambda_s+2\mu_s)2\mu},\quad æ=\frac{5\lambda+6\mu}{3\lambda+2\mu},\quad \kappa=\frac{3-\upsilon}{1+\upsilon}$$

γ_0 – остаточное поверхностное напряжение, отвечающее ненагруженному телу, λ_s, μ_s – модули поверхностной упругости, аналогичные постоянным Ламе λ, μ для объемной изотропной упругости [3].

Присутствие слагаемых с постоянными H_j $(j = 0, 1, 2)$ в формулах (1) указывает на влияние поверхностных напряжений на напряженно-деформированное состояние пластины. Известно, что при увеличении размера отверстия это влияние ослабевает (размерный эффект). Равенство нулю коэффициентов H_j означает отсутствие поверхностных напряжений. В этом случае соотношения (1) – известное решение задачи Кирша о растяжении бесконечной пластины с круговым отверстием.

Задача рассматривается в полярной системе координат (r, φ) с центром, совпадающим с центром кругового отверстия.

Представим напряжения как линейную комбинацию классических напряжений и напряжений, порожденных поверхностными эффектами:

$$\sigma_{rr}(r,\varphi) = \sigma_{rr}^{cl} + \sigma_{rr}{}^{+}$$
$$\sigma_{\varphi\varphi_{cl}}(r,\varphi) = \sigma_{\varphi\varphi}^{cl} + \sigma_{\varphi\varphi}{}^{+}$$
$$\tau_{r\varphi}(r,\varphi) = \tau_{r\varphi}^{cl} + \tau_{r\varphi}{}^{+},$$

где:

$$\sigma_{rr}{}^{+}(r,\varphi) = \frac{H_0\gamma_0 R^2}{r^2} + \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{2}}\left\{1 - \frac{(1-2H_1)R^2}{r^2} - \left[1 - \frac{4(1-H_2)R^2}{r^2} + \frac{3(1-2H_2)R^4}{r^4}\right]\cos 2\vartheta\right\}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}{}^{+}(r,\varphi) = -\frac{H_0\gamma_0 R^2}{r^2} + \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{2}}\left\{1 + \frac{(1-2H_1)R^2}{r^2} + \left[1 + \frac{3(1-2H_2)R^4}{r^4}\right]\cos 2\vartheta\right\}$$

$$\tau_{r\varphi}{}^{+}(r,\varphi) = \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{2}}\left\{1 + 2\frac{(1-H_2)R^2}{r^2} - \frac{3(1-2H_2)R^4}{r^4}\right\}\sin 2\vartheta.$$

Для определения критического напряжения воспользуемся энергетическим методом С.П. Тимошенко [9,10]:

$$U = \mathcal{W}.$$

Здесь U – потенциальная энергия изгиба пластины, а $\mathcal{W}$ – работа усилий в срединной плоскости пластинки, накопившихся к моменту потери устойчивости, на дополнительных перемещениях, вызванных потерей плоской формы деформирования [5]:

$$U = \frac{D}{2}\int_0^{2\pi}\int_R^{\infty}[(\Delta w)^2 - (1-\upsilon)\mathcal{L}(w,w)]r\,dr d\varphi,$$

$$\mathcal{W} = \frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\int_R^{\infty}\left[\sigma_{rr} r\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \sigma_{\varphi\varphi}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2 + 2\tau_{r\varphi}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right]dr d\varphi$$

Здесь w – прогиб пластины после потери устойчивости, υ – коэффициент Пуассона, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины,

$$\mathcal{L}(w,w) = 2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\varphi}\right)^2 + \frac{2}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\varphi}\frac{\partial w}{\partial\varphi} - \frac{1}{r^4}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2\right]$$

Ищем условия, при которых плоская форма устойчивости соответствует по запасенной энергии изгибной форме. Представляем работу $\mathcal{W}$ как линейную комбинацию следующих слагаемых:

$\frac{P}{2}W_{cl}$ – работа, зависящая от «классических» членов напряжений;
W_{+} – работа, зависящая от напряжений, порожденных поверхностными эффектами (члены, не содержащие нагрузку);
$\frac{P}{2}W_{++}$ – работа, зависящая от напряжений, порожденных поверхностными эффектами (члены, содержащие нагрузку).
Тогда

$$\mathcal{W} = \frac{P}{2}W_{cl} + W_{+} + \frac{P}{2}W_{++}.$$

Заметим, что U не зависит от напряжений.
Таким образом, получаем:

$$U = W,$$

$$W = \frac{P}{2}W_{cl} + W_{+} + \frac{P}{2}W_{++} =>$$

$$U = \frac{P}{2}W_{cl} + W_{+} + \frac{P}{2}W_{++}$$

$$=> \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P_{cl}} - \boldsymbol{P_{+}} = 2\frac{U - W_{+}}{W_{cl} + W_{++}}.$$

(Для классического случая критическая нагрузка $P_{cl} = 2\frac{U}{W_{cl}}$.)

Представим функцию прогиба в виде $w = w_0(r)\cos(N\varphi)$ (разным N соответствуют разные формы потери устойчивости) и приведем анализ составляющих энергии:

$$U = \pi D \int_R^\infty \left[\frac{r}{2}\left(\frac{w_0'}{r} + w_0'' - \frac{N^2}{r^2}w_0\right)^2 - (1-\upsilon)\left\{\left(w_0'w_0'' + \frac{2N^2}{r^2}w_0w_0' - \frac{N^2}{r}\left[w_0w_0'' + w_0'^2 + \frac{w_0^2}{r^2}\right]\right)\right\}\right]dr,$$

энергия деформации всегда положительна, то есть,

$$U > 0\,,$$

$$W_{cl} = \frac{\pi h}{2}\int_R^\infty \left[\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) r w_0'^2 + N^2\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\frac{w_0^2}{r}\right]dr > 0$$

$$W_{+} = \frac{\pi h}{2}H_0\gamma_0\int_R^\infty \left[\frac{R^2 w_0'^2}{r} - N^2\frac{R^2 w_0^2}{r^3}\right]dr\,,$$

$$W_{++} = \frac{\pi h}{2}\int_R^\infty \left[\frac{w_0'^2}{r}(r^2 + 2H_1 - 1) - N^2\frac{w_0^2}{r^3}(r^2 - 2H_1 + 1)\right]dr.$$

Последние две составляющие могут быть любого знака.

Таким образом, так как $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P_{cl}} - \boldsymbol{P_{+}} = 2\frac{U - W_{+}}{W_{cl} + 2W_{++}}$, можно сказать, что:

– в данной задаче P_{cl} (критическая нагрузка без учета поверхностных напряжений) положительна;
– P_{+} (добавка в критическую нагрузку от поверхностных напряжений) может быть любого знака;
– P (критическая нагрузка с учетом поверхностных напряжений) положительна, и может быть как больше, так и меньше «классической» критической нагрузки.

В классическом случае [5], минимальное значение критической нагрузки соответствует N=1.

Решение задачи ищем в виде $w(r,\varphi) = w_0(r)\cos(\varphi)$,

$$w_0(r) = \sum_{k=1}^{4} a_k \frac{R^{k+1}}{r^k}.$$

В случае свободного контура имеют место следующие граничные условия:

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \upsilon\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right]_{r=R} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + (1-\upsilon)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right]_{r=R} = 0$$

Таким образом, константы a_3 и a_4 могут быть выражены через константы a_1 и a_2. Примем $a_2 = \alpha a_1$, тогда:

$$w_0(r) = -\frac{a_1 R^2}{10(3\upsilon - 5)r^4}\,(50r^3 - 30r^3\upsilon - 50\alpha R r^2 + 30\alpha\upsilon R r^2 - 40R^2 r \nu\alpha - 35R^2 r + 55R^2 r\alpha + 35\upsilon R^2 r - 16\nu R^3 + 14R^3\upsilon\alpha + 16R^3 - 18R^3\alpha).$$

$$W_+ = -\frac{\pi h}{12600}\frac{R^2 a_1^2 H_0 \gamma_0}{(5-3\upsilon)^2}\Big((263\upsilon^2 - 1922\upsilon + 792)\boldsymbol{\alpha^2} + (-1904\upsilon^2 + 12462\upsilon - 8758)\boldsymbol{\alpha} + (3053\upsilon^2 - 18226\upsilon + 15173)\Big)$$

$$W_{++} = -\frac{\pi h}{50400}\frac{R^2 a_1^2}{(5-3\upsilon)^2}\Big((1052H_1\upsilon^2 + 18970\upsilon - 7688H_1\upsilon + 3168H_1 - 24015 - 4075\upsilon^2)\boldsymbol{\alpha^2} + (122360 - 104760\upsilon + 24160\upsilon^2 - 7616H_1\upsilon^2 - 35032H_1 + 49848H_1\upsilon)\boldsymbol{\alpha} + (158840\upsilon - 39580\upsilon^2 - 169660 + 60692H_1 + 12212H_1\upsilon^2 - 72904H_1\upsilon)\Big)$$

$$W_{cl} = \frac{\pi h}{10080}\frac{R^2 a_1^2}{(5-3\upsilon)^2}\Big((815\upsilon^2 - 3794\upsilon + 4803)\boldsymbol{\alpha^2} + (-4832\upsilon^2 + 20952\upsilon - 24472)\boldsymbol{\alpha} + (7916\upsilon^2 - 31768\upsilon + 33932)\Big)$$

$$U = \frac{\pi D}{840}\frac{a_1^2}{(5-3\upsilon)^2}\Big((517\upsilon^2 - 2638\upsilon + 2133)\boldsymbol{\alpha^2} + (-2296\upsilon^2 + 11088\upsilon - 8792)\boldsymbol{\alpha} + (2632\upsilon^2 - 11984\upsilon + 9352)\Big).$$

Варьируя α можно получить минимум критической нагрузки.

Далее помимо поверхностных эффектов на границе отверстия учитывается дополнительный вклад поверхностных напряжений, учет которых меняет изгибную жесткость пластины, т.е., следуя [11]:

$$D = \frac{\mu h^3}{6(1-\upsilon)} + \mu_s h^2 + \frac{\lambda_s h^2}{2}. \qquad (2)$$

2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В расчетах принято, что материал выполнен из алюминия, причем для основного материала $\lambda = 58.17$ ГПа, $\mu = 26.13$ Гпа. Данные для поверхности [12]:

$\lambda_s = 6.8511\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $\mu_s = -0.376\,\frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $\gamma_s^0 = 0{,}9108\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ для Al [111].

Отношение критической нагрузки, учитывающей поверхностные эффекты на границе круга (P) к классической нагрузке и учитывающей полную систему сил к классической критической нагрузке:

Таблица 1.

	Отношение крит. нагр.	R =1 нм	R =2 нм	R =4 нм	R =5 нм
h=2 нм	P/P_{cl} $P_{пол}/P_{cl}$	0,990 1,218	0,994 1,229	0,995 1,224	0,996 1,225
h=3 нм	P/P_{cl} $P_{пол}/P_{cl}$	0,991 1,142	0,995 1,147	0,996 1,149	0,997 1,150
h=4 нм	P/P_{cl} $P_{пол}/P_{cl}$	0,991 1,104	0,995 1,110	0,997 1,111	0,998 1,112
h=5 нм	P/P_{cl} $P_{пол}/P_{cl}$	0,991 1,081	0,995 1,086	0,997 1,089	0,998 1,090
h=10 нм	P/P_{cl} $P_{пол}/P_{cl}$	0,991 1,036	0,995 1,041	0,998 1,043	0,999 1,043

Таким образом, видно, что для этого случаю учет поверхностных напряжений, действующих по границе отверстия, уменьшает критическую нагрузку по сравнению с классическим случаем. При увеличении толщины отношение нагрузок асимптотически стремится к 1, т.е. для более «толстых» пластин поверхностные эффекты не играют роли. График (см.рис.1) представлен для R=2 нм и h от 3 нм до 10 нм.

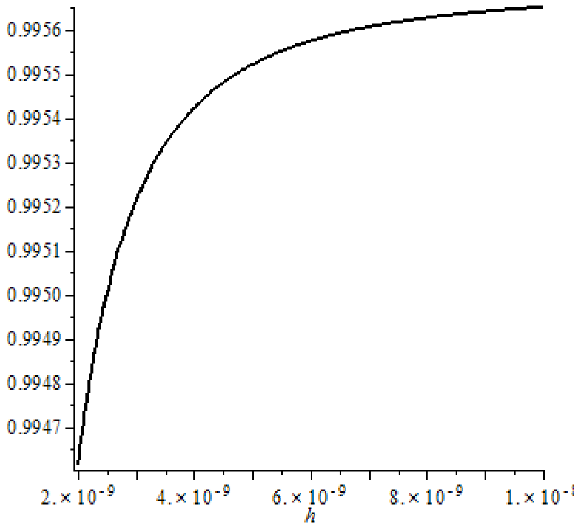


Рис.1.

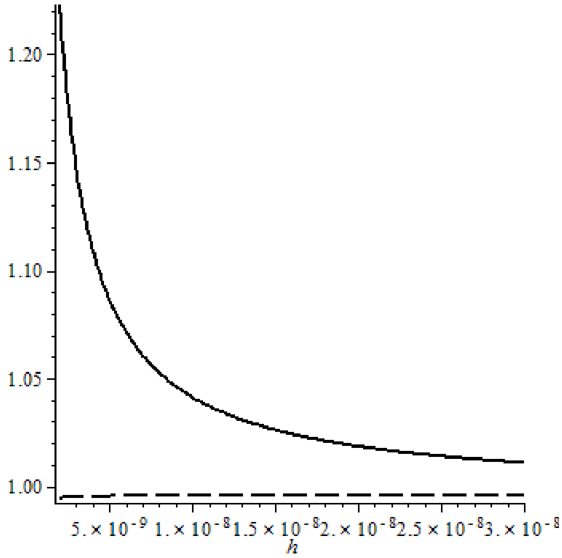


Рис.2.

Из табл.1 видно, что учет поверхностных эффектов на лицевых сторонах пластины увеличивает критическую нагрузку при выбранных упругих и поверхностных модулях, и учет изменения изгибной жесткости пластины (2) играют большую роль, чем учет поверхностных эффектов на границе круга. График (рис.2) представлен для случая r=2 нм и h от 3 нм до 30 нм, пунктир – отношение $\frac{P}{P_{cl}}$, сплошная – отношение $\frac{P_{пол}}{P_{cl}}$. при увеличении толщины пластины поверхностные эффекты становятся пренебрежимо малы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grekov M.A., Morozov N.F.* Solution of the Kirsch problem in view of surface stresses // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2011. – Vol.52. – P.123-129. – Vol.53. – P.163-164.
2. *Miller R.E., Shenoy V.B.* Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // Nanotechnology. – 2000. – 11. – P.139-147
3. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б.* Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // Физическая мезомеханика. – 2010. – Т.13. – №5. – С.127-138.
4. *Еремеев В.А., Альтенбах Х., Морозов Н.Ф.* О влиянии поверхностного натяжения на эффективную жесткость наноразмерных пластин // Докл. РАН. – 2009. – Т.424. – №5. – С.618-620.
5. *Седаева Е.М.* Устойчивость бесконечных пластин, ослабленных круговыми отверстиями / Труды научн.-исслед. ин-та мат. Воронеж. ун-та. – Воронеж, 1973. – Вып.8. – С.32-36.
6. *Бочкарев А.О., Даль Ю.М.* Локальная устойчивость упругих пластин с вырезами // ДАН СССР. – 1989. – Т.308. – №2. – С.312-315.
7. *Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Кулиев Г.Г., Милованова О.Б.* Разрушение и устойчивость тонких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981.
8. *Греков М.А., Язовская А.А.* Эффект поверхностной упругости и остаточного поверхностного напряжения в упругом теле, ослабленном эллиптическим отверстием нанометрового размера // ПММ. – 2014. – Т.14. – Вып.2.
9. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966.
10. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967.
11. *Альтенбах Х., Еремеев В.А., Морозов Н.Ф.* Об уравнениях линейной теории оболочек при учете поверхностных напряжений // Изв. РАН, Механика твердого тела. – 2010. – С.618-620
12. *Shenoy V.B.* Atomistic calculations of elastic properties of metallic for crystal surfaces // Phys. Rev. – 2005. – B 71. – N9. – P.94-104.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ГОРЯЧЕГО ИЗОСТАТИЧЕСКОГО ПРЕССОВАНИЯ С УЧЕТОМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ И НЕОДНОРОДНОЙ ИСХОДНОЙ ПЛОТНОСТИ ЗАСЫПКИ ПОРОШКОВОГО МАТЕРИАЛА*

Бочков А.В.[1], Головешкин В.А.[1,2], Козырев Ю.М.[1], Пономарев А.В.[1], Хомяков Е.И.[3]

[1]*Московский государственный университет приборостроения и информатики, г. Москва, Россия*
[2]*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*
[3]*Синертех, США*

РЕЗЮМЕ

В статье описана проблематика современной порошковой металлургии, описана методика моделирования поведения порошкового материала в ходе горячего изостатического прессования и приведены результаты расчета по данной методике, которые сравниваются с экспериментальными данными.

1. ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития науки и производства требуется все больше материалов и конструкций с повышенными эксплуатационными характеристиками. Одним из методов получения таковых является порошковая металлургия, использующая в качестве исходного сырья металлический порошок.

Одним из методов порошковой металлургии является горячее изостатическое прессование (ГИП), основанное на компактировании порошкового материала под воздействием высоких давлений (порядка 1000 атм.) и температур (порядка 1000°С). Слово «изостатическое» в названии ГИП объясняется историческими причинами и не связано с реальной физикой процесса. В капсулу определенной формы помещается порошковый материал и закладные элементы (образующие полости в готовом изделии), после чего из нее откачивается воздух. Далее капсула помещается в газостат, где под воздействием газа (аргон) осуществляется процесс ГИП. На последнем этапе с готового изделия химическим или механическим путем удаляется капсула и закладные элементы.

Основной проблемой ГИП является получение изделия нужной геометрии с достаточной степенью точности. Зачастую заказчик вынужден оплачивать несколько экспериментальных образцов изделия, что при мелкосерийном производстве, с учетом высокой стоимости исходных материалов и обработки, является крайне невыгодным.

Причинами данной проблемы являются как разница механических свойств капсулы, порошка (или порошков) и закладных элементов, так и неоднородность температуры порошкового материала в процессе ГИП. Последняя связана с высокой степенью вакуума внутри капсулы и, как следствие, крайне медленным прогревом порошка с невозможностью технического определения распределения температуры по объему. Возникающие вследствие этого эффекты подробно рассмотрены в [1]. В последнее время данная проблема особо обострилась в связи

* *Работа выполнена при поддержке гранта ученого совета МГУПИ.*

с появлением газостатов, позволяющих изготавливать изделия больших геометрических размеров. Кроме того, возникла новая проблема – при большой начальной высоте изделия начинает оказывать существенное влияние сила тяжести, под воздействием которой возникает неоднородность исходной плотности засыпки порошкового материала – внизу капсулы плотность несколько выше, чем вверху, что оказывает серьезное влияние на результат. Данная проблема еще достаточно слабо исследована, но игнорировать ее влияние невозможно.

Все перечисленные проблемы определяют необходимость разработки программного комплекса, которая была осуществлена на базе ООО «Лаборатория новых технологий» (Москва) (сферой деятельности которой является проектирование изделий, получаемых методами порошковой металлургии) при сотрудничестве с Московским государственным университетом приборостроения и информатики.

Данный программный комплекс позволяет осуществлять численное моделирование процессов, происходящих в ходе ГИП, и определять конечную форму изделия.

При расчете порошковый материал принимается сплошной средой, возможность чего была показана в [2]. Расчет производится методом конечных элементов с учетом пластических деформаций. Упругие деформации и вязкость не учитываются в силу их несущественности в данном процессе.

Основная масса изделий, получаемых с помощью ГИП, имеет осесимметричную форму, поэтому исходная геометрия капсулы с порошковым материалом и закладными элементами задается в виде половины ее продольного сечения (по оси симметрии).

После выделения в чертеже конечных элементов и задания их исходной температуры и плотности осуществляется отнесение их к различным типам материалов на основе имеющейся базы данных (также возможно добавление новых материалов). Для каждого материала заданы (или вводятся новые) экспериментально полученные графики зависимости от температуры предела текучести, теплопроводности, теплоемкости, объемной плотности, а также графики зависимости от давления экспериментальных функций f_1 и f_2. Также задается график изменения внешней температуры и давления.

2. МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Расчет проводится по следующей схеме. Используется итерационная схема расчета. Весь процесс разбивается на достаточно малые шаги по времени. Каждый шаг по времени рассчитывается по следующей схеме. На каждом шаге итерации решается упругая задача. На основании ее решения уточняются параметры Ламе λ и μ. Процесс продолжается до сходимости.

Вначале необходимо сказать несколько слов об общей математической постановке задачи моделирования процесса ГИП.

1. Уравнение равновесия:

$$div\overline{\sigma} = 0$$

где $\overline{\sigma}$ – тензор напряжений.

2. Уравнение поверхности текучести:

$$\Phi\left(\sigma_{ij}, \rho, T\right) = 0$$

где ρ – относительная плотность, T – температура.

3. Связь тензора напряжений и тензора скоростей деформаций определяется ассоциированным законом течения:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}$$

4. Для описания поведения материала капсулы и закладного элемента используется условие идеальной пластичности:

$$S^2 = \sigma_S^2$$

где σ_S – предел текучести, S^2 – интенсивность девиатора тензора напряжений.

5. Условие несжимаемости:

$$div\bar{u} = 0$$

где $\bar{u}$ – скорость перемещений.

6. Для определения плотности используется уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\bar{u} = 0$$

где $\bar{u}$ – скорость перемещений.

7. Для определения температуры используется уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = div\lambda\left(\rho\right) gradT$$

Задача рассматривается в квазистатической постановке, процесс деформации считается достаточно медленным, поэтому ускорениями в уравнениях равновесия пренебрегаем. Температурным расширением материала пренебрегаем. На границе раздела «порошок-капсула» и «порошок – закладной элемент» предполагается условие неразрывности поля перемещений.

Необходимо отметить, что коэффициент теплопроводности порошковых материалов при изменении относительной плотности ρ в ходе процесса ГИП меняется примерно на 2 порядка. Предел текучести для монолита порошкового материала также сильно изменяется в интервале температур от 20° до 1000°, который характерен для процесса горячего изостатического прессования. Особенности поведения порошкового материала в условиях неоднородного нестационарного температурного поля были впервые отмечены в работе [3].

Для описания механических свойств порошкового материала используется условие текучести Грина [4-5]:

$$\frac{\sigma^2}{f_2^2} + \frac{S^2}{f_1^2} = \sigma_S^2$$

где $\sigma = \sigma_{ii}/3$ – среднее напряжение; σ_S – предел текучести монолита (как функция температуры); $S^2 = \frac{3}{2}\left(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}\right)\left(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}\right)$.

При расчете используются следующие значения параметров Ламе (получение которых было показано в [6]).

Для абсолютно упругого случая:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$
$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E}{3(1-2\nu)} - \frac{2}{3}\mu \qquad (1)$$

Для случая упруго-пластических деформаций:

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu\sigma_S \frac{f_1^2}{3}}{\mu\sqrt{f_2^2\theta_P^2 + f_1^2 H_P^2} + \sigma_S \frac{f_1^2}{3}}$$
$$\tilde{\lambda} = \frac{\frac{E}{1-2\nu}\sigma_S f_2^2}{\frac{E}{1-2\nu}\sqrt{f_2^2\theta_P^2 + f_1^2 H_P^2} + 3\sigma_S f_2^2} - \frac{2}{3}\tilde{\mu} \qquad (2)$$

где θ_P – объемная пластическая деформация; H_P^2 – интенсивность девиатора пластической деформации.

3. АЛГОРИТМ И ПРИМЕР РАСЧЕТА

В основе работы алгоритма лежит схема расчета состояния изделия в определенные промежутки времени. Для этого перед началом работы задается шаг по времени в секундах.

В начале каждого шага деформации считаются чисто упругими, а модули упругости вычисляются по формулам (1). Далее происходит итерационный процесс вычисления деформаций с проверкой условия сходимости (разность деформаций двух последовательных итераций не должна превышать заданной погрешности).

Если условие сходимости на данной итерации не выполнено, производится пересчет значений модулей упругости. Для этого осуществляется проверка условия $\frac{\sigma^2}{f_2^2} + \frac{S^2}{f_1^2} < \sigma_S^2$ – если оно выполняется, то элемент считается упругим и для него модули упругости вычисляются по формулам (1). Если условие не выполняется, то элемент подвержен пластическим деформациям и для него модули упругости вычисляются по формулам (2).

Если условие сходимости выполнено, осуществляется окончательный расчет с последними значениями модулей упругости.

Необходимо отметить, что сходимость данного метода не была теоретически доказана, однако практика показывает возможность его использования. При наличии пластических деформаций алгоритм обеспечивает сходимость, в среднем, не более чем за 20 итераций.

Анализ влияния неоднородного температурного поля с использованием приведенного алгоритма был произведен в работах [7-8]. В данной работе анализируется влияние неоднородной начальной плотности порошкового материала.

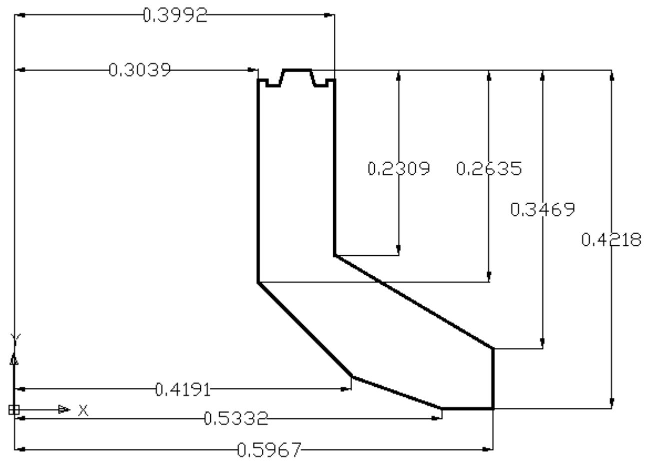


Рис.1. Исходная геометрия.

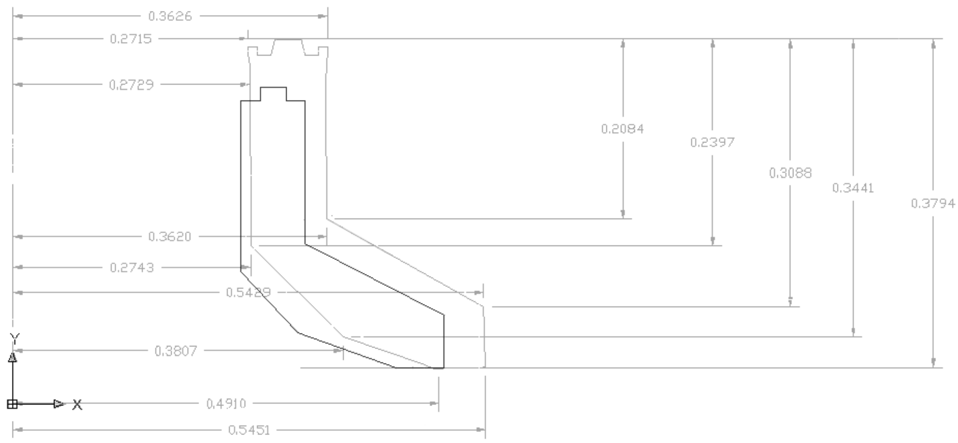


Рис.2. Экспериментальная и расчетная геометрия без учета неоднородности.

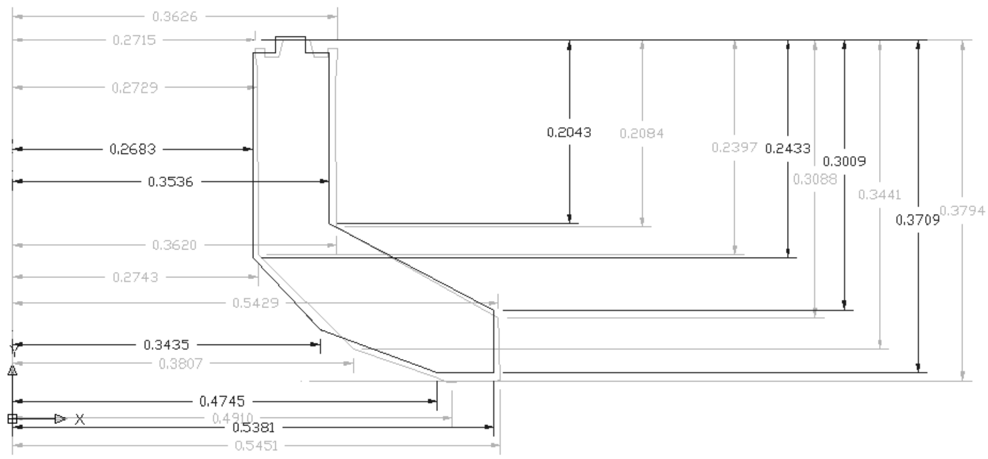


Рис.3. Экспериментальная и расчетная геометрия с учетом неоднородности.

На приведенных рисунках показан пример расчета изделия без учета влияния неоднородности исходной плотности засыпки порошкового материала и с учетом таковой. Результаты показывают сильную зависимость конечной геометрии изделия от указанного фактора. Разница исходной относительной плотности в нижней и верхней части изделия составляла 2% и линейно изменялась по высоте. Все остальные величины – параметры процесса и свойства материала приведены в [8].

Как видно из приведенных рисунков учет данных факторов при моделировании позволяет существенно повысить точность вычисления конечной геометрии изделия и минимизировать дальнейшую обработку изделия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пономарев А.В.* Математическое моделирование деформации порошковых материалов. – LAMBERT Academic Publishing, 2011.
2. *Федоренко И.М., Андриевский В.А.* Основы порошковой металлургии. – Киев: изд. АН ЦССР, 1963.
3. *Друянов Б.А., Самаров В.Н.* Уплотнение порошкового материала в неоднородном температурном поле // Порошковая металлургия. – 1989. – №3.
4. *Друянов Б.А.* Прикладная теория пластичности пористых тел. – М.: Машиностроение, 1989.
5. *Грин Р.Дж.* Теория пластичности пористых тел. – 1 сб. переводов. «Механика». – 1973. – №4. – С.109-120.
6. *Bochkov A.V., Kozyrev Y.M., Ponomarev A.V.* Modeling process of hot isostatic pressing with nonstationary temperature field // Manufacturing Science and Technology. – 2014. – Vol.2(2). – P.45-50,
7. *Бочков А.В., Головешкин В.А., Пирумов А.Р., Пономарев А.В., Самаров В.Н.* Особенности влияния неоднородного нестационарного температурного поля на процесс горячего изостатического прессования труб // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. Научно – технический журнал Орел ГТУ. – 2010. – №6 (284). – С.3-9.
8. *Бочков А.В., Головешкин В.А., Козырев Ю.М., Пономарев А.В., Самаров В.Н.* Особенности процесса уплотнения порошковых материалов в неоднородном нестационарном температурном поле // Механика композиционных материалов и конструкций. – Т.11. – №3. – 2011. – С.401-410.

МЕТОД РАДИАЛЬНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ДЛЯ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ПРОБЛЕМЫ ЭШЕЛБИ В ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Волков-Богородский Д.Б., Лурье С.А.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

В работе предложен метод точного решения обобщенной задачи Эшелби для градиентной теории упругости, основанный на использовании представления решения в многофазной структуре композита через потенциалы уравнений Лапласа и Гельмгольца, а также с помощью обобщенного интегрального представления Эшелби в методе самосогласованных фаз. Для градиентной теории упругости впервые дано точное решение фундаментальной задачи Эшелби-Кристенсена об определении эффективных упругих свойств композитов со сферическими и цилиндрическими включениями, позволяющее учесть влияние масштабных эффектов.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе дано аналитическое решение проблемы определения эффективных свойств дисперсных композитов со сферическими и цилиндрическими микро/нано включениями в градиентной теории упругости (проблема Херве-Зао, Кристенсена-Ло [1,2]). Предварительно представлена вариационная модель градиентной упругости, аналогичная градиентной теории межфазного слоя [3-8], в которой тензоры градиентных модулей упругости удовлетворяют фундаментальным условиям: условию потенциальности и условию симметрии.

В работе для получения аналитического решения фундаментальной проблемы механики композитов для градиентной теории упругости используются идеи, развитые в исследованиях Эшелби, Кристенсена [1,2,9,10] и основанные на привлечении энергетических оценок и энергетических теорем Эшелби. Развивается новый метод, который предполагает использование специальных разложений решений в слоях многослойной структуры в окрестности включений и базируется следующих полученных недавно новых результатах [11,12]:

- обобщение теоремы Эшелби об интегральном критерии эквивалентности гетерогенной и однородной структур, обобщенной на градиентные теории общего вида и
- обобщение теоремы Найбера-Папковича об общей форме представления решений в градиентных теориях через потенциалы уравнений Лапласа и Гельмгольца.

В результате показывается, что исследуемая задача механики композитов в градиентной теории упругости имеет аналитическое решение, так как сводится к решению замкнутой конечной алгебраической системе уравнений.

2. ГРАДИЕНТНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Градиентная модель теории упругости, рассматриваемая в данной работе, соответствует функционалу потенциальной энергии, содержащему помимо слагаемых классической квадратичной формы от деформаций, моментные слагаемые более высокого порядка от перемещений:

$$E = \frac{1}{2}\int\left(C_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + C_{ijklmn}\,R_{i,jk}R_{l,mn}\right)dV = \frac{1}{2}\int\left(C_{ijkl}\,R_{i,j}R_{k,l} + C_{ijklmn}\,R_{i,jk}R_{l,mn}\right)dV\,, \qquad (2.1)$$

где R_i – компоненты вектора перемещений $\boldsymbol{R}$ в градиентной модели, $\varepsilon_{ij} = \left(R_{i,j} + R_{j,i}\right)/2$ – деформации, C_{ijkl} – тензор модулей классической упругости, C_{ijklmn} – тензор градиентных модулей (тензор шестого ранга).

Предполагается, что выполняются следующие условия симметрии и потенциальности для градиентных модулей:

$$C_{ijklmn} = C_{lmnijk} = C_{ikjlmn} = C_{ijklnm}\,. \qquad (2.2)$$

В данной работе рассматривается конкретный случай изотропной градиентной среды, соответствующей классическим и моментным модулям, выражаемым через упругие константы Ляме λ, μ и дополнительный масштабный параметр C (т.е. рассматривается однопараметрическая градиентная модель):

$$C_{ijkl} = \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}\right), \qquad (2.3)$$

$$C_{ijklmn} = \frac{\mu+\lambda}{C}\left[\left(\frac{\mu}{2}\delta_{jk}\,\delta_{in} + \frac{\mu+\lambda}{4}\left(\delta_{ik}\,\delta_{jn} + \delta_{ij}\,\delta_{kn}\right)\right)\delta_{lm} + \left(\frac{\mu}{2}\delta_{jk}\,\delta_{im} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\mu+\lambda}{4}\left(\delta_{ik}\,\delta_{jm} + \delta_{ij}\,\delta_{km}\right)\right)\delta_{ln}\right] + \frac{\mu}{C}\left(\mu\,\delta_{jk}\,\delta_{il} + \frac{\mu+\lambda}{2}\left(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{ij}\,\delta_{kl}\right)\right)\delta_{mn}, \qquad (2.4)$$

где δ_{ij} – дельта Кронекера.

Классические и моментные напряжения определяются равенствами Грина:

$$\sigma_{ij} = \partial E/\partial R_{i,j} = C_{ijkl}R_{k,l}\,, \qquad \mu_{ijk} = \partial E/\partial R_{i,jk} = C_{ijklmn}R_{l,mn}\,,$$

и соответственно имеют вид:

$$\sigma_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\,\theta + \mu\left(R_{i,j} + R_{j,i}\right), \qquad (2.5)$$

$$\mu_{ijk} = \frac{\mu+\lambda}{2}\left[\left(\frac{\mu}{C}\nabla^2 R_j + \frac{\mu+\lambda}{C}\theta_{,j}\right)\delta_{ik} + \left(\frac{\mu}{C}\nabla^2 R_k + \frac{\mu+\lambda}{C}\theta_{,k}\right)\delta_{ij}\right] + \mu\left(\frac{\mu}{C}\nabla^2 R_i + \frac{\mu+\lambda}{C}\theta_{,i}\right)\delta_{jk}. \qquad (2.6)$$

С учетом конкретного вида тензоров C_{ijkl} и C_{ijklmn} система разрешающих уравнений и соответствующий функционал энергии могут быть записаны в виде:

$$H_{ij}L_{jk}R_k + F_i = 0,$$
$$H_{ij} = -\frac{1}{C}(L_{ij} - C\,\delta_{ij}), \quad L_{ij} = (\lambda+\mu)\partial_i\,\partial_j + \delta_{ij}\,\mu\nabla^2, \qquad (2.7)$$

$$E = \frac{1}{2}\int\left[2\mu\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \lambda\,\theta^2 + \frac{(L_{ij}R_j)(L_{ij}R_j)}{C}\right]dV\,. \qquad (2.8)$$

3. ОБОБЩЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПАПКОВИЧА-НЕЙБЕРА

Структура разрешающих уравнений рассматриваемой градиентной теории

(2.7) позволяет сформулировать теорему о разложении перемещений R_i на сумму (разность) двух независимых функций U_i и u_i, трактуемых как классическое и когезионное (отвечающее за масштабные эффекты в градиентной теории упругости) поле перемещений.

Классическое поле перемещений вводится как действие дифференциального оператора H на общие перемещения: $U_i = H_{ij} R_j$. Из (2.7) следует, что они удовлетворяют классическому уравнению упругости:

$$U_i = H_{ij} R_j, \qquad L_{ij} U_j + F_i = 0. \tag{3.1}$$

Когезионными перемещениями u_i мы называем разность между общим и классическим полем перемещений $u_i = U_i - R_i$; из вида оператора H получаем конструктивную формулу и разрешающие уравнения для когезионных перемещений:

$$u_i = -L_{ij} R_j / C, \qquad L_{ij} u_j - C u_i + F_i = 0, \qquad R_i = U_i - u_i. \tag{3.2}$$

И это представление является единственным.

Аналитическую работу с решениями уравнения (2.7) облегчает представление общего поля перемещений через вспомогательные потенциалы, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца, Лапласа или Пуассона. Такое представление для градиентных перемещений дает обобщенная формула Папковича-Нейбера [11-13], выражающая перемещения через вспомогательные потенциалы $f_i(P)$, $f_i^*(P)$, $f_i^{(0)}(P)$ и $\phi^{(0)}(P)$, удовлетворяющие уравнению Гельмгольца и Пуассона:

$$R_i(P) = \frac{f_i^{(0)}(P) - f_i(P)}{\mu} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\phi^{(0)} - x_j\, f_j^{(0)}(P)}{4\mu\,(1-\nu)} - f_{j,j}^* + f_{j,j} \right), \tag{3.3}$$

$$\nabla^2 f_i - \frac{C}{\mu} f_i = F_i, \qquad \nabla^2 f_i^* - \frac{C}{2\mu+\lambda} f_i^* = F_i, \tag{3.4}$$

$$\nabla^2 f_i^{(0)}(P) + F_i(P) = 0, \qquad \nabla^2 \phi^{(0)}(P) + x_i\, F_i(P) = 0. \tag{3.5}$$

Это представление позволяет вместо градиентного уравнения четвертого порядка работать с более простыми уравнениями второго порядка (Гельмгольца и Пуассона).

Заметим, что элементы μ_{ijk} тензора моментных напряжений (2.6) выражаются в рассматриваемой градиентной модели непосредственно через компоненты вектора когезионных перемещений:

$$\mu_{ijk} = -\frac{\mu+\lambda}{2}\left(u_j\,\delta_{ik} + u_k\,\delta_{ij} \right) - \mu\, u_i\,\delta_{jk}. \tag{3.6}$$

Аналогично, элементы тензора σ_{ij} классических напряжений (2.5) выражаются на основании (3.2) через разность соответствующих компонент общего вектора перемещений:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}) - \sigma_{ij}^*, \tag{3.7}$$

где

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{U}) = \lambda\,\delta_{ij}\,U_{l,l} + \mu\left(U_{i,j} + U_{j,i}\right), \qquad \sigma_{ij}^* = \lambda\,\delta_{ij}\,u_{l,l} + \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right). \tag{3.8}$$

4. ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ЭШЕЛБИ

Рассмотрим однородное градиентное уравнение (3.2) и представление (3.3) для перемещений $\boldsymbol{R}(P)$, в котором вспомогательные потенциалы удовлетворяют однородному уравнению (Лапласа и Гельмгольца):

$$\nabla^2 f_i^{(0)}(P) = \nabla^2 \phi_0(P) = 0, \quad \nabla^2 f_i - \frac{C}{\mu} f_i = 0, \quad \nabla^2 f_i^* - \frac{C}{2\mu + \lambda} f_i^* = 0. \qquad (4.1)$$

Для включений сферической формы можно указать явное аналитическое представление для этих потенциалов, которое позволяет получить точное решение обобщенной задачи Эшелби (см. [13]) в модели трех сферических тел (см. рис.1) для градиентного уравнения теории упругости в явном конечном виде.

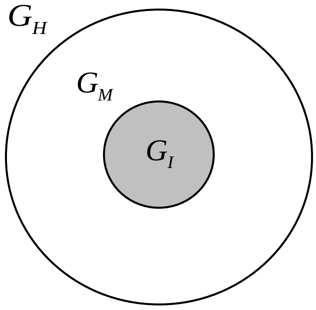


Рис.1. Модель трех сферических тел

Требуется построить вектор-функцию $\boldsymbol{R}(P) = \{R_i(P)\}$ в форме (3.3), (4.1), удовлетворяющую необходимым контактным условиям на межфазных границах ∂G_I, ∂G_M, ∂G_H и соответствующую однородному напряженно-деформируемому состоянию на бесконечности:

$$R_i(P) \to U_i^{(0)}(P), \quad U_i^{(0)}(P) = \varepsilon_{ij}^{(0)} x_j, \quad P = \{x_1, x_2, x_3\} \to \infty. \qquad (4.2)$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ – деформации однородного напряженного состояния на бесконечности; а функция $U_i^{(0)}(P)$ соответствует потенциалу $f_i^{(H)}(P) = \varepsilon_{ij}^{(H)} x_j$ в представлении (3.3), (5.1), где $\varepsilon_{ij}^{(H)} = 2\mu\,(1-\nu)/(1-2\nu)\,\varepsilon_{ij}^{(0)}$.

Контактные условия на границе $P \in \partial G_I$ между включениями и матрицей в рассматриваемом градиентном уравнении в соответствии с (2.1) – (2.6) имеют следующий вид:

$$[R_i] = \left[\frac{\partial R_i}{\partial n}\right] = 0, \quad [\mu_{ijk} n_k] - D_{ij}\,\frac{\partial R_j}{\partial n} = \left[p_i(\boldsymbol{U}) - \frac{\partial(\mu_{ijk} n_k s_j)}{\partial s} - \frac{\partial(\mu_{ijk} n_k \tau_j)}{\partial \tau}\right] = 0, \qquad (4.3)$$

Здесь $\boldsymbol{D} = \{D_{ij}\}$ – матрица коэффициентов, $D_{ij} = A n_i n_j + B(\delta_{ij} - n_i n_j)$, $p_i(\boldsymbol{U}) = \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}) n_j$ – классические напряжения классической составляющей общего поля перемещений, $\{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\tau}\}$ – три ортогональных направления в точке на поверхности (ортогональный репер), одно из которых – нормаль $\boldsymbol{n}$ в заданной граничной точке, а два остальных – любые два ортогональных касательных направления $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{\tau}$ в этой же точке.

Когезионная поправка к поверхностным силам $p_i(\boldsymbol{U})$ в последнем условии (5.3), целиком определяемая когезионной составляющей u_i общего поля перемещений, может быть переписана с учетом формулы (2.6) на поверхности контакта в более удобном виде, использующем вычисление нормальной (вместо касательной) производной:

$$\hat{p}_i(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial\left(\mu_{ijk} n_k s_j\right)}{\partial s} + \frac{\partial\left(\mu_{ijk} n_k \tau_j\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial M_{i(n)}}{\partial n},$$

$$M_{ij} = -\mu u_i n_j - \frac{\mu+\lambda}{2}\left(u_j n_i + u_k n_k \delta_{ij}\right), \quad M_{i(n)} = -\mu u_i - (\mu+\lambda) u_k n_k n_i. \tag{4.4}$$

Контактные условия на границе с классической областью G_H имеют несколько иной, упрощенный вид по отношению к (5.3), вследствие равенства нулю когезионного поля в области G_H:

$$\left[U_i\right] = \left[p_i(\boldsymbol{U})\right] = 0, \quad u_i(P) = 0, \quad P \in \partial G_H. \tag{4.5}$$

Структура обобщенного представления Папковича-Нейбера (3.3) соответствует разложению (3.2) общего поля перемещений на классическую и когезионную составляющие, причем за классическое поле перемещений отвечают гармонические потенциалы $f_i^{(0)}$, а за когезионное поле перемещений гельмгольцевские потенциалы f_i и f_i^*.

Анализируя граничные уравнения контакта (5.3), (5.5), представим входящие в них величины на сферической или цилиндрической поверхности радиуса r с вектором нормали $\boldsymbol{n}$ в следующем виде:

$$U_i(P) = \frac{f_i^{(0)}}{\mu} - \frac{1}{4\mu(1-\nu)} \frac{\partial (x_k f_k^{(0)})}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial n} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial n} - \frac{1}{4\mu(1-\nu)} \frac{\partial^2 (x_k f_k^{(0)})}{\partial n\, \partial x_i}, \tag{4.6}$$

$$p_i(\boldsymbol{U}) = \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial n} + n_k \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\nu}{1-\nu} n_i \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial x_k} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 (x_k f_k^{(0)})}{\partial n\, \partial x_i}, \tag{4.7}$$

$$u_i(P) = \frac{f_i(P)}{\mu} + \frac{1}{C}\frac{\partial^2 (f_k^* - f_k)}{\partial x_i\, \partial x_k}, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial n} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial f_i}{\partial n} + \frac{1}{C}\frac{\partial^3 (f_k^* - f_k)}{\partial n\, \partial x_i\, \partial x_k}, \tag{4.8}$$

$$\hat{p}_i(\boldsymbol{u}) = -\frac{\mu+\lambda}{2}\left[\left(n_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - n_i \frac{\partial u_n}{\partial n}\right) + n_i \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{\partial u_n}{\partial n}\right)\right] - \frac{k_{\mu,\lambda} u_i}{r}, \tag{4.9}$$

где $k_{\mu,\lambda} = 4\mu + \lambda$ для сферической поверхности, $k_{\mu,\lambda} = 3\mu + \lambda$ для цилиндрической поверхности. При выводе формулы (4.9) мы использовали следующее представление вектора нормали и матрицы когезионных моментов на сферической или цилиндрической поверхности радиуса r через декартовы координаты:

$$M_{ij} = -\frac{1}{r}\left[\mu u_i x_j + \frac{\mu+\lambda}{2}\left(u_j x_i + u_k x_k \delta_{ij}\right)\right].$$

5. МЕТОД РАДИАЛЬНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

В случае включений сферической или цилиндрической формы могут быть предложены явные аналитические конструкции решения обобщенной задачи Эшелби, точно учитывающие контактные условия на межфазных границах для градиентного уравнения теории упругости в явном конечном виде.

Сформулируем метод радиальных множителей для однородного уравнения (2.7) с условиями (4.2). Для этого с каждым слоем (с включением G_I, матрицей G_M и эффективной средой G_H, см. рис.1) свяжем набор базисных потенциалов, построенных с помощью однородного гармонического полинома $\boldsymbol{f}_0^{(H)}(P)=\left\{f_i^{(H)}\right\}$ первой степени и функций $\chi_1(r)$, $\hat{\chi}_1(r)$, $h_1(r)$, $\hat{h}_1(r)$, $h_1^*(r)$, $\hat{h}_1^*(r)$, зависящих от радиальной координаты, сферической $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, или цилиндрической $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, соответственно для включений сферической или цилиндрической формы (радиальные функций):

$$\boldsymbol{f}_1^{(0)}(P)=\boldsymbol{f}_0^{(H)}(P), \qquad \boldsymbol{f}_2^{(0)}(P)=\hat{\chi}_1(r)\,\boldsymbol{f}_0^{(H)}(P), \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{f}_3^{(0)}(P)=\nabla\operatorname{div}\left(\hat{\chi}_1(r)\,\boldsymbol{f}_0^{(H)}\right), \qquad \boldsymbol{f}_4^{(0)}(P)=\chi_1(r)\nabla\operatorname{div}\left(\hat{\chi}_1(r)\,\boldsymbol{f}_0^{(H)}\right), \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{f}_1(P)=h_1(r)\,\boldsymbol{f}_0^{(H)}(P), \qquad \boldsymbol{f}_2(P)=\hat{h}_1(r)\,\boldsymbol{f}_0^{(H)}(P), \tag{5.3}$$

$$\boldsymbol{f}_3^*(P)=h_1^*(r)\,\boldsymbol{f}_0^{(H)}(P), \qquad \boldsymbol{f}_4^*(P)=\hat{h}_1^*(r)\,\boldsymbol{f}_0^{(H)}(P). \tag{5.4}$$

Здесь $\chi_1(r)=r^7$, $\hat{\chi}_1(r)=r^{-3}$ для включений сферической формы; $\chi_1(r)=r^6$, $\hat{\chi}_1(r)=r^{-2}$ для включений цилиндрической формы; $h_1(r)=r^{-3}\left(\kappa r\operatorname{ch}(\kappa r)-\operatorname{sh}(\kappa r)\right)$, $\hat{h}_1(r)=r^{-3}\left(\kappa r\operatorname{sh}(\kappa r)-\operatorname{ch}(\kappa r)\right)$ для включений сферической формы; $h_1(r)=r^{-1}I_1(\kappa r)$, $\hat{h}_1(r)=r^{-1}K_1(\kappa r)$ для включений цилиндрической формы; аналогично для $h_1^*(r)$ и $\hat{h}_1^*(r)$ с заменой κ на κ^*, где $\kappa=\sqrt{C/\mu}$ и $\kappa^*=\sqrt{C/(2\mu+\lambda)}$ – масштабные параметры, имеющие размерность обратного расстояния; здесь $I_1(z)$ и $K_1(z)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода первого порядка.

Сформулированные базисные потенциалы разбиваются на три группы, соответственно (5.1)-(5.2), (5.3) и (5.4), для составления композиции гармонических и гельмгольцевских потенциалов в представлении Папковича-Нейбера (3.3). Отметим, что эти группы потенциалов удовлетворяют необходимым однородным уравнениям Лапласа и Гельмгольца (4.1).

Радиальные функции χ_1, h_1 и h_1^* являются регулярными, а $\hat{\chi}_1$, $\hat{h}_1$ и $\hat{h}_1^*$ – сингулярными в области определения. Более того, они определяются путем дифференцирования фундаментального решения уравнения Лапласа и Гельмгольца в 3D и 2D (может быть с некоторым коэффициентом):

$$\hat{\chi}_1=C_0\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{1}{r}\right), \qquad h_1=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\operatorname{sh}(\kappa r)}{r}\right), \qquad \hat{h}_1=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\operatorname{ch}(\kappa r)}{r}\right) \quad \text{– в 3D;}$$

$$\hat{\chi}_1=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\ln\frac{1}{r}\right), \qquad h_1=C_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)I_0(\kappa r), \qquad \hat{h}_1=C_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)K_0(\kappa r) \quad \text{– в 2D,}$$

где $I_0(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $K_0(z)$ – функция Макдональда нулевого порядка. Благодаря этим свойствам радиальных множителей потенциалы (5.1)-(5.4) и удовлетворяют необходимым уравнениям Лапласа и Гельмгольца.

Составим комбинации гармонических потенциалов $\boldsymbol{f}_0 = \left\{ f_i^{(0)}(P) \right\}$, определяющих решение $\boldsymbol{U}(P)$ классического уравнения Ляме в областях G_I, G_M и G_H на основе представления (3.3):

$$\boldsymbol{f}_0(P) = A_0\, \boldsymbol{f}_0^{(H)} + D_0\, \chi_1 \nabla \operatorname{div}\left(\hat{\chi}_1\, \boldsymbol{f}_0^{(H)}\right), \quad P \in G_I, \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{f}_0(P) = A_1\, \boldsymbol{f}_0^{(H)} + B_1\, \hat{\chi}_1\, \boldsymbol{f}_0^{(H)} + C_1 \nabla \operatorname{div}\left(\hat{\chi}_1\, \boldsymbol{f}_0^{(H)}\right) + D_1\, \chi_1 \nabla \operatorname{div}\left(\hat{\chi}_1\, \boldsymbol{f}_0^{(H)}\right), \quad P \in G_M, \tag{5.8}$$

$$\boldsymbol{f}_0(P) = \boldsymbol{f}_0^{(H)} + B_2\, \hat{\chi}_1\, \boldsymbol{f}_0^{(H)} + C_2 \nabla \operatorname{div}\left(\hat{\chi}_1\, \boldsymbol{f}_0^{(H)}\right), \quad P \in G_H. \tag{5.9}$$

Составим комбинации гельмгольцевских потенциалов $\boldsymbol{f} = \left\{ f_i(P) \right\}$ и $\boldsymbol{f}^* = \left\{ f_i^*(P) \right\}$, определяющих когезионное поле $\boldsymbol{u}(P)$ в областях G_I и G_M на основе представления (3.3); в области G_H когезионное поле отсутствует:

$$\boldsymbol{f}(P) = A_0^* h_1(r)\, \boldsymbol{f}_0^{(H)}, \quad \boldsymbol{f}^*(P) = D_0^* h_1^*(r)\, \boldsymbol{f}_0^{(H)}, \quad P \in G_I, \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{f}(P) = A_1^* h_1(r)\, \boldsymbol{f}_0^{(H)} + B_1^* \hat{h}_1(r)\, \boldsymbol{f}_0^{(H)}, \\ &\boldsymbol{f}^*(P) = C_1^* h_1^*(r)\, \boldsymbol{f}_0^{(H)} + D_1^* \hat{h}_1^*(r)\, \boldsymbol{f}_0^{(H)}, \quad P \in G_M. \end{aligned}, \tag{5.11}$$

Замечательной особенностью потенциалов (5.1)-(5.4) является то обстоятельство, что для каждого из них величины (4.6)-(4.9), входящие в контактные условия (4.3), (4.5) представляются в единообразной форме с некоторыми коэффициентами $A(r)$ и $B(r)$ (радиальными множителями) относительно комбинаций $\boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{f}_0^{(H)}\right)/r^2$ и $\boldsymbol{f}_0^{(H)} - \boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{f}_0^{(H)}\right)/r^2$. Отметим, что для сферической и цилиндрической поверхности эти комбинации представляют собой нормальную $f_n^{(H)} = \left(\boldsymbol{n}\, \boldsymbol{f}_0^{(H)}\right)$ и касательную $\boldsymbol{f}_s^{(H)} = \boldsymbol{f}_0^{(H)} - \boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{n}\, \boldsymbol{f}_0^{(H)}\right)$ составляющие базисного гармонического полинома $\boldsymbol{f}_0^{(H)}(P)$.

Таким образом:

$$\boldsymbol{F}(P) = A(r)\boldsymbol{n}\, f_n^{(H)}(P) + B(r)\, \boldsymbol{f}_s^{(H)}(P), \tag{5.12}$$

где $\boldsymbol{F}(P)$ – любая из величин (4.6)-(4.9). Следовательно, контактные уравнения (4.3), (4.5) могут быть сформулированы в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов при базисных потенциалах (5.1)-(5.4).

Для объемной деформации (в 3D и 2D) вклады касательных компонент автоматически равны нулю, а в случае девиаторной деформации одному векторному уравнению (4.3), (4.5) соответствует два алгебраических уравнения, соответствующих нормальной и касательной составляющей векторного поля. При этом число базисных потенциалов для каждой из подобластей G_I, G_M и G_H совпадает с числом контактных уравнений на межфазных границах ∂G_I и ∂G_H (для объемной деформации это 7 уравнений, для девиаторной деформации это 14 уравнений).

Дадим вид классических компонент (4.6), (4.7) в разложении (5.12) в случае девиаторной деформации $\varepsilon_{ii}^{(0)} = 0$ для потенциалов (5.1), (5.2). При выводе соответствующих формул используются соотношения $\operatorname{div} \boldsymbol{f}_0^{(H)} = 0$, $\nabla\left(\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{f}_0^{(H)}\right) = 2\, \boldsymbol{f}_0^{(H)}$.

Потенциал $\boldsymbol{f}_1^{(0)}$ для сферических и цилиндрических включений порождает нормальные и касательные компоненты одного и того же вида:

$$U_n = \frac{(1-2\nu)\, f_n^{(H)}}{2\mu(1-\nu)}, \quad \boldsymbol{U}_s = \frac{(1-2\nu)\, \boldsymbol{f}_s^{(H)}}{2\mu(1-\nu)}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial n} = \frac{\boldsymbol{U}}{r},$$

$$p_n = \frac{(1-2\nu)\, f_n^{(H)}}{(1-\nu)\, r}, \quad \boldsymbol{p}_s = \frac{(1-2\nu)\, \boldsymbol{f}_s^{(H)}}{(1-\nu)\, r}.$$

Потенциал $\boldsymbol{f}_2^{(0)}$ для сферических включений:

$$U_n = \frac{(5-4\nu)\, f_n^{(H)}}{4\mu(1-\nu)\, r^3}, \quad \boldsymbol{U}_s = \frac{(1-2\nu)\, \boldsymbol{f}_s^{(H)}}{2\mu(1-\nu)\, r^3}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial n} = -\frac{2\boldsymbol{U}}{r},$$

$$p_n = -\frac{(5-\nu)\, f_n^{(H)}}{(1-\nu)\, r^4} \quad \boldsymbol{p}_s = \frac{(1+\nu)\, \boldsymbol{f}_s^{(H)}}{(1-\nu)\, r^4};$$

потенциал $\boldsymbol{f}_2^{(0)}$ для цилиндрических включений:

$$U_n = \frac{f_n^{(H)}}{\mu\, r^2}, \quad \boldsymbol{U}_s = \frac{(1-2\nu)\, \boldsymbol{f}_s^{(H)}}{2\mu(1-\nu)\, r^2}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial n} = -\frac{\boldsymbol{U}}{r},$$

$$p_n = -\frac{2\, f_n^{(H)}}{(1-\nu)\, r^3}, \quad \boldsymbol{p}_s = \frac{\boldsymbol{f}_s^{(H)}}{(1-\nu)\, r^3}.$$

Потенциал $\boldsymbol{f}_3^{(0)}$ для сферических включений:

$$U_n = \frac{9\beta_\nu f_n^{(H)}}{4\mu(1-\nu)\, r^5}, \quad \boldsymbol{U}_s = -\frac{3\beta_\nu\, \boldsymbol{f}_s^{(H)}}{2\mu(1-\nu)\, r^5}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial n} = -\frac{4\boldsymbol{U}}{r},$$

$$p_n = -\frac{18\beta_\nu f_n^{(H)}}{(1-\nu)\, r^6}, \quad \boldsymbol{p}_s = \frac{12\beta_\nu\, \boldsymbol{f}_s^{(H)}}{(1-\nu)\, r^6}, \quad \beta_\nu = (7-4\nu);$$

потенциал $\boldsymbol{f}_3^{(0)}$ для цилиндрических включений:

$$U_n = \frac{\beta_\nu f_n^{(H)}}{\mu(1-\nu)\, r^4}, \quad \boldsymbol{U}_s = -\frac{\beta_\nu\, \boldsymbol{f}_s^{(H)}}{\mu(1-\nu)\, r^4}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial n} = -\frac{3\boldsymbol{U}}{r},$$

$$p_n = -\frac{12\beta_\nu f_n^{(H)}}{(1-\nu)\, r^5}, \quad \boldsymbol{p}_s = \frac{12\beta_\nu\, \boldsymbol{f}_s^{(H)}}{(1-\nu)\, r^5}, \quad \beta_\nu = (3-2\nu).$$

Потенциал $\boldsymbol{f}_4^{(0)}$ для сферических включений:

$$U_n = -\frac{9\nu r^2 f_n^{(H)}}{\mu(1-\nu)}, \quad \boldsymbol{U}_s = -\frac{3(7-4\nu)\, r^2\, \boldsymbol{f}_s^{(H)}}{2\mu(1-\nu)}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial n} = \frac{3\boldsymbol{U}}{r},$$

$$p_n = \frac{9\nu r\, f_n^{(H)}}{1-\nu}, \quad \boldsymbol{p}_s = -\frac{3(7+2\nu)\, r\, \boldsymbol{f}_s^{(H)}}{1-\nu};$$

потенциал $\boldsymbol{f}_4^{(0)}$ для цилиндрических включений:

$$U_n = -\frac{4\nu r^2 f_n^{(H)}}{\mu(1-\nu)}, \quad \boldsymbol{U}_s = -\frac{2(3-2\nu) r^2 \boldsymbol{f}_s^{(H)}}{\mu(1-\nu)}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial n} = \frac{3\boldsymbol{U}}{r},$$

$$p_n = 0, \quad \boldsymbol{p}_s = -\frac{12 r\, \boldsymbol{f}_s^{(H)}}{1-\nu}.$$

Дадим вид классических компонент (4.6), (4.7) в разложении (5.12) в случае объемной деформации; в этом случае для базисного гармонического полинома на поверхности сферы или цилиндра выполняются соотношения: $\operatorname{div} \boldsymbol{f}_0^{(H)} = 3 f_n^{(H)}/r$ или $\operatorname{div} \boldsymbol{f}_0^{(H)} = 2 f_n^{(H)}/r$ – соответственно для сферических или цилиндрических включений.

Для перемещений формулы имеют такой же вид, как и раньше, а для поверхностных напряжений (6.2) – приобретают несколько иной вид: $p_n = \frac{(1+\nu)\, f_n^{(H)}}{(1-\nu)\, r}$ или $p_n = \frac{f_n^{(H)}}{(1-\nu)\, r}$ для потенциала $\boldsymbol{f}_1^{(0)}$; $p_n = -\frac{(5-4\nu)\, f_n^{(H)}}{(1-\nu)\, r^4}$ или $p_n = -\frac{2\, f_n^{(H)}}{r^3}$ для потенциала $\boldsymbol{f}_2^{(0)}$ в случае сферической или цилиндрической поверхности.

Прежде, чем записать разложения (5.12) для когезионных компонент (4.8), (4.9), введем семейство радиальных функций при целом индексе $n \geq 0$:

$$h_n(r) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^n \left(\frac{\operatorname{sh}(\kappa r)}{r}\right), \quad \hat{h}_n(r) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\operatorname{ch}(\kappa r)}{r}\right),$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \tag{5.13}$$

$$h_n(r) = C_1 \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^n I_0(\kappa r), \quad \hat{h}_n(r) = C_1 \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^n K_0(\kappa r),$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \tag{5.14}$$

связанных между собой трехчленными рекуррентными или дифференциальными соотношениями:

$$r^2 h_{n+2} = \kappa^2 h_n - (2n+3) h_{n+1}, \quad h_n' = \frac{\kappa r\left(h_n - h_n''\right)}{2(n+1)}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$r^2 h_{n+2} = \kappa^2 h_n - 2(n+1) h_{n+1}, \quad h_n' = \frac{\kappa r\left(h_n - h_n''\right)}{2n+1}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Аналогично для $\left\{\hat{h}_n(r)\right\}$, а также для $\left\{h_n^*(r)\right\}$ и $\left\{\hat{h}_n^*(r)\right\}$ с заменой масштабного параметра κ на κ^*.

Обозначая символами без звездочки величины, соответствующие $h_n(r)$, а символами со звездочкой – соответствующие $h_n^*(r)$, получаем для сферических включений и для девиаторного поля деформаций $\varepsilon_{ii}^{(0)} = 0$:

$$u_n = \frac{3 h_2}{C}\, f_n^{(H)}, \quad \frac{\partial u_n}{\partial n} = \frac{3}{r}\left(\frac{h_1}{\mu} - \frac{4 h_2}{C}\right) f_n^{(H)},$$

$$\hat{p}_n = \frac{9}{r}\left(\frac{(\mu+\lambda) h_1}{6\mu} - \frac{(2\mu+\lambda) h_2}{C}\right) f_n^{(H)},$$

$$u_n^* = \left(\frac{h_1^*}{2\mu+\lambda} - \frac{3h_2^*}{C} \right) f_n^{(H)}, \qquad \frac{\partial u_n^*}{\partial n} = \left(\frac{r^2 h_2^* - 2h_1^*}{2\mu+\lambda} + \frac{12h_2^*}{C} \right) \frac{f_n^{(H)}}{r},$$

$$\hat{p}_n^* = -\left(\frac{(5\mu+2\lambda)h_1^*}{2\mu+\lambda} - \frac{9(2\mu+\lambda)h_2^*}{C} \right) \frac{f_n^{(H)}}{r},$$

$$\boldsymbol{u}_s = \left(\frac{h_1}{\mu} - \frac{2h_2}{C} \right) \boldsymbol{f}_s^{(H)}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial n} = \left(\frac{r^2 h_2 - h_1}{\mu} + \frac{8h_2}{C} \right) \frac{\boldsymbol{f}_s^{(H)}}{r},$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}_s = -\left(\frac{(7\mu+\lambda)h_1}{2\mu} - \frac{2(2\mu-\lambda)h_2}{C} \right) \frac{\boldsymbol{f}_s^{(H)}}{r},$$

$$\boldsymbol{u}_s^* = \frac{2h_2^*}{C} \boldsymbol{f}_s^{(H)}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{u}_s^*}{\partial n} = \frac{2}{r}\left(\frac{h_1^*}{2\mu+\lambda} - \frac{4h_2^*}{C} \right) \boldsymbol{f}_s^{(H)},$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}_s^* = -\left(\frac{(\mu+\lambda)h_1^*}{2\mu+\lambda} + \frac{2(2\mu-\lambda)h_2^*}{C} \right) \frac{\boldsymbol{f}_s^{(H)}}{r}.$$

В случае объемной деформации потенциалы $\boldsymbol{f}_{1,2}$ из (5.3) дают нулевой вклад в решение, а компоненты (4.8) и (4.9) в разложении (5.12) (для потенциалов $\boldsymbol{f}_{1,2}^*$) приобретают несколько иной вид:

$$u_n^* = \frac{h_1^*}{2\mu+\lambda} f_n^{(H)}, \qquad \frac{\partial u_n^*}{\partial n} = \frac{r^2 h_2^* + h_1^*}{2\mu+\lambda} \frac{f_n^{(H)}}{r}, \qquad \hat{p}_n^* = -\frac{(5\mu+2\lambda)h_1^*}{2\mu+\lambda} \frac{f_n^{(H)}}{r}.$$

Аналогично для функций $\hat{h}_n(r)$ и $\hat{h}_n^*(r)$ для девиаторной и объемной деформации.

Соответственно для цилиндрических включений и для девиаторного поля деформаций $\varepsilon_{ii}^{(0)} = 0$ получаем:

$$u_n = \frac{2h_2}{C} f_n^{(H)}, \qquad \frac{\partial u_n}{\partial n} = \frac{2}{r}\left(\frac{h_1}{\mu} - \frac{3h_2}{C} \right) f_n^{(H)},$$

$$\hat{p}_n = \frac{1}{r}\left(\frac{(\mu+\lambda)h_1}{\mu} - \frac{(9\mu+5\lambda)h_2}{C} \right) f_n^{(H)},$$

$$u_n^* = \left(\frac{h_1^*}{2\mu+\lambda} - \frac{2h_2^*}{C} \right) f_n^{(H)}, \qquad \frac{\partial u_n^*}{\partial n} = \left(\frac{r^2 h_2^* - h_1^*}{2\mu+\lambda} + \frac{6h_2^*}{C} \right) \frac{f_n^{(H)}}{r},$$

$$\hat{p}_n^* = -\left(\frac{(7\mu+3\lambda)h_1^*}{2(2\mu+\lambda)} - \frac{(9\mu+5\lambda)h_2^*}{C} \right) \frac{f_n^{(H)}}{r},$$

$$\boldsymbol{u}_s = \left(\frac{h_1}{\mu} - \frac{2h_2}{C} \right) \boldsymbol{f}_s^{(H)}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial n} = \left(\frac{r^2 h_2 - h_1}{\mu} + \frac{6h_2}{C} \right) \frac{\boldsymbol{f}_s^{(H)}}{r},$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}_s = -\left(\frac{(5\mu+\lambda)h_1}{2\mu} - \frac{(3\mu-\lambda)h_2}{C} \right) \frac{\boldsymbol{f}_s^{(H)}}{r},$$

$$\boldsymbol{u}_s^* = \frac{2h_2^*}{C} \boldsymbol{f}_s^{(H)}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{u}_s^*}{\partial n} = \frac{2}{r}\left(\frac{h_1^*}{2\mu+\lambda} - \frac{3h_2^*}{C} \right) \boldsymbol{f}_s^{(H)},$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}_s^* = -\left(\frac{(\mu+\lambda)h_1^*}{2\mu+\lambda} + \frac{(3\mu-\lambda)h_2^*}{C} \right) \frac{\boldsymbol{f}_s^{(H)}}{r}.$$

В случае плоской деформации компоненты (4.8) и (4.9) в разложении (5.12) имеют вид:

$$u_n^* = \frac{h_1^*}{2\mu+\lambda} f_n^{(H)}, \qquad \frac{\partial u_n^*}{\partial n} = \frac{r^2 h_2^* + h_1^*}{2\mu+\lambda} \frac{f_n^{(H)}}{r}, \qquad \hat{p}_n^* = -\frac{(7\mu+3\lambda)\, h_1^*}{2(2\mu+\lambda)} \frac{f_n^{(H)}}{r}.$$

Аналогично для функций $\hat{h}_n(r)$ и $\hat{h}_n^*(r)$ для девиаторной и плоской объемной деформации. Все остальные компоненты, необходимые для записи контактных условий, однозначно определяются через приведенные выше величины.

Таким образом, решение обобщенной задачи Эшелби для градиентной модели (2.7), (2.8) и для модели трех сферических тел сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов в представлениях (5.7)-(5.11), формируемых на основе радиальных множителей (5.12) для величин (4.6)-(4.9), входящих в контактные уравнения (4.3), (4.5) на межфазных границах ∂G_I и ∂G_H, и выраженных через специальные функции (5.13), (5.14).

6. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Определение эффективных характеристик структурно-неоднородного тела по методу трех тел [24] (сферических или цилиндрических) основывается на аналитическом решении обобщенной задачи Эшелби и на энергетическом принципе, заключающемся в равенстве нулю приращения энергии при замене однородного тела с эффективными характеристиками на составное тело, состоящее из сферического слоя, соответствующего матрице, и сферического включения, погруженных в бесконечное пространство с эффективными модулями (рис.1). При этом неизвестные эффективные характеристики рассматриваются как дополнительные неизвестные переменные, а энергетический принцип – как дополнительное уравнение к системе линейных алгебраических уравнений в задаче Эшелби.

Для градиентной модели теории упругости энергетический принцип формулируется в виде простого соотношения (см. [11,12]) на границе ∂G_H, совпадающему по внешнему виду с классической формой приращения энергии в методе Эшелби:

$$E' = \int\limits_{\partial G_H} \left[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}_0 - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{U}_0)\boldsymbol{U} \right] dV' = 0. \qquad (6.1)$$

Здесь $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{U}_0)$ и $\boldsymbol{U}_0$ – однородное поле напряжений на бесконечности и соответствующие им перемещения, а $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{U})$ и $\boldsymbol{U}$ – классическая составляющая напряжений в обобщенной задаче Эшелби и соответствующие им классические перемещения, см. формулы (4.6), (4.7), (5.7)-(5.9).

Применяя энергетический принцип Эшелби к решению обобщенной задачи Эшелби, получаем с помощью (5.9) дополнительное уравнение в виде линейного алгебраического соотношения между коэффициентами B_2 и C_2. Для объемной деформации, характеризующейся шаровым тензором $\left\{\varepsilon_{ij}^{(0)}\right\}$, решение в области G_H представлено только одним коэффициентом B_2, для которого из (6.1) следует уравнение $B_2 = 0$.

Таким образом, в случае объемного расширения/сжатия эффективная среда остается в состоянии однородной деформации при выполнении условия (6.1) и замене однородного тела с эффективными характеристиками на составное тело. При этом уравнение (4.5) преобразуется к виду, который содержит в качестве неизвестной величины только одну эффективную характеристику – объемный модуль K_H, входящий в уравнение линейным образом. Поэтому определение эффективной характеристики K_H сводится к решению системы алгебраических уравнений 7x7 относительно неизвестных величин A_0, D_0, A_1, B_1, C_1, D_1, K_H; эффективный объемный модуль выступает в этом случае в качестве неизвестной величины, заменяющей выпавший из системы уравнений коэффициент $B_2 = 0$.

В случае девиаторного тензора деформаций $\left\{\varepsilon_{ij}^{(0)}\right\}$ решение в области G_H представлено двумя коэффициентами B_2 и C_2, между которыми на основе (6.1) и (5.12) устанавливается следующее линейное соотношение (соответственно для сферических и цилиндрических включений):

$$\int\limits_{\partial G_H}\left[B_2\left(\nu_H\left|\boldsymbol{f}_0^{(H)}\right|^2-\frac{5}{2}\left(f_n^{(H)}\right)^2\right)+5(7-4\nu_H)R_H^{-2}C_2\left(\left|\boldsymbol{f}_0^{(H)}\right|^2-\frac{5}{2}\left(f_n^{(H)}\right)^2\right)\right]dV'=0\,, \tag{6.2}$$

$$\int\limits_{\partial G_H}\left[B_2\left(\nu_H\left|\boldsymbol{f}_0^{(H)}\right|^2-2\left(f_n^{(H)}\right)^2\right)+7(3-2\nu_H)R_H^{-2}C_2\left(\left|\boldsymbol{f}_0^{(H)}\right|^2-2\left(f_n^{(H)}\right)^2\right)\right]dV'=0\,. \tag{6.3}$$

Конкретный вид дополнительного уравнения, следующего из энергетического принципа Эшелби, определяется конкретным видом полинома $\boldsymbol{f}_0^{(H)}$, и содержит неизвестную константу ν_H. Для ее исключения из уравнения (6.2), (6.3) можно использовать неизвестный модуль μ_H и определяемый однозначно по независимому алгоритму (на основе объемной деформации) эффективный объемный модуль K_H.

Случай девиаторной деформации используется в методе трех сферических или цилиндрических тел для определения эффективного модуля сдвига μ_H, однако результат будет зависеть от вида этой деформации. В случае напряженно-деформированного состояния чистого сдвига, характеризующегося полиномом $\boldsymbol{f}_0^{(H)} = \{x, -y, 0\}$ и тензором деформации $\left\{\varepsilon_{ij}^{(H)}\right\} = \{1, -1, 0, 0, 0, 0\}$, коэффициент при C_2 будет равен нулю из-за соотношения между нормами функции $\boldsymbol{f}_0^{(H)}$ (соответственно в случае сферической и цилиндрической симметрии):

$$\int\limits_{\partial G_H}\left(\left|\boldsymbol{f}_0^{(H)}\right|^2-\frac{5}{2}\left(f_n^{(H)}\right)^2\right)dV'=0\,,\qquad \int\limits_{\partial G_H}\left(\left|\boldsymbol{f}_0^{(H)}\right|^2-2\left(f_n^{(H)}\right)^2\right)dV'=0\,. \tag{6.4}$$

Поэтому из (6.2), (6.3) в случае (6.4) следует, что $B_2 = 0$. При выполнении этого условия (контактное уравнение (4.5) может быть преобразовано к виду, который содержит в качестве неизвестной величины только одну эффективную характеристику – модуль сдвига μ_H. В общем случае контактное уравнение на границе с эффективной средой содержит две неизвестные эффективные характеристики – модуль сдвига μ_H и константу ν_H, однако последнюю можно выразить через неизвестную μ_H и определяемую по независимому алгоритму эффективную характеристику K_H.

Алгоритм вычисления эффективного модуля сдвига на основе уравнения (6.1) предполагает реализацию однопараметрического итерационного алгоритма по варьированию μ_H с целью достижения такого решения обобщенной задачи Эшелби, при котором коэффициенты $B_2(\mu_H)$ и $C_2(\mu_H)$ удовлетворяют уравнению (6.2) или (6.3). Это предполагает решение на каждом шаге итерации решение системы линейных алгебраических уравнений размером 14x14.

7. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

На основе вычисленных в п.6 эффективных характеристик K_H и μ_H эффективный модуль Юнга и коэффициент Пуассона вычисляем, исходя из предположения изотропности механических свойств эффективного материала, т.е. по следующей формуле (соответственно для сферических и цилиндрических включений):

$$E_H = \frac{9K_H\mu_H}{3K_H+\mu_H}, \qquad \nu_H = \frac{3K_H - 2\mu_H}{6K_H+2\mu_H},$$

$$E_H = \frac{(3K_H-\mu_H)\mu_H}{K_H}, \qquad \nu_H = \frac{K_H-\mu_H}{2K_H}.$$

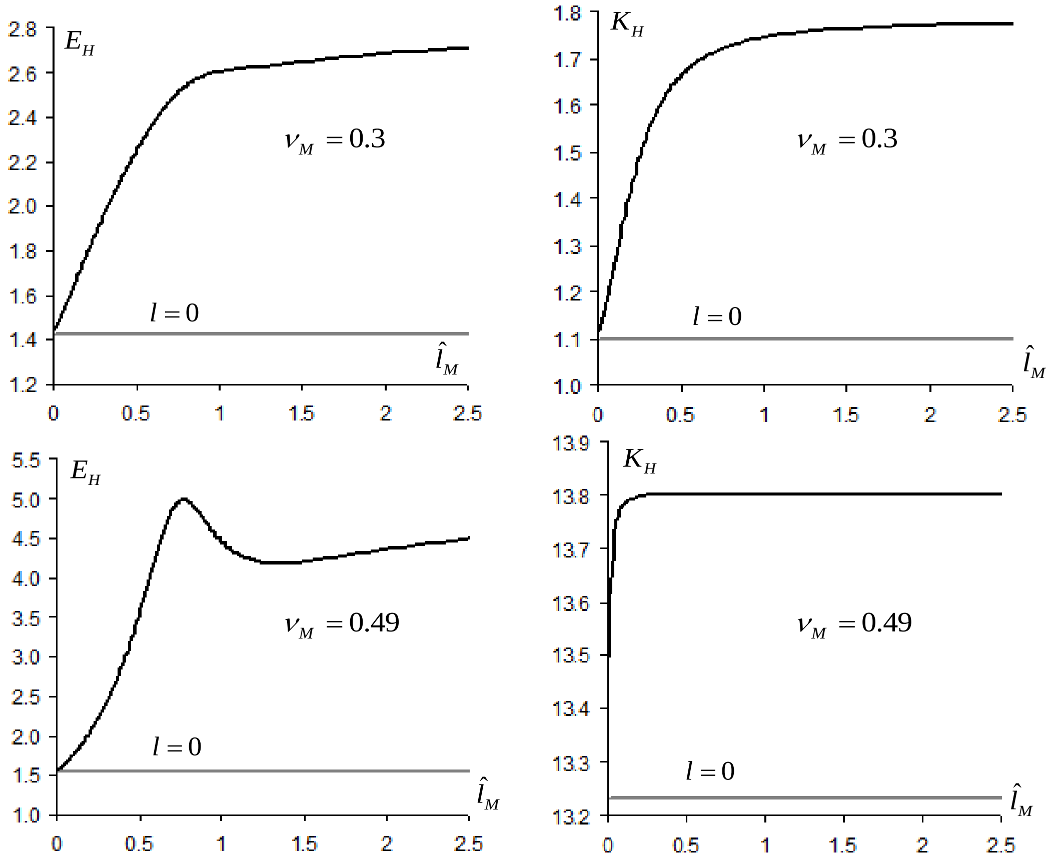


Рис.2. Эффективные характеристики в зависимости от масштабного параметра.

На рис.2 представлен пример вычисления эффективных характеристик по градиентной модели методом трех сферических тел в зависимости от масштабного параметра $\hat{l}_M = \mu_M / (C_M R)$, где R – радиус включений; приводятся графики модуля Юнга E_H и объемного модуля K_H при разном значении коэффициента Пуассона матрицы ν_M в сравнении с классической моделью теории упругости (которая соответствует нулевому значению масштабного параметра $l = 0$). Параметры расчета: $E_M = 1$, $E_I = 12$, $\nu_I = 0.22$, $\hat{l}_I = \mu_I / (C_I R) = 0.1$ при объемной концентрации включений $c_0 = 0.2$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан новый метод построения точного аналитического решения проблемы определения эффективных свойств дисперсных композитов для сферических и цилиндрических включений в градиентной теории упругости. Полученные аналитические решения позволяют проследить особенности распределения напряженно-деформированного состояния вблизи дисперсных включений с учетом масштабных эффектов, а также построить зависимости эффективных характеристик от масштабных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hervé E., Zaoui A.* Elastic behaviour of mutiply coated fiber- reinforced composites // Int. J. Eng. Sci. – 1995. – Vol.33. – N10. – P.1419-1430.
2. *Christensen R.M., Lo K.H.* Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models // J. Mech. Phys. Solids. – 1979. – Vol.27. – P.315-330.
3. *Лурье С.А., Образцов И.Ф., Белов П.А., Волков-Богородский Д.Б., Яновский Ю.Г., Кочемасова Е.И., Дудченко А.А., Потупчик Е.М.* Основы механики межфазного слоя // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2003. – Т.10. – №4. – С.596-612.
4. *Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N.* Nanomechanical мodeling of the nanostructures and dispersed composites // Comp. Mater. Sci. – 2003. – Vol.28. – N3-4. – P.529-539.
5. *Lurie S., Belov P., Tuchkova N.* The Application of the multiscale models for description of the dispersed composites // Int. J. Comp. Mater. Sci. Ser. A. – 2005. – Vol.36. – N2. – P.145-152.
6. *Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N.* Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials // J. Mat. Sci. – 2006. – Vol.41. – N20. – P.6693-6707.
7. *Lurie S., Volkov-Bogorodsky D., Zubov V., Tuchkova N.* Advanced theoretical and numerical multiscale modeling of cohesion/adhesion interactions in continuum mechanics and its applications for filled nanocomposites // Computational Materials Science. – 2009. – Vol.45. – N3. – P.709-714.
8. *Лурье С.А., Тьюнг Фам, Соляев Ю.О.* Градиентная модель термоупругости и её приложенияр// Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №3. – С.440-449.
9. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. – М.: ИЛ, 1963. – 248 с.
10. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
11. *Волков-Богородский Д.Б., Лурье С.А.* Интегральные формулы Эшелби в градиентной теории упругости // МТТ. – 2010. – №4. – С.184-194.

12. *Lurie S., Volkov-Bogorodsky D., Leontiev A., Aifantis E.* Eshelby’s inclusion problem in the gradient theory of elasticity. Applications to composite materials // Intern. J. of Engineering Science. – 2011. – Vol.49. – P.1517-1525.
13. *Волков-Богородский Д.Б.* Подход к задачам о взаимодействии акустической и упругой среды с помощью блочного метода мультиполей / 11-й Междунар. симп. Материалы. – М.: МАИ, 2005. – Т.2. – С.17-23.

РАСЧЁТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОГО ТИПА ДЛЯ НАПОЛНЕННЫХ ЭЛАСТОМЕРОВ

Гамлицкий Ю.А.

ООО «Научно-технический центр «НИИ шинной промышленности», г. Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

Построены определяющие соотношения для вязкоупругой наполненной резины, отличающейся высокой степенью деформационной нелинейности в области малых деформаций. Диссипативная составляющая полной энергии деформации зависит не только от величин и скоростей изменений абсолютных значений главных напряжений и деформаций, но и от величин и скоростей поворотов главных осей. Такой способ описания позволяет прогнозировать напряжённо-деформированное состояние (НДС) и скорость его изменения на основе экспериментов в произвольном сложном НДС (не только при одноосном растяжении – сжатии или сдвиге, как это делается практически всеми авторами). Предложенный экспериментальный метод реализован для квазиравновесного случая (малые скорости деформирования). Сравнение теории с экспериментом показало наилучшие из известных результаты для авторских потенциалов.

В достаточно общем случае определяющее соотношение нелинейной упругости и вязкоупругости можно представить в виде [1,2]:

$$\begin{aligned}\mathbf{u_{ij}(t)} &= \int_0^t \mathbf{K^{(1)}_{iji_1j_1}\left(t,\tau_1\right)\sigma_{i_1j_1}d\tau_1} + \int_0^t\int_0^t \mathbf{K^{(2)}_{iji_1j_1i_2j_2}\left(t,\tau_1,\tau_2\right)\sigma_{i_1j_1}\left(\tau_1\right)\sigma_{i_2j_2}\left(\tau_2\right)d\tau_1 d\tau_2} + \dots \\ &+ \int_0^t \dots \int_0^t \mathbf{K^{(n)}_{iji_1j_1\dots i_nj_n}\left(t,\tau_1,\dots,\tau_n\right)\sigma_{i_1j_1}\left(\tau_1\right)\dots\sigma_{i_nj_n}\left(\tau_n\right)d\tau_1\dots d\tau_n}\dots\end{aligned} \tag{1}$$

где $u_{ij}(t)$ – тензор деформации, $\sigma_{ij}(t)$ – тензор напряжений, i,j=1,2,3 – координатные оси декартовой системы.

Для случая линейной вязкоупругости, основанной на принципе суперпозиции Больцмана [3], при простом виде деформирования (простой сдвиг или одноосное растяжение – сжатие) справедливо выражение для релаксационного модуля $G(t)$:

$$G(t) = G_{равн} + \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)d(\ln\tau), \tag{2}$$

где $H(\tau)$ – спектр времен релаксации.

В случае дискретного нагружения имеет место зависимость:

$$\sigma(t) = \Delta\varepsilon_1 G(t-t_1) + \Delta\varepsilon_2 G(t-t_2) + \Delta\varepsilon_3 G(t-t_3) + \dots, \tag{3}$$

где $G(t)$ – релаксационный модуль. Приращения деформации $\Delta\varepsilon_1$, $\Delta\varepsilon_2$, $\Delta\varepsilon_3$ задаются в моменты времени t_1, t_2, t_3.

Фундаментальным проблемам вязкоупругости посвящены также работы [4-9]. Для нахождения деформации резины при заданной истории нагружения требуется знание явного вида ядер $K^{(i)}$ (или спектра времен релаксации $H(\tau)$).

Описанный интегральный подход позволяет из (1) или (2) получать решение сразу во всей временной области. Однако практическое использование этих соотношений связано с большими трудностями, которые до сих пор не преодолены.

В ряде работ, выполненных в ИМСС УрО РАН [напр., 17-19] развивается структурно-феноменологический подход построения определяющих уравнений для описания вязкоупругих свойств резин. Однако в основе эксперимента лежат испытания на одноосное нагружение, что не обеспечивает требуемой точности определения констант определяющих соотношений. Использование машин с двухосным нагружением также недостаточно, т.к. при этом испытании не обеспечивается поворот главных осей по деформациям и, следовательно, напряжениям [20].

В данной работе уточняется подход, предложенный в [10] для определения НДС и диссипативных потерь. Изменение деформированного состояния материала осуществляется малыми шагами. Каждому шагу соответствует своя скорость деформации.

Деформированное состояние задается векторами главных осей $\vec{A}_j$ (j=1,2,3), $\left|\vec{A}_j\right| = \varepsilon_j$ – относительное удлинение по главной оси j. Будем считать резину несжимаемой, что задается условием:

$$(\varepsilon_1 + 1)(\varepsilon_2 + 1)(\varepsilon_3 + 1) = 1 \qquad (4)$$

Главные направления определяются соотношениями:

$$\gamma_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{d}_j, \quad \text{где} \quad \vec{d}_j = \frac{\vec{A}_j}{\left|\vec{A}_j\right|}, \qquad (5)$$

(i,j=1,2,3 – номер координаты и номер главной оси соответственно), относительно декартовой системы координат с ортонормированным базисом $\vec{e}_i$, одна из координатных плоскостей которой и одна из координатных осей в этой плоскости проходят через одни и те же точки тела при его однородном деформировании. Такой выбор системы координат связан с требованием исключения трансляционного перемещения и поворотов тела как целого при описании процесса деформирования. Отметим, что из девяти чисел γ_{ij} только три являются независимыми.

Процесс деформирования будем рассматривать как последовательность малых шагов. Изменение деформированного состояния материала осуществляется на каждом шаге со своей постоянной скоростью. Это изменение для равновесной (упругой) составляющей энергии деформации может быть представлено приращениями главных деформаций $\Delta\varepsilon_j^{(k)}$ на шаге (k). Диссипативная составляющая энергии деформации зависит не только от $\Delta\varepsilon_j^{(k)}$, но и от величин поворотов главных осей $\Delta\gamma_{ij}^{(k)}$ (i,j=1,2,3). На шаге (k) главные деформации и главные направления будут иметь значения:

$$\varepsilon_j^{(k)} = \varepsilon_j^{(k-1)} + \Delta\varepsilon_j^{(k)}; \quad \gamma_{ij}^{(k)} = \gamma_{ij}^{(k-1)} + \Delta\,\gamma_{ij}^{(k)} \qquad (6)$$

Малость величин $\Delta\varepsilon_i$ и $\Delta\gamma_{ij}$ требуется для точности воспроизведения траектории деформирования. Существенной особенностью предлагаемого метода является то, что определяющие соотношения записываются сразу в инвариантном виде. Перемещение из точки (k–1) в точку (k) осуществляется не по каждой переменной отдельно, а по усредненной траектории. Это необходимо по той причине, что потери являются не потенциальной, а диссипативной функцией, поэтому даже при бесконечно малых перемещениях потери будут отличаться в конечное число раз для ступенчатого перехода по каждой переменной и для перехода по «гипотенузе» в пространстве переменных $\Delta\varepsilon_j$ и $\Delta\gamma_{ij}$.

В качестве меры поворота главных осей по деформациям на каждом шаге будем использовать приращение углов поворота $\Delta\varphi_j^{(k)} = \arccos\left(\Delta\gamma_j^{(k)}\right)$, где косинус угла поворота $\Delta\gamma_j^{(k)}$ оси j на шаге (k) определяется соотношением:

$$\Delta\gamma_j^{(k)} = 1 + \sum_i \left(\gamma_{ij}^{(k)} \cdot \Delta\gamma_{ij}^{(k)}\right), \tag{7}$$

которое выводится следующим образом.

Вектор $\vec{A}_j^{(k)}$ имеет компоненты $A_{ij}^{(k)} = \gamma_{ij}^{(k)} \cdot A_j^{(k)}$. Аналогично, вектор $\vec{A}_j^{(k+1)}$ имеет компоненты $A_{ij}^{(k+1)} = \gamma_{ij}^{(k+1)} \cdot A_j^{(k+1)}$. Косинус угла между этими векторами определяется с учётом соотношений (5) и (6):

$$\Delta\gamma_j^{(k)} = \vec{d}_j^{(k)} \cdot \vec{d}_j^{(k+1)} = {\gamma_{1j}^{(k)}}^2 + {\gamma_{2j}^{(k)}}^2 + {\gamma_{3j}^{(k)}}^2 + \gamma_{1j}^{(k)} \cdot \Delta\gamma_{1j}^{(k)} + \gamma_{2j}^{(k)} \cdot \Delta\gamma_{2j}^{(k)} + \gamma_{3j}^{(k)} \cdot \Delta\gamma_{3j}^{(k)} =$$
$$= 1 + \gamma_{1j}^{(k)} \cdot \Delta\gamma_{1j}^{(k)} + \gamma_{2j}^{(k)} \cdot \Delta\gamma_{2j}^{(k)} + \gamma_{3j}^{(k)} \cdot \Delta\gamma_{3j}^{(k)} = 1 + \sum_i \left(\gamma_{ij}^{(k)} \cdot \Delta\gamma_{ij}^{(k)}\right)$$

Введем скорость деформирования $\dot{\varepsilon}_j^{(k)}$ на шаге (k), связанную с главными деформациями:

$$\dot{\varepsilon}_j^{(k)} = \frac{\Delta\varepsilon_j^{(k)}}{\Delta t^{(k)}}, \tag{8}$$

где $\Delta t^{(k)}$ – время перехода от состояния (k) к состоянию (k+1).

Также введем скорость деформирования $\dot{\varphi}_j^{(k)}$, связанную с поворотами главной оси j:

$$\dot{\varphi}_j^{(k)} = \frac{\Delta\varphi_j^{(k)}}{\Delta t^{(k)}}. \tag{9}$$

Напряжённое состояние будем характеризовать главными условными напряжениями за m шагов $\vec{\rho}_j^{(m)}$, состоящими из двух частей: напряжениями $\vec{\sigma}_j^{(m)}$, направления которых совпадают с главными направлениями по деформациям, и напряжениями $\vec{\tau}_j^{\,m}$, перпендикулярными на каждом шаге к направлениям главных осей по деформациям. Напряжение $\vec{\sigma}_j^{(m)}$ включает упругую $\sigma_{j_{упр}}^{(m)}$ и релаксирующую составляющие $\sigma_{j_{рел}}^{(m)}$. Напряжение $\vec{\tau}_j^{\,m}(t)$ содержит только релаксирующую составляющую, т.к. при $t\to\infty$ главные оси по напряжениям и деформациям совпадают. Такой способ описания НДС не противоречит основным принципам механики и позволяет наиболее удобно использовать экспериментальные возможности для нахождения коэффициентов определяющих соотношений.

Итак, неравновесное напряжение формируется на каждом шаге из шести составляющих, соответствующих шести компонентам $\Delta\varepsilon_j^{(k)}$ и $\Delta\,\gamma_j^{(k)}$, характеризующим изменение НДС. Примем, что каждая компонента релаксирует в соответствии с дифференциальным уравнением, описывающем поведение стандартного линейного вязкоупругого тела.

Модель такого тела на основе пружин и демпферов (рис.1) предложена Френкелем и Образцовым [11] и позже Зенером [12].

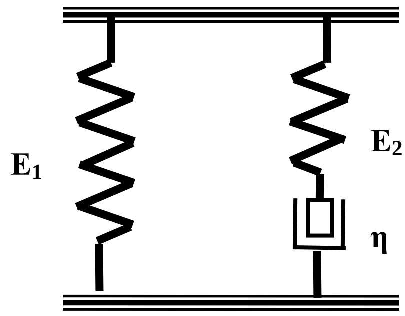


Рис.1. Модель стандартного линейного вязкоупругого тела.

Уравнение для такой модели имеет вид [13]:

$$f+\frac{\eta}{E_2}\frac{df}{dt}=E_1\varepsilon+\left(E_1+E_2\right)\frac{\eta}{E_2}\frac{d\varepsilon}{dt} \tag{10}$$

Здесь f – приложенная сила, E_1 и E_2 – жёсткости линейных пружин, η – коэффициент вязкости демпфера.

Приведём (10) к линейному дифференциальному уравнению 1 порядка:

$$\frac{df}{dt}+\frac{E_2}{\eta}f=\frac{E_1E_2}{\eta}\varepsilon(t)+\left(E_1+E_2\right)\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \tag{11}$$

При постоянной скорости деформирования $\frac{d\varepsilon}{dt}=v$ решение уравнения (10) имеет вид:

$$f(t)=vE_1t+v\eta\left[1-\exp\left(-\frac{E_2}{\eta}t\right)\right] \tag{12}$$

При проведении испытаний в сложном НДС с помощью оригинального приспособления, которое описано в работе [14], скорость деформирования по разным направлениям переменная. Будем считать, что на каждом шаге значения (8) и (9) постоянны из-за малости Δt.

Все соотношения будем записывать для условных напряжений (относящихся к сечениям недеформированного образца).

Из (12) следует, что составляющая главного напряжения $\vec{\sigma}_j^{(m)}$, действующая вдоль главной оси по деформациям j, на шаге m включает равновесную (упругую) часть $\sigma_{j_{упр}}^{(m)}\left(A_j^{(m)}\right)$ и неравновесное (релаксирующее) напряжение $\sigma_{j_{рел}}^{(m)}\left(A_j^{(m)},t\right)$.

По аналогии с (12) запишем выражение для $\vec{\sigma}_j^{(m)}$:

$$\vec{\sigma}_j^{(m)}=\vec{d}_j^{(m)}\cdot\sigma_{j упр}^{(m)}+\vec{\sigma}_{j рел}^{(m)}, \quad \text{где}$$

$$\vec{\sigma}_{j рел}^{(m)}=C_1\sum_{k=1}^{m}\vec{d}_j^{(k)}\dot{\varepsilon}_j^{(k)}\left[1-\exp\left(-C_2\cdot\left(t-t^{(k)}\right)\right)\right] \tag{13}$$

Здесь C_1 и C_2 – подгоночные параметры, значения которых будут определены из эксперимента; суммирование осуществляется по всем m шагам, из которых состоит процесс деформирования за время t. Релаксирующий член записан в соответствии с принципом суперпозиции Больцмана (3). Для реальной резины равновесная составляющая главных напряжений $\sigma_{j_{упр}}^{(m)}\left(A_j^{(m)}\right)$ может быть рассчитана из определяющих соотношений в виде упругих потенциалов [14].

Запишем выражение для той части главных напряжений, которая образуется на каждом шаге, перпендикулярна главным деформациям и совпадает по направлению с поворотами главных осей от $\vec{A}_j^{(k)}$ до $\vec{A}_j^{(k+1)}$ на углы $\Delta\varphi_j^{(k+1)}$:

$$\vec{\tau}_j^{(k)}(t) = \vec{a}_j^{(k)} C_3 \dot{\varphi}_j^{(k)} \left[1 - \exp\left(-C_4 \cdot \left(t - t^{(k)}\right)\right)\right], \tag{14}$$

где $\vec{a}_j^{(k)} = \dfrac{\vec{d}_j^{(k+1)} - \vec{d}_j^{(k)}}{\left|\vec{d}_j^{(k+1)} - \vec{d}_j^{(k)}\right|}$ – единичный вектор, перпендикулярный к $\vec{A}_j^{(k)}$ и $\vec{A}_j^{(k+1)}$ и направлен от первого ко второму, C_3 и C_4 – параметры, характеризующие скорость релаксации напряжения при изменении направлений главных осей.

За m шагов общее касательное напряжение $\vec{\tau}_j^{m}(t)$ для главной оси j будет иметь вид:

$$\vec{\tau}_j^{(m)}(t) = C_3 \sum_{k=1}^{m} \vec{a}_j^{(k)} \dot{\varphi}_j^{(k)} \left[1 - \exp\left(-C_4 \cdot \left(t - t^{(k)}\right)\right)\right]. \tag{15}$$

Полное главное напряжение $\vec{\rho}_j^{m}\left(\vec{A}_j^{(m)}, t\right)$ по главной оси j (отметим, что в общем случае главные направления по напряжениям не совпадают с главными направлениями по деформациям из-за наличия члена (14)) получим суммированием (14) и (15):

$$\vec{\rho}_j^{(m)} = \vec{\sigma}_j^{(m)} + \vec{\tau}_j^{(m)}. \tag{16}$$

Направления главных осей тензоров напряжений и деформаций совпадают в исходном равновесном состоянии. Если исходное состояние ненагруженное, то для определения начального направления главных осей следует задать малое изменение НДС в направлении предстоящего деформирования. Это важно для практического применения метода.

В качестве меры поворота главных осей по напряжениям будем использовать углы поворота $\psi_j^{(k,l)} = \arccos\left(\theta_j^{(k,l)}\right)$, где косинус угла поворота $\theta_j^{(k,l)}$ оси j от шага (k) до шага (l) определяется соотношением:

$$\theta_j^{(k,l)} = \frac{\vec{\rho}_j^{(k)} \cdot \vec{\rho}_j^{(l)}}{\left|\vec{\rho}_j^{(k)}\right| \cdot \left|\vec{\rho}_j^{(l)}\right|}. \tag{17}$$

Итак, записаны выражения для расчёта главных напряжений (16) и главных направлений по напряжениям (17) в зависимости от вязкоупругих характеристик материала и условий его деформирования. Этого достаточно, чтобы рассчитать НДС и тепловые потери при произвольной траектории деформирования.

Плотность энергии деформирования вязкоупругого материала обычно записывается в виде ([9], с.93,356):

$$U = \frac{1}{2\rho} \sum_i \sum_j \pi^{ij} \frac{d\beta_{ij}}{dt}, \tag{18}$$

где ρ – плотность материала, $\pi^{ij} = e^i\left(\vec{f}^{\,i}, \vec{e}^{\,j}\right)$ – компоненты напряжения относительно базиса $\vec{e}_i$; $\vec{f}^{\,i}$ – сила, действующая на грань с нормалью $\vec{e}^{\,i}$; $\beta_{ij} = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right)$ – скалярные произведения базисных векторов; $\vec{e}^{\,i} = \dfrac{1}{v} \vec{e}_j \times \vec{e}_k$ –

взаимные базисные вектора (i,j,k=1,2,3 в круговом порядке); $v=\left(\left[\vec{e}_1\times\vec{e}_2\right],\vec{e}_3\right)$ – объем параллелепипеда, построенного на базисных векторах, образующих правую тройку.

Для ортонормального базиса: $\vec{e}^{\,i}=1 \quad и \quad \pi^{ij}=p^{ij}=\left(\vec{f}^{\,i},\vec{e}^{\,j}\right)$.

С учетом этого, а также соотношений (13)-(16), справедливо следующее выражение для секундной плотности энергии деформации вязкоупругого тела на шаге m:

$$U^{(m)}=\sum_{j=1}^{3}\left(\dot{\varepsilon}_j^{(m)}\sigma_j^{(m)}+\dot{\varphi}_j^{(m)}\tau_j^{(m)}\right). \tag{19}$$

Для расчёта энергии деформации по выражению (19) и сравнения с экспериментом воспользуемся результатами работы [14]. Испытания будем проводить с помощью приспособления в виде рамки, которое устанавливается между захватами стандартной разрывной машины (рис.2).

Рассмотрим состояние, при котором под действием нагрузки F образец деформировался, и его главные деформации и главные условные напряжения определены выражениями (6), (7), (16). Приложим к рамке дополнительную малую нагрузку ΔF. Расстояние l_{12} между точками 1 и 2 увеличится на малую величину $\Delta l\cong\upsilon_{раст}\cdot\Delta t$. Запишем уравнение баланса энергии:

$$F^{(m)}\cdot\Delta l\cong U^{(m)}\cdot\Delta t\cdot V \quad \text{или} \quad F^{(m)}\cdot\upsilon_{раст}\cong U^{(m)}\cdot V\,. \tag{20}$$

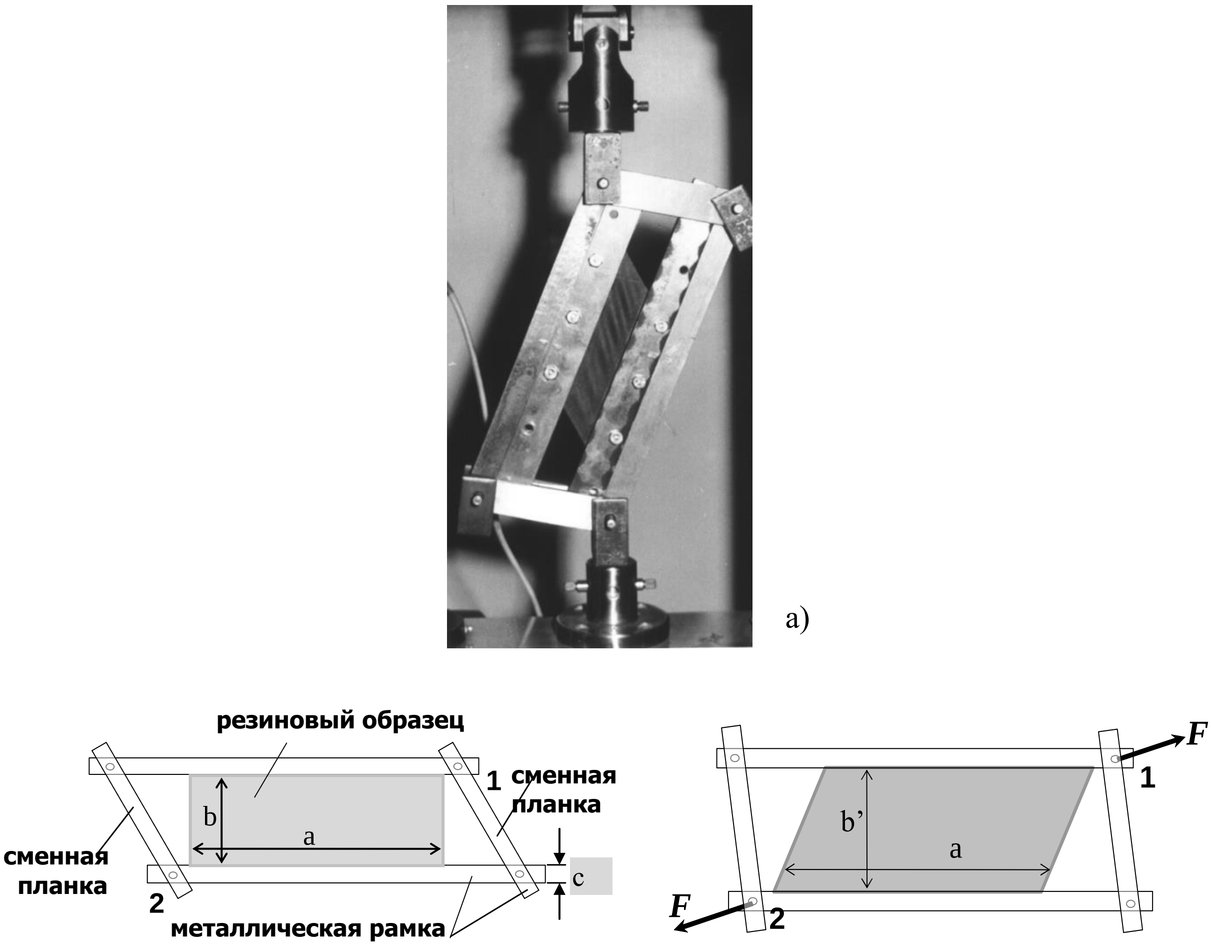
Здесь V – объем деформируемой части резинового образца, $\upsilon_{раст}$ – скорость растяжения образца (скорость движения подвижного захвата разрывной машины).

Зависимости $\dot{\varepsilon}_j^{(m)}$ и $\dot{\varphi}_j^{(m)}$ от l_{12} и $\upsilon_{раст}$ определяются однозначно и зависят только от размеров образца и параметров рамки.

В приспособлении типа «рамка» (рис.2,б и 2,в) резиновый образец в виде плоской пластины испытывает суперпозицию деформаций простого $\gamma=tg\varphi$ и чистого $\lambda_y=y/y_0$ сдвигов (рис.3). Значения γ и λ_y однозначно определяются геометрией рамки и расстоянием между захватами разрывной машины l_{12}. Простой сдвиг происходит параллельно оси «X», чистый сдвиг – вдоль оси «Y».

Выражения для главных степеней удлинений $\Lambda_{1,2}$ и главных направлений $\psi'_{1,2}$, а также для направлений $\psi_{1,2}$ векторов i (рис.4), которые после деформирования перейдут в главные вектора i', имеют вид [14]:

$$\Lambda_{1.2}^2=\lambda_y^2\left[\frac{1+\gamma^2+\dfrac{1}{\lambda_y^2}}{2}\pm\sqrt{\frac{\left(1+\gamma^2+\dfrac{1}{\lambda_y^2}\right)^2}{4}-\frac{1}{\lambda_y^2}}\right] \tag{21}$$



б) в)

Рис.2. Рамка для реализации сложного НДС: а) рамка с резиновым образцом, б) схема рамки с образцом до деформации, в) схема рамки с образцом после деформации.

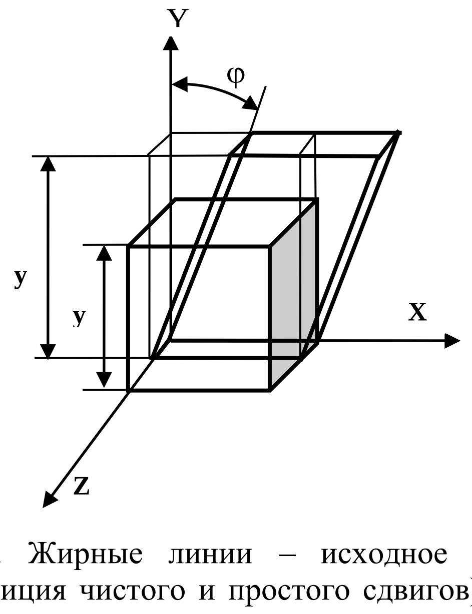


Рис.3. Деформация резины. Жирные линии – исходное состояние (кубик) и конечное (суперпозиция чистого и простого сдвигов); тонкие – чистый сдвиг.

$$tg\,\psi_{1,2} = \frac{\dfrac{1}{\lambda_y^2} - 1 - \gamma^2 \pm \sqrt{\left(\dfrac{1}{\lambda_y^2} - 1 - \gamma^2\right)^2 + 4\dfrac{\gamma^2}{\lambda_y^2}}}{\dfrac{2\gamma}{\lambda_y}} \tag{22}$$

$$tg\,\psi'_{1,2} = \gamma + \frac{\dfrac{1}{\lambda_y^2} - 1 - \gamma^2 \pm \sqrt{\left(\dfrac{1}{\lambda_y^2} - 1 - \gamma^2\right)^2 + 4\dfrac{\gamma^2}{\lambda_y^2}}}{2\gamma} \tag{23}$$

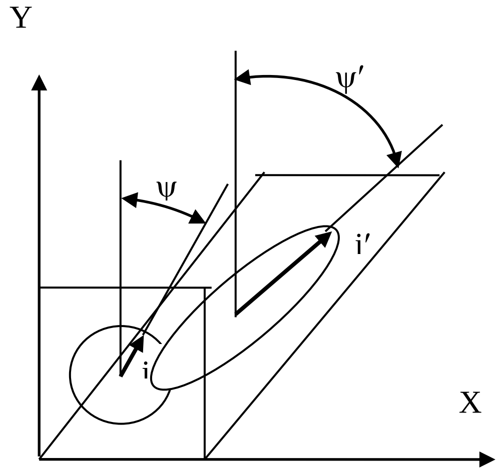


Рис.4. Положение единичного вектора до деформации (*i*) и после (*i*′).

Для практической реализации метода нахождения всех параметров определяющих соотношений (16) разделим задачу их определения на две части. Сначала проведём испытания при очень маленькой скорости, 0.01 мм/мин. Будем считать, что при такой скорости вклад релаксационных членов в напряжения (16) пренебрежимо мал. В этом случае $\vec{\tau}_j^{\,m}(t)$=0. Параметры квазиупругого потенциала определим по методу, изложенному в [14]. После этого будем проводить испытания со скоростями перемещения подвижного захвата разрывной машины 0.1; 1; 10; 100; 500 (мм/мин). Определение оставшихся четырёх констант осуществим тем же математическим приёмом, что и для квазиравновесного случая.

Изложим кратко метод численного определения параметров, которые обеспечивают наилучшее согласие с экспериментом. Метод применён для решения квазиупругой задачи [14]. Для решения подобных задач обычно применяют метод наименьших квадратов, который хорошо работает в случае, когда параметры входят в выражение для упругого потенциала в виде множителей. Это относится ко всем потенциалам, образованным степенным разложением по инвариантам. Для нашего случая такой метод не подходит. Здесь следует использовать алгоритмы оптимизации [15].

Для минимизации был выбран функционал вида:

$$D = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{F^{(m)} - U^{(m)}\dfrac{V}{\upsilon_{раст}}}{U^{(m)}\dfrac{V}{\upsilon_{раст}}}\right)^2, \qquad (24)$$

где $F^{(m)}$ – экспериментальная величина силы (показания разрывной машины в точке m); $U^{(m)}\dfrac{V}{\upsilon_{раст}}$ – рассчитываемое значение той же силы в той же точке; N – общее число экспериментальных точек.

Величину D будем называть дисперсией, что имеет смысл, если измеренные значения напряжения считать случайной величиной. Квадратный корень из D есть среднеквадратическое отклонение S теории от эксперимента.

Константы потенциалов определялись численно методом многопараметрической оптимизации, а именно методом градиентного спуска [16]. Все программы написаны на языке Фортран.

Испытания проводили для каждого резинового образца девять раз, по числу сменных боковых планок рамки. Каждое следующее испытание проводили через время, достаточное для релаксации напряжения после предыдущего испытания. В результате каждого испытания записывали от 800 до 1200 пар значений l_{12} и F.

Кроме испытаний на одноосное растяжение и с помощью рамки, для получения более полной информации о виде потенциальной поверхности проводили испытания образцов в виде пробки на сжатие.

Приведем перечень потенциалов, использованных в Таблице 1. Номера констант соответствуют их порядку в Таблице 1:

- Хазанович, Бартенев $U = C(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)$
- Ривлин, неогуковский $U = C(I_1 - 3)$
- Валанис-Ландел $U = u(\lambda_1) + u(\lambda_2) + u(\lambda_3)$ $(u'(\lambda) = 2C \cdot \ln\lambda)$
- Муни-Ривлин $U = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)$
- Неогуковский + Хазановича $U = C_1(I_1 - 3) + C_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)$
- Исихара, Хашицума, Татибама $U = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3(I_2 - 3)^2$
- Муни-Ривлин + Хазановича $U = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)$
- Черных $U = \frac{1}{C_2}\left[C_1\left(\lambda_1^{C_2} + \lambda_2^{C_2} + \lambda_3^{C_2} - 3\right) + C_3\left(\lambda_1^{-C_2} + \lambda_2^{-C_2} + \lambda_3^{-C_2} - 3\right)\right]$
- Харт-Смит $U = C_1\left[\int e^{C_2(I_1-3)^2}dI_1 + C_3\ln(I_2 - 3)\right]$
- Огден $U = \frac{C_1}{C_2}\left(\lambda_1^{C_2} + \lambda_2^{C_2} + \lambda_3^{C_2} - 3\right) + \frac{C_3}{C_4}\left(\lambda_1^{C_4} + \lambda_2^{C_4} + \lambda_3^{C_4} - 3\right)$
- Александер $U = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3\ln\left(\frac{I_2 - 3 + C_4}{C_4}\right)$
- Бидерман $U = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3(I_1 - 3)^2 + C_4(I_1 - 3)^3$
- Блатц,Шарда,Чоэгл $U = C_1\left(\lambda_1^{C_2} + \lambda_2^{C_2} + \lambda_3^{C_2} - 3\right) + C_3\left(\lambda_1^{C_2} + \lambda_2^{C_2} + \lambda_3^{C_2} - 3\right)^{C_4}$

Авторские потенциалы:

- Логарифмический 1

$$U^{(1)}(J) = E_1 \frac{J^2}{2} + \frac{E_2 - E_1}{E_3^2} \left[|E_3 J + 1| \cdot (\ln|E_3 J + 1| - 1) \right] + \frac{E_2 - E_1}{E_3^{\ 2}}$$

- Логарифмический 2 $\quad U^{(2)}(J) = E_1 \frac{J^2}{2} - E_2 J + \frac{E_2}{E_3} \ln|1 + E_3 J|$

- Дробно-линейный $\; U^{(3)}(J) = \frac{1}{2}\left[E_1 J^2 - E_2 \left(E_3 J + \frac{1}{1 + E_3 J} \right) \right]$

- Экспоненциальный $\quad U^{(4)}(J) = E_1 \frac{J^2}{2} + \frac{E_2}{E_3} J + \frac{E_2}{E_3^{\ 2}} e^{-E_3 J} - \frac{E_2}{E_3^{\ 2}}$

- Степенной $\quad U^{(5)}(J) = E_1 \frac{J^2}{2} + \frac{E_2}{1 - E_3} \left[\frac{(1 + J)^{2 - E_3} - 1}{2 - E_3} - J \right]$

Здесь:

$I_1 = \lambda_1^{\,2} + \lambda_2^{\,2} + \lambda_3^{\,2}$

$I_2 = \lambda_1^{\,2} \cdot \lambda_2^{\,2} + \lambda_1^{\,2} \cdot \lambda_3^{\,2} + \lambda_2^{\,2} \cdot \lambda_3^{\,2}$

$J = \sqrt{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n - 3}$

В Таблице 1 приведены результаты аппроксимации всех полученных экспериментальных данных.

Таблица 1.

Результаты аппроксимации экспериментальных данных, полученных в сложном НДС, приведёнными выше потенциалами.

	Упругий потенциал	Найденные значения констант	Точность определения констант	Дисперсия D (среднеквадра-тическое отклонение S)
1	2	4	5	7
1	Хазанович-Бартенев	3.69823	0.00005	0.08444 (0.290)
2	Неогуковский (Ривлин)	0.87745	0.00005	0.11254 (0.3355)
3	Валанис-Ландел	3.54870	0.0000008	0.105254 (0.3244)
4	Муни-Ривлин	-0.05709 1.05046	0.00074	0.07724 (0.2779)
5	Исихара, Хашицума, Татибама	0.25016 0.75275 -0.04648	0.00074	0.074346 (0.2726)
6	Муни-Ривлин + Хазанович	-0.56880 4.26582 0.50609	0.00074	0.072242 (0.2688)
7	Черных	0.12176 1.90783 -0.03145	0.00005	0.077135 (0.2777)

8	Харт-Смит	0.765017 -0.05120 0.00103	0.0000006	0.027562 (0.1660)
9	Огден	0.23988 -0.17799 -5.16934 -0.77043	0.0000008	0.07219 (0.2687)
10	Александер	0.305451 0.159208 0.149118 -0.043736	0.00008	0.052957 (0.2301)
11	Бидерман	1.01857 0.055804 -0.416731 0.123690	0.0000008	0.05858 (0.2420)
12	Блатц, Шарда, Чоэгл	1.15524 1.51532 0.140205 0.631571	0.0000008	0.01240 (0.1114)
13	Логарифмический 1	1.74963 23.1867 1135.42 1.71799	0.0089	0.012257 (0.1107)
14	Логарифмический 2	2.2842 -0.086807 176.74 1.5551	0.000074	0.012404 (0.1114)
15	Дробно-линейный	2.3429 -0.0018603 86.7162 1.5404	0.00005	0.012514 (0.1119)
16	Экспоненциальный	13.378 176.05 2.5824 1.4799	0.0000077	0.012689 (0.1126)
17	Степенной	2.4634 3.8251 48.664 1.5044	0.000001	0.009350 (0.0967)

Видно, что из однопараметрических потенциалов лучше работает потенциал Хазановича. Двухпараметрический потенциал Муни-Ривлина совсем не намного лучше однопараметрического Хазановича. Трехпараметрические потенциалы существенно различаются по точности описания эксперимента. Потенциал Исихары и др. практически не лучше Муни-Ривлина, (Муни-Ривлин+Хазанович), Черных. Существенно лучше других потенциал Харт-Смита. Этот потенциал превосходит все известные четырехпараметрические потенциалы, кроме одного из них. Кроме того, этот потенциал вполне можно перевести в разряд двухпараметрических, т.к. его третий параметр, являющийся множителем перед слагаемым со вторым инвариантом тензора деформации, во всех случаях близок к нулю.

Из известных четырехпараметрических потенциалы Александера и Бидермана несколько лучше потенциала Огдена. Обращает на себя внимание одинаковая точность потенциала Огдена и большинства описанных выше трехпараметрических потенциалов. Но заметно выделяется потенциал Блатца, Шарды, Чоэгла, для которого S=11%.

Авторские потенциалы содержат четыре параметра. Однако из них можно сделать трёхпараметрические, рассматривая в качестве четвертого параметра показатель n инварианта J, который во всех случаях близок к 1.5. Для этих потенциалов налицо существенное (в 4 раза и более) уменьшение дисперсии в оптимальных вариантах всех четырех выражений по сравнению с потенциалами Александера и Бидермана. Среднеквадратическое отклонение расчета от эксперимента S для лучшего из них, степенного, составляет менее 10%, т.е. меньше, чем для потенциала Блатца и др.

Итак, из известных ранее потенциалов для описания свойств наполненных шинных резин в области малых и средних деформаций в условиях сложного НДС хорошо себя проявили два выражения – Харт-Смита (3 параметра) и Блатца, Шарды, Чоэгла (4 параметра). Все из предложенных нами выражений показали хорошие результаты, особенно степенной потенциал.

В настоящее время набирается эксперимент для разных скоростей деформирования с целью полного решения задачи построения вязкоупругих определяющих соотношений в форме напряжений (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
2. *Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П.* Механика полимеров. – М.: Изд-во Московского университета, 1975. – 528 с.
3. *Boltzmann L.* // Pogg. Ann. Phys. u. Chem. – 1876. Bd.7. – S.624.
4. *Адамов А.А., Матвеенко В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Методы прикладной вязкоупругости. – ИМСС УрО РАН, 2003. – 412 с.
5. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. – М.: Иностранная литература, 1963. – 536 с.
6. *Шен М.* Вязкоупругая релаксация в полимерах. – М.: Мир, 1974. – 272 с.
7. *Ferry J.D.* Viscoelastic properties of polymers. – New York - London - Sydney – Toronto: John Wiley & Sons, Inc., 1970. – 671 p.
8. *Бленд Д.Р.* Теория линейной вязкоупругости. – М.: Мир, 1965. – 199 с.
9. *Лодж А.С.* Эластичные жидкости. – М.: Наука, 1969. – 464 с.
10. *Гамлицкий Ю.А.* Определяющие соотношения для резины / 21-й симпозиум «Проблемы шин и резинокордных композитов». Сборник докладов. – М.: ООО «Научно-технический центр «НИИШП», 2010. – Т.1. – С.20-34.
11. *Френкель Я.И., Образцов Ю.Н.* // ЖЭТФ. – 1939. – Т.9. – С.1081.
12. *Zener C.* Elasticity and anelasticity of metals. – Chicago: University Press, 1947.
13. *Уорд И.* Механические свойства твердых полимеров. – М.: Химия, 1975. – 360 с.
14. *Гамлицкий Ю.А., Мудрук В.И., Швачич М.В.* Упругий потенциал наполненных резин // Каучук и резина. – 2002. – №3. – с.29-39.

15. *Боглаев Ю.П.* Вычислительная математика и программирование. – М.: Высшая школа, 1990. – 544 с.
16. *Мудров А.Е.* Численные методы для ПЭВМ на языках БЕЙСИК, ФОРТРАН и ПАСКАЛЬ. – Томск: МП «Раско», 1991. – 105 с.
17. *Морозов И.А., Свистков А.Л.* Структурно-феноменологическая модель механического поведения резины // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т.14. – №4. – С.583-596.
18. *Morozov I.A., Svistkov A.L.* Structural-phenomenological model of the mechanical behavior of rubber // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. – 2010. – Vol.1. – №1. – P.63-79.
19. *Пелевин А.Г., Свистков А.Л., Адамов А.А., Lauke B., Heinrich G.* Алгоритм поиска констант в модели механического поведения резины // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №3. – С.312-328.
20. *Свистков А.Л.* Механические свойства эластомерных нанокомпозитов. Фундаментальные исследования в вузовско-академической лаборатории Перми / 24-й симпозиум «Проблемы шин и резинокордных композитов». Сборник докладов. – М.: ООО «Научно-технический центр «НИИШП», ООО НПКЦ ВЕСКОМ, 2013. – С.52-57.

УПРУГО-ПОРИСТОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО НОРМАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЕГО ГРАНИЦЫ

Данг Куанг Занг, Тарлаковский Д.В.

ФГБУ Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

Рассматривается нестационарная осесимметричная задача о распространении поверхностного возмущения в виде нормального перемещения скелета в упруго-пористой полуплоскости при отсутствии касательных напряжений. Используется модель Био. Для решения применяются преобразования Ханкеля по радиусу цилиндрической системы координат и Лапласа по времени. Оригиналы находятся аналитически с использованием свойств этих преобразований. Приведены примеры расчета регулярных частей решения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предполагается, что свойства материала полупространства $z \geq 0$ ($Oxyz$ – прямоугольная декартова система координат) описываются моделью Био [1-4], уравнения движения которой имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} N\Delta\mathbf{u} + (A+N)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u} + Q\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{U} = \rho_{11}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2}, \\ Q\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u} + R\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{U} = \rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_r + w\mathbf{e}_z + v\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_r + W\mathbf{e}_z + V\mathbf{e}_\theta$ – векторы перемещений скелета и жидкости; $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\theta$ – орты цилиндрической системы координат r, z, θ; t – время; A, N, Q, R и $\rho_{ij}\ (i, j = 1, 2)$ – физические постоянные среды.

Уравнения (1.1) в случае осесимметричного движения эквивалентны следующим волновым уравнениям относительно скалярных потенциалов φ_1, φ_2 и ненулевой компоненты ψ векторного потенциалов перемещений:

$$\Delta\varphi_k = \frac{1}{c_k^2}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial t^2} \quad (k = 1, 2),\ \Delta\psi - \frac{\psi}{r^2} = \frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

где

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad}(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{rot}(\psi\mathbf{e}_\theta),\ \mathbf{U} = \mathbf{grad}(\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2) + \mathbf{rot}(\beta_3\psi\mathbf{e}_\theta), \tag{1.3}$$

$$c_k^2 = \frac{P + Q\beta_k}{\rho_{11} + \rho_{12}\beta_k}, \quad c_3^2 = \frac{N}{\rho_{11} + \beta_3\rho_{12}},\ \beta_3 = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}, \tag{1.4}$$

а числа β_1 и β_2 являются корнями уравнения:

$$(\rho_{22}Q - \rho_{12}P)\beta^2 + (\rho_{22}P - \rho_{11}R)\beta + \rho_{12}P - \rho_{11}Q = 0.$$

Из (1.3) вытекает следующая связь координат векторов перемещений с потенциалами [5]:

$$u=\frac{\partial\left(\varphi_1+\varphi_2\right)}{\partial r}-\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad w=\frac{\partial\left(\varphi_1+\varphi_2\right)}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\psi)}{\partial r},\ u_\theta\equiv 0,$$
$$U=\frac{\partial\left(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2\right)}{\partial r}-\beta_3\frac{\partial\psi}{\partial z},\ W=\frac{\partial\left(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2\right)}{\partial z}+\frac{\beta_3}{r}\frac{\partial(r\psi)}{\partial r},\ U_\theta\equiv 0. \tag{1.5}$$

Физические компоненты $e_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta=r,\ z,\ \theta)$ тензоров деформаций в скелете и в жидкости связаны с векторами перемещений следующим образом:

$$e_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r},\ e_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),\ e_{\theta\theta}=\frac{u}{r},\ e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial U}{\partial r},\ \varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial z}\right),\ \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{U}{r},\ \varepsilon_{zz}=\frac{\partial W}{\partial z}, \tag{1.6}$$
$$e=e_{rr}+e_{\theta\theta}+e_{zz},\ \varepsilon=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz},$$

Напряжения в скелете и давление в жидкости определяются физическим законом:

$$\sigma_{rr}=2N\frac{\partial u}{\partial r}+\left(Ae+Q\varepsilon\right),\ \sigma_{zz}=2N\frac{\partial w}{\partial z}+\left(Ae+Q\varepsilon\right),\ \sigma_{\theta\theta}=2N\frac{u}{r}+\left(Ae+Q\varepsilon\right),$$
$$\sigma_{rz}=N\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),\ \sigma=Qe+R\varepsilon,$$
$$e=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{u}{r},\ \varepsilon=\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{U}{r}. \tag{1.7}$$

Предполагается, что компоненты напряженно-деформированного состояния ограничены, а в начальный момент времени возмущения отсутствуют:

$$\left.\varphi_k\right|_{t=0}=\left.\psi\right|_{t=0},\ \left.\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \tag{1.8}$$

Среди всех возможных граничных условий на границе полупространства ограничимся кинематическими нормальными возмущениями скелета:

$$\left.w\right|_{z=0}=\delta(x,y,\tau),\quad \left.W\right|_{z=0}=0,\ \left.\sigma_{rz}\right|_{z=0}=0. \tag{1.9}$$

Далее будем использовать безразмерные величины (при одинаковом начертании они обозначены штрихом, который в последующем изложении опущен):

$$r'=\frac{r}{L},\ z'=\frac{z}{L},\ u'=\frac{u}{L},\ w'=\frac{w}{L},\ U'=\frac{U}{L},\ W'=\frac{W}{L},\sigma'_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{N},\ \sigma'=\frac{\sigma}{N},\ \tau=\frac{c_1t}{L},$$
$$\varphi_k=\frac{\varphi_k}{L^2},\ \psi'=\frac{\psi}{L^2},\ \gamma_k=\frac{c_1}{c_k}\ \left(k=1,2,3\right),\ \eta_1=\frac{A}{H},\eta_2=\frac{Q}{H},\eta_3=\frac{R}{H},$$

где L – некоторый линейный размер.

В безразмерном виде уравнения (1.2) и начальные условия (1.9) принимают следующий вид (точками обозначено дифференцирование по τ):

$$\Delta\varphi_k=\gamma_k^2\ddot{\varphi}_k\quad\left(k=1,2\right),\ \Delta\psi-\frac{\psi}{r^2}=\gamma_3^2\ddot{\psi}; \tag{1.10}$$

$$\left.\varphi_k\right|_{\tau=0}=\left.\psi\right|_{\tau=0},\ \left.\dot{\varphi}_k\right|_{\tau=0}=\left.\dot{\psi}\right|_{\tau=0}=0. \tag{1.11}$$

2. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ

К уравнениям (1.10) и граничным условиям (1.9) с учетом начальных условий (1.11) применяем преобразование Лапласа по времени и Ханкеля по радиусу r (индексы «L» и «H» указывают на соответствующие изображения, а s и q – параметры этих преобразований) [5,6]:

$$\frac{\partial^2\varphi_l^{HL}}{\partial z^2}-k_l^2\left(q^2,s^2\right)\varphi_l^{HL}=0\ \left(l=1,2\right),\ \frac{\partial^2\psi^{HL}}{\partial z^2}-k_3^2\left(q^2,s^2\right)\psi^{HL}=0,$$
$$k_j\left(q\ ,s\ \right)=\sqrt{q\ +\gamma_j^2 s}\ \ \left(j=1,2,3\right),\ \mathrm{Re}\sqrt{\cdot}>0; \tag{2.1}$$

$$w^{HL}\Big|_{z=0}=\frac{1}{2\pi},\ W^{HL}\Big|_{z=0}=0,\ \sigma_{rz}^{HL}\Big|_{z=0}=0\,. \tag{2.2}$$

Общие решение уравнений (2.1) с учетом их ограниченности имеют вид:

$$\varphi_j^{HL}\left(q,s\right)=C_jE_j(q,s,z)\ \ \left(j=1,2\right),\ \psi^{HL}\left(q,s\right)=C_3E_3(q,s,z),\ \ E_j(q,s,z)=e^{-k_i\left(q^2,s^2\right)z} \tag{2.3}$$

где C_1, C_2 и C_3 – постоянные интегрирования

Подстановка этих равенств в (1.5)-(1.7) приводит к следующим формулам для изображений перемещений и напряжений:

$$u^{HL}\left(q,s,z\right)=-q\sum_{j=1}^{2}C_jE_j(q,s,z)+C_3k_3(q^2,s^2)E_3(q,s,z),$$
$$w^{HL}\left(q,s,z\right)=-\sum_{j=1}^{2}C_jk_j(q^2,s^2)E_j(q,s,z)+qC_3E_3(q,s,z),$$
$$U^{HL}\left(q,s,z\right)=-q\sum_{j=1}^{2}\beta_jC_jE_j(q,s,z)+\beta_3C_3k_3(q^2,s^2)E_3(q,s,z),$$
$$W^{HL}\left(q,s,z\right)=-\sum_{j=1}^{2}\beta_jC_jk_j(q^2,s^2)E_j(q,s,z)+\beta_3qC_3E_3(q,s,z); \tag{2.4}$$

$$\sigma_{zz}^{HL}\left(q,s,z\right)=\sum_{j=1}^{2}C_j\kappa_j(q^2,s^2)E_j(q,s,z)-2qC_3k_3(q^2,s^2)E_3(q,s,z),$$
$$\sigma_{rz}^{HL}\left(q,s,z\right)=2q\sum_{j=1}^{2}C_jk_j(q^2,s^2)E_j(q,s,z)-C_3\kappa_3(q^2,s^2)E_3(q,s,z),$$
$$\sigma^{HL}\left(q,s,z\right)=s^2\sum_{j=1}^{2}C_j\lambda_{23j}\gamma_j^2E_j(q,s,z),\ \lambda_{12j}=\eta_1+\beta_j\eta_2,\ \lambda_{23j}=\eta_2+\beta_j\eta_3,$$
$$\kappa_j(q,s)=2q+\left(2+\lambda_{12j}\right)\gamma_j^2 s\ \left(j=1,2\right),\ \kappa_3(q,s)=2q+\gamma_3^2 s. \tag{2.5}$$

Используя теперь граничные условия (2.2), находим постоянные интегрирования. В результате изображения перемещений и напряжений записываются так:

$$u^{HL}\left(q,s,z\right)=\sum_{j=1}^{3}u_j^{HL}\left(q,s,z\right),w^{HL}\left(q,s,z\right)=\sum_{j=1}^{3}w_j^{HL}\left(q,s,z\right),$$
$$U^{HL}\left(q,s,z\right)=\sum_{j=1}^{3}U_j^{HL}\left(q,s,z\right),W^{HL}\left(q,s,z\right)=\sum_{j=1}^{3}W_j^{HL}\left(q,s,z\right); \tag{2.6}$$

$$\sigma_{rz}^{HL}(q,s,z)=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{rzj}^{HL}(q,s,z),\quad \sigma_{zz}^{HL}(q,s,z)=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{zzj}^{HL}(q,s,z),$$
$$\sigma^{HL}(q,s,z)=\sum_{j=1}^{2}\sigma_{j}^{HL}(q,s,z). \tag{2.7}$$

Здесь

$$u_j^{HL}=(-1)^{3-j}\left(\frac{\beta_{3(3-j)}}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2}q^2s^{-2}-\frac{\beta_{3-j}}{2\pi\beta_{12}}\right)f_1^{HL}(q,s,\gamma_j),\ u_3^{HL}=-\frac{1}{\pi\gamma_3^2}f_3^{HL}(q,s,\gamma_3);$$

$$\sigma_{zzj}^{HL}=\frac{(-1)^j}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2}\left[4\beta_{3(3-j)}q^4s^{-4}+2\left(\beta_{3(3-j)}\varsigma_j-\beta_{3-j}\gamma_3^2\right)q^2s^{-2}-\beta_{3-j}\gamma_3^2\varsigma_j\right]f_6^{HL}(q,s,\gamma_j), \tag{2.8}$$

$$\sigma_{zz3}^{HL}=\frac{2}{\pi\gamma_3^2}q^2s^{-2}f_7^{HL}(q,s,\gamma_3),\ \sigma_{rz3}^{HL}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{\gamma_3^2}q^2s^{-2}+1\right)f_9^{HL}(q,s,\gamma_3),$$

$$\sigma_{rzj}^{HL}=\frac{(-1)^j}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2}\left(2\beta_{3(3-j)}q^2s^{-2}-\beta_{3-j}\gamma_3^2\right)f_9^{HL}(q,s,\gamma_j),$$

$$\sigma_j^{HL}=\frac{(-1)^j\lambda_{23j}\gamma_j^2}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2}\left[2\beta_{3(3-j)}f_5^{HL}(q,s,\gamma_j)-\beta_{3-j}f_6^{HL}(q,s,\gamma_j)\right],$$

$$f_1^{HL}(q,s,\gamma_l)=\frac{q}{k_l(q^2,s^2)}E_l(q,s,z),\ f_3^{HL}(q,s,\gamma_3)=\frac{qk_3(q^2,s^2)}{s^2}E_3(q,s,z) \tag{2.9}$$

$$f_6^{HL}(q,s,\gamma_l)=\frac{s^2E_l(q,s,z)}{k_l(q^2,s^2)},\ f_5^{HL}(q,s,\gamma_l)=\frac{q^2E_l(q,s,z)}{k_l(q^2,s^2)},\quad \beta_{3(3-l)}=\beta_3-\beta_{3-l},$$

$$f_7^{HL}(q,s,\gamma_l)=k_3(q^2,s^2)E_3(q,s,z),\quad f_9^{HL}=qE_l(q,s,z)\quad \varsigma_l=\left(2+\lambda_{12l}\right)\gamma_l^2,\ \left(l=1,2\right)$$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОРИГИНАЛОВ

Оригиналы функций f_1^{HL} - f_9^{HL} и связанных с ними выражений находим с помощью свойств преобразований Лапласа и Ханкеля, а также с использованием таблиц [5] ($r_3=\sqrt{r^2+z^2}$, $H(\tau)$ – функция Хевисайда):

$$\left[f_1(q,s,\gamma_l)\right]^{H_1^{-1}L^{-1}}=\frac{r}{r_3^3}\left[\delta(\tau-\gamma_lr_3)+\gamma_lr_3\delta'(\tau-\gamma_lr_3)\right],$$

$$\left[f_3(q,s,\gamma_l)\right]^{H_1^{-1}L^{-1}}=\frac{r}{r_3^6}\times$$
$$\times\left[3\tau(4z^2-r^2)H(\tau-\gamma_lr_3)+\gamma_l^2r_3(5z^2-3r^2)\delta(\tau-\gamma_lr_3)+\gamma_l^3r_3^2z^2\delta'(\tau-\gamma_lr_3)\right],$$

$$\left[f_6(q,s,\gamma_l)\right]^{H_0^{-1}L^{-1}}=\frac{1}{r_3}\delta''(\tau-\gamma_lr_3),$$

$$\left[f_5^{HL}(q,s,\gamma_l)\right]^{H_0^{-1}L^{-1}}=\frac{2z^2-r^2}{r_3^5}\delta(\tau-\gamma_lr_3)+\gamma_l\frac{2z^2-r^2}{r_3^4}\delta'(\tau-\gamma_lr_3)-\gamma_l^2\frac{r^2}{r_3^3}\delta''(\tau-\gamma_lr_3)$$

$$\left[f_9(q,s,\gamma_l)\right]^{H_1^{-1}L^{-1}}=\frac{rz}{r_3^3}\left[\frac{3}{r_3^2}\delta(\tau-\gamma_lr_3)+\frac{3\gamma_l}{r_3}\delta''(\tau-\gamma_lr_3)+\gamma_l^2\delta''(\tau-\gamma_lr_3)\right]$$

$$f_7^{H_0^{-1}L^{-}}(q,s,\gamma_l)=r_3^{-5}(2z^2-r^2)H(\tau-\gamma_l r_3)+\gamma_l^2 z^2 r_3^3\delta(\tau-\gamma_l r_3),$$

$$\left[q^2 s^{-2} f_7(q,s,\gamma_l)\right]^{H_0^{-1}L^{-1}}=\tau\frac{9r^4-72r^2z^2+24z^4}{r_3^9}H(\tau-\gamma_l r_3)+$$

$$+\gamma_l^2\frac{4r^4-31r^2z^2+10z^4}{r_3^7}\delta(\tau-\gamma_l r_3)+\gamma_l^3\frac{r^4-7r^2z^2+2z^4}{r_3^6}\delta'(\tau-\gamma_l r_3)-$$

$$-\gamma_l^4\frac{r^2z^2}{r_3^5}\delta''(\tau-\gamma_l r_3),$$

$$\left[q^2 s^{-2} f_1(q,s,\gamma_l)\right]^{H_1^{-1}L^{-1}}=-\left[f_1''(x,\tau)+\frac{f_1'(x,\tau)}{r}-\frac{f_1(x,\tau)}{r^2}\right]=$$

$$=\frac{r}{r_3^4}\left[\frac{3\tau(4z^2-r^2)}{r_3^2}H(\tau-\gamma_l r_3)+\frac{2\gamma_l(2z^2-r^2)}{r_3}\delta(\tau-\gamma_l r_3)-\gamma_l^3 r^2\delta'(\tau-\gamma_l r_3)\right],$$

$$\left[q^2 s^{-2} f_6(q,s,\gamma_l)\right]^{H_0^{-1}L^{-1}}=\frac{2z^2-r^2}{r_3^5}\delta(\tau-\gamma_l r_3)+\gamma_l\frac{2z^2-r^2}{r_3^4}\delta'(\tau-\gamma_l r_3)-\gamma_l^2\frac{r^2}{r_3^3}\delta''(\tau-\gamma_l r_3),$$

$$\left[q^4 s^{-4} f_6(q,s,\gamma_l)\right]^{H_0^{-1}L^{-1}}=\rho_0\tau H(\tau-\gamma_l r)+\rho_2\gamma_l^2\delta(\tau-\gamma_l r)+\rho_3\gamma_l^3\delta'(\tau-\gamma_l r)+\rho_4\gamma_l^4\delta''(\tau-\gamma_l r),$$

$$q^2 s^{-2}\left[f_9(q,s,\gamma_l)\right]^{H_1^{-1}L^{-1}}=\zeta_0\tau H(\tau-\gamma_l r_3)+\zeta_2\gamma_l{}^2\delta(\tau-\gamma_l r_3)+\zeta_3\gamma_l^3\delta'(\tau-\gamma_l r_3)+\zeta_4\gamma_l^4\delta''(\tau-\gamma_l r_3).$$

Здесь использованы обозначения:

$$\zeta_0=r^{-1}r_3^{-9}z(6r^2z^2+3z^4+108r^4),\quad \zeta_2=\frac{rz(30r^2-18z^2)}{r_3^7}+\frac{z(z^2-5r^2)}{rr_3^5}-\frac{z}{rr_3^3}$$

$$\zeta_3=\frac{rz(11r^2-2z^2)}{r_3^6}-\frac{zr}{rr_3^4},\zeta_4=\frac{2r^3z}{r_3^5}$$

$$\rho_0=r_3^{-9}(9r^4-72r^2z^2+24z^4),\zeta_2=r_3^{-7}rz(30r^2-18z^2)+r^{-1}r_3^{-5}z(z^2-5r^2)-r^{-1}r_3^{-3}z$$

$$\zeta_3=r_3^{-6}rz(11r^2-2z^2)-zrr^{-1}r_3^{-4},\quad \zeta_4=2r^3zr_3^{-5}$$

В результате приходим к следующим равенствам для оригиналов слагаемых в формулах (2.7) и (2.8) ($j=1,2,3$; $l=1,2$):

$$u_l(r,\tau,z)=u_{lr}(r,\tau,z)+\frac{(-1)^{3-l}r}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2r_3^5}\Big\{\left[4\beta_{3(3-l)}\gamma_l(2z^2-r^2)-\beta_{3-l}\gamma_3^2r_3^2\right]\delta(\tau-\gamma_l r_3)-$$

$$-\left[2\beta_{3(3-l)}\gamma_l^3r^3+\beta_{3-l}\gamma_3^2r_3^2\right]r_3\delta'(\tau-\gamma_l r_3)\Big\},$$

$$u_3(r,\tau,z)=u_{3r}(r,\tau,z)-\frac{r}{\pi r_3^5}\left[(5z^2-3r^2)\delta(\tau-\gamma_3 r_3)+\gamma_3 r_3 z^2\delta'(\tau-\gamma_3 r_3)\right],$$

$$U_j(r,\tau,z)=\beta_j u_j(r,\tau,z),\ U_{jr}(r,\tau,z)=\beta_j u_{jr}(r,\tau,z); \tag{3.1}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{zzl}(r,\tau,z) &= \sigma_{zzlr}(r,\tau,z) + \\
&+\frac{(-1)^l}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2}\left\{2\left[2\beta_{3(3-l)}\rho_2\gamma_l^2+\left(\beta_{3(3-l)}\varsigma_l-\beta_{3-l}\gamma_3^2\right)\frac{2z^2-r^2}{r_3^5}\right]\delta(\tau-\gamma_l r)+\right.\\
&+2\left[2\beta_{3(3-l)}\rho_3\gamma_l^3+\gamma_l\left(\beta_{3(3-l)}\varsigma_l-\beta_{3-l}\gamma_3^2\right)\frac{2z^2-r^2}{r_3^4}\right]\delta'(\tau-\gamma_l r)+\\
&\left.+\left[4\beta_{3(3-l)}\rho_4\gamma_l^4-\left(2\beta_{3(3-l)}\varsigma_l-2\beta_{3-l}\gamma_3^2\right)\frac{\gamma_l^2r^2}{r_3^3}-\frac{\beta_{3-l}\gamma_l^2\varsigma_l}{r_3}\right]\right\}\delta''(\tau-\gamma_l r),
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{zz3}(r,\tau,z) &= \sigma_{zz3r}(r,\tau,z)+\frac{2}{\pi r_3^5}\left[\frac{4r^4-31r^2z^2+10z^4}{r_3^2}\delta(\tau-\gamma_3r_3)+\right.\\
&\left.+\gamma_3\frac{r^4-7r^2z^2+2z^4}{r_3}\delta'(\tau-\gamma_3r_3)-\gamma_3^2r^2z^2\delta''(\tau-\gamma_3r_3)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_l(r,\tau,z) &= \frac{(-1)^l\lambda_{23l}\gamma_l^2}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2r_3}\left\{\beta_{3(3-l)}\frac{2z^2-r^2}{r_3^4}\left[\delta(\tau-\gamma_l r)+\gamma_l r_3\delta'(\tau-\gamma_l r)\right]-\right.\\
&\left.-\left(\frac{\beta_{3(3-l)}\gamma_l^2r^2}{r_3^2}+\frac{1}{2}\beta_{3-l}\right)\delta''(\tau-\gamma_l r)\right\}.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$u_{lr}(r,\tau,z)=\frac{3(-1)^{3-l}\beta_{3(3-l)}}{\pi\beta_{12}\gamma_3^2r_3^6}\tau r(4z^2-r^2)H(\tau-\gamma_l r_l),$$

$$u_{3r}(r,\tau,z)=-\frac{3r\tau(4z^2-r^2)}{\pi\gamma_3^2r_3^6}H(\tau-\gamma_3r_3),$$

$$\sigma_{zzlr}(r,\tau,z)=\frac{4(-1)^l\beta_{3(3-l)}\rho_0}{2\pi\beta_{12}\gamma_3^2}\tau H(\tau-\gamma_l r),$$

$$\sigma_{zz3r}(r,\tau,z)=\frac{2\tau(9r^4-72r^2z^2+24z^4)}{\pi\gamma_3^2r_3^9}H(\tau-\gamma_3r_3).$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЗАДАЧИ

В качестве примера рассмотрим упруго-пористую полуплоскость в виде песчаника, поры которого насышены керосином [2]:

$A=0,4026\cdot10^4$ МПа, $N=0,2493\cdot10^3$ МПа, $R=0,672\cdot10^4$ МПа, $Q=0,295\cdot10^4$ МПа,

$\rho_{11}=\ 0,6087.10^{-3}$ кг/м^3, $\rho_{22}=\ 0,2159.10^{-3}$ кг/м^3, $\rho_{12}=-0,19.10^{-5}$ кг/м^3.

Этим величинам соответствуют следующие значения безразмерных параметров:

$\beta_0=0,3;\ \beta_1=0,8757;\ \beta_2=-10,3287;\ \beta_3=0,0088;\ \gamma_1=1;\ \gamma_2=2,1612;\ \gamma_3=1,963.$

Результаты расчетов по формулам (3.1) и (2.2) регулярных составляющих перемещений:

$$u_r(r,\tau,z)=\sum_{l=1}^{3}u_{lr}(r,\tau,z),\ U_r(r,\tau,z)=\sum_{l=1}^{3}U_{lr}(r,\tau,z)$$

и напряжений

$$\sigma_{zzr}(r,\tau,z)=\sum_{l=1}^{3}\sigma_{zzlr}(r,\tau,z)$$

в зависимости от координаты z при $r=0,3$ представлены на рис.1-3. Сплошные кривые соответствуют моменту времени $\tau=0,7$, штрихпунктирные – $\tau=0,8$, а пунктирные – $\tau=0,9$.

Отметим, что разрывы на графиках имеют место в точках, $|x|=\tau/\gamma_k$ $(k=1,2,3)$, определяющих фронты волн в скелете и жидкости.

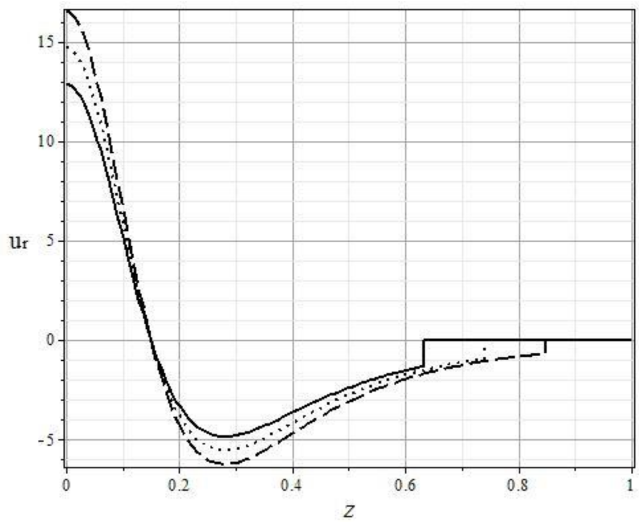


Рис.1.

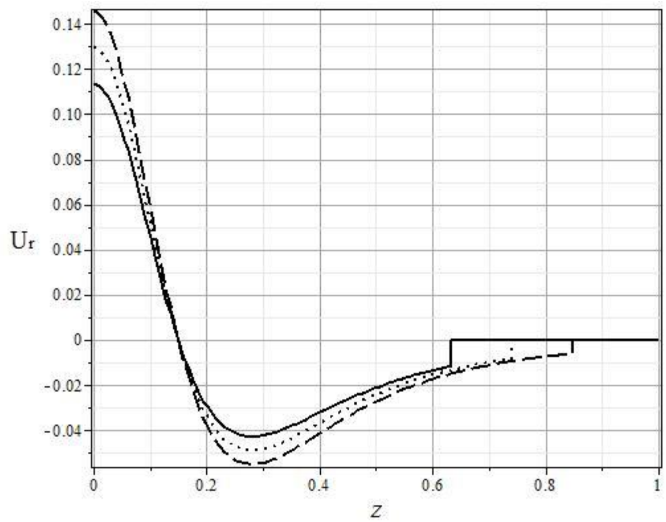


Рис.2.

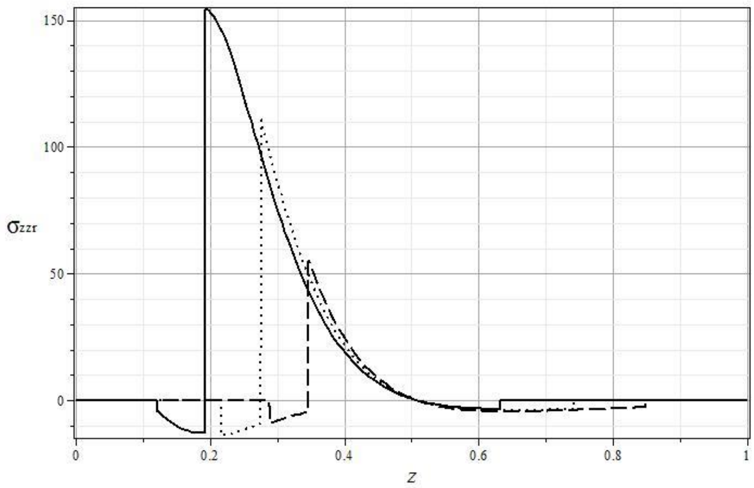


Рис.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Био М.А.* Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика: Сб. пер. и обзор иностр. литер. – 1963. – №6. – С.103-134.
2. *Наримов Ш.Н.* Волновые процессы в насыщенных пористых средах. – Ташкент: Мехнат, 1988. – 304 с.
3. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. – М.: Наука, 1990. – 264 с.
4. *Данг Занг Куанг, Тарлаковский Д.В.* Осесимметричные нестационарные колебания упруго-пористого полупространства под действием поверхностного возмущения / IX-я Всеросс. научн. конф. «Нелинейные колебания механических систем». Сборник трудов. – Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2012. – С.314-319.
5. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах. – М.: Физматлит, 2004. – 472 с.
6. *Слепян Л.И., Яковлев Ю.С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.

КИНЕТИКА ДИФФУЗИОННЫХ ПОР В НАНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ЖАРОПРОЧНОМ СПЛАВЕ ПРИ ТЕРМОЦИКЛИРОВАНИИ

Емалетдинов А.К., Галактионова А.В.

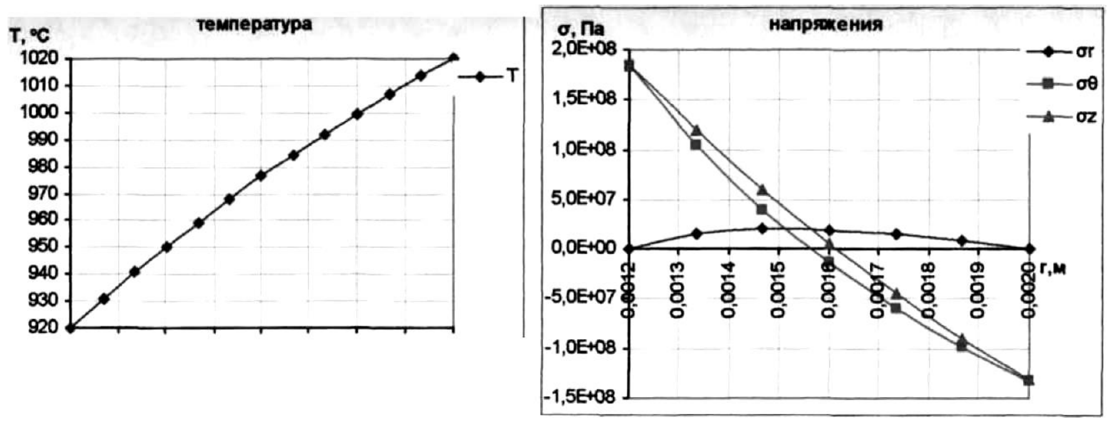
Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа, Россия

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются механизмы диффузионного роста пор в нанокристаллическом двухфазном сплаве при нестационарной термомеханической нагрузке. Исследуется кинетика роста пор благодаря стоку избыточных вакансий при термоциклировании. Получены соотношения, выполнены расчеты кинетики роста пор с учетом градиентов напряжений и температур.

Длительная эксплуатация рабочих лопаток турбины из нанокристаллического жаропрочного сплава с γ'/γ - микроструктурой в условиях высоких температур и нагрузок сопровождается развитием пор и трещин, которые определяют ресурс [1-3]. Сплавы испытывают комплексное воздействие нескольких эксплуатационных факторов: высоких нагрузок, вибрации, неравномерного циклического нагрева. Под действием термомеханических нагрузок происходит зарождение вакансий, активация диффузионных процессов, в частности рост пор [1-5]. В работе впервые анализируется модель диффузионного зарождения и роста поры в никелевом жаропрочном сплаве при термомеханическом нагружении с учетом циклических напряжений растяжения, температурных напряжений и нестационарного нагрева до высоких температур.

Рассмотрим бесконечную изотропную пластину, находящуюся под действием постоянных и циклических растягивающих напряжений вдоль и температурного градиента поперек пластины как показано на рис.1 [3].



а б

Рис.1. Распределение температур (а) и напряжений (б) в сечении стенки входной кромки охлаждаемой рабочей лопатки ТВД ГТД АЛ-31Ф [3]. Радиус охлаждаемого канала =1,2 мм, радиус наружной поверхности входной кромки =2,0 мм.

Рост пор в жаропрочном сплаве при эксплуатации включает ряд физических процессов: 1) возникновение избыточной концентрации вакансий, 2) неустойчивость и коагуляция вакансий в кластеры и зарождение поры критического размера, 3) рост пор.

За счет работы термомеханических нагрузок происходит зарождение избыточных вакансий, которые будут конденсироваться в кластеры и поры. Для определения избыточной плотности вакансий, роста пор используем уравнения кинетики [4]. Кинетика изменения плотности избыточных вакансий в первом приближении описывается уравнением:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + divJ = \frac{c - c_0}{\tau_0}, \tag{1}$$

где c – избыточная плотность вакансий, c_0 – равновесная плотность вакансий, τ_0 – среднее время жизни вакансий по поглощения стоками (поверхностью, порой и др.), J – поток вакансий. Поток вакансий определяется градиентом химического потенциала μ:

$$J = -\frac{cD}{kT}\nabla\mu, \tag{2}$$

где D – коэффициент диффузии вакансий. В упругом поле напряжений σ и температур в изотропной среде вакансии будут обладать химическим потенциалом, который может быть представлен в виде:

$$\mu = kT\ln(\frac{c}{c_0}) - \frac{1}{3}\Omega\sigma + \frac{k_T}{cD}T. \tag{3}$$

Подставив выражение (3) в формулу (2), получим плотность потока вакансий:

$$J = -D[(1 - \frac{\sigma\Omega}{kT})\nabla c + \frac{k_T}{kT}\nabla T], \tag{4}$$

где Ω – мощность вакансии, характеризующая изменение объема кристалла при образовании в нем вакансии, k_T = термодиффузионное отношение. Первое слагаемое описывает диффузию вакансий, второе и третье слагаемые характеризуют дрейфовое движение вакансий под действием неоднородных напряжений и температуры соответственно. Равновесная концентрация вакансий определяется соотношением:

$$c_0 = \exp(\frac{-E + \sigma\Omega}{kT}),$$

где E – энергия образования вакансии. Систему уравнений (1)-(4), необходимо дополнить граничными условиями. В первом приближении в линейной теории упругости напряжения будут определяться выражением:

$$\sigma(r) = \sigma_0 + K_0\Omega c + \sigma_1 - K_0\alpha_T T(\mathrm{r}), \tag{5}$$

где σ_0, σ_1 – значения напряжений центробежных растяжения и вибрационных соответственно, K_0 – модуль всестороннего сжатия, α_T – коэффициент теплового расширения. Первое слагаемое описывает растягивающие центробежные напряжения, второе и третье слагаемые характеризуют концентрационные и вибрационные напряжения, последнее – термоупругие напряжения.

При взаимодействии одиночных избыточных вакансий в поле напряжений и температур возникают неустойчивости, приводящие к образованию кластеров вакансий. Избыточная плотность вакансий c определяется выражением:

$$\Delta c = c - c_0 = c_0 \frac{\Delta D}{D} + c_0 \exp(\frac{\sigma\Omega}{kT}), \qquad (6)$$

Избыточные вакансии будут поглощаться кластерами и приводить к зарождению пор. Распределение вакансий вблизи поры определяется полем напряжений поры и зависит от радиуса поры [4,5]. Пересыщение вакансий Δc_R на поре радиусом R должно быть меньше пересышения Δc вдали от поры. В обратном случае будет происходить растворение поры. Устойчивый рост поры реализуется, когда концентрация вакансий вблизи поверхности поры становиться меньше средней избыточной концентрации вакансий вдали от поры. Условием этого является превышение значения размера поры критического значения ($R > R_K$). Критический размер будет определяться условием $\Delta c_R = \Delta c$. Для пересыщения на поре можно записать [4,5]:

$$\Delta c_R = \frac{2\gamma\Omega c_0}{kTR}, \qquad (7)$$

Тогда из условия $\Delta c_R = \Delta c$ получим критический размер для роста пор:

$$R_K = \frac{2\gamma\Omega c_0}{kT\Delta c} = \frac{2\gamma\Omega}{kT(\Delta D / D + \exp(\sigma\Omega / kT)}. \qquad (8)$$

где γ – коэффициент поверхностного натяжения. В отсутствие напряжений критический размер достигает 10^{-7} м, поэтому зарождение пор маловероятно [4,5]. Как следует из выражения (8), термомеханическая нагрузка уменьшает критический размер до 10^{-9} м, поэтому становиться возможным зарождение и рост пор. Если рассматривать γ'/γ-микроструктуру, то более вероятным будет зарождение пор в γ-пластинах.

Кинетика роста поры радиусом определяется потоком вакансий на поверхность поры и вероятностью их поглощения. Используя (4)-(6) можно получить уравнение кинетики для поры радиусом R в виде [4,5]:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{2\gamma\Omega D c_0}{R}(\frac{1}{R_K} - \frac{1}{R}). \qquad (9)$$

Система уравнений (1)-(9) описывает кинетику зарождения избыточных вакансий, кластеров вакансий и роста поры под действием термомеханической нагрузки. Решение возможно только численными методами. На рис.2 представлены результаты расчета роста и рассасывания поры в поле градиента температур и напряжений в γ-пластинах никеля.

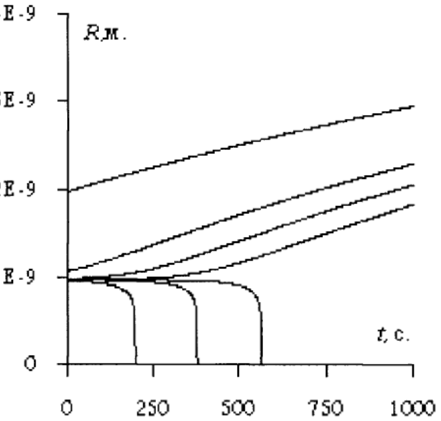


Рис.2. Кинетика изменения размера поры в зависимости от пересыщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шалин Р.Е., Светлов И. Л., Качанов Е.Б.* Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов. – М.: Машиностроение, 1977. – 336 с.
2. *Каблов Е.Н.* Литые лопатки газотурбинных двигателей. Сплавы, технология, покрытия. – М.: МИСиС, 2001. – 632 с.
3. *Богуслаев В.А., Муравченко Ф.М., Жеманюк П.Д.* Технологическое обеспечение эксплуатационных характеристик деталей ГТД. – Запорожье: ОАО «Мотор Сич», 2003. – Т.1,2.
4. *Гегузин Я.Е., Кривоглаз М.А.* Движение макроскопических включений в твердых телах // Металлургия. – 1971. – С.142.
5. *Черемской П.Г., Слезов В.В., Бетехтин В.И.* Поры в твердом теле. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 376 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В НАНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ДВУХФАЗНОМ СПЛАВЕ ПРИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ

Емалетдинов А.К., Галактионова А.В.

Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа, Россия

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются механизмы образования неравновесной плотности вакансий в нанокристаллическом двухфазном сплаве при нестационарной термомеханической нагрузке. Исследуется кинетика образования избыточных вакансий с учетом микроструктуры. Получены соотношения, выполнены расчеты кинетики, параметров вакансий, плотности избыточных вакансий.

Эволюция вакансионной системы и зарождение пор под действием циклической термомеханической нагрузки определяют долговечность нанокристаллических двухфазных сплавов, например жаропрочных сплавов, представляющих собой композиционные материалы, состоящие из кубических зерен γ' фазы размером до 0,5 мкм и соединенных тонкими прослойками матричной γ фазы толщиной до 0,05мкм [1-3]. Сплавы испытывают комплексное воздействие нескольких эксплуатационных факторов: высоких нагрузок, вибрации, неравномерного циклического нагрева. Под действием термомеханических нагрузок происходит зарождение вакансий, активация диффузионных процессов. В процессе нагружения возникает избыточная неоднородная неравновесная концентрация вакансий. В условиях непрерывного изменения температуры развиваются напряжения, возникающие вследствие разницы коэффициентов термического расширения фаз. Кинетика вакансий определяется диффузионным уравнением с источником вакансий по термактивационному механизму с учетом диффузионных и термических напряжений, а также концентрации напряжений возле включений [4-8]. Парциальные коэффициенты диффузии компонентов различны, что приводит к возникновению потоков вакансий в зернах и прослойках. Потоки вакансий возникают под влиянием неоднородных рабочих напряжений и температур сплава. В работе впервые проведено моделирование кинетики вакансий при термомеханическом нагружении, включающем циклические напряжения растяжения, температурные напряжения и нагрев до высоких температур с учетом микроструктуры.

Рассмотрим бесконечную изотропную пластину, находящуюся под действием постоянных и циклических растягивающих напряжений вдоль и температурного градиента поперек пластины. В процессе нагружения возникает избыточная неоднородная неравновесная концентрация вакансий. В условиях непрерывного изменения температуры развиваются напряжения, возникающие вследствие разницы коэффициентов термического расширения фаз. Кинетика вакансий определяется диффузионным уравнением с источником вакансий по термактивационному механизму с учетом диффузионных и термических напряжений, а также концентрации напряжений возле включений. Межфазные (когерентные) напряжения в γ'/γ- микроструктуре недеформированных жаропрочных никелевых сплавов возникают из-за разности параметров γ- и γ'-решеток. Для решения задачи об определении межфазных напряжений нужно рассмотреть периодическую ячейку γ'/γ-микроструктуры, состоящую из γ'-кубоида, окруженного γ-оболочкой, которая в свою очередь состоит из трех γ-пластин, трех γ-брусьев и маленького γ-кубоида (рис.1).

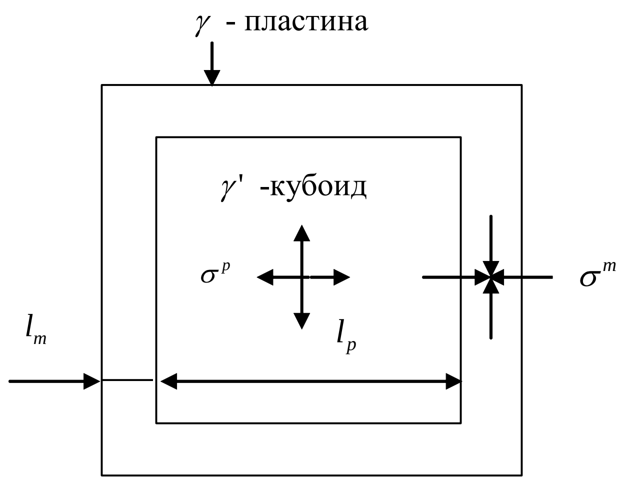


Рис.1. Периодическая ячейка γ'/γ- микроструктуры, и напряженное состояние ее элементов.

В работах [9-11] межфазные напряжения рассчитывали в двумерном приближении (плоское деформированное состояние). Из работы [10,11] следует, что двумерная и трехмерная модели дают почти подобный характер распределения межфазных напряжений, но величины их несколько отличаются. Обобщая результаты этих работ можно сделать следующие выводы:

- Изменение межфазных напряжений в пределах каждого структурного элемента периодической ячейки (γ'-кубоида, γ-пластин, γ-брусьев и γ-кубоида) невелико, но имеются существенные градиенты напряжений близи вершин и ребер γ'-кубоида.
- γ'-кубоид находится в состоянии незначительного гидростатического растяжения, тогда как в γ-пластинах и γ-брусьях имеются большие продольные сжимающие напряжения, действующие в плоскости пластин и вдоль осей брусьев.
- Величина усредненного напряжения в γ-пластинах близка к таковой для γ'-кубоида. Исходя из данных закономерностей, можно сделать следующие допущения:
- Напряжения в γ'-кубоиде σ^p и усредненные напряжения в γ-пластинах равны между собой и однородны.
- Продольные напряжения σ^m, действующие в плоскости γ-пластин, равны продольным напряжениям в γ-брусьях и также однородны.
- Другие компоненты напряжений в γ-брусьях и γ-кубоиде не оказывают существенного влияния на напряженно-деформированное состояние периодической ячейки микроструктуры, так как их объемная доля мала.

Согласно принятым допущениям напряженное состояние периодической ячейки описывается двумя компонентами напряжений σ^m и σ^p (рис.1). Запишем уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние данной модели. Уравнение совместности деформации γ'-кубоида ε^p и продольной деформации γ-пластины ε^m имеет вид:

$$\varepsilon^p - \varepsilon^m = \delta\,, \tag{1}$$

где $\delta = (a_p - a_m)/0{,}5(a_p + a_m)$ – параметр несоотвествия периодов кристаллических решеток γ'/γ фаз, a_p и a_m – периоды γ'/γ фаз соответственно.

Уравнение равновесия в среднем сечении периодической ячейки (рис.1) будет иметь вид:

$$\sigma^m(1 - A_p) + \sigma^p A_p = 0\,, \tag{2}$$

где $A_p = (l_p / l_m)^2$ – поверхностная доля γ'-фазы в среднем сечении

Используя уравнения упругости для продольной деформации γ-пластины и деформации γ' - кубоида можно получить выражения для напряжений:

$$\sigma^m = A_p E_0 \delta\,, \tag{3}$$

$$\sigma^p = -(1 - A_p) E_0 \delta\,, \tag{4}$$

где $E_0 = 1/\{s_{11}^p + 2s_{12}^p - s_{12}^m + [s_{11}^m - s_{11}^p + 2s_{12}^m - s_{12}^p)]A_p\}$, s_{12}^m и s_{12}^p – соответственно упругие податливости γ- и γ'-фаз.

За счет работы термомеханических нагрузок происходит зарождение избыточных вакансий. Кинетика изменения плотности избыточных вакансий в первом приближении описывается уравнением [7]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla D \nabla c = \frac{c - c_0}{\tau_0}\,, \tag{5}$$

где c – избыточная плотность вакансий, c_0 – равновесная плотность вакансий, τ_0 – среднее время жизни вакансий по поглощения стоками (дислокациями, границами и др.), D – коэффициент диффузии вакансий. Характерное время жизни вакансии до поглощения в стоке оценивается выражением [7]:

$$\tau_0 = l^2 p / D\,, \tag{6}$$

где l – среднее расстояние между стоками, p – коэффициент прилипания вакансии. В зависимости от плотности стоков время жизни вакансий может изменяться от 10 до 10^3 с.

В упругом поле напряжений σ и температур в изотропной среде вакансии будут обладать химическим потенциалом, который может быть представлен в виде:

$$\mu = kT \ln(\frac{c}{c_0}) - \frac{1}{3}\Omega\sigma + \frac{k_T}{cD}T\,. \tag{7}$$

где Ω – мощность вакансии, характеризующая изменение объема кристалла при образовании в нем вакансии, k_T=термодиффузионное отношение. Первое слагаемое описывает диффузию вакансий, второе и третье слагаемые характеризуют дрейфовое движение вакансий под действием неоднородных напряжений и температуры соответственно. Равновесная концентрация вакансий определяется соотношением:

$$c_0 = \exp(\frac{-E+\sigma\Omega}{kT}), \qquad (8)$$

где E – энергия образования вакансии. Систему уравнений (1)-(4), необходимо дополнить граничными условиями. На неравновесную концентрацию вакансий оказывают влияние концентрационные и диффузионные напряжения, циклическая термомеханическая нагрузка. Величина концентрационных напряжений зависит от размерного несоответствия атомов и модулей сжимаемости компонентов. Диффузионные напряжения возникают вследствие неравных встречных потоков атомов компонентов. В первом приближении в линейной теории упругости суммарные напряжения будут определяться выражением [5-8]:

$$\sigma(r) = \sigma_0 + K_0\Omega c + \sigma_1 - K_0\alpha_T T(\mathrm{r}), \qquad (9)$$

где σ_0, σ_1 – значения напряжений центробежных растяжения и вибрационных соответственно, K_0 – модуль всестороннего сжатия, α_T – коэффициент теплового расширения. Первое слагаемое описывает растягивающие центробежные напряжения, второе и третье слагаемые характеризуют концентрационные и вибрационные напряжения, последнее термоупругие напряжения.

При взаимодействии одиночных избыточных вакансий в поле напряжений и температур возникают неустойчивости, приводящие к образованию кластеров вакансий. Избыточная плотность вакансий c определяется выражением:

$$\Delta c = c - c_0 = c_0\frac{\Delta D}{D} + c_0\exp(\frac{\sigma\Omega}{kT}), \qquad (10)$$

Решение системы уравнений (1)-(10) возможно только численными методами. Для упрощения задачи рассмотрена усредненная по срединной линии γ'-кубоида, одномерная стационарная задача для слоистой системы, состоящей из γ'/γ-микроструктуры с толщиной l_p/l_m соответственно [5,6]. На границах заданы условия непрерывности для концентрации и плотности потока вакансий. На рис.2. проведены качественные профили неоднородной концентрации вакансий в γ'/γ- микроструктуры, полученные при численных расчетах стационарной одномерной задачи.

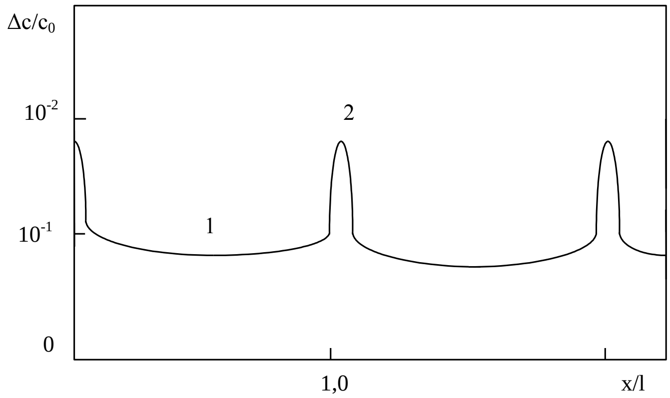


Рис.2. Профиль неоднородной стационарной концентрации вакансий в зернах γ' - фазы 1 и γ прослойке 2 при действии термомеханической нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шалин Р.Е., Светлов И. Л., Качанов Е.Б.* Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов. – М.: Машиностроение, 1977. – 336 с.
2. *Каблов Е.Н.* Литые лопатки газотурбинных двигателей. Сплавы, технология, покрытия. – М.: МИСиС, 2001. – 632 с.
3. *Богуслаев В.А., Муравченко Ф.М., Жеманюк П.Д.* Технологическое обеспечение эксплуатационных характеристик деталей ГТД. – Запорожье: ОАО «Мотор Сич», 2003. – Т.1,2.
4. *Гегузин Я.Е.* Диффузионная зона. – М.: Наука, 1979. – 343 с.
5. *Большаков В.И., Андрианов В.И., Данишевский В.В.* Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. – Днепропетровск: Пороги, 2008. – 196 с.
6. *Ванин Г.А.* Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наукова Димка, 1985. – 304 с.
7. *Кулемин А.В.* Ультразвук и диффузия в металлах. – М.: Металлуригия, 1978. – 200 с.
8. *Скубачевский Г.С.* Авиационные и газотурбинные двигатели. Конструкция и расчет деталей. – М.: Машиностроение, 1981. – 550 с.
9. *Müller L., Glatzel U., Feller-Kniepmeier M.* Modelling of themial misfit stresses in nickel-base superalloy containing high volume fraction of y'-pahse // Acta metal, mater. – 1992. – Vol.40. – N6. – P.1321-1327.
10. *Socrate S., Parks D.M.* Numerical determination of the elastic driving force for directional coarsening of Ni-superalloys // Acta metal, mater. – 1993. – Vol.41. – N7. – P.2185-2209.
11. *Кривко А.П., Епишин А.П., Светлов И.Л., Самойлов А.И.* Расчет термических напряжений и термостойкость анизотропных материалов. Сообщение 1 // Проблемы прочности. – 1989. – №2. – С.3-9.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ ЛОПАТОК ГТД С КЕРАМИЧЕСКИМИ ПОКРЫТИЯМИ ПРИ ТЕРМОЦИКЛИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЯХ

Лепешкин А.Р., Бычков Н.Г.

ФГУП "ЦИАМ им. П.И. Баранова", г. Москва, Россия

Для обеспечения работоспособности высокоэффективных авиационных газотур-бинных двигателей (ГТД) и установок (ГТУ) новых поколений необходимо совершен-ствование систем охлаждения, создание новых жаропрочных материалов, а также улучшение защиты деталей высокотемпературного тракта ГТД с помощью теплозащитных и жаростойких покрытий [1-3,5-8,10].

Широко используемые в настоящее время жаропрочные материалы на никелевой основе обычно работают в ГТД на предельно допустимых температурах. Повышение температуры газа можно допустить только в случае принятия мер по ограничению тепловых потоков через стенку детали. Существенного снижения тепловых потоков от газа к стенке основного материала детали можно добиться либо хорошо организованным заградительным охлаждением без эжектирования, либо нанесением на поверхность самых нагреваемых участков детали теплозащитных покрытий (ТЗП). В последние годы активизировались работы по внедрению керамических ТЗП на деталях высокотемпературного газового тракта ГТД.

Наиболее эффективная защита материала детали от теплового потока с помощью ТЗП происходит в случае использования керамических покрытий на основе диоксида циркония $ZrO2$ [1,2]. Однако весьма проблематичны вопросы термоциклической долговечности, поскольку сопротивление разрушению этих покрытий при растяжении очень низкое, а при термоциклировании обычно возникают знакопеременные термоциклические нагрузки.

Эффективность теплозащиты покрытий и их сопротивление термической усталости зависит не только от теплофизических свойств, но и от технологии нанесения покрытия.

Среди множества технологий нанесения покрытий лучшую теплозащиту при высоком сопротивлении термической усталости обеспечивает электронно лучевой метод.

Термоциклические испытания лопаток с ТЗП и моделей охлаждаемых деталей проводились при индукционном высокочастотном нагреве (ВЧ) объекта на частоте 440 кГц по разработанной методике на установке [4] с высокочастотным ламповым генератором ВЧГ-10/0,44.

Для проведения сравнительных термоциклических испытаний рабочая поверхность моделей жаровых труб из листового жаропрочного сплава толщиной 1,0 мм с предварительно проделанными перфорационными отверстиями подвергалась пескоструйной обработке электрокорундом и последующему нанесению двух вариантов керамического теплозащитного покрытия (ТЗП) с наличием промежуточного жаростойкого соединительного слоя и без него [5]. Теплозащитный эффект от керамического ТЗП составляет 100÷150°С для условий эксплуатации.

На рис.1 показан фрагмент модели охлаждаемой детали с ТЗП, установленный внутри индуктора, подключенного к электрошинам ВЧГ4-10/0,44. Внутрь образца подается воздух с заданным расходом и давлением. Такая схема обеспечивает возможность воспроизведения на модели эксплуатационных полей температур и термических напряжений и экспериментального определения термоциклической долговечности моделей и лопаток ГТД с различными вариантами теплозащитных покрытий и без них. Расход охлаждающего воздуха контролировался с помощью расходомера и составлял 12 г/с. Управление температурой осуществлялось с помощью хромель-алюмелевой (ХА) термопары диаметром 0,2 мм. Теплофизические измерения температурного состояния поверхности ТЗП на рабочем участке регистрировались тепловизором фирмы “Agema“.

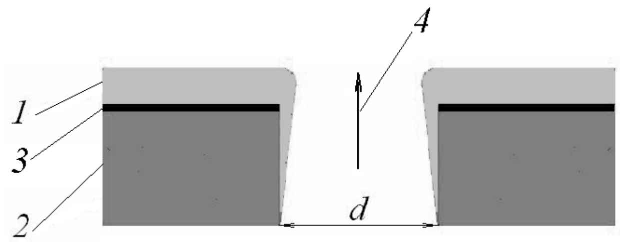


Рис.1. Схема фрагмента охлаждаемой детали с теплозащитным покрытием: *1* – керамическое покрытие, *2* – металл изделия, *3* – жаростойкий металлический слой, 4 – направление потока охлаждающего воздуха в отверстии, *d* – диаметр отверстия.

Термоциклические испытания лопаток и моделей с теплозащитными керамическими покрытиями при использовании ВЧ нагрева позволили снизить длительность испытаний и их затрат и получить экспериментальную оценку долговечности керамических покрытий с учетом их нестационарного теплового и термонапряженного состояний.

Расчетные исследования уточняют тепловое и термонапряженное состояния теплозащитных керамических покрытий на охлаждаемых лопатках и моделях при высокочастотном индукционном нагреве.

Исходными данными в проведенных расчетах являлись электрофизические, теплофизические и прочностные свойства керамических покрытий и материала охлаждаемых деталей, характеристики стендовых режимов нагрева и охлаждения и параметры испытательного термоцикла.

Расчеты с использованием метода конечных элементов в системе ANSYS позволили с учетом распределения теплового потока от индуктора между покрытием из диоксида циркония и металлом охлаждающего изделия при частоте индукционного тока 440 кГц исследовать нестационарное тепловое состояние покрытия и охлаждаемого изделия с учетом параметров испытательного термоцикла.

В математическом моделировании теплового состояния керамических покрытий учитывалась специфика электрофизических свойств диоксида циркония. В частности, с ростом температуры диэлектрическая проницаемость, тангенс угла диэлектрических потерь и электропроводность увеличиваются. В целом керамическое покрытие в испытательном термоцикле нагревалось как за счет теплопередачи от металла детали, так и за счет диэлектрического нагрева.

Из проведенных расчетов нестационарного теплового (рис.2) и термонапряженного состояний моделей охлаждаемых деталей с теплозащитными керамическими покрытиями следует, что в конце нагрева температура наружной поверхности керамического покрытия выше температуры металла и по толщине керамического покрытия возникают перепады температуры. Перепады температуры зависят от коэффициента теплопроводности и толщины покрытия с учетом потерь тепла на поверхности покрытия в окружающую среду. В расчете потерь тепла учитывался конвективный теплообмен и теплообмен излучением с учетом максимальной экспериментальной температуры неохлаждаемых пластин индуктора 300°С в конце нагрева в первой части термоцикла.

При частоте 440 кГц расчетное распределение высокочастотной электромагнитной энергии на образце из сплава на никелевой основе с ТЗП из диоксида циркония, с учетом соотношений разогреваемых масс основного материала из жаропрочного сплава и покрытия, а так же их электро- и теплофизических свойств и условий охлаждения, составляет для металла и покрытия примерно 80% (ВЧ-энергия выделяется в металле образца) и 20% (ВЧ–энергия выделяется в керамическом покрытии из диоксида циркония).

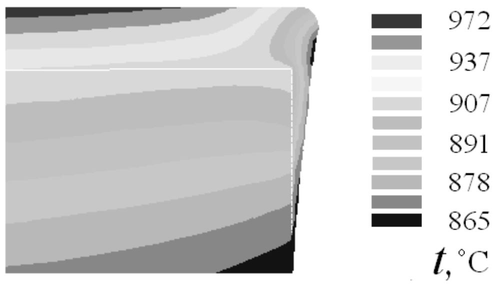


Рис.2. Расчетные распределения теплового состояния фрагмента детали с покрытием в области охлаждающего отверстия в конце нагрева.

По результатам конечно-элементных расчетов в этих условиях при скорости нагрева 100 К/с была получена на наружной поверхности модели детали с ТЗП, контактирующей с окружающей средой, температура примерно на 60÷80°С выше, чем на границе перехода металл–ТЗП, т.е. имитируется температурное состояние изделия в эксплуатации. При этом на поверхности металла наблюдались сжимающие термонапряжения 100 МПа и растягивающие термонапряжения 30÷35 МПа со стороны керамического ТЗП.

Для экспериментальной проверки этого теплового состояния проводилось бесконтактное измерение температуры поверхности модели с теплозащитным покрытием на основе ZrO_2 с помощью тепловизора Agema 782 SW, работающего в спектральном диапазоне 3÷5,6 мкм. Предварительно при нагреве модели в электропечи были получены опытные данные о степени черноты образца с ТЗП и без него использовались для тепловизионных измерений. Значения степени черноты для образца с покрытием при температурах примерно 850÷900°С, близких к пиковым в цикле, равны примерно 0,55; а для детали из жаропрочного сплава без покрытия, их величина составляет примерно 0,8.

При исследованиях температурного состояния детали с покрытием в течение термоцикла оптическая доступность объекта обеспечивалась небольшим отверстием, просверленным в индукторе, через которое сканировался участок поверхности (рис.3) для автоматизации теплофизических измерений.

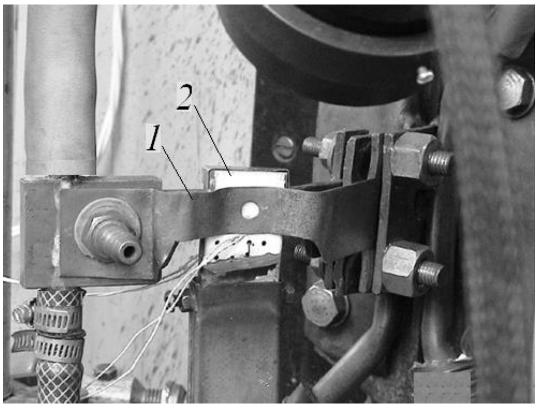


Рис.3. Испытания охлаждаемой детали с керамическим ТЗП: 1 – индуктор, 2 – деталь.

Регистрации термоизображений при циклических испытаниях производилась на компьютере с частотой 3÷5 кадров в секунду. Для оцифровки аналогового сигнала тепловизора использовалась плата АЦП фирмы L-card модель L-783. Записывался полный цикл (от начала разогрева образца до остывания), но в обработке использовались кадры вблизи пикового значения температуры. На рис.4 приведено термоизображение части детали с ТЗП при высокочастотном нагреве в момент максимальной температуры.

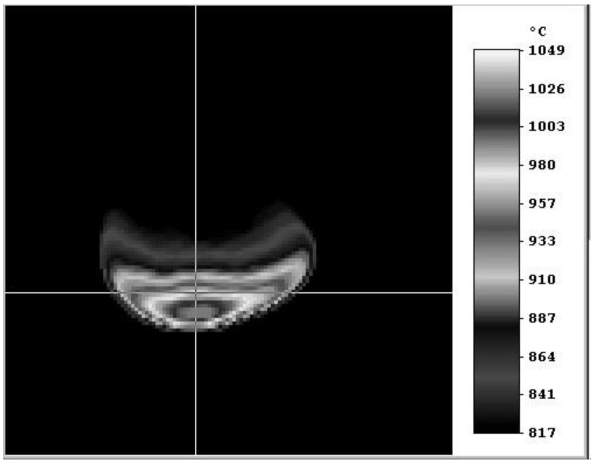


Рис.4. Термограмма участка керамического покрытия детали.

При обеспечении эксплуатационной температуры поверхности металла и воспроизведении эксплуатационного перепада температуры по толщине стенки охлаждаемой детали в указанных стендовых условиях воспроизводятся термонапряжения в соединении металла с керамикой, близкие к эксплуатационным.

В момент реализации пиковой температуры (рис.4) показание контрольной термопары на детали (расположенной в поле зрения тепловизора по нижней кромке термоизображения) примерно на 60÷70°С ниже, чем температура наружного слоя покрытия (вблизи термопары).

Температура ТЗП и подслоя регистрировались тепловизором одновременно. Выполненные экспериментальные исследования и измерения температуры детали с ТЗП с помощью тепловизора при термоциклировании подтвердили расчетную величину перепада температуры по толщине покрытия.

Таким образом, результаты подтвердили возможность моделирования в лабораторных условиях на установке с высокочастотным нагревом термонапряженного состояния деталей горячей части газового тракта ГТД (камер сгорания, лопаток турбины и т.д.), наблюдаемого при омывании их высокотемпературным газовым потоком в условиях эксплуатации.

Варьируя расход воздуха, подаваемого для охлаждения, мощность ВЧГ и толщину стенки, можно изменять температурный перепад на керамическом покрытии в широких пределах.

Результаты испытаний на термоусталость рабочих лопаток турбин ГТД при термоциклировании по режиму $T_{min} \leftrightarrow T_{max}$ 350 $\leftrightarrow$ (900-1000) °С показали, что термоциклическая долговечность лопаток с керамическим ТЗП, нанесенного по электронно-лучевому методу, возросла в среднем в 3,4 раза по сравнению с лопатками из жаропрочного никелевого сплава без покрытия.

ВЫВОДЫ

Разработана расчетно-экспериментальная методика испытаний лопаток турбин ГТД с керамическими теплозащитными покрытиями на термическую усталость с использованием высокочастотного (ВЧ) индукционного нагрева. Внедрена автоматизация теплофизических измерений с использованием тепловизионной системы при ВЧ нагреве лопаток газовых турбин с учетом теплофизических свойств ТЗП в условиях термоциклических испытаний. Приведены результаты исследований нестационарного теплового состояния и термоусталостных испытаний рабочих лопаток турбин ГТД с керамическими теплозащитными покрытиями.

Проведенные исследования подтвердили возможности воспроизведения при высокочастотном индукционном нагреве температурного и термонапряженного состояния рабочих лопаток с ТЗП, соответствующего условиям эксплуатации. Испытания рабочих лопаток ГТД с теплозащитными керамическими покрытиями на термическую усталость с использованием индукционного нагрева позволили быстро и экономично получить экспериментальную оценку их долговечности. Разработанную методику испытаний можно применять для оценки термоциклической долговечности изделий с ТЗП в различных отраслях машиностроения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абраимов Н.В.* Высокотемпературные материалы и покрытия для газовых турбин. – М.: Машиностроение, 1993. – 336 с.
2. *Тамарин Ю.А., Качанов Е.Б., Жерздев С.В.* Теплофизические свойства конденсированного керамического слоя ZrO_2-M_xO_y электроннолучевых теплозащитных покрытий // Авиационная промышленность. – 1999. – №3. – С.33-37.
3. *Бычков Н.Г., Лепешкин А.Р., Першин А.В.* Способ испытаний деталей с теплозащитным покрытием на долговечность / Патент РФ №2259548. – Бюл. №24, 2005.

4. *Бычков Н.Г., Лепешкин А.Р., Першин А.В.* Установка для испытаний лопаток турбомашин на термомеханическую усталость / Патент РФ. – Бюл. №11, 2005.
5. *Бычков Н.Г., Лепешкин А.Р., Першин А.В., Мубояджян С.А., Головкин Ю.И., Рекин А.Д., Лукаш В.П.* Исследование влияния технологических особенностей нанесения ТЗП на термоциклическую долговечность жаропрочных материалов / Всеросс. научно-техн. конф. “Новые материалы и технологии НМТ-2004”. Тезисы докладов.– М.: МАТИ, 2004. – Т.2. – С.120-121.
6. *Хокинг М., Васантасри В., Сидки П.* Металлические и керамические покрытия – М.: Мир, 2000. – 516 с.
7. *Бычков Н.Г., Лепешкин А.Р., Першин А.В., Петров Е.В., Быков Ю.Г.* Экспериментальная оценка эффективности ремонтных технологий охлаждаемых лопаток ГТД с жаростойкими покрытиями при испытаниях на термоусталость с индукционным нагревом // Вестник двигателестроения. – 2006. – №2. – С.143-146.
8. *Зеленый Ю.А., Придорожный Р.П., Борисов В.С.* Оценка эффективности теплозащитного покрытия на лопатке соплового аппарата турбины // Вестник двигателестроения. – 2003. – №2. – С.88-91.
9. *Бычков Н.Г., Лепешкин А.Р., Першин А.В.* Индуктор для нагрева деталей сложной формы / Патент РФ №2122297. – Бюл. №3, 1998.
10. *Бычков Н.Г., Лепешкин А.Р., Першин А.В., Почуев В.П.* Лопатка турбины / Патент РФ № 2259481. – Бюл. №24, 2005.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ЭФФЕКТА РЕБИНДЕРА НА ЭЛЕКТРОНЕЙТРАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ ЕЕ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

Подгаецкий Э.М.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

На основе термодинамической теории равновесной однокомпонентной адсорбции из жидкого раствора на твердой электронейтральной поверхности с учетом ее конечной деформации. В частном случае функции скорости роста поверхностной концентрации адсорбата выводится выражение поверхностного натяжения твердого тела. По знаку его приращения предлагаются термодинамические критерии эффекта Ребиндера как функции поверхностной концентрации адсорбата и параметра теории.

1.ВВЕДЕНИЕ

Эффект снижения поверхностной твердости тела после доставки на нее ПАВ (поверхностно активного вещества), впервые введенный в научный оборот П.Ребиндером в 1928г. [1] и получивший его имя, стал объектом изучения на несколько десятилетий от первых публикаций 20-30-х годов [2,3] и до новейших [4,5]. Исходная трактовка самого эффекта снижения поверхностной твердости как обязательного при появлении адсорбции на поверхности нашла вначале подтверждение в термодинамической оценке приращения поверхностного натяжения $\Delta\sigma$, основанной на аппроксимации Шишковского [6] для поверхностного натяжения:

$$\sigma = \overline{\sigma} - b\ln(1 + k\tilde{c}), \tag{1}$$

где $b > 0, k > 0$ – константы, $\tilde{c}$ – объемная концентрация адсорбата в жидкости, $\overline{\sigma} \equiv \sigma|_{\tilde{c}=0}$.

Согласно (1) при $b > 0, k > 0$ действительно величина $\Delta\sigma \equiv \sigma - \overline{\sigma} = -b\ln(1 + k\tilde{c}) < 0$. В дальнейшем выяснилось, что адсорбция ПАВ на твердой поверхности не обязательно приводит к эффекту: «Последующие исследования, однако, показали, что адсорбция ПАВ может повышать и понижать поверхностную твердость кристаллов в зависимости от природы и количества ПАВ, а также от свойств кристаллического тела» [7]. Поэтому возникает потребность построения новой теории поверхностного натяжения твердого тела, способной более разнообразно описать приращение величины $\Delta\sigma$.

2.ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим тонкий межфазный слой на границе жидкий однокомпонентный раствор/твердое тело с равновесной адсорбцией на его поверхности и с учетом ее деформации. Полагая поверхность тела электронейтральной, выпишем соответствующее выражение полного дифференциала функции Гиббса Ф при $T \equiv const, P \equiv const$ (T – абсолютная температура слоя, P – давление в слое) [8]:

$$d\Phi = -N\,d\mu_a + \tilde{\sigma}_r\,d\Omega\,, \tag{2}$$

где N – число частиц адсорбата в межфазном слое, μ_a – его электрохимический потенциал, $\tilde{\sigma}_r$ – поверхностное натяжение твердой фазы (удельная работа образования граничной поверхности). Величины N, Ω, μ_a связаны с поверхностной концентрацией адсорбата $\tilde{\Gamma}$, деформацией поверхности ϑ и объемной концентрацией адсорбата $\tilde{c}$ соотношениями:

$$\tilde{\Gamma} = \frac{N}{\Omega}, \qquad (3)$$

$$\Omega = \Omega_0(1+\vartheta), \qquad (4)$$

$$\mu_a = \mu_0 + RT\ln\tilde{c}, \qquad (5)$$

где R – универсальная газовая постоянная, $\mu_0 \equiv const$.

Равенство (3) предполагает концентрированное сосредоточение частиц адсорбата вблизи твердой поверхности, т.е. в адсорбционном слое, а равенство (5) является классическим условием равновесия адсорбционного слоя с объемной фазой адсорбата в идеальном растворе.

Выпишем теперь условие существования термодинамического потенциала Ф, заданного формой (2) с учетом (3)-(5) [9]:

$$\frac{\partial\tilde{\sigma}_r}{RT\partial\ln\tilde{c}} = -\frac{\partial N}{\partial\Omega} = -\left[\tilde{\Gamma} + (1+\vartheta)\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial\vartheta}\right]. \qquad (6)$$

Из (6) найдем полный дифференциал функции $\tilde{\sigma}_r$ в переменных $\tilde{c}, \vartheta$, т.е. уравнение Гиббса с учетом деформации поверхности:

$$d\tilde{\sigma}_r = -RT\left[\tilde{\Gamma} + (1+\vartheta)\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial\vartheta}\right]d\ln\tilde{c} + \frac{\partial\tilde{\sigma}_r}{\partial\vartheta}d\vartheta. \qquad (7)$$

Введем теперь безразмерные переменные c, Γ, σ_r:

$$c = \frac{\tilde{c}}{c_*}, \; \Gamma = \frac{\tilde{\Gamma}}{\Gamma_*}, \; \sigma_r = \frac{\tilde{\sigma}_r}{RT\,\Gamma_*}, \qquad (8)$$

где c_*, Γ_* – масштабные параметры.

Уравнение изотермы адсорбции запишем, как и в [8], с помощью функции w:

$$ce^w = 1. \qquad (9)$$

Из (5) с учетом (9) найдем:

$$\mu_a = \mu_0 + RT\ln c_* - RTw. \qquad (10)$$

Т.е. (9) с учетом (10) является формой записи равенства (5).

Чтобы перейти в (7) к переменным Γ, ϑ, выразим полный дифференциал $d\ln c$ из (9) с учетом (8):

$$d\ln c = -dw = -\frac{\partial w}{\partial\Gamma}d\Gamma - \frac{\partial w}{\partial\vartheta}d\vartheta. \qquad (11)$$

Подставляя (11) в (7) с учетом (8) найдем выражение полного дифференциала $d\tilde{\sigma}_r$ в переменных Γ, ϑ:

$$d\sigma_r = D_c\frac{\partial w}{\partial\Gamma}d\Gamma + (D_c\frac{\partial w}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\sigma_r}{\partial\vartheta} + \gamma_\vartheta\frac{\partial\sigma_r}{\partial\Gamma})d\vartheta, \qquad (12)$$

где

$$\gamma_\vartheta \equiv \frac{\partial\Gamma(c,\vartheta)}{\partial\vartheta}, \qquad (13)$$

$$D_c \equiv \Gamma + (1+\vartheta)\gamma_\vartheta,. \qquad (14)$$

Из (12) получим представление производных $\dfrac{\partial w}{\partial \Gamma}$, $\dfrac{\partial w}{\partial \vartheta}$ в переменных Γ, ϑ:

$$\frac{\partial w}{\partial \Gamma} = D_c^{-1}\frac{\partial \sigma_r}{\partial \Gamma}, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \vartheta} = -D_c^{-1}\gamma_\vartheta\frac{\partial \sigma_r}{\partial \Gamma}. \qquad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в (11) придем к выражению полного дифференциала dw в переменных Γ, ϑ:

$$dw = D_c^{-1}\frac{\partial \sigma_r}{\partial \Gamma}d\Gamma - \gamma_\vartheta D_c^{-1}\frac{\partial \sigma_r}{\partial \Gamma}d\vartheta. \qquad (17)$$

Так как функция w согласно равенству (10) линейно связана с электрохимическим потенциалом адсорбционного слоя μ_a, будем считать выполненными условия существования полного дифференциала функции w, представленного формой (17) [9]:

$$\frac{\partial H_c}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial}{\partial \Gamma}(\gamma_\vartheta H_c), \qquad (18)$$

где

$$H_c \equiv D_c^{-1}\frac{\partial \sigma_r}{\partial \Gamma}. \qquad (18a)$$

Представление полного дифференциала dw (17) как и равенство (18) получены без ограничения на величину ϑ сверху, т.е. принимается лишь физически очевидное ограничение снизу $1+\vartheta = \dfrac{S}{S_0} > 0$. Равенство (18) будем называть уравнением совместности по аналогии с подобными уравнениями, выведенными в [10] при малых ϑ (ϑ<<1). Из (17) и (18) найдем представление функции w в виде интеграла [9]:

$$w = w_0 + \int_{\Gamma_0}^{\Gamma}(H_c)_{\vartheta=0}d\Gamma - \int_0^{\vartheta}(\gamma_\vartheta H_c)\,d\vartheta, \qquad (19)$$

где Γ_0 – фиксированное произвольное ($\Gamma_0 \geq 0$) значение переменной Γ, константа w_0 определяется условием:

$$w_0 = -\ln c_0 \equiv -\ln\left(c|_{\vartheta=0}\right)_{\Gamma=\Gamma_0}. \qquad (19a)$$

В качестве опорной исходной информации будем использовать уравнение изотермы на недеформированной поверхности:

$$Bc\Big|_{\vartheta=0} = A(\Gamma). \qquad (20)$$

где константа $B \geq 0$, а функция А(Г) удовлетворяет условиям:

$$A' \equiv \frac{dA}{d\Gamma} > 0,\ \ \Gamma > 0, \qquad (21)$$

$$A(0) = 0,\ \ A'(0) = const > 0. \qquad (22)$$

Условие (21) обеспечивает однофазность адсорбционного на недеформированной поверхности, т.е. единственность решения уравнения (20) относительно Γ при заданном *c*, а условие (22) соответствует изотермам, имеющим участок Генри при малых Г.

3. УРАВНЕНИЯ ИЗОТЕРМЫ АДСОРБЦИИ И ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ ПРИ КОНЕЧНЫХ ϑ

Примем теперь ограничение на функцию γ_ϑ:

$$\gamma_\vartheta = \gamma_\vartheta(\Gamma), \tag{23}$$

и введем неявную функцию $x(\Gamma)$ из уравнения:

$$\Phi(x, \Gamma) = 0$$

$$\Phi \equiv x - \int \frac{d\Gamma}{\gamma_\vartheta}. \tag{24}$$

Тогда из (24) величину Γ определим как обратную к *x* функцию $\hat{\Gamma}$:

$$\Gamma = \hat{\Gamma}(x). \tag{25}$$

Производные взаимнообратных функций $x(\Gamma)$ и $\hat{\Gamma}(x)$ связаны соотношением:

$$\frac{dx}{d\Gamma} = \left(\frac{d\Gamma}{dx}\right)^{-1} = \gamma_\vartheta^{-1}. \tag{26}$$

Чтобы избежать плохообусловленной постановки (попадание значений функции $\hat{\Gamma}(x)$ в область $\hat{\Gamma} < 0$) добавим к (23) условие:

$$\gamma_\vartheta > 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \hat{\Gamma}(x) = 0 \tag{27}$$

или

$$\gamma_\vartheta < 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \hat{\Gamma}(x) = 0. \tag{28}$$

Условия (27), (28) с учетом (26) являются достаточными, чтобы выполнялось неравенство $\hat{\Gamma} > 0$.

Умножая обе части равенства (18) на γ_ϑ с учетом (23) и переходя к переменным x, ϑ, получим уравнение:

$$\frac{\partial(\gamma_\vartheta H_c)}{\partial x} + \frac{\partial(\gamma_\vartheta H_c)}{\partial \vartheta} = 0. \tag{29}$$

Общим решением уравнения (29) является [11]:

$$\gamma_\vartheta H_c = Y(x - \vartheta). \tag{30}$$

Чтобы найти функцию *Y*, представим функции γ_ϑ и H_c степенными рядами по ϑ:

$$\gamma_\vartheta = \gamma_0 + \gamma_1 \vartheta + \gamma_2 \vartheta^2 + \ldots, \tag{31}$$

$$H_c = H_0 + H_1 \vartheta + H_2 \vartheta^2 + \ldots, \tag{32}$$

а для коэффициентов $\gamma_0, \gamma_1, H_0, H_1$ воспользуемся их выражениями, выведенными в [12]. Полагая в них плотность электрического заряда *q* на твердой поверхности равной нулю, будем иметь:

$$\gamma_0 = u_0, \tag{33}$$

$$\gamma_1 = u_1, \tag{34}$$

$$H_0 = -A^{-1}\frac{dA}{d\Gamma}, \tag{35}$$

$$H_1 = \frac{d}{d\Gamma}\left[u_0\left(A^{-1}\frac{dA}{d\Gamma}\right)\right], \tag{36}$$

где u_0, u_1 – неизвестные функции одного аргумента *Г*.

Условие (23) означает, что все:

$$\gamma_i \equiv 0 \text{ при } i \geq 1, \tag{37}$$

и, следовательно:

$$\gamma_1 = u_1 = 0\,. \tag{38}$$

Найдем разложение функции H_c по степеням, получаемое из (30):

$$H_c = \frac{Y[x(\Gamma)]}{\gamma_\vartheta} - \frac{Y'[x(\Gamma)]}{\gamma_\vartheta}\vartheta + \ldots. \tag{39}$$

Приравнивая выражения H_c из (39) и из (32) с учетом (35), (36), найдем:

$$H_0 = \frac{Y[x(\Gamma)]}{\gamma_\vartheta} = -A^{-1}\frac{dA}{d\Gamma}, \tag{40}$$

$$H_1 = -\frac{Y'[x(\Gamma)]}{\gamma_\vartheta} = \frac{d}{d\Gamma}\left[u_0\left(A^{-1}\frac{dA}{d\Gamma}\right)\right]. \tag{41}$$

Из (30) и (32) найдем с учетом (40) и (41) линейную по ϑ часть разложения функции γ_ϑ по степеням ϑ:

$$\gamma_\vartheta = \frac{Y[x-\vartheta]}{H_c} \approx \frac{Y(x) - Y'(x)\vartheta}{H_0 + H_1\vartheta} = \frac{Y(x)[1 - \dfrac{Y'(x)}{Y(x)}\vartheta]}{H_0(1 + \dfrac{H_1}{H_0}\vartheta)} \approx \frac{Y(x)}{H_0}\left[1 - \frac{Y'(x)}{Y(x)}\vartheta\right]\left[1 - \frac{H_1}{H_0}\vartheta\right] \approx$$
$$\frac{Y(x)}{H_0}\left\{1 - \left[\frac{Y'(x)}{Y(x)} + \frac{H_1}{H_0}\right]\vartheta\right\} = \frac{Y(x)}{H_0} - \left[\frac{Y'(x)}{H_0} + \frac{Y(x)}{H^2}H_1\right]\vartheta = -Y(x)\frac{A}{A'} +$$
$$\left\{\frac{Y'(x)A}{A'} + u_0\frac{A}{A'}\left[u_0\frac{A'}{A}\right]'\right\}\vartheta \tag{42}$$

Из (42) и (31) получим выражение для γ_1:

$$\gamma_1 = \frac{Y'(x)A}{A'} + u_0\frac{A}{A'}\left[u_0\frac{A'}{A}\right]'. \tag{43}$$

Подставляя γ_1 из (43) в (38) придем к уравнению:

$$\frac{Y'(x)A}{A'} + u_0\frac{A}{A'}\left[u_0\frac{A'}{A}\right]' = 0\,. \tag{44}$$

Решением уравнения (44) являются два равенства:

$$Y'(x) \equiv 0$$
$$u_0\frac{A'}{A} \equiv const\,. \tag{45}$$

С учетом первого равенства в (45) из (30) имеем:

$$\gamma_\vartheta H_c = Y_0 \equiv const\,, \tag{46}$$

а из (46) и (23) получим, что:

$$H_c = H_c(\Gamma)\,. \tag{46a}$$

Полагая теперь в равенстве (20) $\Gamma = \Gamma_0$ и логарифмируя обе его части, с учетом (19а) найдем w_0:

$$w_0 = \ln B - \ln A(\Gamma_0)\,. \tag{47}$$

Учитывая (47),(46а),(40) и (46) , из (19) имеем:

$$w = \ln B - \ln A(\Gamma) - Y_0\vartheta\,. \tag{48}$$

Подставляя w из (48) в (9) , получим уравнение изотермы адсорбции при конечных ϑ на незаряженной поверхности в частном случае (23), (45):

$$Bc\exp(-Y_0\vartheta) = A(\Gamma)\,. \tag{49}$$

Чтобы найти теперь функцию σ_r, выразим производную $\dfrac{\partial\sigma_r}{\partial\Gamma}$ из (18а) с учетом (35),(46) и независимости H_c от ϑ:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial\Gamma} = [\Gamma + (1+\vartheta)\gamma_\vartheta]H_c = -\Gamma\frac{A'}{A} + (1+\vartheta)Y_0\,. \tag{50}$$

Интегрируя (50) по Г, найдем:

$$\sigma_r(\Gamma,\vartheta) = \sigma_r(0,\vartheta) - \int_0^\Gamma \Gamma\frac{A'}{A}d\Gamma + (1+\vartheta)Y_0\Gamma\,. \tag{51}$$

4.ФОРМУЛИРОВКА УСЛОВИЯ ЭФФЕКТА РЕБИНДЕРА ПРИ КОНЕЧНЫХ ϑ ДЛЯ МОДЕЛИ (23)

Выразим величину $\Delta\sigma_r \equiv \sigma_r(\Gamma,\vartheta) - \sigma_r(0,\vartheta)$, исходя из равенства (51):

$$\Delta\sigma_r = -\int_0^\Gamma \Gamma\frac{A'}{A}d\Gamma + (1+\vartheta)Y_0\,\Gamma\,. \tag{52}$$

Используя выражение $\Delta\sigma_r$ в (52), найдем условие «положительного», когда приращение $\Delta\sigma_r < 0$, и «отрицательного», когда $\Delta\sigma_r > 0$, эффекта Ребиндера соответственно:

$$\Delta\sigma_r = -\int_0^\Gamma \Gamma\frac{A'}{A}d\Gamma + (1+\vartheta)Y_0\,\Gamma < 0\,, \tag{53}$$

и

$$\Delta\sigma_r = -\int_0^\Gamma \Gamma\frac{A'}{A}d\Gamma + (1+\vartheta)Y_0\,\Gamma > 0\,. \tag{54}$$

Можно допустить, что интегральный член в формуле приращения $\Delta\sigma_r$ (52), имеющий в силу (21) постоянный отрицательный знак и связанный напрямую с изотермой адсорбции (20), действительно мог быть причиной «положительного» эффекта Ребиндера в первых экспериментах [1] при малых значениях параметра Y_0. Достаточным условием «положительного» эффекта Ребиндера с учетом (21) будет неравенство:

$$(1+\vartheta)Y_0 < 0\,. \tag{55}$$

Если же $(1+\vartheta)Y_0 > 0$, то знак величины $\Delta\sigma_r$ определяется уже ее полным выражением (52). Определение знака приращения $\Delta\sigma_r$, когда условие (55) не выполнено, требует знания величины Γ, которая может рассчитываться из уравнения изотермы (49), если в дополнение к параметрам изотермы (20) известно значение Y_0. Если же Y_0 не известно, то оно может быть восстановлено, например, методом наименьших квадратов при наличии одного или нескольких экспериментально измеренных значений *Г*.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовалась равновесная однокомпонентная адсорбция из жидкого раствора на электронейтральной твердой поверхности с учетом ее конечной деформации в частном случае функции кинетики роста поверхностной концентрации адсорбата. Выведено уравнение адсорбции и функция поверхностного натяжения твердого тела. В аналитическом виде получено приращение поверхностного натяжения при внесении адсорбата на поверхность тела. Знак этого приращения – отрицательный – соотнесен с «положительным», а положительный знак приращения с «отрицателным» эффектом Ребиндера и знак может теперь через параметр теории зависеть и от материала адсорбента и от адсорбата и от величины его поверхностной концентрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ребиндер П.А.* Доклады на VI съезде физиков. – М.:ОГИЗ, 1928. – С.29.
2. *Rebinder P.* // Ztschr. f. Physik. – 1931. – B.72. – S.191.
3. *Ребиндер П.А., Венстрем Е.К.* // Изв. ОМЕН АН СССР. Физ. серия. – 1937. B.4/5. – С.531.
4. *Малкин А.И.* // Коллоидный журнал. – 2012. – Т.74. – №2. – С.239ю
5. *Щукин Е.Д., Савенко В.И., Малкин А.И.* // Физикохимия поверхности и защита материалов. – 2013. – Т.49. – №1. – С.44ю
6. *Фролов Ю.Г.* Курс коллоидной химии. – М.: Химия,1982. – С.157.
7. *Грей Д.Р., Дарли Г.С.* Состав и свойства буровых агентов. – М.: Недра, 1985. – С.286.
8. *Подгаецкий Э.М.* // Электрохимия. – 2005. – Т.41. – №1. – С.20.
9. *Фихтенгольц Г.И.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.-Л.: Гос. изд-во Физ.-мат. лит-ры, 1960. – Т.3. – С.66.
10. *Подгаецкий Э.М.* // Электрохимия. – 2001. – Т.37. – №10. – С.1242.
11. *Камке Э.* / Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. – М.: ИЛ, 1966. – 258 с.
12. *Подгаецкий Э.М.* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2010. – №7. – С.97.
13. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ПЛАЗМОТРОНА ДЛЯ ПОДОГРЕВА СТАЛИ В ПРОМЕЖУТОЧНОМ КОВШЕ ПРИ НЕПРЕРЫВНОЙ РАЗЛИВКЕ

Филиппов Г.А.[1], Пак Ю.А.[1], Тюфтяев А.С.[2], Юсупов Д.И.[2]

[1]*ФГУП «ЦНИИчермет им. И.П. Бардина», г. Москва, Россия*
[2]*ФГБУН Объединенный институт высоких температур РАН, г. Москва, Россия*

РЕЗЮМЕ

Представлены разработка и результаты опробования впервые созданной в России технологии плазменного подогрева стали в промежуточном ковше УНРС. Освещены особенности конструкции генератора плазмы. Показано, что технология позволяет стабилизировать температуру перегрева стали над температурой ликвидуса при разливке и поддерживать её на минимальном уровне. При этом повышается однородность макроструктуры, механические свойства и стабильность качества непрерывнолитой заготовки на протяжении всей плавки.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в мире более 90% стали разливают на установках непрерывной разливки стали (УНРС). Непрерывная разливка стали является наиболее эффективной ресурсо- и энергосберегающей технологией завершающего этапа сталеплавильного производства. Одной из основных задач совершенствования этой технологии является повышение качества непрерывнолитых заготовок (НЛЗ). Промежуточный ковш (ПК), являющийся последней емкостью на пути стали к кристаллизатору, предназначен для приема металла из сталеразливочного ковша и распределения его по кристаллизаторам, а также для обеспечения возможности разливать непрерывно «плавка на плавку». Однако при этом происходит дополнительное охлаждение стали, что предопределяет необходимость дополнительного перегрева стали над температурой ликвидуса в сталеразливочном ковше [1]. Повышенный перегрев металла над температурой ликвидуса способствует увеличению трещиночувствительности заготовок, развитию столбчатой структуры слитка и таких дефектов макроструктуры, как осевая ликвация и центральная пористость. Кроме того, чрезмерно высокая температура разливаемого металла может привести к прорывам НЛЗ по трещинам. При повышенном перегреве металла в промковше требуется снижение скоростей вытягивания НЛЗ [2], что влияет на производительность установки.

Применение технологии плазменного подогрева металла в ПК позволяет снизить температуру металла в сталеразливочном ковше [3], стабилизировать ее изменение в процессе разливки, что положительно сказывается на однородности и качестве макроструктуры НЛЗ [2].

В связи с этим, на многих зарубежных металлургических заводах технология плазменного подогрева металла в промежуточном ковше нашла широкое применение. Работы по использованию плазменного нагрева стали в ПК ведут *Tetronics и Corus* (Великобритания), *Dunamet Anval* (Швеция), *Kavasaki* (Япония), *Nippon Steel* и *Nkk* (Япония), *Posco* (Ю. Корея), *Solac* (Франция) и др. [4].

При вместимости ПК от 10 до 80 тонн суммарная мощность используемых плазмотронов составляет 1-4 МВт.

Применение плазменного нагрева с компьютерным управлением позволяет стабилизировать температуру с точностью до ±1°С. Металлургическими преимуществами процесса являются:

– поддержание постоянной температуры металла в процессе разливки с превышением ее над температурой ликвидуса не менее 5-7 С;
– уменьшение осевой, химической неоднородности в НЛЗ на 25-50%;
– исключение «холодных» плавок и потерь металла в производстве;
– возможность использования слябовых заготовок УНРС при снижении уровня осевой ликвации для производства трубных сталей и судового металла (с регламентированными свойствами в Z – направлении листа) для ответственного назначения, в том числе плит толщиной до 100 мм;
– возможность применения заготовок диаметром 100-170 мм для получения подшипниковой стали, металлокорда и т.п.);
– срок окупаемости затрат, связанных с разработкой, монтажом и эксплуатацией оборудования составляет около 1 года.

Однако в России до настоящего времени эта технология не использовалась [3].

ФГУП «ЦНИИчермет им. И.П.Бардина» совместно с ОИВТ РАН, ООО «АГНИ-К» и ОАО «Магнитогорский металлургический комбинат» (ММК) создана установка плазменного подогрева стали (УППС) и проведено ее опытно-промышленное опробование в ККЦ-2 ОАО«ММК». В соответствии с согласованным с ОАО «ММК» проектом для разливки экспериментальных плавок были изготовлены промежуточные ковши [5,6,7].

1. ВЫБОР СХЕМЫ ПОДОГРЕВА

Одной из технологических проблем при создании установки было подведение потенциала к расплаву 5 в промежуточном ковше (рис.1).

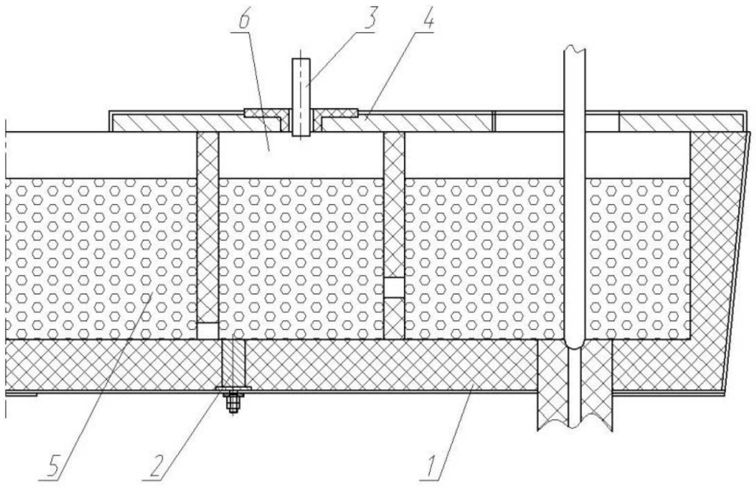


Рис.1. Промежуточной ковш с камерой для подогрева и подовым анодом (половина).

Наиболее распространённый способ решения этой задачи – оснащение промковша 1 с камерой для подогрева 6 и крышкой 4 с отверстием для плазмотрона 3 подовым анодом 2, для которого необходимо дополнительное отверстие в днище промковша, что сопряжено с опасностью аварийной утечки расплава из ПК, а также требует организации принудительного охлаждения подового анода. Кроме того, подключение быстросъёмных токовых разъёмов на несколько килоампер к подовым анодам в днище ПК и отключение, особенно, в аварийных ситуациях на УНРС, например, при переливе стали, технологически затруднительно.

В разработанной технологии применена схема без подовых электродов. На рис.2 представлена схема УППС во время подогрева металла. Здесь один из плазмотронов (в левой камере подогрева) является катодом, второй (в правой) – анодом. Установка работает на постоянном токе, который протекает через всю толщу жидкой стали в ПК и дуговые столбы двух плазмотронов. В разливочные камеры 15 погружены термопары 13 системы непрерывного измерения температуры Contilance. Камеры подогрева 5 отделены от приёмного 4 и разливочных отсеков 15 перегородками 16 и 17, а также снабжены отбойниками 10 и крышками 7. Плазмотроны 6 вводятся в промковш 1 через отверстия 14 в крышках 7.

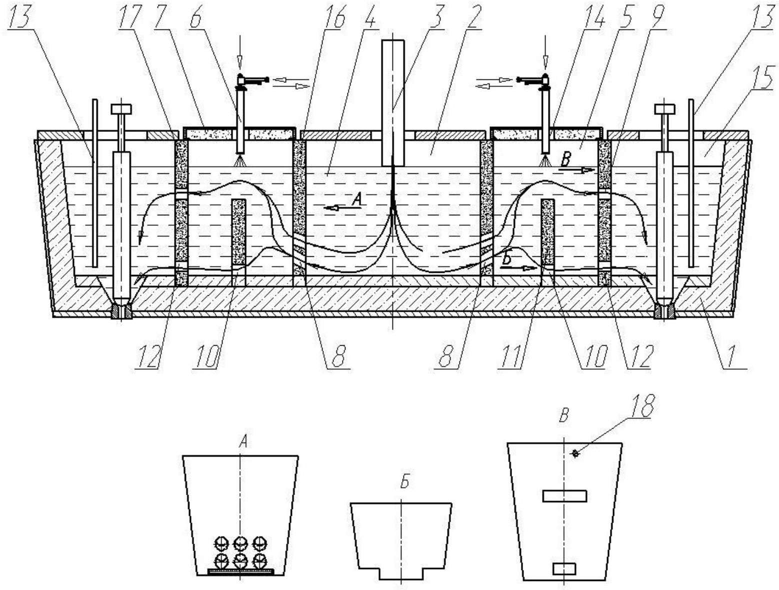


Рис.2. Плазменный подогрев стали в промковше по схеме «плазмотрон-плазмотрон».

2. ОСОБЕННОСТИ КОНСТРУКЦИИ ПЛАЗМОТРОНА ДЛЯ ПОДОГРЕВА СТАЛИ

При разработке данной плазменной технологии и соответствующих генераторов плазмы (плазмотронов) учитывались особенностей металлургических процессов. Рассматриваемый нагрев в большей степени обеспечивается за счет излучения плазмы, а при увеличении длины электрической дуги при постоянной силе тока растет тепловой КПД процесса. Длина дуги составляет 150-300 мм. Эффективность нагрева стали определяется и другими факторами: направлением и скоростью потоков металла в ПК, количеством шлака на поверхности жидкого металла, конфигурацией ПК и его свода и т.д. В отличие, например, от распространенных плазменных технологий резки, наплавки, сварки и упрочнения, когда уровень мощности электрической дуги, как правило, меньше 100 кВт, уровень мощности в данном случае на порядок выше. Кроме того, в этом случае плазменный нагрев становится операцией непрерывного металлургического процесса, поэтому требуется высокая степень надежности работы установки с возможностью быстрого регулирования мощности в широком диапазоне, что предъявляет особые требования к электродным узлам плазмотронов.

В качестве такого плазмотрона используется генератор низкотемпературной плазмы с расширяющимся каналом выходного электрода [8]. Расчет течения газа при постоянном числе Маха и экспериментальные исследования показали, что оптимальным является степень расширения канала выходного электрода, когда угол между образующей канала и его осью составляет примерно 6° [9].

Определение геометрических параметров плазмотрона (рис.3) проводили на экспериментальной установке (рис.4).Требуемую мощность разряда желательно обеспечивать за счет повышения напряжения на дуге, т.к. при этом уменьшается сила тока и, соответственно, эрозия электродов. Известно, что напряжение на дуге повышается с уменьшением диаметра канала сопла и увеличением длины сопла. Однако при этом повышается вероятность образования двойной дуги, что является аварийным режимом работы плазмотрона.

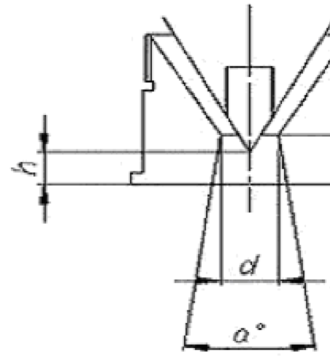


Рис.3. Схема генератора плазмы: d – диаметр критического сечения сопла; L – длина сопла; α – угол раскрытия канала сопла; h – положение катода.

Рис.4. Экспериментальная установка.

Плазмотрон, используемый для подогрева стали, должен обладать достаточным ресурсом и высоким тепловым КПД. Зачастую параметры режима работы плазмотрона (сила тока, мощность дуги, расход плазмообразующего газа) в традиционных плазменных технологиях поддерживаются на некотором постоянном уровне. При нагреве стали в ПК ситуация совершенно иная – в процессе разливки необходимо постоянно контролировать температуру жидкой стали и оперативно регулировать мощность электрической дуги. Пример такого регулирования приведен на рис.5 (по данным Компании INDUGA).

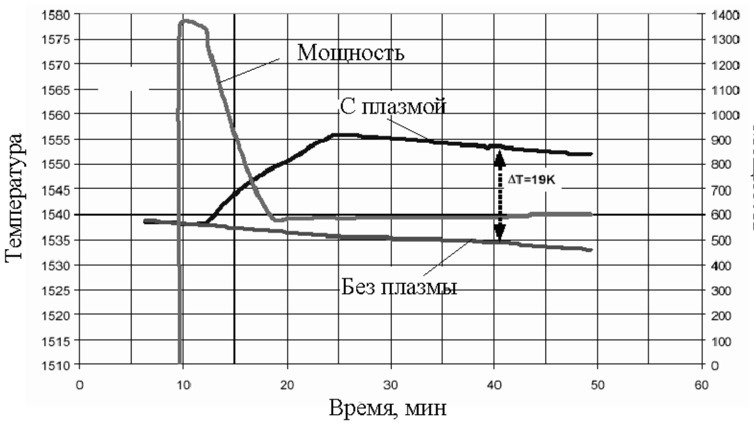


Рис.5. Температура на выходе из промежуточного ковша при плазменном нагреве и в его отсутствии и мощность нагрева.

Мировой опыт создания и использования генераторов плазмы самых разнообразных конструкций, работающих при мощностях от нескольких кВт до десятков МВт, наиболее устойчиво работают и имеют наибольший срок службы плазмотроны, использующие аргон в качестве плазмообразующего газа.

Одной из важнейших характеристик разряда в генераторе низкотемпературной плазмы является вольтамперная характеристика (ВАХ) разряда. Особенности конструкции генератора плазмы определяют и тип ВАХ [10]. Так в плазмотроне с цилиндрическим каналом постоянного сечения, продольным потоком газа и самоустанавливающейся длиной дуги электрический разряд неустойчив. При этом напряжение дуги вследствие «шунтирования» может изменяться почти в два раза [11]. ВАХ имеет падающий характер, то есть при увеличении силы тока напряжение дуги уменьшается. В этом случае мощность дуги возрастает в большей степени за счет увеличения силы тока. Ресурс же работы плазмотрона, как правило, определяется силой тока, да и требования к источнику электрического питания плазмотрона более жесткие. В то время как разработанный плазмотрон с расширяющимся каналом имеет возрастающую ВАХ.

Расчёт конструкций узлов плазмотронов проводился с учетом технологических параметров режима, обеспечивающего нагрев стали при производительности УНРС 5 т/мин: сила тока – до 4000 А, напряжение – 350 В, расход аргона – до 40 м^3/ч, расстояние от торца плазмотрона до поверхности расплава – 150 мм.

На рис.5 представлен плазмотрон-катод в разрезе. Охлаждение – принудительное, водяное, двухконтурное. Первый контур проходит в полости катода 6 с вольфрамовой вставкой 7 по нержавеющей трубке 3, которая дистанционируется от стенок катододержателя 12 лапками 2.

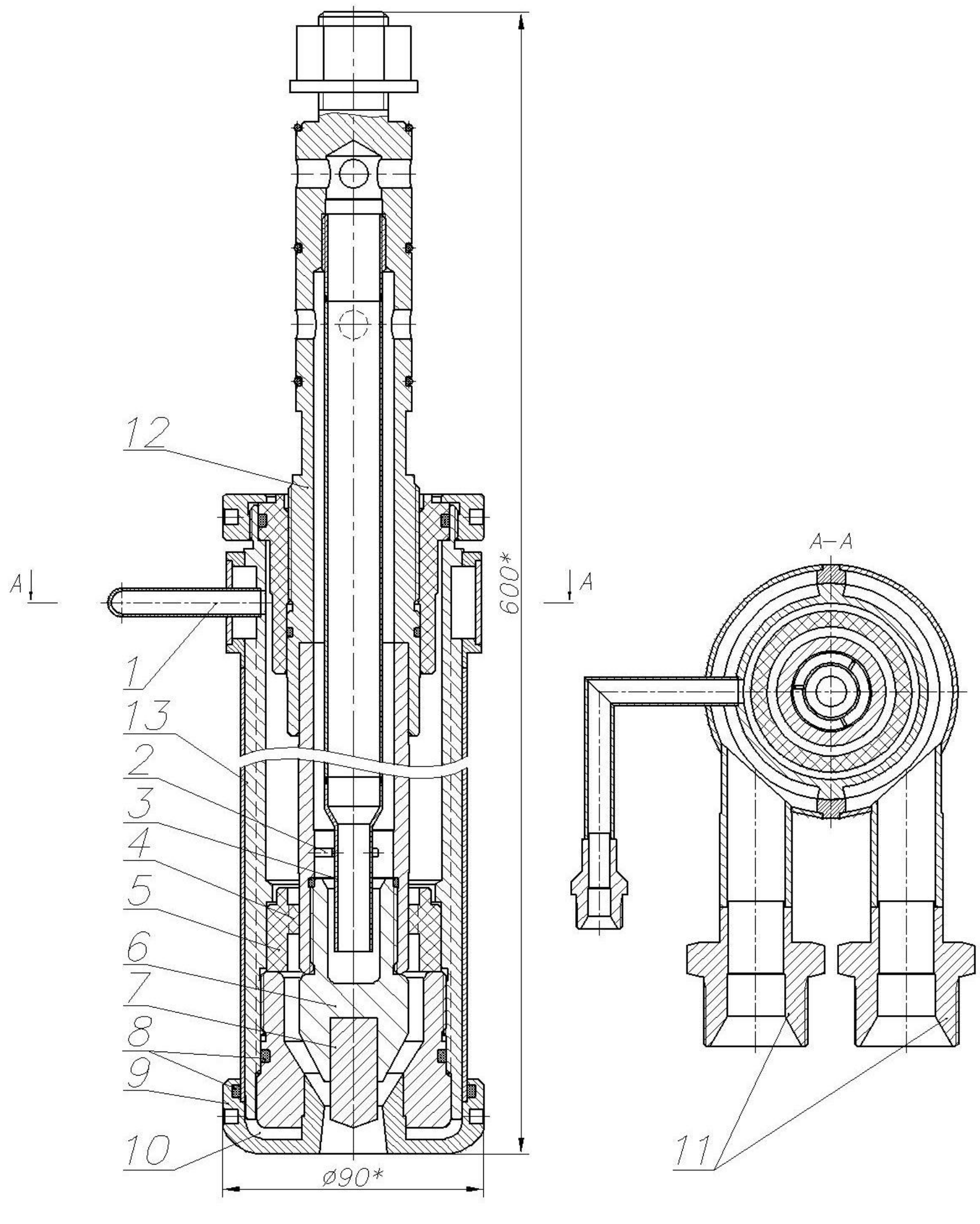


Рис.5. Плазмотрон-катод для подогрева стали в ПК.

Второй контур, проходящий по трубкам 11, снимает избыток тепла с корпуса 13 и сопла 9. Сопло имеет расширяющийся выходной канал и внутреннюю полость охлаждения 10 специальной формы. Плазмообразующий газ подаётся через трубку 1 и проходит через изолятор 5, в котором выполнены продольные газовые каналы 4. Уплотняющие кольца 8 изготовлены из теплостойкой резины. Вспомогательная дуга в плазмотроне инициируется посредством осциллятора между вольфрамовой вставкой 7 и соплом 9. Рабочая дуга горит непосредственно между вольфрамовой вставкой 7 и подогреваемой поверхностью металла в ПК.

На рис.6 представлен разрез плазмотрона-анода. Отличительной особенностью конструкции плазмотрона-анода является оригинальная форма медного анода 2 и специальная форма газовых каналов 4 в изоляторе 3. Отсутствие в аноде вольфрамовой вставки обусловлено низким ресурсом вольфрама при работе на обратной полярности. Тангенциальное расположение газовых каналов в изоляторе обеспечивает интенсивную закрутку плазмообразующего газа, что позволяет вращать анодное пятно по внутренней поверхности анода и тем самым уменьшить удельные тепловые потоки. Такая организация горения дуги в разрядном промежутке позволяет повысить силу тока до 4000 А при сохранении требуемого ресурса работы плазмотрона.

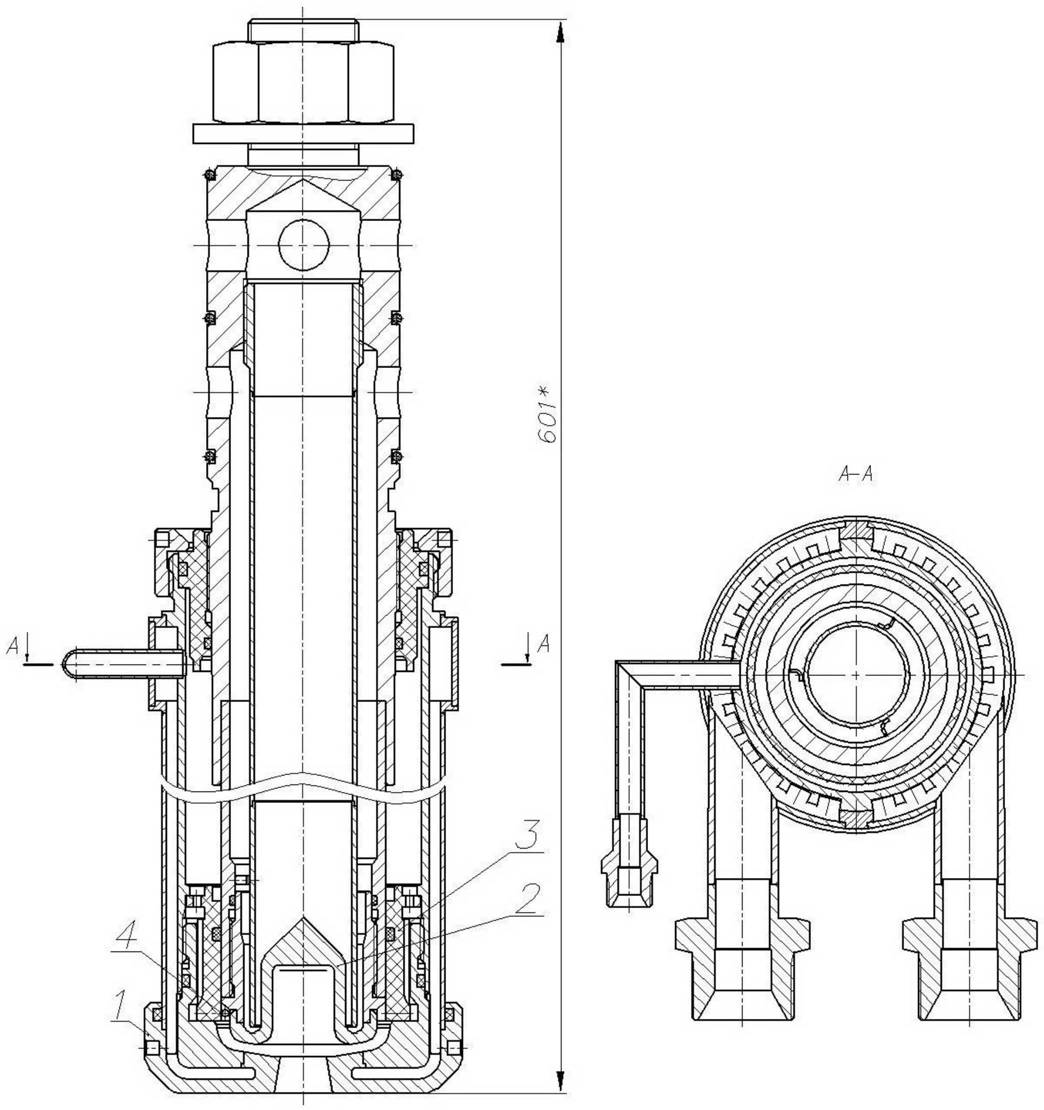


Рис.6. Плазмотрон-анод для подогрева стали в ПК.

3. ОПЫТНО-ПРОМЫШЛЕННОЕ ОПРОБОВАНИЕ УСТАНОВКИ

В кислородно-конвертерном цехе на МНЛЗ-4 ОАО «ММК» в ноябре 2011 г. были успешно проведены опытно-промышленные испытания оборудования УППС. Они позволили определить работоспособность оборудования и оснастки УППС и возможность подогрева стали в ПК [12]. По результатам испытаний установки разработан алгоритм компьютерного управления подогревом металла и поддержания необходимой температуры перегрева стали в ПК в процессе разливки.

На рис.7 представлен вид на стальковш и ПК во время разливки с работающей установкой плазменного подогрева.

Рис.7. Общий вид МНЛЗ с работающей УППС.

На рис.8 консоль с плазмотроном находится в рабочем положении. Плазмотрон расположен под крышкой камеры нагрева ПК (вид сбоку).

Рис.8. Консоль с плазмотроном в рабочем положении.

Во время подогрева стали ход процесса можно корректировать через управляющий компьютер, который задает параметры всех систем обеспечения работы УППС (рис.9). На экране компьютера отражаются в реальном времени графики изменения температуры металла в ПК и мощности нагрева, а также все оперативные параметры работы плазмотрона (рис.9).

Замер температуры стали в ПК производится непрерывно. В системе Contilance для непрерывного измерения температуры стали фирмы Heraeus Electro-Nite используется ручной погружной охлаждаемый жезл (рис.10). Жезл Contilance включает контактный блок Contilance, несущую трубу и адаптированную рукоятку жезла Celox со штуцером для подачи воздуха. На рис.10 показан жезл Contilance с надетой на него термопарой Contilance. Полная длина жезла с термопарой – 2.1 м. Длина от конца рукоятки до начала изогнутой части – 1.3 м. Охлаждение контактного блока Contilance сжатым воздухом устраняет его перегрев в процессе работы и позволяет изготовить кабель горячей зоны из медных проводов.

Рис.9. Оперативная информация на экране компьютера.

Рис.10. Погружной жезл системы Contilance.

Жезл устанавливается на крышку ПК, термопара погружается в зону стопорных стаканов. Сигнал от термопары считывается прибором Digiterm и далее поступает на контроллер Р06 Теконик.

Результат работы УППС можно оценить по плавкам №122940, 122946. На плавке №122940 разливалась сталь марки 08Ю. На МНЛЗ-4 подано 375 т металла в стальковше, отданного с внепечной обработки при температуре 1585°С. Получено 17 непрерывнолитых заготовок при средней скорости вытяжки НЛЗ 0,715 м/мин.

Работа плазмотрона для нагрева металла в промковше длительностью 7 мин при мощности дуги 310-325 кВт привела к повышению температуры от 1553,14 до 1555,54°С (рис.11). Через 6 мин после отключения плазмотронов началось снижение температуры металла, что обусловлено постоянной времени термопары, скоростью разливки, возможным подогревом стали от футеровки и т.п.

На плавке №122946 разливалась сталь марки 08пс. На МНЛЗ-4 подано 340 тонн металла в стальковше, отданного с внепечной обработки при температуре 1588°С. Получено 12 непрерывнолитых заготовок при средней скорости вытяжки НЛЗ 0,72 м/мин.

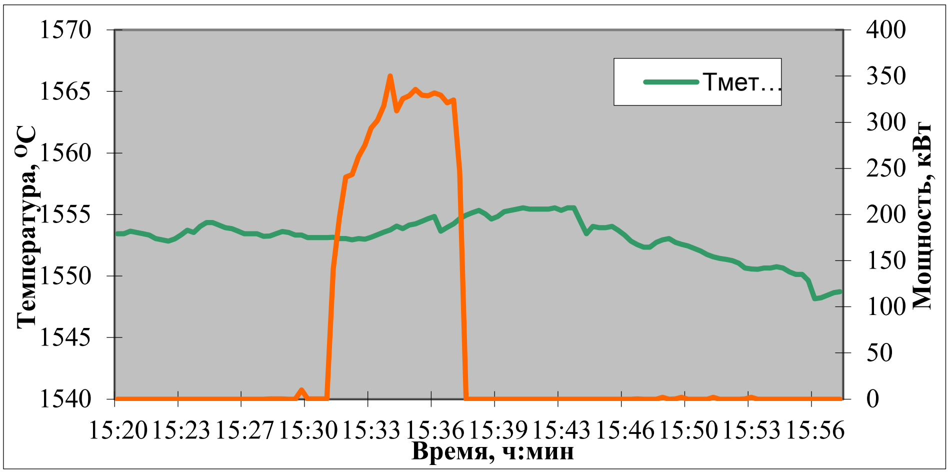


Рис.11. Показатели нагрева металла УППС на плавке №122940.

Следует отметить, что включение плазмотрона на данной плавке произошло через 5 минут после начала плавки. Фактическая температура металла по паспорту плавки в 18 ч 10 мин была 1555°С, что не отразилось системой непрерывного замера температуры, так как из-за смены стальковша термопара была только установлена. Нагрев металла продолжался 15 мин, за это время температура повысилась до 1560°С. Далее эффект нагрева после отключения продолжился еще в течение 4 мин, при этом температура увеличилась еще на 5°С. Анализ изменения температуры металла в ПК (рис.12) показал, что средняя скорость нагрева металла в промковше составила 0,526°С/мин, причем в период работы плазмотрона 0,33°С/мин и далее 1,25°С/мин. В дальнейшем в процессе разливки температура снижалась до 1554°С со средней скоростью 0,68°С/мин.

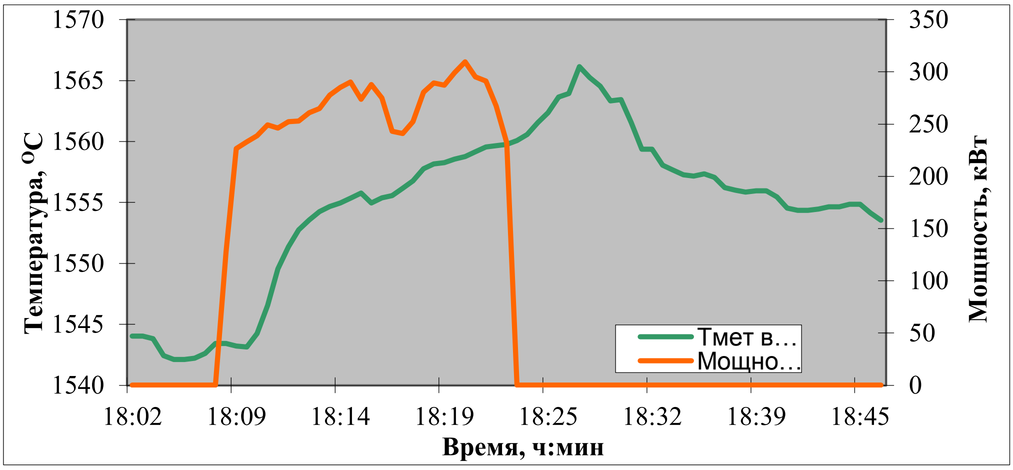


Рис.12. Показатели нагрева металла УППС на плавке №122946.

В Таблице 1 обобщены результаты экспериментальных плавок с плазменным подогревом.

Проведение экспериментальных плавок с плазменным подогревом металла в промковше не привело к аварийным ситуациям и не оказало негативного влияния на основной производственный процесс. Опытное оборудование работало исправно, полученные данные достаточны для разработки промышленных образцов УППС и технологии для металлургических предприятий РФ.

Таблица 1.

Результаты экспериментальных плавок с плазменным подогревом.

Номер плавки	$T_{мет}$ в стальковше после ВПО	Полезная мощность дуги, кВт	Время нагрева, мин	Повышение $\Delta T_{мет}$ от нагрева, ^oC
122940	1585	310-325	7	2,4
122946	1588	250-300	15	10

ВЫВОДЫ

1. Проведено опытно-промышленное опробование УППС. При длительности плазменного подогрева металла 15 мин температура металла в промежуточном ковше увеличилась с 1555 до 1565^{o}C при работе плазмотрона с мощностью дуги в среднем 275 кВт, тогда как разработанное оборудование УППС позволяет производить нагрев металла с максимальной мощностью 1500 кВт, что даже избыточно для компенсации тепловых потерь в ПК.

2. Использование плазменного подогрева для регулирования температуры стали в ПК позволит поддерживать температуру стали, попадающей в кристаллизатор, на постоянном уровне на протяжении разливки всей плавки, что в свою очередь повысит качество всего металла НЛЗ и стабильность свойств как в поперечном сечению, так и по длине сляба.

3. При использовании УППС для нагрева металла в ПК можно выделить два периода: период запаздывания от включения плазмотрона до начала повышения температуры металла и период увеличения температуры разливаемого металла. Проведенных экспериментов недостаточно, чтобы достоверно оценить продолжительность этих периодов и степень нагрева металла как функции переменных: производительность УНРС, мощность и продолжительность работы плазмотрона.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Афонин С.З.* Сталеплавильное производство России и конкурентоспособность металлопродукции / Седьмой конгресс сталеплавильщиков. Сборник трудов. – Магнитогорск, 15-17 октября 2002 г. – С.5-8.
2. *Плаксин Д.А.* Совершенствование технологии производства слябов с повышенными требованиями к макроструктуре // Седьмой конгресс сталеплавильщиков. Сборник трудов. – Магнитогорск, 15-17 октября 2002 г. – С.549-551.
3. *Исакаев Э. Х., Синельников В.А., Филиппов Г.А.* Некоторые перспективные технологии энергосбережения в металлургии и повышения качества металлопродукции / В кн.: 1-я конференция по инновационной деятельности НТЦ ЭПУ ОИВТ РАН, 11-12 апреля 2005 г. – С.135-140.
4. *Смирнов А.Н.* Современный прогресс и перспективы развития процессов непрерывной разливки сталей (по материалам 5-й Европейской конференции) // Сталь. – 2005. – №12. – С.29-32.
5. Плазменный подогрев стали в промежуточном ковше // Новости черной металлургии за рубежом. – 2002. – №3. – С.53-59.
6. *Исакаев Э.Х., Синельников В.А., Амиров Р.Х., Филиппов Г.А.* Инновационный проект по созданию пилотной установки для подогрева стали

в промежуточном ковше мнлз с использованием низкотемпературной плазмы / В кн.: 1-я конференция по инновационной деятельности НТЦ ЭПУ ОИВТ РАН, 11-12 апреля 2005 г. – С.176-185.

7. *Исакаев Э.Х., Синельников В.А., Амиров Р.Х., Филиппов Г.А.* Создание пилотной установки для подогрева стали в промежуточном ковше МНЛЗ с использованием низкотемпературной плазмы // Бюллетень «Черная металлургия». – 2005. – №8. – С.32-37.
8. *Исакаев Э.Х., Григорьянц Р.Р., Спектор Н.О. и др.* Влияние угла раскрытия канала выходного электрода на характеристики плазмотрона // ТВТ. – 1994. – Т.32. – №4. – С.627-628.
9. *Исакаев Э.Х., Синкевич О.А.,Тюфтяев А.С., Чиннов В.Ф.* Исследование генератора низкотемпературной плазмы с расширяющимся каналом выходного электрода и некоторые его применения // ТВТ. – 2010. – Т.48. – №1. – С.105-134.
10. *Жуков М.Ф., КоротеевА.С.,Урюков Б.А.,* Прикладная динамика термической плазмы. – Новосибирск: Наука, 1975. – 298 с.
11. *Жуков М.Ф., Аньшаков А.С., Засыпкин И.М. и др.* Электродуговые генераторы с межэлектронными вставками. – Новосибиск, 1981. – 201 с.
12. *Юсупов Д.И.* Создание и опытно-промышленное опробование установки плазменного подогрева стали (УППС) в промежуточном ковше МНЛЗ / IV-я Конференция молодых специалистов «Перспективы развития металлургических технологий». Сборник тезисов докладов. – 5-6 декабря 2012 г., Москва.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ «ПОДЛОЖКА - ПОКРЫТИЕ»

Якупов С.Н., Якупов Н.М.

ФГБУН Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, г. Казань, Россия

РЕЗЮМЕ

Получают распространение очень тонкие структуры, включая нанопленки, и их композиции, обладающие уникальными механическими свойствами. Поверхностные покрытия, включая нанопокрытия, обладая определенными заданными свойствами, позволяют решать множество различных проблем надежности, долговечности и безопасности конструкций и сооружений. Они обеспечивают защиту и изоляцию поверхности изделий, работающих в различных средах и под воздействием различных физических полей. Благодаря покрытиям удается достигать необходимые характеристики трения для соприкасающихся деталей и т.д. Создание покрытий с заданными свойствами – это одно из перспективных направлений.

В первой части работы на базе двумерного подхода выполнены работы по экспериментально-теоретическому исследованию механических свойств пленочных материалов с нанопокрытием. Раздельно экспериментально исследуются свойства подложки и пакета «подложка-покрытие». При обработке данных используются соотношения нелинейной теории оболочек. Разработанный подход наглядный и простой. Нет необходимости работать непосредственно с тонким нанопокрытием, не требуется дорогостоящее оборудование. Установлено, что способ напыления не позволяет получать характеристики технического титана, получаемого методом плавки.

Рассмотрены также три группы образцов из полиэтилентерефталата с нанопокрытием из оксида титана T_iO_2. Прогибы образцов при наличии покрытия снижаются, при этом жесткость на растяжение композиции «подложка - покрытие» возрастает более чем в 1,7 раза по сравнению с жесткостью образца без покрытия, а жесткость композиций при возрастании толщины покрытия в 3 раза возрастает в 1,5 раза. Разработка награждена Серебряной медалью на XIX Международной выставке-конгрессе «Hi-Tech - 2013», г. Санкт - Петербург.

Вторая часть работы посвящена исследованию адгезии пленки к плоской и сферической подложке. Определение адгезии к подложке на базе существующих измерителей адгезии не всегда эффективны, трудно обеспечить идентичность замеров в процессе изучения влияния среды, деформации поверхности и физических полей. Разработан двумерный экспериментально - теоретический подход определения адгезии пленки к плоской и сферической подложке, устройство для испытания и выполнен цикл исследований. Подход позволяет повысить точность определения адгезии и снизить разброс получаемых результатов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди тонкостенных элементов конструкций, сочетающих легкость с высокой прочностью, особо выделяются пленочные и мембранные элементы, а также различные покрытия. Пленки, мембраны и покрытия находят широкое применение во всех отраслях производства и жизнедеятельности [1,2]. Получают распространение очень тонкие структуры, включая нанопленки, и их композиции, обладающие уникальными механическими свойствами [3,4]. Пленки, мембраны и покрытия, обладая, в частности, высокими механическими характеристиками, позволяют решать множество различных проблем. Если XX век по классификации этапов развития элементов конструкций был веком тонкостенных структур [5,6], то XXI век станет веком пленок и мембран.

Плоские пленки и мембраны не охватывают весь спектр возможных форм тонких структур. Из функционального назначения иногда их целесообразно изготавливать неплоской формы – это так называемые материал-конструкции или оболочечные пленки и мембраны [1,2]. Они, наряду с неплоской исходной геометрией, могут иметь различную сложную структуру, заданную конструктором, например, распределенные отверстия, поры и т.д. Сложная структура может возникнуть и в процессе изготовления и эксплуатации пленок и мембран – механические дефекты типа трещин, царапин, отверстия, дефекты от воздействия облучения, излучения и др.

При исследовании механических характеристик пленок и мембран традиционным стандартным способом одноосного испытания на растяжение образцов [7], вырезанных из полотна в виде полосок, получается значительный разброс результатов испытаний [8]. Невозможно исследовать одноосным способом пленочные и мембранные композиции, которые имеют пространственно-неоднородную структуру и (или) неплоскую форму. Трудно, а порой и невозможно, даже описать структуру материала, форму дефектов, включений, отверстий и пор, не говоря уже о моделировании реальных механических характеристик таких композиций. Для исследования сложных структур, в том числе образцов с дефектами, включениями, порами или отверстиями, также малоэффективны инденторные методы, предложенные, в частности, в [9], или модификация метода [10].

Получают распространение вычислительное моделирование тонких структур, например, моделирование слоистых наноматериалов и систем с покрытиями рассмотрено в [11]. При этом возникают трудности при описании сложных структур и сложных форм дефектов, при моделировании взаимодействия составных элементов композиций и поведение пленок и покрытий, имеющих разномасштабные дефекты, например, на нано и микроуровнях и др.

Благодаря появлению мощных компьютеров разрабатываются квантово-молекулярные подходы. Например, исследования механических характеристик определенных кластеров (тонких структур) на базе квантово-механического подхода рассмотрены в [12] и др.

Таким образом, для определения механических характеристик плоских и неплоских пленок и мембран со сложной структурой: стандартный одноосный способ на растяжение не эффективен и не всегда применим; отмеченные подходы и способы не всегда эффективны; необходим двумерный экспериментально-теоретический подход. При этом необходимо сложную композицию представлять как «материал-конструкцию» и определять приведенные механические характеристики исследуемых тонких структур.

В работах [13-19] описан двумерный экспериментально-теоретический подход исследования приведенных механических характеристик плоских и сферических тонких сложных структур. Схема установки и некоторые виды исследуемых образцов приведены на рис.1.

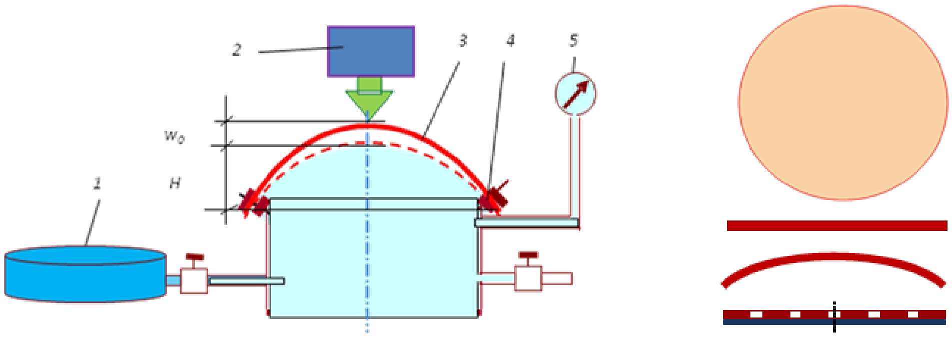


Рис.1. Схема экспериментальной установки.

На одну поверхность круглого в плане плоского или сферического образца действует равномерно распределенное поверхностное давление. Установка (рис.1) содержит резервуар 1. На посадочную площадку установки устанавливается испытуемый образец 3. Под образец подкладывают перфорированную пластину, исключающую провисание образца (на схеме пластина не указана). Испытуемый образец 3 закрепляется по контуру крепежными элементами 4. Устройство имеет измерительное устройство 5 (манометр) для замера давления, а также измерительный комплекс 2 для измерения геометрических параметров формы деформированного образца 3.

На экспериментальном этапе производится мониторинг за формой деформирования круглых образцов и замеры геометрических параметров образуемого купола, закрепленных по контуру и подвергающихся воздействию одностороннего равномерного давления. Строится зависимость «прогиб *H* – давление *p*» [13-19]:

$$H_{(r=0)} = f(p) \,. \tag{1}$$

При наличии сквозных отверстий используется дополнительная подложка. При исследовании тонких и очень тонких пленок и композиций, испытуемый образец кладут на перфорированное основание, а края образца, выступающие за пределы рабочей части, зажимают заклинивающим кольцом [19] (решается проблема провисания образцов под действием собственного веса и сползания их при размещении на экспериментальной установке).

Далее на теоретическом этапе, используя соотношения, полученные из нелинейной теории оболочек, вычисляются приведенные механические характеристики материала образца, в том числе, модуль упругости E или условный модуль упругости $E_{усл}$, а также приведенные жесткости на растяжение $Eh/(1-\nu^2)$. Здесь h – толщина образца, ν – коэффициент Пуассона материала образца. Используются, в частности, соотношения для тонких пластин, гибких упругих мембран, гибких упругих мембран при больших изменениях кривизны, гибких мембран при пластических деформациях, в частности [13-16]. Так, например, для упругой тонкой пластины толщиной h в случае среднего изгиба модуль упругости E можно определять по формуле, полученной из соотношений Тимошенко [20]:

$$E = \frac{3(1-\nu^2)pa^4}{16hH(h^2+0.488H^2)} \,, \tag{2}$$

где a – радиус рабочей части образца.

Для гибких образцов при пластических деформациях используются соотношения, приведенные в работе [13]. В случае износа материала в процессе эксперимента предполагается, что в каждый момент времени образец имеет конкретные свойства и физическая модель Ильюшина [21], в отличие от работы [13], берется в форме:

$$\sigma_i = A(e_i) \cdot e_i^{\,k}, \tag{3}$$

где σ_i и e_i – интенсивности напряжений и деформаций, соответственно; A и k – характерные переменные величины, определяемые для материала в каждый конкретный момент износа. Тогда условный модуль упругости $E_{усл}$ для гибких образцов при пластических деформациях вычисляются по формуле:

$$E_{усл} = \frac{dA}{de_i} e_i^k + Ak \cdot e_i^{\,k-1}. \tag{4}$$

Разработка награждена Золотой медалью Международного Салона изобретений «Архимед - 2011», а также отмечена в Информационном сборнике: Важнейшие исследования и разработки научных учреждений РАН в 2011 году, готовые к практическому применению (П.5.4.3. М., 2012. С.87).

Поверхностные покрытия, обладая определенными заданными свойствами, позволяют решать множество различных проблем надежности, долговечности и безопасности конструкций и сооружений. Они обеспечивают защиту и изоляцию поверхности изделий, работающих в различных средах и под воздействием различных физических полей. Создание покрытий с заданными свойствами – это одно из перспективных направлений.

Для эффективной разработки новых покрытий, включая нанопокрытия, в системе «покрытие-подложка», а также эффективной эксплуатации изделий с различными покрытиями необходимо уметь определять их исходные механические характеристики и адгезионные свойства на рассматриваемую поверхность, а также изменение этих свойств в процессе эксплуатации вследствие взаимодействия покрытия с окружающей средой и физическими полями.

Определение адгезии к подложке на базе существующих измерителей адгезии не всегда эффективны, трудно обеспечить идентичность замеров в процессе изучения влияния среды, деформации поверхности и физических полей. Среди известных подходов можно отметить следующие: способ определения прочности сцепления покрытия с основным материалом [22], способы определения адгезии пленки к подложке [23-25].

Вопросы отслоения тонких покрытий в одномерной постановке рассмотрены в работе [26]. Однако тонкие покрытия являются двумерными объектами и, естественно, для получения достоверных результатов необходимо использовать двумерный подход.

В работе [27] описан двумерный подход определения адгезии пленки к подложке. Новым в способе является то, что формируют отверстие в подложке и при подаче давления через это отверстие замеряют изменение диаметра основания купола в процессе отслаивания покрытия. Предполагается, что напряжение по радиусу, начиная от кромки купола, распределено по параболе четвертого порядка. Произведя обработку экспериментальных данных по полученным соотношениям, делают заключение о прочности сцепления (адгезии). Разработка награждена Бронзовой медалью Международного Салона изобретений и инновационных технологий «АРХИМЕД - 2012».

2. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПЛЕНОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ С НАНОПОКРЫТИЕМ

Разработан в двумерной постановке эффективный способ определения механических характеристик тонких покрытий в системе «подложка-покрытие», включая нанопокрытия. Способ базируется на раздельном экспериментальном исследовании деформирования подложки и системы «подложка-покрытие» и теоретической обработке полученных результатов пакетом программ, разработанных на основе нелинейной теории оболочек [28,29]. При раздельном исследований свойств подложки и пакета «подложка-покрытие» используется экспериментально-теоретический метод [13-19]. В зависимости от характера деформирования: упругое или пластическое, вычисляют модуль упругости $E_{покр}$ или условный модуль упругости $E^{усл}{}_{покр}$ по формулам:

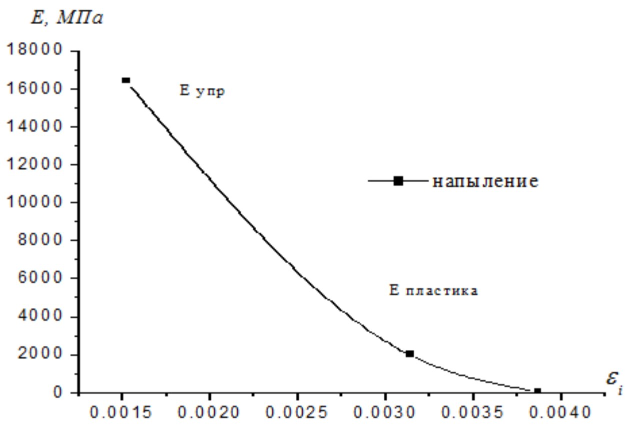
$$E_{покр} = \frac{E_c\left(h_{покр} + h_{подл}\right) - E_{подл}\, h_{подл}}{h_{покр}} \qquad (5)$$

или

$$E^{усл}_{покр} = \frac{E^{усл}_c\left(h_{покр} + h_{подл}\right) - E^{усл}_{подл}\, h_{подл}}{h_{покр}} \qquad (6)$$

где в (5), (6) $h_{покр}$, $h_{подл}$ – толщины покрытия и подложки, соответственно.

Исследована полимерная пленка толщиной t=0,1 мм, на которую были нанесены ионно-плазменным методом покрытия из оксида титана T_iO_2 с нанопокрытием из оксида титана толщиной около 80 нм. Используя выше отмеченный подход, определены модули упругости и условные модули упругости покрытия. Зависимость модуль упругости E (условный модуль $E_{усл}$) от деформации e_i представлена на рис.2. Из рис.2 видно, что при деформациях e_i=0.0038 происходит разрыв покрытия из оксида титана T_iO_2. Модуль упругости технического титана [30] E=115000 МПа. Для покрытия из оксида титана T_iO_2 мы получили модуль упругости E=16500 МПа – почти в семь раз меньше. То есть способ напыления не позволяет получать характеристики технического титана, получаемого методом плавки. Очевидно, это можно объяснить отсутствием всех связей, получаемых при плавке титана.



Образцы пленки: с покрытием (*а*) и без покрытия (*б*)

Рис.2. Зависимость «$E – e_i$»

Рассмотрены также три группы образцов из полиэтилентерефталата (ПЭТФ) толщиной t=0,45 мм. На первые две группы образцов были нанесены ионно-плазменным методом покрытия из оксида титана T_iO_2 толщиной около 50 нм и 150 нм, соответственно для первой и второй групп. На рис.3 представлены кривые прогиб образцов H от давления p (образец 3 покрытие 50 нм, образцы 4 и 5 – 150 нм, образец 6 – без покрытия).

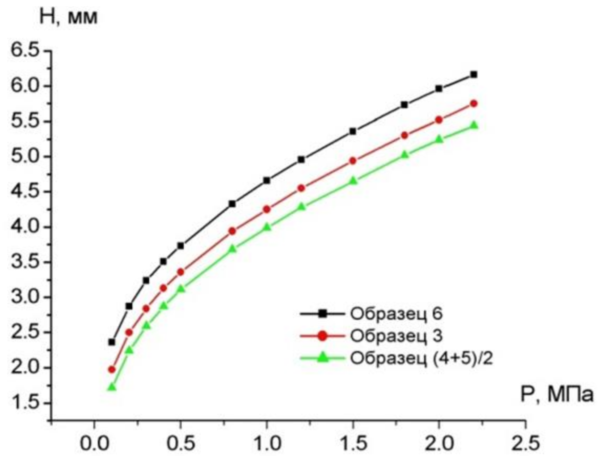


Рис.3. Зависимость «H – p».

Наличие покрытия сказывается на прогибах образцов: прогибы образцов при наличии покрытия снижаются, при этом жесткость на растяжение $Eh/(1\text{-}\nu^2)$ композиции «подложка - покрытие» возрастает более чем в 1,7 раза по сравнению с жесткостью образца без покрытия, а жесткость композиций при возрастании толщины покрытия в три раза возрастает в 1,5 раза. Разработка награждена Серебряной медалью на XIX Международной выставке-конгрессе «Hi-Tech - 2013», г. Санкт - Петербург.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ АДГЕЗИИ ПЛЕНКИ К ПОДЛОЖКЕ

В работе [27] не учитывается один из важных экспериментальных параметров, а именно высота подъема купола. Учет высоты подъема купола, очевидно, позволяет повысить точность определения адгезионных свойств материалов и снизить разброс получаемых результатов. При этом исключается повреждение пленок в ходе подготовки и проведения испытаний.

Устройство для испытания (рис.4) состоит из источника давления рабочей среды 1 с магистралью 5 для подачи рабочей среды и вентиля 2. Магистраль подведена к полости «*А*» внутри корпуса 12, который имеет фланец 11 для размещения образца 3. Образец 3, установленный на фланце, прижимают кольцом 10. Полость «*А*», закрытая образцом, формирует герметичную нагрузочную камеру. На магистрали также расположен манометр 4, стравливающий патрубок 14 с вентилем 6.

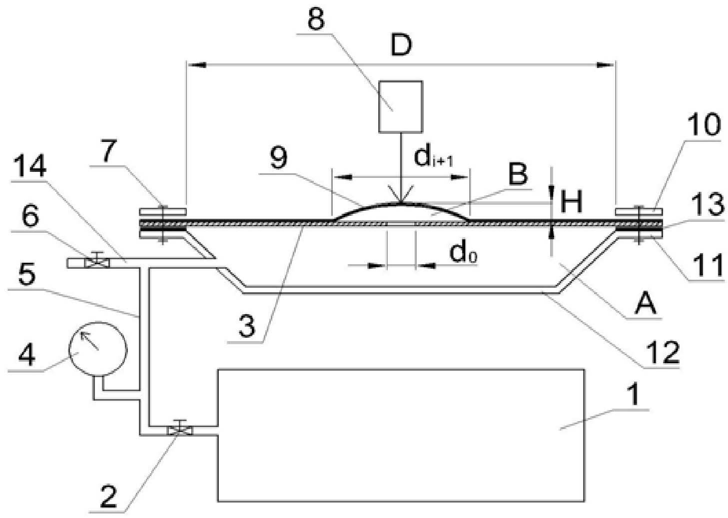


Рис.4. Схема установки.

Подавая давление в полость «*А*», производят мониторинг за формой купола 9, образующегося при отрыве пленки от подложки, и замеры измерительным комплексом 8 высоты подъема купола H в увязке с диаметром d_{i+1} основания купола 9 по контуру отслаивания.

Следует отметить, что по линии отрыва возникают как нормальные усилия отрыва T_{otr}, так и касательные усилие среза T_{sr}, которые определяются по формулам:

$$T_{otr} = T_1 \cos\beta, \qquad T_{sr} = T_1 \sin\beta, \tag{7}$$

гле T_1 – радиальное усилие в пленке вблизи области отрыва, которое определяется из решения задачи нелинейной теории оболочек для купола. Угол β определяется из геометрических параметров образуемого купола (рис.5).

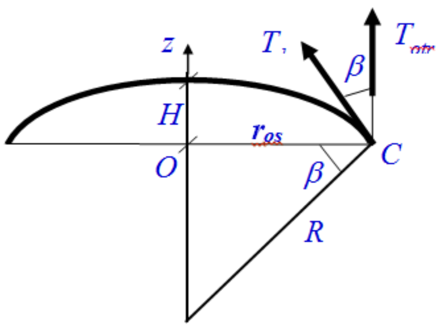


Рис.5. Схема геометрии купола.

Для плоских систем «подложка-покрытие» выражение для радиального усилия T_1 при r=1 берется для нелинейно упругих и пластических покрытий в виде [13]:

$$T_1 = \frac{4\sigma_i h}{3e_i}\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\right), \tag{8}$$

где e_i – интенсивность деформации, σ_i – интенсивность напряжений.

Для сферических систем «подложка-покрытие» [16] выражение для радиального усилия T_1 при r=1 берется для нелинейно упругих и пластических покрытий в виде:

$$T_1 = Ah_0 \frac{2^{k+1}}{3^{(k+1)/2}} (\varepsilon_1^{\ 2} + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^{\ 2})^{(k-1)/2} (1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2) \qquad (9)$$

а для резиноподобных материалов в виде:

$$T_1 = B\frac{\sqrt{1+2\varepsilon_1}}{\sqrt{1+2\varepsilon_2}}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2)\,, \qquad B = \frac{Eh_0(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{1-\mu^2}\,. \qquad (10)$$

Здесь ε_1 и ε_2 – деформаций в радиальном и окружном направлениях, соответственно; A и k – некоторые постоянные, характерные для рассматриваемого материала ($0 \le k \le 1$); E и μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала покрытия, h_0 – первоначальная толщина покрытия. Конкретные выражения (8)-(10) получаются из решения задачи теории оболочек, например, методом Бубнова-Галеркина [13,16].

Далее определяется прочность нормального сцепления η_{otr} и касательного среза τ_{sr} через усилие отрыва T_{otr} и усилие среза T_{sr}, соответственно:

$$\eta_{otr} = \frac{T_{otr}}{h}\ , \quad \tau_{st} = \frac{T_{sr}}{h}\ , \qquad (11)$$

где h – толщина пленки покрытия.

Пример. На металлическую подложку толщиной 0,195 см круглой формы диаметром 13,8 см приклеивают полимерную пленку толщиной 0,0026 см. Подложка имеет в центре отверстие диаметром 0,6 см. Образец (подложка-пленка) устанавливают на испытательное устройство (рис.4). Далее подают рабочую среду от источника 1 рабочей среды по магистрали 5 через отверстие в образовавшуюся герметичную полость «*A*», постепенно увеличивая давление p. Наблюдают за изменением формы купола с полостью «*B*», образующегося на рабочей поверхности (рис.5 и 6).

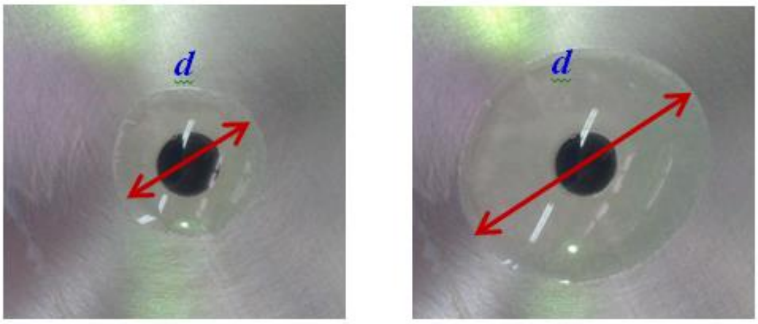


Рис.6. Образование и рост купола.

По мере нарастания давления замеряют высоту подъема купола H и диаметр основания купола d по контуру отслаивания измерительным комплексом 8. Для синхронного замера параметров купола (высоты подъема H и диаметра d) отслоившейся части пленки используются фотоаппарат и видеокамера, цифровой индикатором и линейка. Радиальное усилие T_1 при r=1 берется для нелинейно упругих и пластических покрытий по (8) [13].

Результаты замеров для одного цикла исследований представлены в таблице 1. Там же представлены прочность нормального сцепления η_{otr}, касательного среза τ_{sr} и обобщенная величина сцепления Σ.

Таблица 1.

P, кГ/см^2	H, мм	d, мм	$cos\beta=4dH/(4H^2+d^2)$	η_{otr} кГ/см^2	$sin\beta$	τ_{sr} кГ/см^2 $=\eta_{otr}$ $\sin\beta/\cos\beta$	$\Sigma=\sqrt{\eta_{otr}^2+\tau_{sr}^2}$
0.80	0.39	7.51	0.2055	36,72	0.9786	174.8658	178.7
0.90	0.45	7.73	0.2298	41,62	0.9732	176.267	181.1
1.00	0.51	7.85	0.2556	46,72	0.9668	176.736	182.8
1.20	0.61	8.12	0.2939	54,04	0.9559	175.772	183.9
1.25	0.64	8.24	0.3033	55,94	0.9529	175.724	184.4
1.30	0.66	8.31	0.3099	56,94	0.9508	174.716	183.8
1.35	0.70	8.52	0.3200	58,70	0.9474	173.792	183.4

Таким образом, разработан эффективный экспериментально-теоретический метод исследования адгезии пленки подложке плоской и сферической формы. Предложенный метод рекомендуется для тонких гибких покрытий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якупов Н.М., Якупов С.Н.* Методы расчета пленочных элементов конструкций. Учебное пособие. – Казань: КГАСУ, 2007. – 117 с.
2. *Якупов Н.М., Якупов С.Н.* Пленки неоднородной структуры // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – №1. – С.60-70.
3. Международный форум по нанотехнологиям. Сборник тезисов докладов научно-технологических секций. М., 2008-2012.
4. Труды Международных конференции “Пленки и покрытия”. СПб: Изд-во Политехнического ун-та, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013.
5. *Якупов Н.М.* Строительные конструкции: этапы и перспективы развития. Учебное пособие. – Казань: КГАСУ, ИММ КазНЦ РАН, 2006. – 154 с.
6. *Якупов Н.М., Якупов С.Н.* Методы расчета пленочных элементов конструкций. Учебное пособие. – Казань: КГАСУ, 2007. – 117 с.
7. ГОСТ 14236-81. Пленки полимерные. Метод испытания на растяжение.
8. *Куприянов В.Н.* Пленочно-тканевые материалы для строительных конструкций. – Казань: КИСИ, 1989. – 94 с.
9. *Oliver W., Pharr G.J.* / Mater. Res. Soc. Symp. Proc. – 1997. – P.473.
10. *Шугуров А.Р., Панин А.В., Оскомов К.В.* Особенности определения механических характеристик тонких пленок методом наноиндентирования // Физика твердого тела. – 2008. – Т.50. – Вып.6. – С.1007-1012.
11. *Устинов К.Б., Ченцов А.В.* Континуальное и дискретно-континуальное моделирование слоистых наноматериалов и систем с покрытиями / Второй Международный форум по нанотехнологиям. Сборник тезисов докладов. – М.: РОСНАНО, 2009. – С.208-209.
12. *Никитина Е.А., Яновский Ю.Г., Карнет Ю.Н., Никитин С.М.* Квантово-механические исследования строения и механических свойств межфазных

слоев нанокомпозитов / Второй Международный форум по нанотехнологиям. Сборник тезисов докладов. – М.: РОСНАНО, 2009. – С.188-190.
13. *Якупов Н.М., Галимов Н.К., А.А. Леонтьев А.А.* Экспериментально-теоретический метод исследования прочности полимерных пленок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2000. – Т.6. – №2. – С.238-243.
14. *Якупов Н.М., Нургалиев А.Р., Якупов С.Н.* Методика испытаний пленок и мембран в условиях равномерно распределенного поверхностного давления // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2008. – Т.74. – №11. – С.54-56.
15. *Якупов Н.М., Нуруллин Р.Г., Якупов С.Н.* Методология исследования механических характеристик тонких пленок и нанопленок // Вестник машиностроения. – 2009. – №6. – С.44-47.
16. *Галимов Н.К., Якупов Н.М., Якупов С.Н.* Экспериментально-теоретический метод определения механических характеристик сферических пленок и мембран со сложной структурой // МТТ. – 2011. – №3. – С.58-66.
17. *Якупов Н.М., Нуруллин Р.Г., Галимов Н.К., Галявиев Ш.Ш.* Способ определения прочностных свойств пленочных материалов / Патент РФ на изобретение №2184361.
18. *Якупов Н.М., Нуруллин Р.Г., Нургалиев А.Р., Якупов С.Н.* Способ определения прочностных свойств тонкослойных материалов / Патент РФ на изобретение №2310184.
19. *Якупов Н.М., Куприянов В.Н., Нуруллин Р.Г., Якупов С.Н.* Способ определения прочностных свойств тончайших пленок и нанопленок и устройство для его осуществления / Патент РФ на изобретение №2387973.
20. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 636 с.
21. *Ильюшин А.А.* Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
22. А.с. СССР №183459 по М. Кл. – G 01 L, опубл.17.06.1966. Бюл. №13.
23. Патент РФ №689411 по М. Кл. – G 01 N 19/04, опубл. 10.05.1995.
24. Патент РФ №2207544 по М. Кл. – G 01 N 19/04, опубл. 27.06.2003.
25. Механика разрушения. Разрушение материалов. – М.: Мир, 1979. – Вып.17. – С.216-226.
26. *Гольдштейн Р.В., Козинцев В.М., Попов А.Л., Чернышев Г.Н.* Экспериментально-теоретический метод диагностики отслоений тонких покрытий // ПММ. – 2000. – Т.64. – Вып.2. – С.332-336.
27. *Гольдштейн Р.В., Якупов Н.М., Нуруллин Р.Г., Якупов С.Н., Якупова Р.Н.* Способ определения адгезии пленки к подложке / Патент на изобретение №2421707.
28. *Yakupov S.N.* Way of definition of mechanical characteristics of thin coverings in system «the covering – the substrate» / The second international competition of scientific papers in nanotechnology for young researchers. Abstracts. – M.: Rusnanotech, 2009. – P.439-440.
29. *Якупов С.Н.* Механические характеристики тонких покрытий из оксида титана в системе «покрытие - полимерная пленка» // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №3. – С.436-444.
30. *Александров В.Г.* Справочник по авиационным материалам. – Изд-во «Транспорт», 1972. – 328 с.

Биомеханика

БИОСЕНСОР НА ОСНОВЕ КОМПОЗИТА НАНОЗОЛОТА И ИММУНОГЛОБУЛИНОВ КЛАССА G СПЕЦИФИЧНЫХ К ГЛИКОДЕЛИНУ ДЛЯ СКРИНИНГОВЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ОПУХОЛЕВЫХ МАРКЕРОВ В СЫВОРОТКЕ ПАЦИЕНТОВ ГРУППЫ РИСКА ПО ОНКОЛОГИЧЕСКИМ ЗАБОЛЕВАНИЯМ

Зарайский Е.И.[1], Осьмак Г.Ж.[2], Полтавцев Ал.М.[1]

[1]*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*
[2]*Российский национальный исследовательский медицинский университет им. Н.И.Пирогова, г. Москва, Россия*

РЕЗЮМЕ

В работе проведено исследование возможности применения потенциального опухолевого маркера гликоделина в скрининговых исследованиях пациентов группы риска по онкологическим заболеваниям при помощи биосенсора на основе композита нанозолота и иммуноглобулинов специфичных к гликоделину. При исследовании сыворотки пациентов, относящихся к группе риска с использованием биосенсора была показана 41% чувствительность тест системы на основе композита нанозолота и иммуноглобулинов специфичных к гликоделину. Методом ИФА показано, что в группе риска повышенная концентрация опухолевых маркеров встречается в следующем проценте случаев: AFP 87.8%; PSA 4,9%, CEA 34,1%; CA125 6,09%; CA19.9 28,04%. В контрольной группе повышение АФП, CEA или PSA не обнаружено.

Разработка иммунологических методов диагностики опухолевых заболеваний – актуальная задача.[10] За последние 20 лет доля смертность от опухолевых заболеваний не уменьшается, а по некоторым нозологиям увеличивается, несмотря на значительные инвестиции развитых стран в разработку лекарственных препаратов и других методов лечения данных заболеваний.[11] Основные достижения онкологии этого периода является появление лечебных методик, позволяющих практически на 100% излечивать пациентов на I стадии заболевания.[12] Таким образом, основные надежды в снижении смертности и инвалидизации больных опухолевыми заболеваниями связана с максимально ранней диагностикой.[2] Такая диагностика возможна только при массовом скрининге населения, в первую очередь, относящегося к группе риска. Такая диагностика экономически и организационно доступна только при применении иммунологических методов, позволяющих быстро и дешево выявлять наличие маркеров ассоциированных с опухолевым ростом в биологических жидкостях пациентов.[3] Некоторые иммунологические методы могут использоваться населением для самодиагностики, так как не требуют специального оборудования, квалифицированной рабочей силы и имеют незначительную стоимость.[9,18,19] Для лечебных учреждений, в первую очередь клинико-диагностических центров такие задачи решаются, как уже зарекомендовавшими себя: иммуноферментным и радиоиммунным методами, так и новыми методами, в частности, иммунохроматографией и мультиплексным иммунофлуоресцентным анализом.

Известно более 150 опухолевых маркеров, которые характеризуются различной ценностью для целей скринингвой диагностики опухолевых заболеваний на ранней стадии[7,1,4,5,17,6] при помощи вышеперечисленных методов. Однако немногие тест системы основанные на известных опухолевых маркерах обладают достаточной чувствительностью на ранних стадиях (I-II) развития опухолевых заболеваний. Для создания экспресс тестов эффективно решающих подобную задачу необходимо подобрать наиболее чувствительные опухолевые маркеры, которые позволят выявлять максимальное число нозологий рака на ранних стадиях.[7,8,13-16]. Данная работа посвящена изучению чувствительности потенциального опухолевого маркера гликоделина, а также ценности CA125, CA19.9, CEA, PSA, AFP для комплексной диагностики онкологических заболеваний, а также возможные их сочетания для повышения качества бинарной классификации комплексной тест системы.

Альфа-2-микроглобулин фертильности (АМГФ, гликоделин, PAEP, pp14) – белок, секретируемый у здоровых женщин эпителиоцитами маточных желез на 5-6 день после овуляции. Белок обладает характерной для липокалинов вторичной и третичной структурой, которые характеризуются наличием восьми доменов, соединённых друг с другом в антипараллельную бета-складчатую структуру, которая свёрнута в симметричный цилиндрический «бочкообразный» домен. Внутри такой «бочки» находится участок связывания лиганда, как правило, гидрофобного низкомолекулярного и биологически активного компонента.

АМГФ – главный прогестерон-связывающий липокаин репродуктивной сети, модулирующий [23-26] действие прогестерона, влияющий на пролиферацию и дифференцировку клеток[22]. АМГФ обладает мощной иммуносупрессивной активностью [27-29], в частности подавляя активность NK-клеток, обеспечивая локальное подавление иммунного ответа [20,21]. Ввиду своей своих иммуносупрессивных свойств и эффектов относительно пролиферации и дифференцировки клеток, что позволяет рассматривать АМГФ как потенциальный опухолевый маркер.

В работе Mandelin E et. All [30], показано, что АМГФ локализуется чаще в цитоплазме опухолевых клеток и полностью отсутствует в сосудистом эндотелии опухолевой ткани. Также, что концентрация АМГФ больше выражена в более дифференцированных клетках опухоли, чем в слабо дифференцированных карциномах, а также более выражена на ранних стадиях (I-II) заболевания, чем на поздних. Также была показана корреляция экспрессии АМГФ и ядерных рецепторов прогестерона (PRs) подтипа А и Б (PRA; PRB). В работе также показано, что пациенты, у которых опухоль экспрессирует гликоделин – имеют больший шанс на положительный исход заболеваний, чем пациенты с неэкспрессирующей гликоделин опухолью.

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Использовано 80 сывороток пациентов из группы риска (пациенты впервые направленные на консультацию к онкологу) и 7 сывороток доноров, не имеющих жалоб на здоровье.

Были использованы материалы для иммунохроматографии (ИХА): mdi Membrane Laminate Type CNPF-SN12-L2-H50, 10μ, 75mm x 260mm, 25mm NC 200 140; mdi Cover/Adhesive Tape Type MT-1 (Blue), 29mm x 260mm 200 20; mdi Sample Pad Type GFB-R4 (0.35), 27mm x 260mm 200 32; mdi Cover/Adhesive Tape Type MT-2 (Blue Arrow on White), 29mm x 260mm 200 30; mdi Absorbent Pad Type

AP-045, 27mm x 260mm 200 6 фирмы MDI (Индия). Моноклональные антитела против PP14, а также конъюгаты антител против PP14 с коллоидным нанозолотом были получены от фирмы ООО «Нано-лаб» (Россия).

Концентрацию белков определяли с помощью спектрофотометра Ultrospec II при длине волны 280 нм. Взвешивание проводили на весах фирмы OHAUS (Германия) с точностью до 0,1 мг. pH Растворов измеряли при помощи pH-метра «Мульти-тест» Россия. Растворы отбирали при помощи одно- и восьмиканальных автоматических микропипеток фирмы Ленпипет (Россия), для перемешивания растворов использовали FUGE – vortex, фирмы Liap (Латвия), измерения оптической плотности результатов иммуноферментного анализа, а также результатов иммунохроматографического анализа проводили с помощью прибора Эксперт-Лаб (Россия)

Для проведения иммунохроматографического анализа изготавливали тест-полоски, как описано ранее состоящие из частей А, В и С, монтируемых на подложке D таким образом, что часть А на 1-2 мм перекрывает часть В (рис.1).

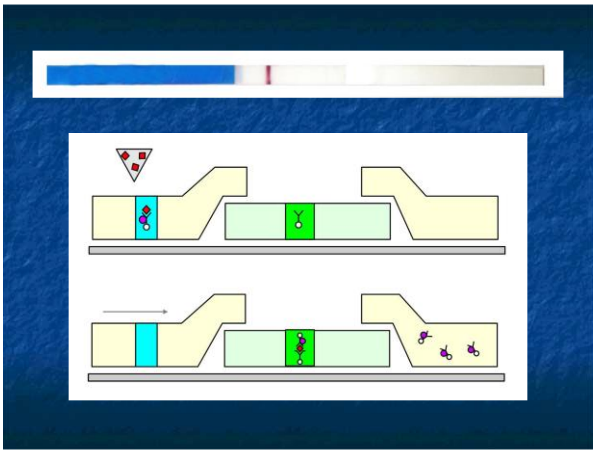


Рис.1. Схема одноантигенного «сэндвич» стрипа для определения наличия гликоделина в биологических жидкостях (принципиальная схема внизу и фото теста с положительной реакцией вверху)

Часть А представляет собой инертный пористый носитель из стекловолокна (ПЭД) с нанесенной на его поверхность реакционной зоной 1 (конъюгат мышиных моноклональных антител против PP14 с нанозолотом). Конъюгат наносили в реакционной зоне параллельными полосами в центральной области ПЭД перпендикулярно длинной оси стрипа.

Часть В тест-полоски представляет собой иммобилизованную на полимерное основание нитроцеллюлозную мембрану с диаметром пор 20мкм, на поверхность которой нанесена тест-зона (зона с нанесенной полосой (шириной 2 мм) перпендикулярно длинной стороне стрипа, содержащую мышиные моноклональные антитела против эпитопа PP14, отличного от эпитопа, специфичные антитела к которому локализованы в реакционной зоне 1.

При этом В имеет капиллярную связь с реакционной зоной носителя А.

Часть С – отсасывающий фильтр для поглощения непрореагировавших компонентов тест системы. Решение о наличии PP14 принимают по наличию или отсутствию окраски тест-зоны.

Для определения концентрации CA125, CA19.9, CEA, PSA, AFP антигенов были использованы коммерческие наборы для выявления, фирмы Хема (Россия).

Для определения концентраций опухолевых маркеров проводили «сендвич» иммуноферментный анализ (ИФА). Вкратце, на дно 96 луночных полистироловых планшетов фирмы COSTAR наносили моноклональные антитела против соответствующих антигенов в концентрации 1 мг/мл, в 0,1 М карбонатном буфере pH 9.6, из расчета 100мкл в лунку при помощи 8 канальной пипетки и инкубируют в течение ночи при 4^{o}C. Затем неспецифические сайты связывания полистирола блокировали добавлением 150мкл на лунку 1% раствора бычьего сывороточного альбумина (BSA) на 0,05М фосфатносолевом буфере (PBS) с pH 7,2-7,4. Плашку инкубировали в течение 30 минут при 37^{o}C на шейкере Unimax 1010 фирмы Heidolph (Германия). Затем плашки отмывали пятикратно отмывочным буфером, содержащим 0,1% BSA, 0,05% Tween20 разведенные в PBS. Затем на плашки наносили исследуемые сыворотки из расчета 100мкл на лунку и инкубировали в течение 60 минут при 37 С. После инкубации производили отмывку и вносят по 100мкл в лунку конъюгат к другому эпитопу соответствующего антигена с пероксидазой хрена в концентрации, соответствующей стандарту ВОЗ. После 60 минутной инкубации конъюгат отмывали как описано выше и добавляли субстратную смесь, состоящую из раствора тетраметилбензидина (ТМБ) в концентрации 1,4мг/мл в дезоксиметилсульфоксиде (1 часть) и раствора 0,05% перекиси водорода в 0,05М цитратном буфере pH 4,7 (4 части) из расчета 200мкл на лунку. Плашки инкубировали при комнатной температуре в течение 20 минут в темноте. Затем реакцию останавливали добавлением в лунки 50мкл. 50% серной кислоты. Реакцию учитывали на многоканальном фотометре при длинне волны 450нм. Эксперт-Лаб (Россия).

Статистическая обработка производилась при помощи программного обеспечения IBM SPSS Statistics 20 for MacOS X; R version 3.0.2 for MacOS.

С целью уточнения концентрации опухолевых маркеров в сыворотках пациентов, составляющих группу риска, был проведен ИФА.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Было проведено изучение сывороток группы риска и доноров для выявления встречаемости в них повышенного уровня маркеров CA125, CA19.9, CEA, PSA, AFP методом иммуноферментного анализа. Исследование было проведено методом иммуноферментного анализа с использованием диагностических наборов фирмы «Хема». Результаты исследования представлены на рис.2.

В опыте с AFP, PSA и CEA в качестве критического уровня концентрации (cut-off) использовались максимальные значения концентраций данных опухолевых маркеров в контрольных донорских сыворотках, которые совпали со средним значением cut-off фигурирующем в различных источниках. В опыте с CA19.9 и CA125 использовался общепринятый дискриминационный уровень рекомендованный для клинических лабораторных исследований.

Из рисунка видно, что наиболее чувствительные маркерами оказались AFP, CA19.9, CEA. Невысокий процент превышения cut-off маркерами CA125 и PSA соответствует распространенности диагностируемых ими заболеваний – рака яичника и рака предстательной железы среди общей онкологической патологии.

Как видно из рис.2 повышенная концентрация различных опухолевых маркеров в выборке в сумме превышает 100%. Это свидетельствует о наличие нескольких опухолевых маркеров в одной сыворотке у части пациентов.

Был проведен анализ частоты встречаемости нескольких опухолевых маркеров в одной сыворотке. Результаты исследования приведены на рис.3.

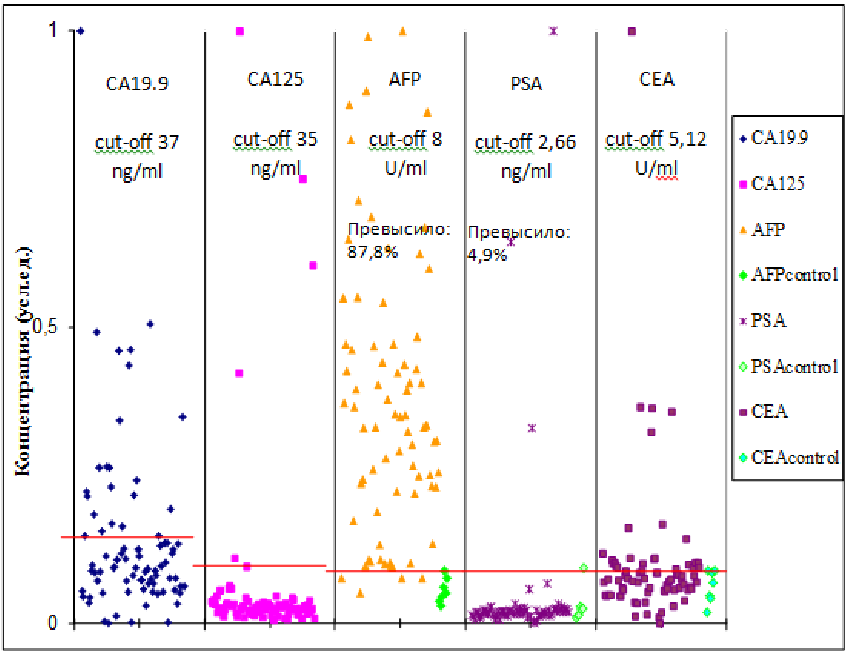


Рис.2. Анализ сывороточного уровня опухолевых маркеров в сыворотках пациентов группы риска, выполненный методом ИФА

Из рис.3 видно, что сочетания маркеров CA125&CEA (здесь и далее имеется ввиду, что при всех положительных результатах на CA125 встречается CEA, но не при всех положительных результатах на CEA встречается CA125, аналогично для остальных маркеров); CEA&CA19,9; PSA&CEA встречается в 100% случаев, пары CEA$AFP; AFP&CEA; CA125&CEA; CA19.9&CEA; CA19.9&AFP в более 50% случаев. Все остальные пары в 50% и менее процентах случаев.

Для количественной оценки совместного появления пар опухолевых маркеров в сыворотке пациентов группы риска был проведен корреляционный анализ зависимости экспрессии опухолевых маркеров в парах. В случае нормального распределения, рассчитывался параметрический коэффициент корреляции Пирсона, в случае распределения отличного от нормального корреляционный анализ проводился при помощи коэффициента ранговой корреляции Спирмена. Для проверки гипотезы о принадлежности выборки к нормальному распределению использовался критерий согласия Колмогорова-Смирнова.

При выявлении корреляции между наличием опухолевых маркеров были получены результаты, представленные на рис.4 и рис.5.

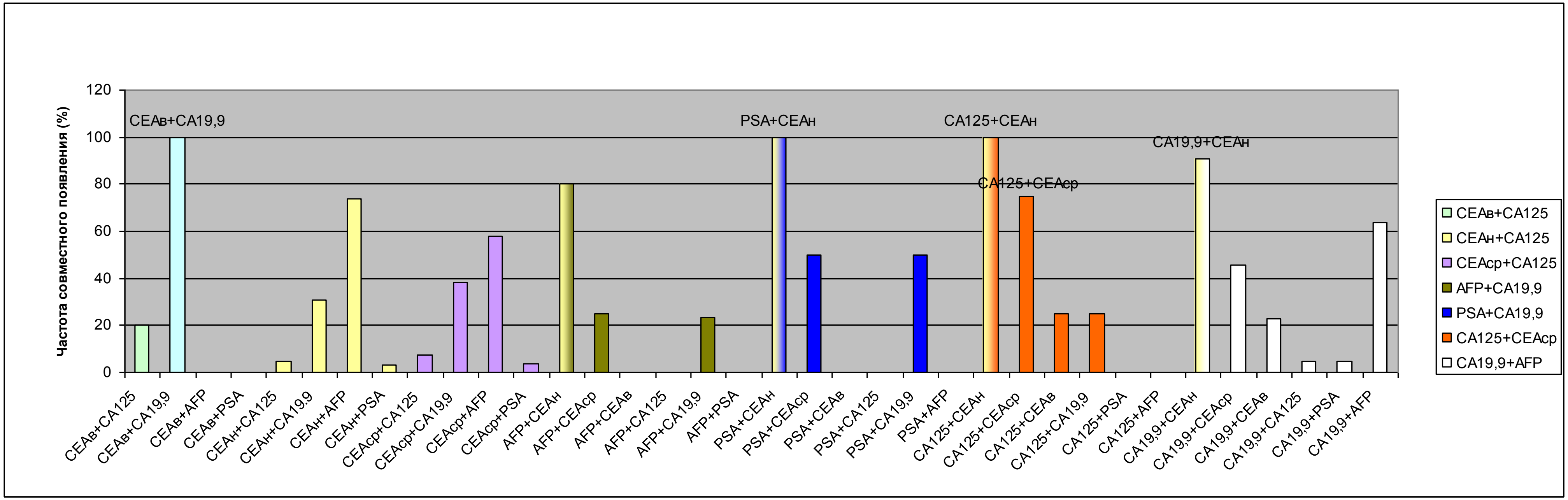


Рис.3. Частота совместного появления повышенной концентрации опухолевых маркеров в сыворотках пациентов группы риска по данным ИФА.

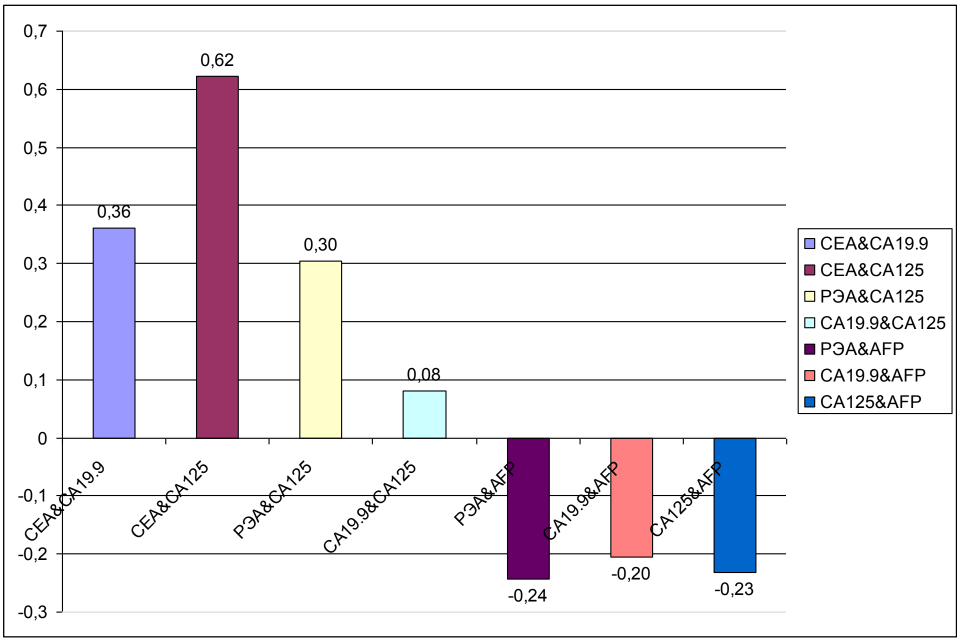


Рис.4. Сравнение коэффициентов корреляции Пирсона для пар онкоантигенов в сыворотках крови группы риска

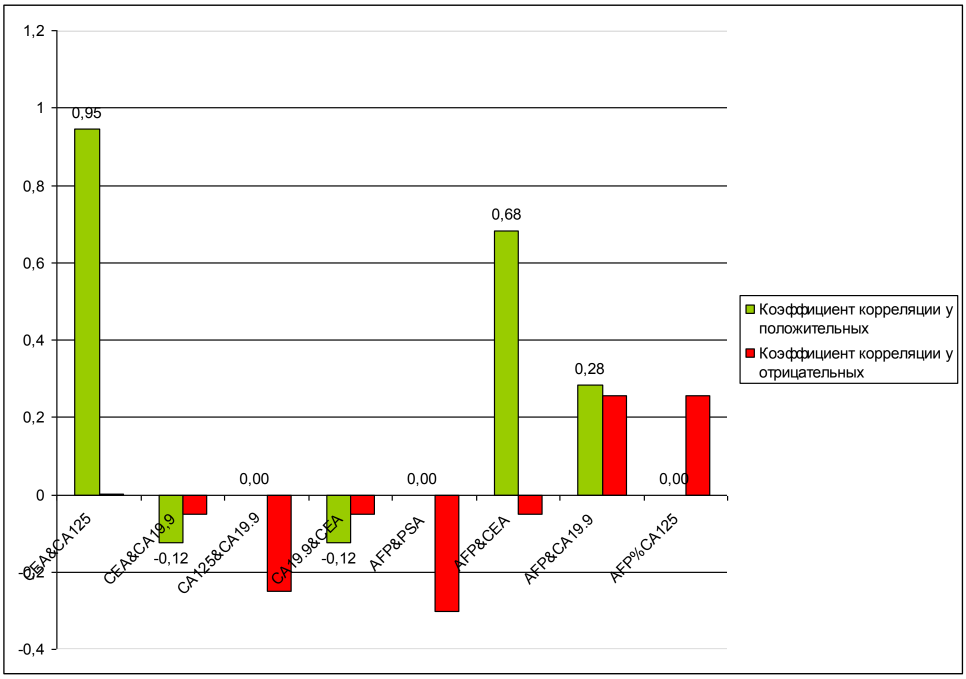


Рис.5. Сравнение коэффициентов корреляции в парах опухолевых маркеров. Корреляция в сыворотках со значением опухолевого маркера выше нормальной пороговой величины – зеленые столбики, корреляция сывороток с содержанием опухолевых маркеров в пределах нормы, т.е. ниже порогового уровня – красные столбики

Из рис.4 видно, что максимальная корреляция обнаруживается в паре CA125&CEA (r=0,62). Средний уровень корреляции обнаружен в парах: CA19.9&CEA (r=0,36); CEA&CA125.r=0,3. Низкий уровень корреляции был обнаружен в паре CA19.9&CA125.

Интересно, что в парах CEA&AFP, CA19.9&AFP, CA125&AFP была обнаружена обратная корреляция между опухолевыми маркерами (r=-0,24, r=-0,2,r=-0,23 соответственно).

Как видно из рис.5. наибольшие значения коэффициента корреляции наблюдается у пар опухолевых маркеров: CA125&CEA; CEA&AFP.

Также, выборки исследуемых пар были разбиты на две группы: в первую группу вошли сыворотки концентрация в которых превысила cut-off, во вторую группу те, в которых уровень опухолевых маркеров оказался в пределах нормы.

При исследовании корреляции внутри пар выше перечисленных групп. В случае пары CA125&CEA были получены интересные результаты: в сыворотках в которых концентрация не превышает критический уровень – корреляция практически не обнаружена (r=0,00052). В сыворотках с повышенной концентрацией коэффициент корреляции очень высок (r=0,9452). Аналогичная ситуация сложилась между AFP и CEA: в сыворотках в которых концентрация не превышает cut-off корреляция низкая (r=0,0052). В сыворотках, в которых концентрация больше критической – коэффициент корреляции высокий (r=0,68).

Был разработан и протестирован биосенсор на основе композита нанозолота и иммуноглобулинов класса G специфичных к гликоделину.

Таким образом, для изучение возможности применения потенциального опухолевого маркера гликоделина была использована иммунохроматографическая (ИХ) тест система, представляющая собой биосенсор на основе композита нанозолота и иммуноглобулинов класса G специфичных к гликоделину. Результаты исследования представлены на рис.6.

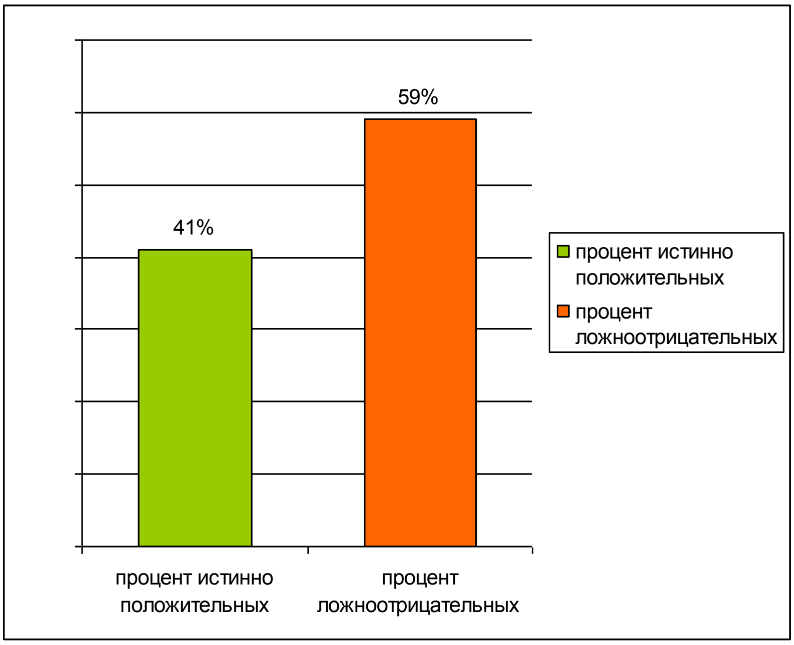


Рис.6. Наличие положительных результатов при ИХА исследовании сывороток из группы риска на наличие потенциального опухолевого маркера гликоделина

Из рис.6 видно, что 41% сывороток пациентов из группы риска дают положительную реакцию на гликоделин при использовании разработанной ИХ системы. При этом, также было установлено, что в 71% случаев опухолевый маркер появился совместно с повышением концентрации AFP.

3. ВЫВОДЫ

Таким образом, методом ИФА показано, что в группе риска повышенная концентрация опухолевых маркеров встречается в следующем проценте случаев: AFP 87.8%; PSA 4,9%, CEA 34,1%; CA125 6,09%; CA19.9 28,04%. В контрольной группе повышение АФП, CEA или PSA не обнаружено.

Разработан и протестирован биосенсор на основе композита нанозолота и иммуноглобулинов класса G специфичных к гликоделину. Методом ИХа показано, что появление гликоделина в сыворотках группы риска составляет 41%. При сопоставлении полученной чувствительности данного потенциального опухолевого маркера с данными о чувствительности опухолевых маркеров используемых на данный момент в клинической лабораторной диагностике, можно утверждать, что его чувствительность входит в диапазон используемых чувствительностей для не специфических опухолевых маркеров.

Показано, что в некоторых сыворотках встречается превышение концентрации нескольких опухолевых маркеров, причем наиболее часто выявлены сочетания CA125&CEA; CEA&CA19,9; PSA&CEA которые наблюдаются в 100% случаев. CEA$AFP; AFP&CEA; CA125&CEA; CA19.9&CEA; CA19.9&AFP – встречаются в более чем 50% случаев. Из рис.4 и 5 можно предположить, что опухолевые маркеры CEA, CA19.9 и AFP представляют собой наиболее информативные из опробованных маркеров, так как чувствительность данных опухолевых маркеров больше из всех имеющихся в данной модели, также из рис.4 виден высокий процент совместных появлений значений превышающих пороговые, что при правильной комбинации может увеличить релевантность результатов тестирования.

Проведен анализ на наличие корреляции между экспрессией различных опухолевых маркеров. Из этого корреляционного анализа видно, что наибольший коэффициент корреляции наблюдается у CA125&CEA r=0,62, CA19.9&CEA. r=0,36.

Проведен анализ на наличие корреляции между экспрессией различных опухолевых маркеров в двух группах сывороток. В первую группу вошли сыворотки с превышением cut-off, во вторую группу с нормальным уровнем концентрации. Результаты представлены в Таблице №1.

Таблица №1.

	Группа 1	Группа 2
CA125&CEA	0.9452	0
AFP&CEA	0.68	0

Коэффициент корреляции (r=0,9452) у CA125&CEA в сыворотках от пациентов с онкологическим заболеванием, говорит о наличие тесной функциональной связи между механизмами экспрессии данных опухолевых маркеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Timothy J. O’Briena, John B. Bearda, Lowell J. Underwooda, Richard A. Dennisa, Alessandro D. Santina, Lyndal Yorkb* The CA 125 Gene: An Extracellular Superstructure Dominated by Repeat Sequences // Tumor Biol. – 2001. – Vol.22. – P.348-366 (DOI: 10.1159/000050638).

2. *Алексеева М.Л., Гусарова Е.В., Муллабаева С.М., Понкратова Т.С.* Онкомаркеры их характеристика и некоторые аспекты клинико-диагностического использования (обзор литературы) // Проблемы репродукции. Изд-во "Медиа Сфера". – 2005. – С.65-79.
3. *Atsuo Nagataa, Norio Hirotab, Takao Sakaib, Masao Fujimotoa, Tsugikazu Komodac* Molecular nature and possible presence of a membranous glycan-phosphatidylinositol anchor of CA125 antigen // Tumor Biology. – 1991. – Vol.12. – P.279-286 (DOI: 10.1159/000217716).
4. *Ian Jacobs, Robert C.Bast.* The CA 125 tumour-associated antigen: a review of the literature // J. Hum. Reprod. – 1989. – 4(1). –P.1-12.
5. *Nelly Auersperg, Alice S.T.Wong, Kyung-Chul Choi, Sung Keun Kang, Peter C.K. Leung* Ovarian surface epithelium: biology, endocrinology and pathology // Endocrine Reviews. – 2001. – Vol.22. – N2. – P.255-288 (doi: 10.1210/er.22.2.255).
6. *Жорданиа К.И.* Злокачественные эпителиальные опухоли яичников // Consilium Medicum. – 2000. – Т.2. – N2.
7. *Nuzhat Ahmed, Erik W. Thompson, Michael A. Quinn* Epithelial-mesenchymal interconversions in normal ovarian surface epithelium and ovarian carcinomas: An exception to the norm // J. of Cellular Physiology. – 2007. – Vol.213. – Iss.3. – P.581-588.
8. *Steinberg W.* The clinical utility of the CA 19-9 tumor-associated antigen // The American J. of Gastroenterology. – 1990. – Vol.85. – N4. – P.350-355.
9. *Сергеева Н.С., Ермошина Н.В., Мишунина М.П. и др.* Использование опухолеассоциированных маркёров для диагностики и контроля за эффективностью терапии у больных с распространенным раком яичников. – М.: МНИОИ им. П.А. Герцена, 2002.
10. *Таранов А.Г.* Диагностические тест-системы (радиоиммуный и ммуноферментый методы диагностики). – М.: Издатель Мокееву, 2002. – 288 с. – С.148-170.
11. Статистика злокачественных образований в России и странах СНГ в 2007г. // Вестник РОНЦ им. Н.Н. Блохина РАМН. – 2009. – Т.20. – №3 (77). – Прил.1. – С.52-90.
12. *Jemal A., Murray T., Ward E., Samuels A., Tiwari R. C., Ghafoor A., Feuer E. J., Thun M.* // J. Cancer statistics. – 2005. // CA Cancer J Clin. – 2005. – Vol.55. – N1. – P.10-30 (DOI:10.3322/canjclin.55.1.10 - PMID 15661684).
13. *Wobbes T., Thomas C.M.G., Segers M.F.G., Nagengast F.M.* Evaluation of seven tumor markers (CA 50, CA 19-9, CA 19-9 TruQuant, CA 72-4, CA 195, carcinoembryonic antigen, and tissue polypeptide antigen) in the pretreatment sera of patients with gastric carcinoma // Cancer. – 1992. – Vol.69. – Iss.8. – P.2036-2041.
14. *Stieber P., Hasholzner U., Bodenmüller H., Nagel D., Sunder-Plassmann L., Dienemann H., Meier W., Fateh-Moghadam Ah.* CYFRA 21-1: A new marker in lung cancer // Cancer. – 1993. – Vol.72. – Iss.3. – P.707-713.
15. *Masato Muraki, Yuji Tohda, Takashi Iwanaga, Hisao Uejima, Yukio Nagasaka, Shigenori Nakajima* Assessment of serum CYFRA 21-1 in lung cancer // Cancer. – 1996. – Vol.77. – Iss.7. – P.1274-1277.
16. *Сергеева Н.С., Маршутина Н.В.* Новые серологические опухолеассоциированные маркеры (S 100, Bone TRAP 5b, UBC, Tu M2-PK) в мониторинге онкологических больных // Вестник Московского онкологического Общества. – 2007. – №1.

17. *Иванов А.П., Тюзиков И.А.* Возможности применения онкомаркера опухолевая пируваткиназа TuM2-PK в стадировании первичного рака почки // Фундаментальные исследования. – 2011. – №10. – Ч.3. – С.498-500.
18. *Kuusela P., Haglund C., Roberts P.J.* Comparison of a new tumour marker CA 242 with CA 19-9, CA 50 and carcinoembryonic antigen (CEA) in digestive tract diseases // Br. J. Cancer. – 1991. – Vol.63. – P.636-640.
19. *Петрова Л.В., Воробьева Н.А.* Онкомаркеры в клинической диагностике / Курс клинической лабораторной диагностики. – Архангельск, 2009.
20. *Болтовская М.Н.* Роль эндометриальных белков и клеток-продуцентов в репродукции человека / Автореф. дис. … д-ра биол. наук. – М., 2002. – 49 с.
21. *Посисеева Л.В., Бойко Е.Л., Борзова Н.Ю.* Роль специфических плацентарных белков и результаты исследования стероидных гормонов у беременных женщин с разными этиологическими формами невынашивания беременности // Проблемы эндокринологии в акушерстве и гинекологии. – М.: Academia, 1997. – С.182-183.
22. *Arnold J.T., Lessey B.A., Seppala M., Kaufman D.G.* Effect of normal endometrial stroma on growth and differentiation in Ishikawa endometrial adenocarcinoma cells // Cancer Res. – 2002. – Vol.62. – P.79-88.
23. *Julkunen M., Koistinen R., Sjöberg J., Rutanen E. M., Wahlström T., Seppälä M.* Secretory endometrium synthesizes placental protein 14 // Endocrinology. – 1986. – Iss.118. – P.1782-1786
24. *Arnold J.T., Kaufman D.G., Seppala M., Lessey B.A.* Endometrial stromal cells regulate epithelial cell growth in vitro: a new co-culture model // Hum. Reprod. – 2001. – Iss.16. – P.836-845.
25. *Gao J., Mazella J., Seppala M., Tseng L.* Ligand activated hPR modulates the glycodelin promoter activity through the Sp1 sites in human endometrial adenocarcinoma cells // Mol. Cell. Endocrinol. – 2001. – Iss.176. – P.97-102.
26. *Vaisse C., Atger M., Potier B., Milgrom E.* Human placental protein 14 gene: sequence and characterization of a short duplication // DNA Cell Biol. – 1990. – Iss.9. – P.401-413.
27. *Bolton A.E., Pockley A.G., Clough K.J., Mowles E.A., Stoker R.J., Westwood O.M., Chapman M.G.* Identification of placental protein 14 as an immunosuppressive factor in human reproduction // Lancet. – 1987. Iss.1. – P.593-595.
28. *Okamoto N., Uchida A., Takakura K., Kariya Y., Kanzaki H., Riittinen L., Koistinen R., Seppala M., Mori T.* Suppression by human placental protein 14 of natural killer cell activity // Am. J. Reprod. Immunol. – 1991. – Iss.26. – P.137-142.
29. *Rachmilewitz J., Riely G.J., Huang J.H., Chen A., Tykocinski M.L.* A rheostatic mechanism for T-cell inhibition based on elevation of activation thresholds // Blood. – 2001. – Iss.98. – P.3727-3732.
30. *Mandelin E, Lassus H, Seppälä M, Leminen A, Gustafsson JA, Cheng G, Bützow R, Koistinen R.* Glycodelin in ovarian serous carcinoma: association with differentiation and survival // Cancer Res. – 2003. – 63(19). – P.6258-6264.

КОМПЛЕКС СРЕДСТВ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КОЖИ НА ОСНОВЕ ШУНГИТ СЕРЕБРЯНОГО НАНОКОМПОЗИТА И НАНОРАЗМЕРНОГО ЗОЛОТА «ЗОЛОТАЯ МАСКА»

Огудина Г.Н.[1], Зарайский Е.И.[2], Полтавцев Ан. М.[2]

[1]*ООО «Нано-лаб», г. Москва, Россия*
[2]*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

РЕЗЮМЕ

Изучено воздействие комплекта препаратов «Золотая маска» на основе наноразмерного золота и шунгит-серебряного нанокомпозита на содержание коллагена, а так же количество фибробластов в коже мышей линии Balb/c. Показано, что обработка комплектом повышает содержание коллагена примерно на 50%, а количество фибробластов увеличивается с 393 до 584 на 1 мм^2 кожи. Также изучали воздействие «Золотой маски» на упругость и жирность кожи женщин разного возраста. Было показано, что использование «Золотой маски» повышает упругость кожи и нормализует жирность.

Одним из востребованных на сегодня методов восстановления механических свойств кожи является вшивание в кожу лица, области декольте и кожи рук золотых нитей, которые поддерживают ткани, утратившие упругость в силу уменьшения и ухудшения качества коллагеновых и эластиновых волокон от гравитационного обвисания. Однако, этот метод имеет много побочных действий и недостаточно эффективен. Побочные действия метода связаны с его травматичностью, опасностью инфицирования и образования дефектов, вызванных выше названными причинами.

Нами был предложен комплекс косметических средств, содержащих несколько форм нанозолота, шунгит серебряный нано-композит и комплекс фито-экстрактов, улучшающих трофику кожи, а так же проникающих в лимфатическую систему с помощью специальной транспортной системы и нормализующих серотониновый обмен, который с возрастом нарушается из-за инволюции регулирующей его железы – эпифиза.

В комплекс входят 4 препарата: крем-маска, содержащая шунгит серебряный нано-композит и нанозолото в виде шариков диаметром 30 нанометров и растительные экстракты, гель, содержащий шунгит серебряный нано-композит и нанозолото в виде шариков диаметром 30 нанометров и растительные экстракты, листовое золото, толщиной 30-50 нанометров и лосьон, содержащий шунгит серебряный нано-композит и нанозолото в виде шариков диаметром 30 нанометров и растительные экстракты.

Частицы золота, проникают в кожу и становятся центрами фрактального синтеза новых коллагеновых и эластиновых волокон.

Были проведены исследования по изменению количества фибробластов и количество коллагена в коже, обработанной предложенным комплексом «Золотая маска».

Попытки применения нанозолота для противодействия старению и омоложения предпринимаются уже несколько тысячелетий. Известно, что первые образцы коллоидного (нано-) золота получали еще в древнем Египте.

Согласно дошедших до нас источников нанозолото входило в состав косметики Нефертити и Клеопатры. Известны случаи, когда придворные медики поили своих государей растворами коллоидного золота в качестве эликсира молодости. [1,2] В конце XX века были открыты новые физические, химические и биологические свойства наночастиц (частиц с размером 10^{-9}–10^{-6}м). Исследование этих частиц, в частности, показало высокий потенциал таких частиц, их комплексов и нанопокрытий в самых различных отраслях науки и техники, в том числе в медицине [3], фармакологии [4], биотехнологии [5] и косметологии [6]. На рынке появились косметические средства, включающие в себя различные наночастицы и нанокомпозиты, в том числе и содержащие нанозолото.

Однако, не смотря на массированную рекламу таких средств, научных доказательств положительного воздействия нанозолота на кожу и на организм в целом практически не было. Целью настоящего исследования является изучение комплекса препаратов «Золотая маска» из серии «Серебряная органза», производства фирмы ООО «Нано-лаб» разработанной совместно специалистами ИПРИМ РАН и ООО «Нано-лаб». Комплекс включает в себя крем-маску, гель, лосьон и листовое высокочистое золото с толщиной 30 нанометров. В состав крем-маски геля и лосьона входит нанозолото в виде сфер, диаметром 30 нанометров (рис.1), а также комплекс растительных препаратов [7], которые с помощью транспортной системы попадают в кровь и способствуют нормализации серотонинового обмена, нарушающегося в процессе старения из-за инволюции мозговой железы эпифиза, являющейся одним из основных регуляторов гормональной активности организма. Нарушение деятельности эпифиза, дисбаланс в процессах продукции его гормонов, в первую очередь мелатонина – один из важных механизмов гормонального старения. В свою очередь нанозолото является структурным элементом, который легко проникает в кожу с помощью транспортной системы и остаётся там, давая опору для фрактального синтеза новых волокон коллагена и эластина, которые производятся фибробластами кожи. Мы предположили, что нанозолото стимулирует активность фибробластов, улучшает синтез коллагена, что повышает механическую упругость кожи. Проверке данных предположений посвящено настоящее исследование.

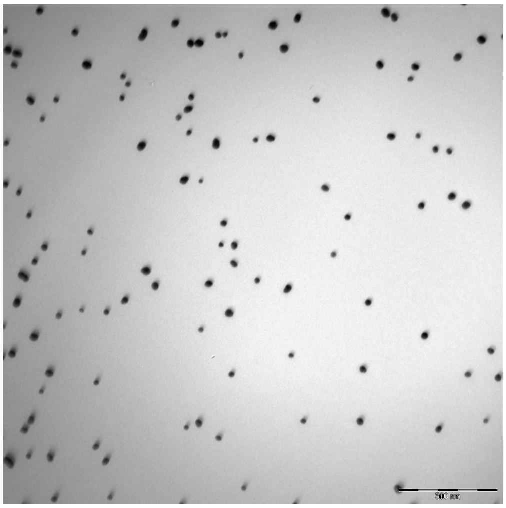


Рис.1. Частицы нанозолота, применяющиеся в комплекте препаратов «Золотая маска». Эмиссионная электронная микроскопия, увеличение x50000.

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Нанозолото получали путем восстановления 0,1% раствора HAuCl4 двумя граммами на литр дистиллированной воды. 1000 мл дистиллированной воды нагревали до кипения, затем добавляли два грамма цитрата натрия. Затем добавляли X мл раствора HAuCl4 (где X=5,10,15,20,25,30,35,40) при перемешивании. Цвет смеси менялся от бесцветного до темно-синего красного и бордового. После этого нагревание прекращали и получали нанозолото с размером частиц (5,10,15,20,25,30,35,40) [8]. В дальнейшем использовали нанозолото красноватого оттенка с размером частиц 30 нанометров (Рис. 1). Золото смешивали с косметическими ингредиентами и использовали по следующей методике. На коже мышей сбривали волосы, обрабатывали кожу крем-маской на 20 минут, затем крем-маску удаляли, кожу обрабатывали гелем, а через минуту покрывали листовым золотом. Затем покрытую золотом поверхность опрыскивали лосьоном и втирали листовое золото в кожу пальцами в резиновых перчатках. Процедуру повторяли 1 раз в неделю(что примерно соответствует 1 разу в месяц для человека). Через месяц кожу препарировали, фиксировали в 4% формалине и проводили гистологическую обработку, как описано ранее [9]. Для подсчета фибробластов 4-ех мкм срезы окрашивали гематоксилин-эозином, а для окрашивания коллагена использовали окраску Ван Гизон [10].

Для изучения эффективности воздействия комплекта «Золотая маска» на кожу в процессе старения пожилым мышам линии Balb/c в возрасте 1 год, что соответствует 40-45 годам возраста человека, обрабатывали участки кожи комплектом «Золотая маска» (ООО «Нано-лаб») Россия. Обработку проводили один раз в неделю, как описано в «материалах и методах». Такая частота обработки соответствует примерно 1 разу в месяц для человека.

Схема обработки следующая:

- обработка крем-маской в течение 20 минут;
- удаление остатков крем-маски сухой салфеткой и нанесение геля;
- через минуту на обработанные участки накладывали листовое золото толщиной 30 нанометров;
- опрыскивали покрытую золотом поверхность лосьоном;
- втирали золото в кожу круговыми движениями пальцами в резиновой перчатке.

Не впитавшееся золото удаляли сухой салфеткой.

Было исследовано две группы мышей, опытная и контрольная, по 10 мышей в каждой. Кожу опытной группы обрабатывали, как описано выше. Кожу контрольной группы обрабатывали аналогично, но в качестве препарата сравнения использовали гели и кремы, содержащие аналогичную основу, а действующие ингредиенты были заменены на физраствор. Через 4 недели осуществляли забор кожи подопытных животных, готовили гистологические препараты и окрашивали их как указано в «материалах и методах». Количество фибробластов в каждом образце подсчитывали в 5 полях зрения, затем данные усреднялись и использовались для дальнейших расчетов. Результаты сравнения количества фибробластов в коже годовалых мышей после обработки комплектом «Золотая маска», в состав которого входит крем-маска, содержащая нанозолото с размером частиц 30 нанометров, гель, содержащий нанозолото с размером частиц 30 нанометров и чешуйки пищевого золота, лосьон, содержащий нанозолото с размером частиц 30 нанометров и листовое высокоочищенное золото толщиной 30-100 нанометров, представлены на рис.2. Из рисунка видно, что количество фибробластов в коже, обработанной комплектом «Золотая маска» статистически достоверно больше, чем в коже, обработанной контрольными препаратами. Это свидетельствует о положительном эффекте введения нанозолота в кожу при помощи комплекта «Золотая маска».

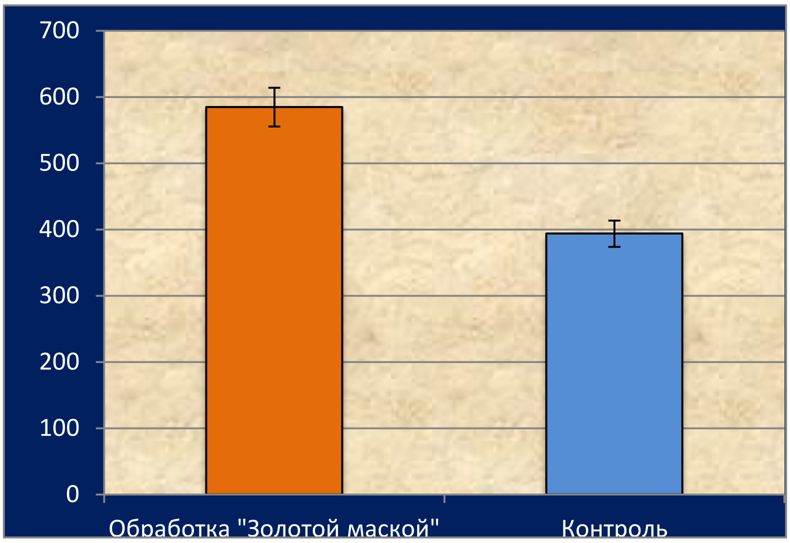
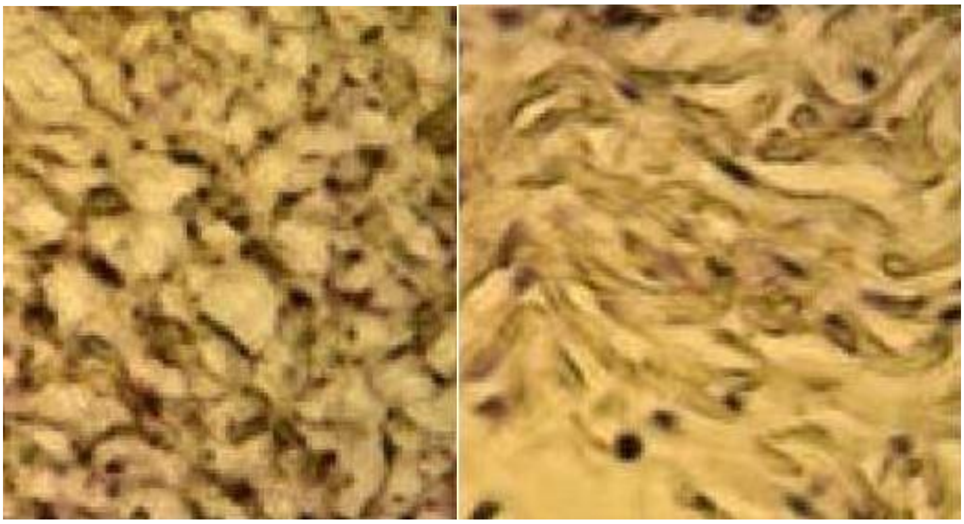


Рис.2. Количество фибробластов в 1 мм^2 кожи.

Фибробласты – клетки, ответственные в коже за формирование коллагеновых и эластиновых нитей, количество и качество которых определяет механические свойства кожи, в первую очередь эластичность и упругость (рис.3).



а б

Рис.3. Фибробласты в препаратах кожи мышей, обработанной комплексом «Золотая маска», содержащей два вида наноразмерного золота. а) Кожа после регулярной обработки в течение месяца. б) Контрольная кожа. Увеличение х400.

Для оценки изменения количества коллагена в коже под воздействием комплекта «Золотая маска» препараты кожи окрашивали по методу Ван Гизона [10].

Приготовление красящего состава:

Смешали 100 мл насыщенного водного раствора пикриновой кислоты и 5 мл 1%-ного раствора кислого фуксина.

Удаляли парафин из срезов в ксилоле и проводили срезы через спирты нисходящей крепости: орто-ксилол – 2 порции по 3-5 минут, 96 % этанол – 3 мин, 90 % этанол – 3 мин, 80 % этанол – 3 мин).

Окрашивали железным гематоксилином Вейгерта в течение 3-15 минут.

Промывали в проточной воде в течение нескольких минут.

Промывали дистиллированной водой.

Окрашивали красителем ван Гизона в течение 5 минут.

Быстро промывали в дистиллированной воде (5-15 с).

Быстро промывали в двух порциях 96 % этанола, одной порции абсолютного этанола (или карбол-ксилола), осветляли в двух порциях орто-ксилола. Время пребывания срезов в каждой порции 1-2 мин.

Препараты закрепляли нейтральным бальзамом.

В результате окраски ядра клеток приобретают чёрный цвет, коллаген – красный, другие тканевые элементы (включая мышечные волокна и эритроциты) – желтые, фибрин – жёлтый или оранжевый.

Препараты фотографировали, участки коллагена подвергали морфометрии, оптическую плотность участков коллагена усредняли и сравнивали показатели кожи обработанной комплектом «Золотая маска» и контрольной. Результаты морфометрической оценки наличия коллагена в коже, обработанной комплектом «Золотая маска» представлена на рис.4.

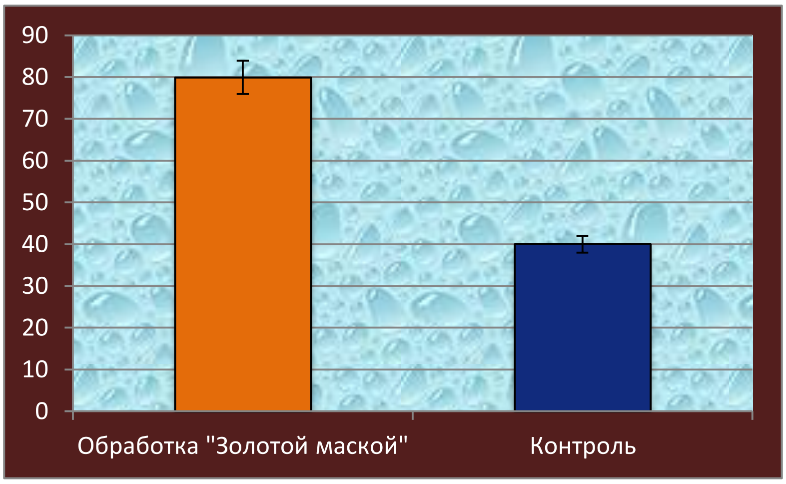
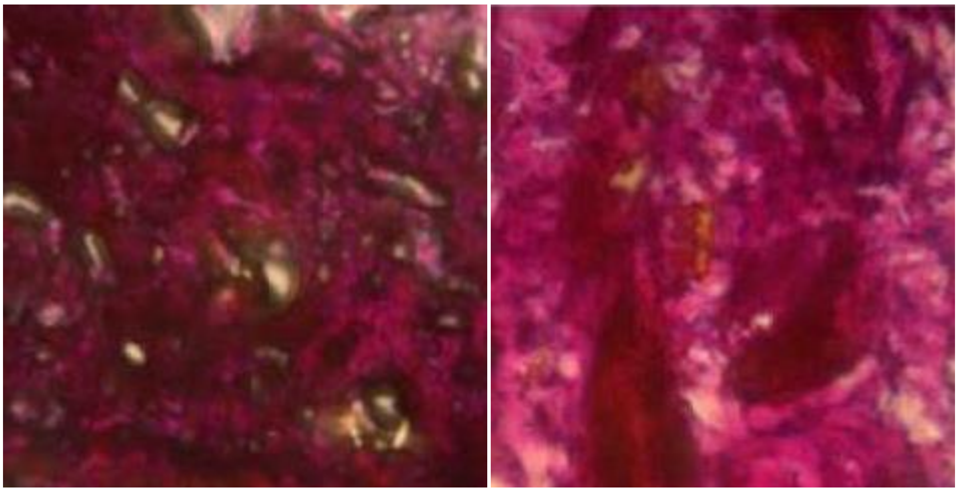


Рис.4. Сравнение результатов морфометрической оценки наличия коллагена в коже мышей линии Balb/c обработанных и не обработанных комплектом «Золотая маска».

Из рисунка видно, что концентрация коллагена в коже годовалых мышей увеличивается практически вдвое под действием комплекта «Золотая маска», причем увеличение статистически достоверно. Увеличение синтеза коллагена у пожилых мышей – один из важнейших показателей антиэйджингового эффекта (рис.5.). Снижение количества коллагеновых волокон, а также их качества – один из важнейших механизмов старения кожи.



а б

Рис.5. Окраска препаратов кожи мышей, обработанных комплексом «Золотая маска» по Ван Гизону, содержащей два вида наноразмерного золота. а) Кожа после регулярной обработки в течении месяца. б) Контрольная кожа. Увеличение x400.

Оно вызывает снижение упругости кожи, визуализируется морщинами, способствует ухудшению обменных процессов в коже, что ведет к ухудшению её функций и имеет негативный физиологический и косметический эффект.

У исследованных животных не обнаружено негативных последствий применения золотых нано частиц, как на кожу, так и на организм в целом. Биобезопасность золотых наночастиц продемонстрирована как в литературе [11], так и в наших предварительных работах [12].

Исходя из этого комплект «Золотая маска» был сертифицирован. Проведенные токсикологические исследования подтвердили биобезопасность всех компонентов комплекта «Золотая маска».

Нами было исследовано воздействие комплекса препаратов «Золотая маска» на кожу человека.

Исследование проводили с помощью тестера «Nizar laboratory», позволяющего оценивать упругость и жирность кожи. Изучали изменение упругости кожи рук после однократной обработки комплектом «Золотая маска». Упругость измеряли в условных единицах, нулевое значение – усредненное значение упругости кожи у доноров. Результаты исследования приведены на рис.6. Из рисунка видно, что у пожилых мужчин и женщин показатели упругости кожи значительно повышаются после обработки комплектом «Золотая маска». В дальнейшем показатели снижались, но не до базовых значений, а до более высоких. При регулярном повторении процедуры показатели упругости кожи нормализовались и не возвращались к низким значениям, бывшим до начала терапии

Также исследовали жирность кожи у пациентов пожилого возраста под воздействием комплекта «Золотая маска». Результаты приведены на рис.7. Из рисунка видно, что сухая, в большинстве случаев, кожа, становилась более жирной. Затем жирность кожи снижалась, приближаясь к нормально цифре 0-2. При регулярном применении комплекта жирность кожи нормализовалась.

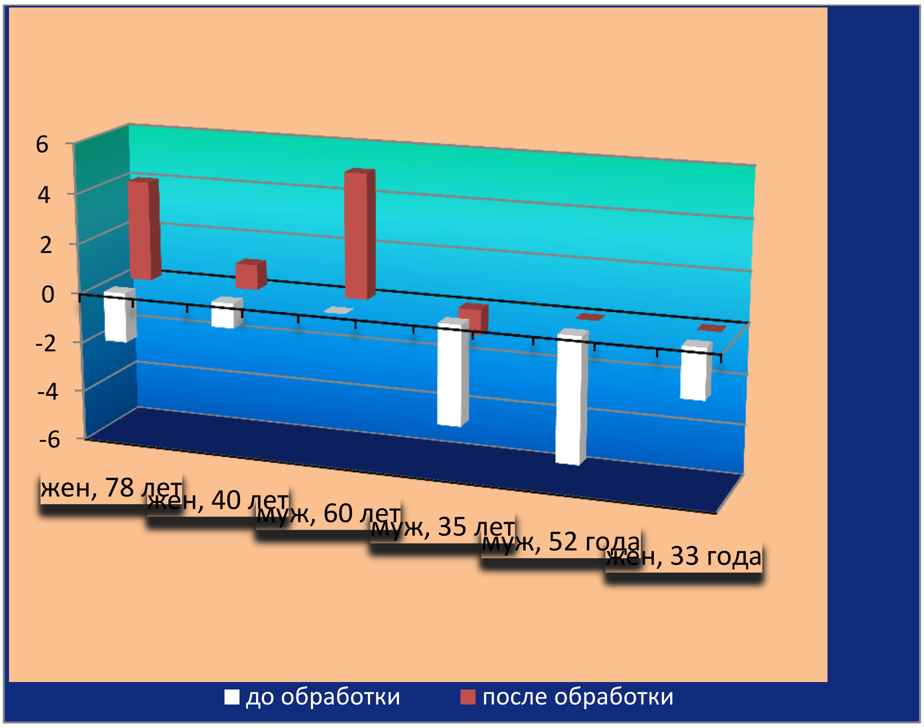


Рис.6. Изменение упругости кожи рук после однократной обработки комплексом препаратов "Золотая маска".

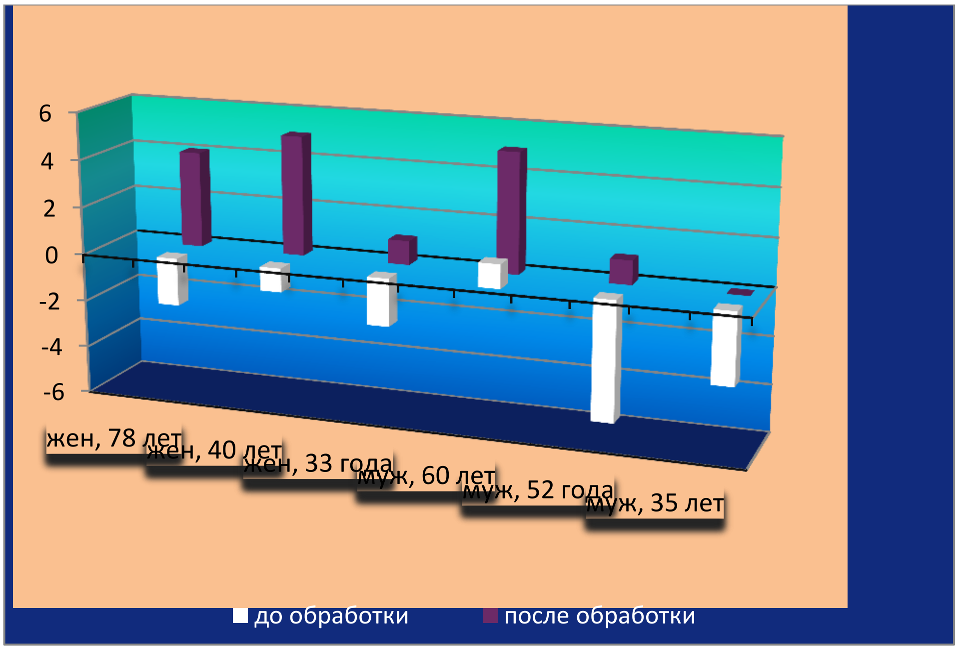


Рис.7. Изменение жирности кожи рук после однократной обработки комплексом препаратов "Золотая маска".

Таким образом, нормализация параметров кожи под действием комплекта «Золотая маска» показана как на клеточном, так и на организменном уровне на модельных организмах (мыши линии Balb/c) и на человеке. Линия, несомненно, обладает мощным антиэйджинговым эффектом, как в силу наличия в ней нанозолота, так и компонентов нормализации серотонинового обмена.

Многие звезды мирового и отечественного шоу-бизнеса используют те или иные виды золотых наномасок. Процесс нанесения маски следующий: сначала наносится маска, содержащая сферическое нанозолото, затем через двадцать минут ее остатки удаляют, и наносят гель, содержащий сферическое нанозолото. Затем на покрытую гелем кожу наносят листовое пищевое золото, толщиной 30-60 нанометров, орошают лосьоном, содержащим транспортную систему и сферические наночастицы золота диаметром 30 нанометров. Рукой в резиновой перчатке листовое золото втирают в кожу (рис.8).

Рис.8 Процесс нанесения золотой маски.

Однако далеко не все золотые маски, присутствующие на рынке, эффективны. Само нанозолото, без специальной транспортной системы, через кожу не проникает или задерживается в эпидермисе, откуда слущивается без терапевтического эффекта. Предложенный выше комплекс, входящий в косметические линии «Серебрянная органза», «Золотая органза» и «Алмазная органза» – практически единственный, эффективность которого доказана на экспериментальных моделях, в том числе и на клеточном уровне. Кроме того, данная система – единственная, способствующая нормализации серотонинового обмена, то есть противодействует последствиям такого важного для старения процесса, как инволюция эпифиза. Инволюция эпифиза и связанное с ней нарушение серотонинового обмена – один из важных механизмов старения. Таким образом было продемонстрировано, что комплекс нанокосметики «Золотая маска» на основе наноразмерного золота и шунгит-серебряного нанокомпозита улучшает производство фибрина, коллагена и увеличивает количество фибробластов в коже. Кроме того было продемонстрировано увеличение упругости кожи под действием препаратов, содержащих сферические наночастицы золота размером тридцать нанометров и золотых агломератов, образующихся при втирании в кожу листового золота с толщиной 30-60 нанометров. Метод не уступает по эффективности вшиванию золотых нитей, но превосходит его по безопасности, так как является не инвазивным. Кроме того предложенный комплекс значительно экономичнее операций по вшиванию золотых нитей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зарайский Е.И.* Нанобиотехнология / Глава в книге «Проблемы современной нанобиотехнологии». – М.:Дрофа, 2010. - С.107-139.
2. *Zaraisky E.I.* Nanogold in nanobiotechnology / Intern. J. of Nanobiotechnology and Pharmacy. – 2013. – P.2-12.
3. *Nagender Reddy Panyala, Eladia María Peña-Méndez, Josef Havel* Gold and nanogold in medicine: overview, toxicology and perspectives" / J. of Applied Biomedicine. – 2009. – Vol.7. – P.75-91.
4. *Baljit Singh, Nasir Hussain, Thiagarajan Sakthivel, Alexander T. Florence* Effect of physiological media on the stability of surface-adsorbed DNA-dendron-gold nanoparticles" / J. of Pharmacy and Pharmacology. – 2003. – Vol.55. – Iss.12. – P.1635-1640.
5. *Petrunin D., Foux B., Boltovskaya M., Nazimova S., Starosvetskaya N., Konstantinov A., Marshiskaia M., Zaraisky E.* Devices and methods for detecting amniotic fluid in vaginal secretions / US 7709272 B2, 2010.
6. *Chiau-Yuang Tsai, Ai-Li Shiau, Shih-Yao Chen, Yu-Hung Chen, Pai-Chiao Cheng, Meng-Ya Chang, Dong-Hwang Chen, Chen-Hsi Chou, Chrong-Reen Wang, Chao-Liang Wu* Amelioration of collagen-induced arthritis in rats by nanogold // Arthritis & Rheumatism. – 2007. – Vol.56. – Iss.2. – P.544-554.
7. *Огудина Г.Н., Романов А.И., Будаков Д.Ю., Артюхин А.А, Зарайский Е.И.* Вечерний крем с омолаживающим эффектом / Патент РФ №2210353, 2003.
8. *Taufikurohmah T., Sanjaya I.G.M., Syahrani A.* Nanogold synthesis using matrix mono glyceryl stearate as antiaging compounds in modern cosmetics / J. of Materials Science and Engineering. – 2011. A1. – P.857-864.
9. *Titik Taufikurohmah, Dwi Winarni, Afaf Baktir, I Gusti Made Sanjaya, Achmad Syahrani* Histology Study: Pre-Clinic Test of Nanogold in Mus MuscuIus Skin, at Fibroblast Proliferation and Collagen Biosynthesis // Chemistry and Materials Research. – 2013. – Vol.3. – N5.
10. *Jocelyn H. Bruce-Gregorios* Histopathologic Techniques. – Quezon City, Philippines: JMC Press Inc., 1974.
11. *David Y. Lai* Toward toxicity testing of nanomaterials in the 21st century: a paradigm for moving forward / Wiley Interdisciplinary Reviews: Nanomedicine and Nanobiotechnology. – 2012. – Vol.4. – Iss.1. – P.1-15.
12. *Suslov O., Poltavtsev A., Poltavtseva R.A., Zaraisky E.I.* Development of test-system LD-50 for diagnostics of toxicity nano-objects // Intern. J. of Nanobiotechnology and Pharmacy. – 2013. – P.45-63.

ЭКСПРЕСС МЕТОДЫ ОЦЕНКИ НЕЙРОТОКСИЧНОСТИ НАНОЧАСТИЦ И НАНОКОМПОЗИТОВ

Осьмак Г.Ж.[1], Полтавцев Ал. М.[2], Зарайский Е.И.[2]

[1]*Российский национальный исследовательский медицинский университет им.Н.И.Пирогова, г. Москва, Россия*
[2]*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

РЕЗЮМЕ

В свете возросшего интереса к наночастицам и нанокомпозитам, а также роста случаев их применения в различных сферах, касающихся человека (косметология, бытовая химия и пр.), возникает потребность в исследовании их биобезопасности, для предупреждения вреда, который может быть потенциально нанесен в результате таких действий. В данном исследовании предлагаются методы экспресс оценки биобезопасности, а в частности нейротоксичности наночастиц и нанокомпозитов на крысиной и мышиной модели. Проведена оценка нейротоксичности шунгит-серебряного нанокомпозита и показано отсутствие последней у данного соединения.

С начала XXI века интерес человечества к наночастицам многократно возрос, а к концу 2010 года вещества на основе наночастиц и нанокомпозитов начали активно внедрятся в медицинскую практику [6,7], в том числе и для решения проблем, касающихся эстетической медицины. Таким образом препараты на основе наночастиц и нанокомпозитов на данный момент активно применяются в быту, косметологии, а также медицине, и количество применяемых наносоединений прогрессивно растет.В этой связи, появляется необходимость в разработке методов экспресс диагностики биобезопасности, в частности нейротоксичности, наночастиц и нанокомпозитов.

Для решения подобных задач нами предложен комплекс тестов для постановки биологических проб, для оценки нейротоксичности препаратов на основе наночастиц и нанокомпозитов и проведено исследование нейротоксичности шунгит-серебряного нанокомпозита (ШСН).

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В исследовании были использованы крысы (n=30) – самцы, породной группы Wistar, массой 200-250 гр., с рождения содержащиеся в одинаковых условиях. Мыши (n=66) самцы аутбредной линии CD-I, массой 20-25гр., с рождения содержащиеся в одинаковых условиях.

Для оценки деятельности лимбической системы, отвечающей за эмоционально-поведенческую активность, использовался модифицированный вариант теста «открытое поле» [1,3]. Установка представляет собой квадратную площадку с 12-ю камерами общей площадью 4800см^2, камеры ограниченны непрозрачными бортами высотой 10 см, с постоянным сумеречным освещением, длина стороны каждой камеры 20 см. На фронтальных и боковых стенках установлены источники плоско-поляризованного монохроматического света с фотокатодами на противоположенной стенке соответственно. Продолжительность опыта для группы мышей составляет 20 минут. Пересечение луча лазеров автоматически фиксировалось на электронном счетчике, регистрирующем ряд элементарных двигательных актов, совокупность которых характеризует целостное поведение в «открытом поле» [1]. На данной установке тестировались мыши опытной группы (n=12), которым перорально вводился раствор ШСН в воде для инъекций в дозе 5мкг/г, контрольной группы (n=12), которым перорально вводилась вода для инъекций в том же объеме и позитивной контрольной группы (n=12), которым перорально вводился препарат «Регулат» в дозе рекомендуемой производителем.

Для оценки деятельности пирамидной, экстрапирамидной системы и мозжечка, использовался модифицированный вариант теста «beam walking (сужающаяся дорожка)» [3]. Модификация классической модели заключается в том, что в тесте используется аппаратный комплекс из десяти дорожек с видео фиксацией, что позволяет сократить время затрачиваемое на проведение эксперимента в 10 раз, соответственно. Результаты тестирование на данной установке подсчитывали по формуле:

$$К=\frac{N(промах)+\frac{1}{2}N(скольз.)}{\sum N};$$

где: N(промах) – кол-во случаев не попадания задней конечности на верхнюю планку сужающейся дорожки. N(скольз.) – кол-во случаев соскальзывания задней конечности с верхней планки сужающейся дорожки на нижнюю планку. $\sum N$ – суммарное кол-во шагов. К – коэффициент прохождения дорожки, принимающий значения от 0 до 1, где 0 – респондент с нормально функционирующей пирамидной, экстрапирамидной системой и мозжечком, 1 – респондент с параличом или парезом.

В модифицированном тесте «сужающаяся дорожка» тестировались крысы опытной группы (n=10), которым перорально вводился раствор ШСН в воде для инъекций в дозе 5мкг/г, и контрольной группы (n=10), которым перорально вводилась вода для инъекций в том же объеме и позитивной контрольной группы (n=10), которым перорально вводился препарат «Регулат» в дозе рекомендуемой производителем.

Для оценки адаптационного потенциала – использовался тест «вынужденного плавания»[1,3-5], который представляет собой модификацию теста «поведение отчаяния» Порлсонта [2]. Кратко, мышь с фиксированным грузом (7,5% от массы крысы, на 10см. нитке привязанной к основанию хвоста) погружается в цилиндр с водой (высота столба воды = 22см.) и плавает до утомления (погружение мыши под воду). Эксперимент фиксируется при помощи видеокамеры, далее считается время плавания до погружения под воду, до касания дна грузом. По продолжительности времени активного плавания делали вывод об уровне тонуса нервной системы и адаптационного потенциала респондента. На данной установке тестировались мыши опытной группы (n=10), которым перорально вводился раствор ШСН в воде для инъекций в дозе 5мкг/г, и контрольной группы (n=10), которым перорально вводилась вода для инъекций в том же объеме и позитивной контрольной группы (n=12), которым перорально вводился препарат «Регулат» в дозе рекомендуемой производителем.

Статистическая обработка проводилась при помощи программного обеспечения IBM SPSS Statistics 20for MacOS X. Парное сравнение между контрольными и опытными группами проводили при помощи непараметрического двухстороннего U-критерия Манна-Уитни-Уилкоксона для парных выборок, при уровне статистической значимости $p<0,05$.

При помощи установок описанных в «материалах и методах» была исследована нейротоксичность ШСН на мышиной и крысиной модели, как описано в «материалах и методах». Из рис.1 видно, что статистически значимые различия отсутствуют между опытной и контрольной группой, и наблюдаются как между опытной группой и группой позитивного контроля, так и между группой позитивного контроля и контроля. Из чего следует отсутствие какого-либо влияние ШСН на эмоционально-поведенческую активность, в свою очередь зависящую от функционального состояния лимбической системы.

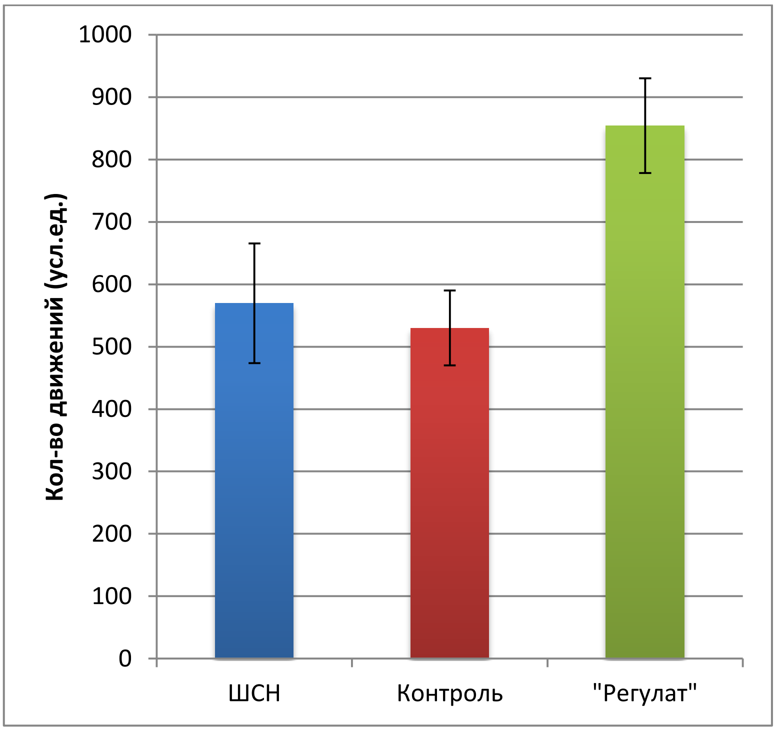


Рис.1. Зависимость суммарного количества элементарных движений респондентов в тесте «открытого поля» от типа вводимого препарата. Диаграмма характеризует функциональное состояние лимбической системы респондентов.

Из рис.2 видно, что статистически значимые различия отсутствуют между опытной и контрольной группой, и наблюдаются как между опытной группой и группой позитивного контроля, так и между группой позитивного контроля и контроля. Из чего следует отсутствие какого-либо влияние ШСН на адаптационный потенциал респондентов, в свою очередь зависящий от общего состояния нервной системы.

Из рис.3 видно, что статистически значимые различия между группами отсутствуют.

Таким образом, было показано отсутствие статистически значимых различий между группами, которой вводили ШСН и контрольной группой, которой вводили воду для инъекций, из чего можно сделать вывод об отсутствии какого-либо влияние ШСН на центральную и периферическую нервную систему на крысиной и мышиной модели оценки нейротоксичности.

Также были разработаны экспресс-методы оценки нейротоксичности наночастиц и нанокомпозитов. По данным методам подано два патента.

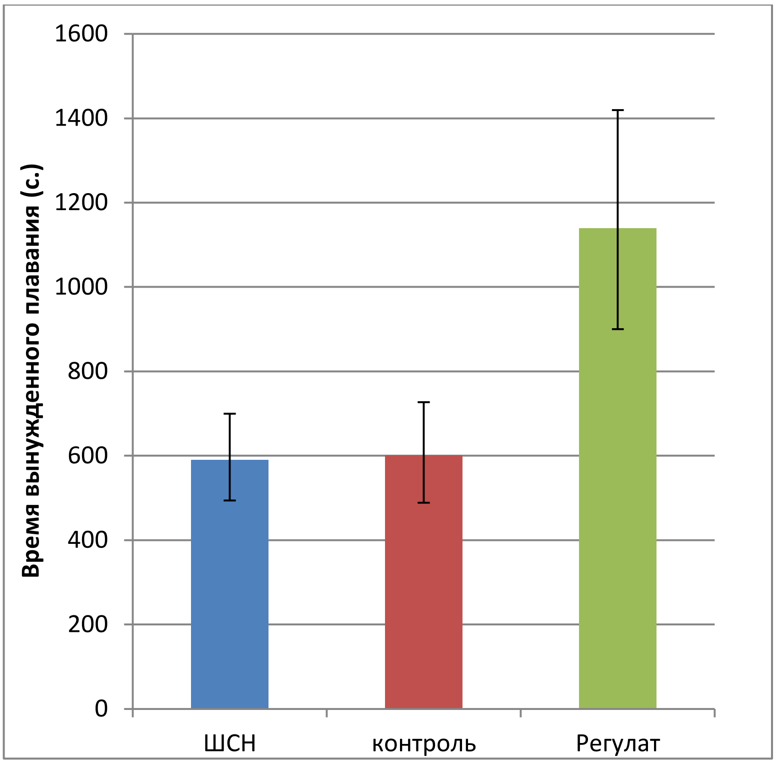


Рис.2. Зависимость продолжительности вынужденного плавания респондентов от типа вводимого препарата. Диаграмма характеризует адаптационный потенциал респондента и общее состояние нервной системы.

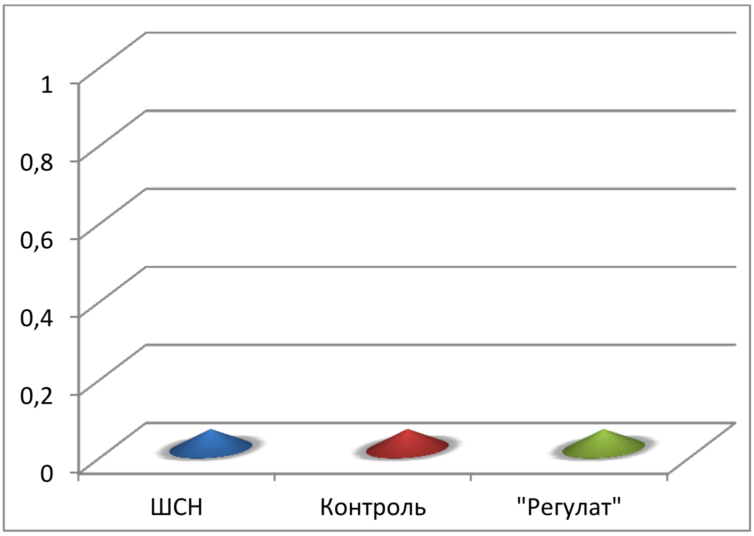


Рис.3. Зависимость коэффициента прохождения дорожки (К) в тесте «сужающаяся дорожка» от типа вводимого препарата. Диаграмма характеризует функциональное состояние пирамидной, экстрапирамидной системы и мозжечка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Osmak G.J., Poltavtsev A., Zaraisky E.I.* Research of the impact of the products tepfermentation off ruitmixture on physical activity // IJNF. P.36-45.

2. *Porsolt R.D., Anton G., Blavet N. et al.* Behavioral despair in rats: a new model sensitive to antidepressant treatment // Eur. J. Pharmacol. – 1978. – Vol.47. – P.379-391.
3. Руководство по экспериментальному (доклиническому) изучению новых фармакологических веществ. – М., 2000.
4. *Русаков Д.Ю., Вальдман А.В.* Применение плавательного теста для выявления антидепрессивной активности при однократном и хроническом введении веществ // Фармакол. и токсикол. – 1983. – №5. – С.107-112.
5. *Андреева Н.И., Глушков Р.Г., Горкин В.З. и др.* Антидепрессант инказан. 1. Специфическая антидепрессивная активность // Хим. фарм. журн. – 1988. – Т.22. – №2. – С.133-143.
6. *Lages E.B., de Freitas M.B., Gonçalves I.M., Alves R.J., Vianna-Soares C.D., Ferreira L.A., de Oliveira M.C., de Oliveira R.B.* Evaluation of antitumor activity and development of solid lipid nanoparticles of metronidazole analogue // J Biomed Nanotechnol. – 2013. – Iss.9(11). – P.1939-1944.
7. *Chaitanya Kumar T.V., Muralidhar Y., Prasad P.E., Prasad T.N., Alpha Raj M.* Evaluation of therapeutic potential of nanosilver particles synthesised using aloin in experimental murine mastitis model // IET Nanobiotechnol. – 2013. – Iss.7(3). – P.78-82 (doi: 10.1049/iet-nbt.2012.0045).

НАНОПРЕПАРАТЫ И МИКРОФЛОРА КИШЕЧНИКА

Паршиков И.А., Полтавцев Ал.М., Осьмак Г.Ж., Зарайский Е.И.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

В последнее время в лечебную практику входит применение нового поколения лекарств – нанопрепаратов. Нанолекарства могут быть использованы внутривенно и перорально. Результат перорального применения многих из них – отрицательное влияние на микрофлору кишечника и особенно у пожилых людей.

С возрастом человека происходят изменения видового состава бактерий в кишечнике. Многочисленные исследования показали, что с возрастом происходит снижение числа жизнеспособных бактерий из рода Bacteroides. Увеличение протеолитических бактерий, таких как фузобактерии, пропионибактерии и клостридии, в кишечнике пожилых людей, может указывать на тенденцию к путрефакции толстой кишки, главным образом у пациентов, подвергшихся антибактериальной терапии. Исследования показали, что у пожилых пациентов происходит увеличение клостридий в сочетании со значительным повышением видового разнообразия, особенно после антибиотикотерапии.

1. ВВЕДЕНИЕ

С возрастом человека происходят изменения видового состава бактерий в кишечнике [1-4]. Среднее общее количество анаэробов в фекальных материалах пожилых людей остается относительно стабильным, однако, часто наблюдаются изменения в процентном соотношении бактерий различных родов.

Многочисленные исследования показали, что с возрастом происходит снижение числа жизнеспособных бактерий из рода Bacteroides. Это явление неслучайно и объяснимо приемом большого количества антибиотиков в течение жизни. Изменения в составе важных субпопуляций бактерий на уровне видов могут быть оценены, как следствие изменения метаболической активности у пожилых людей [5,6].

Увеличение протеолитических бактерий, таких как фузобактерии, пропионибактерии и клостридии, в кишечнике пожилых людей, может указывать на тенденцию к путрефакции толстой кишки, главным образом у пациентов, подвергшихся антибактериальной терапии. Род Clostridium включает гетерогенную группу микроорганизмов с весьма разнообразными типами питания и требованиями к местам обитания.

Ранее было замечено снижение процента клостридиев в кишечнике у молодых и пожилых пациентов в результате использования ципрофлоксацина. Однако, многие исследования показали, что у пожилых пациентов происходит увеличение клостридий в сочетании со значительным повышением видового разнообразия, особенно после антибиотикотерапии [7].

В последнее время в лечебную практику входит применение нового поколения лекарств – нанолекарств. Нанолекарства могут быть использованы внутривенно и перорально. Пероральное применение имеет свои преимущества по сравнению с внутривенным введением. Однако, результат перорального применения – отрицательное влияние на микрофлору кишечника и особенно у пожилых людей.

2. ВОЗРАСТНЫЕ ФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ ИЗМЕНЕНИЯ В ЖЕЛУДОЧНО-КИШЕЧНОМ ТРАКТЕ ЧЕЛОВЕКА

Для нормальной деятельности желудочно-кишечного тракта необходимо полноценное питание. Жевательная дисфункция, вызванная потерей зубов и затруднением глотания, приводит к употреблению питательно несбалансированной пищи. В результате гипохлоргидрии в желудке происходит уменьшение всасывания кальция. Кроме того, снижение кишечной моторики вызывает фекальное сдавление и запоры. Увеличение времени удерживания фекальных масс вызывает увеличение концентации бактериальных ферментов и, следовательно, повышение уровня аммиака и фенолов генерируемых в гнилостными процессами в кишечнике. Изменения в работе ЖКТ влияют на состав микрофлоры в толстом кишечнике и тем самым вызывают изменения в составе популяции кишечных бактерий. Кишечная микрофлора имеет важное значение для поддержания здоровья организма.

Недостаточные исследования возрастных изменений состава микрофлоры кишечника затрудняют четкое понимание влияния этих изменений на микробную популяцию, что замедляет выработку возможных терапевтических стратегий, которые смогли бы свести к минимуму или исключить такие изменения [8-10].

3. ВОЗРАСТНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ МИКРОФЛОРЫ КИШЕЧНИКА

С возрастом человека происходят изменения видового состава бактерий в кишечнике. Среднее общее количество анаэробов в фекальных материалах пожилых людей остается относительно стабильным, однако, часто наблюдаются изменения в процентном соотношении бактерий различных родов.

Многочисленные исследования показали, что с возрастом происходит снижение числа жизнеспособных бактерий из рода Bacteroides. Это явление неслучайно и объяснимо приемом большого количества антибиотиков в течение жизни. Изменения в составе важных субпопуляций бактерий на уровне видов могут быть оценены, как следствие изменения метаболической активности у пожилых людей.Увеличение протеолитических бактерий, таких как фузобактерии, пропионибактерии и клостридии, в кишечнике пожилых людей, может указывать на тенденцию к путрефакции толстой кишки, главным образом у пациентов, подвергшихся антибактериальной терапии. Род Clostridium включает гетерогенную группу микроорганизмов (рис.1.) с весьма разнообразными типами питания и требованиями к местам обитания. Ранее было замечено снижение процента клостридиев в кишечнике у молодых и пожилых пациентов в результате использования ципрофлоксацина. Однако, многие исследования показали, что у пожилых пациентов происходит увеличение клостридий в сочетании со значительным повышением видового разнообразия, особенно после антибиотикотерапии.

Эубактерии имеют сложные потребности в питании, и некоторые представители этого рода филогенетически связаны с клостридиями. Наблюдалось их увеличение у пожилых волонтеров. Увеличение эубактерий может иметь последствия для здоровья человека в связи с возможным увеличением потенциально вредных метаболитов в кишечнике в результате различных микробных трансформаций органических веществ. Кроме того, инокулированный внутрибрюшинно материал из клеток Eubacterium aerofaciens вызывал артрит у крыс. Если это может происходить в естественных условиях, то эти бактерии могут способствовать увеличению количества артритов у пожилых людей [11-13].

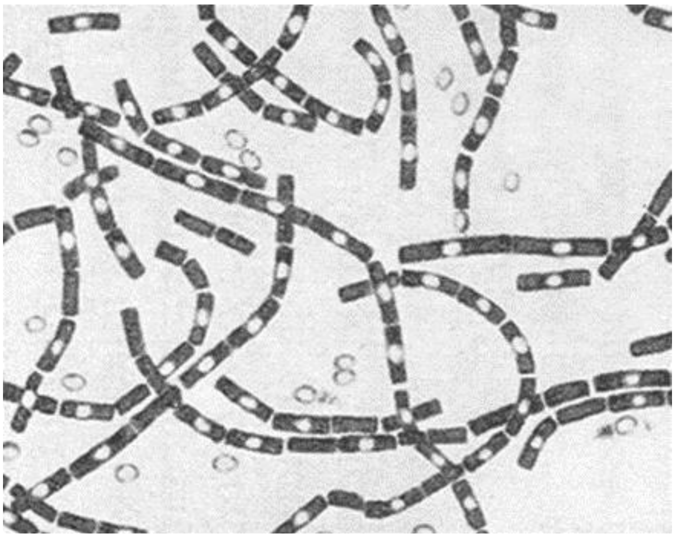


Рис.1. Бактерии из рода Clostridium.

В публикациях различных авторов сообщается о росте числа и видового разнообразия молочнокислых бактерий с увеличением возраста человека и антибиотикотерапии. Способность лактобацилл выживать после лечения антибиотиками подтверждает их ценность в качестве пробиотиков, особенно против антибиотик-ассоциированной диареи.

С другой стороны, присутствие многочисленных плазмид, транспозонов и вставок последовательностей у различных лактобацилл может потенциально обеспечивать механизмы для распространения генов устойчивости к антибиотикам в кишечной экосистеме.

Бифидобактерии относятся к числу важных и полезных видов толстого кишечника. Снижение количества бифидобактерий является одним из наиболее значительных изменений в кишечнике, в пожилом возрасте. Такое снижение может привести к снижению иммунной реакции в кишечнике, и к повышенной восприимчивости к желудочно-кишечным инфекциям.

Было доказано, что при старении кишечника происходит заметный рост факультативных анаэробов, особенно после лечения антибиотиками. Некоторые исследования показали, что множество энтеробактерий, стрептококков, стафилококков и дрожжей были найдены в группе здоровых пожилых людей. Энтерококки, которые ранее не были выделены не из одного здорового пожилого человека, были найдены в больших количествах у доноров обработанных антибиотиками. Изучение проблемы сокращения числа и видового разнообразия многих полезных аэробов, таких как бактероиды и бифидобактерии поможет установить причины нарушения функциональности микрофлоры у некоторых пожилых людей [14-15].

4. НАНОЛЕКАРСТВА И ПРОБИОТИКИ

В последнее время в лечебную практику входит применение нового поколения лекрств – нанолекарств. Нанолекарства могут быть использованы внутривенно и перорально (рис.2). Пероральное применение имеет свои преимущества по сравнению с внутривенным введением. Однако, результат перорального применения – отрицательное влияние на микрофлору кишечника и особенно у пожилых людей.

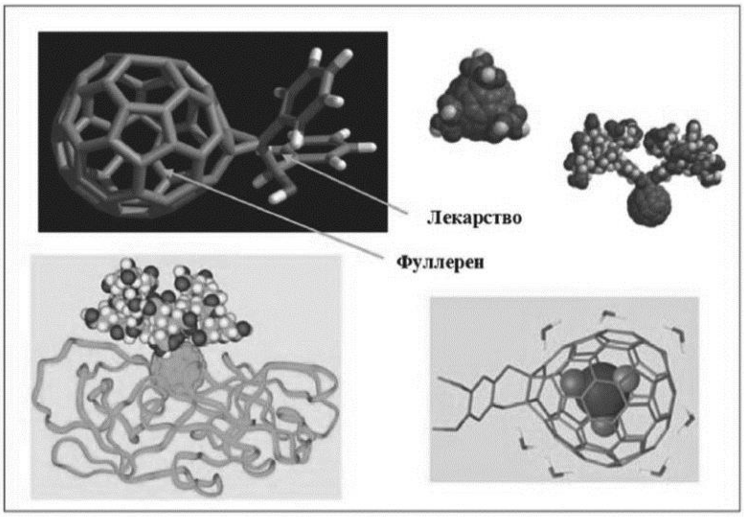


Рис.2. Структура модифицированных фуллеренов.

Исследование состава микрофлоры толстого кишечника, а также понимание того, как увеличивается процент пожилых людей в развитых странах открывает новые возможности для терапии с применением полезных бактерий или пробиотиков.

Первое введение в пробиотическую концепцию было сделано Мечниковым в начале 1900-х, который считал, что молочнокислые бактерии способствуют улучшению здоровья и долголетию. Он предположил, что «кишечная ауто-интоксикация» и возникающие вследствие нее вещества могут быть нейтрализованы с помощью модификации состава кишечных бактерий и замены протеолитических микробов, таких как клостридиум на полезные микроорганизмы. Мечников разработал диету на основе кисломолочных продутов полученных после ферментации молока бактерией, которую он назвал «Болгарской палочкой».

В настоящее время, пробиотики могут быть описаны как живые микробные пищевые добавки, которые изменяют видовой состав и метаболическую активность микрофлоры кишечника, и повышают иммунитет организма [16].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении можно сказать, что в составе кишечной микрофлоры людей, с возрастом происходит снижение численности и видового разнообразия многих полезных микроорганизмов. Эти изменения в популяции кишечных бактерий, в питании и физиологии пищеварения, например, времени транзита по кишечнику, могут привести к увеличению путрефакции в толстой кишке, и большей восприимчивости к болезням таким, как гастроэнтерит или инфекциям, вызванным Clostridium difficile, особенно после лечения антибиотиками. Однако, требуются более детальные исследования для обоснования этих доводов.

Множество исследований, проведенных в выборках здоровых пожилых людей, показали перспективность использования пробиотиков и синбиотиков в терапии, с целью сохранения полезных бактерий в кишечнике человека в течение всей жизни.

Будущее пробиотической и синбиотическое терапии зависит от продвижения накапливающихся в этой области научных данных.

ВЫВОДЫ

1. С возрастом человека происходят изменения видового состава бактерий в кишечнике.
2. Снижение числа жизнеспособных бактерий часто связано приемом большого количества антибиотиков в течение жизни.
3. Перроральное применение нанолекарств может оказывать отрицательное влияние на микрофлору кишечника и особенно у пожилых людей.
4. Использование пробиотиков в терапии может способствовать сохранению полезных бактерий в кишечнике человека в течение всей жизни.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wen L., Ley R.E., Volchkov P.Y., Stranges P.B., Avanesyan L., Stonebraker A.C., Hu C., Wong F.S., Szot G.L., Bluestone J.A., Gordon J.I., Chervonsky A.V.* Innate immunity and intestinal microbiota in the development of Type 1 diabetes // Nature. – 2008. – Vol.455. – N7216. – P.1109-1113.
2. *Hooper L.V.* Bacterial contributions to mammalian gut development // Trends Microbiol. – 2004. – Vol.12. – P.129-134.
3. *Jiang H.Q., Thurnheer M.C., Zuercher A.W., Boiko N.V., Bos N.A., Cebra J.J.* Interactions of commensal gut microbes with subsets of B- and T-cells in the murine host // Vaccine. – 2003. – Vol.22. – P.805-811.
4. *Senior K.* Faecal transplantation for recurrent C difficile diarrhoea // Lancet Infect. Dis. – 2013. – Vol.13. – N3. – P.200-201.
5. *Dukowicz A.C., Lacy B.E., Levine G.M.* Small Intestinal Bacterial Overgrowth // Gastroenterol. Hepatol. – 2007. – Vol.3. – N2. – P.112-122.
6. *Kofteridis D.P., Papadimitraki E., Mantadakis E., Maraki S., Papadakis J.A., Tzifa G, Samonis G.* Effect of diabetes mellitus on the clinical and microbiological features of hospitalized elderly patients with acute pyelonephritis // J. Am. Geriatr. Soc. – 2009. – Vol.57. – N11. – P.2125-21258.
7. *Woodmansey E.J.* Intestinal bacteria and ageing // J. Appl. Microbiol. – 2007. – Vol.102. – P.1178-1186.
8. *Weiffenbach J.M., Baum B.J., Burghauser R.* Taste thresholds: quality specific variation with human aging // J. Gerontol. – 1982. – Vol.37. – P.372-377.
9. *Macfarlane G.T., Cummings J.H., Macfarlane S., Gibson G.R.* Influence of retention time on degradation of pancreatic enzymes by human colonic bacteria grown in a 3-stage continuous culture system // J. Appl. Bacteriol. – 1989. – Vol.67. – P.520-527.

10. *Cummings J.H., Macfarlane G.T.* The control and consequences of bacterial fermentation in the human colon // J. Appl. Bacteriol. – 1991. – Vol.70. – P.443-459.
11. *Bornside G.H.* Stability of human fecal flora // Am. J. Clin. Nutr. – 1978. – Vol.31. – P.5141-5144.
12. *Hopkins M.J. Macfarlane G.T.* Changes in predominant bacterial populations in human faeces with age and with Clostridium difficile infection // J. Med. Microbiol. – 2002. – Vol.51. – P.448-454.
13. *Gibson G.R., Cummings J.H., Macfarlane G.T.* Use of a three-stage continuous culture system to study the effect of mucin on dissimilatory sulfate reduction and methanogenesis by mixed populations of human gut bacteria // Appl. Environ. Microbiol. – 1988. – Vol.54. – P.2750-2755.
14. *Ljungberg B., Nilsson-Ehle I., Edlund C., Nord C.E.* Influence of ciprofloxacin on the colonic microflora in young and elderly volunteers: no impact of the altered drug absorption // Scand. J. Infect. Dis. – 1990. – Vol.22. – P.205-208.
15. *Mitsuoka T., Hayakawa K.* The fecal flora of man I. Communication: the composition of the fecal flora of ten healthy human volunteers with special reference to the Bacteroides fragilis-group and Clostridium difficile // Zentralbl. Bakteriol. Mikrobiol. Hyg. – 1972. – Vol.261. – P.4352.
16. *Macfarlane G.T., Cummings J.H.* Probiotics, infection and immunity // Curr. Opin. Infect. Dis. – 2002. – Vol.15. – P.1-6.

Типография ООО «Сам Полиграфист»
г. Москва, Протопоповский пер., д.6

Подписано в печать 09.12.2013
Объем 16 п.л. Тираж 200 экз. Зак. №84