

И.Н. Ефимов, Е.А. Морозов, К.М. Селиванов

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Ижевск
2014**

УДК 531.3(075)
ББК 22.236с51я73
Е 912

Рецензент: Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией «Механика наноструктур» ФГБУН Институт механики УрО РАН А.В. Вахрушев.

Е 912 Ефимов И.Н., Морозов Е.А., Селиванов К.М.
Компьютерное моделирование динамических систем. - Ижевск:
Институт компьютерных исследований, 2014. 134с.

Особенность метода моделирования заключается в том, что модель выступает инструментом, который исследователь ставит между собой и реальным объектом, и с помощью которого изучает интересующий его объект. Именно эта особенность определяет специфические формы использования абстракций, аналогий, гипотез, ряда других категорий и методов познания.

Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты непосредственно исследовать невозможно, или их изучение требует больших финансовых и материальных затрат.

В книге достаточно подробно описаны основные положения теории моделирования и изложена методика построения компьютерных моделей динамических процессов, где оригинальным является использование гамильтонова формализма и канонической теории возмущений. Указанный подход позволяет применить фундаментальные результаты аналитической динамики для построения эффективных алгоритмов интегрирования дифференциальных уравнений и оценки сходимости полученных решений.

Изложенный в книге материал может быть полезен широкому кругу читателей, а также студентам, аспирантам, специалистам, сфера интересов и профессиональная деятельность которых связана с вопросами моделирования динамических систем, описанием и исследованием их поведения.

ISBN 978-5-4344-0211-8

© Ефимов И.Н., 2014
© Морозов Е.А., 2014
© Селиванов К.М., 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. Предмет компьютерного моделирования.....	8
1.1 Моделирование - метод научного исследования.....	8
1.2 Процедуры теоретического исследования.....	9
1.3 Формализация процесса моделирования	10
1.4 Модельные отношения	11
1.5 Анализ математической модели	13
1.6 Области применения моделей динамических систем	14
2. Динамические модели	16
2.1 Компьютерная модель.....	16
2.2 Проблема модельного отношения.....	17
2.3 Динамические уравнения Гамильтона	18
2.4 Диссипативная система.....	20
2.5 Случай силы явно зависящей от времени	21
2.6 Интегрирование динамических уравнений.....	23
2.7 Интегрирование в квадратурах.....	24
3. Численные методы интегрирования.....	27
3.1 Численное интегрирование динамических систем.....	27
3.2 Динамические процессы	28
3.3 Гамильтонова динамическая система	29
3.4 Системы с дискретным временем	32
3.5 Представление алгоритма степенными рядами.....	34
3.6 Методы Эйлера и Рунге-Кутты	36
3.7 Построение компьютерной модели.....	40
4. Каноническое интегрирование	44
4.1 Преобразования фазовой плоскости в методе Эйлера	44
4.2 Канонические преобразования фазовой плоскости.....	48
4.3 Канонические алгоритмы интегрирования	50
4.4 Устойчивость алгоритмов интегрирования	54
4.5 Многомерные системы	56
5. Колебательные системы	60
5.1 Свободные одномерные колебания.....	60
5.2 Колебания с диссипацией энергии	62
5.3 Вынужденные колебания.....	65
5.4 Каноническое интегрирование уравнений свободных колебаний	68
5.5 Интегрирование уравнений затухающих колебаний	71

6. Динамика твёрдого тела.....	75
6.1 Кинетическая энергия твёрдого тела	75
6.2 Уравнения движения твердого тела	78
6.3 Вращение тела вокруг неподвижной оси.....	80
6.4 Интегрирование уравнений движения вокруг неподвижной оси.....	83
6.5 Эквифазные преобразования	87
6.6 Канонические преобразования пространства кватернионов	95
7. Сложные динамические системы	99
7.1 Ансамбль частиц	99
7.2 Основные допущения.....	100
7.3 Ансамбль гармонического осциллятора	101
7.4 Хаос в нелинейной системе	103
7.5 Хаос в двумерной системе	106
8. Движение заряженных частиц	111
8.1 Уравнения движения релятивистской частицы в форме Гамильтона....	111
8.2 Условие стационарности.....	113
8.3 Движение частицы по равновесной траектории.....	115
8.4 Аксиально-симметричное поле	116
8.5 Фокусировка в постоянном поле	118
8.6 Фокусировка в поле линейно возрастающего потенциала	120
9 Проблемные вопросы моделирования.....	123
9.1 Интегрируемость динамических уравнений.....	123
9.2 Принцип консервативных возмущений	124
9.3 Бесконечно малые канонические преобразования	126
9.4 Канонические ряды	127
9.5 Модельное отношение для консервативной системы	129
Литература	132

Введение

Компьютерное моделирование является одним из эффективных методов изучения, описания и исследования сложных систем, и позволяет проводить вычислительные эксперименты в тех случаях, когда реальная постановка эксперимента затруднена или может дать непредсказуемый результат. Одной из важных научных проблем естествознания является решение задачи предсказания поведения изучаемого объекта во времени и пространстве на основе определенных знаний о его начальном состоянии.

Под динамической системой будем понимать любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния, как совокупности некоторых величин в данный момент времени и закона, который описывает изменение начального состояния во времени. Этот закон позволяет по начальному состоянию прогнозировать будущее поведение динамической системы, его называют законом эволюции. Динамические системы – это механические, физические, химические и биологические объекты, вычислительные процессы и процессы прогнозирования информации, совершаемые в соответствии с конкретными алгоритмами. Описание динамических системы задание закона эволюции также разнообразны: с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений, теории графов, теории марковских цепей и т.д. Выбор одного из способов описания задает конкретный вид математической модели соответствующей динамической системы. Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены параметры системы, определяющие однозначно ее состояние, и указан закон эволюции. В зависимости от степени приближения одной и той же системе могут быть поставлены в соответствие различные математические модели.

Дадим краткую характеристику каждой главе книги.

В научном исследовании особая роль принадлежит математическому моделированию, поэтому в первой главе проведен анализ и формализован процесс построения математических моделей применительно к динамическим системам.

Вторая глава посвящена методам построения математических моделей, на основе которых осуществляется компьютерное моделирование динамических процессов. Возьмём за основу гамильтонов формализм уравнений движения, который позволяет эффективно использовать в компьютерных моделях основные результаты аналитической механики и, в частности, канонической теории возмущений. Вместе с тем в шестой главе предложены альтернативные

алгоритмы, основанные на известной теореме Лиувилля о сохранении площадей и объемов.

В большинстве случаев (например, в задаче трёх тел) не удаётся ни решить систему динамических уравнений, ни достаточно полно исследовать поведение решений. Единственным методом исследования в этом случае является численное интегрирование с использованием различных алгоритмов счёта. В основе таких алгоритмов лежат бесконечно малые преобразования фазового пространства, последовательное применение которых позволяет получить приближённое дискретное решение. Рассмотрим в третьей главе преобразования, соответствующие классическим алгоритмам численного интегрирования.

В четвертой главе описан канонический метод численного интегрирования уравнений движения, который в настоящее время является одним из самых эффективных методов, используемых в компьютерных моделях. Использование канонического метода позволяет учесть влияние самого процесса счёта на воспроизводимую в процессе интегрирования модель в форме малого консервативного возмущения моделируемой системы. Такие модели более адекватно отражают реальное механическое движение.

В качестве примера составления и интегрирования дифференциальных уравнений рассматривались колебания груза на пружине и поведение математического маятника. Вообще, колебательные движения различного вида широко распространены в природе и технике. Вместе с тем, полное аналитическое исследование их свойств, как правило, возможно, только в случае *малых колебаний*. Этим обусловлен особый интерес к компьютерным моделям (глава пятая), адекватно воспроизводящим колебательные процессы.

Область теории численного интегрирования динамических уравнений твёрдого тела весьма обширна, а разрабатываемые на её основе компьютерные модели имеют многочисленные практические приложения. Ранее авторами рассматривались численные алгоритмы, построенные на принципах гамильтонова формализма, и в списке литературы это отражено. Более общим подходом является использование эквивалентных преобразований. Не останавливаясь подробно на сравнении указанных подходов, отметим, что введенные в главе шестой эквивалентные алгоритмы обладают всеми свойствами канонических алгоритмов, но значительно расширяют класс интегрируемых дифференциальных уравнений.

Под сложными динамическими системами в седьмой главе мы будем понимать множества однотипных материальных тел, движущихся в одних и тех же физических условиях. Компьютерные модели таких систем находят широкое применение в процессе создания приборов электронной и ионной

оптики. Ещё большее значение они имеют в исследовании *эволюционных процессов*- процессов возникновения и развития хаоса и порядка в детерминированных системах. В этой связи *эволюционная динамика* является одной из важнейших и мало исследованных областей человеческих знаний.

Восьмая глава посвящена моделированию движения потока заряженных частиц, повышению плотности мощности потока и его высокоточной или прецизионной фокусировки, что является предметом исследований в экспериментальной и теоретической физике. Модель системы, обеспечивающей движение заряженных частиц в магнитном поле, определяется типом поля и формой равновесной траектории, на которой функция потенциальной энергии частиц будет иметь локальный минимум. Если равновесной траекторией частиц является окружность или винтовая линия, то в качестве поля, обеспечивающего ускорение или фокусировку, используется аксиально-симметричное магнитное поле. Выбор поля такого типа во многих случаях является оптимальным для систем, в которых поток заряженных частиц одновременно ускоряется и фокусируется.

В девятой главе рассматривается проблема модельного отношения с точки зрения обобщённой динамической системы, и указываются возможные пути ее решения в рамках канонического метода численного интегрирования, к которому относится и метод эквивалентных преобразований.

Структура книги во многом совпадает с учебным пособием [Ефимов И.Н., Морозов Е.А. Компьютерное моделирование физических процессов. Ижевск. Издательство «Митра» - 2012. – 134с.], однако материал существенно переработан и является обобщением новых результатов в теории динамических систем, полученных учеными Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова и Пермского национального исследовательского политехнического университета.

1. Предмет компьютерного моделирования

1.1 Моделирование - метод научного исследования

Моделирование – исследование объектов на их образах – *моделях*. По определению, моделью объекта называется другой объект, отдельные свойства которого полностью или частично совпадают со свойствами исходного. В определенном смысле, все научные исследования сводятся к построению моделей природных объектов, а сам процесс моделирования является одним из основных способов отражения действительности. В общем случае, исследование объектов на моделях предполагает активное оперирование последними, иначе, проведение *модельного эксперимента*. Целью моделирования, как метода научного исследования, является описание, объяснение и предсказание процессов и явлений действительности.

Объёмность содержания понятия «моделирования» в науке и технике делают затруднительным единую классификацию видов моделирования. Если использовать в качестве упорядочивающего признака (основания) характер модели, то виды моделирования сами выражаются графической моделью (рис. 1.1). Эта классификация используется в теории моделирования.

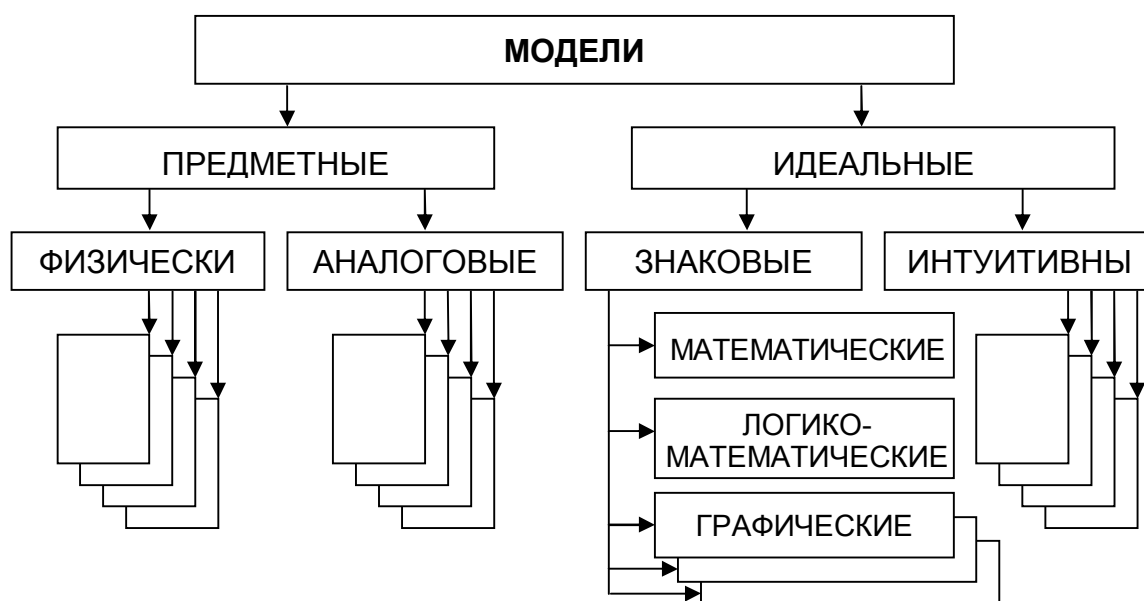


Рисунок 1.1 - Классификация моделей

Предметное моделирование – моделирование, при котором исследование ведется на модели, воспроизводящей основные геометрические, физические, динамические, функциональные характеристики объекта.

Физическое моделирование – предметное моделирование, при котором модель и объект имеют одну и ту же физическую природу.

Аналоговое или предметно-математическое моделирование – предметное моделирование, при котором модель и объект описываются одними и теми же дифференциальными уравнениями.

Идеальные модели – модели, построенные на основе абстрактных образов объекта.

Знаковое моделирование – идеальное моделирование, при котором в качестве модели объекта используются знаковые конструкции какого-либо вида, в частности схемы, графики, чертежи и т.д.

Математическое и логико-математическое моделирование – знаковое моделирование на основе использования средств математики и математической логики.

Интуитивное или мысленное моделирование – моделирование на основе мысленно-наглядных представлений. Этот вид моделирования - непереносимое условие любого познавательного процесса.

Представленная классификация охватывает область достаточно простых моделей. В сложных моделях, как правило, используются сразу несколько видов моделирования, представленных в классификации.

1.2 Процедуры теоретического исследования

Моделирование является методом научного исследования объекта. Однако при изучении процесса моделирования сам метод является объектом исследования и, следовательно, к нему должны быть применены общие процедуры теоретического исследования. Укажем некоторые из них.

Абстракция (абстрагирование) – процедура исследования, в основе которого лежит выделение одних свойств объекта, как его определяющих, и игнорирование других свойств, как несущественных. Результат процедуры – абстрактная модель объекта. Обычно эта процедура лежит в основе теоретического исследования.

Анализ – процедура мысленного расчленения объекта на части с целью выявления структуры объекта и процессов, в нём происходящих. Результат процедуры – совокупность структурных единиц и (или) элементарных процессов (отношений).

Соответствие – процедура попарного сопоставления объектов или их элементов. Результат выполнения процедуры – установление попарных (бинарных) отношений между абстрактными единицами. Выделим три важнейших отношения бинарных отношения: *функциональное отношение, отношения эквивалентности и порядка, морфизмы.*

Синтез – мысленное соединение объектов в единое целое. Результат процедуры – целостная система *структурных единиц* и происходящих между ними *элементарных процессов* (отношений).

Формализация – процедура преобразования содержательной части научного исследования из индуктивной теории в дедуктивно-аксиоматическую. Чаще всего имеется в виду логико-математическая формализация, приводящая к возрастанию достоверности полученных в теории объяснений и предсказаний. В основе логико-математической формализации лежит установление соответствия основных положений теории аксиомам математической теории множеств [1]. Полностью формализованными могут быть лишь достаточно простые теории с простой логической структурой. В прикладных исследованиях наиболее эффективной оказывается формализация только оснований теории.

Использование общих процедур позволяет ускорить изучение метода компьютерного моделирования и оптимизировать его использование в научных исследованиях.

1.3 Формализация процесса моделирования

Определённые в п.1.1. понятия и накопленные знания можно считать простейшей интуитивной теорией моделирования. Ближайшей задачей будет математическая формализация некоторых основных положений этой теории.

Имея в виду аксиомы теории множеств, в качестве основных постулируем возможность установления следующих соответствий:

1. Любой объект (процесс) моделируется некоторым множеством.
2. Любое свойство объекта (процесса) моделируется подмножеством этого множества.
3. Любое отношение между объектами моделируется – установление некоторого бинарного отношения.

Таким образом, в самом общем случае моделью объекта (процесса) является некоторое *структурированное множество*.

Анализ процесса научного исследования позволяет выделить три структурные единицы, образующие первый уровень абстракции: объект исследования или оригинал, исследователь (субъект) и объект-модель (рис. 1.2).

	Исследователь (субъект)	
Объект исследования (оригинал)	Информационное пространство	Модель объекта (объект)

Рисунок 1.2- Анализ процесса моделирования

Под *информационным пространством* понимать совокупность отношений между структурными единицами процесса исследования.

1.4 Модельные отношения

Соответствие между объектом исследования и моделью выражается *модельным отношением*, которое необходимо определить.

Согласно сформулированным аксиомам объект исследования и его модель могут быть выражены их формализованными моделями, которые представляют собой некоторые структурированные множества. Тогда модельное отношение – суть, соответствие между множествами и их структурами. В математике такие соответствия называются *морфизмами*. Полное соответствие называется *изоморфизмом* (рис. 1.3). В случае изоморфизма объект и модель тождественны (неразличимы).

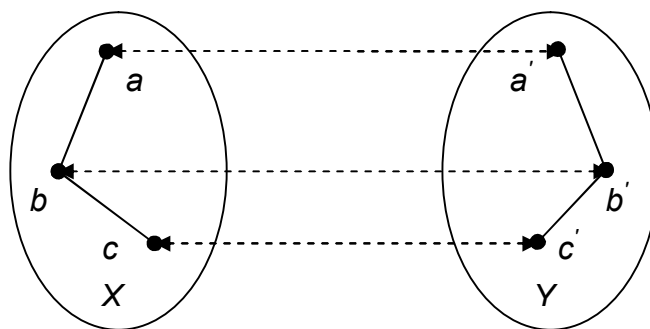


Рисунок 1.3 - Изоморфизм множеств: $X \Rightarrow Y'$

Однако выполнение условия изоморфизма может оказаться затруднительным или вообще ненужным, поскольку никакого упрощения исследовательской задачи оно не несёт. На следующем уровне приходим к представлению модели как упрощенного образа моделируемого объекта, т.е. к требованию *гомоморфизма* модели оригиналу. Гомоморфизм, как и изоморфизм, сохраняет все определённые на исходной системе свойства и отношения, но в отличие от изоморфизма это отображениеоднозначно только в одну сторону. В случае гомоморфизма элементы исходного множества разбиваются на классы, после чего, каждому классу ставится в соответствие единственный элемент множества-образа, иными словами, сохраняются свойства и отношения между подмножествами или классами (рис. 1.4). Поэтому множество-образ оказывается проще исходного множества.

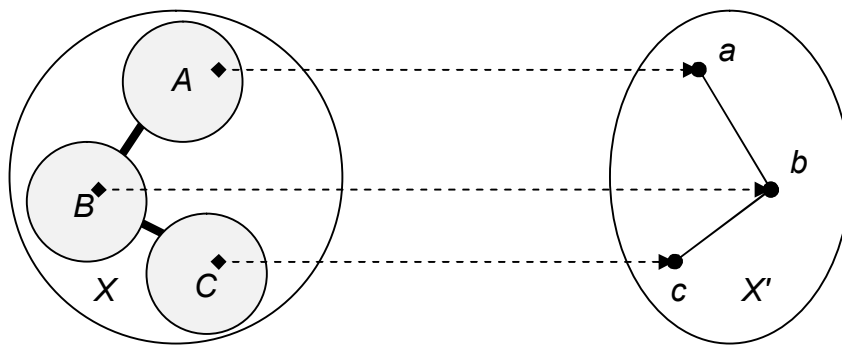


Рисунок 1.4 - Множество X' гомоморфно множеству X : $X \Rightarrow X'$

Объект Y моделирует объект X , если он изоморфен (тождественен) некоторому гомоморфному (упрощенному) образу X' объекта X . Тождественность модели упрощенному образу оригинала изображена на рисунке 1.5:

$X \xrightarrow{M} Y$ - моделирующее отношение.

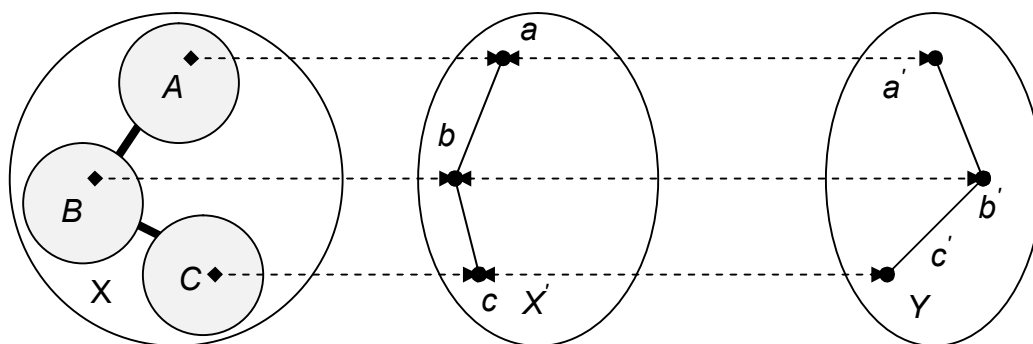


Рисунок 1.5 - Объект Y моделирует объект X

Моделирующее отношение рефлексивно, транзитивно и антисимметрично (отношение частичного порядка):

$X \xrightarrow{M} X$ (каждый объект моделирует самого себя);

$X \xrightarrow{M} Y \wedge Y \xrightarrow{M} Z \Rightarrow X \xrightarrow{M} Z$ (модель модели есть модель);

$X \xrightarrow{M} Y \wedge Y \xrightarrow{M} X \Rightarrow Y = X$ (оригинал и модель не равноправны).

Указанные свойства позволяют установить иерархию моделей (начиная с оригинала) по понижающейся степени сложности.

Но и такое понимание моделирования не является бесспорным. Нет никакого резона требовать, чтобы модель была во всех отношениях проще оригинала. Действительно, модель, воспроизводимая на экране компьютера и реализуемая посредством программы, операционной системы и аппаратуры компьютера, может оказаться заведомо сложнее оригинала. Поэтому к максимально общему определению понятия моделирования можно прийти, допуская сколь угодно сложные модели и оригиналы, требуя при этом лишь тождества структуры некоторых упрощенных вариантов каждой из систем. Иными словами, две системы объектов моделируют друг друга, если их некоторые гомоморфные образы изоморфны между собой (рис. 1.6).

$X \xleftarrow{M} Y$ - модельное отношение.

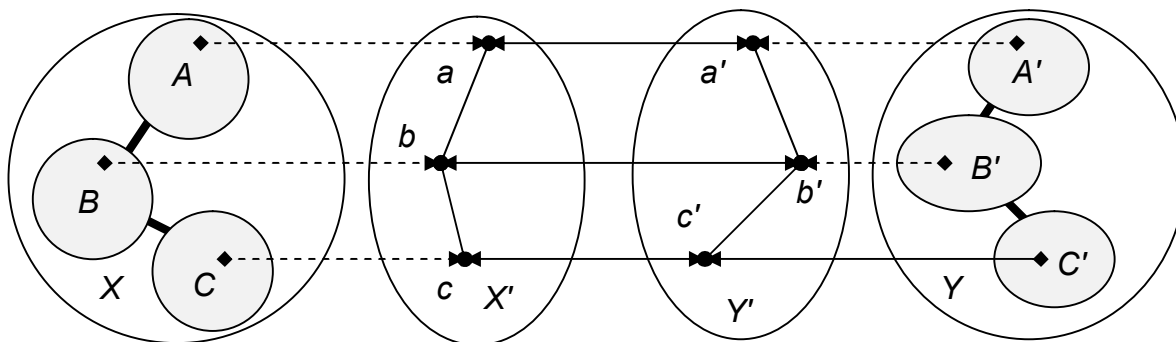


Рисунок 1.6 - Системы объектов X и Y моделирует друг друга
 Модельное отношение рефлексивно, транзитивно и симметрично
 (отношение эквивалентности):

$X \xrightarrow{M} X$ (каждый объект моделирует самого себя);

$X \xrightarrow{M} Y \wedge Y \xrightarrow{M} Z \Rightarrow X \xrightarrow{M} Z$ (модель модели есть модель);

$X \xrightarrow{M} Y \Rightarrow Y \xrightarrow{M} X$ (оригинал и модель равноправны).

Если между оригиналом и моделью установлено модельное отношение, то результаты модельного и натурального эксперимента оказываются эквивалентны друг другу.

1.5 Анализ математической модели

Математическая модель объекта исследования есть идеальная знаковая модель, выраженная математическими формулами, которая позволяет описать и исследовать структуру объекта, а также процессы, в нем происходящие, без использования самого объекта.

Анализ построения математической модели позволяет выделить следующие его этапы-операции: абстрагирование, анализ, математическая формализация, синтез (рис. 1.7). Информационные пространства математической модели – суть совокупность связей, методов и приёмов.

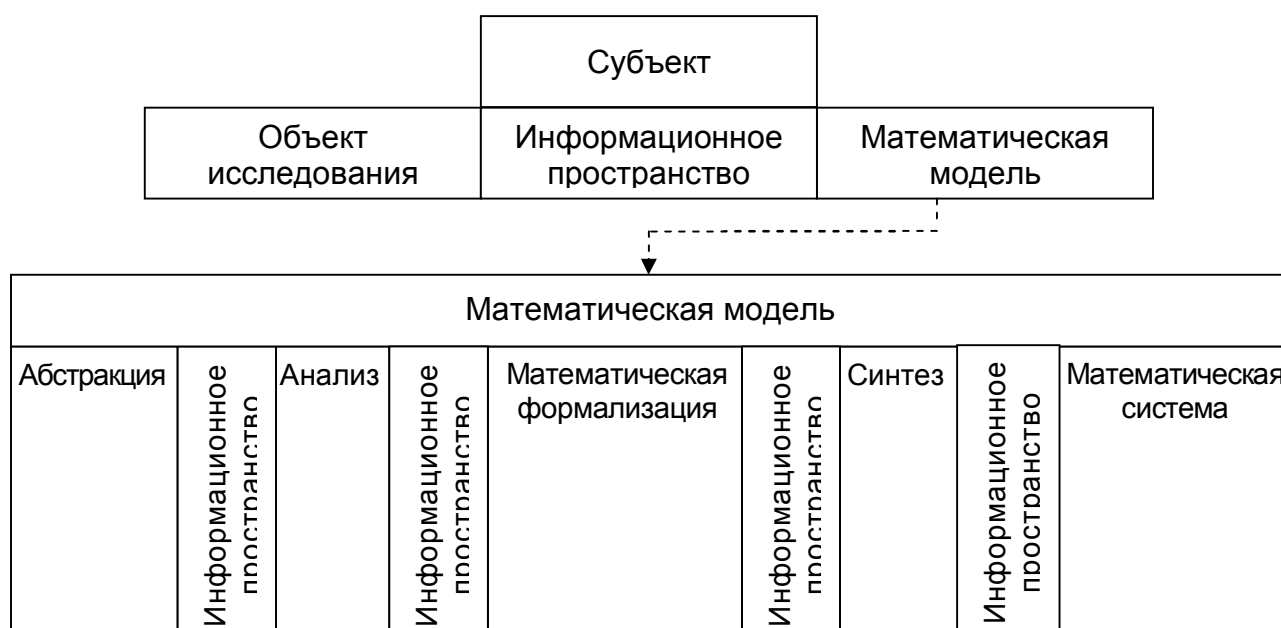


Рисунок 1.7 - Математическая модель объекта

Абстрагирование – построение первичной абстрактной модели в виде совокупности интересующих свойств и качеств исследуемого объекта. Форма модели интуитивная, знаковая (схемы, таблицы, графики).

Анализ абстрактной модели по признаку «структура-процесс» (рис. 1.8) может быть выражен структурно-функциональной схемой, отражающей структурные единицы, элементарные процессы и связи между ними.

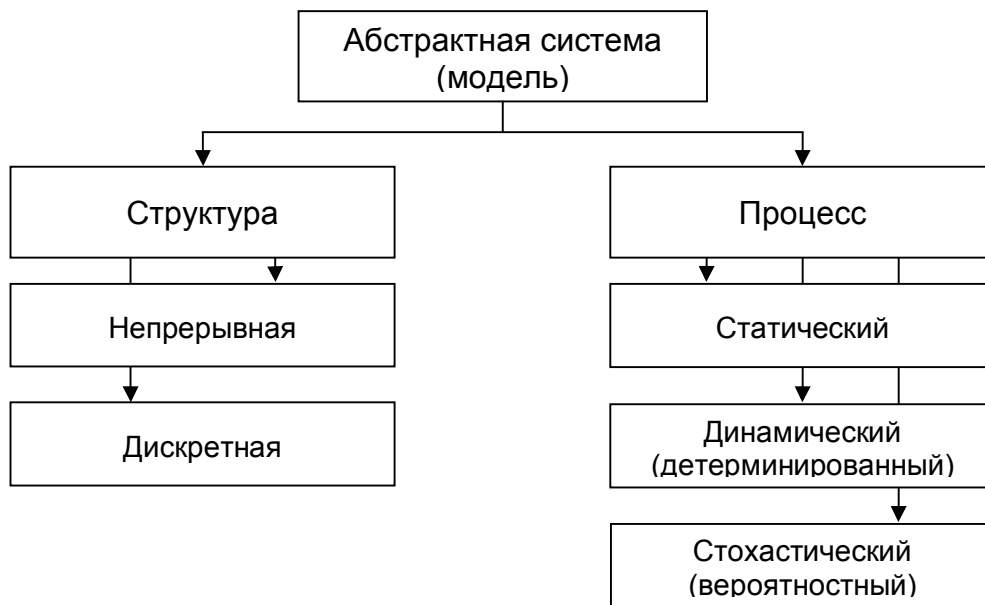


Рисунок 1.8 - Анализ по признаку структура-процесс

Математическая формализация элементов структурно-функциональной модели осуществляется методами соответствующих областей математики.

Синтез – построение целостной математической модели объекта в форме математической системы.

В дальнейшем нас будут интересовать динамические процессы, которые могут быть выражены в форме второго закона Ньютона. Математические модели, описывающие такие процессы, называются *динамическими системами*.

1.6 Области применения моделей динамических систем

Абстракция в форме динамической системы в настоящее время находит применение в самых различных областях человеческих знаний для описания и исследования природных и технических процессов. В частности:

Небесная механика: движение планет звёзд, галактик, устойчивость планетарных и звёздных систем.

Эволюционная механика синергетика: динамика ансамблей частиц, возникновение хаоса и порядка в системе.

Электронные и ионные системы: движение частиц в приборах электронной и ионной оптики и технологии, использующие указанные приборы.

Строительная механика: колебания строительных конструкций (зданий, железнодорожных полотен, мостов), вибрация фундаментов, устойчивость конструкций, динамика резонансов.

Инженерная механика: балансировка машин, колебания в валах и зубчатых передачах, колебания турбинных лопаток и дисков, оптимизация частоты вращений валов, колебания колец мембран пластин.

Транспорт: колебания корпусов автомобилей, судов, самолетов, колебания систем с амортизаторами, устойчивость движения транспортных средств, автоматическое регулирование и управление, балансировка, безопасность движения.

Авиационная и космическая техника: орбитальная устойчивость, управление ориентацией, флаттер крыла, колебания турбинных лопаток и дисков, автоматическое управление, устойчивость работы двигателей, внешняя баллистика.

Электродинамика: электромагнитные колебания, колебания в контурах, резонаторах, волноводах.

Химия, биохимия, микробиология: катализ, устойчивость биохимических реакций, управление, динамика биомолекул и клеток.

Биология и медицина: динамика сердца, полевые теории нейронной активности мозга, механика возбуждений и торможений.

Экология: геодинамические системы, динамика популяций и эволюционная экология.

Экономика: нерегулярная динамика финансовых рынков, детерминированный хаос экономических систем.

Использование компьютерных технологий и, в частности, метода компьютерного моделирования, ведёт к дальнейшему прогрессу научных исследований в этих областях знаний.

2. Динамические модели

2.1 Компьютерная модель

Компьютерная модель – модель, полученная на основе использования компьютера. Одно из основных преимуществ таких моделей, возможность получения информации в наиболее удобной для человека *визуальной* форме.

Компьютерная модель строится на основе математической модели объекта исследования и представляет собой синтез физической и формализованной знаковой модели – программы (рис. 2.1).



Рисунок 2.1 - Компьютерная модель

Построение физической модели осуществляется аппаратурой компьютера, как правило, в автоматическом режиме. Таким образом, в узком смысле, построение компьютерной модели сводится к формализации математической модели в рамках какого-либо языка программирования. Такое понимание компьютерного моделирования вполне допустимо, но предполагает наличие эффективных математических моделей, гарантирующих верное воспроизведение основных свойств моделируемого объекта. Здесь возникают две принципиальные трудности.

Во-первых, при исследовании новых явлений и процессов нет их математических моделей. Имеются только методы их построения, выработанные данной областью знаний. Поэтому при построении компьютерной модели приходится предварительно создавать математическую модель объекта исследования.

Во-вторых, необходима не просто математическая модель, верно отражающая исследуемое явление или процесс, но модель, для которой возможна программная формализация. Это означает, что математическая модель должна быть преобразована к форме некоторого *вычислительного алгоритма*.

Эти причины побуждают рассматривать компьютерное моделирование в широком смысле, как процесс, включающий разработку математической модели объекта исследования.

Наконец, в случае компьютерного моделирования динамических процессов возникает специфическая *проблема модельного отношения динамики модели и оригинала*.

2.2 Проблема модельного отношения

Пусть построена компьютерная модель Y некоторой реальной динамической системы X , например, гармонических колебаний груза на пружине. Из проведённого анализа следует, что эта компьютерная модель состоит из формализованной математической модели и аналоговой модели реализуемой аппаратурой компьютера. Пусть на экране воспроизводится движение, осуществляемое механической системой – гармонических колебаний груза. Тогда имеем две независимые физические системы - механическую и электронную, которые находятся в одном и том же динамическом состоянии (рис. 2.2).

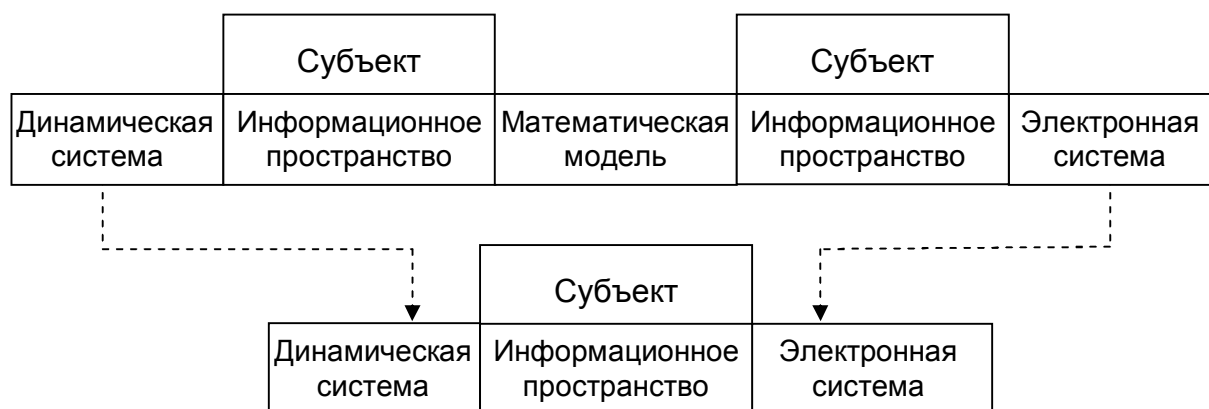


Рисунок 2.2- Механическая и электронная системы в одном и том же динамическом состоянии

Моделирующее отношение $X \xrightarrow{M} Y$: *электронная система Y моделирует механическую систему X* , постулирует, что системы неравноправны. Иными словами, всегда можно сказать, что система X «настоящая», а система Y является её моделью. Такое отношение соответствует нашему опыту, является просто констатацией факта и не представляет интереса.

Можно ли и при каких условиях установить между системами модельное отношение $X \xleftarrow{M} Y$: *механическая система X и электронная система Y моделируют друг друга?*

Поставленная *проблема модельного отношения* имеет принципиальное значение именно в случае динамических (детерминированных) систем.

Действительно, если между системами установлено модельное отношение $X \xleftarrow{M} Y$, то системы оказываются эквивалентными, и вопрос, какая из них «настоящая», не имеет смысла. Это означает, что эксперимент, проведённый на компьютерной модели, оказывается равноценен натурному эксперименту над объектом и, следовательно, будет выполнять функцию основного критерия истинности научного познания.

Изложенные соображения побуждают подробнее заняться динамическими системами. Ближайшей задачей будет рассмотрение основ *гамильтоновой механики*, в рамках которой проблема имеет положительное решение.

2.3 Динамические уравнения Гамильтона

Рассмотрим простейшую механическую систему. Пусть материальная точка массой m , с радиус вектором $\mathbf{r}$ и скоростью $\mathbf{v}$ движется под действием некоторой силы, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, т.е. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. Если сила потенциальна, то определена функция потенциальной энергии $U = U(\mathbf{r})$, которая связана с силой выражением:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (2.1)$$

Полная энергия системы есть сумма кинетической T и потенциальной U энергий:

$$E(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = T + U = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + U(\mathbf{r}). \quad (2.2)$$

Определим импульс материальной точки, как $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, и запишем энергию в переменных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}). \quad (2.3)$$

Функция $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ называется *функцией Гамильтона* [1,3] механической системы или просто *гамильтонианом*. Задание функции Гамильтона определяет все свойства механической системы. Закон движения задаётся *динамическими уравнениями*

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{p}}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

которые называются *уравнениями Гамильтона* или, за их симметрию, *каноническими уравнениями*. Смысл уравнений прост, беря производную от функции Гамильтона (2.3) в первом уравнении и подставляя (2.1), делаем вывод, что первое уравнение, суть, записанный иначе второй закон Ньютона для потенциальной системы:

$$\frac{dp}{dt} = F(r). \quad (2.5)$$

Второе уравнение, как легко видеть, есть просто выражение скорости через импульс:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p}{m}. \quad (2.6)$$

Гамильтонова механика, являясь иной формой механики Ньютона, оказывается более удобной для построения компьютерных моделей.

Пример 1. Гармонический осциллятор.

Рассмотрим движение груза массы m по прямой под действием пружины жёсткости k (рис. 2.3).

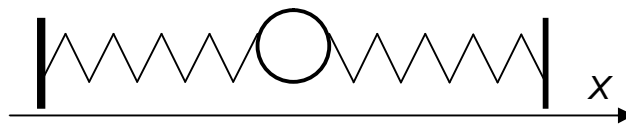


Рисунок 2.3 - Гармонический осциллятор

Эксперимент показывает, что при небольших отклонениях груза от нейтрального положения со стороны пружины будет действовать *восстанавливающая сила*

$$F = -k \cdot x \text{ (закон Гука)}. \quad (2.7)$$

Эту силу можно записать в виде (2.1), если ввести потенциальную энергию

$$U = \frac{k \cdot x^2}{2}. \quad (2.8)$$

Функция Гамильтона системы запишется в виде

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k \cdot x^2}{2}, \quad (2.9)$$

а уравнения Гамильтона для одномерного случая

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -k \cdot x; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Этот пример, будем использовать в дальнейшем для иллюстрации некоторых результатов.

2.4 Диссипативная система

В рассмотренной выше механической системе действует закон сохранения энергии

$$E = T + U = \text{const.} \quad (2.11)$$

Такие системы называются ещё *консервативными*. Реальное движение чаще всего происходит в условиях действия *диссипативных сил* [1-3] сопротивления среды, которое приводит к уменьшению (*диссипации*) механической энергии. Эти силы направлены противоположно скорости движения и при достаточно малых скоростях пропорциональны самой скорости

$$F_{dis} = -\mu \cdot v. \quad (2.12)$$

Коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом диссипации*. Линейная зависимость диссипативных сил (2.12) позволяет, как и в случае потенциальных сил (2.1), выразить их через скалярную функцию

$$D(v) = \frac{\mu v^2}{2};$$

$$F_{dis} = -\frac{\partial D(v)}{\partial v}. \quad (2.13)$$

Функция $D(v)$ - называется *диссипативной функцией Рэлея*. Выражая эту функцию через импульс, получим

$$D(p) = \frac{\mu p^2}{2m^2};$$

$$F_{dis} = -\frac{\partial D(p)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial v}. \quad (2.14)$$

Пусть рассмотренное выше движение материальной точки происходит в условиях действия консервативной (2.1) и диссипативной (2.12) сил. Тогда энергия системы выразится функцией

$$E = H(p, r) + D(p), \quad (2.15)$$

а уравнения Гамильтона будут иметь вид

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(p, r)}{\partial r} - \frac{\partial D(p)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial v},$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H(p, r)}{\partial p}. \quad (2.16)$$

Пример 2. Линейный осциллятор.

Рассмотренные в примере 1 колебания грузика на пружинке, раз возникнув, будут продолжаться неограниченно долго. Однако в действительности их амплитуда будет постепенно уменьшаться, колебания «затухают» и прекращаются. Затухание происходит вследствие действия диссипативной силы

$$F_{dis} = -\mu \cdot v. \quad (2.17)$$

Выраженная через импульс, функция Рэля этой силы имеет вид

$$D(p) = \frac{\mu \cdot p^2}{2m^2}. \quad (2.18)$$

Используя (2.9), запишем энергию линейного осциллятора

$$E = H(p, x) + D(p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\mu \cdot p^2}{2m^2} + \frac{k \cdot x^2}{2}, \quad (2.19)$$

и уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial p} = -\frac{\mu \cdot p}{m} - k \cdot x; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Этот пример, будем использовать для иллюстрации диссипации энергии в процессе численного интегрирования.

2.5 Случай силы явно зависящей от времени

В отличие от потенциальных и диссипативных сил, силы, явно зависящие от времени, иначе, выражаемые *параметрической функцией* $F = F(t)$ [1-3], не являются непосредственными образами реальных сил, а представляют собой абстракцию более высокого уровня. Действительно, силовые функции F выражают законы природы, которые очевидно не изменяются с течением времени. Абстракция $F = F(t)$ возникает в следующей ситуации.

Пусть имеются две системы I и II , взаимодействующие друг с другом с силами

$$\begin{aligned} F_{II} &= F_{II}(v_{II}, r_{II}); \\ F_I &= F_I(v_I, r_I). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Предположим, что нам известно движение системы II , т.е. функции

$$\begin{aligned}v_{II} &= v_{II}(t), \\r_{II} &= r_{II}(t).\end{aligned}\tag{2.22}$$

Тогда, подставляя эти функции в выражение силы F_{II} , получим *эффективную силу*, явно зависящую от времени

$$F_{II}(v_{II}(t), r_{II}(t)) = F_{II}(t).\tag{2.23}$$

Несмотря на «нефундаментальный» характер, силы, явно зависящие от времени, находят широкое применение при описании и исследовании динамических процессов. В частности, эти силы могут моделировать заранее определённое воздействие на объект, осуществляемое в процессе эксперимента.

В общем случае, при действии на материальную точку всех рассмотренных сил её динамические уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H(p, r)}{\partial r} - \frac{\partial D(p)}{\partial p} + F(t); \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H(p, r)}{\partial p}.\end{aligned}\tag{2.24}$$

При определении силы, явно зависящей от времени, допускают, что, в принципе, может существовать реальная система, воздействие которой позволяет исключить явную зависимость сил от времени.

Пример 3. Вынужденные колебания.

Пусть на грузик (примеры 1 и 2), кроме восстанавливающей и диссипативной сил, действует ещё сила, явно зависящая от времени или т.н. возмущающая сила вида

$$F(t) = A \cdot \cos \Omega t.\tag{2.25}$$

Динамические уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial p} = -\frac{\mu \cdot p}{m^2} - \frac{k \cdot x}{m} + \cos \Omega t; \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Задание взаимодействия явно зависящей от времени функцией предполагает сколь угодно точное её соответствие реальному процессу. Поэтому наличие таких функций в компьютерных моделях не приводит к накоплению погрешности счёта и снижению адекватности получаемых результатов.

2.6 Интегрирование динамических уравнений

Математической формализацией динамических процессов являются обыкновенные дифференциальные уравнения. В этой связи возникает вопрос их *интегрирования*.

Рассмотрим динамические уравнения (2.10) движения груза на пружине. Для упрощения положим массу груза и жёсткость пружины равной единице и запишем

$$\begin{aligned}\frac{dp(t)}{dt} &= -x(t); \\ \frac{dx(t)}{dt} &= p(t).\end{aligned}\tag{2.27}$$

Проанализируем смысл этих уравнений. Очевидно, требуется найти две функции $p = p(t)$, $x = x(t)$, подстановка которых в выражения (2.27) обращает их в тождества. По известной теореме Коши, эти функции существуют, а если известны начальные условия $t = 0$, $x = x_0$, $p = p_0$, то такая пара функций будет единственной.

В данном простейшем случае нетрудно догадаться, что условиям (2.27) удовлетворяют функции синуса и косинуса, т.е.

$$\begin{aligned}p(t) &= C \cdot \cos(t + \varphi); \\ x(t) &= C \cdot \sin(t + \varphi),\end{aligned}\tag{2.28}$$

где C , φ -произвольные константы. Действительно, подстановка этих функций в уравнения (2.26) обращает их в тождество. В частности, если положить в качестве начальных условий $t = 0$, $x = 0$, $p = 1$, то получим простейшие колебания вида

$$\begin{aligned}p(t) &= \cos t; \\ x(t) &= \sin t.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Решение (2.29) может быть посчитано сколь угодно точно, поэтому оно называется *точным решением динамических уравнений*, а рассмотренный метод интегрирования называется *методом подстановки*. Он заключается в переборе известных функций и подстановке их в исходные дифференциальные уравнения. Этим же методом решается задача линейного осциллятора (2.20) и осциллятора с вынуждающей силой (2.26). Использование метода подстановки ограничено имеющимся в наличии набором функций.

В общем случае, функции $p = p(t)$, $x = x(t)$ не принадлежат к множеству известных функций. Определить их необходимо на основе заданных дифференциальных уравнений, без использования какой-либо иной

информации. Но для систем динамических уравнений вида (2.4) такая задача оказывается внутренне противоречивой.

Поясним сказанное на примере. Пусть материальная точка движется вдоль оси OX под действием известной силы $F = F(x, v)$. Покажем, что даже в таком простом случае найти аналитическое решение $p = p(t)$, $x = x(t)$ невозможно. Запишем динамические уравнения точки

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -F(x, p); \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m},\end{aligned}\tag{2.30}$$

и попробуем их проинтегрировать. Для этого перепишем уравнения в виде

$$\begin{aligned}dp(t) &= F(x(t), p(t))dt; \\ dx(t) &= \frac{1}{m} p(t)dt\end{aligned}\tag{2.31}$$

или

$$\begin{aligned}\int dp(t) &= \int F(x(t), p(t))dt; \\ \int dx(t) &= \frac{1}{m} \int p(t)dt.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Интегралы левых частей уравнений берутся немедленно, поэтому

$$\begin{aligned}p(t) + p_0 &= \int F(x(t), p(t))dt; \\ x(t) + x_0 &= \frac{1}{m} \int p(t)dt.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Второе уравнение утверждает - чтобы взять интеграл в правой части и, тем самым, узнать закон изменения величины $x = x(t)$, *необходимо знать закон изменения импульса* $p = p(t)$, скажем, $p = t^2$. Но этот закон не известен. Более того, из первого уравнения следует, чтобы его узнать, *необходимо знать закон изменения координаты*. Таким образом, возникает порочный круг.

Суть противоречия проста. Информации, содержащейся в динамических уравнениях (2.4) и (2.16), в общем случае, оказывается недостаточно для определения свойств функций $p = p(t)$, $r = r(t)$ и, следовательно, требуется какая-то дополнительная информация.

2.7 Интегрирование в квадратурах

Интегрирование в квадратурах – аналитический метод интегрирования динамических уравнений вида (2.4) на основе использования *интегралов*

движения, которые как раз и составляют дополнительную информацию об искомых функциях $p = p(t)$, $x = x(t)$. Разберём этот метод на примере гармонического осциллятора, допуская, что неизвестны тригонометрические функции синус и косинус.

Вновь рассмотрим динамические уравнения осциллятора

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -k \cdot x; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m}.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Проинтегрировать эти уравнения без использования дополнительной информации о функциях $p = p(t)$, $x = x(t)$ нельзя. Но в данном случае такая информация есть - это закон сохранения энергии (2.9)

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k \cdot x^2}{2} = H_0,\tag{2.35}$$

где $H_0 = H(p_0, x_0)$ - энергия в начальный момент времени.

Полагая для упрощения массу груза и жесткость пружины равной единице, выразим из (2.35) функцию p

$$p = \sqrt{a^2 - x^2},\tag{2.36}$$

где мы обозначили $a^2 = 2H_0$.

Подставляя полученное выражение импульса во второе уравнение системы (2.34) и разделяя переменные, получим

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = dt,\tag{2.37}$$

или в интегральной форме

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.\tag{2.38}$$

Если теперь исследовать свойства функции, выраженной интегралом, например, численными методами, то увидим, что они полностью соответствуют известной функции арксинуса, т.е.

$$t = \arcsin \frac{x}{a}.\tag{2.39}$$

Обращая функцию арксинуса и, вновь беря, за начальные условия $t = 0$, $x = 0$, $p = 1$ получим решение

$$x(t) = \sin t,\tag{2.40}$$

найденное ранее методом подстановки. Зная функцию $x(t)$, можно аналогичным образом проинтегрировать первое уравнение системы (2.34) и получить

$$p(t) = \cos t. \quad (2.41)$$

Если интегрирование произвольной системы дифференциальных уравнений может быть сведено к последовательному вычислению (пусть численному) конечного числа интегралов, то говорят, что решение *выражается в квадратурах*. Решение в квадратурах требует нахождения *интегралов движения* динамической системы, т.е. функций вида $F = F(p, r)$. Необходимое число интегралов определяется числом степеней свободы системы. К сожалению, общего метода нахождения интегралов движения нет и даже нет способа выяснения, есть ли они вообще у произвольной динамической системы.

В результате интегрирования методом подстановки и методом квадратур получаются *аналитические функции*, выражаемые либо явно, либо в форме степенных рядов (в том числе комплексных). Вообще, любое интегрирование, в результате которого получается решение в виде аналитических функций, называется *аналитическим интегрированием*.

3. Численные методы интегрирования

3.1 Численное интегрирование динамических систем

Поскольку точное интегрирование может быть выполнено лишь в немногих случаях, при построении компьютерных моделей осуществляется *численное интегрирование*. Численное интегрирование позволяет получить функции в той или иной степени близкие к точным решениям исходных динамических уравнений.

В основе численного интегрирования лежит задание некоторого алгоритма интегрирования. *Алгоритм интегрирования*, суть, множество вычислительных операций, задающих *процесс численного интегрирования*, который дискретно воспроизводит состояния моделируемого объекта в различные моменты времени в форме некоторых дискретных функций. Конкретный вид алгоритма определяет *метод численного интегрирования*. Главные требования к методам численного интегрирования: *адекватность*, *точность*, *минимальность количества вычислительных операций* и *универсальность*.

Адекватность – способность алгоритма верно (*адекватно*) воспроизводить состояния моделируемого объекта в любой момент времени на основе его начального состояния. Это требование является основным требованием к алгоритму.

Точность – степень близости функций, полученных численным интегрированием, к точному решению динамических уравнений. Точность выражается их разностью и называется *погрешностью* метода численного интегрирования. Адекватность и точность не всегда оказываются эквивалентными требованиями.

Минимальность количества вычислительных операций в алгоритме – один из важнейших факторов, обеспечивающих увеличение скорости процесса интегрирования.

Универсальность – применимость алгоритма к различным системам динамических уравнений.

Очевидно, что требование адекватности эквивалентно требованию существования модельного отношения между моделью и оригиналом. В этой связи, ближайшей целью будет математическая формализация процессов движения и численного интегрирования.

3.2 Динамические процессы

Ранее определили динамические процессы как процессы, которые могут быть выражены в форме второго закона Ньютона. Дадим более строгое определение.

Под динамическими процессами будем понимать всевозможные эволюционные процессы, обладающие свойствами *детерминированности*, *конечномерности* и *дифференцируемости* [5]. Для конкретного процесса эти свойства могут быть установлены только экспериментально.

Процесс называется *детерминированным*, если его состояние в любой момент времени, как в прошлом, так и в будущем, определено состоянием в некоторый начальный момент времени. Множество всевозможных состояний процесса называется *фазовым пространством*. Например, в гамильтоновой системе фазовое пространство определяется множеством всевозможных положений и импульсов материальных точек и может быть выражено в форме точек линейного, евклидова пространства $W = W(p, r)$.

Процесс называется *конечномерным*, если его фазовое пространство конечномерно. Например, фазовое пространство гармонического осциллятора равно двум $W^2(p, r) = W(p, x)$, фазовое пространство движущейся в пространстве материальной точки равно шести $W^6(p, r) = W(p_x, p_y, p_z, x, y, z)$, а системы n точек равно $6n$ $W^{6n}(p, r) = W_1^6 \times \dots \times W_n^6$. Размерность фазового пространства определяется удвоенным *числом степеней свободы*, т.е. минимальным количеством координат, однозначно определяющих положение системы.

Процесс называется *дифференцируемым*, если функции, определяющие состояние процесса, дифференцируемы. Так, например, координаты и импульсы реальной механической системы $p_x = p_x(t)$, $x = x(t), \dots$ изменяются во времени дифференцируемым образом. Те же величины, воспроизводимые процессом численного интегрирования, суть, дискретные функции, поэтому численное интегрирование - не дифференцируемый процесс.

С другой стороны, численное интегрирование и моделируемый процесс, суть, два конечномерных детерминированных процесса и, следовательно, между ними может быть установлено некоторое отношение эквивалентности. Следовательно, решение проблемы модельного отношения получает дальнейшую конкретизацию, а именно, требуется найти алгоритм интегрирования, реализующий модельное отношение между моделируемым процессом и процессом интегрирования по *признакам конечномерности и детерминированности*. Это требование исчерпывает требование адекватности.

Подчеркнём, что использование вида вычислительных средств, осуществляющих процесс численного интегрирования, будь то компьютер, калькулятор, арифмометр или даже сам человек (при устном счёте или на бумаге «столбиком»), не связан с адекватностью получаемых результатов, но позволяет увеличить скорость процесса интегрирования, в частности, осуществлять интегрирование в режиме реального времени.

3.3 Гамильтонова динамическая система

Процессы, обладающие свойствами детерминированности, конечномерности и дифференцируемости, выражаются динамическими уравнениями, которые имеют форму обыкновенных дифференциальных уравнений. Частным случаем динамических систем является динамическая система Гамильтона[1-4], которую положим в основу математического аппарата численного интегрирования уравнений движения.

Гамильтонова система, суть, $2n$ -мерное фазовое пространство координат и импульсов

$$W^{2n}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = W(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \quad (3.1)$$

с заданной на нём функцией Гамильтона, которая представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергии

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \dots + \frac{\mathbf{p}_n^2}{2m_n} + U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n). \quad (3.2)$$

Динамические уравнения выражаются через функцию Гамильтона в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{p}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} &= -\frac{\partial H(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_1}, \dots, \frac{d\mathbf{p}_n}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_n}, \\ \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} &= \frac{\partial H(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{p}_1}, \dots, \frac{d\mathbf{x}_n}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{p}_n}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поскольку смысл объективных законов имеют динамические уравнения (3.3) или (3.4), то функция Гамильтона определена с точностью до произвольной константы C_H , прибавление которой не меняет динамических уравнений.

Гамильтонова система *консервативна*, это означает, что функция Гамильтона является интегралом движения

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = H_0 = \text{const.} \quad (3.5)$$

Поэтому действующие в системе силы: во-первых, не могут зависеть от скоростей и времени; во-вторых, являются потенциальными, т.е.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\text{grad } U(\mathbf{r}) \quad (3.6)$$

или в координатной форме:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = -\text{grad } U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n). \quad (3.7)$$

Начальные условия определяются заданием значений всех импульсов и координат в начальный момент времени t_0 , т.е. фазовой точки

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \equiv \mathbf{w}_0(\mathbf{p}_{10}, \dots, \mathbf{p}_{n0}, \mathbf{x}_{10}, \dots, \mathbf{x}_{n0}). \quad (3.8)$$

Теорема Коши гарантирует существование единственного решения системы (3.3) с начальными условиями (3.8), которое может быть выражено в фазовой

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(t), \quad (3.9)$$

векторной

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}(t), \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t), \end{aligned} \quad (3.10)$$

или координатной формах

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_l &= \mathbf{p}_l(t), \dots, \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n(t); \\ \mathbf{r}_l &= \mathbf{r}_l(t), \dots, \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Фазовая траектория $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$, суть, кривая в $2n$ -мерное фазовое пространство координат и импульсов (рис. 3.1).

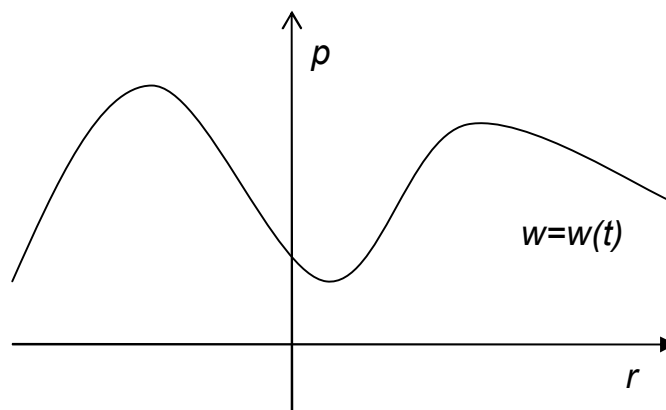


Рисунок 3.1 - Фазовая траектория точки

Общий вид гамильтоновой системы, определённой на $2n$ - мерном фазовом пространстве (3.1) - (3.8), имеет достаточно громоздкую форму записи, которая затрудняет понимание содержательной части рассуждений.

В дальнейшем будем использовать по возможности малые размерности фазового пространства, выполняя по необходимости индукционные обобщения. Иными словами, традиционному дедуктивному изложению предпочтём индуктивное - «от простого к сложному, от частного к общему».

Пример 4. Задача трёх тел.

Пусть в пространстве $OXYZ$ движутся три материальные точки с массами m_1, m_2, m_3 , взаимодействующие между собой по закону всемирного тяготения Ньютона

$$\mathbf{F}_{ij} = \gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j, \quad (3.12)$$

где γ - постоянная всемирного тяготения.

Фазовое пространство системы - 18-ти мерное пространство $\mathbf{R}^{18}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ всех импульсов и координат материальных точек. Потенциальная энергия системы выразится в виде

$$U = \gamma \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{31}} \right), \quad (3.13)$$

где $r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$, $r_{23} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}$, $r_{31} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2}$ - расстояния между точками.

Запишем функцию Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m_1}(\mathbf{p}_{1x}^2 + \mathbf{p}_{1y}^2 + \mathbf{p}_{1z}^2) + \frac{1}{2m_2}(\mathbf{p}_{2x}^2 + \mathbf{p}_{2y}^2 + \mathbf{p}_{2z}^2) + \frac{1}{2m_3}(\mathbf{p}_{3x}^2 + \mathbf{p}_{3y}^2 + \mathbf{p}_{3z}^2) + \gamma \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{31}} \right) \quad (3.14)$$

Система (3.4) динамических уравнений задачи трёх тел запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_{ix}}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad \frac{d\mathbf{p}_{iy}}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}_i}, \quad \frac{d\mathbf{p}_{iz}}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{z}_i}; \\ \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} &= \frac{\mathbf{p}_{ix}}{m_i}, \quad \frac{d\mathbf{y}_i}{dt} = \frac{\mathbf{p}_{iy}}{m_i}, \quad \frac{d\mathbf{z}_i}{dt} = \frac{\mathbf{p}_{iz}}{m_i}; \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Начальные условия выражаются заданием фазовых координат трёх точек в начальный момент времени

$$\mathbf{p}_{ix0}, \mathbf{p}_{iy0}, \mathbf{p}_{iz0}, \mathbf{x}_{i0}, \mathbf{y}_{i0}, \mathbf{z}_{i0}; \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.16)$$

Задача трёх тел не имеет решения в квадратурах.

3.4 Системы с дискретным временем

Численное интегрирование динамических уравнений можно определить как *детерминированный, конечномерный процесс с дискретным временем*. Рассмотрим этот вопрос на примере одномерного движения точки в потенциальном поле. Фазовое пространство в этом случае двумерно, т.е. является плоскостью.

Пусть на фазовой плоскости $W^2 = W^2(p, x)$ определена гамильтонова система

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + U(x), \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H(p, x)}{\partial x}; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H(p, x)}{\partial p}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Зафиксируем некоторую точку $w_0 \in W^2$ фазовой плоскости и рассмотрим *точноерешение системы* (3.18) $p = p(t)$, $x = x(t)$, выбирая эту точку в качестве начальных условий $w_0 = w(x_0, p_0)$, $t_0 = 0$. Тогда положение точки в момент времени t определяется её координатами на фазовой плоскости и представляет собой параметрическую функцию времени

$$w(t) = w(p(t), x(t)) \quad (3.19)$$

где

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 - \int_0^t \frac{\partial H(p, x)}{\partial x} dt; \\ x(t) &= x_0 + \int_0^t \frac{\partial H(p, x)}{\partial p} dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Функция (3.19), очевидно, описывает детерминированный процесс, т.е. обладает свойствами детерминированности, конечномерности и дифференцируемости. График функции, суть, фазовая траектория. В динамической системе (3.18) время непрерывно.

Перейдём к системам с дискретным временем. Для этого возьмем некоторый малый параметр $\tau \in \mathbb{R}_+$, определяющий величину временного шага, и определим дискретную функцию времени

$$t_n = \pm n\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

Знак плюс определяет направление из прошлого в будущее, а минус -из будущего в прошлое, поскольку в механике время *обратимо* или, как говорят,*изотропно*.

Вновь возьмём за исходную точку $w_0 \in W^2$ фазового пространства и определим *элементарное преобразование*, переводящее эту точку из начального положения $w = w(x_0, p_0)$ в момент $t = 0$, в положение $w = w(x, p)$ в момент $t = \tau$, тогда

$$w(\tau) = w(p(\tau), x(\tau)) \quad (3.22)$$

где

$$\begin{aligned} p(\tau) &= p_0 - \int_0^\tau \frac{\partial H(p, r)}{\partial x} dt; \\ x(\tau) &= x_0 + \int_0^\tau \frac{\partial H(p, r)}{\partial p} dt. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Повторяя процедуру и делая индукционное обобщение, приходим к *точному дискретному решению* системы динамических уравнений (3.17)

$$w(n_\tau) = w(p(n_\tau), x(n_\tau)) \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} p(n_\tau) &= p_0 - \int_0^\tau \frac{\partial H(p, x)}{\partial r} dt - \int_\tau^{2\tau} \frac{\partial H(p, x)}{\partial x} dt - \dots - \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \frac{\partial H(p, x)}{\partial x} dt; \\ x(n_\tau) &= x_0 + \int_0^\tau \frac{\partial H(p, r)}{\partial p} dt + \int_\tau^{2\tau} \frac{\partial H(p, x)}{\partial p} dt + \dots + \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \frac{\partial H(p, x)}{\partial p} dt, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $w = w(n_\tau)$, $p = p(n_\tau)$, $x = x(n_\tau)$ дискретные функции дискретного времени.

Точное дискретное решение, суть, детерминированный процесс из настоящего в будущее. Изменение направления достигается преобразованием $\tau \rightarrow -\tau$.

Функции, переводящие фазовые точки из начального положения в последующие, принято называть операторами преобразования.

Запишем (3.22) в «операторной» форме

$$w(\tau) = S_\tau w(p_0, x_0) = w(S_\tau p_0, S_\tau x_0) \quad (3.26)$$

где S_τ - оператор интегрирования, определяемый преобразованиями (3.23)

$$\begin{aligned} p(\tau) &= S_\tau p_0; \\ x(\tau) &= S_\tau x_0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ясно, что последовательное применение оператора $S_\tau \equiv S_\tau^I$ есть оператор преобразования, поэтому можно определить их произведение

$$S_\tau^I \circ S_\tau^I = S_\tau^{I^2} \quad \text{или в общем виде} \quad S_\tau^i \circ S_\tau^j = S_\tau^{i+j}. \quad (3.28)$$

Тогда дискретные функции (3.24), (3.25) запишутся кратко

$$\mathbf{w}(n_t) = S_\tau^n \mathbf{w}_0; \quad \mathbf{p}(n_t) = S_\tau^n \mathbf{p}_0; \quad \mathbf{x}(n_t) = S_\tau^n \mathbf{x}_0. \quad (3.29)$$

Для оператора S_τ^l можно определить обратный оператор S_τ^{-1} , подставляя в преобразованиях (3.23) $-\tau$ в верхние пределы интегрирования. Тогда $S_\tau^{-1} \circ S_\tau^1 = S_\tau^0$, где S_τ^0 - тождественный оператор, т.е. оператор, оставляющий фазовую точку на месте. Но тогда для каждого оператора S_τ^i определён обратный оператор S_τ^{-i} , такой что $S_\tau^{-i} \circ S_\tau^i = S_\tau^0$.

Построенная алгебраическая структура называется группой и может быть определена для любой точки фазового пространства, где определена функция Гамильтона. В этой связи она называется *группой дискретных преобразований фазового пространства* S_τ^n (плоскости) по параметру τ .

Не составляет труда выполнить индукционное обобщение и построить группу преобразований для гамильтоновой системы, определённой на фазовом пространстве $W^{2n}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ функцией Гамильтона (3.2). В частности, элементарные преобразования S_τ , порождающие группу S_τ^n , могут быть записаны в векторной форме

$$\mathbf{w}(\tau) = \mathbf{w}(\mathbf{p}(\tau), \mathbf{r}(\tau)) \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\tau) &= \mathbf{p}_0 - \int_0^\tau \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} dt \equiv S_\tau \mathbf{p}_0; \\ \mathbf{r}(\tau) &= \mathbf{r}_0 + \int_0^\tau \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{p}} dt \equiv S_\tau \mathbf{r}_0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

а дискретные функции траектории фазовой точки, n -мерных импульса и радиус вектора запишутся в форме

$$\mathbf{w}(n_t) = S_\tau^n \mathbf{w}_0; \quad \mathbf{p}(n_t) = S_\tau^n \mathbf{p}_0; \quad \mathbf{r}(n_t) = S_\tau^n \mathbf{r}_0. \quad (3.32)$$

В общем случае, вид этих преобразований неизвестен, поскольку подразумевает точное интегрирование системы (3.3). В тоже время, теорема Коши гарантирует их существование и единственность.

3.5 Представление алгоритма степенными рядами

Основная идея численного интегрирования [6] заключается в нахождении некоторых элементарных преобразований (алгоритмов) A_τ , близких по результатам действия к точным элементарным преобразованиям S_τ , т.е.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} A_\tau = S_\tau. \quad (3.33)$$

Тогда группа A_t^n , образованная на основе оператора A_t обеспечит процесс численного интегрирования системы (3.3). Если при этом параметр τ достаточно мал, то можно надеяться, что и общий результат будет мало отличаться от точного решения. Попробуем обосновать наши эвристические соображения.

Вновь обратимся к одномерной модели и представим интегралы элементарного преобразования (3.23) в виде степенного ряда. Для этого разложим подинтегральные функции

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H(p, x)}{\partial x} &\equiv -H_x; \\ \frac{\partial H(p, x)}{\partial p} &\equiv H_p, \end{aligned} \quad (3.34)$$

в момент $t_0 = 0$ в ряд по степеням малости dt , считая, что функция Гамильтона дифференцируема сколь угодно число раз

$$\begin{aligned} H_x(t_0 + dt) &= H_x dt + \frac{1}{2!} d_t^1 H_x dt^2 + \frac{1}{3!} d_t^2 H_x dt^3 + \dots; \\ H_p(t_0 + dt) &= H_p dt + \frac{1}{2!} d_t^1 H_p dt^2 + \frac{1}{3!} d_t^2 H_p dt^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.35)$$

Если параметр dt достаточно мал, то ряды сходятся.

Подставляя выражения (3.35) в (3.23) и интегрируя, получим решение в форме степенного ряда

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}_0 + f_p^1 \tau + \frac{1}{2!} f_p^2 \tau^2 + \frac{1}{3!} f_p^3 \tau^3 + \dots; \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x} + f_x^1 \tau + \frac{1}{2!} f_x^2 \tau^2 + \frac{1}{3!} f_x^3 \tau^3 + \dots, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где f_p^i, f_x^i , коэффициенты разложения при степенях малости (3.36).

Выпишем первые коэффициенты в явном виде

$$\begin{aligned} f_p^1 &= -H_x; \\ f_x^1 &= H_p; \\ f_p^2 &= -H_{xx} H_p + H_{px} H_x; \\ f_x^2 &= H_{pp} H_x - H_{px} H_x; \\ f_p^3 &= H_x H_{pp} H_{xx} + 2H_p H_x H_{pxx} - H_p^2 H_{xxx} - H_x^2 H_{ppx} - H_x H_{px}^2; \\ f_x^3 &= -H_p H_{pp} H_{xx} - 2H_p H_x H_{ppx} + H_x^2 H_{ppp} + H_x^2 H_{pxx} + H_p H_{px}^2. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Нижними индексами у гамильтонианов обозначены частные производные.

Обрывая ряды (3.36) на фиксированных членах разложения, получим элементарные преобразования $A_{p\tau}, A_{x\tau}$ для алгоритмов различных классов точности. Классом точности алгоритма называется степень параметра τ у последнего из удерживаемых членов ряда. В частности, если в разложениях (3.36) ограничиться выписанными членами ряда, то получим алгоритм третьего порядка, который запишется в виде

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = A_{p\tau} p^{(i)} \equiv p^{(i)} + f_p^1(p^{(i)}, x^{(i)})\tau + \frac{1}{2!} f_p^2(p^{(i)}, x^{(i)})\tau^2 + \frac{1}{3!} f_p^3(p^{(i)}, x^{(i)})\tau^3; \\ x^{(i+1)} = A_{x\tau} x^{(i)} \equiv x^{(i)} + f_x^1(p^{(i)}, x^{(i)})\tau + \frac{1}{2!} f_x^2(p^{(i)}, x^{(i)})\tau^2 + \frac{1}{3!} f_x^3(p^{(i)}, x^{(i)})\tau^3; \end{cases} \quad (3.38)$$

$$p^{(0)} = p_0; x^{(0)} = x_0.$$

Параметр τ называется *шагом численного интегрирования*. Чем меньше выбранный шаг, тем больше точность вычислений $w = w(n_\tau), p = p(n_\tau), x = x(n_\tau)$.

Полученный метод численного интегрирования называется методом *разложения в степенной ряд*. Его недостатком является использование старших производных, комбинация которых быстро усложняется с возрастанием удерживаемых коэффициентов разложения. Кроме того, во многих случаях старшие производные вообще не могут быть выражены в виде удобных для вычисления функций.

Основное назначение степенных рядов (3.36) заключается в определении точности вновь полученного алгоритма интегрирования посредством его сравнения с разложениями (3.36). Если преобразования фазовой плоскости, осуществляемые каким-либо алгоритмом, эквивалентны разложению в ряд (3.36) до членов, пропорциональных τ^n , то такой алгоритм считается *n-го класса (порядка) точности*.

3.6 Методы Эйлера и Рунге-Кутты

Простейший метод численного интегрирования может быть получен, если в разложениях (3.36) оставить только линейные члены. Иными словами, для одномерной системы (3.17) алгоритм имеет вид (3.39) или, подставляя выражение функции Гамильтона (3.17) получим алгоритм вида (3.40)

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = p^{(i)} - \frac{\partial H(p^{(i)}, x^{(i)})}{\partial x} \tau; \\ x^{(i+1)} = x^{(i)} + \frac{\partial H(p^{(i)}, x^{(i)})}{\partial p} \tau \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = p^{(i)} - \frac{\partial U(x^{(i)})}{\partial x} \tau; \\ x^{(i+1)} = x^{(i)} + \frac{p^{(i)}}{m} \tau. \end{cases} \quad (3.40)$$

Этот метод называется методом Эйлера [6,7]. Его недостатки - малая точность и систематическое накопление погрешности. Тем не менее, вследствие своей простоты он часто применяется для первичного исследования динамических систем. Метод Эйлера легко распространяется на многомерный случай (3.3).

Пример 5. Алгоритм Эйлера для уравнений гармонического осциллятора.

Динамические уравнения гармонического осциллятора (2.10) имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -k \cdot x; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m}\end{aligned}\tag{3.41}$$

имеет вид

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = p^{(i)} - k \cdot x^{(i)} \tau; \\ x^{(i+1)} = x^{(i)} + \frac{p^{(i)}}{m} \tau; \end{cases}\tag{3.42}$$

$$p^{(0)} = p_0, \quad x^{(0)} = x_0.$$

Имеется много модификаций метода Эйлера, которые позволяют увеличить его точность [3]. Рассматривать их не будем, имея в виду дальнейшее нахождение значительно более мощных методов численного интегрирования.

В качестве альтернативы вычисления старших производных интегрируемой функции в методе разложения в степенной ряд можно попробовать вычислить несколько её значений в окрестности исходной точки фазового пространства и, используя эту дополнительную информацию, определить приближенно приращения искомой функции. Одним из методов, реализующих эту концепцию, является метод Рунге-Кутты [6,7].

Поясним реализацию этого метода на одномерной системе с гамильтонианом (3.17). Перепишем динамические уравнения системы в виде

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H(p, x)}{\partial x} = H_x(p, x); \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H(p, x)}{\partial p} = H_p(p, x).\end{aligned}\tag{3.43}$$

Согласно основной идее, вместо вычисления производных по времени от функций $H_x(p, x)$, $H_p(p, x)$ в исходной точке фазового пространства $w(p_0, x_0)$, будем вычислять сами эти функции в окрестности исходной точки, т.е. $H_x(p + \delta p, x + \delta x)$, $H_p(p + \delta p, x + \delta x)$.

При этом логично предположить, что если намерены, получит метод n порядка, придётся вычислить n значений для каждой функции.

Приведём алгоритм Рунге-Кутты 4-го порядка, который наиболее часто используется в научно-технических расчётах

$$\begin{cases}
 k_1 = H_x(p^{(i)}, x^{(i)})\tau; & m_1 = H_p(p^{(i)}, x^{(i)})\tau; \\
 k_2 = H_x(p^{(i)} + 0,5k_1, x + 0,5m_1)\tau; & m_2 = H_p(p^{(i)} + 0,5k_1, x + 0,5m_1)\tau; \\
 k_3 = H_x(p^{(i)} + 0,5k_2, x + 0,5m_2)\tau; & m_3 = H_p(p^{(i)} + 0,5k_2, x + 0,5m_2)\tau; \\
 k_4 = H_x(p^{(i)} + k_3, x + m_3)\tau; & m_4 = H_p(p^{(i)} + k_3, x + m_3)\tau; \\
 p^{(i+1)} = A_{пр} p^{(i)} \equiv p^{(i)} + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4); \\
 x^{(i+1)} = A_{хт} x^{(i)} \equiv x^{(i)} + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4).
 \end{cases} \quad (3.44)$$

Погрешность алгоритма порядка τ^5 . За высокую точность метода приходится платить громоздкими вычислениями, снижающими скорость процесса интегрирования.

Пример 6. Свободные колебания плоского математического маятника (рис.3.2). Математический маятник, суть, закреплённая на невесомом нерастяжимом стержне длиной l материальная точка массой m .

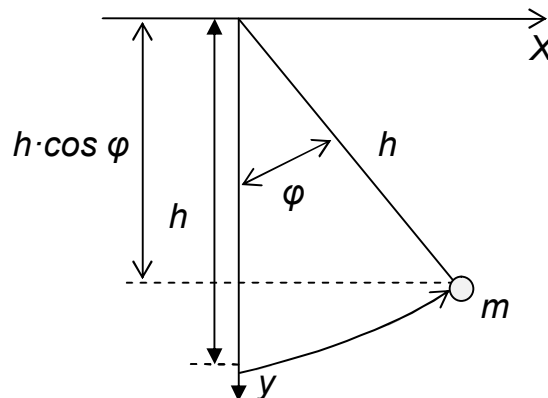


Рисунок 3.2 - Плоский математический маятник.

Под действием силы тяжести точка совершает колебательные движения относительно точки закрепления стержня. При достаточно большой скорости колебательное движение точки переходит во вращательное. Если движения происходят в одной плоскости, то маятник называется *плоским*.

Найдем алгоритм интегрирования Рунге-Кутты для плоского маятника. Начнём с построения динамической модели. Если вместо декартовых координат (x, y) , указывающих положение точки на плоскости, взять угол отклонения от положения равновесия φ , то задача становится одномерной. Но в этом случае вместо импульса $p = m \cdot v$ необходимо взять *момент импульса* $L = J \cdot \omega$, где $J = m \cdot h_0^2$ - *момент инерции*, который для вращательного движения

выполняет функцию массы («вращательная масса»). Таким образом, фазовым пространством точки будет плоскость $W^2 = W(L, \varphi)$, а её фазовая траектория $w(t) = w(L, \varphi)$ определяется функциями $\varphi = \varphi(t)$, $L(t) = m h^2 \omega(t)$, которые необходимо найти.

Найдем функцию Гамильтона плоского маятника. Для этого заметим, что формально кинетическая энергия вращательного движения выражается так же, как и поступательного

$$T = \frac{L^2}{2J}. \quad (3.45)$$

Что же касается потенциальной энергии, то она (рис. 3.2) имеет вид

$$U(\varphi) = m g h = m g h_0 - m g h_0 \cos \varphi. \quad (3.46)$$

Постоянный член $m g h_0$ можно опустить, поскольку он всё равно обратится в ноль при взятии частной производной H_φ в динамических уравнениях. Поэтому функцию Гамильтона можно записать в виде:

$$H(L, \varphi) = \frac{L^2}{2J} - m g h_0 \cos \varphi. \quad (3.47)$$

Найдём динамические уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H(L, \varphi)}{\partial \varphi} = -m g h_0 \cdot \sin \varphi; \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial H(L, \varphi)}{\partial L} = \frac{L}{J}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Запишем алгоритм Рунге-Кутты 4-го порядка, используя формулы (3.44) и делая в них замену $p \rightarrow L$, $x \rightarrow \varphi$

$$\begin{aligned} k_1 &= -m g h_0 \cdot \sin \varphi^{(i)} \cdot \tau; & m_1 &= J^{-1} L^{(i)} \cdot \tau; \\ k_2 &= -m g h_0 \cdot \sin(\varphi^{(i)} + 0,5 m_1) \cdot \tau; & m_2 &= J^{-1} (L^{(i)} + 0,5 k_1) \cdot \tau; \\ k_3 &= -m g h_0 \cdot \sin(\varphi^{(i)} + 0,5 m_2) \cdot \tau; & m_3 &= J^{-1} (L^{(i)} + 0,5 k_2) \cdot \tau; \\ k_4 &= -m g h_0 \cdot \sin(\varphi^{(i)} + m_3) \cdot \tau; & m_4 &= J^{-1} (L^{(i)} + k_3) \cdot \tau; \\ L^{(i+1)} &= L^{(i)} + \frac{1}{6} (k_1 + k_2 + k_3 + k_4); \\ \varphi^{(i+1)} &= \varphi^{(i)} + \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Переход к декартовым координатам движения точки для анимационной модели осуществляется по формулам

$$\begin{aligned}x &= X_0 + h_0(1 + \cos \varphi), \\y &= Y_0 + h_0 \sin \varphi,\end{aligned}\tag{3.50}$$

где X_0, Y_0 - координаты точки подвеса маятника.

3.7 Построение компьютерной модели

Выполненная математическая формализация динамического процесса на основе использования гамильтоновой механики позволяет выделить следующие основные этапы-процедуры создания компьютерной модели (рис. 3.3).

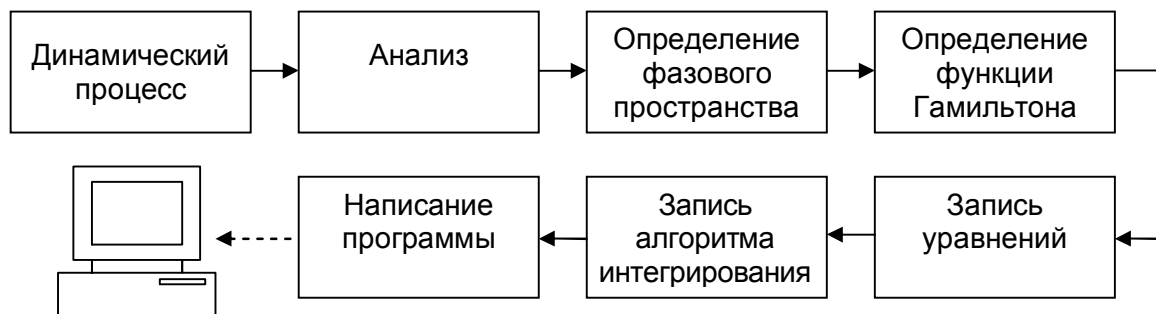


Рисунок 3.3- Процедуры создания компьютерной модели динамического процесса на основе использования гамильтоновой механики

Анализ, расчленение исследуемого процесса на его элементарные составляющие - степени свободы и определения связей между ними - законов взаимодействия.

Построение фазового пространства, т.е. координатно-импульсного пространства $W^{2n} = W(p, r)$. При этом необходимо иметь в виду следующее обстоятельство. Выбор минимально-возможной размерности, фазового пространства, соответствующей удвоенному числу степеней свободы, приводит к уменьшению числа динамических уравнений в системе, но при этом, как правило, возрастает сложность и громоздкость самих уравнений. Поэтому при построении компьютерной модели, в каждом конкретном случае, необходимо выбирать «золотую середину» между двумя этими факторами.

Нахождение функции Гамильтона. Процедура заключается в записи закона сохранения энергии как суммы кинетической и потенциальной энергии с последующим выражением кинетической энергии через импульсы фазового пространства.

Запись системы динамических уравнений. Процедура осуществляется на основе использования функции Гамильтона по формулам (3.3).

Запись алгоритма интегрирования включает выбор метода численного интегрирования и запись динамических уравнений в форме элементарного преобразования фазового пространства.

Написание компьютерной программы, реализующей численное интегрирование динамических уравнений на компьютере.

Использование процедур рассмотрим на примере.

Пример 6. Две последовательно соединённые пружинные массы

На рисунке 3.4 представлена многомассовая колебательная система в виде системы сосредоточенных абсолютно твёрдых инерциальных элементов (масс) m_1, m_2 , соединённых безинерциальными упругими (нелинейными) элементами k_1, k_2 .

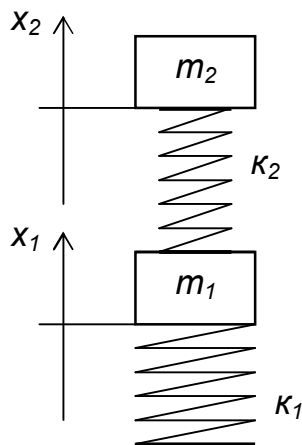


Рисунок 3.4 - Последовательно соединенные пружинные массы

1. Анализ. Система включает две структурные единицы, которые принимаем за материальные точки массами m_1, m_2 . Предполагаем, что сила упругих элементов (пружин) пропорциональна смещению от нейтрального положения (закон Гука)

$$F(x) = -k \cdot x. \quad (3.51)$$

Коэффициенты жёсткости элементов обозначаем k_1, k_2 .

2. Построение фазового пространства. Фазовое пространство системы, суть, четырёх мерное пространство импульсов и координат

$$W^4 = W(p_1, p_2, x_1, x_2). \quad (3.52)$$

3. Нахождение функции Гамильтона. Силы упругости (3.51) потенциальны

$$F(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x}. \quad (3.53)$$

Определяем потенциальную энергию пружин. Силы, действующие со стороны пружин на первую и вторую материальные точки, будут

$$\begin{aligned} F_1 &= -k_1 x_1; \\ F_2 &= -k_1 x_1 - k_2 x_2. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Тогда их потенциальная энергия выразится в виде

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{k_1}{2} (x_2 - x_1)^2; \\ U_2 &= \frac{k_2}{2} x_1^2. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Запишем механическую энергию системы

$$E(v_1, v_2, x_1, x_2) = T + U = \frac{1}{2} \left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \frac{k_1}{2} (x_2 - x_1)^2 + \frac{k_2}{2} x_1^2 \right). \quad (3.56)$$

Делая замену скоростей на импульсы в потенциальной энергии, получаем функцию Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1^2}{m_1} + m_2 \frac{p_2^2}{m_2} + \frac{k_1}{2} (x_2 - x_1)^2 + \frac{k_2}{2} x_1^2 \right). \quad (3.57)$$

4. Запись системы динамических уравнений. Подставляя гамильтониан (3.57) в координатную форму системы (3.4), получим динамические уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -k_1 (x_2 - x_1) - k_2 x_1; \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = k_1 (x_1 - x_2); \\ \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_1}; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m_2}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

5. Запись алгоритма интегрирования. Воспользуемся алгоритмом Эйлера (3.39) и запишем (3.58) в форме элементарного преобразования

$$\begin{cases} p_1^{(i+1)} = p_1^{(i)} + k_1 (x_2^{(i)} - x_1^{(i)}) \tau - k_2 x_1^{(i)} \tau; \\ p_2^{(i+1)} = p_2^{(i)} + k_1 (x_1^{(i)} - x_2^{(i)}) \tau; \\ x_1^{(i+1)} = x_1^{(i)} + \frac{p_1^{(i)}}{m_1} \tau; \\ x_2^{(i+1)} = x_2^{(i)} + \frac{p_2^{(i)}}{m_2} \tau. \end{cases} \quad (3.59)$$

Как было отмечено, преобразование (3,59) оказывается неустойчиво к накоплению погрешности счёта, поэтому удовлетворительная точность процесса численного интегрирования может быть получена только для малых интервалов

движения и при условии достаточной малости шага интегрирования τ . Контроль точности счёта может быть осуществлён по отклонению текущего значения функции Гамильтона от начального значения H_0 в момент $t = 0$.

$$\Delta H^{(i)} = \frac{H^{(i)} - H_0}{H^{(0)}}. \quad (3.60)$$

Можно показать теоретически или при помощи компьютерной реализации алгоритма (3.59), что функция монотонно возрастает. Поэтому, в действительности, вычислительный процесс, построенный на основе преобразований (3.59) воспроизводит некоторую открытую динамическую систему, в которую извне поступает энергия.

4. Каноническое интегрирование

4.1 Преобразования фазовой плоскости в методе Эйлера

Канонический метод численного интегрирования – метод интегрирования, в основе которого лежат бесконечно малые канонические преобразования фазового пространства $W^{2n} = W(p, r)$ [8,9]. Суть этих преобразований разберём на примере гармонического осциллятора, фазовым пространством которого является плоскость $W^2 = W(p, r)$. Функция Гамильтона и уравнения движения гармонического осциллятора который имеет вид

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k \cdot x^2}{2}, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -k \cdot x; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Рассмотрим вид фазовых траекторий $p = p(t)$, $x = x(t)$ при различных начальных условиях $p_0 = p(0)$, $x_0 = x(0)$. Поскольку функция Гамильтона является интегралом энергии, то её величина постоянна и равна значению в начальный момент времени $H_0 = H(p_0, x_0)$. Преобразуя гамильтониан (4.1) к форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} p^2(t) + \frac{1}{b^2} x^2(t) &= 1; \\ a &= \sqrt{2m \cdot H_0}, \quad b = \sqrt{2k^{-1} H_0}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Фазовые траектории гармонического осциллятора, эллипсы с полуосями a, b (рис. 4.1).

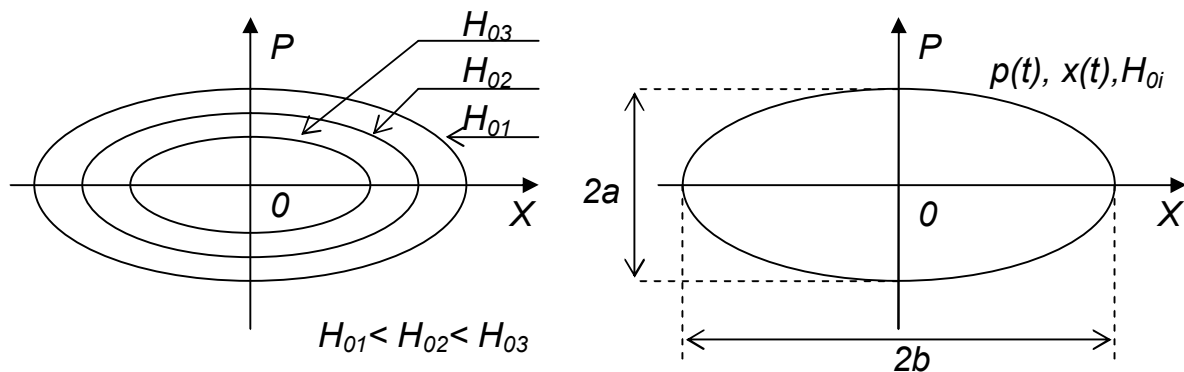


Рисунок 4.1 - Фазовые траектории гармонического осциллятора $p(t)$, $x(t)$

Каждому значению функции Гамильтона H_0 отвечает некоторый уровень энергии, на котором и располагается фазовая траектория. Для упрощения анализа положим $m=1, k=1$, тогда фазовые траектории, суть, окружности радиуса H_0 . За начальные условия будем брать пары $p_0, x_0=0$ при различных значениях импульса. В этом случае все траектории начинаются на оси OP из точек p_0 , а соответствующий уровень энергии определяется просто $H_0 = 0,5 p_0^2$.

Функция Гамильтона, динамические уравнения и их решения, при сделанных допущениях, будут иметь вид

$$H(p, x) = \frac{1}{2}(p^2 + x^2); \quad (4.4)$$

$$\frac{dp}{dt} = -x; \quad (4.5)$$

$$\frac{dx}{dt} = p;$$

$$\begin{aligned} p &= p_0 \cos t; \\ x &= p_0 \sin t. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Перейдём от точного непрерывного решения (4.6) к точному дискретному решению. Для этого введём дискретное время $t_i = t_0 + i\tau$, $i = 1, 2, \dots$ и запишем

$$\begin{aligned} p(t_n) &= p_0 \cos n\tau; \\ x &= p_0 \sin n\tau. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ясно, что фазовые точки дискретного решения лежат на фазовой траектории точного решения – окружности радиуса $\sqrt{2H_0}$.

Выполним численное интегрирование, используя метод Эйлера (3.39). Оператор преобразования фазового пространства E , реализующий алгоритм, Эйлера найдём из уравнений (4.5)

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = E_\tau p^{(i)} \equiv p^{(i)} - x^{(i)}\tau; \\ x^{(i+1)} = E_\tau x^{(i)} \equiv x^{(i)} + p^{(i)}\tau. \end{cases} \quad (4.8)$$

Дискретная фазовая траектория, воспроизводимая вычислительным процессом, осуществляющим преобразование (4.6), можно записать в виде

$$\begin{aligned} p(t_n) &= E^n p_0; \\ x(t_n) &= E^n x_0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Теперь проанализируем полученный результат с точки зрения проблемы модельного отношения динамики модели и оригинала. Предположим, что алгоритм (4.8) реализуется электронной системой компьютера в виде анимационной модели на экране компьютера в режиме реального времени.

Возникает вопрос, какая объективная связь существует между реальным механическим процессом свободных колебаний груза на пружине (оригинала) и не менее реальным электронным процессом, воспроизводящим то же движение на экране, согласно алгоритму Эйлера (модель).

Прежде всего, осуществим логико-математическую формализацию вопроса. Предположим, динамические уравнения (4.5) объективно выражают процесс свободных колебаний груза на пружине. Тогда решение (4.6) - точная математическая модель процесса, а (4.7) - её гомоморфный образ. Чтобы установить какое-либо отношение типа равенства и, например, моделирующее или модельное отношение между процессами, выражаемыми дискретными функциями (4.7) и (4.8), необходимо установить, чей гомоморфный образ представляет процесс (4.8). Иными словами, какие динамические уравнения лежат в его основе (рис. 4.2).



Рисунок 4.2- Формализация связи между оригиналом и моделью гармонического осциллятора

Чтобы ответить на этот вопрос, представим оператор (3.31), точного дискретного решения в виде бесконечного ряда, используя разложения (3.35)

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = S_{\tau} p^{(i)} \equiv p^{(i)} - x^{(i)} \tau - \frac{1}{2!} p^{(i)} \tau^2 + \frac{1}{3!} x^{(i)} + \dots; \\ x^{(i+1)} = S_{\tau} x^{(i)} \equiv x^{(i)} + p^{(i)} \tau - \frac{1}{2!} x^{(i)} \tau^2 - \frac{1}{3!} p_i \tau^3 + \dots \end{cases} \quad (4.10)$$

Сравнивая (4.8) и (4.10), видим, что алгоритм Эйлера можно представить как сумму точного решения (4.10) и некоторого бесконечно малого по параметру τ возмущения

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = E_{\tau} p^{(i)} = S_{\tau} p^{(i)} + \delta S_{\tau} p^{(i)}; \\ x^{(i+1)} = E_{\tau} x^{(i)} = S_{\tau} x^{(i)} + \delta S_{\tau} x^{(i)}, \end{cases} \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned}\delta S_{\tau} p^{(i)} &= -\left(-\frac{1}{2!} p^{(i)} \tau^2 + \frac{1}{3!} x^{(i)} \tau + \dots\right); \\ \delta S_{\tau} x^{(i)} &= -\left(-\frac{1}{2!} x^{(i)} \tau^2 - \frac{1}{3!} p_i \tau^3 + \dots\right).\end{aligned}\tag{4.12}$$

Чтобы определить, каким динамическим уравнениям соответствуют дискретные преобразования (4.11), необходимо в разложениях (4.12) выполнить обратный переход к форме дифференциальных уравнений. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -x + \frac{1}{2} p \tau; \\ \frac{dx}{dt} &= p + \frac{1}{2} x \tau.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Если теперь считать, что динамические уравнения (4.13) точно выражают динамический процесс, воспроизводимый электронной системой компьютера на экране, то можно заключить, что он существенно отличается от процесса-оригинала, выражаемого динамическими уравнениями (4.5). Таким образом, ни моделирующего, ни тем более модельного отношения между ними установить нельзя.

Выясним, какой именно вид движения задают динамические уравнения (4.13). Для этого возведём в квадрат уравнения (4.13) и сложим их, получим

$$\frac{d}{dt}(p^2 + q^2) = \tau(p^2 + q^2).\tag{4.14}$$

Интегрируя (4.14), получим закон изменения гамильтониана

$$p^2 + q^2 = H_0 \exp(\tau \cdot t).\tag{4.15}$$

Таким образом, алгоритм воспроизводит открытую систему, в которую извне поступает энергия. Фазовые траектории такой системы – раскручивающиеся спирали.

Полученные результаты могут быть обобщены на интегрирование произвольных гамильтоновых систем (3.2), (3.3), рассмотренных методов. При этом оказывается, что метод Рунге-Кутты 4-го класса точности воспроизводит открытые системы с диссипацией (утечкой) энергии пропорционально τ^5 , а метод разложения в ряд, открытые системы, поступление или отток энергии из которых зависит от порядка метода. Таким образом, можно сделать вывод, что традиционные методы численного интегрирования оказываются малоприспособленными для моделирования динамических процессов и постановки компьютерного эксперимента.

4.2 Канонические преобразования фазовой плоскости

Вновь рассмотрим преобразования фазового пространства, выполняемого алгоритмом Эйлера (4.8), и выполним в нем следующие изменения. Будем подставлять во второе уравнение вновь вычисленную в первом уравнении динамическую переменную. Тогда получим два сопряжённых преобразования

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = K_\tau p^{(i)} \equiv p^{(i)} - x^{(i)}\tau; \\ x^{(i+1)} = K_\tau x^{(i)} \equiv x^{(i)} + p^{(i+1)}\tau; \end{cases} \quad \begin{cases} x^{(i+1)} = K_\tau x^{(i)} \equiv x^{(i)} + p^{(i)}\tau; \\ p^{(i+1)} = K_\tau p^{(i)} \equiv p^{(i)} - x^{(i+1)}\tau. \end{cases} \quad (4.16)$$

Первое из них получило название «импульс-координата» и обозначение $p \rightarrow q$, поскольку сначала вычисляются новые импульсы, затем – новые координаты, при вычислении которых используются вновь вычисленные импульсы, второе, соответственно, - «координата импульс» и обозначение $q \rightarrow p$. Таким образом, фактически выполняются преобразования

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = K_\tau p^{(i)} \equiv p^{(i)} - x^{(i)}\tau; \\ x^{(i+1)} = K_\tau x^{(i)} \equiv x^{(i)} + p^{(i)}\tau - x^{(i)}\tau^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^{(i+1)} = K_\tau x^{(i)} \equiv x^{(i)} + p^{(i)}\tau; \\ p^{(i+1)} = K_\tau p^{(i)} \equiv p^{(i)} - x^{(i)}\tau - p^{(i)}\tau^2. \end{cases} \quad (4.17)$$

В теории канонического интегрирования [4] доказывается, что преобразования (4.16) принадлежат к классу *бесконечно малых* (по параметру τ) *канонических преобразований* фазовой плоскости. Поясним их суть. Для этого запишем действие канонического оператора K_τ в матричной форме для преобразования импульс-координата

$$\begin{pmatrix} p^{(i+1)} \\ x^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ \tau & 1 - \tau^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p^{(i)} \\ x^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Теперь вычислим определитель матрицы полученной матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & \tau \\ \tau & 1 - \tau^2 \end{vmatrix} = 1 - \tau^2 + \tau^2 \equiv 1. \quad (4.19)$$

Аналогичный результат имеет место для системы координата-импульс. Равенство единице детерминанта преобразования означает наличие в системе, воспроизводимой алгоритмом (4.16), некоторого закона сохранения, типа интеграла энергии, который называется интегральным инвариантом Пуанкаре-Картана. Здесь не будем углубляться в механико-математическую суть этого фундаментального утверждения, а приведём несколько результатов, поясняющих важность полученных результатов.

Пусть на фазовой плоскости $W^2 = W(p, r)$ выделена область $W_0 \subset W^2(p, x)$ площадью S (рис. 4.3).

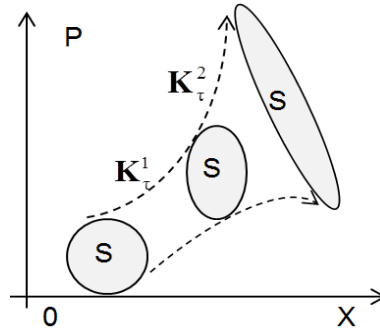


Рисунок 4.3- Сохранение фазовой площади при каноническом преобразовании

Применим ко всем точкам области последовательно какое-либо из канонических преобразований (4.16). В процессе преобразований контур области будет как-то изменяться, но площадь области S остаётся постоянной или инвариантной. Поэтому интегральный инвариант Пуанкаре-Картана ещё называют интегралом площадей или объёмов в многомерном случае.

Метод численного интегрирования, в основе которого лежат канонические преобразования, называется *каноническим методом численного интегрирования*.

Теперь для сравнения вычислим определитель преобразования алгоритма Эйлера (4.8)

$$\begin{vmatrix} 1 & -\tau \\ \tau & 1 \end{vmatrix} = 1 + \tau^2 \neq 1. \quad (4.20)$$

Таким образом, преобразования Эйлера E_τ не являются каноническими, а следствием положительной возмущающей добавки величины τ^2 как раз и является монотонное возрастание энергии на каждом шаге интегрирования.

Аналогичный результат получается для оператора преобразования Рунге-Кутты RK_τ с той разницей, что возмущающая добавка отрицательна и, в соответствие с классом точности алгоритма, имеет порядок $o(\tau^5)$. Следствием этого является указанная диссипация энергии из системы, воспроизводимой алгоритмом.

Особый интерес представляют результаты исследования с точки зрения каноничности алгоритмов, полученных на основе степенных рядов (3.36), поскольку они характеризуют степень не каноничности алгоритмов различного класса точности. Можно показать, что алгоритмы первого и второго классов точности, полученные на основе степенных рядов, воспроизводят системы с монотонным возрастанием энергии на величину порядка $o(\tau^2)$, $o(\tau^3)$ соответственно. Алгоритмы третьего и четвертого порядков воспроизводят системы с монотонным убыванием энергии по порядку величин $o(\tau^4)$, $o(\tau^5)$.

Алгоритмы пятого и шестого порядков вновь приводят к системам с положительной добавкой энергии и т.д. Тем не менее, если взять всю бесконечную сумму степенных рядов, т.е. преобразование (4.10), соответствующее точному решению, то получим каноническое преобразование. Таким образом, реальное механическое движение консервативной системы выражается некоторым каноническим преобразованием фазовой плоскости. В многомерном случае реальному движению будут соответствовать аналогичные преобразования фазового пространства.

4.3 Канонические алгоритмы интегрирования

Рассмотрим действие алгоритмов (4.16) на фазовую точку $p_0 = p(0)$, $x_0 = x(0)$ при интегрировании динамических уравнений (4.13). Для визуальной оценки погрешности счёта намеренно возьмём большой шаг интегрирования, равный $\pi/12$. Контроль результатов будем осуществлять в сравнении с точным дискретным решением (4.7), которому соответствуют 24 координатные точки фазовой плоскости для одного периода колебаний. На рисунке 4.4а приведена точная дискретная траектория для первой четверти периода ($p_0 = 30$ ед., $x_0 = 0$ ед.). Обратим внимание на сохранение площади секторов, как следствие интегрального инварианта. На рисунке 4.4б для сравнения приведена дискретная траектория, полученная преобразованием импульс-координата.

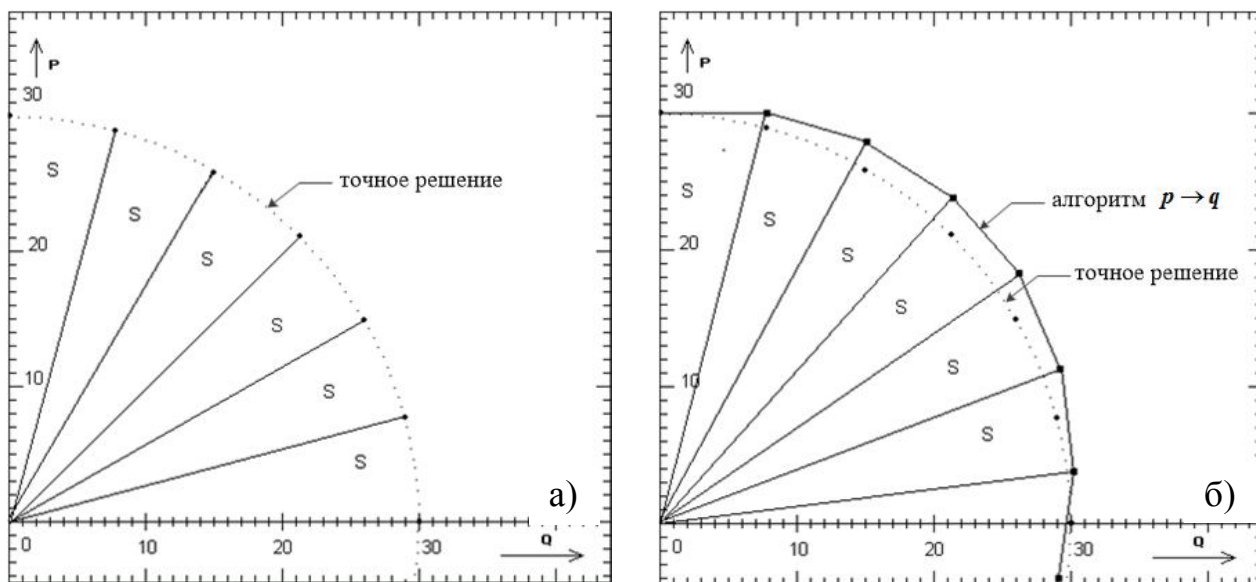


Рисунок 4.4 - Фазовые траектории гармонического осциллятора:

а) точное решение; б) алгоритм $p \rightarrow q$

Поскольку алгоритм осуществляет канонические преобразования, фазовые треугольники вновь оказываются равными по площади, а возмущение проявляется в различии центральных углов треугольников. Таким образом, погрешность численного интегрирования представлена дискретной функцией, осциллирующей относительно точного решения.

Для сравнения рассмотрим дискретную траекторию, полученную на основе алгоритма Эйлера (4.8) при тех же условиях (рис. 4.5).

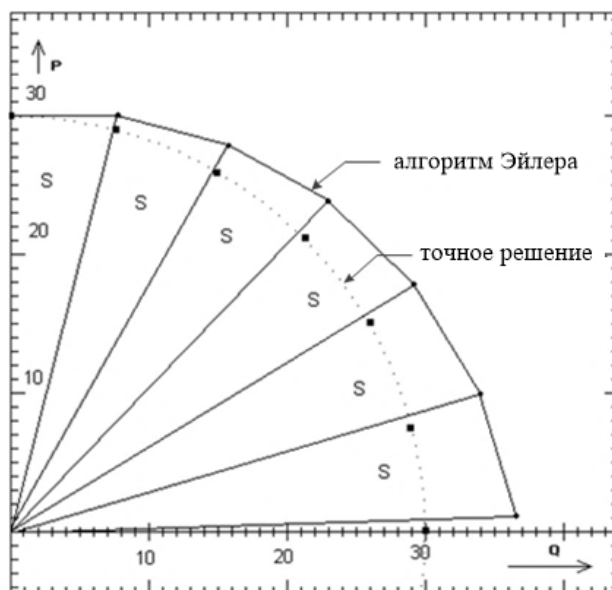


Рисунок 4.5 - Фазовая траектория интегрирования по алгоритму Эйлера

Как видно из рисунка 4.5, следствием не каноничности преобразования, осуществляемого алгоритмом Эйлера, является нарушение закона равенства площадей треугольников, что ведет к неограниченному росту погрешности счета. Полный вид дискретных фазовых траекторий, воспроизводимых алгоритмами за один период, представлен на рисунке 4.6.

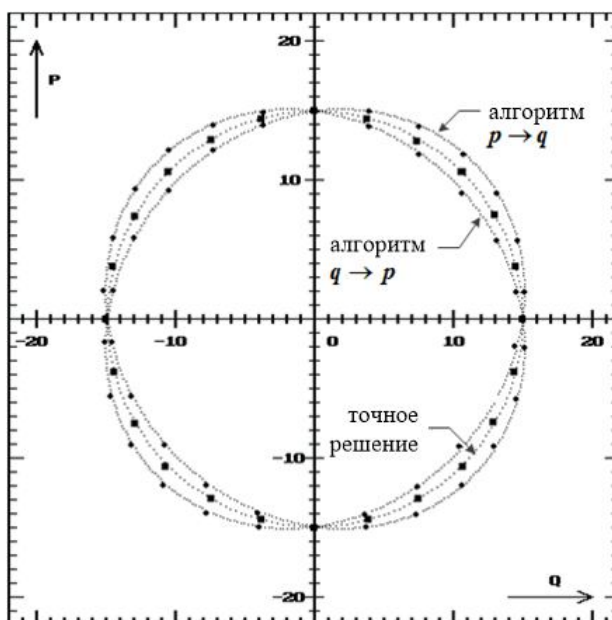


Рисунок 4.6 - Вид фазовых траекторий за один период. Точное решение; алгоритм импульс-координата $p \rightarrow q$; координата-импульс $q \rightarrow p$

Возмущенные траектории, на которой лежат точки канонического интегрирования, представляют собой эллипсы, полученные на основе деформации окружности невозмущенного осциллятора.

Поскольку деформация окружности в эллипсы для алгоритмов импульс-координата и координата-импульс осуществляется «в противофазе», то точность счёта можно повысить, если менять алгоритмы после каждого шага интегрирования, иными словами, использовать канонические преобразования:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p} & \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \\
 & \left\{ \begin{aligned} p^{(i+1)} &= K_\tau p^{(i)} \equiv p^{(i)} - x^{(i)} \tau; \\ x^{(i+1)} &= K_\tau x^{(i)} \equiv x^{(i)} + p^{(i+1)} \tau; \\ x^{(i+2)} &= K_\tau x^{(i+1)} \equiv x^{(i+1)} + p^{(i+1)} \tau; \\ p^{(i+2)} &= K_\tau p^{(i+1)} \equiv p^{(i+1)} - x^{(i+2)} \tau; \end{aligned} \right. & (4.21) & \left\{ \begin{aligned} x^{(i+1)} &= K_\tau x \equiv x^{(i)} + p^{(i)} \tau; \\ p^{(i+1)} &= K_\tau p^{(i)} \equiv p^{(i)} - x^{(i)} \tau; \\ p^{(i+2)} &= K_\tau p^{(i+1)} \equiv p^{(i+1)} - x^{(i+1)} \tau; \\ x^{(i+2)} &= K_\tau x^{(i+1)} \equiv x^{(i+1)} + p^{(i+2)} \tau. \end{aligned} \right. & (4.22)
 \end{aligned}$$

На рисунке 4.7 приведены дискретные траектории для первой четверти периода, полученные на основе обоих преобразований.

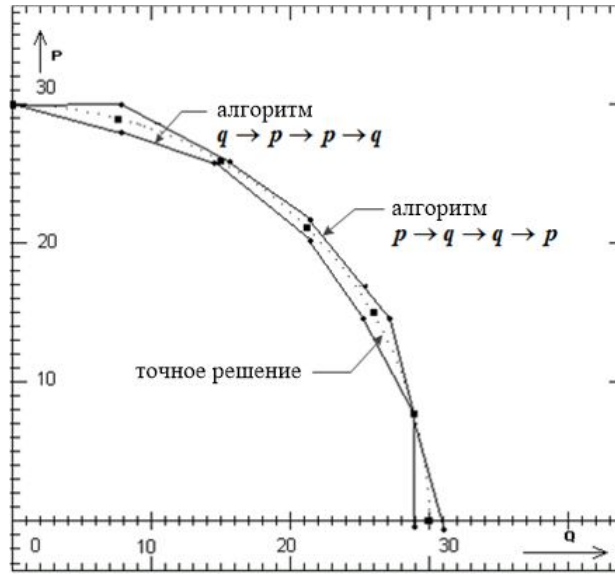


Рисунок 4.7 -Дискретные фазовые траектории на основе последовательного применения канонических методов

Подчеркнём, что возрастание точности достигнуто без увеличения суммарного количества вычислительных операций процесса интегрирования.

Ещё один способ увеличения точности интегрирования может быть получен посредством параллельного счёта по алгоритмам импульс-координата и координата-импульс с последующим усреднением результата.

$$\left\{ \begin{aligned} p_I^{(i+1)} &= K_\tau p_I^{(i)} \equiv p_I^{(i)} - x_I^{(i)} \tau; \\ x_I^{(i+1)} &= K_\tau x_I^{(i)} \equiv x_I^{(i)} + p_I^{(i+1)} \tau; \\ x_{II}^{(i+1)} &= K_\tau x_{II}^{(i)} \equiv x_{II}^{(i)} + p_{II}^{(i)} \tau; \\ p_{II}^{(i+1)} &= K_\tau p_{II}^{(i)} \equiv p_{II}^{(i)} - x_{II}^{(i+1)} \tau; \\ p^{(i+1)} &= \frac{p_I^{(i+1)} + p_{II}^{(i+1)}}{2}; \\ x^{(i+1)} &= \frac{x_I^{(i+1)} + x_{II}^{(i+1)}}{2}. \end{aligned} \right. \quad (4.23)$$

Хотя преобразование усреднения не является канонической операцией, расположение фазовой траектории «в вилке» между двумя каноническими траекториями не приводит к накоплению погрешности счёта. Малое значение погрешности алгоритма с усреднением не позволяет визуально наблюдать отклонение фазовой траектории этого алгоритма от точного решения. Поэтому в этом случае погрешность счёта можно оценивать по отклонению текущего значения гамильтониана от значения, определяемого начальными условиями.

Интегрирование по каноническим алгоритмам приводит к увеличению периода колебаний возмущенных гармонических осцилляторов таким образом, что полученные периоды оказываются, вообще говоря, в некотором иррациональном отношении к исходному периоду, что отвечает нелинейности возмущенной системы.

На рисунке 4.8 показано накопление временной погрешности за время $3T$ для указанных алгоритмов.

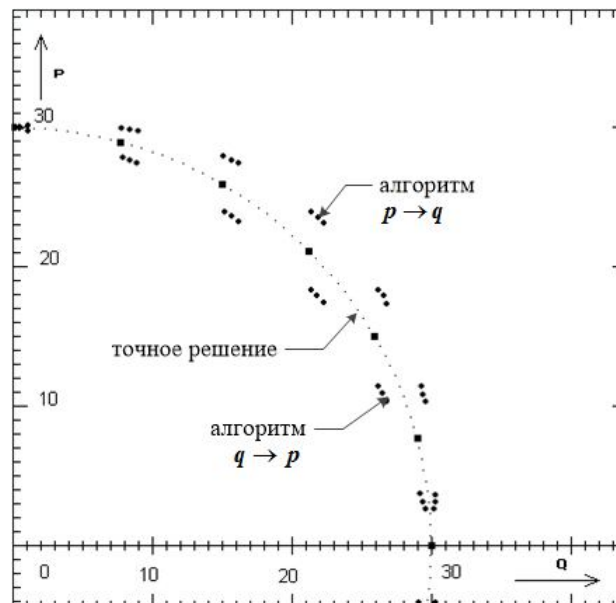


Рисунок 4.8 - Накопление временной погрешности при интегрировании каноническим методом

Видно, что период колебаний, воспроизводимый процессом численного интегрирования, оказывается больше периода T , моделируемого осциллятором. Это обстоятельство приводит к накоплению временной погрешности и при увеличении количества шагов интегрирования приводит к всё более плотному заполнению дискретной фазовой траектории точками.

Преимущество предложенных алгоритмов становится наиболее ощутимым при анализе колебательной системы за время, много большее периода колебаний $t \gg T$.

На рисунке 4.9 приведен расчет фазовых траекторий гармонического осциллятора за время $t = 1000 \cdot T$, по методу Рунге-Кутты четвертого порядка и по алгоритму импульс-координата при прочих равных условиях.

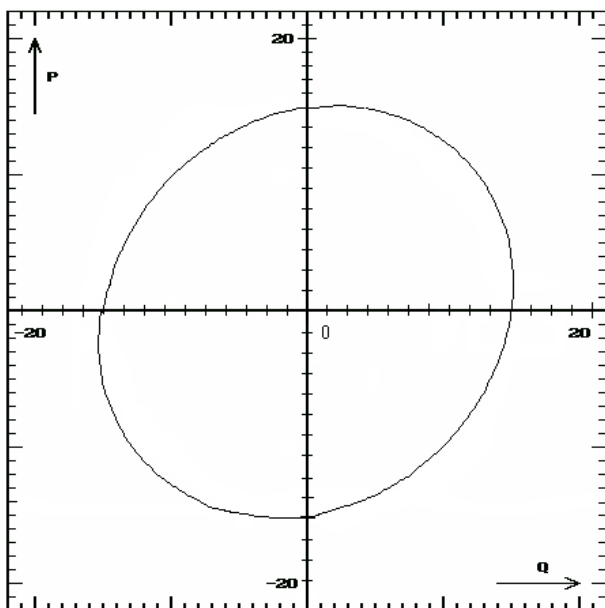


Рисунок 4.9 -Фазовые траектории за время $t = 1000 \cdot T$ по алгоритму импульс-координата, $p \rightarrow q$

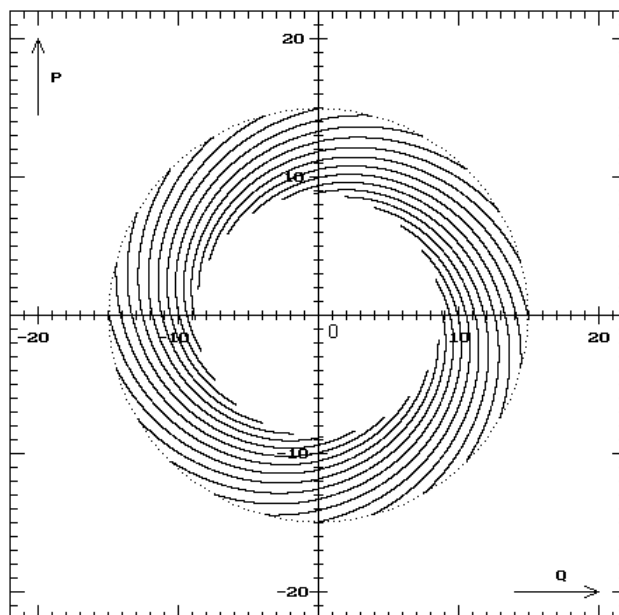


Рисунок 4.10 -Фазовые траектории за время $t = 1000 \cdot T$ по методу Рунге-Кутта 4-го класса точности

Отмеченная выше иррациональность отношения периода, в случае канонического интегрирования воспринимается как полная траектория, соответствующая эллипсу.

При интегрировании по методу Рунге-Кутта, (рис. 4.10) накопление ошибки интегрирования приводит к уменьшению значения гамильтониана и не позволяет анализировать систему за столь большой промежуток времени. Как видно из рисунка, в случае метода Рунге-Кутта погрешность счета отрицательна, что соответствует затухающему осциллятору.

4.4 Устойчивость алгоритмов интегрирования

Устойчивость алгоритма к накоплению погрешности счёта – важная составляющая его адекватности. При численном интегрировании динамических уравнений консервативных систем определение величины погрешности и контроль устойчивости процесса интегрирования может быть осуществлён по отклонению величины энергии от начального значения, т.е. функции

$$\delta H(i\tau) = \frac{H^{(i)} - H_0}{H_0}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

В частности, если функция не возрастает по модулю, то процесс интегрирования можно считать устойчивым.

На рисунках 4.11 – 4.13 приведён вид функции δH для рассмотренных выше канонических алгоритмов.

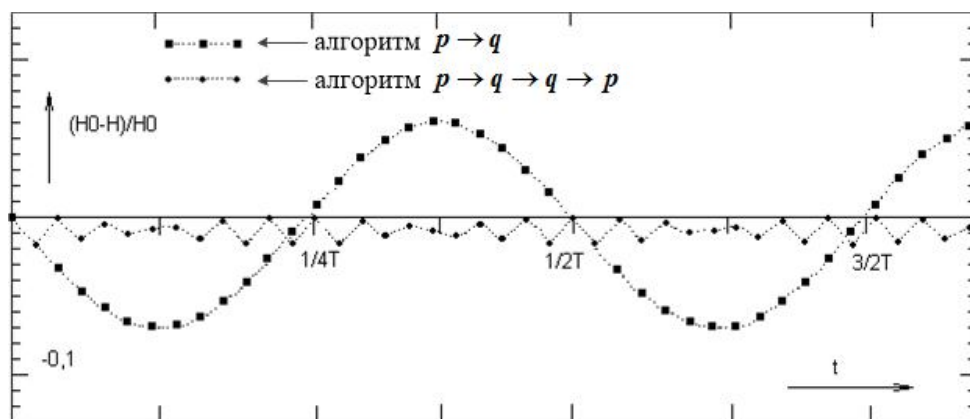


Рисунок 4.11- Вид функции δH для алгоритмов $p \rightarrow q$ и $p \rightarrow q \rightarrow q \rightarrow p$

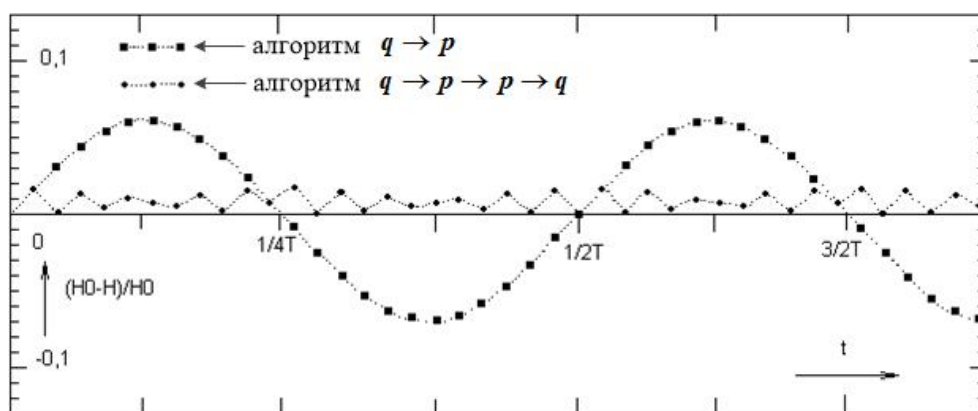


Рисунок 4.12 - Вид функции δH для алгоритмов $q \rightarrow p$ и $q \rightarrow p \rightarrow p \rightarrow q$

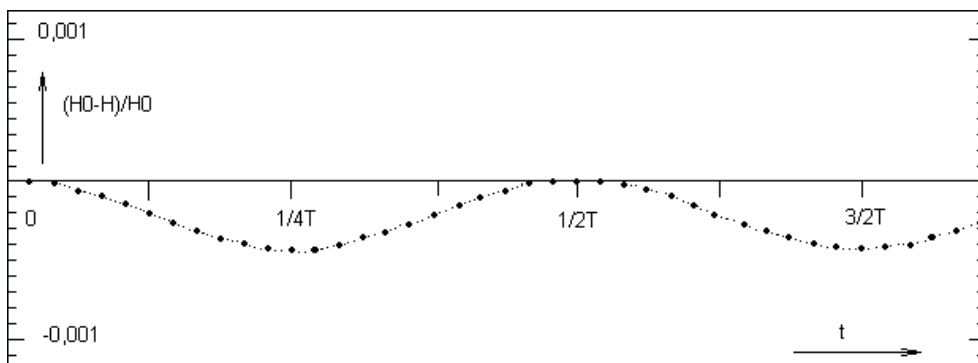


Рисунок 4.13 - Вид функции δH для параллельного счета с усреднением

Как видим из графиков, энергия системы, воспроизводимой алгоритмами, совершает малые колебания относительно стационарного значения, определяемого законом сохранения. Это ещё раз доказывает устойчивость канонических алгоритмов интегрирования к накоплению погрешности счёта. Кроме того, особенностью алгоритмов является минимально возможное количество арифметических операторов, выполняемых на каждом шаге интегрирования, что обеспечивает максимальную скорость процесса интегрирования. В таблице 4.1 приведены основные характеристики рассмотренных алгоритмов интегрирования.

Таблица 4.1- Сравнительные параметры алгоритмов

Алгоритм	Количество операторовна N шагах интегрирования	Максимальное значение $\delta H^{(i)}$	Устойчивость
Импульс-координата, $p \rightarrow q$	$2N$	0,07	устойчив
Координата-импульс, $q \rightarrow p$	$2N$	0,07	устойчив
Импульс-координата-координата-импульс, $p \rightarrow q \rightarrow q \rightarrow p$	$2N$	0,02	устойчив
Координата-импульс-импульс-координата, $q \rightarrow p \rightarrow p \rightarrow q$	$2N$	0,02	устойчив
Параллельный счёт с усреднением	$4N$	0,0004	устойчив
Метод Эйлера	$3N$	$0,1 N$	неустойчив
Метод Рунге-Кутта	$9N$	$0,00001 N$	неустойчив

Таким образом, использование канонических алгоритмов при интегрировании динамических уравнений консервативных систем оказывается предпочтительным, а при исследовании систем на больших интервалах времени – безальтернативным.

4.5 Многомерные системы

Теория канонического интегрирования динамических уравнений гамильтоновой системы с n степенями свободы может быть построена как индукционное обобщение рассмотренной одномерной системы гармонического осциллятора.

Пусть на фазовом пространстве $W^{2n} = W(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n)$ определена функция Гамильтона

$$H = H(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n). \quad (4.25)$$

Запишем динамические уравнения в развёрнутом виде

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \frac{\partial H(p_1, \dots, p_j, \dots, p_n, x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{\partial x_1}, \dots, \frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial H(p_1, \dots, p_j, \dots, p_n, x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{\partial x_j}, \dots; \\ \frac{dp_n}{dt} &= \frac{\partial H(p_1, \dots, p_j, \dots, p_n, x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{\partial x_n}, \dots, \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H(p_1, \dots, p_j, \dots, p_n, x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{\partial p_1}, \dots; \\ \frac{dx_j}{dt} &= \frac{\partial H(p_1, \dots, p_j, \dots, p_n, x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{\partial p_j}, \dots, \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial H(p_1, \dots, p_j, \dots, p_n, x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{\partial p_n}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Преобразование импульс-координата, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ будет иметь вид:

– Блок преобразования импульсов

$$\begin{cases} p_1^{(i+1)} = K_{tp} p_1^{(i)} \equiv p_1^{(i)} + \frac{\partial H(p_1^{(i)}, \dots, p_j^{(i)}, \dots, p_n^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_j^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})}{\partial x_1} \tau, \dots; \\ p_j^{(i+1)} = K_{tp} p_j^{(i)} \equiv p_j^{(i)} + \frac{\partial H(p_1^{(i)}, \dots, p_j^{(i)}, \dots, p_n^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_j^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})}{\partial x_j} \tau, \dots; \\ p_n^{(i+1)} = K_{tp} p_n^{(i)} \equiv p_n^{(i)} + \frac{\partial H(p_1^{(i)}, \dots, p_j^{(i)}, \dots, p_n^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_j^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})}{\partial x_n} \tau. \end{cases} \quad (4.27)$$

– Блок преобразования координат

$$\begin{cases} x_1^{(i+1)} = K_{tx} x_1^{(i)} \equiv x_1^{(i)} + \frac{\partial H(p_1^{(i+1)}, \dots, p_j^{(i)}, \dots, p_n^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_j^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})}{\partial p_1} \tau, \dots; \\ x_j^{(i+1)} = K_{tx} x_j^{(i)} \equiv x_j^{(i)} + \frac{\partial H(p_1^{(i)}, \dots, p_j^{(i+1)}, \dots, p_n^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_j^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})}{\partial p_j} \tau, \dots; \\ x_n^{(i+1)} = K_{tx} x_n^{(i)} \equiv x_n^{(i)} + \frac{\partial H(p_1^{(i)}, \dots, p_j^{(i)}, \dots, p_n^{(i+1)}, x_1^{(i)}, \dots, x_j^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})}{\partial p_n} \tau. \end{cases} \quad (4.28)$$

В качестве упражнения предлагаем записать многомерный вариант преобразований координата-импульс, импульс-координата-координата-импульс, координата-импульс-импульс-координата и алгоритмы с усреднением.

Пример 7. Задача двух тел.

В примере 4 была рассмотрена задача трёх тел, которая не имеет точного решения. Её частным случаем является задача двух тел, которая может быть решена в квадратурах. Тем не менее, решим её численно.

Пусть имеются две материальные точки с массами m_1, m_2 , которые взаимодействуют друг с другом по закону всемирного тяготения.

$$\mathbf{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}. \quad (4.29)$$

В системе действует закон сохранения момента импульса, поэтому движение точек происходит в одной плоскости. Поместим начало отсчёта системы в точку центра масс тел, а оси OX, OY расположим в плоскости движения точек. Тогда траектории движения точек будут лежать в плоскости OXY . Для точки начала координат выполняется соотношение

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0, \\ Y_0 &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

и, следовательно, положения точек и их импульсы в системе центра масс связаны соотношениями

$$\begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 &= 0; \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 &= 0; \\ p_{1x} + p_{2x} &= 0; \\ p_{1y} + p_{2y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Потенциальная энергия системы запишется в форме

$$U \equiv U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = \gamma \frac{m_1 m_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (4.32)$$

и, следовательно, функция Гамильтона будет иметь вид

$$H = \frac{1}{2m_1}(p_{1x}^2 + p_{1y}^2) + \frac{1}{2m_2}(p_{2x}^2 + p_{2y}^2) + \gamma \frac{m_1 m_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}. \quad (4.33)$$

В общем случае, гамильтониан (4.33) выражает 8 динамических уравнений. Однако фактически достаточно записать 4 динамических уравнения, например, для первой материальной точки, а положение и импульсы второй точки будут определяться алгебраическими уравнениями, полученными на основе соотношений (4.33)

$$\begin{aligned} \frac{dp_{1x}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{\gamma \cdot m_1 m_2 (x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}; \\ \frac{dp_{1y}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y_1} = \frac{\gamma \cdot m_1 m_2 (y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}; \\ \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_{1x}} = \frac{p_{1x}}{m_1}; \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_{1y}} = \frac{p_{1y}}{m_1}; \\ p_{2x} &= -p_{1x}; \\ x_2 &= -\frac{m_1}{m_2} x_1. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Для численного интегрирования возьмём алгоритм импульс-координата, $q \rightarrow p$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1x}^{(i+1)} = p_{1x}^{(i)} - \frac{\gamma \cdot m_1 m_2 (x_2^{(i)} - x_1^{(i)})}{\sqrt{(x_2^{(i)} - x_1^{(i)})^2 + (y_2^{(i)} - y_1^{(i)})^2}} \tau; \\ p_{1y}^{(i+1)} = p_{1y}^{(i)} - \frac{\gamma \cdot m_1 m_2 (y_2^{(i)} - y_1^{(i)})}{\sqrt{(x_2^{(i)} - x_1^{(i)})^2 + (y_2^{(i)} - y_1^{(i)})^2}} \tau; \\ x_1^{(i+1)} = x_1^{(i)} + \frac{p_{1x}^{(i+1)}}{m_1} \tau; \\ y_1^{(i+1)} = y_1^{(i)} + \frac{p_{1y}^{(i+1)}}{m_1} \tau; \\ p_{2x}^{(i+1)} = -p_{1x}^{(i+1)}; \\ p_{2y}^{(i+1)} = p_{1y}^{(i+1)}; \\ x_2^{(i+1)} = \frac{m_1}{m_2} x_1^{(i+1)}; \\ y_2^{(i+1)} = \frac{m_1}{m_2} y_1^{(i+1)}. \end{array} \right. \quad (4.35)$$

Аналогично могут быть записаны алгоритмы координата-импульс $p \rightarrow q$, импульс-координата-координата-импульс $p \rightarrow q \rightarrow q \rightarrow p$, координата-импульс-импульс-координата $q \rightarrow p \rightarrow p \rightarrow q$ и алгоритмы с усреднением.

5. Колебательные системы

5.1 Свободные одномерные колебания

Колебаниями или *колебательными процессами* называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости [1-5]. Колебания всегда происходят в некоторой окрестности точки устойчивого равновесия системы, которая характеризуется локальным минимумом её потенциальной энергии. Рассмотрим этот вопрос на примере систем с одной степенью свободы.

Пусть на фазовой плоскости $W^2 = W(p, x)$ определена функция Гамильтона и динамические уравнения некоторой консервативной системы

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + U(x), \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial U(x)}{\partial x}, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Точка $w \in W(p, x_0)$ фазовой плоскости называется положением равновесия системы (5.1), если помещённая в неё материальная точка с нулевым начальным импульсом останется в ней неограниченно долго. Таким образом, фазовые точки положения равновесия системы (5.1), если они существуют, имеют координаты $w_0 = w(0, x_0)$ и располагаются на оси OX .

Разложим функцию потенциальной энергии (5.1) в ряд в окрестности положения равновесия

$$U(x_0 + \partial x) = U(x_0) + \left. \frac{\partial U(x)}{\partial x} \right|_{x_0} \partial x + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} \right|_{x_0} \partial x^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 U(x)}{\partial x^3} \right|_{x_0} \partial x^3 + \dots \quad (5.3)$$

Поскольку в динамические уравнения (5.2) входит не сама потенциальная энергия, а её производная, постоянный член разложения обычно считают равным нулю. Далее, если точка $w_0 = w(0, x_0)$ положение равновесия, то

$$\left. \frac{\partial U(x)}{\partial x} \right|_{x_0} = 0, \quad (5.4)$$

поскольку, только в этом случае $p = 0$ решение первого динамического уравнения (5.2). Если, кроме того, потенциальная энергия $U(x)$ в точке $w_0 = w(0, x_0)$ имеет локальный минимум, то эта точка определяет *устойчивое равновесие* системы.

Иными словами, будучи незначительно выведена из него, она стремится вернуться обратно, совершая около него малые колебания. Действительно, локальный минимум функции определяется требованием

$$k_1 = \left. \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} \right|_{x_0} > 0. \quad (5.5)$$

Если движение происходит в малой окрестности точки x_0 , то старшими членами разложения (5.3) можно пренебречь и, следовательно, потенциальная энергия примет вид

$$U(x) = \frac{k_1 x^2}{2}, \quad (5.6)$$

а функция Гамильтона и динамические уравнения будут соответствовать системе *гармонического осциллятора* (2.9), (2.10):

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k_1 \cdot x^2}{2}. \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -k_1 x; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Интегрирование уравнений при начальных условиях $x(0) = x^{(0)}$, $v(0) = v^{(0)}$ приводит к решению *свободных колебаний*

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot \cos \omega_0 t + B \cdot \sin \omega_0 t; \\ v(t) &= -A \cdot \omega_0 \sin \omega_0 t + B \cdot \omega_0 \cos \omega_0 t, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где $\omega_0 = \sqrt{k_0 m^{-1}}$ - *собственная частота* колебаний, $x^{(0)} = A$, $v^{(0)} = \omega_0 B$, или в виде

$$\begin{aligned} x &= C \cdot \sin(\omega_0 t + \delta); \\ v &= C \cdot \omega_0^{-1} \cos(\omega_0 t + \delta), \end{aligned} \quad (5.10)$$

где $C = \sqrt{\left(x^{(0)}\right)^2 + \left(\frac{v^{(0)}}{\omega_0}\right)^2}$, $\delta = \arctg \omega_0 \frac{x^{(0)}}{v^{(0)}}$.

Если, наоборот, потенциальная энергия в точке равновесия имеет максимум, то эта точка определяет положение *неустойчивого равновесия* и, будучи выведена из этого состояния, не вернётся к первоначальному положению равновесия.

Пример 8. Математический маятник (рис. 5.1).

Нижнее положение математического маятника соответствует минимуму потенциальной энергии, поэтому его равновесие устойчиво.

Напротив, его верхнее положение, соответствующее максимуму потенциальной энергии, неустойчиво.

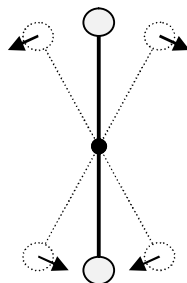


Рисунок 5.1 - Устойчивое и неустойчивое равновесие математического маятника

Решение (5.9) было получено на основе преобразования гамильтониана (5.2) к форме (5.7), обеспечивающей линейный вид динамических уравнений. Такая операция называется *линеаризацией дифференциальных уравнений*. Линеаризованные уравнения не могут, конечно, точно отобразить движение системы и дают искажённую картину явления. Величина искажения тем больше, чем больше удаления от точки равновесия.

В реальных динамических процессах силы, действующие в системе, как правило, существенно нелинейные. Исследование нелинейных колебательных процессов осуществляется на основе численного интегрирования, в частности, с использованием канонических алгоритмов. Тем не менее, линеаризованные уравнения часто позволяют сделать качественный анализ исследуемого процесса и осуществить тестирование работы компьютерной модели при её работе в режиме малых энергий. Заметим всё же, что в динамических моделях технических процессов силы обычно определяются на основе экспериментального измерения её коэффициентов разложения в ряд.

$$F(x) = k_1 x + k_2 x^2 + \dots;$$
$$U(x) = \int_{x_0}^x F(x_j) dx_j. \quad (5.11)$$

Очень часто может быть измерен только линейный коэффициент k_1 . Поэтому нелинейный анализ не удастся выполнить уже по техническим причинам.

5.2 Колебания с диссипацией энергии

В пункте 2.4 были рассмотрены диссипативные силы, обусловленные сопротивлением среды, которые выражаются диссипативной функцией Рэлея. Теперь рассмотрим вопросы интегрирования динамических уравнений колебательных систем с диссипацией энергии. Но сначала рассмотрим случай

прямолинейного движения вдоль оси OX материальной точки, на которую действует только диссипативная сила. В этом случае на фазовой плоскости определена энергия

$$E = H(p) + D(p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\mu \cdot p^2}{2m^2}. \quad (5.12)$$

Динамические уравнения запишутся в форме

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial D}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{\mu \cdot p}{m}; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Интегрируя первое уравнение и принимая за начальное состояние точку $w_0 = w_0(p_0, x_0)$ фазовой плоскости, немедленно получаем

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 \exp\left(-\frac{\mu}{m} \cdot t\right), \\ x(t) &= x_0 - \frac{k}{m} v_0 \exp\left(-\frac{\mu}{m} \cdot t\right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Таким образом, скорость материальной точки убывает по закону экспоненты.

Перейдём к одномерным колебательным системам. Пусть на фазовой плоскости $W^2 = W(p, x)$ определена механическая система с энергетической функцией

$$E(p, x) = H(p, x) + D(p), \quad (5.15)$$

где $H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + U(x)$, $D(p) = \frac{\mu \cdot p^2}{m^2}$, а $w_0 = w(0, x_0)$ фазовая точка устойчивого равновесия системы, т.е.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U(x)}{\partial x} \right|_{x_0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} \right|_{x_0} &> 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Динамические уравнения запишутся в форме

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\partial U(x)}{\partial x} - \frac{\mu \cdot p}{m}; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Линеаризация системы (5.12) приводит к уравнениям *линейного осциллятора*

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -\frac{2\beta \cdot p}{m} - k_1 x; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m},\end{aligned}\tag{5.18}$$

где для удобства введено обозначение $k_1/m = 2\beta$.

Одно из решений системы (5.17) [3] выражает колебательное движение

$$x(t) = e^{-\beta t} (A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t); \tag{5.19}$$

$$v(t) = \frac{p}{m} = e^{-\beta t} [-\beta (A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t) + (-A \cdot \omega \cdot \sin \omega t + B \cdot \omega \cdot \cos \omega t)], \tag{5.20}$$

где $A = x^{(0)}$, $B = (v^{(0)} + \beta x^{(0)})\omega^{-1}$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, и носит название *затухающих колебаний*. В этой связи, коэффициент β часто называют *коэффициентом затухания*. Затухающие колебания возникают при не очень больших диссипативных силах, когда $\beta < \omega_0$, их фазовые траектории имеют вид спиралей, скручивающихся к точке устойчивого равновесия.

Если силы трения велики $\beta > \omega_0$, то колебания не возникают, а решение уравнений (5.18) выражается через гиперболический синус и косинус

$$x(t) = e^{-\beta t} (A \cdot ch \omega t + B \cdot sh \omega t); \tag{5.21}$$

$$v(t) = e^{-\beta t} [-\beta (A \cdot ch \omega t + B \cdot sh \omega t) + (A \cdot \omega \cdot sh \omega t + B \cdot \omega \cdot ch \omega t)], \tag{5.22}$$

где $A = x_0$, $B = \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega}$, $\omega = \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2}$. Этот тип движение называют *апериодическим затуханием*.

Наконец в особом случае $\beta = \omega_0$, движение выражается функциями

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\beta t}; \tag{5.23}$$

$$v(t) = e^{-\beta t} [C_2 - (C_1 + C_2 t)\beta], \tag{5.24}$$

где $C_1 = x_0$, $C_2 = v_0 + x_0 \beta$. Это предельный случай апериодического затухания, при котором система быстрее всего возвращается в состояния покоя.

Как и в случае гармонического осциллятора, линеаризованные уравнения (5.17) и их решения (5.18) - (5.21) используются как предельный случай нелинейных колебательных систем при аналитических исследованиях и тестированиях компьютерных моделей.

Для численного интегрирования динамических уравнений нелинейных систем в условиях действия сил диссипации необходимо пополнить

канонические преобразования, построенные на основе функции Гамильтона соответствующими преобразованиями для диссипативной функции Рэля.

5.3 Вынужденные колебания

Перейдём к рассмотрению колебаний, происходящих под действием сил, явно зависящих от времени, или возмущающих сил. Как было отмечено ранее в пункте 2.5, такие силы выражают заданное воздействие со стороны некоторой абстрактной системы. Часто такое воздействие может быть выражено в форме изменяющегося во времени потенциального поля, в которое помещена колебательная система. Такие колебания называются *вынужденными*, в отличие от *свободных колебаний*, рассмотренных в пунктах 5.1 и 5.2.

В случае вынужденных колебаний, наряду с собственной потенциальной энергией $U = U(x)$, система обладает ещё потенциальной энергией $U_e = U_e(x, t)$, связанной с действием внешнего возмущающего поля. Разлагая функцию $U_e = U_e(x, t)$ в ряд в окрестности точки устойчивого равновесия, получим

$$U_e(x, t) = U_e(x, t)|_{x=0} + \left. \frac{\partial U_e(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} x + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 U_e(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} x^2 + \dots \quad (5.25)$$

Первый член разложения является функцией только от времени и может быть опущен. Если ограничиться линейным приближением, то второй член разложения является действующей на систему в положении равновесия возмущающей силой, которую ранее обозначили $F(t)$. Тогда в потенциальной энергии появляется дополнительный член $F(t)x$, и функция Гамильтона линейной системы, совершающей вынужденные колебания, теперь имеет явную зависимость от времени

$$H(p, x, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k_1 \cdot x^2}{2} + F(t)x. \quad (5.26)$$

Динамические уравнения вынужденных колебаний выразятся в форме

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H(p, x, t)}{\partial x} = -k_1 x + F(t); \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H(p, x, t)}{\partial p} = \frac{p}{m}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Энергия системы, совершающей вынужденные колебания, разумеется, не сохраняется; в процессе взаимодействия с источником внешней силы она будет приобретать или терять энергию. Зависимость возмущающих сил от времени может быть различной, но чаще всего, они являются периодическими

функциями времени. Такие функции можно разложить в ряд Фурье и, следовательно, они могут быть сведены к частному случаю силы, изменяющейся по простому гармоническому закону, т. е. по закону синуса

$$F(t) = F_0 \sin(\Omega t + \varphi). \quad (5.28)$$

Решение системы (5.27), которое является суперпозицией свободных колебаний (5.9) и колебаний, обусловленных действием возмущающей силы (5.28), может быть записано в форме

$$\begin{aligned} x(t) &= C \cdot \sin(\omega_0 t + \delta) - \frac{F_0 \Omega}{\omega_0 (\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin \omega t + \frac{F_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin \Omega t; \\ v(t) &= C \cdot \omega_0^{-1} \cos(\omega_0 t + \delta) - \frac{F_0 \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos \omega t + \frac{F_0 \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Решение (5.29) неприменимо в случае так называемого резонанса, когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой колебаний $\Omega = \omega_0$. В этом случае решение следует писать в форме

$$\begin{aligned} x(t) &= C \cdot \sin(\omega_0 t + \delta) - \frac{F_0}{2\omega_0^2} \sin \omega t + \frac{F_0 t}{2\omega_0} \cos \Omega t; \\ v(t) &= C \cdot \omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta) - \frac{F_0}{2\omega_0} \cos \omega t + \frac{F_0}{2\omega_0} (\cos \Omega t - \Omega t \cdot \sin \Omega t). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Таким образом, в случае резонанса амплитуда колебаний растёт линейно со временем, пока колебания перестанут быть малыми и применение линейного приближения станет недопустимым.

Пример 8. Статический прогиб рессор товарного вагона 5 см.

На стыках рельсов вагон испытывает толчки, вызывающие вынужденные колебания на рессорах. Определим критическую скорость, при которой начнётся «галопирование» вагона, если длина рельсов 12 м.

Галопирование вагона произойдёт при резонансе, т.е. при равенстве частот собственных и вынужденных колебаний. Собственная частота колебаний вагона

$$\omega_0 = \sqrt{k_1 m^{-1}}, \quad (5.31)$$

где k_1 - коэффициент жёсткости рессор, m - масса вагона. Статический прогиб рессор выражает равенство силы упругости рессор и силы тяжести вагона

$$m g = k_1 \cdot \delta x. \quad (5.32)$$

Выражая k_1 из (5.32) и подставляя в формулу (5.31), запишем

$$\omega_0 = \sqrt{g \cdot \delta x^{-1}}. \quad (5.33)$$

Вынуждающую силу считаем гармонической. Если вагон идёт со скоростью v м/с, то он получает толки через каждые Δ/v с, где Δ - длина рельса, которые и определяют период вынуждающей силы T . Частота вынуждающей силы

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{\Delta}. \quad (5.34)$$

Приравнивая выражения собственной (5.33) и вынужденной (5.34) частот, найдём критическую скорость вагона

$$v = \sqrt{\frac{g}{\delta x}} \frac{\Delta}{2\pi} = \sqrt{\frac{9,8}{5 \cdot 10^{-2}}} \frac{12}{2\pi} = 26,75 \frac{м}{с} \approx 96 \frac{км}{ч}. \quad (5.35)$$

Теперь рассмотрим вынужденные колебания при наличии диссипативных сил. Функция энергии такой системы в линейном приближении будет иметь вид

$$E(p, x, t) = H(p, x, t) + D(p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\beta \cdot p^2}{m} + \frac{k_1 \cdot x^2}{2} + F(t)x, \quad (5.36)$$

а динамические уравнения линейных вынужденных колебаний запишутся

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H(p, x, t)}{\partial t} - \frac{\partial D(p)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial v} = -k_1 x - \frac{2\beta}{m} p + F(t); \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H(p, x, t)}{\partial t} = \frac{p}{m}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Решение системы (5.37) имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\beta t} C \cdot \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \delta) - \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t - \theta); \\ v(t) &= -\beta \cdot e^{-\beta t} C \cdot \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \delta) + e^{-\beta t} \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} C \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \delta) - \\ &\quad - \frac{F_0 \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot \beta^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t - \theta), \end{aligned} \quad (5.38)$$

где $C = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2 / \beta}$, $\delta = \arctg \frac{2\beta \cdot \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$ т.е. определяются начальными условиями.

Несмотря на то, что динамические уравнения вынужденных колебаний имеют аналитическое решение, имеет смысл проинтегрировать их численно, чтобы распространить полученные устойчивые алгоритмы на случай диссипативных систем и систем с явной зависимостью от времени. При этом численное решение оказывается проще, а при использовании компьютера удобнее для анализа.

5.4 Каноническое интегрирование уравнений свободных колебаний

В главе 4 на примере гармонического осциллятора был развит канонический метод интегрирования динамических уравнений. Полученные преобразования фазовой плоскости, отвечающие различным алгоритмам интегрирования, по аналогии могут быть перенесены из динамических уравнений свободных одномерных колебаний общего вида (5.2) в формепоследовательности выполняемых операций.

1. Определяем на фазовом пространстве $W^2 = W(p, x)$ функцию Гамильтона свободных одномерных колебаний

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + U(x). \quad (5.38)$$

2. Записываем динамические уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial U(x)}{\partial x} \equiv -U_x(x); \\ \frac{dx}{dt} &= p m^{-1}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

3. Записываем преобразования для численного интегрирования.

3.1. Каноническое преобразование:

импульс-координата, $p \rightarrow q$

координата-импульс, $q \rightarrow p$

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = K_\tau p^{(i)} \equiv p^{(i)} - U(x^{(i)})\tau; \\ x^{(i+1)} = K_\tau x^{(i)} \equiv x^{(i)} + p^{(i+1)}\tau; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{cases} \quad (5.40) \quad \begin{cases} x^{(i+1)} = K_\tau x^{(i)} \equiv x^{(i)} + p^{(i)}\tau; \\ p^{(i+1)} = K_\tau p^{(i)} \equiv p^{(i)} - U(x^{(i+1)})\tau; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{cases} \quad (5.41)$$

3.2. Каноническое преобразование:

импульс-координата-координата-импульс, $p \rightarrow q \rightarrow q \rightarrow p$:

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = K_\tau p^{(i)} \equiv p^{(i)} - U(x^{(i)})\tau; \\ x^{(i+1)} = K_\tau x^{(i)} \equiv x^{(i)} + p^{(i+1)}\tau; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau; \\ x^{(i+2)} = K_\tau x^{(i+1)} \equiv x^{(i+1)} + p^{(i+1)}\tau; \\ p^{(i+2)} = K_\tau p^{(i+1)} \equiv p^{(i+1)} - U(x^{(i+2)})\tau; \\ t^{(i+2)} = t^{(i+1)} + \tau. \end{cases} \quad (5.42)$$

3.3. Канонические преобразования с усреднением:

$$\begin{cases} p_I^{(i+1)} = K_\tau p_I^{(i)} \equiv p_I^{(i)} - U(x_I^{(i)})\tau; \\ x_I^{(i+1)} = K_\tau x_I^{(i)} \equiv x_I^{(i)} + p_I^{(i+1)}\tau; \\ x_{II}^{(i+1)} = K_\tau x_{II}^{(i)} \equiv x_{II}^{(i)} + p_{II}^{(i)}\tau; \\ p_{II}^{(i+1)} = K_\tau p_{II}^{(i)} \equiv p_{II}^{(i)} - U(x_{II}^{(i+1)})\tau; \\ p^{(i+1)} = \frac{p_I^{(i+1)} + p_{II}^{(i+1)}}{2}; \\ x^{(i+1)} = \frac{x_I^{(i+1)} + x_{II}^{(i+1)}}{2}; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{cases} \quad (5.43)$$

Пример 10. Математический маятник.

Запишем преобразования (5.40) - (5.43) для интегрирования динамических уравнений математического маятника, рассмотренного в примере 5, используя построенный логический алгоритм.

1. Записываем функцию Гамильтона математического маятника на фазовой плоскости $W^2 = W(L, \varphi)$, где L момент импульса, φ - угол отклонения от положения устойчивого равновесия (рис. 5.1):

$$H(L, \varphi) = \frac{L^2}{2J} - m g h_0 \cos \varphi. \quad (5.44)$$

2. Записываем динамические уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H(L, \varphi)}{\partial \varphi} = -m g h_0 \sin \varphi; \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial H(L, \varphi)}{\partial L} = \frac{L}{J}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

3. Записываем преобразования для численного интегрирования:

3.1. Каноническое преобразование

импульс-координата, $p \rightarrow q$

$$\begin{cases} L^{(i+1)} = L^{(i)} - m g h_0 \sin \varphi^{(i)} \cdot \tau; \\ \varphi^{(i+1)} = \varphi^{(i)} + J^{-1} L^{(i+1)} \tau; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{cases} \quad (5.46)$$

координата-импульс, $q \rightarrow p$

$$\begin{cases} \varphi^{(i+1)} = \varphi^{(i)} + J^{-1} L^{(i)} \tau; \\ L^{(i+1)} = L^{(i)} - m g h_0 \sin \varphi^{(i+1)} \cdot \tau; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{cases} \quad (5.47)$$

3.2. Каноническое преобразование

импульс-координата-координата-импульс, $p \rightarrow q \rightarrow q \rightarrow p$

$$\left\{ \begin{array}{l} L^{(i+1)} = L^{(i)} - m g h_0 \sin \varphi^{(i)} \cdot \tau; \\ \varphi^{(i+1)} = \varphi^{(i)} + J^{-1} L^{(i+1)} \tau; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau; \\ \varphi^{(i+2)} = \varphi^{(i+1)} + J^{-1} L^{(i+1)} \tau; \\ L^{(i+2)} = L^{(i+1)} - m g h_0 \sin \varphi^{(i+2)} \cdot \tau; \\ t^{(i+2)} = t^{(i+1)} + \tau. \end{array} \right. \quad (5.48)$$

3.3. Канонические преобразования (5.46), (5.47) с усреднением:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_I^{(i+1)} = L_I^{(i)} - m g h_0 \sin \varphi^{(i)} \cdot \tau; \\ \varphi_I^{(i)} = \varphi_I^{(i)} + L_I^{(i)} \tau; \\ \varphi_{II}^{(i+1)} = \varphi_{II}^{(i)} + L_{II}^{(i+1)} \tau; \\ L_{II}^{(i+1)} = p_{II}^{(i)} - m g h_0 \sin \varphi_{II}^{(i+1)} \cdot \tau; \\ L^{(i+1)} = \frac{L_I^{(i+1)} + L_{II}^{(i+1)}}{2}; \\ \varphi^{(i+1)} = \frac{\varphi_I^{(i+1)} + \varphi_{II}^{(i+1)}}{2}; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{array} \right. \quad (5.49)$$

Для построения анимационной модели осуществляем переход к декартовым координатам

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{(i+1)} = X_0 + h_0 \cos \varphi^{(i+1)}; \\ y^{(i+1)} = Y_0 + h_0 \sin \varphi^{(i+1)}. \end{array} \right. \quad (5.50)$$

где X_0, Y_0 - координаты точки подвеса.

На рисунке 5.2 приведены полученные на компьютере фазовые траектории математического маятника при различных начальных условиях вида

$$\begin{aligned} L^{(0)} &= 0,5 + 0,25n; \\ n &= 1, 2, \dots; \\ \varphi^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

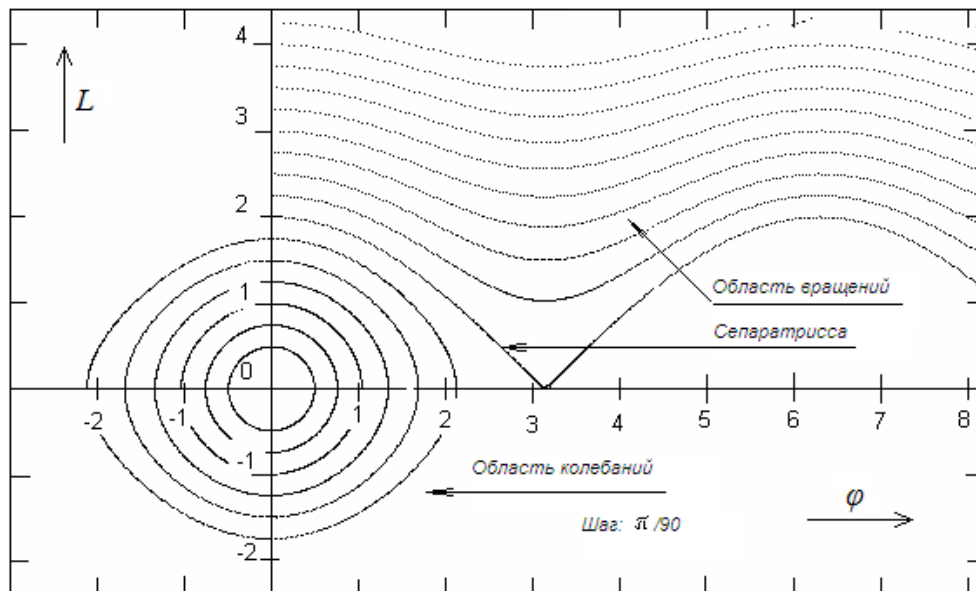


Рисунок 5.2 - Фазовые траектории математического маятника при различных начальных условиях. Обобщённые координаты: L и φ

Линия сепаратриссы разделяет области колебаний и вращений маятника. Точное решение, соответствующее описывающее движение маятника вдоль сепаратриссы, суть бесконечно долгое приближение к верхней точке. Вследствие влияния процесса счёта маятник уходит с линии сепаратриссы на траекторию вращений. При малых начальных импульсах фазовые траектории имеют форму окружностей, поскольку в линейном приближении математический маятник, суть, гармонический осциллятор.

Сам процесс интегрирования воспроизводит движение маятника в условиях малого консервативного возмущения, в этом заключается физическая причина устойчивости компьютерной (электронной) модели.

5.5 Интегрирование уравнений затухающих колебаний

Рассмотрим численное интегрирование уравнений затухающих колебаний. Как следует из результатов пункта 5.2, в этом случае к функции Гамильтона, выражающей энергию замкнутой системы, необходимо добавить функцию, выражающую потерю энергии вследствие действия всевозможных сил трения. Следовательно, преобразование фазовой плоскости для численного интегрирования необходимо рассматривать как сумму двух бесконечно малых по параметру шага интегрирования преобразований, отвечающей консервативной и диссипативной частей системы. Первые из них выражаются каноническими преобразованиями свободных одномерных колебаний (5.40) – (5.42). Найдём преобразования, отвечающие интегрированию диссипативной части.

Вновь рассмотрим случай прямолинейного движения вдоль оси OX материальной точки, на которую действует только диссипативная сила. Энергия такой системы выражается функцией

$$E = H(p) + D(p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\beta \cdot p^2}{2m^2}, \quad (5.52)$$

а динамические уравнения записываются в форме

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial D}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial v} = -2\beta \cdot p; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Запишем преобразования фазовой плоскости, отвечающие алгоритму Эйлера

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = p^{(i)} - 2\beta \cdot p\tau; \\ x^{(i+1)} = x^{(i)} + \frac{p^{(i)}}{m}\tau. \end{cases} \quad (5.54)$$

Возьмём для численного интегрирования систем с диссипацией энергии. Возможность эффективного использования этого алгоритма для интегрирования диссипативной части динамической системы объясняется следующими очевидными соображениями. Точное решение системы (5.53), как видели, соответствует уменьшению скорости по закону экспоненты и, следовательно, система с течением времени асимптотически приближается к состоянию покоя. Такое поведение системы называется *асимптотической устойчивостью*. Возмущения, вызванные процессом интегрирования, могут быть выражены старшими членами разложения в степенной ряд, не учтёнными в линейных приближениях (5.54). Очевидно, отбрасывание первых двух членов разложения не нарушает изначальную сходимость рядов, выражающих исходную асимптотически устойчивую систему. Иными словами, возмущения, вызванные процессом интегрирования, сами выражают некоторый бесконечно малый по параметру шага интегрирования асимптотически устойчивый процесс. Отсюда следует, что возмущения, вызванные процессом интегрирования по алгоритму Эйлера системы (5.53), приводят только к увеличению скорости приближения к состоянию покоя пропорционально τ^2 , или, что тоже, к увеличению скорости диссипации энергии.

Оказывается, что полученный вывод будет справедлив и в общем случае. Если в системе, осуществляющей движение в окрестности устойчивого равновесия, или, что тоже, *устойчивой системе*, начинают действовать диссипативные силы, то такая система становится *асимптотически устойчивой* (теорема Томсона–Тэта–Четаева[2]). Этот результат даёт основание построения

устойчивых алгоритмов интегрирования динамических уравнений затухающих колебаний.

В основе полученных канонических алгоритмов лежали два сопряжённых друг другу преобразования фазовой плоскости импульс-координата и координата-импульс. Точное решение, в случае гармонического осциллятора, оказывается лежащим «в вилке» между этими дискретными решениями. Поэтому был построен алгоритм параллельного счёта с усреднением полученных результатов. Оказывается, что для преобразования (5.54) также можно определить сопряженное преобразование, которое выразится в неявной форме

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = p^{(i)} - 2\beta \cdot p^{(i+1)}\tau; \\ x^{(i+1)} = x^{(i)} + \frac{p^{(i)}}{m}\tau. \end{cases} \quad (5.55)$$

Разрешая первое уравнение относительно $p^{(i+1)}$, получаем сопряжённое преобразование

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = \frac{1}{1 + 2\beta m^{-1}\tau} p^{(i)}; \\ x^{(i+1)} = x^{(i)} + \frac{p^{(i)}}{m}\tau. \end{cases} \quad (5.56)$$

Можно показать, что возмущение, вызванное процессом интегрирования на основе использования преобразования (5.56), приводит к бесконечно малому по порядку шага интегрирования уменьшению скорости диссипации энергии. Таким образом, точное решение системы (5.53) оказывается в вилке между дискретными решениями на основе преобразований (5.54) и (5.56).

После сделанных замечаний, алгоритм интегрирования динамических уравнений затухающих колебаний можно построить в форме расширения алгоритма пункта 5.5.

1. Определяем на фазовом пространстве $W^2 = W(p, x)$ энергию системы как сумму функций Гамильтона и диссипативной функции Рэлея

$$E(p, x) = H(p, x) + D(p) = \frac{p^2}{2m} + U(x) + \frac{\beta \cdot p^2}{m}. \quad (5.57)$$

2. Записываем динамические уравнения, введя параметр $\beta = k / m$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H(p, x)}{\partial p} - \frac{\partial D(p)}{\partial p} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} - \frac{2\beta \cdot p}{m}; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

3. Записываем преобразования для численного интегрирования.

3.1. Каноническое преобразование

импульс-координата, $p \rightarrow q$

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = (1 - 2\beta \cdot \tau) p^{(i)} - U(x^{(i)}) \tau; \\ x^{(i+1)} = x^{(i)} + p^{(i+1)} \tau; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{cases} \quad (5.59)$$

координата-импульс, $q \rightarrow p$

$$\begin{cases} x^{(i+1)} = x^{(i)} + p^{(i)} \tau; \\ p^{(i+1)} = (1 - 2\beta \cdot \tau) p^{(i)} - U(x^{(i+1)}) \tau; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{cases} \quad (5.60)$$

или с сопряженным преобразованием для диссипативной составляющей

импульс-координата, $p \rightarrow q$

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = \frac{1}{1 + 2\beta \cdot \tau} [p^{(i)} - U(x^{(i)}) \tau]; \\ x^{(i+1)} = x^{(i)} + p^{(i+1)} \tau; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{cases} \quad (5.61)$$

координата-импульс, $q \rightarrow p$

$$\begin{cases} x^{(i+1)} = x^{(i)} + p^{(i)} \tau; \\ p^{(i+1)} = \frac{1}{1 + 2\beta \cdot \tau} [p^{(i)} - U(x^{(i+1)}) \tau]; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{cases} \quad (5.62)$$

3.2. Каноническое преобразование

импульс-координата-координата-импульс, $p \rightarrow q \rightarrow q \rightarrow p$

$$\begin{cases} p^{(i+1)} = (1 - 2\beta \cdot \tau) p^{(i)} - U(x^{(i)}) \tau; \\ x^{(i+1)} = x^{(i)} + p^{(i)} \tau; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau; \\ x^{(i+2)} = x^{(i+1)} + p^{(i+1)} \tau; \\ p^{(i+2)} = \frac{1}{1 + 2\beta \cdot \tau} [p^{(i+1)} - U(x^{(i+2)}) \tau]; \\ t^{(i+2)} = t^{(i+1)} + \tau. \end{cases} \quad (5.63)$$

3.3. Канонические преобразования с усреднением:

$$\begin{cases} p_I^{(i+1)} = (1 - 2\beta\tau) p_I^{(i)} - U(x_I^{(i)}) \tau; \\ x_I^{(i+1)} = x_I^{(i)} + p_I^{(i+1)} \tau; \\ x_{II}^{(i+1)} = x_{II}^{(i)} + p_{II}^{(i)} \tau; \\ p_{II}^{(i+1)} = \frac{1}{1 + 2\beta\tau} [p_{II}^{(i)} - U(x_{II}^{(i+1)}) \tau]; \\ p^{(i+1)} = \frac{p_I^{(i+1)} + p_{II}^{(i+1)}}{2}; \\ x^{(i+1)} = \frac{x_I^{(i+1)} + x_{II}^{(i+1)}}{2}; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{cases} \quad (5.64)$$

Погрешность численного интегрирования динамических уравнений затухающих колебаний на основе полученных алгоритмов и количество выполняемых при этом операторов, остаются такими же, как в алгоритмах, представленных в таблице 4.1.

6. Динамика твёрдого тела

6.1 Кинетическая энергия твёрдого тела

Определим твердое тело, как дискретную совокупность материальных точек, расстояние между которыми не изменяется в процессе движения.

Для описания движения твёрдого тела введём две системы координат: неподвижную, т.е. инерциальную систему ΘXYZ и движущуюся систему координат $Ox_1x_2x_3 = Oxyz$, которая жёстко связана с твёрдым телом и участвует во всех его движениях (рис. 6.1).

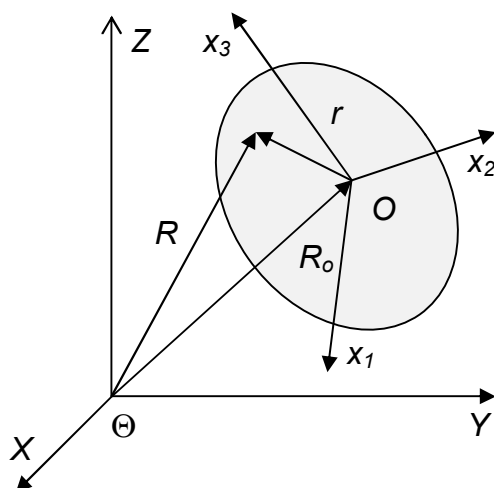


Рисунок 6.1 - Неподвижная ΘXYZ и связанная с твёрдым телом $Ox_1x_2x_3$ системы координат

Начало движущейся системы координат удобно совместить с центром инерции тела. Таким образом, положение твёрдого тела относительно неподвижной системы координат вполне определяется положением движущейся системы. Пусть радиус-вектор R_0 указывает положение начала O движущейся системы координат. Ориентация же осей этой системы определяется тремя независимыми углами, поэтому вместе с тремя компонентами вектора R_0 имеем всего шесть координат и, следовательно, всякое твёрдое тело представляет собой систему с шестью степенями свободы.

Обозначим радиус-вектор произвольной точки твёрдого тела P в подвижной системе координат посредством r , а радиус-вектор той же точки в неподвижной системе координат в неподвижной системе координат посредством R и запишем равенство:

$$R = R_0 + r. \quad (6.1)$$

Теперь рассмотрим произвольное сколь угодно малое перемещение твёрдого тела в пространстве. Его можно представить в виде суммы двух частей: бесконечно малый параллельный перенос точки центра инерции dR_0 тела и

поворот на бесконечно малый угол $d\phi$ относительно начала подвижной системы координат O . Тогда для изменения положения точки P справедливо равенство:

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_0 + [d\phi \cdot \mathbf{r}]. \quad (6.2)$$

Деля обе части равенства на время dt , запишем

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}]. \quad (6.3)$$

где $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ - скорость точки в неподвижной системе координат,

$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}_0}{dt}$ - скорость поступательного движения центра инерции твёрдого тела, $\frac{d\phi}{dt} = \boldsymbol{\Omega}$ - угловая скорость подвижной системы координат.

Можно показать, что угловая скорость, с которой вращается система координат, не зависит от самой системы. Все системы, жёстко связанные с твердым телом, вращаются в данный момент времени вокруг параллельных друг другу осей с одинаковой по абсолютной величине скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. Это обстоятельство даёт право называть $\boldsymbol{\Omega}$ угловой скоростью вращения твёрдого тела как такового.

Кинетическая энергия твёрдого тела является суммой кинетических энергий составляющих его материальных точек и, следовательно, в неподвижной системе отсчёта ΘXYZ имеет вид

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (6.4)$$

Запишем кинетическую энергию в системе $Ox_1x_2x_3$, для чего подставим (6.3) в (6.4)

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} (\mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_i])^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} V^2 + \sum_i m_i \mathbf{V} [\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_i] + \sum_i \frac{m_i}{2} [\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_i]^2. \quad (6.5)$$

В первом члене скорость V^2 выносится за знак суммы, тогда сумма, суть полная масса твёрдого тела, которую обозначим посредством μ . Во втором члене пишем

$$\sum_i m_i \mathbf{V} [\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_i] = \sum_i m_i \mathbf{r}_i [\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega}] = [\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega}] \sum_i m_i \mathbf{r}_i. \quad (6.6)$$

Отсюда видно, что если начало координат подвижной системы выбрано в центре инерции твёрдого тела, то $\sum_i m_i \mathbf{r}_i = 0$.

Наконец в третьем члене раскроем квадрат векторного произведения и в результате находим

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \{ \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}^2 - (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r})^2 \}. \quad (6.7)$$

Первый член в (6.7) есть кинетическая энергия поступательного движения – она имеет вид, как если бы вся масса тела была сосредоточена в его центре инерции. Второй член, суть, кинетическая энергия вращательного движения с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ вокруг оси, проходящей через центр инерции.

Кинетическую энергию вращения обычно записывают в тензорном виде

$$T_{\Omega} = \frac{1}{2} m [\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}]^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \{ \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}^2 - (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r})^2 \} = \frac{1}{2} (J_{kj} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}). \quad (6.8)$$

где J_{kj} - симметричный *тензор инерции*

$$J_{kj} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & \sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Как и всякий симметричный тензор, J_{kj} имеет три взаимно ортогональных собственных направления. Это означает, что в любом твёрдом теле имеются три взаимно ортогональных оси с началом в центре инерции, обладающих тем замечательным свойством, что если их выбрать в качестве осей подвижной системы координат, то в тензоре инерции элементы J_{kj} , $k \neq j$ оказываются равными нулю. В этом случае диагональные элементы J_{kk} называются *главными моментами инерции*, а выделенные оси - *главными осями инерции*.

Пусть оси системы координат $Ox_1x_2x_3$ совпадают с главными осями инерции твёрдого тела. Тогда его кинетическая энергия вращения (6.8) имеет вид

$$T_{\Omega} = \frac{1}{2} (J_1 \boldsymbol{\Omega}_1^2 + J_2 \boldsymbol{\Omega}_2^2 + J_3 \boldsymbol{\Omega}_3^2), \quad (6.10)$$

где J_1, J_2, J_3 главные моменты инерции относительно осей x_1, x_2, x_3 . Тело, у которого все три главных момента инерции различны, называется *асимметрическим волчком*. Если два главных момента равны друг другу, например $J_1 = J_2 \neq J_3$, то имеем дело с *симметрическим волчком*. В этом случае выбор направления главных осей в плоскости x_1x_2 произволен. Если же все три

главных момента инерции совпадают, то тело называют *шаровым волчком*. В этом случае в качестве главных осей можно взять любые три взаимно перпендикулярные оси.

При выборе начала подвижной системы координат в центре инерции твёрдого тела, кинетическая энергия твёрдого тела (6.7) является суммой кинетической энергии поступательного движения центра масс и кинетической энергии вращения. Следовательно, и система динамических уравнений твёрдого тела распадается на две независимые подсистемы дифференциальных уравнений. Динамические уравнения поступательного движения центра инерции, в общем случае, выражаются системой уравнений Гамильтона, описывающих движение материальной точки в трёхмерном пространстве. Поскольку методы численного интегрирования таких систем рассмотрены выше, то поступательная составляющая динамики твёрдого тела уже не представляет интереса. В этой связи сосредоточим внимание исключительно на описании и моделировании вращательных движений твёрдого тела и перенесём начало неподвижной системы координат в центр инерции твёрдого тела.

6.2 Уравнения движения твёрдого тела

Анализируя вид кинетической энергии (6.8) и (6.10) можно заключить, что для вращательного движения твёрдого тела можно ввести в рассмотрение величину его *момента импульса* $\mathbf{L}$, которая выполняет функции импульса для поступательного движения материальной точки. Действительно, положим момент импульса равным градиенту кинетической энергии (6.8)

$$\mathbf{L} = \nabla_{\boldsymbol{\Omega}} T = \nabla_{\boldsymbol{\Omega}} \sum_i \frac{1}{2} m [\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}]^2 = \sum_i m [\mathbf{r} \cdot [\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}]] = \sum_i m [\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}] = \sum_i [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}], \quad (6.11)$$

Координаты момента импульса в общем случае

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx} \Omega_x + J_{xy} \Omega_y + J_{xz} \Omega_z; \\ L_y &= J_{yx} \Omega_x + J_{yy} \Omega_y + J_{yz} \Omega_z; \\ L_z &= J_{zx} \Omega_x + J_{zy} \Omega_y + J_{zz} \Omega_z. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Если оси системы координат $Ox_1x_2x_3$ совпадают с главными осями инерции твёрдого тела, то выражения упрощаются

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx} \Omega_x; \\ L_y &= J_{yy} \Omega_y; \\ L_z &= J_{zz} \Omega_z. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Пусть выбранная неподвижная система координат, совпадающая с центром инерции твёрдого тела, инерциальная. Тогда можно записать уравнение движения твёрдого тела, аналогичное по форме второму закону

Ньютона для материальной точки. Действительно, возьмем производную по времени от момента импульса (6.11), выраженного через импульс $\mathbf{p}$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] = \sum_i \left[\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} \right] + \sum_i \left[\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}} \right]. \quad (6.14)$$

Поскольку в неподвижной системе координат $\dot{\mathbf{r}}$ параллельна импульсу $\mathbf{p}$, то первый член выражения обращается в ноль. Во втором члене подставляем вместо производной импульса равнодействующие сил, согласно второму закону Ньютона. Получим окончательно

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \mathbf{M}_\Sigma; \\ \mathbf{M}_\Sigma &= \sum_i [\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_\Sigma]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Вектор $\mathbf{M} = [\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}]$ называется *моментом силы* и является аналогом силы для поступательного движения. Таким образом, скорость изменения момента импульса твёрдого тела в инерциальной системе отсчёта равна равнодействующей моментов сил, действующих на тело.

Уравнения движения (6.15) определены в неподвижной системе координат. Между тем наиболее простая связь между компонентами вращательного момента $\mathbf{L}$ твёрдого тела и компонентами угловой скорости имеет место в подвижной системе координат с осями, направленными вдоль главных осей инерции. В этой связи преобразуем уравнение (6.13) к системе $Oxyz$.

Для этого заметим, что изменение вектора $d\mathbf{L}/dt$ при переходе к вращающейся системе координат складывается из его изменения, обусловленного вращением, и его собственным изменением в подвижной системе, поэтому

$$\left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{XYZ} = \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{xyz} + [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{L}] = \mathbf{M}_\Sigma, \quad (6.16)$$

где $\mathbf{M}_\Sigma$ суммарный момент внешних сил действующих на тело.

Поскольку оси $Oxyz$ выбраны вдоль главных осей инерции, подставляем (6.13) в (6.16), получим так называемые *уравнения Эйлера* движения твёрдого тела

$$\begin{aligned} J_x \frac{d\Omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \Omega_2 \Omega_3 &= M_x; \\ J_y \frac{d\Omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \Omega_3 \Omega_1 &= M_y; \\ J_z \frac{d\Omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \Omega_1 \Omega_2 &= M_z. \end{aligned} \quad (6.17)$$

При свободном вращении $M = 0$ уравнения Эйлера принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_x}{dt} &= \frac{(J_y - J_z)}{J_1} \Omega_2 \Omega_3; \\ \frac{d\Omega_y}{dt} &= \frac{(J_z - J_x)}{J_y} \Omega_3 \Omega_1; \\ \frac{d\Omega_z}{dt} &= \frac{(J_x - J_y)}{J_z} \Omega_1 \Omega_2.\end{aligned}\quad (6.18)$$

Стоящие в правой части силы инерции обусловлены неинерциальностью системы отсчёта, связанной с телом.

6.3 Вращение тела вокруг неподвижной оси

Поскольку инерциальные свойства твёрдого тела зависят не только от массы тела, но и от её распределения по объёму, его вращение представляет собой достаточно сложное механическое явление. Имеется частный случай вращения твёрдого тела, при котором оно происходит вокруг неподвижной оси. Хотя этот случай и является простейшим, компьютерные модели, в основе которых лежат одномерные вращения, находят широкое применение в области разработки и проектирования машин и механизмов.

Формально, одномерное вращение твёрдого тела эквивалентно одномерному движению материальной точки. Поэтому, в рассмотренных в главе 2 динамических моделях, достаточно осуществить замену кинематических и динамических выражений для поступательного движения на соответствующие величины для вращательного движения, согласно таблице 6.1.

Таким образом, фазовое пространство одномерных вращений твёрдого тела, суть фазовая плоскость момента импульса и угла поворота $W^2 = W(L, \varphi)$. Энергия вращения при наличии моментов потенциальных и диссипативных сил, а также сил, явно зависящих от времени, запишется в виде

$$E(L, \varphi, t) = H(L, \varphi, t) + D(L) = \frac{L^2}{2J} + U(\varphi) + M(t)\varphi + \frac{k}{2J^2} L^2, \quad (6.19)$$

где $U(\varphi)$ - потенциальная энергия вращения, $M(t)$ - момент сил явно зависящих от времени, k - коэффициент диссипации вращения.

Запишем уравнения движения

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial H(L, \varphi, t)}{\partial \varphi} - \frac{\partial D(L)}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial \Omega} = -\frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi} - 2\beta \cdot L + M(t); \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial H(L, \varphi, t)}{\partial L} = \frac{L}{J},\end{aligned}\quad (6.20)$$

где $2\beta = k/J$.

Таблица 6.1- Соответствие выражений для поступательного и вращательного движений

Поступательное движение		Вращательное движение	
Название	Выражение	Название	Выражение
Координата	x	Угол	φ
Линейная скорость	$v = \dot{x}$	Угловая скорость	$\Omega = \dot{\varphi}$
Масса	m	Момент инерции	J
Импульс	$p = mv$	Момент импульса	$L = J\Omega$
Сила	$F = F(p, x, t)$	Момент силы относительно оси вращения	$M = M(L, \varphi, t)$
Кинетическая энергия	$T_v = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия вращения	$T_v = \frac{L^2}{2J}$
Потенциальная энергия	$U = U(x)$	Потенциальная энергия вращения	$U = U(\varphi)$
Функция Гамильтона	$H = \frac{p^2}{2m} + U(x) + F(t)x$	Функция Гамильтона	$H = \frac{L^2}{2J} + U(\varphi) + F(t)\varphi$
Диссипативная функция	$D_p = \frac{\beta \cdot p^2}{m^2}$	Диссипативная функция	$D_p = \frac{\beta \cdot L^2}{J^2}$
Полная энергия	$E = H(p, x, t) + D(p)$	Полная энергия	$E = H(L, \varphi, t) + D(L)$

Используя результаты главы 5, запишем логические алгоритмы интегрирования динамических уравнений вращения твёрдого относительно неподвижной оси.

1. Определяем фазовое пространство твёрдого тела $W^3 = W(L, \varphi, t)$
2. Записываем функцию энергии $E(L, \varphi, t)$ (6.19).
3. Записываем динамические уравнения, согласно выражению (6.20)
4. Выбираем и записываем преобразования для численного интегрирования.

4.1.1. С прямым преобразованием диссипативной составляющей

$p \rightarrow q$

$$\begin{cases} L^{(i+1)} = (1 - 2\beta \cdot \tau) L^{(i)} - U(\varphi^{(i)})\tau + U(t^{(i)}); \\ \varphi^{(i+1)} = \varphi^{(i)} + L^{(i+1)}\tau; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{cases} \quad (6.21)$$

$q \rightarrow p$

$$\begin{cases} \varphi^{(i+1)} = \varphi^{(i)} + L^{(i)}\tau; \\ L^{(i+1)} = (1 - 2\beta \cdot \tau) L^{(i)} - U(\varphi^{(i+1)})\tau + U(t^{(i)}); \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{cases} \quad (6.22)$$

4.1.2. С обратным преобразованием для диссипативной составляющей
 $p \rightarrow q$

$$\begin{cases} L^{(i+1)} = \frac{1}{1+2\beta \cdot \tau} [L^{(i)} - U(\varphi^{(i)})\tau + U_t(t^{(i)})]; \\ \varphi^{(i+1)} = \varphi^{(i)} + L^{(i+1)}\tau; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{cases} \quad (6.23)$$

$q \rightarrow p$

$$\begin{cases} \varphi^{(i+1)} = \varphi^{(i)} + L^{(i)}\tau; \\ L^{(i+1)} = \frac{1}{1+2\beta \cdot \tau} [L^{(i)} - U(\varphi^{(i+1)})\tau + U_\tau(t^{(i)})]; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{cases} \quad (6.24)$$

4.2. Преобразование $p \rightarrow q \rightarrow q \rightarrow p$

$$\begin{cases} L^{(i+1)} = (1-2\beta \cdot \tau)L^{(i)} - U(\varphi^{(i)})\tau + U_t(t^{(i)}); \\ \varphi^{(i+1)} = \varphi^{(i)} + L^{(i)}\tau; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau; \\ \varphi^{(i+2)} = \varphi^{(i+1)} + L^{(i+1)}\tau; \\ L^{(i+2)} = \frac{1}{1+2\beta \cdot \tau} [L^{(i+1)} - U(\varphi^{(i+2)})\tau + U_t(t^{(i+1)})]; \\ t^{(i+2)} = t^{(i+1)} + \tau. \end{cases} \quad (6.25)$$

4.3. Преобразования с усреднением:

$$\begin{cases} L_I^{(i+1)} = (1-2\beta\tau)L_I^{(i)} - U(\varphi_I^{(i)})\tau + U_t(t^{(i)}); \\ \varphi_{II}^{(i+1)} = \varphi_{II}^{(i)} + L_{II}^{(i)}\tau; \\ \varphi_I^{(i+1)} = \varphi_I^{(i)} + L_I^{(i+1)}\tau; \\ L_{II}^{(i+1)} = \frac{1}{1+2\beta\tau} [L_{II}^{(i)} - U(\varphi_{II}^{(i+1)})\tau + U_t(t^{(i)})]; \\ L^{(i+1)} = \frac{L_I^{(i+1)} + L_{II}^{(i+1)}}{2}; \\ \varphi^{(i+1)} = \frac{\varphi_I^{(i+1)} + \varphi_{II}^{(i+1)}}{2}; \\ t^{(i+1)} = t^{(i)} + \tau. \end{cases} \quad (6.26)$$

Устойчивость процесса интегрирования на основе полученных алгоритмов следует из каноничности преобразований консервативной составляющей энергии и асимптотической устойчивости систем с диссипацией энергии.

6.4 Интегрирование уравнений движения вокруг неподвижной оси

При расчёте реальных механизмов очень часто последние можно рассматривать как совокупность твёрдых тел - *звеньев*, каждый из которых может совершать либо поступательное движение, либо вращаться вокруг закреплённой оси. Для построения динамических моделей таких механизмов можно использовать разработанные выше динамические модели, дополняя их силами, выражающими связи между звеньями. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 11. Пусть однородный эллипсоид (рис. 6.2) вращается вокруг одной из главных осей инерции AB , которая в свою очередь вращается вокруг направления CD .

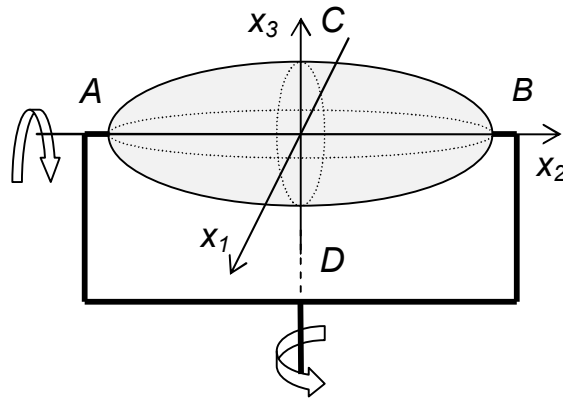


Рисунок 6.2 - Вращение эллипсоида

Построим динамическую модель и запишем алгоритмы численного уравнения вращения описанного механизма:

1. Начало подвижной системы координат поместим в центре инерции эллипсоида, а её оси x_1, x_2, x_3 направим вдоль главных осей инерции. Система имеет две степени свободы: поворот на угол φ вокруг оси AB и на угол θ вокруг оси CD . Фазовое пространство твёрдого тела $W^4 = W(L_\varphi, L_\theta, \varphi, \theta)$. Проекция угловой скорости на главные оси инерции

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \dot{\theta} \cdot \cos \varphi; \\ \Omega_2 &= \dot{\theta} \cdot \sin \varphi; \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi}.\end{aligned}\tag{6.27}$$

2. Найдём кинетическую энергию

$$T(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \varphi) = J_1 \Omega_1^2 + J_2 \Omega_2^2 + J_3 \Omega_3^2 = \frac{1}{2} (J_1 \cos^2 \varphi + J_2 \sin^2 \varphi) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\varphi}^2\tag{6.28}$$

и функцию Гамильтона

$$H(L_\varphi, L_\theta, \varphi, \theta) = \frac{1}{2} (J_1 \cos^2 \varphi + J_2 \sin^2 \varphi)^{-1} L_\theta^2 + \frac{1}{2} J_3^{-1} L_\varphi^2.\tag{6.29}$$

3. Запишем динамические уравнения

$$\begin{aligned}
 \frac{dL_\varphi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = (J_2 - J_1)(J_1 \cos^2 \varphi + J_2 \sin^2 \varphi)^{-1} \sin 2\varphi; \\
 \frac{dL_\theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0; \\
 \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial L_\varphi} = J_3^{-1} L_\varphi; \\
 \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial L_\theta} = (J_1 \cos^2 \varphi + J_2 \sin^2 \varphi)^{-1} L_\theta.
 \end{aligned}
 \tag{6.30}$$

Равенство нулю динамических уравнений для составляющей момента импульса L_θ означает, что он является интегралом движения, иными словами, в процессе движения сохраняет значение, определяемое начальными условиями.

4. Для численного интегрирования запишем преобразование $p \rightarrow q$

$$\begin{cases}
 L_\varphi^{(i+1)} = L_\varphi^{(i)} + (J_2 - J_1)(J_1 \cos^2 \varphi^{(i)} + J_2 \sin^2 \varphi^{(i)})^{-1} \sin 2\varphi^{(i)} \cdot \tau; \\
 L_\theta^{(i+1)} = L_\theta^{(0)}; \\
 \varphi^{(i+1)} = \varphi^{(i)} + J_3^{-1} L_\varphi^{(i+1)} \cdot \tau; \\
 \theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + (J_1 \cos^2 \varphi^{(i)} + J_2 \sin^2 \varphi^{(i)})^{-1} L_\theta^{(i+1)} \cdot \tau.
 \end{cases}
 \tag{6.31}$$

Обратим внимание, что для каноничности преобразования в выражение $\theta^{(i+1)}$ подставляются старые значения $\varphi^{(i)}$.

Пример 12. Колебания подрессоренной балки (рис. 6.3 и 6.4).

Балка массы опирается на два упругих элемента (рессоры) с коэффициентами жёсткости k_1, k_2 , расположенными на расстояниях h_1, h_2 от её центра масс.

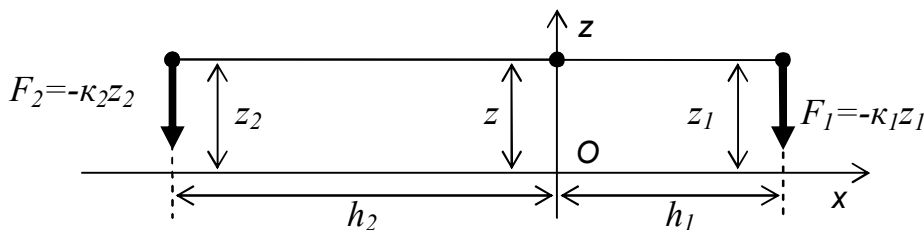


Рисунок 6.3 - Колебания подрессоренной балки (вертикальное смещение)

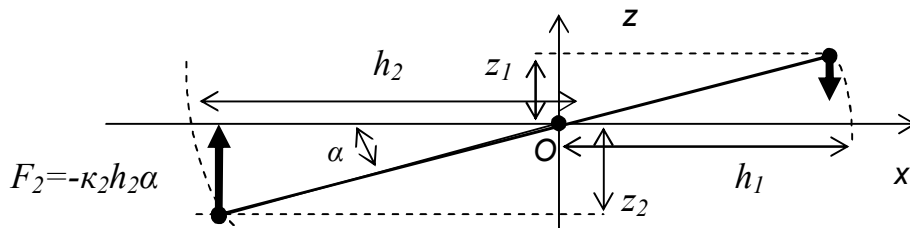


Рисунок 6.4- Колебания подрессоренной балки: (поворот)

Построим динамическую модель и запишем алгоритмы численного уравнения колебаний балки.

1. Система имеет две степени свободы: вертикальное перемещение центра масс z относительно положения равновесия упругих элементов и вращательное движение вокруг оси OY (перпендикулярно рисунку) на угол. Фазовое пространство твёрдого тела α . Фазовое пространство движения балки $W^4 = W(p_z, L_\alpha, z, \alpha)$.

2. Кинетическая энергия балки

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{J_y}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2; \quad (6.32)$$

$$F_1 = -k_1 h_1 \alpha,$$

где J момент инерции относительно оси OY .

Силы, действующие со стороны упругих элементов в координатах (z, α)

$$F_1 = -k_1 z_1 = -k_1 z + h_1 \alpha; \quad (6.33)$$

$$F_2 = -k_2 z_2 = -k_2 z + h_2 \alpha,$$

откуда потенциальная энергия каждой степени свободы выразится в виде

$$U_z = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) z^2; \quad (6.34)$$

$$U_\alpha = \frac{1}{2} (k_1 h_1^2 + k_2 h_2^2) \alpha^2.$$

Полная энергия системы запишется в виде

$$2E = m \left(\dot{z} \right)^2 + J_y \left(\dot{\alpha} \right)^2 + (k_1 + k_2) z^2 + (k_1 h_1^2 + k_2 h_2^2) \alpha^2. \quad (6.35)$$

Заменяя производные $\dot{z}$, $\dot{\alpha}$ импульсом и моментом импульса p_z , L_α , получим функцию Гамильтона колебаний подрессоренной массы

$$2 \cdot H = \frac{1}{m} p_z^2 + \frac{1}{J_y} p_\alpha^2 + (k_1 + k_2) z^2 + (k_1 h_1^2 + k_2 h_2^2) \alpha^2. \quad (6.36)$$

3. Зная функцию Гамильтона, находим динамические уравнения

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -(k_1 + k_2) z;$$

$$\dot{L}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -(k_1 h_1^2 + k_2 h_2^2) \alpha;$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}; \quad (6.37)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{L_\alpha}{J_y}.$$

4. Алгоритм интегрирования уравнений $p \rightarrow q$ имеет вид:

$$\begin{cases} p_z^{(i+1)} = p_z^{(i)} - (k_1 + k_2) z^{(i)} \cdot \tau; \\ L_\alpha^{(i+1)} = L_\alpha^{(i)} - (k_1 h_2^2 + k_2 h_1^2) \alpha^{(i)} \cdot \tau; \\ z^{(i)} = z^{(i)} + \frac{1}{m} p_z^{(i+1)} \tau; \\ \alpha^{(i)} = \alpha^{(i)} + \frac{1}{J_y} L_\alpha^{(i+1)} \cdot \tau. \end{cases} \quad (6.38)$$

Численное интегрирование по алгоритму (6.38) воспроизводит систему, заданную динамическими уравнениями (6.37) в условиях малого по порядку шага интегрирования консервативного возмущения.

Этот пример можно рассматривать как простейшую модель автомобильной подвески.

Пример 13. Затухающие колебания подрессоренной балки.

Усложним предыдущий пример, добавляя в систему диссипативные силы. Силы сопротивления, вообще говоря, могут возникать как при вертикальном перемещении балки, так и при её повороте. Поэтому полагаем

$$\begin{aligned} F_{1dis} &= (\beta_1 + \beta_2) \dot{z}; \\ F_{2dis} &= -(\beta_1 h_1 - \beta_2 h_2) \dot{\alpha}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

где β_1, β_2 коэффициенты диссипации упругих элементов.

Запишем диссипативные функции Рэля, выражая их через импульс p_z, L_α

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{(\beta_1 + \beta_2) p_z^2}{2m^2}; \\ D_2 &= \frac{(\beta_1 h_1 - \beta_2 h_2) L_\alpha^2}{2J^2}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Добавляя к функции Гамильтона (6.36) функции Рэля, найдём общую энергию системы

$$2E = \frac{1}{m} p_z^2 + \frac{1}{J_y} p_\alpha^2 + (k_1 + k_2) z^2 + (k_1 h_1^2 + k_2 h_2^2) \alpha^2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{m} p_z + \frac{\beta_2 h_2 - \beta_1 h_1}{J} L_\alpha. \quad (6.41)$$

Запишем динамические уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dp_z}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial D_1}{\partial p_z} \frac{\partial p_z}{\partial v_z} = -(k_1 + k_2) z - \frac{\beta_1 + \beta_2}{m} p_z; \\ \frac{dL_\alpha}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha} - \frac{\partial D_2}{\partial L_\alpha} \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{\alpha}} = -(k_1 h_2^2 + k_2 h_1^2) \alpha - \frac{\beta_1 h_1 - \beta_2 h_2}{J} L_\alpha; \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{L_\alpha}{J_y}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Составим алгоритм интегрирования $p \rightarrow q$

$$\begin{cases} p_z^{(i+1)} = p_z^{(i)} - (k_1 + k_2) z^{(i)} \cdot \tau - \frac{\beta_1 + \beta_2}{m} p_z \cdot \tau; \\ L_\alpha^{(i+1)} = L_\alpha^{(i)} - (k_1 h_2^2 + k_2 h_1^2) \alpha^{(i)} \cdot \tau - \frac{\beta_1 h_1 - \beta_2 h_2}{J} L_\alpha \cdot \tau; \\ z^{(i)} = z^{(i)} + \frac{1}{m} p_z^{(i+1)} \tau; \\ \alpha^{(i)} = \alpha^{(i)} + \frac{1}{J} L_\alpha^{(i+1)} \cdot \tau. \end{cases} \quad (6.43)$$

Численное интегрирование по алгоритму (6.43) воспроизводит систему, заданную динамическими уравнениями (6.42) в условиях малого по порядку шага интегрирования консервативного и неконсервативного возмущения.

6.5 Эквивариантные преобразования

В основе гамильтоновой механики лежат канонические преобразования фазового пространства координат и импульсов, сохраняющие элемент его объёма [4], и само движение рассматривается как частный случай такого преобразования. В каноническом методе численного интегрирования динамических уравнений Гамильтона [18] используются алгоритмы численного интегрирования, которые представляют собой бесконечно малые по параметру шага канонические преобразования фазового пространства. В этом случае следствием сохранения элемента объёма является устойчивость алгоритмов к накоплению погрешности счёта, а сам процесс численного интегрирования воспроизводит движение исходной системы в условиях малого консервативного возмущения. Выполнение условий теоремы Лиувилля [4] в классических задачах динамики твёрдого тела даёт основание предполагать наличие аналогичных преобразований для пространств большой размерности. Возникает задача нахождения алгоритмов численного интегрирования уравнений движения, в форме бесконечно малых по параметру шага интегрирования преобразований, сохраняющих элементы площадей или объёмов в пространствах угловых скоростей и координат для случая свободного вращения твёрдого тела.

Пусть имеется координатная плоскость $X \times Y = R^2$, возьмем некоторую произвольную точку плоскости с координатами x_0, y_0 и рассмотрим преобразование

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + a \tau \cdot y_0; \\ y_1 &= y_0 + b \tau \cdot x_1, \end{aligned} \quad (6.44)$$

где $\tau \in R$ - параметр преобразования, $a, b \in R$ - действительные коэффициенты.

Подчеркнём, что во второе уравнение подставляется значение x , уже вычисленное в первом уравнении, иными словами, речь идет о преобразовании

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + a\tau \cdot y_0; \\ y_1 &= b\tau \cdot x_0 + (1 + ab\tau^2)y_0\end{aligned}\tag{6.45}$$

определитель матрицы, которого равен единице

$$\begin{vmatrix} 1 & a\tau \\ b\tau & 1 + ab\tau^2 \end{vmatrix} = 1 + ab\tau^2 - ab\tau^2 = 1.\tag{6.46}$$

Преобразования, обладающие таким свойством, в аналитической геометрии принято называть эквиаффинными [19, 25], а в теории групп – унимодулярными. Эквиаффинные преобразования имеют простой геометрический смысл, их действие на координатной плоскости сохраняет площадь преобразуемой геометрической фигуры. В частности,

$$(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) = (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots\tag{6.47}$$

площадь прямоугольника, образованного приращениями координат в преобразовании (6.44), не будет изменяться при его последовательном применении.

Рассмотрим задачу о свободном вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в отсутствии действия моментов внешних сил или случай Эйлера [1,4]. Закон изменения угловой скорости в системе координат $X \times Y \times Z = R^3$, центр которой совмещён с центром масс твёрдого тела, а оси координат жёстко связаны с его главными осями инерции, выражается динамическими уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_1}{dt} &= \frac{J_2 - J_3}{J_1} \Omega_2 \Omega_3; \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= \frac{J_3 - J_1}{J_2} \Omega_3 \Omega_1; \\ \frac{d\Omega_3}{dt} &= \frac{J_1 - J_2}{J_3} \Omega_1 \Omega_2\end{aligned}\tag{6.48}$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ - проекции угловой скорости на оси координат, а величины J_1, J_2, J_3 - соответствующие им главные моменты инерции.

Кроме того, действуют законы сохранения кинетической энергии T_0 и момента импульса L_0

$$\begin{aligned}J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2 &= 2T_0; \\ J_1^2\Omega_1^2 + J_2^2\Omega_2^2 + J_3^2\Omega_3^2 &= L_0^2.\end{aligned}\tag{6.49}$$

В случае $J_1 = J_2 \neq J_3$ твёрдое тело называется симметрическим волчком, а в случае $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ - асимметрическим волчком.

Для симметрического волчка правая часть третьего уравнения системы (6.48) обращается в ноль, что даёт $\Omega_3 = const$. Введём постоянную величину

$$\omega = \Omega_3 \frac{J_3 - J_1}{J_1} \quad (6.50)$$

и запишем динамические уравнения Эйлера в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{dt} &= -\omega \cdot \Omega_2; \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= \omega \cdot \Omega_1; \\ \Omega_3 &= \Omega_3^{(0)}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Первые два дифференциальные уравнения определяют тригонометрические функции синуса и косинуса, поэтому их аналитическое решение будет

$$\begin{cases} \Omega_1 = \Omega_1^{(0)} \cos \omega t + \frac{\Omega_2^{(0)}}{\omega} \sin \omega t; \\ \Omega_2 = -\Omega_1^{(0)} \omega \sin \omega t + \Omega_2^{(0)} \cos \omega t, \end{cases} \quad (6.52)$$

где $\Omega_1^{(0)}, \Omega_2^{(0)}$ - значения угловых скоростей при $t=0$. Формулы (6.52) осуществляют непрерывное преобразование угловых скоростей с параметром t на координатной плоскости $W_1 \times W_2 = R_\Omega^2$.

Фиксируя в (6.48) $t = \tau$, получим преобразование

$$\begin{cases} \Omega_1^{(i+1)} = \Omega_1^{(i)} \cos \omega \tau + \frac{\Omega_2^{(i)}}{\omega} \sin \omega \tau; \\ \Omega_2^{(i+1)} = -\Omega_1^{(i)} \omega \sin \omega \tau + \Omega_2^{(i)} \cos \omega \tau \end{cases} \quad (6.53)$$

последовательное применение которого будет дискретно воспроизводить непрерывное решение. Преобразование (6.53) является эквивариантным, поскольку определитель матрицы преобразования равен единице

$$\begin{vmatrix} \cos \omega \tau & -\sin \omega \tau \\ \sin \omega \tau & \cos \omega \tau \end{vmatrix} = \cos^2 \omega \tau + \sin^2 \omega \tau = 1. \quad (6.54)$$

Алгоритм численного интегрирования уравнения (6.51) при использовании метода Эйлера [20] запишется в форме

$$\begin{cases} \Omega_1^{(i+1)} = \Omega_1^{(i)} - \omega \cdot \Omega_2^{(i)} \tau; \\ \Omega_2^{(i+1)} = \Omega_2^{(i)} + \omega \cdot \Omega_1^{(i)} \tau; \\ \Omega_3^{(i+1)} = \Omega_3^{(i)}; \end{cases} \quad (6.55)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$, а параметр τ является шагом интегрирования.

Определитель матрицы преобразования (6.55), осуществляемого первыми двумя уравнениями (6.55), на координатной плоскости $W_1 \times W_2 = R_\Omega^2$, не равен единице

$$\begin{vmatrix} 1 & -\omega\tau \\ \omega\tau & 1 \end{vmatrix} = 1 + \omega^2 \tau^2 > 1. \quad (6.56)$$

Следовательно, преобразование (6.55) не эквиаффинное, а площадь прямоугольника, образованного приращенными координатами будет возрастать на каждом шаге интегрирования на величину $\omega^2 \tau^2$. В этом состоит геометрическая интерпретация быстрого накопления погрешности счёта для метода Эйлера.

Вычисление $\Omega_1^{(i)}$ во втором уравнении (6.55) требует введение дополнительного оператора, фиксирующего $\Omega_1^{(i)}$. Чтобы избежать этого, перепишем (6.55)

в виде

$$\begin{cases} \Omega_1^{(i+1)} = \Omega_1^{(i)} - \omega \cdot \Omega_2^{(i)} \tau; \\ \Omega_2^{(i+1)} = \Omega_2^{(i)} + \omega \cdot \Omega_1^{(i+1)} \tau; \\ \Omega_3^{(i+1)} = \Omega_3^{(i)}; \end{cases} \quad (6.57)$$

или в виде

$$\begin{cases} \Omega_2^{(i+1)} = \Omega_2^{(i)} + \omega \cdot \Omega_1^{(i)} \tau; \\ \Omega_1^{(i+1)} = \Omega_1^{(i)} - \omega \cdot \Omega_2^{(i+1)} \tau; \\ \Omega_3^{(i+1)} = \Omega_3^{(i)}; \end{cases} \quad (6.58)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$

Полученные алгоритмы (6.57) и (6.58) осуществляют эквиаффинные преобразования в пространстве $W_1 \times W_2 = R_\Omega^2$ и содержат минимально возможное количество арифметических операций, достаточных для осуществления численного интегрирования, а выполнение условия (6.46) делает процесс численного интегрирования устойчивым к накоплению погрешности счёта.

Приведены результаты численного интегрирования динамических уравнений симметрического волчка (6.51) по эквиаффинному алгоритму (6.57) (рис. 6.5) и алгоритму Эйлера (6.55) (рис. 6.6) при значениях моментов

инерции $J_1 = J_2 = 1$, $J_3 = 2$, угловых скоростей $\Omega_1^{(0)} = 1$, $\Omega_2^{(0)} = 0$, $\Omega_3^{(0)} = 2$ в начальный момент времени $t = 0$ и шаге интегрирования $\tau = 0,05$.

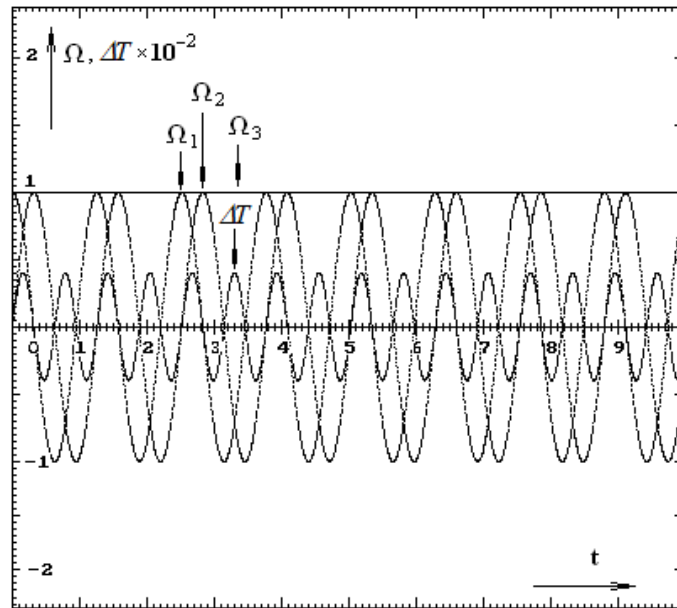


Рисунок 6.5 - Результаты численного интегрирования динамических уравнений симметрического волчка по эквиаффинному алгоритму

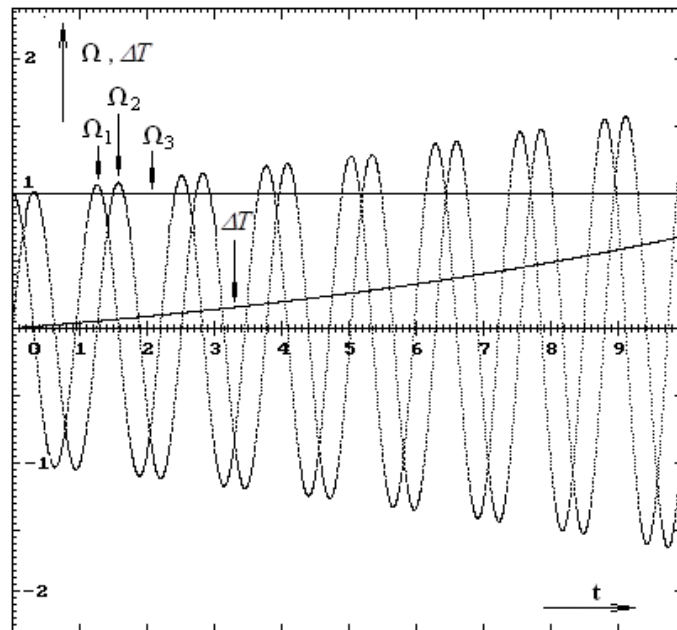


Рисунок 6.6 - Результаты численного интегрирования динамических уравнений симметрического волчка по алгоритму Эйлера

В качестве меры погрешности счёта использовалось относительное отклонение величины энергии T , определяемое интегралом движения (6.49) на каждом шаге интегрирования, от значения в начальный момент времени T_0

$$\Delta T = \frac{T - T_0}{T_0}. \quad (6.59)$$

Как видно из сравнения графиков, в случае использования эквиаффинного алгоритма, величина погрешности осциллирует с постоянной амплитудой (рис. 6.5), в то время как использование алгоритма Эйлера (рис. 6.6) приводит к быстрому росту погрешности.

Правые части уравнений (6.48) для асимметрического волчка, суть, компоненты векторного поля, заданного на точках пространства R_Ω^3

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1(\Omega_2, \Omega_3); \\ f_2 &= f_2(\Omega_3, \Omega_2); \\ f_3 &= f_3(\Omega_1, \Omega_2). \end{aligned} \quad (6.60)$$

Дивергенция этого поля равна нулю, поэтому из утверждения теоремы Лиувилля [4] следует, что точное решение системы (6.48) осуществляет преобразование пространства R_Ω^3 , сохраняющее объём. Этот результат даёт основание искать алгоритм интегрирования в форме некоторого эквиаффинного преобразования. Поскольку в этом случае будут изменяться все три компоненты угловой скорости, следует ожидать, что алгоритм интегрирования будет иметь вид некоторого параметрического преобразования пространства угловых скоростей $W_1 \times W_2 \times W_3 = R_\Omega^3$, осуществляемого тремя элементарными преобразованиями, определяемыми динамическими уравнениями (6.48). Однако, как следует из теории [4], на пространствах нечётной размерности подобные структуры не реализуются. В этом случае эквиаффинное преобразование пространства R_Ω^3 можно осуществить с помощью трёх последовательных преобразований типа (6.44) в координатных плоскостях $W_1 \times W_2$, $W_2 \times W_3$, $W_3 \times W_1$. Всего, вследствие не коммутативности операции операторного умножения, возможно 216 вариантов таких преобразований, при этом далеко не все из них будут каноническими. Анализ всех вариантов позволяет выделить 14 канонических преобразований, для которых определитель матрицы преобразований равен единице (табл. 6.2).

Таблица 6.2- Эквиаффинные алгоритмы интегрирования динамических уравнений Эйлера

Варианты	Сопряженные алгоритмы	Максимальная погрешность, ΔT
1	(1,2,1,3,2,3),(3,2,3,1,2,1)	$3 \cdot 10^{-3}$
2	(1,3,2,1,2,3),(3,2,1,2,3,1)	$2 \cdot 10^{-2}$
3	(2,1,3,1,2,3),(3,2,1,3,1,2)	$2 \cdot 10^{-2}$
4	(1,3,2,3,1,2),(2,1,3,2,3,1)	$4 \cdot 10^{-2}$
5	(2,3,1,2,1,3),(3,1,2,1,3,2)	$4 \cdot 10^{-2}$
6	(2,1,2,3,1,3),(3,1,3,2,2,1)	$5 \cdot 10^{-2}$
7	(1,3,1,2,3,2),(2,3,2,1,3,1)	$5 \cdot 10^{-2}$

Перейдём от дифференциальных уравнений (6.48) к трём преобразованиям по параметру τ

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \Omega_1 + \frac{J_2 - J_3}{J_1} \Omega_2 \Omega_3 \cdot \tau; \\ \Omega_2 &= \Omega_2 + \frac{J_3 - J_1}{J_2} \Omega_3 \Omega_2 \cdot \tau; \\ \Omega_3 &= \Omega_3 + \frac{J_1 - J_2}{J_3} \Omega_1 \Omega_2 \cdot \tau.\end{aligned}\tag{6.61}$$

Будем записывать каждый канонический алгоритм, указывая порядок следования выражений (6.61), например, запись (1,2,1,3,2,3) обозначает последовательное выполнение операторов

$$(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_1, \Omega_3, \Omega_2, \Omega_3)\tag{6.62}$$

или

$$\left\{\begin{aligned}\Omega_1^{(i+1)} &= \Omega_1^{(i)} + \frac{J_2 - J_3}{J_1} \Omega_2^{(i)} \Omega_3^{(i)} \cdot \tau; \\ \Omega_2^{(i+1)} &= \Omega_2^{(i)} + \frac{J_3 - J_1}{J_2} \Omega_3^{(i)} \Omega_1^{(i+1)} \cdot \tau; \\ \Omega_1^{(i+2)} &= \Omega_1^{(i+1)} + \frac{J_2 - J_3}{J_1} \Omega_2^{(i+1)} \Omega_3^{(i)} \cdot \tau; \\ \Omega_3^{(i+1)} &= \Omega_3^{(i)} + \frac{J_1 - J_2}{J_3} \Omega_1^{(i+2)} \Omega_2^{(i+1)} \cdot \tau; \\ \Omega_2^{(i+2)} &= \Omega_2^{(i+1)} + \frac{J_3 - J_1}{J_2} \Omega_3^{(i+1)} \Omega_1^{(i+2)} \cdot \tau; \\ \Omega_3^{(i+2)} &= \Omega_3^{(i+1)} + \frac{J_1 - J_2}{J_3} \Omega_1^{(i+2)} \Omega_2^{(i+2)} \cdot \tau.\end{aligned}\right.\tag{6.63}$$

В таблице 6.2 приведены эквивалентные алгоритмы численного интегрирования динамических уравнений Эйлера (6.48) сопряжённые эквивалентные алгоритмы, отличающиеся обратной последовательностью элементарных преобразований.

В сопряжённых алгоритмах, за исключением указанных в первой строке таблицы, отклонения значений энергии от начального значения осуществляются в противофазе. Поэтому при численном интегрировании целесообразно последовательно использовать оба сопряжённых алгоритма, например, ((1, 3, 2, 1, 2, 3), (3, 2, 1, 2, 3, 1)) и поднять точность счёта на порядок, не увеличивая общего количества вычислительных операций.

На графике (рис. 6.7) представлен результат численного интегрирования динамических уравнений (6.48) на основе использования алгоритма (6.63) при значениях моментов инерции $J_1 = 1, J_2 = 1.5, J_3 = 2$, угловых скоростях $\Omega_1 = 1, \Omega_2 = 0, \Omega_3 = 1$ при $t = 0$ и шаге интегрирования $\tau = 0,05$ для

$$\begin{aligned}\Omega_1^* &= \sqrt{\frac{J_1(J_3 - J_1)}{2T_0 J_3 - L_0^2}} \cdot \Omega_1; \\ \Omega_2^* &= \sqrt{\frac{J_2(J_3 - J_2)}{2T_0 J_3 - L_0^2}} \cdot \Omega_2; \\ \Omega_3^* &= \sqrt{\frac{J_3(J_3 - J_1)}{L_0^2 - 2T_0 J_1}} \cdot \Omega_3; \\ t^* &= \sqrt{\frac{(J_3 - J_2)(L_0^2 - 2T_0 J_1)}{J_1 J_2 J_3}}.\end{aligned}\tag{6.64}$$

Полученные графики с точностью $o(\tau^3)$ воспроизводят известное решение динамических уравнений (6.48), выражаемое эллиптическими функциями Якоби [1]

$$\Omega_1^* = cn(t^*); \quad \Omega_2^* = sn(t^*); \quad \Omega_3^* = dn(t^*).\tag{6.65}$$

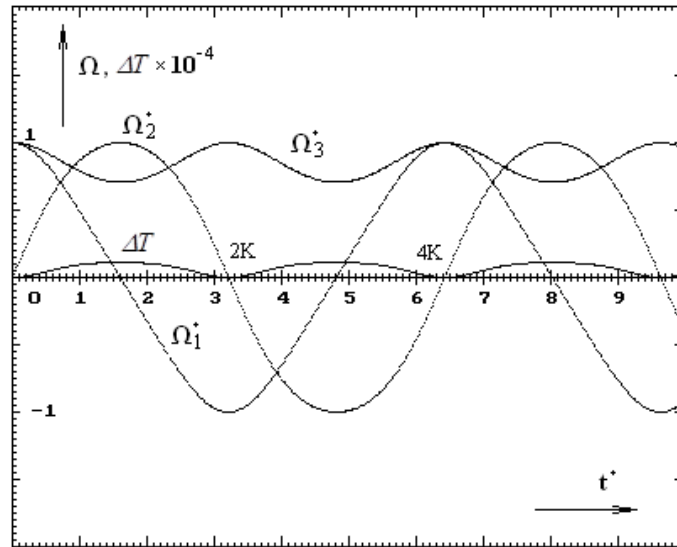


Рисунок 6.7 - Результаты численного интегрирования динамических уравнений симметрического волчка по алгоритму Эйлера

Постоянство амплитуды колебаний отклонения энергии ΔT (6.59) является следствием выполнения условия эквиаффинности преобразования (6.63) и обеспечивает устойчивость алгоритма к накоплению погрешности счёта. Кроме задачи свободного вращения твёрдого тела, полученные алгоритмы могут быть использованы непосредственно для вычисления эллиптических функций Якоби.

6.6 Канонические преобразования пространства кватернионов

Перейдём к нахождению устойчивых алгоритмов интегрирования, определяющих абсолютное движение асимметрического волчка в пространстве как функции времени или закона движения. Динамические уравнения Эйлера (6.48) выражают изменение компонент угловой скорости в системе координат, движущейся с твёрдым телом XYZ , а закон вращения твёрдого тела выражает его положение в неподвижной системе координат xuz . Если начала обеих систем совпадают, то кинематическая связь между обеими системами выражается в форме ортогонального преобразования их базисных векторов

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_X \\ \mathbf{e}_Y \\ \mathbf{e}_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}. \quad (6.66)$$

Элементы ортогональной матрицы преобразования A являются параметрическими функциями времени, вид которых определяется заданием набора координат, достаточного для определения положения тела в пространстве. Для теоретических исследований, исходя из требования минимальности количества координат и вида интегралов движения, используют три угла Эйлера или три навигационных угла [21]. Однако для численного интегрирования такой выбор не всегда корректен, вследствие вырождения кинематических уравнений при некоторых значениях углов. Другим неудобством использования углов Эйлера и навигационных углов является необходимость вычисления большого числа тригонометрических функций. Свободная от этих недостатков система ортогональных преобразований (6.66) может быть построена на основе использования кватернионов [21].

Пусть H^4 - пространство кватернионов с нормой равной единице, то есть элементов вида

$$h = h_0 + h_1 \cdot i + h_2 \cdot j + h_3 \cdot k \quad (6.67)$$

где h_0, h_1, h_2, h_3 - действительные числа, i, j, k - базисные единицы кватерниона и

$$|h|^2 = h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1 \quad (6.68)$$

Будем рассматривать элементы h_0, h_1, h_2, h_3 кватерниона в качестве обобщённых координат асимметрического волчка. При этом связь элементов матрицы A и элементов кватерниона h , как следует из теории кватернионов, даётся соотношениями

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2(h_0^2 + h_3^2) - 1; & a_{21} &= 2(h_2 h_3 - h_0 h_1); & a_{31} &= 2(h_1 h_3 + h_0 h_2); \\ a_{12} &= 2(h_2 h_3 + h_0 h_2); & a_{22} &= 2(h_0^2 + h_2^2) - 1; & a_{32} &= 2(h_1 h_2 - h_0 h_3); \\ a_{13} &= 2(h_1 h_3 - h_0 h_2); & a_{23} &= 2(h_1 h_2 + h_0 h_3); & a_{33} &= 2(h_0^2 + h_1^2) - 1. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Пусть элементы кватерниона являются параметрическими функциями времени, тогда система динамических уравнений, осуществляющая их связь с компонентами угловых скоростей, определяемая уравнениями Эйлера (6.48), будет иметь вид [21]

$$\begin{aligned}\frac{dh_0}{dt} &= \frac{1}{2}(\Omega_3 h_1 + \Omega_2 h_2 + \Omega_1 h_3); \\ \frac{dh_1}{dt} &= \frac{1}{2}(-\Omega_3 h_0 + \Omega_1 h_2 - \Omega_2 h_3); \\ \frac{dh_2}{dt} &= \frac{1}{2}(-\Omega_2 h_0 - \Omega_1 h_1 + \Omega_3 h_3); \\ \frac{dh_3}{dt} &= \frac{1}{2}(-\Omega_1 h_0 + \Omega_2 h_1 - \Omega_3 h_2).\end{aligned}\tag{6.70}$$

Правые части уравнений (6.70) на точках пространства H^4 задают векторное поле, дивергенция которого оказывается равной нулю. Согласно теореме Лиувилля, точное решение системы (6.70) сохраняет объём области, определённый начальными условиями и, следовательно, для данной системы могут быть построены эквиаффинные алгоритмы численного интегрирования. Другим преимуществом пространства кватернионов является его чётная размерность, поэтому для него могут быть построены четырёхмерные эквиаффинные преобразования. Определим на основе динамических уравнений (6.70) преобразования по параметру τ вида

$$\begin{aligned}h_0 &= h_0 + \frac{1}{2}(\Omega_3 h_1 + \Omega_2 h_2 + \Omega_1 h_3)\tau; \\ h_1 &= h_1 + \frac{1}{2}(-\Omega_3 h_0 + \Omega_1 h_2 - \Omega_2 h_3)\tau; \\ h_2 &= h_2 + \frac{1}{2}(-\Omega_2 h_0 - \Omega_1 h_1 + \Omega_3 h_3)\tau; \\ h_3 &= h_3 + \frac{1}{2}(-\Omega_1 h_0 + \Omega_2 h_1 - \Omega_3 h_2)\tau.\end{aligned}\tag{6.71}$$

Изменяя порядок следования операторов можно задать $4! = 24$ алгоритма интегрирования, однако сохранять объём будут только те, для которых определитель матрицы преобразования будет равен единице.

Аналитическое исследование определителей матриц преобразования приводит к громоздким выражениям, поэтому проще определить эквиаффинные алгоритмы численной проверкой всех алгоритмов. Таким образом, только два алгоритма, отличающиеся друг от друга обратным порядком следования операторов, удовлетворяют условию эквиаффинности. Запишем их, как и в случае алгоритмов интегрирования уравнения Эйлера, указывая порядок следования операторов (6.70)

$$(h_0, h_3, h_2, h_1), (h_1, h_2, h_3, h_0) \quad (6.72)$$

Эквивариантные преобразования (6.72) задают новое положение твёрдого тела в пространстве кватернионов H^4 . С помощью (6.66), (6.69) можно определить положение базисных векторов системы отсчёта, связанной с твёрдым телом, относительно неподвижной системы отсчёта. Полученные преобразования содержат минимальное количество вычислительных операций. Следствием условия эквивариантности преобразования пространства кватернионов является сохранение ортонормированности базиса (e_x, e_y, e_z) в процессе численного интегрирования.

Приведены результаты расчёта движения твёрдого тела в случае Эйлера, полученные на основе эквивариантного преобразования (6.63) угловых скоростей и первого преобразования (6.73) пространства кватернионов

$$(1, 2, 1, 3, 2, 3, h_0, h_3, h_2, h_1). \quad (6.73)$$

На графике (рис. 6.8) показан орт e_x и изменение его координат (6.69) системы $OXYZ$ относительно неподвижной системы $Oxyz$.

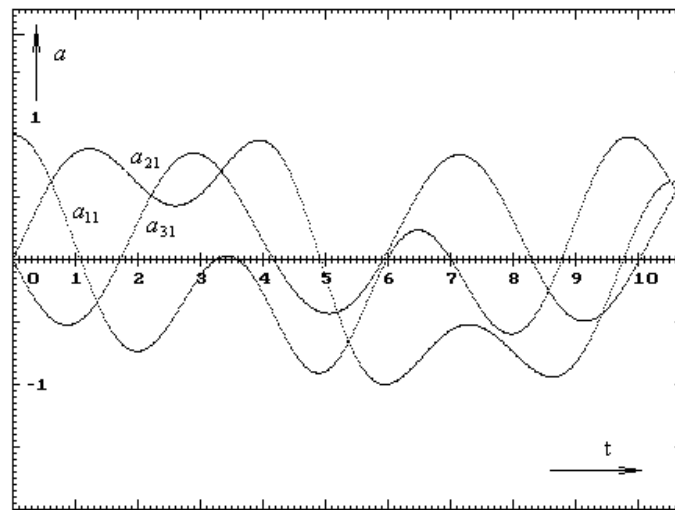


Рисунок 6.8 - Изменение координат орта e_x системы $OXYZ$ относительно неподвижной системы $Oxyz$

Для контроля устойчивости вычислительного процесса использовалось условие сохранения ортонормированности базисных векторов системы $OXYZ$, а в качестве меры погрешности счета вычислялись функции

$$\begin{aligned} \Delta e_x &= e_x^2 - 1; \quad \Delta e_y = e_y^2 - 1; \quad \Delta e_z = e_z^2 - 1; \\ \Delta e_{xy} &= e_x e_y; \quad \Delta e_{xz} = e_x e_z; \quad \Delta e_{yz} = e_y e_z. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Изменение функций (6.74) имеет вид осцилляций с постоянной максимальной амплитудой, что является следствием выполнения условия эквивариантности преобразований (6.73), так график функции Δe_x (рис. 6.9)

иллюстрирует устойчивость алгоритма к накоплению погрешности счета, которая составляет $O(\tau^4)$.

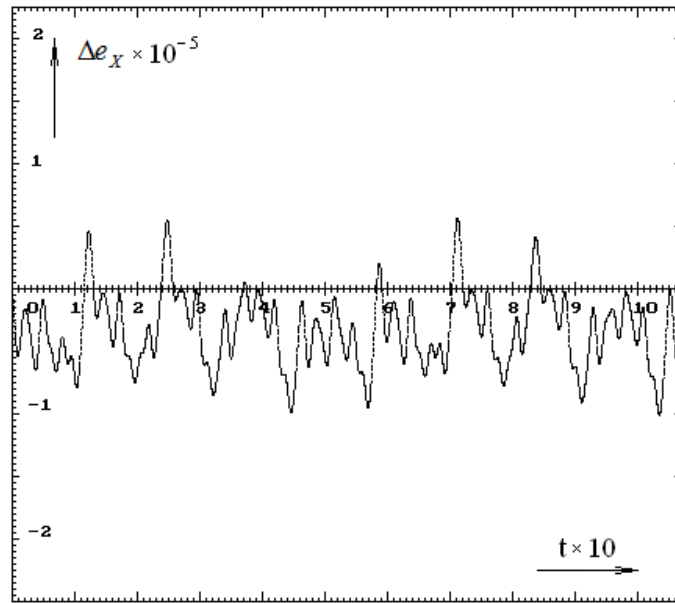


Рисунок 6.9-График функции Δe_x

Численное интегрирование уравнений движения твёрдого тела в случае Эйлера может быть эффективно выполнено на основе использования эквиаффинных преобразований пространства $RH^7 = R_\Omega^3 \times H^4$. Алгоритмы интегрирования, построенные на основе указанных преобразований, имеют третий порядок точности, устойчивы к накоплению погрешности счёта, содержат минимально возможное количество арифметических операций, структурно просты, единообразны и включают только операции умножения и сложения.

7. Сложные динамические системы

7.1 Ансамбль частиц

Математической моделью сложной динамической системы является *ансамбль частиц* - система n материальных точек, движущихся во внешнем поле в условиях межчастичного взаимодействия и отличающихся друг от друга начальными условиями.

Существует два подхода к исследованию ансамблей – *статистический* и *динамический*. При статистическом подходе постулируется *недетерминированный* характер движения частиц в ансамбле, иными словами, состояние частиц определяется не значениями фазовых переменных – координат и импульсов, а их вероятностями, которые определяются законами распределения. Вследствие этого, статистический подход хорошо моделирует, так называемые, *равновесные состояния* ансамбля, при которых хаотические процессы уже находятся в состоянии максимального развития. С другой стороны, согласно принципу детерминизма в механике, динамические уравнения содержат всю возможную информацию о системе, в том числе и информацию об эволюционных процессах.

Статистический подход постулирует существование систем, состоящих из количества частиц порядка числа Авогадро $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$. Количество уравнений, которые могут быть численно проинтегрированы при существующем уровне развития компьютерной техники, соответствует числу частиц в ансамбле порядка $n \sim 10^6 - 10^7$. При этом оказывается, что многие статистические закономерности проявляются уже в системах, состоящих из сравнительно небольшого числа частиц $N \sim 10^3 - 10^4$. Аналогичный вывод можно сделать и о количестве частиц, при котором в системе будут наблюдаться эволюционные процессы. Приведённые аргументы являются достаточными для принятия динамической концепции моделирования и исследования ансамбля.

Построим динамическую модель ансамбля, состоящего из n материальных точек (частиц) массами $m_1, m_2, \dots, m_n$. Под частицами будем подразумевать объекты, взаимодействующие посредством только консервативных сил, например, электромагнитных - для молекул или гравитационных – для звёзд. В этом случае, энергия каждой частицы ансамбля будет определяться функцией Гамильтона, в которую, кроме кинетической

энергии, могут входить потенциальная энергий межчастичного взаимодействия

$$U_{j\,k} = \sum_{j,k=1, j \neq k}^n U(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \text{ и потенциальная энергия внешнего поля } U_j = U(\mathbf{r}_j)$$

$$H_j = \frac{p_j^2}{2m_j} + U_{j\,l} + U_j, \quad (7.1)$$

где $j = 1, 2, \dots, n$.

Начальные условия образуют некоторое множество точек фазового пространства $W(\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j)$, $j = 1, \dots, n$. Ограничимся одномерным и двумерным движением ансамбля $r_j \in R$, $\mathbf{r}_j \in R^2$, в предположении отсутствия межчастичного взаимодействия $U_{j\,l} = 0$.

7.2 Основные допущения

Обозначим основные положения, которые будем использовать при построении эволюционных моделей. Одно из основных противоречий, которое сразу возникает при исследовании хаотических процессов, заключается в следующем. Согласно принципу детерминированности Ньютона, движение частиц в ансамбле, суть, детерминированный процесс, состояние которого в будущем однозначно определяется его состоянием в данный момент времени, т.е. начальными условиями. Вместе с тем, из опыта известно, что с течением времени ансамбль переходит в равновесное состояние, т.е. состояние, в котором степень развития хаоса, или *энтропия* системы, оказывается максимальной. Если предполагать, что динамические уравнения движения частиц содержат всю возможную информацию об ансамбле, то приходим к противоречию - точное решение системы дифференциальных уравнений не содержит информации о росте энтропии в системе, которая наблюдается в действительности.

Для устранения возникшего противоречия обратим внимание на следующие обстоятельства.

Во-первых, как бы ни была изолирована реальная система частиц от окружающих её объектов, энтропия системы будет только возрастать – эмпирический факт, выражаемый вторым началом термодинамики. Во-вторых, как бы ни была изолирована реальная система, на неё будут действовать возмущения, вызванные сколь угодно малыми воздействиями консервативных сил электромагнитной и гравитационной природы. Именно эти воздействия, в случае максимальной изоляции, и будут отличать реальную динамическую систему от модели, представленной её дифференциальными уравнениями.

Поэтому, в качестве первого шага, постулируем *наличие малых консервативных возмущений основной причиной возникновения и развития*

хаоса в детерминированной системе. Из принятого допущения следует необходимость использования канонических алгоритмов численного интегрирования, которые как раз и воспроизводят исходную динамическую систему в условиях малых консервативных возмущений. В этом случае малые консервативные возмущения будет воспроизводить сам процесс счёта.

Другим вопросом, возникающим при исследовании эволюционных процессов динамическими методами, является установление чёткого критерия, позволяющего отличить детерминированную систему от хаотической системы. Необходимость такого критерия, в частности, возникает при работе с компьютерными моделями эволюционных процессов в ансамбле. В этом случае последовательные состояния ансамбля, определяемые шагом интегрирования, оказываются столь близкими друг к другу, что затруднительным является само определение момента перехода порядка в хаос.

В качестве обозначенного критерия положим *принцип обратимости времени*, который заключается в следующем. Как известно, время в детерминированных процессах обратимо, иными словами, при изменении знака времени в уравнениях движения с плюса на минус система воспроизведет пройденные состояния в обратном порядке. С другой стороны, такое изменение знака в недетерминированном процессе, как следует из второго начала термодинамики, будет приводить к дальнейшему возрастанию энтропии; система не будет воспроизводить пройденные состояния. Отсюда следует критерий, позволяющий выделить момент переход порядка в хаос. Если при изменении направления времени в динамической модели в какой-либо момент система возвращается в первоначальное состояние, то имеем дело с детерминированной системой; если же система не возвращается в первоначальное состояние, то процесс является хаотическим.

Принятые допущения позволяют эффективно использовать компьютерные модели движения частиц в ансамбле для исследования эволюционных процессов, происходящих в реальных системах.

7.3 Ансамбль гармонического осциллятора

В качестве простейшей модели рассмотрим движение одномерного гармонического ансамбля. Пусть ансамбль состоит из N материальных точек единичной массы. Функция Гамильтона и уравнения движения каждой частицы будут иметь вид

$$H_j(p_j, x_j) = \frac{p_j^2}{2m} + \frac{k \cdot x_j^2}{2};$$

$$\frac{dp_j}{dt} = -k \cdot x_j;$$

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{p_j}{m},$$
(7.2)

где $j=1,2,\dots,100$.

Для наблюдения развития хаотических процессов в качестве начальных условий удобно выбирать упорядоченные множества точек фазового пространства. В данном случае в качестве начального положения ансамбля выберем значения: $p_{j0} = j/25$, $x_{j0} = 0$; $j = 1, \dots, 100$.

Таким образом, в начальный момент времени ансамбль занимает положение на отрезке $[0, 4]$ оси Ор фазовой плоскости. Выбирая для численного интегрирования каноническое преобразование $p \rightarrow q$, запишем алгоритм интегрирования динамических уравнений (7.2)

$$\begin{cases} p_j^{(i+1)} = p_j^{(i)} - k \cdot x_j^{(i)} \tau; \\ x_j^{(i+1)} = x_j^{(i)} + p_j^{(i+1)} \tau, \end{cases}$$
(7.3)

где $j=1,2,\dots,100$.

Для исследования влияния малых консервативных возмущений на движение ансамбля положим $\tau = \pi/300$, $k = 1$ и будем наблюдать движение ансамбля на протяжении $6 \cdot 10^4$ шагов интегрирования.

На рисунке 7.1а показаны последовательные положения ансамбля на экране компьютера в моменты времени, соответствующие шагам интегрирования +49; +261; +365; +525 в положительном направлении течения времени.

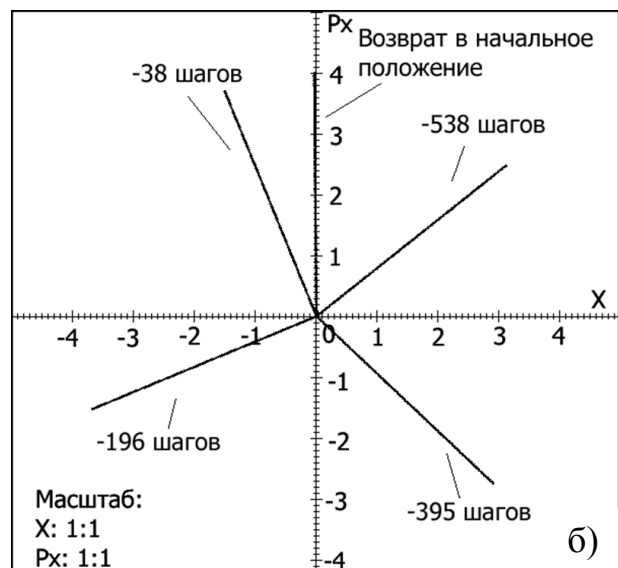
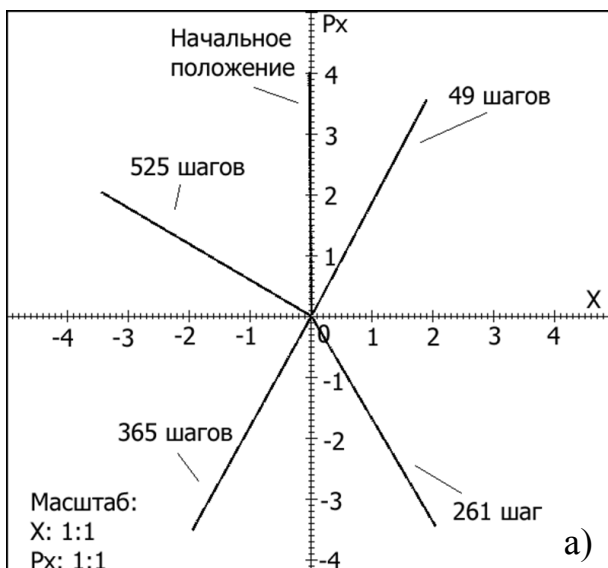


Рисунок 7.1 - Движение ансамбля гармонического осциллятора:

а) при прямом; б) при обратном, направлении течения времени

Как видим, ансамбль не проявляет никаких признаков хаотического движения. Чтобы убедиться, что процесс действительно является детерминированным, изменим направление течения времени на противоположное по истечении $6 \cdot 10^4$ шагов интегрирования. На рисунке 7.1б показаны последовательные положения ансамбля в моменты времени, соответствующие шагам интегрирования -538; -395; -196; -38 при обращении времени.

Таким образом, ансамбль при обратном течении времени воспроизводит пройденные состояния и возвращается в исходное состояние. Оказывается, что полученный результат справедлив и в общем случае; в системах с линейным потенциалом хаотические процессы не возникают, а устойчивость к хаосу является характерным признаком линейных систем.

7.4 Хаос в нелинейной системе

Теперь рассмотрим вопрос, как ведут себя по отношению к хаотическим процессам нелинейные системы. В качестве такой системы возьмем ансамбль с потенциальной энергией математического маятника примера 10. Пусть ансамбль состоит из $N=1000$ частиц, с функцией Гамильтона и динамическими уравнениями вида

$$\begin{aligned} H_j &= \frac{L_j^2}{2J} - m g h_0 \cos \varphi_j; \\ \frac{dp_j}{dt} &= -m g h_0 \sin \varphi_j; \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{L_j}{J}, \quad j=1,2,\dots,1000. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Для упрощения модели положим $m g h_0 = 1$, $J = 1$, а в качестве начальных условий вновь выберем точки отрезка оси OL фазовой плоскости $L_i = i \cdot 0,003$; $\varphi_i = 0$, $i=1,\dots,1000$. При этом значение $L_0 = 2$; $\varphi_0 = 0$ соответствует движению точки по сепаратрисе, т.е. в каком-то смысле движению с максимальной нелинейностью. Для численного интегрирования динамических уравнений вновь возьмем преобразование $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ и запишем вычислительный алгоритм

$$\begin{cases} p_j^{(i+1)} = p_j^{(i)} - \sin \varphi_j^{(i)} \cdot \tau; \\ \varphi_j^{(i+1)} = \varphi_j^{(i)} + p_j^{(i+1)} \cdot \tau \end{cases} \quad (7.5)$$

где $j=1,2,\dots,100$

Выбирая шаг интегрирования $\tau = \pi / 300$, будем наблюдать движение ансамбля по фазовой плоскости в течение $6 \cdot 10^4$ шагов интегрирования в положительном направлении течения времени, а затем обратим его направление на обратное.

На рисунке 7.2, изображены положения ансамбля в случае положительного направления течения времени. Как видно из рисунков, вследствие увеличения периода колебаний, вследствие нелинейности ансамбль начинает приобретать характерную спиралевидную форму для точек, лежащих ниже сепаратрисы. На сепаратрисе происходит разрыв, и точки, лежащие выше неё, совершают вращательные движения и уходят за пределы наблюдения.

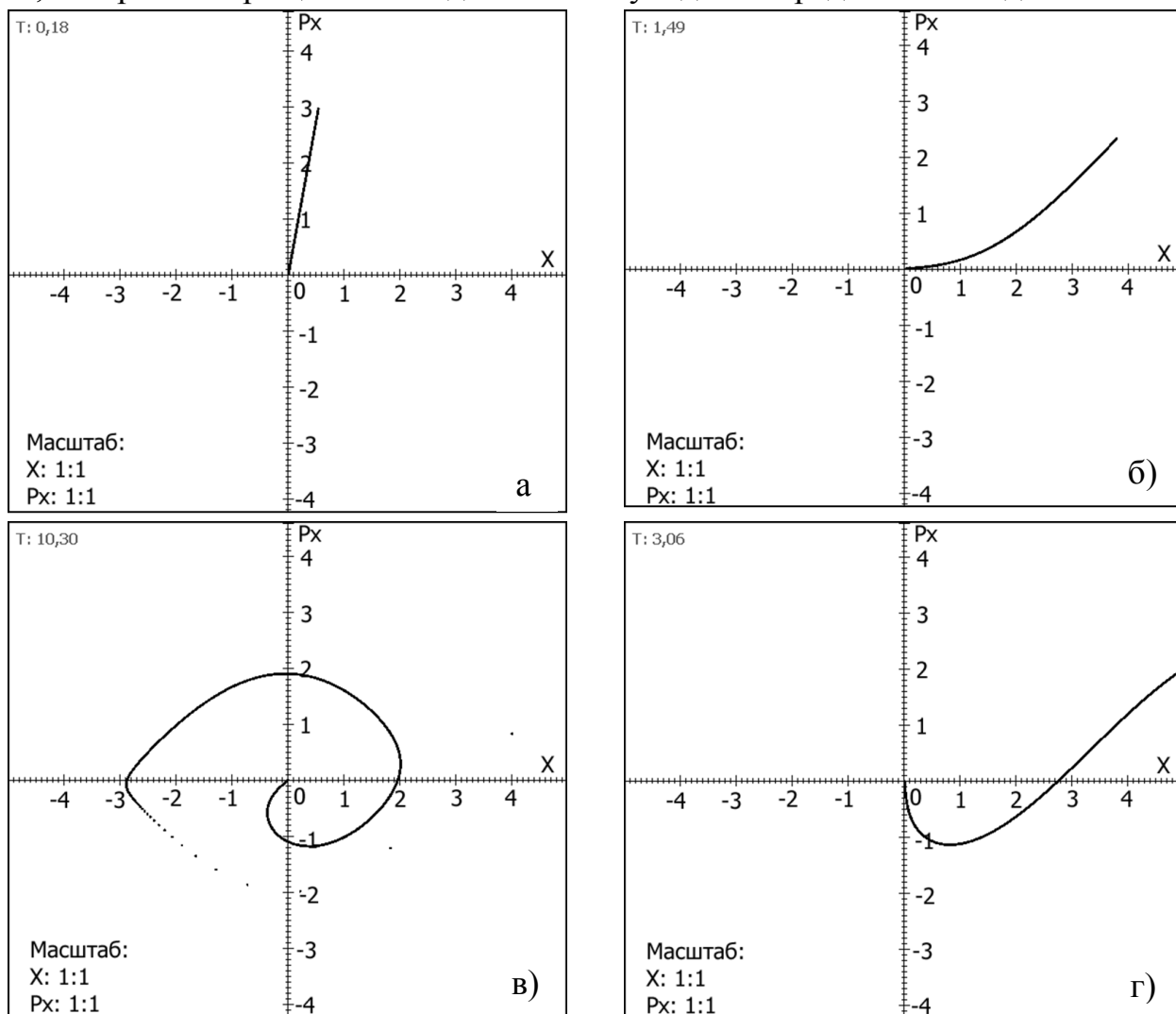


Рисунок 7.2—Положение ансамбля частиц математического маятника:

а) за 18 шагов; б) за 149 шагов; в) за 306 шагов; г) за 1030 шагов

При более длительном наблюдении за ансамблем в окрестности сепаратрисы можно наблюдать типичную картину развития хаотических процессов (рис. 7.3).

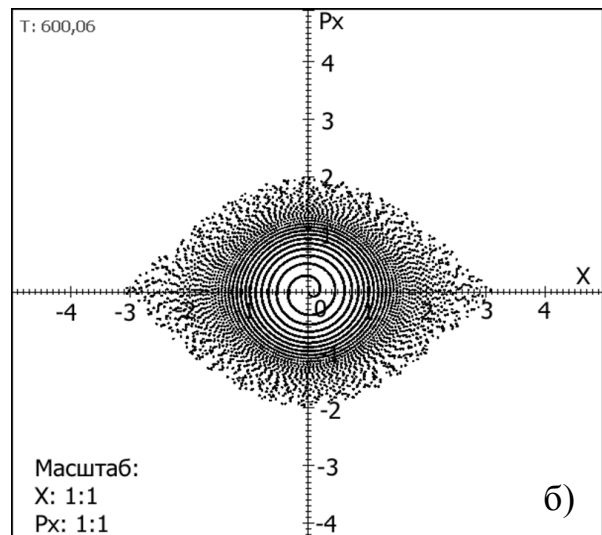
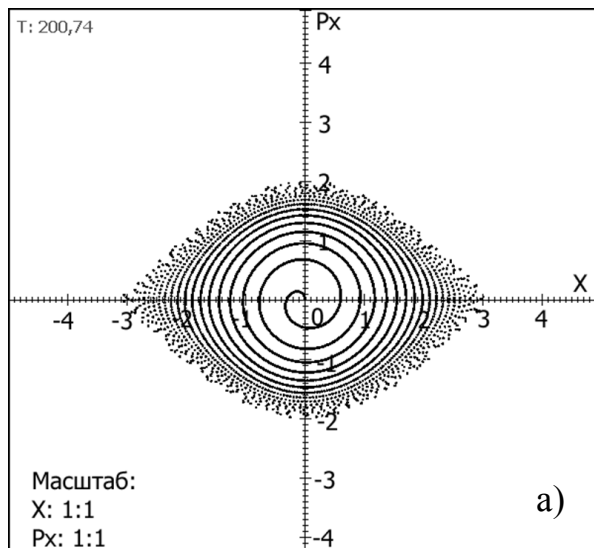


Рисунок 7.3–Положение ансамбля частиц математического маятника:

а) за 20074 шагов; б) за $6 \cdot 10^4$ шагов интегрирования

При более длительном наблюдении за ансамблем в окрестности сепаратрисы можно наблюдать типичную картину развития хаотических процессов (рис. 7.3).

Естественно ожидать, что при обращении времени хаос будет развиваться дальше и система не вернётся в первоначальное состояние. Действительно, так и происходит. На рисунках 7.4 показано положение ансамбля частиц маятника

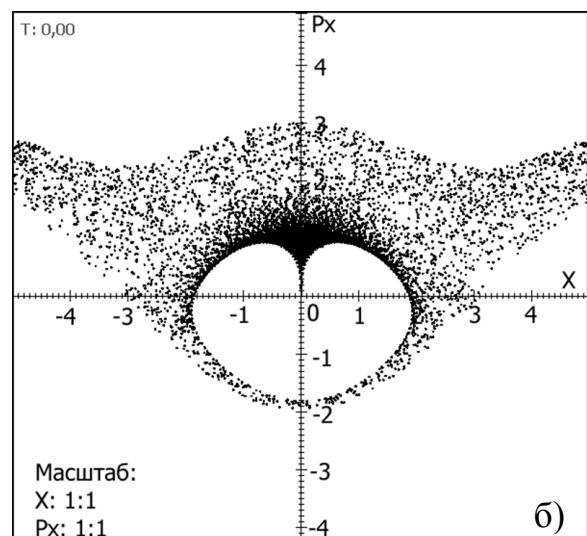
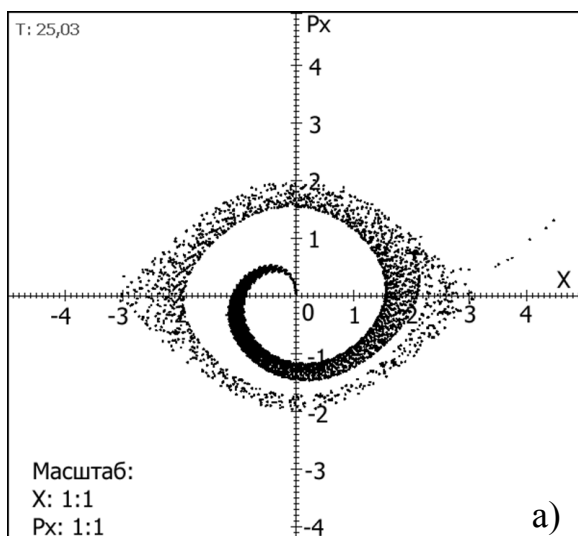


Рисунок 7.4–Положение ансамбля частиц математического маятника при

обращении времени: а) момент времени за -2503 шага интегрирования;

б) момент времени ($-6 \cdot 10^4$ шага интегрирования)

Очевидно, что в окрестности сепаратрисы ансамбль ведет себя как типично вероятностная система, переходящая в равновесное состояние, а о возвращении в первоначальное состояние не может быть и речи.

В то же время, как и следовало ожидать, точки находящиеся в гармонической области движения, т.е. в окрестности начала координат по-

прежнему воспроизводят пройденные состояния и возвращаются к начальным условиям.

Таким образом, несложный компьютерный эксперимент позволяет сделать вывод об определяющей роли нелинейности на развитие хаотических процессов в системе. Для подтверждения этого результата естественно рассмотреть развитие хаоса в двумерной системе.

7.5 Хаос в двумерной системе

Для исследования хаотических процессов при двумерном движении возьмем движение в потенциальном поле Тода[8],

$$U(x, y) = \frac{1}{24} (e^{2y+2\sqrt{3}x} + e^{2y-2\sqrt{3}x} + e^{-4y}) - \frac{1}{8}. \quad (7.6)$$

Схематическое изображение данного потенциала (7.6) с минимумом в начале координат представлено на рисунке 7.5. Вблизи начала координат потенциал представляет собой радиально симметричный потенциал гармонических колебаний, однако по мере приближения к границе области нелинейность потенциала проявляется в характерной «треугольной» форме потенциальной ямы.

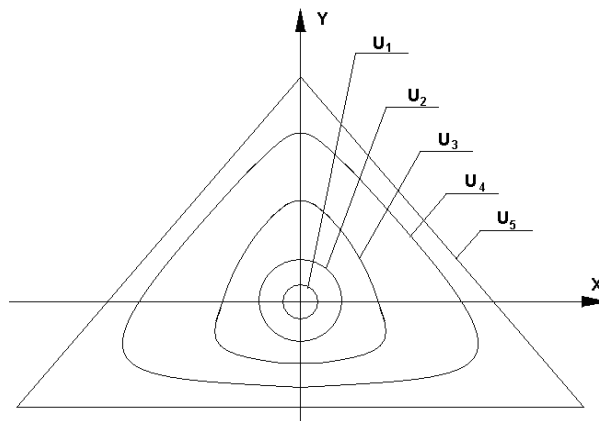


Рисунок 7.5 - Потенциал Тода с уровнями энергии U_i

Функция Гамильтона и динамические уравнения запишутся в виде:

$$H_j = \frac{p_{jx}^2}{2m} + \frac{p_{jy}^2}{2m} + \frac{1}{24} \left(\exp(2y_j + 2\sqrt{3}x_j) + \exp(2y_j - 2\sqrt{3}x_j) + \exp(-4y_j) - \frac{1}{8} \right), \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{jx}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\sqrt{3}}{12} \left(\exp(2y_j + 2\sqrt{3}x_j) + \exp(2y_j - 2\sqrt{3}x_j) \right); \\
\frac{dp_{jy}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{12} \left(\exp(2y_j + 2\sqrt{3}x_j) + \exp(2y_j - 2\sqrt{3}x_j) - 2\exp(-4y_j) \right); \\
\frac{dx_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_{jx}} = \frac{p_{jx}}{m}, \quad \frac{dy_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{jy}} = \frac{p_{jy}}{m}, \\
j &= 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Пусть ансамбль состоит из $n=121$ частицы и в начальный момент времени ансамбль частиц образует квадрат с начальными условиями, определяющими его построение (рис.7.6):

$$\begin{aligned}
x_j &= x_0 + \delta x \, k; \\
y_j &= y_0 + \delta y \, k; \\
k &= 1, 2, \dots, 11,
\end{aligned} \tag{7.9}$$

где δ расстояние между частицами; $x_0 = x_{10}$, $y_0 = y_{10}$ - начальное положение верхнего левого угла квадрата.

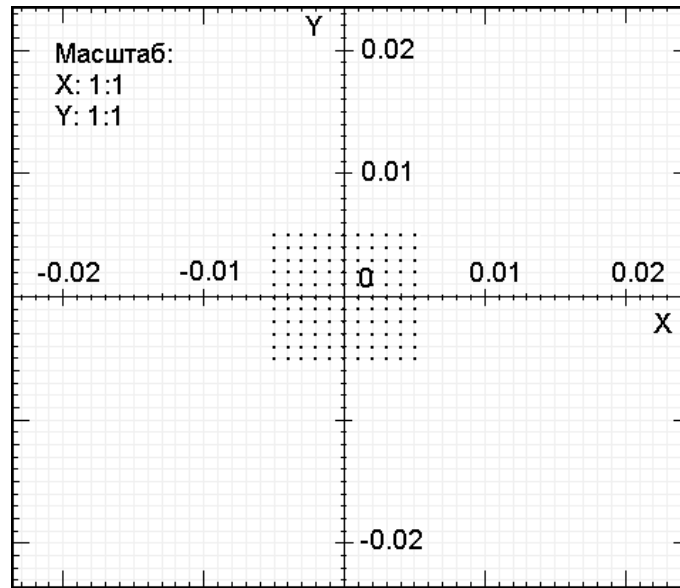


Рисунок 7.6-Начальное положение ансамбля для потенциала Тода

Запишем каноническое преобразование $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ для интегрирования динамических уравнений

$$\begin{cases} p_{jx}^{(i+1)} = p_{jx}^{(i)} - \frac{\sqrt{3}}{12} \left[\exp(2y_j^{(i)} + 2\sqrt{3}x_j^{(i)}) + \exp(2y_j^{(i)} - 2\sqrt{3}x_j^{(i)}) \right] \cdot \tau; \\ p_{jy}^{(i+1)} = p_{jy}^{(i)} - \frac{1}{12} \left[\exp(2y_j^{(i)} + 2\sqrt{3}x_j^{(i)}) + \exp(2y_j^{(i)} - 2\sqrt{3}x_j^{(i)}) - 2\exp(-4y_j^{(i)}) \right] \cdot \tau; \\ x_j^{(i+1)} = x_j^{(i)} + \frac{p_{jx}^{(i+1)}}{m} \tau; \\ y_j^{(i+1)} = y_j^{(i)} + \frac{p_{jy}^{(i+1)}}{m} \tau, \end{cases} \quad (7.10)$$

где $j = 1, 2, \dots, 121$.

Исследуем влияние свойств «линейность-нелинейность» на эволюцию ансамбля, используя приём обращения времени. Полагая $m = 1$, $\tau = \pi/300$, будем наблюдать эволюцию ансамбля на протяжении 10^5 шагов интегрирования, затем изменим течение времени на противоположное.

Сначала дадим всем точкам ансамбля малый начальный импульс $p_{0x} = p_{0y} = 0,01$, чтобы движение происходило в центральной линейной области потенциала Тода. На рисунке 7.7а представлено последовательное положение ансамбля. Как видно, происходит периодическое движение квадрата в окрестности начала координат, при этом квадрат сохраняет свою форму и возвращается в начальное положение при обращении времени (рис. 7.7б).

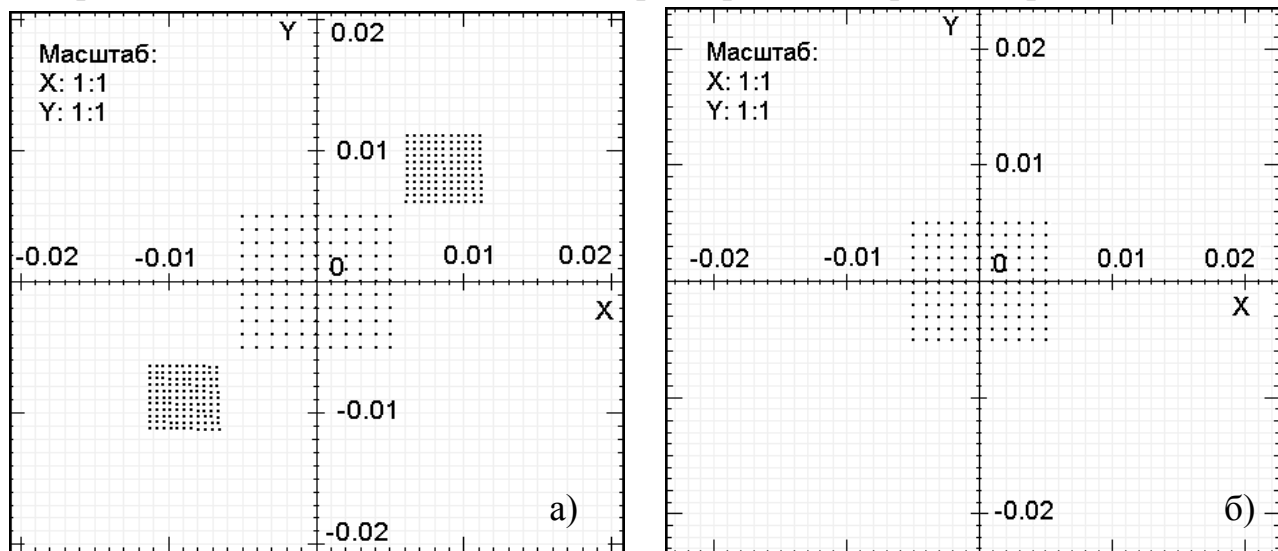


Рисунок 7.7—Движение ансамбля в линейной области потенциала Тода:

а) колебания в окрестности точки минимума при положительном направлении времени; б) возвращение в исходное положение при обращении времени

Такое поведение ансамбля вновь подтверждает сделанный вывод об отсутствии хаотических процессов в линейной системе. Рассмотрим эволюцию системы, увеличивая степень нелинейности, задав начальные значения импульсов $p_x = p_y = 1$ при прочих равных условиях.

На рисунке 7.8 представлено последовательное положение ансамбля Гиббса невзаимодействующих частиц, соответствующее различным шагам интегрирования. Из рисунков 7.8 видно, начиная с положения 5, что соответствует 20549 шагам интегрирования, наблюдается процесс распада ансамбля.

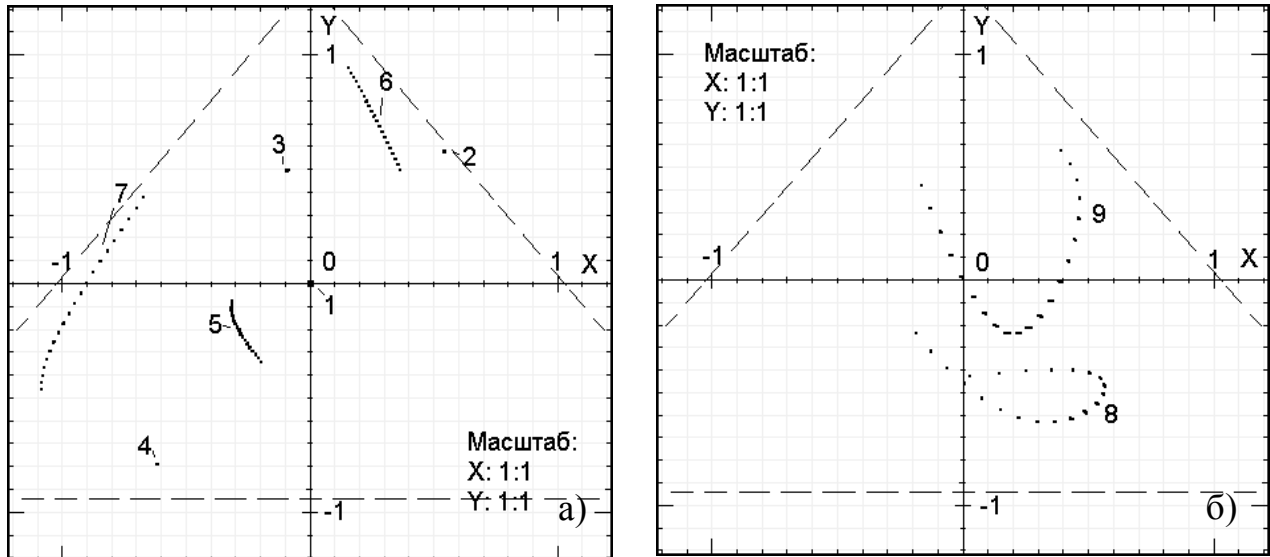


Рисунок 7.8—Движение ансамбля в нелинейной области потенциала Тода
а) 1 – начальное положение; 2 – 65 шагов; 3 – 149 шагов; 4 – 309 шагов;
5 – 20549 шагов; 6 – 20691 шагов; 7 – 42956 шагов;
б) 8 – 96463 шагов; 9 – 100000 шагов

Возможно, при малом времени моделирования в системе будет наблюдаться сохранение порядка, обусловленного наличием некоторого интеграла движения. Очевидно, дальнейшее увеличение времени моделирования приведет к полному распаду ансамбля. Обращение времени приводит к дальнейшему нарастанию беспорядка в системе.

На рисунке 7.9 показано положение ансамбля, соответствующее -10^5 шагов интегрирования. Система не возвращается в первоначальное состояние, но, напротив, стремится к некоторому равновесному состоянию.

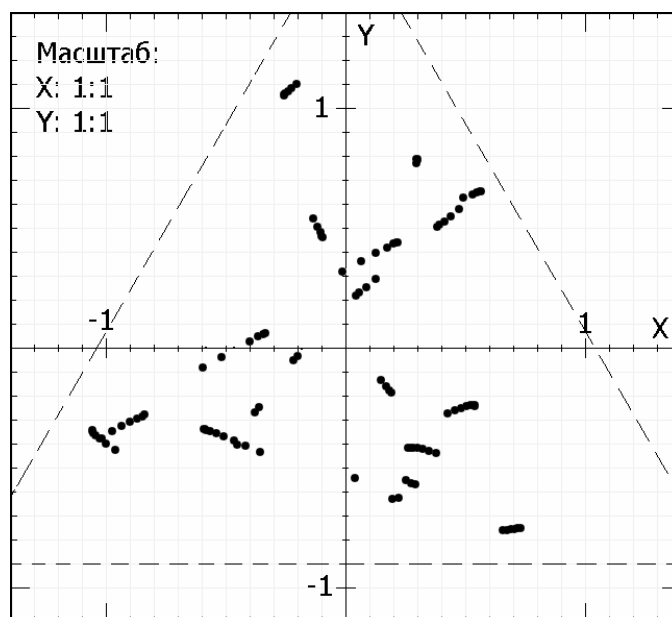


Рисунок 7.9 - Состояние ансамбля, соответствующее -10^5 шагам интегрирования

Результаты компьютерного эксперимента позволяют сделать вывод, что хаотические процессы происходят в нелинейных системах под действием малых консервативных возмущений. Таким образом, использование канонических преобразований позволяет создавать компьютерные модели эволюционных процессов и осуществлять компьютерный эксперимент, в ходе которого возможно прямое наблюдение развития хаотических процессов. Очевидным преимуществом такого эксперимента является возможность обращения времени, что, естественно, невозможно в натурном эксперименте.

8. Движение заряженных частиц

8.1 Уравнения движения релятивистской частицы в форме Гамильтона

Физической величиной характеризующей магнитное поле является магнитная индукция $\mathbf{B}$, однако, при исследовании движения частиц удобнее использовать векторный потенциал магнитного поля $\mathbf{A}$, связанный с индукцией соотношением

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (8.1)$$

Пусть S_0 - инерциальная система отсчёта, тогда функция Гамильтона H_0 и уравнения движения свободной релятивистской частицы в ней, имеют вид [24]

$$\begin{aligned} H_0 &= \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}; \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{r}}; \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= 0; \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{c^2 \mathbf{p}}{H_0}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

где $\mathbf{r}$ - радиус-вектор частицы, $\mathbf{p}$ - её импульс $p = |\mathbf{p}|$, m - её масса, c - скорость света.

Пусть теперь, частица, имея заряд e , движется в магнитном поле задаваемым векторным потенциалом $\mathbf{A}$. В этом случае, следуя [24], в уравнениях (8.2), (8.3) необходимо перейти от импульса $\mathbf{p}$ к обобщённому импульсу $\mathbf{P}$

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} - e \mathbf{A}. \quad (8.4)$$

Подстановку (8.4) будем рассматривать как переход к новой системе отсчёта S в которой функция Гамильтона H и уравнения движения заряда в ней будут иметь вид

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{P} - e \mathbf{A})^2}; \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{P}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{R}}; \\ \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}\end{aligned}\quad (8.6)$$

или

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{P}}{dt} &= -\frac{c^2}{2H} \cdot \nabla (\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2; \\ \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \frac{c^2 (\mathbf{P} - e\mathbf{A})}{H},\end{aligned}\quad (8.7)$$

где $\mathbf{R}$ - радиус-вектор частицы в системе S .

Равновесная траектория определяется движущейся по ней равновесной частицей и, следовательно, уравнениями движения последней. Свяжем с равновесной частицей систему отсчёта S . В этой системе, функция Гамильтона H и уравнения движения (8.5)-(8.7) для равновесной частицы будут иметь вид

$$\begin{aligned}H &= \sqrt{m^2 c^4 + e^2 c^2 A_0^2}; \\ \mathbf{P} &= 0, \quad \mathbf{R} = 0,\end{aligned}\quad (8.8)$$

где A_0 - векторный потенциал на равновесной траектории.

В инерциальной системе отсчёта S_0 , согласно (8.4), для неё будет выполняться соотношение

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{A}. \quad (8.9)$$

Следовательно, равновесная траектория всегда совпадает с некоторой линией векторного потенциала, а изменение импульса равновесной частицы пропорционально изменению векторного потенциала.

Пример 14. Определение энергии ускорения заряженных частиц.

Уравнение (8.9) позволяет определить максимальную энергию ускорения $E_{\max}$. Обозначая за $A_{\max}$ максимальное значение векторного потенциала на равновесной траектории, используя (8.9) и (8.2) получим

$$H_{\max} = \sqrt{m^2 c^4 + A_{\max}^2 e^2 c^2}. \quad (8.10)$$

Для модельного примера положим $A_{\max} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}$, что для стационарной траектории радиуса $\rho_0 = 1 \text{ м}$, соответствует $B_{\max} = 1 \text{ Тл}$. Пусть в поле осуществляется ускорение электронов, тогда имеем ультрарелятивистский случай $m^2 c^4 \ll A_{\max}^2 c^2$

$$E_{\max} / e \approx A_{\max} c = 300 \text{ МэВ}. \quad (8.11)$$

Если же осуществляется ускорение протонов или иных тяжёлых частиц, то напротив имеем классический случай $m^2 c^4 \ll A_{\max}^2 c^2$. В частности для протонов получим

$$E_{\max} / e \approx A_{\max}^2 e / 2m \approx 50 \text{ МэВ}. \quad (8.12)$$

8.2 Условие стационарности

Фокусирующие свойства векторного потенциала A определяются векторным полем, как функцией точек пространства. С другой стороны, индукционное ускорение предполагает изменение векторного потенциала во времени. Поэтому естественно потребовать, чтобы фокусирующие свойства оставались неизменными с течением времени. Для этого необходимо, чтобы траектории частиц не изменялись в процессе ускорения. Данное требование назовем условием стационарности. При этом вследствие гладкости функции векторного потенциала, его выполнение для равновесной траектории является достаточным. Формализуем условие стационарности.

Полный дифференциал векторного потенциала складывается из двух частей: из его приращения во времени в данной точке пространства и его приращения при переходе от одной точки пространства к другой

$$dA = \frac{\partial A}{\partial t} dt + (\mathbf{v} \nabla) A dt. \quad (8.13)$$

Согласно (8.9), также будет изменяться и импульс равновесной частицы в системе S_0

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e \left(\frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) A \right). \quad (8.14)$$

Раскладывая (8.14) на нормальную и тангенциальную составляющую запишем систему

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_n &= e \mathbf{v} \times (\nabla \times A); \\ \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_\tau &= e \frac{\partial A}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Нормальное ускорение связано со скоростью кинематическим уравнением

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_n = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}, \quad (8.16)$$

где ρ - радиус кривизны траектории. Используя (8.16) преобразуем первое уравнение (8.15)

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) \rho^{-1} \mathbf{n} = e \cdot \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (8.17)$$

или

$$\mathbf{p} \times \mathbf{n} = -e \rho \cdot \nabla \times \mathbf{A}. \quad (8.18)$$

Интегрирование второго уравнения системы (8.15), при начальных условиях $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{A} = 0$, $t = 0$, возвращает нас к уравнению (8.9). Умножая (8.9), на орт нормали получим

$$\mathbf{p} \times \mathbf{n} = -e \mathbf{A} \times \mathbf{n}. \quad (8.19)$$

Сравнивая (8.18) и (8.19) пишем

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \rho \cdot \nabla \times \mathbf{A}. \quad (8.20)$$

Выражение (8.20) является дифференциальной формой условия стационарности. Интегрируя (8.20) по площади контура L образованного линей поля векторного потенциала на равновесной траектории получим интегральную форму

$$\int_S (\mathbf{A} \times \mathbf{n}) d\mathbf{s} = \int_S (\rho \cdot \nabla \times \mathbf{A}) d\mathbf{s}. \quad (8.21)$$

В частности, если равновесная траектория представляет собой окружность радиуса $\rho = \rho_0$, то, применяя к правой части (8.21) теорему Стокса запишем

$$\int_S (\langle \mathbf{A} \rangle \times \mathbf{n}) d\mathbf{s} = \rho_0 \cdot \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}, \quad (8.22)$$

где $\langle \mathbf{A} \rangle$ - вектор среднего значения поля векторного потенциала внутри контура.

Интегрируя (8.22) и полагая $S = \pi \rho_0^2$ и $L = 2\pi \rho_0$, получим

$$\langle \mathbf{A} \rangle = 2\mathbf{A}, \quad (8.23)$$

где A - значение векторный потенциал на равновесной траектории.

Таким образом, если стационарная траектория является окружностью, то выполнение условия (8.23) обеспечивает её стационарность. Умножим векторно обе части (8.20) на единичный вектор нормали $\mathbf{n}$, возьмём ротор от обеих частей и, используя (8.1), выразим через индукцию магнитного поля

$$B_0 = 0,5 \langle B \rangle. \quad (8.24)$$

Выражение (8.24) известно как бетатронное условие [22]: индукция магнитного поля в точках стационарной круговой траектории в любой момент времени составляет половину средней индукции поля внутри контура траектории.

8.3 Движение частицы по равновесной траектории

Для анализа движение частицы по равновесной траектории, рационально перейти к безразмерным величинам. Пусть равновесной траекторией является окружность радиуса ρ_0 , а максимальное значение векторного потенциала достигает $A_{\max}$. Пусть t_0 время, в течение которого происходит ускорение. Поскольку t_0 является временем возрастания векторного потенциала, то оно характеризует период изменения магнитного поля ускорителя. В частности если поле в ускорителе изменяется по синусоидальному закону, то период ускорения равен одной четвёртой периода изменения поля.

Используя введённые константы, запишем безразмерные комбинации:

$$\begin{aligned}
 t^* \text{ -время} & \quad t^* = t \cdot t_0^{-1}; \\
 r^* \text{ -расстояния} & \quad r^* = r \cdot \rho_0^{-1}; \\
 A^* \text{ -векторного} & \quad A^* = A \cdot A_{\max}^{-1}; \\
 \text{потенциала} & \\
 p^* \text{ -импульса} & \quad p^* = p \cdot e^{-1} A_{\max}^{-1}; \\
 v^* \text{ -скорости} & \quad v^* = v \cdot c^{-1}; \\
 E_0^* \text{ -энергии покоя} & \quad E_0^* = mc \cdot e^{-1} A_{\max}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{8.25}$$

Безразмерная функция Гамильтона (8.2) для равновесной частицы будет иметь вид

$$H_0^* = \sqrt{E_0^{*2} + p^{*2}}. \tag{8.26}$$

Учитывая, что равновесная частица в системе S_0 имеет только тангенциальную составляющую скорости, запишем безразмерные уравнения движения (8.3) в виде

$$\frac{dl^*}{dt^*} = \frac{t_0 c}{\rho_0} \frac{p^*}{H_0^*}, \tag{8.27}$$

где dl^* -безразмерный дифференциал дуги окружности. Учитывая, что $p^* = A^*$ и $dl^* = d\varphi$, запишем (8.27) в форме

$$\frac{d\varphi}{dt^*} = f^* \frac{A^*}{H_0^*}, \tag{8.28}$$

где $f_0^* = t_0 c \cdot \rho_0^{-1}$. Пусть функция A линейно возрастает от нуля до $A_{\max}$, тогда $A^* = t^*$ и (8.28) запишется в виде

$$\frac{d\varphi}{dt^*} = f_0^* \frac{t^*}{H_0^*}. \quad (8.29)$$

Интегрируя (8.29) при начальных условиях $t_0 = 0$, $\varphi = 0$ получим закон изменения угла при движении равновесной частицы по траектории-окружности

$$\varphi = f_0^* H_0^* - E_0^{*2}. \quad (8.30)$$

Пример 15. Определение частоты изменения магнитного поля.

Если, как и в бетатроне, ускоряются электроны, то имеет место ультрарелятивистский случай, для которого

$$\varphi = f_0^* t^*. \quad (8.31)$$

Закон движения (8.31) позволяет оценить, необходимую частоту изменения магнитного поля в ускорителе. Для прецизионной фокусировки необходимым условием является $\varphi < 2\pi$, иными словами, частицы, выходящие из источника, должны сфокусироваться, свершив менее одного оборота. Следовательно $\varphi < 2\pi$. Переходя к размерной частоте, получим $\nu > 5 \cdot 10^7 \text{ Гц}$, что значительно больше частоты изменения поля в бетатроне $\nu = 10^2 - 10^4 \text{ Гц}$.

8.4 Аксиально-симметричное поле

Если стационарной траекторией является окружность, то в её плоскости, линии векторного потенциала сами имеют вид концентрических окружностей и, следовательно, в полярной системе координат O_0, ρ, φ инерциальной системы отсчёта S_0 , векторный потенциал имеет только угловую составляющую $A_\varphi = A$.

Построим на основе полярной системы O_0, ρ, φ , цилиндрическую систему координат O_0, ρ, φ и, предположим, что векторный потенциал аксиальносимметричен относительно оси OZ . Тогда и в пространстве векторный потенциал имеет единственную угловую составляющую, которая является функцией ρ и z

$$A = A(\rho, z). \quad (8.32)$$

В плоскости стационарной траектории векторный потенциал зависит только от радиальной координаты ρ , поэтому он будет симметричен относительно этой плоскости $A(-z) = A(z)$. В этой связи плоскость стационарной траектории называется центральной.

Из уравнений Максвелла в отсутствие токов, следует [24]

$$\nabla^2 A = 0. \quad (8.33)$$

Вычисляя лапласиан единственной радиальной составляющей (8.32) приходим к отношению

$$\nabla_z^2 A = -\nabla_\rho^2 A - \nabla_\rho (\rho^{-1} A), \quad (8.34)$$

которое определяет зависимость векторного потенциала вдоль оси O_0, Z , как функции его изменений вдоль оси O_0, ρ .

Исследуем фокусирующие свойства приведённого векторного потенциала. Для этого будем рассматривать движение частиц покидающих источник под малым углом к равновесной траектории или параксиальный поток. Если в начальный момент угловой импульс таких частиц был равен угловому импульсу равновесной частицы, то их движение будет происходить в плоскости перпендикулярной равновесной траектории и, следовательно, движение будет двумерным. Построим в плоскости движения систему координат OXZ , с осями равнонаправленными осям O_0, ρ , O_0, Z системы отсчёта S_0 . Углы вылета к равновесной траектории обозначим соответственно ψ_x, ψ_y .

Используя введённую выше безразмерную форму, запишем функцию Гамильтона и уравнения движения рассматриваемых частиц

$$H^* = \sqrt{E_0^{*2} + P_x^{*2} + P_z^{*2} + A^{*2}}; \quad (8.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_x^*}{dt^*} &= -f_0 \frac{\nabla_x A^{*2}}{H^*} \cdot x; \\ \frac{dP_z^*}{dt^*} &= -f_0 \frac{\nabla_z A^{*2}}{H} \cdot z; \end{aligned} \quad (8.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{dt} &= f_0 \frac{P_x^*}{H^*}; \\ \frac{dz^*}{dt^*} &= f_0 \frac{P_z^*}{H^*}, \end{aligned} \quad (8.37)$$

где $x^* = \rho_0^{-1} x$, $z^* = \rho_0^{-1} z$.

Определим условия, при которых функция векторного потенциала будет обладать фокусирующими свойствами. Для этого разложим её в ряд в окрестности равновесной траектории до членов второго порядка малости

$$A^* = A_0^* + \nabla_{\rho_0} A^* \cdot x + \nabla_{z_0}^2 A^* \cdot z + 0,5 \cdot \nabla_{\rho_0}^2 A^* \cdot x^2 + 0,5 \cdot \nabla_{z_0}^2 A^* \cdot z^2, \quad (8.38)$$

где индексом «0» отмечено, что вычисление функции и взятие производных осуществляется на равновесной траектории $x^* = 0$, $z^* = 0$.

Наличие фокусирующих свойств у векторного потенциала означает, что динамические уравнения (8.36) описывают некоторый колебательный процесс.

Необходимым условием этого является обращение в ноль линейных членов разложения векторного потенциала в ряд (8.38) и положительный знак квадратичных членов

$$A^* = A_0^* + 0,5 \cdot \nabla_{\rho_0}^2 A^* \cdot x^2 + 0,5 \cdot \nabla_{z_0}^2 A^* \cdot z^2. \quad (8.39)$$

Подставляя (8.39) в (8.37), получим

$$\begin{aligned} \frac{dP_x^*}{dt^*} &= -\frac{f_0 A^*}{H^*} \nabla_{x_0}^2 A^* \cdot x; \\ \frac{dP_z^*}{dt^*} &= -\frac{f_0 A^*}{H^*} \nabla_{z_0}^2 A^* \cdot z. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Уравнения (8.40) вместе с (8.27) образуют систему линейных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами, интегрирование которых может быть осуществлено численными методами.

8.5 Фокусировка в постоянном поле

Выполнение условия стационарности (8.23) обеспечивает постоянство траекторий частиц при возрастании векторного потенциала во времени. Следовательно, для исследования фокусирующих свойств, достаточно рассмотреть фокусировку частиц в поле постоянного векторного потенциала.

Пусть векторный потенциал постоянен во времени. Положим $A = A_{\max} = \text{const}$. В этом случае время ускорения стремится к бесконечности и в уравнениях (8.40), (8.37) необходимо вернуться к размерному времени, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dP_x^*}{dt} &= -\frac{c}{\rho_0 H^*} \nabla_{x_0}^2 A^* \cdot x^*; \\ \frac{dP_z^*}{dt} &= -\frac{c}{\rho_0 H^*} \nabla_{z_0}^2 A^* \cdot z^*; \\ \frac{dx^*}{dt} &= \frac{c}{\rho_0 H^*} P_x; \\ \frac{dz^*}{dt} &= \frac{c}{\rho_0 H^*} P_z. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Переходя к уравнениям второго порядка, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^*}{dt^2} &= \left(\frac{c}{\rho_0 H^*} \right)^2 \nabla_{x_0}^2 A^* \cdot x^*; \\ \frac{d^2 z^*}{dt^2} &= \left(\frac{c}{\rho_0 H^*} \right)^2 \nabla_{z_0}^2 A^* \cdot z^*. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Выражения, стоящие перед переменными x^*, z^* в правых частях (8.42) являются частотами линейных колебаний. Для двойной фокусировки необходимо выполнение условия кратности или синхронизации частот

$$\begin{aligned} n^2 \nabla_{\rho 0}^2 A^* &= k^2 \nabla_{z 0}^2 A^*; \\ nk &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8.43)$$

В этом случае в некоторые моменты времени обе системы (8.42) будут одновременно проходить через положение равновесия. Используя зависимость (8.34), запишем условие синхронизации в форме дифференциального уравнения

$$\nabla_{\rho}^2 A = -\nabla_{\rho}^2 A - \nabla_{\rho}(\rho^{-1} A). \quad (8.44)$$

Интегрируя (8.44) получим функцию векторного потенциала обеспечивающего синхронизацию частот колебаний

$$\begin{aligned} A^* &= x^{*\alpha}; \\ \alpha &= \frac{n^2}{n^2 + k^2}. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Используя (8.1) и переходя к размерным величинам, получим для индукции магнитного поля на равновесной траектории в системе S_0 формулу [23]

$$\begin{aligned} B_z &= B_0 \rho^{\beta}; \\ \beta &= -\frac{k^2}{n^2 + k^2}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Рассмотрим фокусировку частиц в поле векторного потенциала (8.45). В этом случае, уравнения (8.42) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^*}{dt^2} &= -\alpha \left(\frac{c}{\rho_0 H^*} \right)^2 \cdot x^*; \\ \frac{d^2 z^*}{dt^2} &= -\alpha \left(\frac{c}{\rho_0 H^*} \right)^2 \cdot z^*. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Для нахождения уравнения траектории, подставим в уравнение угловой координаты (8.28) значение векторного потенциала на равновесной траектории $A^* = 1$ и перейдём к размерному времени

$$\frac{d\varphi}{dt^*} = \frac{c}{\rho_0 H_0^*}. \quad (8.48)$$

Поскольку углы вылета к равновесной траектории предполагаются малыми, можно положить $H \approx H_0$.

Пример 16. Определение амплитуды отклонения потока частиц.

Используя (8.48) перейдем в (8.47) к уравнениям траекторий

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^*}{d\varphi^2} &= -\alpha \cdot x^*; \\ \frac{d^2 z^*}{d\varphi^2} &= -\alpha \cdot z^*.\end{aligned}\tag{8.49}$$

Интегрируя (8.49), с начальными условиями $\varphi = 0, x = 0, z = 0$ и, учитывая, что углы вылета малы $\sin \psi_x \approx \psi_x, \sin \psi_z \approx \psi_z$, получим

$$\begin{aligned}x^* &= \frac{\psi_x}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha} \varphi); \\ z^* &= \frac{\psi_z}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha} \varphi).\end{aligned}\tag{8.50}$$

Таким образом, частицы, выходящие из точечного источника под малыми углами к равновесной траектории, первый раз сфокусируются на ней при значении аксиального угла $\varphi = \pi \cdot \alpha^{-1}$. Для прецизионной фокусировки необходимо, чтобы $\varphi < 2\pi$. Единственным показателем степени, удовлетворяющим этому условию, является $\alpha = 0,5$. В этом случае частицы будут фокусироваться под углом $\varphi = \pi\sqrt{2} \approx 255^\circ$. Такое поле используется в магнитных спектрометрах и бета-спектрометрах, и носит название поле типа $\pi\sqrt{2}$. В бетатронах, где отсутствует прецизионная фокусировка, типичным является показатель $\alpha = 0,6$ [23].

Используя (8.50) оценим амплитуду отклонения потока частиц от равновесной траектории. Пусть $\alpha = 0,5; \rho_0 = 1 \text{ м}; \psi_x = \psi_z = \psi = 5^\circ$, тогда

$$x_{\max} = z_{\max} = \frac{\psi}{180} \pi \sqrt{2} = \frac{5}{180} 3,14 \sqrt{2} \approx 0,12 \text{ м}.\tag{8.51}$$

8.6 Фокусировка в поле линейно возрастающего потенциала

Кроме выполнения условия двойной фокусировки, при ускорении частиц необходимо обеспечить синхронизацию ускорения и фокусировки. Темп ускорения частиц в поле возрастающего векторного потенциала зависит от скорости возрастания последнего, т.е. от величины $f_0 = t_0^{-1}$. Следовательно, условием синхронизации будет равенство времени ускорения и фокусировки, или

$$A(t_0) = A_{\max}.\tag{8.52}$$

Пусть векторный потенциал имеет вид (8.45) при показателе степени $\alpha = 0,5$ и возрастает во времени по линейному закону, тогда

$$A^* = t^* \rho^{*0,5}. \quad (8.53)$$

Подставляя в (8.29) найденный выше угол двойной фокусировки получим

$$t_0 c \rho_0^{-1} (H_0^* - E_0^{*2}) = \pi \sqrt{2} \quad (8.54)$$

Откуда находим время ускорения

$$t_0 = \rho_0^* c^{-1} \pi \sqrt{2} (H_0^* - E_0^{*2})^{-1}. \quad (8.55)$$

Пример 17. Определение времени ускорения и фокусировки.

Если ускоряются и фокусируются электроны, то имеет место ультрарелятивистский случай, поэтому, полагая $H_0^* \approx A^*$, $E_0^* \ll A^*$, при радиусе равновесной траектории $\rho_0 = 1$ м из (8.55) получим

$$t_0 = 1,48 \cdot 10^{-8} \text{ с} \quad (8.56)$$

Для исследования вида траекторий движения, необходимо проинтегрировать уравнения (8.28), (8.37), (8.39), численно. В линейном приближении для поля (8.53) они будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dP_x^*}{dt^*} &= -\frac{1}{2} \frac{f_0^*}{H^*} t^* \cdot x^*; \\ \frac{dP_z^*}{dt^*} &= -\frac{1}{2} \frac{f_0^*}{H^*} t^* \cdot z^*; \\ \frac{dx^*}{dt^*} &= \frac{f_0^*}{H^*} P_x^*; \\ \frac{dz^*}{dt^*} &= \frac{f_0^*}{H^*} P_z^*; \\ \frac{d\varphi}{dt^*} &= \frac{f_0^*}{H_0^*} t^*. \end{aligned} \quad (8.57)$$

Для задания начальных условий, предположим, что имеется точечный источник электронов, начальные импульсы которых определяются их тепловой скоростью в источнике-эмиттере. Пусть T температура эмиттера. Тогда среднее значение модуля x, z, φ составляющих скорости теплового движения [5], будет

$$\langle v_T \rangle = \sqrt{\mathcal{K} T \pi^{-1} m^{-1}}, \quad (8.58)$$

где $\mathcal{K}$ - постоянная Больцмана, m - масса электрона.

Переходя к безразмерному импульсу, получим выражение для начальных значений импульсов

$$\langle P_T^* \rangle = H_T \langle v_T^* \rangle (1 - \langle v_T^* \rangle^2)^{-0.5}, \quad (8.59)$$

где $\langle v_T^* \rangle = \langle v_T \rangle c^{-1}$, $H_T^* = \sqrt{E_0^{*2} + 3\langle P_T^* \rangle^2}$.

Таким образом, начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} t^* &= 0; \\ \varphi &= x^* = z^* = 0; \\ P_\varphi^* &= P_x^* = P_z^* = A^* = \langle P_T^* \rangle. \end{aligned} \quad (8.60)$$

На рисунке 8.1 приведён результат расчёта траекторий $x = x(\varphi)$ электронов при различных температурах эмиттера, аналогично выглядит результат расчета траекторий $z = z(\varphi)$. Как видно при указанной частоте, электроны, покидающие источник фокусируются под углом $\pi\sqrt{2}$, за время $t^* = 1$, т.е. закончив ускорение, что подтверждает результат полученный выше аналитически.

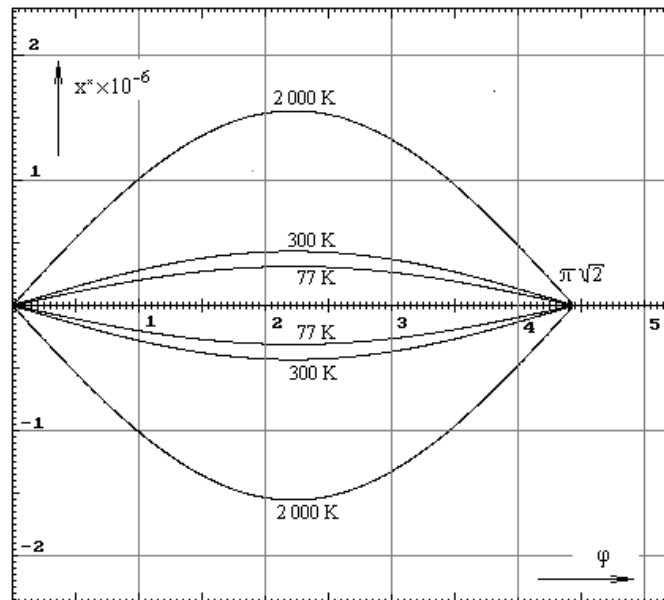


Рисунок 8.1 - Траектории электронов при различных значениях температуры эмиттера

Высокочастотные магнитные поля с рассмотренным векторным потенциалом позволяет осуществлять ускорение и прецизионную фокусировку заряженных частиц. Вследствие этого оказывается возможным получить на поверхности мишени плотностей энергии значительно выше достигнутых к настоящему времени.

9. Проблемные вопросы моделирования

9.1 Интегрируемость динамических уравнений

При исследовании динамических систем, представленных системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{X}_i = f_i(x_1, \dots, x_{2n}), \quad i = 1, \dots, 2n \quad (9.1)$$

естественным образом возникает проблема их интегрирования.

Ответ на вопрос, что подразумевается под удобными выражениями «точное решение», «аналитическое решение», «численное интегрирование», требует уточнения [8].

Если исходить из общего определения динамической системы (9.1), то, очевидно, требуется выделить единственный набор функций, подстановка которых в систему обращает их в тождества. При этом теорема существования и единственности, в предположении дифференцируемости векторного поля, образованного правыми частями уравнений, обеспечивает положительное решение вопроса. В то же время, не менее очевидно, что объективный смысл имеет не формальное определение функций, исходя из теоремы существования и единственности, а достаточно полное указание их свойств. Однако, в большинстве случаев, все эти свойства и определяются исходной системой уравнений. Так, например, даже элементарные функции могут быть определены посредством задающих их дифференциальных уравнений. Таким образом, в самом общем смысле, интегрирование системы (9.1) заключается в определении всех свойств функций, обращающих дифференциальные уравнения в тождества. Как было показано в главе 2, это сделать невозможно, вследствие недостаточности информации, содержащейся в динамических уравнениях (9.1).

С другой стороны, можно ограничиться и узким понятием интегрируемости, считая систему проинтегрированной, если удалось выразить решение в виде какой-либо комбинации функций с хорошо изученными свойствами (в частности, элементарных). Узкое понимание интегрируемости вполне допустимо, но оказывается весьма ограниченным. Действительно, в такой постановке вопроса большинство дифференциальных уравнений оказываются неинтегрируемыми и, кроме того, свойство интегрируемости существенно зависит от имеющегося количества изученных функций. Так, например, до появления эллиптических функций простые нелинейные уравнения кубического осциллятора или маятника следовало считать неинтегрируемыми. Тем не менее, важный в приложении класс линейных

уравнений интегрируется именно в таком аспекте.

В более широком понимании, к разряду интегрируемых следует отнести системы уравнений, которые могут быть сведены к последовательному взятию интегралов от функций одной переменной или, так называемому, решению в квадратурах. В этом случае, хотя в процессе интегрирования будем получать новые функции, их свойства, в принципе, могут быть исследованы методами математического анализа. В большинстве случаев возможность проинтегрировать систему уравнений в квадратурах зависит от наличия дополнительной информации в форме интегралов движения, ограничивающих области возможных движений фазового пространства. Поэтому фундаментальный смысл наличия интегралов движения у динамической системы заключается в её устойчивости к развитию хаотических процессов и возможности протекания упорядочивающих процессов под действием внешних возмущений. К сожалению, вопрос, каким образом находить интегралы движения, и существуют ли они вообще для конкретной системы, не имеет сколько-нибудь общего решения, несмотря на усилия многих самых выдающихся математиков своего времени.

9.2 Принцип консервативных возмущений

Единственными более или менее универсальными методами исследования неинтегрируемых систем являются численные методы интегрирования. Основным и проблемным в этом случае оказывается вопрос, насколько полученные дискретные функции отражают свойства неизвестных функций, заданных посредством уравнений (9.1). Действительно, как правило, единственным условием, связывающим эти функции, является та или иная степень малости их отклонения друг от друга на каждом шаге численного алгоритма. При этом сам алгоритм никак не отражает свойства системы, которую он моделирует. Поэтому может случиться так, что полученные численные результаты окажутся функцией, ничего общего, кроме начальных условий, не имеющей с функцией, заданной уравнениями (9.1). Очевидно, что увеличение точности счета посредством повышения порядка численного алгоритма или уменьшении шага интегрирования не приводит к решению проблемы. Действительно, в лучшем случае, можно надеяться, что таким образом увеличим размеры окрестности точки, определенной начальными условиями, в которой обе функции оказываются близкими друг к другу.

Анализ вопросов устойчивости, проведенный авторами в работах [9-13], позволяют говорить о существовании общих принципов построения алгоритмов численного интегрирования. С нашей точки зрения, проблему соответствия результатов численного интегрирования свойствам систем,

заданных уравнениями (9.1), можно решить, исходя из следующей общей концепции. Будем изначально предполагать, что алгоритм численного интегрирования дискретно воспроизводит непрерывную функцию, заданную собственной системой неизвестных дифференциальных уравнений, которые могут быть получены как некоторое малое возмущение исходной системы. Таким образом, приходим к следующему основному положению:

Все выполняемые в процессе интегрирования численные операции необходимо рассматривать как одно из возможных возмущений исследуемой системы.

Как известно, основные или, как говорят, фундаментальные силы в природе, гравитационные и электромагнитные, являются консервативными, для них выполняется закон сохранения энергии. Рассмотрим динамическую систему, в которой действуют консервативные силы, а действие неконсервативных сил оказывается сколь угодно мало, например, движение планеты вокруг Солнца или колебание физического маятника в условиях вакуума. Ясно, что как бы ни была изолирована такая система, она будет испытывать извне влияние малых консервативных возмущений, в частности, вызванных гравитационными силами планет, звёзд и т.д. Важнейшее свойство таких возмущений, выражено известной в теории возмущений теоремой Колмогорова-Арнольда-Мозера (теоремой КАМ) [4,8,14], которая *гарантирует сохранение устойчивости почти всех движений систем при достаточно малых, консервативных возмущениях*. Именно поэтому, движение планет оказывается устойчивым, а колебания маятника, при отсутствии сил сопротивления, будут осуществляться неограниченно долго.

В этой связи, для численного алгоритма, моделирующего движение консервативной системы, необходимо дополнительное требование:

Процесс численного интегрирования динамических уравнений консервативной системы должен соответствовать, какому либо малому консервативному возмущению.

Используя результаты теоремы КАМ, приходим к выводу:

Если процесс численного интегрирования соответствует какому-либо малому консервативному возмущению интегрируемой системы, то при достаточно малом шаге интегрирования он будет устойчив, по крайней мере, в некоторой области устойчивости этой системы.

В таком аспекте неустойчивость классических методов численного интегрирования, например метода Эйлера или Рунге-Кутты, как раз и объясняется тем, что они выражают некоторое не консервативное возмущение системы.

9.3 Бесконечно малые канонические преобразования

Для построения метода, отвечающего поставленному требованию, прежде всего, выразим это требование в терминах гамильтонова формализма.

Пусть на фазовом пространстве импульсов $\mathbf{p}$ и обобщённых координат $\mathbf{q}$ $R^{2n} = R(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ задана гамильтонова консервативная динамическая система $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}; \\ \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{p}}.\end{aligned}\tag{9.2}$$

Наложим на систему (9.2) некоторое малое возмущение, вызванное, быть может, и процессом численного интегрирования. Такое возмущение приводит к появлению явной зависимости от времени у координат и импульсов, и уравнения движения возмущенной системы запишутся в виде:

$$\begin{aligned}H(\mathbf{p}, \mathbf{q}); \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t}; \\ \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{q}(t)}{\partial t}.\end{aligned}\tag{9.3}$$

Из сформулированного условия консервативности возмущения следует, что возмущенная система должна удовлетворять собственной системе уравнений Гамильтона. Обозначая через τ параметр малости возмущения, запишем наше требование в форме:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} &= -\frac{\partial H_{\text{воз}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \tau)}{\partial \mathbf{q}}; \\ \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} &= \frac{\partial H_{\text{воз}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \tau)}{\partial \mathbf{p}}; \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} H_{\text{воз}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \tau) &= 0.\end{aligned}\tag{9.4}$$

Разлагая в ряд гамильтониан возмущения по параметру малости, приходим к общему виду возмущенной консервативной системы для численного алгоритма:

$$\begin{aligned}
H &= H_0(p, q) + \tau H_1(p, q) + \tau^2 H_2(p, q) + \dots; \\
\frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q}; \\
\frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H(p, q)}{\partial p}.
\end{aligned} \tag{9.5}$$

Теперь необходимо сформулировать требования к алгоритмам численного интегрирования, которые будут воспроизводить консервативные гамильтоновы системы вида (9.4). В общем случае алгоритм численного интегрирования соответствует некоторому бесконечно малому преобразованию в окрестности точки фазового пространства (p, q) вида $(p, q) \xrightarrow{\tau} (P, Q)$. Параметром малости такого преобразования служит шаг интегрирования τ , степень которого определяет порядок точности алгоритма. Очевидно, для того, чтобы преобразование, соответствующее алгоритму, воспроизводило систему (10.4), оно, прежде всего, не должно нарушать её гамильтоновой формы. Именно такие преобразования в гамильтоновой механике называются каноническими, и приходим к требованию:

Для того чтобы преобразование, соответствующее численному интегрированию консервативной системы являлось некоторым консервативным возмущением, необходимо, чтобы оно было бесконечно малым каноническим преобразованием по параметру шага интегрирования τ .

Теперь становится ясным смысл канонических алгоритмов, полученных в главе 4. Они воспроизводят систему в условиях малого консервативного возмущения, поэтому их устойчивость является следствием фундаментального свойства малых консервативных возмущений сохранять устойчивость исходной системы.

9.4 Канонические ряды

Бесконечно малые канонические преобразования образуют класс эквивалентности. Каждому каноническому преобразованию соответствует так называемая производящая функция, задание которой полностью определяет его вид.

Можно показать [9], что для построения алгоритмов канонического интегрирования необходимо использовать производящие функции вида $S_1(p, Q) = pQ$ или $S_2(P, q) = Pq$. При этом условие каноничности преобразований для построения алгоритмов численного интегрирования может быть выражено требованием

$$dS_1(P, q) = q dp + P dq, \tag{9.6}$$

$$dS_2(P, q) = p dq + Q dP. \quad (9.7)$$

Каждая из производящих функций порождает группу канонических преобразований. Связь между функциями осуществляется каноническим преобразованием, задаваемым производящей функцией $S_0 = qQ$, действие которой сводится к переобозначению импульсов и координат $p \longleftrightarrow Q$, $P \longleftrightarrow -q$ в полученных алгоритмах. Тем не менее, заметим, что оба класса построенных канонических алгоритмов, вообще говоря, соответствуют разным возмущениям. В частности, результаты численного интегрирования могут существенно отличаться, если фазовая точка в процессе интегрирования попадает в область экспоненциальной неустойчивости системы.

Вследствие сказанного, рассмотрим преобразования, построенные на основе функции $S_1(p, Q)$. Представляя функцию в форме ряда по шагу интегрирования, запишем $S_1(P, q, \tau) = S_{10} + S_{11}\tau + S_{12}\tau^2 + \dots$. При этом для производящей функции S_{10} необходимо положить $S_{10} = Pq$, при $\tau = 0$, что соответствует тождественному преобразованию. Используя для разложения функцию $H(P, q)$, получим степенной ряд для канонических преобразований:

$$S_1(P, q, \tau) = Pq + H(P, q)\tau + d^1 H(P, q)\tau^2 + \dots + d^i(P, q)\tau^{i+1} + \dots \quad (9.8)$$

Для сокращения записи использовали дифференциальный оператор $d^i = \left(\frac{\partial}{\partial P} dP + \frac{\partial}{\partial q} dq \right)^i$. Исходя из уравнения (9.6) получим уравнения канонических преобразований:

$$\begin{aligned} p &= P + \frac{\partial S_1(P, q)}{\partial q}; \\ Q &= q + \frac{\partial S_1(P, q)}{\partial P}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Аналогично, условие (9.7) приводит к ряду

$$S_1(p, Q, \tau) = pQ + H(p, Q)\tau + d^1 H(p, Q)\tau^2 + \dots + d^i(p, Q)\tau^{i+1} + \dots \quad (9.10)$$

и системе:

$$\begin{aligned} q &= Q + \frac{\partial S_1(p, Q)}{\partial p}; \\ P &= p - \frac{\partial S_1(p, Q)}{\partial Q}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Для того чтобы из формул (9.8), (9.10) получить алгоритмы канонического интегрирования возмущенной системы, необходимо выразить из первых уравнений соответственно P, Q и подставить во вторые уравнения. При

этом, как легко понять, вторая операция будет выполнена автоматически самим алгоритмом.

Таким образом, получили общий метод канонического интегрирования, позволяющий генерировать те или иные численные схемы. Каждая такая схема будет соответствовать точному интегрированию исходной консервативной системы, на которую наложено некоторое консервативное возмущение. Подчеркнём, что поскольку представление производящей функции в форме (9.8) и (9.10) единственно, то нет необходимости знать конкретно, какими факторами вызвано консервативное возмущение. Вся совокупность таких возмущений будет выражена либо в форме ряда (9.8), либо в форме ряда (9.10).

Канонические схемы первого порядка могут быть получены из канонических рядов для функций $S_1(P, q)$ и $S_2(p, Q)$, если ограничиться первыми двумя членами разложения $S_1(P, q, \tau) = Pq + H(P, q)\tau$, $S_2(p, Q, \tau) = pQ + H(p, Q)\tau$, которые приводят к двум сопряженным преобразованиям

$$\begin{aligned} p &= P + \tau \frac{\partial H(P, q)}{\partial q}; \\ Q &= q + \tau \frac{\partial H(P, q)}{\partial P}; \end{aligned} \tag{9.12}$$

$$\begin{aligned} q &= Q + \tau \frac{\partial H(p, Q)}{\partial Q}; \\ P &= p + \tau \frac{\partial H(p, Q)}{\partial p}. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Выражая соответственно P, Q из первых уравнений, получим канонические преобразования, соответствующие алгоритмам интегрирования импульс-координата и координата-импульс главы 4. В частности, первый алгоритм будет иметь вид (4.27).

9.5 Модельное отношение для консервативной системы

Используя единственность представления консервативных возмущений каноническими рядами, можно установить модельное отношение между моделируемой динамической системой-оригиналом и моделью, воспроизводимой в процессе канонического интегрирования. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть имеется реальная динамическая система A , в которой действуют известные нам консервативные силы, гравитационные, электростатические или магнитостатические, и отсутствуют диссипативные силы. На реальную

систему, кроме этих сил, будут действовать ещё силы, выражающие малые консервативные возмущения. Поэтому изоморфным образом или точной моделью моделируемой системы будет некоторая неизвестная функция Гамильтона

$$A \xleftarrow{I} H_D(p, q) \quad (9.14)$$

в которой учтены все силы, действующие на систему. По определению, функции $p(t), q(t)$, полученные на основе интегрирования динамических уравнений с гамильтонианом (9.14), воспроизводят реальную систему D сколь угодно точно. Поскольку возмущающие силы нам неизвестны, то функция Гамильтона записывается без учёта этих сил $H_M(p, q)$. Таким образом, устанавливается моделирующее отношение в форме гомоморфизма.

$$A \xleftarrow{I} H_D(p, q) \xrightarrow{G} H_M(p, q) \quad (9.15)$$

Записывая канонические преобразования, имеем в виду, что они дискретно воспроизводят некоторую непрерывную динамическую систему с неизвестным гамильтонианом $H_K(p, q)$. По условию гамильтониан $H_K(p, q)$ близок к гамильтониану $H_M(p, q)$ по порядку малости шага интегрирования и, следовательно, можно установить модельное отношение $H_M(p, q) \xrightarrow{G} H_K(p, q)$.

$$A \xleftarrow{I} H_D(p, q) \xrightarrow{G} H_M(p, q) \xrightarrow{G} H_K(p, q) \quad (9.16)$$

Как показано, функции $p(n\tau), q(n\tau)$, полученные в результате канонического интегрирования динамических уравнений с гамильтонианом $H_K(p, q)$, дискретно воспроизводят систему с гамильтонианом $H_M(p, q)$ в условиях малых консервативных возмущений, вызванных процессом счёта.

Поскольку представление возмущающих функций (9.8), (9.10) единственно, то приходим к изоморфизму

$$H_D(p(n\tau), q(n\tau)) \xleftarrow{I} H_K(p(n\tau), q(n\tau)). \quad (9.17)$$

Итак, гомоморфный образ реальной системы – изоморфен гомоморфному образу системы, воспроизводимой в процессе численного интегрирования (рис. 9.1).

Система D в условиях малых консервативных возмущений вызванных естественными процессами		Система M в условиях малых консервативных возмущений вызванных процессом счёта
Гомоморфизм		Гомоморфизм
Система D с дискретным временем	Изоморфизм	Система M с дискретным временем

Рисунок 9.1 - Модельное отношение между динамическим объектом и динамическим образом

Теоретически, полное соответствие оригинала и модели будет выполняться, если будут использованы все члены разложений (9.8), (9.10), что на практике реализовать невозможно. Однако реально, как показано на примере движения ансамблей, основную роль в эволюции динамических систем, по-видимому, играют старшие члены разложения. Кроме того, ряд, по необходимости должен обрываться, когда величина возмущений оказывается соизмеримой с квантово-механической мерой неопределённости $d p d q > h$. К сожалению, теория канонических рядов в динамике пока не разработана и ждёт своего создателя.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука, 1988. – 174 с.
2. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учебное пособие для университетов. – М.: Наука, 1990 416 с.
3. Гернет М.М. Курс теоретической механики: учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и сокр. – М.: Высшая школа, 1981. – 304 с., ил.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
5. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
6. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, – 832 с.
8. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. - М.: Эдиториал УРСС, 2001.-320 с.
9. Морозов Е.А. Каноническое интегрирование в проектировании динамических систем. Екатеринбург-Ижевск: Изд-во Института экономики УРО РАН, 2006. - 196 с.
10. Ефимов И.Н., Морозов Е.А. Каноническое интегрирование гамильтоновых систем. Изд-во Институт экономики УрО РАН, 2006, 142 с.
11. Ефимов И.Н., Морозов Е.А. О принципе консервативных возмущений. // Интеллектуальные системы в производстве. – 2005. - №1-С. 52-62
12. Ефимов И.Н., Морозов Е.А. Интегральные инварианты канонического интегрирования гамильтоновых систем. // Интеллектуальные системы в производстве. – 2003. - №2 -С. 59-79
13. Морозов Е.А. Об устойчивости интегральных кривых в сопряженных пространствах. // Вестник ИжГТУ.-2005.- №3 -С. 39-41.
14. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической механике //Успехи математических наук. 1963, т.18, 85 с.
15. Ефимов И.Н., Морозов Е.А., Германюк Г.Ю. Влияние нелинейности на возникновение и развитие хаоса в одномерных системах// Вестник ИжГТУ. -2008.-№3 – С. 162-166.
16. Ефимов И.Н., Морозов Е.А., Селиванов К.М., Ермолаева Е.В. Каноническое преобразование фазового пространства в динамике твердого тела//Вестник ИжГТУ. -2008.-№4– С. 190 - 195.

17. Ефимов И.Н., Морозов Е.А., Германюк Г.Ю., Германюк Д.Е., Использование канонического метода для моделирования молекулярных систем // Вестник ИжГТУ. - 2008.- №4 - С. 173 - 176.
18. Ефимов И.Н., Морозов Е.А. Каноническое интегрирование динамических систем. Изд-во Институт экономики УрО РАН, 2006, 198 с.
19. Постников М.М. Аналитическая геометрия. – М.: 1973 г., 752 с.
20. Четаев Н.Г. Теоретическая механика / Подред. В.В. Румянцева, К.Е. Якимовой. – М.:Наука Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.368 с.
21. Голубев Ю.В. Основы теоретической механики. – М., 1992 г., 525 с.
22. Фейман Р.И др. Фейнмановские лекции по физике. Вып.6. кн.4. – М.: Мир, 1977, 247 с.
23. Зигбан К. Альфа-, бета-, гамма-спектроскопия. – М.: Атомиздат, 1969, 567 с.
24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1967. 460 с.
25. Ефимов И.Н., Козлова С.Ж., Жукова С.А. Концептуальные основы интеграции открытых виртуальных лабораторных комплексов. // Вестник ИжГТУ – 2011, - №2 (50). -С.192-198
26. Ефимов И.Н., Жукова С.А. Качественные и количественные характеристики открытых информационных систем. Программные продукты и системы. – Тверь: № 4, 2012. – С. 80-83
27. Ефимов И.Н., Морозов Е.А. Компьютерное моделирование физических процессов. Учебное пособие. Ижевск: Изд-во «Митра», 2012. – 134 с.
28. Ефимов И.Н., Морозов Е.А. Фокусировка и ускорение заряженных частиц в высокочастотном магнитном поле. // Интеллектуальные системы в производстве 2(22) 2013. – С 16-20
29. Ефимов И.Н., Морозов Е.А., Жукова, Магафуров В.В. Устойчивые алгоритмы на основе эквиваффинных преобразований. // Вестник ИжГТУ имени М.Т. Калашникова. №3(59), 2013. – С. 165-167.

Ефимов Игорь Николаевич
Морозов Евгений Александрович
Селиванов Константин Михайлович

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Подписано в печать 02.09.2014. Формат 60х84 1/16.
Отпечатано на ризографе.
Уч.-изд. л. 9,15. Усл. печ. л. 7,73
Тираж 500 экз. Заказ 082/1

АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»
426034, Ижевск, ул. Кооперативная, д.5.
Тел./факс: +7(3412) 500-295. E-mail: mail@ics.org.ru