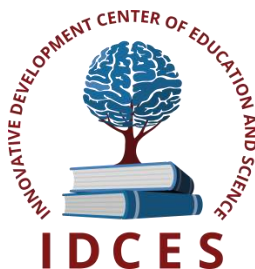


ИННОВАЦИОННЫЙ ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
INNOVATIVE DEVELOPMENT CENTER OF EDUCATION AND SCIENCE



**О вопросах и проблемах современных математических и
естественных наук**

Выпуск III

**Сборник научных трудов по итогам
международной научно-практической конференции
(11 июля 2016г.)**

**г. Челябинск
2016 г.**

О вопросах и проблемах современных математических и естественных наук /
Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции.
№ 3. г. Челябинск, 2016г. 56 с.

Редакционная коллегия:

кандидат биологических наук Благодатнова Анастасия Геннадьевна (г.Новосибирск), кандидат биологических наук Войтка Дмитрий Владимирович (аг.Прилуки), кандидат физико-математических наук, доцент Казьмин Игорь Александрович (г.Ростов-на-Дону), кандидат физико-математических наук, доцент Кайракбаев Аят Крымович (г.Актобе), доктор физико-математических наук, профессор Каленский Александр Васильевич (г.Кемерово), кандидат биологических наук, доцент Корж Александр Павлович (г.Запорожье), доктор биологических наук, профессор Ларионов Максим Викторович (г.Балашов), доктор геолого-минералогических наук, профессор, академик РАН Лебедев Владимир Ильич (г.Кызыл), доктор биологических наук, профессор Лесовская Марина Игоревна (г.Красноярск), кандидат физико-математических наук, доцент Ловягин Юрий Никитич (г.Санкт-Петербург), кандидат физико-математических наук, член-корреспондент АИАН Лукин Александр Николаевич (г.Туапсе), кандидат биологических наук Малыгина Наталья Владимировна (г.Екатеринбург), кандидат физико-математических наук Матвеева Юлия Васильевна (г.Саратов), кандидат биологических наук, доцент Мошкина Светлана Владимировна (г.Орел), доктор химических наук, профессор Назарбекова Сауле Полатовна (г. Шымкент), доктор биологических наук, профессор Нурбаев Серик Долдашевич (г. Алматы), доктор биологических наук, профессор Околелова Анна Ароновна (г.Волгоград), кандидат физико-математических наук, доцент Седова Наталия Викторовна (г.Тамбов), кандидат биологических наук, профессор РАН Соловьева Анна Геннадьевна (г. Нижний Новгород), кандидат химических наук Туманов Владимир Евгеньевич (г.Черноголовка), кандидат физико-математических наук, доцент Чочиев Тимофей Захарович (г.Владикавказ), кандидат химических наук, профессор Шпейзер Григорий Моисеевич (г. Иркутск)

В сборнике научных трудов по итогам **III** Международной научно-практической конференции **«О вопросах и проблемах современных математических и естественных наук»**, г. **Челябинск** представлены научные статьи, тезисы, сообщения аспирантов, соискателей ученых степеней, научных сотрудников, докторантов, преподавателей ВУЗов, студентов, практикующих специалистов в области естественных и математических наук Российской Федерации, а также коллег из стран ближнего и дальнего зарубежья.

Авторы опубликованных материалов несут ответственность за подбор и точность приведенных фактов, цитат, статистических данных, не подлежащих открытой публикации. Мнение редакционной коллегии может не совпадать с мнением авторов. Материалы размещены в сборнике в авторской правке.

Сборник включен в национальную информационно-аналитическую систему "Российский индекс научного цитирования" (РИНЦ).

Оглавление

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.00.00).....	10
МАТЕМАТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.00).....	10
СЕКЦИЯ №1. ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.01).....	10
СЕКЦИЯ №2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.02).....	10
О ПОСТАНОВКЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ДАРБУ В ОБЛАСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ДВЕ ЛИНИИ СИНГУЛЯРНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ Бушков С.В., Родионова И.Н.....	10
СЕКЦИЯ №3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.03).....	16
СЕКЦИЯ №4. ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.04).....	16
СЕКЦИЯ №5. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.05).....	16
СЕКЦИЯ №6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.06).....	16
СЕКЦИЯ №7. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.07).....	17
СЕКЦИЯ №8. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.09).....	17
МЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.00).....	17
СЕКЦИЯ №9. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.01).....	17
СЕКЦИЯ №10. МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.04).....	17
СЕКЦИЯ №11.	

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.05).....	17
СЕКЦИЯ №12. ДИНАМИКА, ПРОЧНОСТЬ МАШИН, ПРИБОРОВ И АППАРАТУРЫ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.06).....	17
СЕКЦИЯ №13. БИОМЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.08).....	17
АСТРОНОМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.00).....	17
СЕКЦИЯ №14. АСТРОМЕТРИЯ И НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.01).....	17
СЕКЦИЯ №15. АСТРОФИЗИКА И ЗВЕЗДНАЯ АСТРОНОМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.02).....	17
СЕКЦИЯ №16. ФИЗИКА СОЛНЦА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.03).....	17
СЕКЦИЯ №17. ПЛАНЕТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.04).....	17
ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.00).....	18
СЕКЦИЯ №18. ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.01).....	18
СЕКЦИЯ №19. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.02).....	18
СЕКЦИЯ №20. РАДИОФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.03).....	18
СЕКЦИЯ №21. ФИЗИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.04).....	18
СЕКЦИЯ №22. ОПТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.05).....	18
СЕКЦИЯ №23. АКУСТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.06).....	18
СЕКЦИЯ №24.	

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.07).....	18
СЕКЦИЯ №25. ФИЗИКА ПЛАЗМЫ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.08).....	18
СЕКЦИЯ №26. ФИЗИКА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.09).....	18
СЕКЦИЯ №27. ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.10).....	18
СЕКЦИЯ №28. ФИЗИКА МАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.11).....	18
СЕКЦИЯ №29. ЭЛЕКТРОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.13).....	18
СЕКЦИЯ №30. ТЕПЛОФИЗИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ТЕПЛОТЕХНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.14).....	19
СЕКЦИЯ №31. ФИЗИКА И ТЕХНОЛОГИЯ НАНОСТРУКТУР, АТОМНАЯ И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.15).....	19
СЕКЦИЯ №32. ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.16) TWO-PHOTON EMISSION BY HYDROGEN-LIKE ATOM TAKING INTO CONSIDERATION ELECTRON SPIN AND PHOTON POLARIZATION STATES V.V. Skobelev, S.S. Madudin.....	19
СЕКЦИЯ №33. ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ГОРЕНИЕ И ВЗРЫВ, ФИЗИКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ВЕЩЕСТВА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.17).....	31
СЕКЦИЯ №34. КРИСТАЛЛОГРАФИЯ, ФИЗИКА КРИСТАЛЛОВ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.18).....	31
СЕКЦИЯ №35. ФИЗИКА ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ И УСКОРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.20).....	31
СЕКЦИЯ №36.	

ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.21).....	31
СЕКЦИЯ №37.	
ФИЗИКА ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.23).....	31
ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.00).....	31
СЕКЦИЯ №38.	
НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.01)	31
СЕКЦИЯ №39.	
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.02)	31
СЕКЦИЯ №40.	
ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.03)	31
СЕКЦИЯ №41.	
ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.04).....	31
СЕКЦИЯ №42.	
ЭЛЕКТРОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.05).....	31
СЕКЦИЯ №43.	
ВЫСОКОМОЛЕКУЛЯРНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ	
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.06)	
ОТВЕРЖДЕНИЕ АКРИЛСОДЕРЖАЩИХ ЭПОКСИДНЫХ КОМПОЗИЦИЙ	
Гордеев А.С., Шубин Н.Е.....	33
СЕКЦИЯ №44.	
ХИМИЯ ЭЛЕМЕНТООРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ	
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.08).....	38
СЕКЦИЯ №45.	
ХИМИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.09).....	38
СЕКЦИЯ №46.	
БИООРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.10).....	38
СЕКЦИЯ №47.	
КОЛЛОИДНАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.11).....	38
СЕКЦИЯ №48.	
БИОНЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.12).....	39
СЕКЦИЯ №49.	
НЕФТЕХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.13).....	39
СЕКЦИЯ №50.	

РАДИОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.14).....	39
СЕКЦИЯ №51.	
КИНЕТИКА И КАТАЛИЗ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.15)	39
СЕКЦИЯ №52.	
МЕДИЦИНСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.16).....	39
СЕКЦИЯ №53.	
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ХИМИЯ	
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.17)... ..	39
СЕКЦИЯ №54.	
ХИМИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.21).....	39
БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.00.00).....	39
ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.00).....	39
СЕКЦИЯ №55.	
РАДИОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.01).....	39
СЕКЦИЯ №56.	
БИОФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.02).....	39
СЕКЦИЯ №57.	
МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.03).....	39
СЕКЦИЯ №58.	
БИОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.04).....	39
СЕКЦИЯ №59.	
ФИЗИОЛОГИЯ И БИОХИМИЯ РАСТЕНИЙ	
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.05).....	40
СЕКЦИЯ №60.	
БИОТЕХНОЛОГИЯ (В ТОМ ЧИСЛЕ БИОНАНОТЕХНОЛОГИИ)	
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.06).....	40
СЕКЦИЯ №61.	
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ГЕНЕТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.07).....	40
СЕКЦИЯ №62.	
БИОИНЖЕНЕРИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.08).....	40
СЕКЦИЯ №63.	
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ,	
БИОИНФОРМАТИКА	
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.09).....	40
ОБЩАЯ БИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.00).....	40

СЕКЦИЯ №64.	
БОТАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.01).....	40
СЕКЦИЯ №65.	
ВИРУСОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.02).....	40
СЕКЦИЯ №66.	
МИКРОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.03).....	40
СЕКЦИЯ №67.	
ЗООЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.04).....	40
СЕКЦИЯ №68.	
ЭНТОМОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.05).....	40
СЕКЦИЯ №69.	
ИХТИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.06).....	40
СЕКЦИЯ №70.	
ГЕНЕТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.07).....	40
СЕКЦИЯ №71.	
ЭКОЛОГИЯ (ПО ОТРАСЛЯМ) (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.08)	
ФЕНОТИПИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПОПУЛЯЦИЙ ЕЛИ	
В ЦЕНТРАЛЬНО-ЛЕСНОМ ЗАПОВЕДНИКЕ	
Попов П. П.	41
СЕКЦИЯ №72.	
БИОГЕОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.09).....	45
СЕКЦИЯ №73.	
ГИДРОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.10).....	45
СЕКЦИЯ №74.	
ПАРАЗИТОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.11).....	45
СЕКЦИЯ №75.	
МИКОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.12).....	45
СЕКЦИЯ №76.	
ПОЧВОВЕДЕНИЕ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.13).....	45
СЕКЦИЯ №77.	
БИОЛОГИЧЕСКИЕ РЕСУРСЫ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.14).....	45
ФИЗИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.00).....	45
СЕКЦИЯ №78.	

ФИЗИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.01).....	45
СЕКЦИЯ №79.	
АНТРОПОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.02).....	45
СЕКЦИЯ №80.	
ИММУНОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.03).....	46
СЕКЦИЯ №81.	
КЛЕТОЧНАЯ БИОЛОГИЯ, ЦИТОЛОГИЯ, ГИСТОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.04).....	46
СЕКЦИЯ №82.	
БИОЛОГИЯ РАЗВИТИЯ, ЭМБРИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.05).....	46
СЕКЦИЯ №83.	
НЕЙРОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.06).....	46
ГЕОГРАФИЯ.....	46
СЕКЦИЯ №84.	
ФИЗИЧЕСКАЯ ГЕОГРАФИЯ И БИОГЕОГРАФИЯ, ГЕОГРАФИЯ ПОЧВ И ГЕОХИМИЯ ЛАНДШАФТОВ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 25.00.23)	46
СЕКЦИЯ №85.	
ЭКОНОМИЧЕСКАЯ, СОЦИАЛЬНАЯ, ПОЛИТИЧЕСКАЯ И РЕКРЕАЦИОННАЯ ГЕОГРАФИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 25.00.24).....	46
СЕКЦИЯ №86.	
ГЕОМОРФОЛОГИЯ И ЭВОЛЮЦИОННАЯ ГЕОГРАФИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 25.00.25)	46
ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ.....	47
СЕКЦИЯ №87.	
ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ОБНАРУЖЕНИЯ И КОРРЕКЦИИ ОШИБОК СПЕЦ ПРОЦЕССОРА ПСКВ С ПОСТЕПЕННОЙ ДЕГРАДАЦИЕЙ Макарова А.В., Калмыков И.А.....	47
ГЕОЛОГИЯ.....	52
СЕКЦИЯ №88.	
РАЗВИТИЕ ГЕОЛОГИИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ.....	52
ПЛАН КОНФЕРЕНЦИЙ НА 2016 ГОД.....	53

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.00.00)
МАТЕМАТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.00)

СЕКЦИЯ №1.

**ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ
АНАЛИЗ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.01)**

СЕКЦИЯ №2.

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ
СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.02)**

**О ПОСТАНОВКЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ДАРБУ
В ОБЛАСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ДВЕ ЛИНИИ СИНГУЛЯРНОСТИ
КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ**

Бушков С.В., Родионова И.Н.

ФГАОУ ВО Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара

Настоящая работа является продолжением исследований по постановке и решению краевых задач в специальных классах для уравнений гиперболического типа на плоскости и в трехмерном пространстве, начатых в работах [1], [3] – [5]. Для уравнения Эйлера-Дарбу с отрицательными равными параметрами в прямоугольной области, содержащей две линии сингулярности коэффициентов уравнения, поставлены две краевые задачи с данными на параллельных сторонах прямоугольника (задачи Δ_2), а так же задача с суммарным заданием значений искомого решения в точках границы. На линиях сингулярности коэффициентов уравнения и на внутренней характеристической линии задаются условия сопряжения, непрерывные относительно решения и его нормальных производных. Методом интегральных уравнений доказывается существование и единственность решений поставленных задач.

Уравнение

$$u_{\xi\eta} - \frac{p}{\eta - \xi}(u_{\xi} - u_{\eta}) - \frac{p}{\eta + \xi}(u_{\xi} + u_{\eta}) = 0, \quad (0 < p < \frac{1}{2}) \quad (1)$$

рассмотрим на множестве $D = \bigcup_{i=1}^4 D_i$,

$$D_1 = \{\xi, \eta | 0 < \xi < \eta < 1\}, \quad D_2 = \{\xi, \eta | 0 < \eta < \xi < 1\},$$

$$D_3 = \{\xi, \eta | 0 < -\eta < \xi < 1\}, D_4 = \{\xi, \eta | 0 < \xi < -\eta < 1\}.$$

Пусть:

- 1) $u(\xi, 1) = \varphi_1(\xi), 0 \leq \xi \leq 1;$
- 2) $u(\xi, -1) = \varphi_2(\xi), 0 \leq \xi \leq 1; \varphi_i$ – заданные функции;
- 3) $\lim_{\eta \rightarrow \xi+0} (\eta - \xi)^{-2p} (u_\xi - u_\eta) = \lim_{\eta \rightarrow \xi-0} (\xi - \eta)^{-2p} (u_\xi - u_\eta) = v_1(\xi), 0 < \xi < 1;$
- 3') $\lim_{\eta \rightarrow \xi+0} (\eta - \xi)^{-2p} (u_\xi - u_\eta) = -\lim_{\eta \rightarrow \xi-0} (\xi - \eta)^{-2p} (u_\xi - u_\eta);$
- 4) $\lim_{-\eta \rightarrow \xi+0} (-\eta - \xi)^{-2p} (u_\xi + u_\eta) = \lim_{-\eta \rightarrow \xi-0} (\eta + \xi)^{-2p} (u_\xi + u_\eta) = v_2(\xi), 0 < \xi < 1;$
- 4') $\lim_{-\eta \rightarrow \xi+0} (-\eta - \xi)^{-2p} (u_\xi + u_\eta) = -\lim_{-\eta \rightarrow \xi-0} (\eta + \xi)^{-2p} (u_\xi + u_\eta);$
- 5) $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \eta^{-1} u_\eta = -\lim_{\eta \rightarrow 0-0} \eta^{-1} u_\eta, 0 < \xi < 1.$

Задача I (Δ_2). Найти решение уравнения (1) на множестве D , непрерывное в $\bar{D}$, принадлежащее классу R_1 в областях D_i ($i=1,4$) [$u(\xi, \eta) \in R_1(\bar{D})$], удовлетворяющее условиям 1) – 3), 4), 5).

Задача II (Δ'_2) отличается заданием условий:

1), 2), 3'), 4'), 5).

Будем предполагать выполнение:

Условия А. $\varphi_i(\xi) \in C[0,1],$

$\varphi''_i \in C(0,1), \varphi''_i$ абсолютно интегрируема на $[0,1], \varphi_i(1) = 0, i = 1,2.$

Условия В. $\varphi'_1(1) + \varphi'_2(1) = 0, \varphi'_i(1) \neq 0, i = 1,2.$

Воспользуемся решением задачи Коши для уравнения (1) принадлежащим специальному классу $R_1[1,2]$, удовлетворяющим условиям 3), 4). Его можно записать в виде:

$$D_1: u(\xi, \eta) = \int_{\eta^2}^1 T_1(s) (s - \xi^2)^p (s - \eta^2)^p ds + \int_{\xi^2}^{\eta^2} N_1(s) (\eta^2 - s)^p (s - \xi^2)^p ds, \quad (2)$$

$$D_2: u(\xi, \eta) = \int_{\xi^2}^1 T_1(s) (s - \xi^2)^p (s - \eta^2)^p ds + \int_{\eta^2}^{\xi^2} N^*_1(s) (\xi^2 - s)^p (s - \eta^2)^p ds, \quad (3)$$

$$D_3: u(\xi, \eta) = \int_{\xi^2}^1 T_2(s)(s - \xi^2)^p(s - \eta^2)^p ds + \int_{\eta^2}^{\xi^2} N_2^*(s)(\xi^2 - s)^p(s - \eta^2)^p ds, \quad (4)$$

$$D_4: u(\xi, \eta) = \int_{\eta^2}^1 T_2(s)(s - \xi^2)^p(s - \eta^2)^p ds + \int_{\xi^2}^{\eta^2} N_2(s)(\eta^2 - s)^p(s - \xi^2)^p ds. \quad (5)$$

Функции $T_i(s), N_i(s), N_i^*(s)$, $i = 1, 2$ непрерывны в $(0, 1)$ и абсолютно интегрируемы на $[0, 1]$. В этом случае, как показано в работе [5], функции (2)–(5) определяют классическое решение уравнения (1) в соответствующих областях. Имеют место соотношения:

$$N_i(s) = \frac{T_i(s)}{2\cos\pi p} - \kappa v_i(s), \quad (6)$$

$$N_i^*(s) = \frac{T_i(s)}{2\cos\pi p} + \kappa v_i(s), \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

$$\kappa = \frac{\Gamma(1 + 2p)}{2\Gamma^2(1 + p)}.$$

Для решения задачи Δ_2 из условий 1), 2), при выполнении условий А получаем:

$$N_i(\xi) = -\frac{1}{\Gamma(1+p)\Gamma(1-p)} \left[\varphi_i'(1)(1 - \xi)^{-2p} + (1 - \xi)^{-p} \int_{\xi}^1 \varphi_i''(t)(t - \xi)^{-p} dt \right] \quad (8)$$

Из формул (3), (4), непрерывности решения на $\eta=0$, а также условия 5) придём к уравнениям

$$\int_{\xi}^1 y_i(s)(s - \xi)^p ds = - \int_0^{\xi} \chi_i(s)(s - \xi)^p ds, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$\text{где } y_1(s) = [T_1(s) - T_2(s)]s^p, \quad \chi_1(s) = [N_1^*(s) - N_2^*(s)]s^p, \quad (10)$$

$$y_2(s)=[T_1(s) + T_2(s)]s^{p-1}, \quad \chi_2(s)=[N_1^*(s) + N_2^*(s)]s^{p-1}.$$

Разрешая уравнение (9) относительно $y_i(\xi)$, получим:

$$y_i(\xi) = \frac{\sin \pi p}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1-s}{1-\xi} \right)^p \frac{\chi_i(s) ds}{s-\xi} + \chi_i(\xi) \cos \pi p, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} (1-s)^p s^p [v_1(s) - v_2(s)] &= \mu_1(s), \\ (1-s)^p s^{p-1} [v_1(s) + v_2(s)] &= \mu_2(s), \\ (1-s)^p s^p [N_1(s) - N_2(s)] &= f_1(s), \\ (1-s)^p s^{p-1} [N_1(s) + N_2(s)] &= f_2(s). \end{aligned} \quad (12)$$

Из формул (11), (6), (7) получим уравнение относительно $\mu_i(s)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\mu_i(s) ds}{s-\xi} = -\frac{f_i(\xi)}{\operatorname{tg} \pi p} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f_i(s) ds}{s-\xi}, \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

Обозначим правые части уравнений (13) за $\Phi_i(\xi)$. Из формул (8) и (12) следует, что если выполняются условия А, то функция $\Phi_1(\xi)$ удовлетворяет условию Гёльдера на $[0,1)$ с показателем $1-p$ и абсолютно интегрируема на сегменте $[0,1]$, $\Phi_2(\xi)$ на $(0,1)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1-p$ и абсолютно интегрируема на $[0,1]$. Данные утверждения доказываются непосредственными вычислениями. К уравнению (13) применим теорию интегральных уравнений первого рода с ядром Коши [2] (стр. 444-447). Из формул обращения интеграла типа Коши получим:

$$\mu_1(\xi) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-y}{y}} \frac{\Phi_1(y) dy}{y-\xi}, \quad (14)$$

$$\mu_2(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{y(1-y)}{y-\xi}} \Phi_2(y) dy + A_0 \right], \quad A_0 - \text{const.}$$

Из сказанного выше следует:

Теорема I. Если выполняются условия А, то существует решение задачи Δ_2 .

Если к условиям А добавить выполнение условий В, то функция $\Phi_1(x)$ будет обладать теми же свойствами, а $\Phi_2(x)$ удовлетворять условию Гёльдера на $(0,1]$ с показателем $1 - p$. В этом случае решение каждого из уравнений (13) можно искать в классе функций, ограниченных на одном из концов сегмента $[0,1]$. В этом классе существует единственное решение [2]. $\mu_1(\xi)$ определяется формулой (14), а

$$\mu_2(\xi) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \int_0^1 \sqrt{\frac{y}{1-y}} \frac{\Phi_2(y) dy}{y-\xi}.$$

Теорема II. Если выполняются условия А и В, то существует единственное решение задачи Δ_2 .

По найденным $\mu_1(\xi)$ и $\mu_2(\xi)$ из формул (12) получаем v_1 и v_2 . $T_i, i = 1, 2$ находим из формул (8) и (6), затем $N_i^*, i = 1, 2$ из формул (7). Принадлежность $T_i, N_i, N_i^* (i = 1, 2)$ указанным выше классам доказана непосредственными вычислениями.

При решении задачи Δ'_2 из условий 3'), 4'), а также формул (6), (7) получаем, что $N_i(s) = N_i^*(s), i = 1, 2$.

Тогда из выражения (11) имеем:

$$T_1(\xi) - T_2(\xi) = -\frac{\sin p\pi}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1-s}{1-\xi}\right)^p \left(\frac{s}{\xi}\right)^p \frac{N_1(s) - N_2(s)}{s-\xi} ds + \\ + [N_1(\xi) - N_2(\xi)] \cos p\pi, \quad (15)$$

$$T_1(\xi) + T_2(\xi) = -\frac{\sin p\pi}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1-s}{1-\xi}\right)^p \left(\frac{s}{\xi}\right)^{p-1} \frac{N_1(s) + N_2(s)}{s-\xi} ds + \\ + [N_1(\xi) + N_2(\xi)] \cos p\pi. \quad (16)$$

T_1 и T_2 находим сложением и вычитанием равенств (15) и (16). Вычислением показано, что при выполнении условий А $T_i(\xi)$ абсолютно интегрируемы на $[0,1]$ и удовлетворяют условию Гёльдера в $(0,1)$ с показателем $1 - p$.

Теорема III. При выполнении условий А задача Δ'_2 имеет единственное решение.

Задача III (с суммарным заданием значений искомого решения в граничных точках).

Из точек (ξ, ξ) и $(\xi, -\xi)$, принадлежащих линиям сингулярности коэффициентов уравнения (1), опускаем перпендикуляры на части границы области D: $\eta=1, \eta=-1, \xi=1$. Основания этих перпендикуляров обозначим $A(\xi, -1), B(1, -\xi), C(1, \xi), D(\xi, 1)$.

Постановка задачи. На множестве D найти решение $u(\xi, \eta)$ уравнения (1), непрерывное в $\bar{D}$, $u(\xi, \eta) \in R_1(D_i) (i=\overline{1,4})$, удовлетворяющее условиям:

$$u(D) + u(C) = \psi_1(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (17)$$

$$u(B) + u(A) = \psi_2(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (18)$$

а так же 3), 4), 5).

Условия, налагаемые на функции $\psi_i(\xi)$, $i = 1, 2$, совпадают с условиями А предыдущих задач.

Подчиним функции (2)–(5) условиям (17), (18), приходим к интегральным уравнениям

$$\int_{\xi^2}^1 [N_i(s) + N_i^*(s)] (1-s)^p (s-\xi^2)^p ds = \psi_i(\xi), \quad i = 1, 2,$$

единственное решение которых при условии $\psi_i(1) = 0$ получается из формулы (8). Кроме того, с учётом соотношений (6), (7):

$$N_i(s) + N_i^*(s) = \frac{T_i(s)}{\cos \pi p}, \quad i = 1, 2,$$

поэтому имеем

$$N_i(\xi) + N_i^*(\xi) = \frac{T_i(s)}{\cos \pi p} = -\frac{1}{B(1-p, 1+p)} \times \quad (19)$$

$$\times \left[\psi'_i(1)(1-\xi)^{-2p} + (1-\xi)^{-p} \int_{\xi}^1 \psi''_i(t)(t-\xi)^{-p} dt \right].$$

Уравнение (9) разрешаем относительно $\chi_i(x)$, $i = 1, 2$:

$$\chi_i(x) = \frac{\sin \pi p}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{s}{x}\right)^p \frac{y_i(s) ds}{s-x} + \cos \pi p \cdot y_i(x).$$

Или, с учётом обозначений (10)

$$N_1^*(x) - N_2^*(x) = \frac{\sin \pi p}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{s}{x}\right)^{2p} \frac{T_1(s) - T_2(s)}{s-x} ds + (T_1(x) - T_2(x)) \cos \pi p, \quad (20)$$

$$N_1^*(x) + N_2^*(x) = \frac{\sin \pi p}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{s}{x}\right)^{2p-1} \frac{T_1(s) + T_2(s)}{s-x} ds + (T_1(x) + T_2(x)) \cos \pi p, \quad (21)$$

где T_1 и T_2 определены формулой (19).

Складывая и вычитая равенства (20), (21) находим N_1^* и N_2^* , а по найденным N_i^* посредством выражения (19) получаем N_1, N_2 .

Проверка показывает, что при выполнении условий A , налагаемых на функции ψ_i , $i = 1, 2$, T_i , N_i , N_i^* непрерывны в $(0, 1)$ и абсолютно интегрируемы на сегменте $[0, 1]$.

Единственность решения задачи III следует из единственности решения задачи Коши, взятой за основу, и однозначной разрешимости интегральных уравнений, к которым свелась задача.

Список литературы

1. Бушков С.В., Родионова И.Н. Две задачи для уравнения $W_{\xi\eta 0} - \lambda u = 0$ в специальном классе решений ${}_0W$. Математическое моделирование и краевые задачи. Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 3., Сам. госуд. техн. ун-т, Самара 2009. – с. 58-61.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Главная редакция физ-мата лит-ры. Издательство «Наука», Москва 1977 г., с. 638.
3. Долгополов В.М., Долгополов М.В., Родионова И.Н. Построение специальных классов решений некоторых дифференциальных уравнений гиперболического типа. Докл. Академии наук, 2009. т.429, №5. с. 583-589.
4. Долгополов В.М., Родионова И.Н. Задачи для уравнений гиперболического типа на плоскости и в трёхмерном пространстве с условиями сопряжения на характеристике. Известия Российской академии наук. Сер.матем.2011, т.75, №4, с. 21-28.
5. Долгополов В.М., Родионова И.Н. Экстремальные свойства решений специальных классов одного уравнения гиперболического типа. Математические заметки. Том 92, выпуск 4, 2012, с. 533-540.

СЕКЦИЯ №3.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.03)

СЕКЦИЯ №4.

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.04)

СЕКЦИЯ №5.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.05)

СЕКЦИЯ №6.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.06)

**СЕКЦИЯ №7.
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.07)**

**СЕКЦИЯ №8.
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.09)**

МЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.00)

**СЕКЦИЯ №9.
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.01)**

**СЕКЦИЯ №10.
МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.04)**

**СЕКЦИЯ №11.
МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.05).**

**СЕКЦИЯ №12.
ДИНАМИКА, ПРОЧНОСТЬ МАШИН, ПРИБОРОВ И АППАРАТУРЫ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.06)**

**СЕКЦИЯ №13.
БИОМЕХАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.02.08)**

АСТРОНОМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.00)

**СЕКЦИЯ №14.
АСТРОМЕТРИЯ И НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.01)**

**СЕКЦИЯ №15.
АСТРОФИЗИКА И ЗВЕЗДНАЯ АСТРОНОМИЯ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.02)**

**СЕКЦИЯ №16.
ФИЗИКА СОЛНЦА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.03)**

**СЕКЦИЯ №17.
ПЛАНЕТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.03.04)**

ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.00)

СЕКЦИЯ №18.

**ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.01)**

СЕКЦИЯ №19.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.02)

СЕКЦИЯ №20.

РАДИОФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.03)

СЕКЦИЯ №21.

ФИЗИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.04)

СЕКЦИЯ №22.

ОПТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.05)

СЕКЦИЯ №23.

АКУСТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.06)

СЕКЦИЯ №24.

**ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.07)**

СЕКЦИЯ №25.

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.08)

СЕКЦИЯ №26.

**ФИЗИКА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.09)**

СЕКЦИЯ №27.

**ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.10)**

СЕКЦИЯ №28.

**ФИЗИКА МАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.11)**

СЕКЦИЯ №29.

**ЭЛЕКТРОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.13)**

**СЕКЦИЯ №30.
ТЕПЛОФИЗИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ТЕПЛОТЕХНИКА
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.14)**

**СЕКЦИЯ №31.
ФИЗИКА И ТЕХНОЛОГИЯ НАНОСТРУКТУР,
АТОМНАЯ И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.15)**

**СЕКЦИЯ №32.
ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.16)**

**TWO-PHOTON EMISSION BY HYDROGEN-LIKE ATOM TAKING
INTO CONSIDERATION ELECTRON SPIN AND PHOTON
POLARIZATION STATES**

**V.V. Skobelev professor Moscow Polytechnic University;
S.S. Madudin The student of the second year;
Direction: Technology of art processing of materials;
Moscow Polytechnic University**

Abstract. In the paper the process of two-photon emission $(Ze)^* \rightarrow (Ze) + 2\gamma$ by hydrogen-like atom is considered taking into attention electron spin states and photons polarization unlike of the previous considerations. General expressions for the rate are obtained with establishing of “rigid” and “soft” m, l -selection rules. It is demonstrated, that due to specific properties of the two-photon emission process (for instance, Zeeman effect absence) in principle it may be identified on a phone of one-photons emission $(Ze)^* \rightarrow (Ze) + \gamma$, in spite of the presence extra little factors $\alpha = e^2 / \hbar c$ of QED perturbation theory in e and square $(Z\alpha)^2$ of atomic expansion parameter $(Z\alpha)$ in the rate expression $w_{2\gamma} \sim \alpha^2 (Z\alpha)^6$, while $w_{1\gamma} \sim \alpha (Z\alpha)^4$.

INTRODUCTION

Photon emission by hydrogen-like atom is one of the basic and most important problems of quantum mechanics and field theory. The main mechanism is one-photon emission, corresponding to the first order QED perturbation theory. In a usual interpretation one-photon

emission rate may be obtained by more simple methods also and is follows(see, for example, series publications in ref. [1]):

$$W_{1\gamma} = \frac{4}{3} \frac{\alpha E_{m'}^3}{\hbar^3 c^2} |\vec{M}|^2, \quad (1)$$

(1)

where “vector” integral matrix element between initial and final electron states is

$$\vec{M} = \int \Psi_s'^* \vec{r} \Psi_s dV, \quad (2)$$

(2)

with

$$\Psi_s = R_{nl}(r) \Theta_l^m(\theta) \Phi_m(\varphi), \quad (3)$$

(3)

being a wave function of corresponding Schrödinger equation for electron in a field of nucleus (Ze), and the usual energy value expression is follows:

$$E \equiv E_n = -\frac{(Ze^2)^2 m_e}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{(Z\alpha)^2}{2n^2} m_e c^2, \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}. \quad (4)$$

(4)

For our purposes functions of spherical coordinates in (3) may be presented in the form [1,2]:

$$R_{nl}(r) = r_0^{-3/2} R_{nl}(\rho), \quad \rho = \frac{r}{r_0}, r_0 = \frac{\hbar^2}{m_e (Ze^2)} = \lambda_C (Z\alpha)^{-1}, \lambda_C = \frac{\hbar}{m_e c}, \quad (5a)$$

(5a)

$$R_{nl}(\rho) = C_{nl} e^{-\frac{\rho}{n}} \left(\frac{2\rho}{n} \right)^l F(-n+l+1, 2l+2, \frac{2\rho}{n}), \quad C_{nl} = \frac{2}{n^2 (2l+1)!} \sqrt{\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}}, \quad (5b)$$

$$\int_0^\infty R_{n'l}(r) R_{nl}(r) r^2 dr = \int_0^\infty R_{n'l}(\rho) R_{nl}(\rho) \rho^2 d\rho = \delta_{n',n}; \quad (5c)$$

(5c)

$$\Theta_l^m(\theta) = (-1)^m C_l^m P_l^m(\cos \theta), \quad (6a)$$

(6a)

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} \left[\frac{(x^2-1)^l}{2^l l!} \right], \quad (6b)$$

(6b)

$$C_l^m = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}}, \quad (6c)$$

(6c)

$$\int_{-1}^1 \Theta_{l',m}(\theta) \Theta_{l,m}(\theta) d \cos \theta = \delta_{l',l} ;$$

(6d)

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} ,$$

(7a)

$$\int_0^{2\pi} \Phi_{m'}^*(\varphi) \Phi_m(\varphi) d\varphi = \delta_{m',m} .$$

(7b)

Here F, P , as usual [1,2], stand for degenerate hypergeometric function and associated Legendre polynomial, and $\delta_{i,j}$ is a Kroneker symbol.

Note also, that after variable change $\bar{\rho} \equiv \frac{\bar{r}}{r_0}$ in accordance with (5a) one can easily see, that

$$W_{1\gamma} \sim \alpha(Z\alpha)^4 .$$

(8)

In a general case there is exist also two-photon emission, to which the second order of QED perturbation theory (Fig.) corresponds with usual QED Lagrangian(here and sometimes in the following for simplicity we omit constants $\hbar, c$ in formulas):

$$L = e[\bar{\Psi}_e \gamma^\mu \Psi_e] A_\mu .$$

(9)

The effect has been discussed before in the literature (see, for instance, ref. [3]) but not taking into attention electron spin and photon polarization states like of the basic one-photon effect with their rate as (1,2). We will see in the following, that these particle states may be of the main role in two-photon emission identification as compared with one-photon emission. For this purpose one needs in the following:

1) Electron propagator in the field of nucleus, which in the case may be used in the zero order over “atomic parameter” $(Z\alpha)$ -expansion, i.e. as Green function G of free electron field [4]:

$$G(x, x') \rightarrow G(x - x') = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{\hat{p} + m_e}{p^2 - m_e^2} \exp[-ip(x - x')].$$

(10)

2) Appropriate representation of two independent photon orthogonal linear polarization states, which in transverse calibration are

$$e_\mu \rightarrow \tilde{e}_\mu = \{0; \cos \theta_k \sin \varphi_k, \cos \theta_k \cos \varphi_k, -\sin \theta_k\},$$

(11a)

$$e_\mu \rightarrow \tilde{\tilde{e}}_\mu = \{0; \cos \varphi_k, -\sin \varphi_k, 0\},$$

(11b)

where photon 4-momentum k is defined by

$$k_\mu = k_0 \{1; \sin \theta_k \sin \varphi_k, \sin \theta_k \cos \varphi_k, \cos \theta_k\},$$

(11c)

with evident properties

$$\tilde{e}^2 = \tilde{\tilde{e}}^2 = -1, (\tilde{e}\tilde{\tilde{e}}) = 0, (\tilde{e}k) = (\tilde{\tilde{e}}k) = 0, k^2 = 0,$$

(11d)

3) Appropriate representation of Dirac equation wave function in nucleus field (Ze).

For the last purpose we obtain the solution of Dirac equation in Sect. I.

I. DIRAC EQUATION WAVE

FUNCTION IN A NUCLEUS FIELD

Dirac equation may be presented in the form:

$$D_- \Psi = 0,$$

(12)

with Dirac operator

$$D_\mp = [E_r + \frac{(Ze^2)}{r}] \gamma^0 - i\hbar c (\vec{\gamma} \frac{\partial}{\partial \vec{r}}) \mp m_e c^2, E_r = m_e c^2 + E,$$

(12a)

Then we seek the solution as follows:

$$\Psi = D_+ \psi$$

(12b)

with ψ as “intermediate” spinor. After substitution (12b) in (12) with usage (12a) we obtain:

$$[\hat{H}_s + \hat{H}'] \psi = E \psi,$$

(13)

where

$$\hat{H}_s = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_r - \frac{(Ze^2)}{r}$$

(13a)

to be Schrödinger equation Hamiltonian. Operator $\hat{H}'$ corresponds to relativistic and spin-orbit corrections to $\hat{H}_s$ and has a form

$$\hat{H}' = -\frac{E^2}{2m_e c^2} - \frac{(Ze^2)^2}{2m_e c^2 r^2} - \frac{E}{m_e c^2} \frac{(Ze^2)}{r} + i \frac{\hbar(Ze^2)}{2m_e c} \frac{\gamma^0(\vec{\gamma}\vec{r})}{r^3},$$

(13b)

being of the order $(Z\alpha)^2$ in relation to this $\hat{H}_s$ [1].

In the main order over $(Z\alpha)$ -expansion we have usual Schrödinger equation for introduced “intermediate” spinor ψ

$$\hat{H}_s \psi = E \psi.$$

(14)

Since commutator $\Sigma_3 \hat{H}_s - \hat{H}_s \Sigma_3$ in an evident manner equals to zero, this ψ may be chosen as spin z - projection operator [4]

$$\Sigma_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(15)

eigenfunction with two possible eigenvalues:

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \Psi_s \\ 0 \\ C_+ \Psi_s \\ 0 \end{pmatrix}, \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_s \\ 0 \\ C_- \Psi_s \end{pmatrix}; \quad \Sigma_3 \psi_{\pm} = m_s \psi_{\pm}, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

(16)

with some arbitrary constants $C_{\pm}$ in the case.

Then one may see, that operator D_+ up to nonessential multiplier and neglecting as before contributions of the order $(Z\alpha)^2$ has a form

$$D_+ = \frac{1}{2} [(\gamma^0 + 1) - i \frac{(Z\alpha)}{n} (\vec{\gamma} \frac{\partial}{\partial \vec{r}'})],$$

(17)

where dimensionless variable $\vec{r}'$ is $\vec{r}' = \vec{r} \frac{\sqrt{2m(-E)}}{\hbar}$ with E from (4).

In standard γ -matrix representation and in the main order over $(Z\alpha)$ -expansion, which will be sufficient for us, from (17) we obtain:

$$D_+ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(17a)

Thus, in accordance with (12b) from (16),(17a) we have for Dirac equation wave function $\Psi \rightarrow \Psi_{\pm} = D_{\pm}\psi_{\pm}$ in a leading $(Z\alpha)$ -approximation:

$$\Psi_{+} = \begin{pmatrix} \psi_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Psi_{-} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Note also, that in our approximation of neglecting $(Z\alpha)^2$ -corrections we in fact neglect spin –orbit interaction also as mentioned before and the set of quantum numbers for a given state is follows:

$$\{n, l, m, m_s\}; \quad l = 0, \dots, n-1; \quad m = -l, \dots, +l; \quad m_s = \pm \frac{1}{2}, \quad (19a)$$

and not

$$\{n, j, l, m, m_j\}; \quad j = l \pm \frac{1}{2} (l \neq 0), \frac{1}{2} (l = 0); \quad m_j = -j, \dots, +j \quad (19b)$$

as in the opposite case of taking into consideration this spin-orbit interaction [1].

I.MATRIX ELEMENT OF THE PROCESS $(Ze)^* \rightarrow (Ze) + 2\gamma$

Two-photon emission S - matrix element without concretization of electron spin and photon polarization states may be written as follows:

$$\langle f | S | i \rangle = \frac{\alpha}{\pi} \frac{2}{m_e} \frac{M \delta(\Delta E - k_0 - k'_0)}{\sqrt{2k_0 V 2k'_0 V}}, \quad (20a)$$

$$M = \frac{m_e}{2} \int dV dV' \bar{\Psi}'(\vec{r}') \{ \hat{e}' \exp[-i(\vec{k}\vec{r}')] \int d\vec{p} \frac{(E' + k'_0) \gamma^0 - (\vec{\gamma}\vec{p}) + m_e}{(E' + k'_0)^2 - \vec{p}^2 - m_e^2} \exp[-i\vec{p}(\vec{r}' - \vec{r})] \times \\ \times \hat{e} \exp[-i(\vec{k}\vec{r})] + \text{photons transposition} \} \Psi(\vec{r}). \quad (20b)$$

Here Ψ' refers to initial electron state, Ψ - to final state, $\Delta E = E - E'$, and matrix element M (20b) under such definition is a dimensionless quantity. In spherical coordinates with usage dimensionless variable ρ (5a) and in the following $\tilde{p} = p(Z\alpha)^{-1} \lambda_C$ ($p \equiv |\vec{p}|$) also "photon" exponential factor in (20b) may be presented in the form:

$$\exp[-i(\vec{k}\vec{r})] = \exp[-ik_0 \lambda_C (Z\alpha)^{-1} \rho (\sin \theta \sin \theta_k \cos(\varphi - \varphi_k) + \cos \theta \cos \theta_k)].$$

Therefore, taking into attention evident relation $k_0 \sim \Delta E \equiv E - E' \sim (Z\alpha)^2 m_e$, and following from (5b) effective value $\rho \sim 1$ in the main order over $(Z\alpha) \ll 1$ - expansion one may put

$\exp[-i(\vec{k}\vec{r})] \rightarrow 1$; the same relates to $\exp[-i(\vec{k}\vec{r}')]$ -factor.

It isn't difficult to see also, that the quantity, corresponding matrixes product $\vec{\gamma}^i \vec{\gamma}^j \vec{\gamma}^k$ “between” wave functions (18) equals to zero, that is appears to be proportional at least the first power $(Z\alpha)$ in $(Z\alpha)$ -expansion and under mentioned earlier value $p = \tilde{p}(Z\alpha)\lambda_c^{-1}$ the second term with $(\vec{\gamma}\vec{p})$ -contribution in numerator of propagation factor in (20b) under convergence integral over $d\vec{p}$ (see below) is proportional to $(Z\alpha)^2$, as the first term in this numerator. Thus, in neglecting $(Z\alpha)^2 \ll 1$ -contributions in numerator of propagation factor only m_e -term remains, which is proportional to unite matrix; and in denominator in any case one may neglect $(E' + k'_0)^2 \sim (Z\alpha)^4 m_e^2 \ll m_e^2$ -term, and also by $\vec{p}^2 = \tilde{p}^2 \lambda_c^{-2} (Z\alpha)^2 \ll m_e^2$. Thus, wave functions of the “initial” and “final” electron appear in (20b) in combination $\overline{\Psi}'(\vec{r}')\Psi(\vec{r})$, and from (18) with $\overline{\Psi}'(\vec{r}')\Psi_{\mp}(\vec{r}) = 0$ it follows, that spin- flipping doesn't happen, and this quantity $\overline{\Psi}'(\vec{r}')\Psi(\vec{r})$ one may change by $\overline{\Psi}'(\vec{r}')\Psi_{\pm}(\vec{r}) = \Psi_s'^*(\vec{r}')\Psi_s(\vec{r})$.

Thus, in the main order over $(Z\alpha) \ll 1$ -expansion we obtain the following intermediate result:

$$\begin{aligned}
 M = & -(ee') \int_0^\infty d\rho' \rho'^2 R_{n'l'}(\rho') \int_{-1}^1 d \cos \theta' \Theta_{l'}^{m'}(\theta') \int_0^{2\pi} d\varphi' \Phi_{m'}^*(\varphi') \int_0^\infty d\rho \rho^2 R_{nl}(\rho) \int_{-1}^1 d \cos \theta \Theta_l^m(\theta) \times \\
 (21) & \times \int_0^{2\pi} d\varphi \Phi_m(\varphi) \int d\vec{p} \tilde{p}^2 d\Omega_{\vec{p}} \exp[-i\tilde{p}\rho'(\sin \theta_{\vec{p}} \sin \theta' \cos(\varphi' - \varphi_{\vec{p}}) + \cos \theta_{\vec{p}} \cos \theta')] \times \\
 & \times \exp[i\tilde{p}\rho(\sin \theta_{\vec{p}} \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_{\vec{p}}) + \cos \theta_{\vec{p}} \cos \theta)].
 \end{aligned}$$

It is taken into attention here, that photons transposition in the case reduces to equality $\hat{e}'\hat{e} + \hat{e}\hat{e}' = 2(ee')$. In foregoing for a more simple representation of this expression in correspondence with (5b) we introduce the following designation over $d\rho$ -integral:

$$I(n, l, \tilde{p}, f) \equiv \int_0^\infty d\rho \exp\left\{-\rho\left[\frac{1}{n} - i\tilde{p}f(\theta_{\vec{p}}, \theta, \varphi - \varphi_{\vec{p}})\right]\right\} \rho^{l+2} F(-n + l + 1, 2l + 2, \frac{2\rho}{n}), \quad (21a)$$

where $f(\theta_{\vec{p}}, \theta, \varphi - \varphi_{\vec{p}}) = \sin \theta_{\vec{p}} \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_{\vec{p}}) + \cos \theta_{\vec{p}} \cos \theta$.

This integral may be reduced to the famous one [5] with their representation by degenerated hypergeometric function $F(\alpha; \beta; \gamma; x)$ and equals to:

$$I(n, l, \tilde{p}, f) = (l+2)! z^{l+3} F(-n+l+1; l+3; 2l+2; \frac{2z}{n}), \quad (21b)$$

$$z = \frac{\frac{1}{n} + i\tilde{p}f(\theta_{\tilde{p}}, \theta, \varphi - \varphi_{\tilde{p}})}{\frac{1}{n^2} + \tilde{p}^2 f^2(\theta_{\tilde{p}}, \theta, \varphi - \varphi_{\tilde{p}})}.$$

(21c)

From (21b,c) it follows, that with taking into consideration the analogous factor

$I(n', l', -\tilde{p}, f') \equiv I^*(n', l', \tilde{p}, f')$, which appears at integration over $d\rho'$, with $z \rightarrow z'$ in (21b,c) and $\theta, \varphi \rightarrow \theta', \varphi'$ in f' also, integral over $d\tilde{p}$ in (21) at the physical values $l, l' \geq 0$ and $f, f' \neq 0$ converges due to factors $z^{l+3}, z'^{l'+3}$ in (21b) (see also (22c) in the following), and for finite quantum number values $\tilde{p}_{eff} \sim 1$, in accordance with assuming at approximation of propagation factor in (20b), (21). “Point” values $f, f' = 0$ which present in integration areas over other variables, in an evident manner don't contribute to “general” integral M (21), and don't influence on this integral over $d\tilde{p}$ -convergence; thus, $\tilde{p}_{eff}$ -value remains of the order of unity.

II. ”RIGID” m -

SELECTIONRULE AT TWO-PHOTON EMISSION

With designations (21a,b,c) and under simple variable change $\varphi - \varphi_{\tilde{p}} \rightarrow \varphi$ in integral over $d\varphi$ (and $d\varphi'$ also) this matrix element M (21) with taking into consideration (5b) also may be written as follows:

$$M = -(ee') \tilde{M}(N, N'), N = \{n, l, m\}, N' = \{n', l', m'\}, \quad (22)$$

$$\tilde{M}(N, N') = C_{nl} C_{n'l'} \left(\frac{2}{n}\right)^l \left(\frac{2}{n'}\right)^{l'} \int_{-1}^1 d \cos \theta_{\tilde{p}} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\tilde{p}} \exp[i(m-m')\varphi_{\tilde{p}}] \tilde{I}(N, N', \theta_{\tilde{p}}), \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}(N, N', \theta_{\tilde{p}}) = & \int_{-1}^1 d \cos \theta \Theta_l^m(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi \Phi_m(\varphi) \int_{-1}^1 d \cos \theta' \Theta_{l'}^{m'}(\theta') \int_0^{2\pi} d\varphi' \Phi_{m'}^*(\varphi') \times \\ & \times J(n, l; n', l'; f, f'), \end{aligned} \quad (22b)$$

$$J(n,l;n',l'; f, f') = \int_0^\infty d\tilde{p} \tilde{p}^2 I(n,l,\tilde{p}, f) I^*(n',l',\tilde{p}, f'),$$

(22c)

Where now in z -quantity(21c) (and in z' also) one must put now

$$f = \sin \theta \sin \theta_{\tilde{p}} \cos \varphi + \cos \theta \cos \theta_{\tilde{p}} \quad (f' = \sin \theta' \sin \theta_{\tilde{p}} \cos \varphi' + \cos \theta' \cos \theta_{\tilde{p}}). \quad (22d)$$

In (22a) we take into attention also, that φ -dependence of $\Phi_m(\varphi)$ (3),(7a,b), leads at this variable change to appearance of exponential factor

$\exp[i(m-m')\varphi_{\tilde{p}}]$ in (22a), but limits of integration over $d\varphi, d\varphi'$ in (21),(22b)

don't change, because integral expression is a periodic function $K(\varphi)$ (

$K'(\varphi')$) of $\varphi(\varphi')$ -variable with 2π -period: $K(\varphi+2\pi) = K(\varphi)$

($K'(\varphi+2\pi) = K'(\varphi')$). This follows from symbolic equalities ($K(\varphi)$ -function is omitted here for simplicity):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \Big|_{\varphi-\varphi_{\tilde{p}} \rightarrow \varphi} &= \int_{-\varphi_{\tilde{p}}}^{2\pi-\varphi_{\tilde{p}}} d\varphi = \int_0^{2\pi-\varphi_{\tilde{p}}} d\varphi + \int_{-\varphi_{\tilde{p}}}^0 d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi - \int_{2\pi-\varphi_{\tilde{p}}}^{2\pi} d\varphi \Big|_{\varphi-2\pi \rightarrow \varphi} + \int_{-\varphi_{\tilde{p}}}^0 d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi - \int_{-\varphi_{\tilde{p}}}^0 d\varphi + \int_{-\varphi_{\tilde{p}}}^0 d\varphi = \\ &\int_0^{2\pi} d\varphi. \end{aligned}$$

(23)

Since this $\varphi_{\tilde{p}}$ -variable appears in $\exp[i(m-m')\varphi_{\tilde{p}}]$ only, integral over $d\varphi_{\tilde{p}}$ is not equal to zero at $\Delta m \equiv m' - m = 0$; it is really “rigid” m -selection rule for two-photon emission, while for one-photon emission, as it is well known [1], the values $\Delta m = 0, \pm 1$ are possible.

The quantity $\tilde{M}(N, N')$, in accordance with (22a) and taking into attention “rigid” selection rule $\Delta m = 0$ after trivial integration over $d\varphi_{\tilde{p}}$ appears to be:

$$\tilde{M}(N, N') = 2\pi \tilde{\tilde{M}}(N, N'),$$

(24)

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{M}}(N, N') &= C_{nl} C_{n'l'} \left(\frac{2}{n} \right)^l \left(\frac{2}{n'} \right)^{l'} \int_{-1}^1 d \cos \theta_{\tilde{p}} \times \\ &\times \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{lm}(\theta, \varphi) \int_{-1}^1 d \cos \theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' Y_{l'm'}^*(\theta', \varphi') J(n, l; n', l'; f, f'), \end{aligned} \quad (24a)$$

where $J(n, l; n', l'; f, f')$ -function defined by (21b,c),(22c,d)-formulas, and $\tilde{\tilde{M}}(N, N')$ (24) under that is a dimensionless function of quantum numbers, and at concrete their sets N, N' with $m' = m$ this $\tilde{\tilde{M}}(N, N')$ is simply a number, finding of which in principle is possible by numerical calculation of integrals in (22c),(24a).

From general expressions (22), (24) we may made conclusion, that M doesn't contain expansion parameter $(Z\alpha)$, and the rate w -dependence on this parameter is defined only by photons phase space integral with the result $w \sim (Z\alpha)^6$ being the same as in ref.[3](see also Sect. III).

III. "SOFT" l -SELECTION RULES AND THE RATE OF PROCESS $(Ze)^* \rightarrow (Ze) + 2\gamma$

With usage of (20a), (22),(24) and by usual methods [4] we obtain for two-photon transition $N \rightarrow N'$ rate $w_{2\gamma}$ with taking into attention photons polarization states:

$$w_{2\gamma;aa,bb,ba+ab}(N, N') = \frac{1}{2} \frac{8\alpha^2}{m_e^2 \pi} \left| \tilde{M}(N, N') \right|^2 \int \frac{d\vec{k}}{2k_0(2\pi)^3} \frac{d\vec{k}'}{2k'_0(2\pi)^3} \delta(\Delta E - k_0 - k'_0) \times$$

$$\{(\tilde{e}\tilde{e}')^2, (\tilde{e}\tilde{e}')^2, (\tilde{e}\tilde{e}')^2 + (\tilde{e}\tilde{e}')^2\},$$

(25)

where "aa"- symbol denotes identical photons polarization of the type (7a), "bb"-of the type (7b), and "ba + ab"- different polarization of these types, with corresponding contributions in figure brackets, and in (25) we introduce an extra factor $1/2$ also due to photons identicalness.

After elementary transformations of (25) we have:

$$w_{2\gamma;aa,bb,ba+ab}(N, N') = \frac{2}{3(2\pi)^5} \left| \tilde{M}(N, N') \right|^2 \alpha^2 \frac{\Delta E^3}{m_e^2} \{1, 1, \frac{2}{3}\},$$

(26a)

or, taking into attention $E \equiv E_n$ -expression (4):

$$w_{2\gamma;aa,bb,ba+ab}(N, N') = \frac{1}{12(2\pi)^5} \alpha^2 (Z\alpha)^6 \left| \tilde{M}(N, N') \right|^2 \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)^3 \{1, 1, \frac{2}{3}\} \frac{c}{\lambda_c}. \quad (26b)$$

By extra summing over photons polarization states we obtain:

$$w_{2\gamma}(N, N') = w_{2\gamma;aa}(N, N') + w_{2\gamma;bb}(N, N') + w_{2\gamma;ba+ab}(N, N') =$$

$$= \frac{2}{9(2\pi)^5} \alpha^2 (Z\alpha)^6 \left| \tilde{M}(N, N') \right|^2 \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)^3 \frac{c}{\lambda_c}.$$

(26c)

As one may see from (26a,b), contribution of both polarization types to a total rate (26c) appears to be the same, and the rate of photons emission with different polarizations is slightly less, than with these both identical polarizations.

For the total rate in transition $n \rightarrow n'$ taking into consideration "rigid" m -selection rule we obtain:

$$W_{2\gamma}(n, n', l, m) = \sum_{l', m'=m} W_{2\gamma}(N, N').$$

(27)

We have no any arguments ,that in summing over l' in (27) with evident limitations as $|m'| \leq l' \leq n' - 1$ “rigid” l -selection rules take place, as in a case of one-photon emission : $\Delta l \equiv l' - l = \pm 1[1]$, or $\Delta m = 0$, as in two-photons emission; in any case, we couldn't show that.

It is necessary, however, to point on the following circumstance, which one may consider as “soft” selection rule in two-photon emission.

Namely , as it follows from (6a,b), $\Theta_{lm}(\theta)$ -function may be presented in the form $\Theta_{lm}(\theta) = (\cos \theta)^{l+m} F(\cos \theta)$, where F - in any case (even or odd $(l + m)$ -value) is even function. Then one must take into attention other $\cos \theta$ -dependence in integral expressions (22b,c),(24a)included to f -function(22d)with sufficiently “smooth” f -dependence of these integral expressions. So, under limits of integration over $d \cos \theta$ in (22b),(24a)integral value at odd $(l + m)$ and at other equal conditions must be sufficiently less, than at even $(l + m)$, due to partial compensation of different signs contributions to integral in symmetrical integration intervals $\{-1,0\}, \{0,1\}$. The same refers to $(l' + m')$ -value in integration over $d \cos \theta'$. Since it has been cleared for $m' = m$, and at m -even value contributions of l, l' -odd values are suppressed, and at m -odd value suppressed l, l' -even contributions. The most strong suppression takes place, if both l, l' -values are odd at m -even (or even ones- at m -odd).If l, l' have different parity, in any case “power of suppression” will be intermediate one between strong and full absence of any suppression, i.e. when both values $(l + m)$ and $(l' + m')$ are even ones. Absolute suppression, as, for instance, at $\Delta l \neq \pm 1[1]$ in one-photon emission, will not be; we call this situation as “soft” selection rule.

IV.

DISCUSSION

Power of little ”atomic” expansion parameter $(Z\alpha)$ in (26b,c) equals to $(Z\alpha)^6$, while in the case of “simple” one-photon emission $W_{1\gamma} \sim (Z\alpha)^4$ (8).Therefore, if one take into attention specific factors only, with ignoring numerical multiplies and quantum numbers $\tilde{M}$ -dependence, then in the rates of two-photon expression (26b,c) as compared with one-photon emission rate extra little factor $\alpha(Z\alpha)^2$ presents. This $(Z\alpha)^6$ -

dependence for two-photon emission, as mentioned before, takes place also without taking into attention of spin and polarization effects [3], thus they don't change the power of "atomic" expansion parameter ($Z\alpha$) in the rate expression. The principle new things in our paper are conclusions concerning electron spin states with no spin-flipping and "rigid" m -selection rule ($\Delta m = 0$), plus also estimation of different photons polarization types contributions. However, namely they in a much extent increase chances of experimental identification of two-photon emission presence on the one-photon emission phone and these their properties. It is evident from the following:

1. In the case of used in the paper characteristics of quantum state by set of quantum numbers (19a) total electron energy of hydrogen-like atom in presence of magnetic field H equals to:

$$E = E_n - \mu_B(m + 2m_s)H, \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c},$$

(28)

Correspondingly, total frequency of photons pair emitting in a magnetic field is $\omega = \omega_0 + \omega_L(\Delta m + 2\Delta m_s)$, where $\omega_0 = (E_n - E_{n'})/\hbar$ - frequency value in absence of magnetic field,

$\omega_L = eH/2m_e c$ - Larmor frequency, $\Delta m, \Delta m_s$ - changes of magnetic quantum numbers. But $\Delta m = 0$ in accordance with established "rigid" m -selection rule (Sect. II), and $\Delta m_s = 0$, because two-photon emission happens without spin-flipping (Sect. I). It means, that in "shifted" frequencies two-photon emission will absent at all, unlike of one- photons emission. Otherwise speaking, Zeeman effect itself in any form ("normal" or "anomalous") in two-photon emission is absent at all also.

2. Both emitting photons mainly have the same polarization type (11a,b) or their mixing;

It may be adequately established by registration of photons pare emitting in one direction.

3. Total rate of transition $n \rightarrow n'$ (27) may be essentially increase due to absence of "rigid" limitations on transitions, connected with l -selection rules unlike of one-photon emission.

Except of that, there are also the following evident properties of two-photon emission.

4. Both photons are emitting at the same time, and it may be identified by means of coincidence scheme.

5. The sum of their frequencies equals to photons frequency in “a usual” one-photon emission.

References

1. 1951 0 QC174.1
.S633 Quantum mechanics, A. A. Sokolov, Y. M. Loskutov and I. M. Ternov;
- A. A. Sokolov, Yu. M. Loskutov and I. M. Ternov, Review of Quantum Mechanics, Science, **154**, 1161, 1966.
2. L.D. Landau and E.M. Lifshits, Theoretical Physics, Vol.3, Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory, Pergamon, London, 1958.
3. L.N. Labzowsky, in Russian: Kvantovaya elektrodinamika elektronnykh obolochek I protsessy izlucheniya (Quantum electrodynamics of electron shells and emission processes), Moskva (Moscow), Nauka (Science), Fizmatlit (Physics and mathematical literature), 1996 .
4. V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii, Relativistic Quantum Theory, Part I, Pergamon Press, Oxford, 1971.
5. I.S. Gradshteyn, and I.M. Ryzhik, Tables of Integrals, Sums, and Products, Acad. Press, New York, 1980.

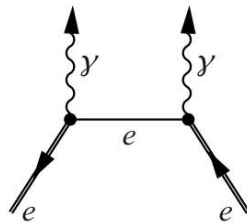


Fig. Two-photon emission (γ) by hydrogen-like atom. Double lines correspond to electron (e) in a nucleus field (18), and ordinary – to electron propagator in a zeroorder over $(Z\alpha)$ -expansion, i.e. propagator of a free electron field (10).

СЕКЦИЯ №33.

**ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ГОРЕНИЕ И ВЗРЫВ, ФИЗИКА
ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ВЕЩЕСТВА
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.17)**

СЕКЦИЯ №34.

**КРИСТАЛЛОГРАФИЯ, ФИЗИКА КРИСТАЛЛОВ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.18)**

СЕКЦИЯ №35.

**ФИЗИКА ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
И УСКОРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.20)**

СЕКЦИЯ №36.

ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.21)

СЕКЦИЯ №37.

ФИЗИКА ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.04.23)

ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.00)

СЕКЦИЯ №38.

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.01)

СЕКЦИЯ №39.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.02)

СЕКЦИЯ №40.

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.03)

СЕКЦИЯ №41.

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.04)

СЕКЦИЯ №42.

ЭЛЕКТРОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.05)

СЕКЦИЯ №43.
ВЫСОКОМОЛЕКУЛЯРНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.06)

**ОТВЕРЖДЕНИЕ АКРИЛСОДЕРЖАЩИХ ЭПОКСИДНЫХ
КОМПОЗИЦИЙ**

Гордеев А.С., Шубин Н.Е.

МГТУ им. Н.Э.Баумана, Калужский филиал, г. Калуга

Эпоксидные композиции холодного отверждения применяются во многих отраслях промышленности. Это связано с наличием у них комплекса технологических и физико-химических свойств, среди которых следует особо отметить высокую механическую прочность, хорошую адгезию к самым различным материалам, высокую химическую стойкость, термостойкость, а также низкую усадку.

К недостаткам эпоксидных составов холодного отверждения следует отнести удлиненный период гелеобразования и дальнейшего отверждения при комнатной и особенно пониженной температуре, что ограничивает их применение в условиях, требующих ускоренных режимов работы.

В качестве отвердителей при комнатной температуре наиболее высокую активность по отношению к эпоксидным системам проявляют алифатические амины, а также производные насыщенных азотсодержащих гетероциклов, таких как морфолин, пиперидин и пиперазин.

Существенное ускорение гелеобразования может быть достигнуто путем введения в состав эпоксидной композиции многофункциональных акрилатов, таких как триметакрилат триметилпропана, пентаакрилат дипентаэритрита и др. Эти производные, благодаря наличию двойных связей, легко вступают в реакцию с аминогруппами отвердителя, а являясь многофункциональными соединениями, способствуют ускоренному формированию полимерной сетки с образованием твердых, однородных продуктов. Кроме того, использование

многофункциональных акрилатов с различной степенью разветвленности и длинной цепей, можно в достаточно широких пределах влиять на физико-механические свойства отвержденных продуктов.

Целью исследования было изучение зависимости времени гелеобразования и механических свойств составов от содержания триакрилата. Были приготовлены смеси эпоксидной диановой смолы Epikote 828 с трехфункциональным акрилатом с соотношением этих компонентов от 90:10 до 70:30. Отверждение реакционноспособной смеси проводилось при комнатной температуре алифатическим аминным отвердителем, имеющим аминный эквивалент 94 г/моль. Для отверждения комбинированную смолу смешивали с отвердителем в мольном соотношении 2:1 в расчете на участвующие в реакции функциональные группы.

Изменение времени гелеобразования в зависимости от содержания триакрилата приведено в табл. 1. С увеличением содержания триакрилата до 30%, масс. время гелеобразования снижается с 900 с, для чистой эпоксидной смолы, до 85 с.

Полнота отверждения составов контролировалась методом ИК-Фурье-спектроскопии по исчезновению характерных полос поглощения участвующих в реакции отверждения функциональных групп: эпоксидных, первичных аминогрупп, двойных связей акриловых остатков. ИК-спектры исходных компонентов, неотвержденной эпоксидной смолы Epikote 828 и алифатического аминного отвердителя приведены на рис. 1 и 2 соответственно. ИК-спектр отвержденного продукта соответствующего составу № 2 приведен на рис. 3.

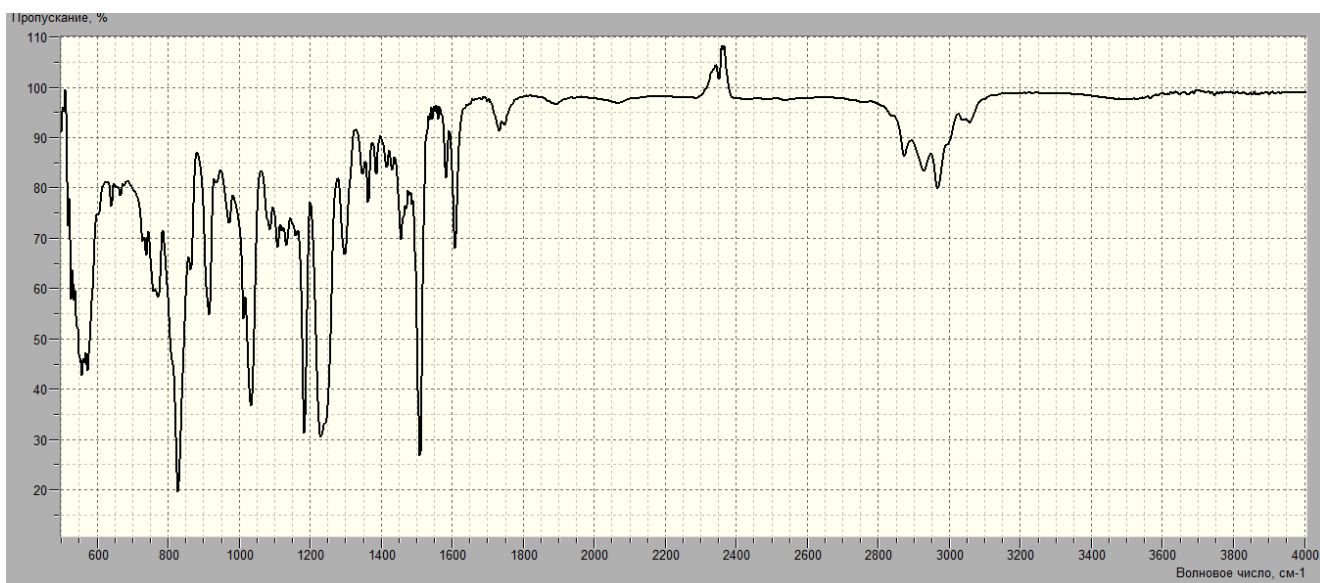


Рисунок 1. ИК-спектр неотвержденной эпоксидной смолы Epikote 828.

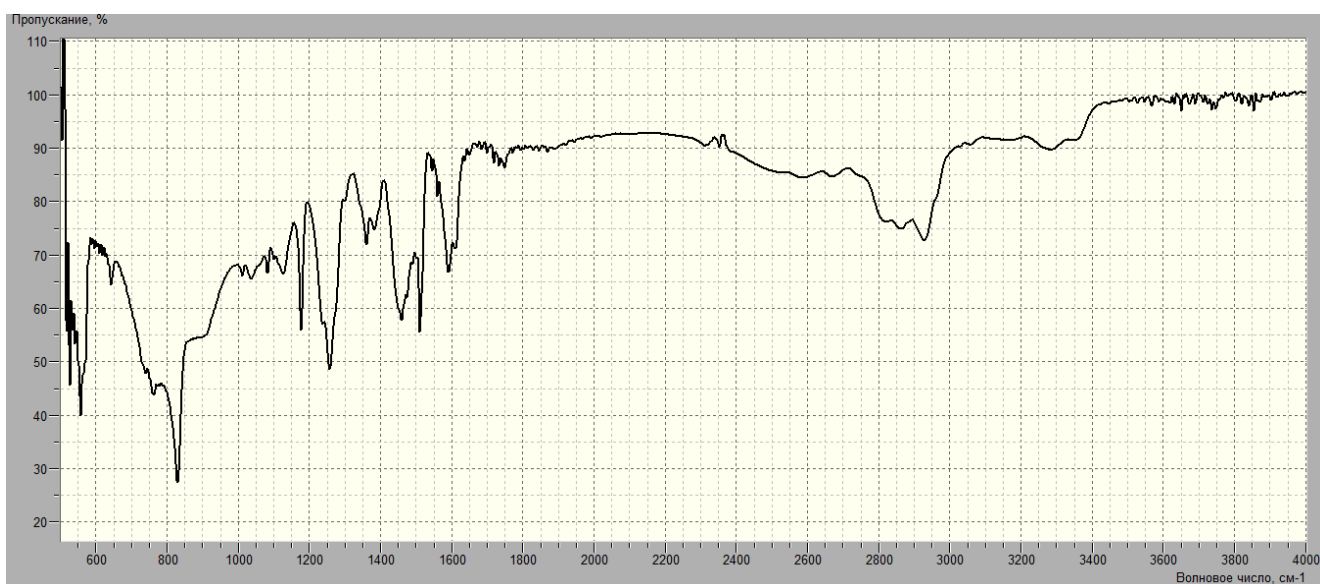


Рисунок 2. ИК-спектр алифатического аминного отвердителя.

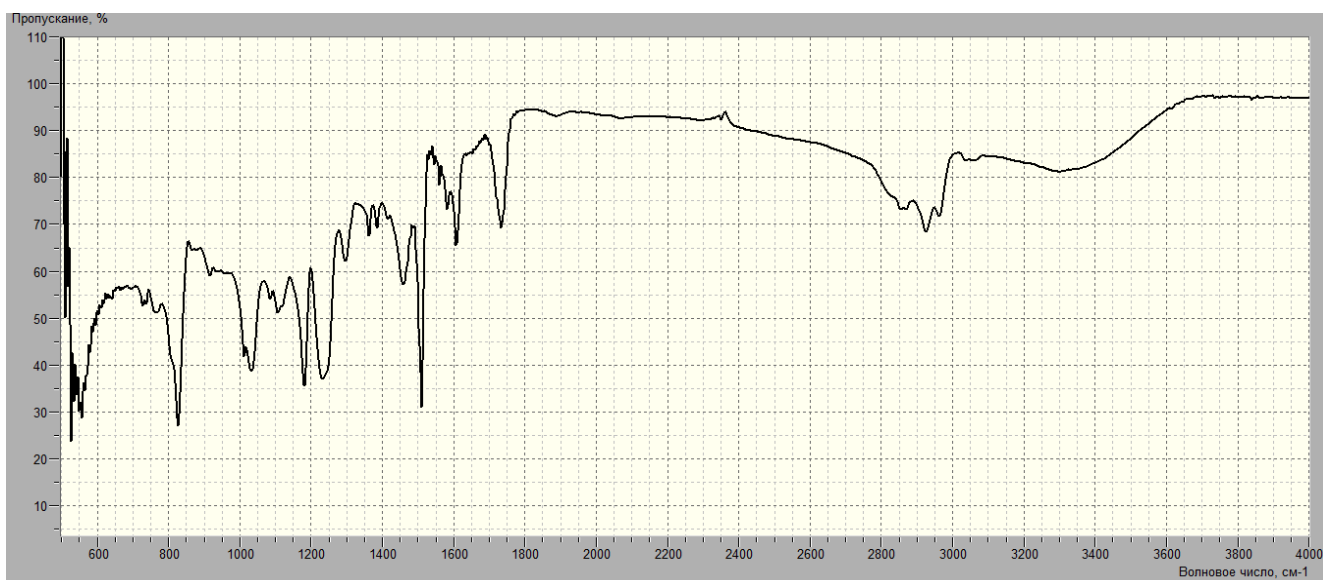


Рисунок 3. ИК-спектр отвержденного продукта (образец 2).

В ИК-спектре эпоксидной смолы идентифицируются характерные пики деформационных колебаний связей оксиранового цикла $C - O$ при 915 см^{-1} , $C - O - C$ при 831 см^{-1} , $C - H$ при 3050 см^{-1} .

В ИК-спектре аминного отвердителя идентифицируется широкая полоса поглощения в области $650\text{--}900\text{ см}^{-1}$, соответствующая первичной аминогруппе. Кроме того, присутствуют характерные для первичных аминов 2 полосы поглощения в области $3300\text{--}3500\text{ см}^{-1}$.

В ИК-спектре образца отвержденного продукта не идентифицируется характерный для эпоксидной группы пик деформационных колебаний при 915 см^{-1} , а пик 831 см^{-1} имеет вдвое меньшую интенсивность по сравнению с неотвержденной смолой Epikote 828. Также отсутствует пик деформационных колебаний связи $C - H$ оксиранового цикла при 3050 см^{-1} . Широкая полоса поглощения в области $3200\text{--}3500\text{ см}^{-1}$ свидетельствует о появлении вторичных гидроксо-групп и, возможно, указывает на появление вторичной аминогруппы. Характерные для первичной аминогруппы два пика в области $3200\text{--}3500\text{ см}^{-1}$ отсутствуют. Характерная полоса поглощения двойной связи при 1635 см^{-1} также не идентифицируется. Все это

свидетельствует о полноте расхода отвердителя и окончании процесса отверждения.

Полученные отвержденные образцы были выдержаны при комнатной температуре в течение 24 ч и подвергнуты механическим испытаниям. Показано, что с увеличением доли акрилового компонента наблюдается увеличение предела прочности при растяжении и ударной вязкости до некоторого максимума, после чего происходит снижение значений этих свойств. Максимальные показатели прочности при растяжении и ударной вязкости наблюдаются при содержании триакрилата от 15 до 20% по массе.

Результаты измерения времени гелеобразования и механических свойств приведены в табл. 1.

Таблица 1

Зависимость времени гелеобразования и механических свойств от
состава композиции

Состав	№ композиции					
	1	2	3	4	5	6
Смола Epikote 828, вес.ч.	100	90	85	80	75	70
Триметакрилат, вес.ч.	0	10	15	20	25	30
Отвердитель, г/100 г комбинированной смолы	22	24	25	26	27	28
Время гелеобразования, с	900	465	278	170	117	85
Предел	55,4	65,8	71,4	65,6	58,1	60,8

прочности при растяжении, <i>МПа</i>						
Ударная вязкость, <i>кДж / м²</i>	3,3	13,3	25,8	55	49,2	42,5

Полученные результаты показывают, что введение в состав эпоксидной композиции многофункционального акрилата значительно сокращает время гелеобразования, позволяя использовать подобные комбинированные смолы в композициях ускоренного отверждения. При этом предел прочности при растяжении достигает максимума при содержании триакрилата 15-20% по массе. Ударная вязкость также проходит через максимум при содержании триакрилата 20%.

Список литературы

1. Gonzalez, M.G. Application of FTIR on Epoxy Resins – Identification, Monitoring the curing process, Phase separation and Water uptake / J.C. Cabanelas, J. Baselga // Infrared Spectroscopy – Materials science, engineering and technology, Prof. Theophanides Theophile (Ed.). - 2012

СЕКЦИЯ №44.

**ХИМИЯ ЭЛЕМЕНТООРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.08)**

СЕКЦИЯ №45.

ХИМИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.09)

СЕКЦИЯ №46.

БИООРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.10)

СЕКЦИЯ №47.

КОЛЛОИДНАЯ ХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.11)

**СЕКЦИЯ №48.
БИОНЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.12)**

**СЕКЦИЯ №49.
НЕФТЕХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.13)**

**СЕКЦИЯ №50.
РАДИОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.14)**

**СЕКЦИЯ №51.
КИНЕТИКА И КАТАЛИЗ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.15)**

**СЕКЦИЯ №52.
МЕДИЦИНСКАЯ ХИМИЯ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.16)**

**СЕКЦИЯ №53.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ХИМИЯ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.17)**

**СЕКЦИЯ №54.
ХИМИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 02.00.21)**

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.00.00)

**ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.00)**

**СЕКЦИЯ №55.
РАДИОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.01)**

**СЕКЦИЯ №56.
БИОФИЗИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.02)**

**СЕКЦИЯ №57.
МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.03)**

**СЕКЦИЯ №58.
БИОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.04)**

**СЕКЦИЯ №59.
ФИЗИОЛОГИЯ И БИОХИМИЯ РАСТЕНИЙ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.05)**

**СЕКЦИЯ №60.
БИОТЕХНОЛОГИЯ
(В ТОМ ЧИСЛЕ БИОНАНОТЕХНОЛОГИИ)
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.06)**

**СЕКЦИЯ №61.
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ГЕНЕТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.07)**

**СЕКЦИЯ №62.
БИОИНЖЕНЕРИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.08)**

**СЕКЦИЯ №63.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ,
БИОИНФОРМАТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.01.09)**

ОБЩАЯ БИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.00)

**СЕКЦИЯ №64.
БОТАНИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.01)**

**СЕКЦИЯ №65.
ВИРУСОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.02)**

**СЕКЦИЯ №66.
МИКРОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.03)**

**СЕКЦИЯ №67.
ЗООЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.04)**

**СЕКЦИЯ №68.
ЭНТОМОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.05)**

**СЕКЦИЯ №69.
ИХТИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.06)**

**СЕКЦИЯ №70.
ГЕНЕТИКА (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.07)**

СЕКЦИЯ №71.

ЭКОЛОГИЯ (ПО ОТРАСЛЯМ) (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.08)

ФЕНОТИПИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПОПУЛЯЦИЙ ЕЛИ В ЦЕНТРАЛЬНО-ЛЕСНОМ ЗАПОВЕДНИКЕ

Попов П. П.

Институт проблем освоения Севера СО РАН, г. Тюмень

Центрально-Лесной заповедник располагается в южной части Валдайской возвышенности на территории Тверской области. В схеме ботанико-географического районирования, он находится в зоне хвойно-широколиственных лесов. На территории заповедника преобладают еловые леса (Миняев, Конечная, 1976; Факторы, 1983). Структура популяций ели здесь с точки зрения таксономической интерпретации изучена недостаточно. Имеется только одна работа В. В. Татарина (1987), выполненная на основе визуальной оценки формы семенных чешуй – основного систематического признака елей европейской и сибирской (Правдин, 1975; Попов, 2014). В основу нашего анализа популяций положены биометрические параметры длины шишек и формы семенных чешуй (Попов, 1999), обусловленные в большой степени генетическими факторами (Khalil, 1974, 1984; Попов, 1997).

Изучение фенотипической структуры популяций ели по форме семенных чешуй и длины шишек проведено на участках разных типов леса или ассоциаций (Факторы, 1983): ельнике сфагново-черничном (*Picetum myrtilloso-sphagnosum*), ельнике чернично-кисличном (*P. oxalidosomyrtillosum*), ельнике кисличном (*P. oxalidosum*), ельнике липняково-ясменниковом (*P. asperuloso-tiliosum*). Древостои фитоценозов IV–V классов возраста с преобладанием ели от 70 % и более, полнотой 0.7–0.8. Изучали изменчивость длины шишек, коэффициентов сужения (*coefficient of*

narrowing – C_n) и вытянутости (*coefficient of projection* – C_p) верхней части семенных чешуй (Попов, 1999). Структуру популяций анализировали при 9-классной градации фенотипов особей (*e, eet, em, emm, m, mms, ms, mss, s*), соответствующих фенотипам популяций: *P.e., P.eet., P.em., P.emm., P.m., P.mms., P.ms., P.mss., P.s.*, различающихся в среднем на 10 % показателя C_n – C_p : –50, –40, –30, –20, –10, 0, 10, 20, 30 % соответственно (Попов, 2013).

При этом всю совокупность фенотипов особей разделяли на три группы: первая группа – фенотипы особей ели европейской (*e, eet, em*); вторая – особи промежуточных фенотипов (*emm, m, mms*); третья – фенотипы особей ели сибирской (*ms, mss, s*). Такое разделение фенотипов особей в популяциях соответствует параметрам формы семенных чешуй, обусловленных влиянием естественной (интрогрессивной) гибридизации елей европейской и сибирской (Данилов, 1943; Бобров, 1944, 1974; Правдин, 1975; Коропачинский, Милютин, 2006) и положению соответствующих фенотипов популяций в общем пространстве их ареала (Попов, 2013).

Показатель внутривидового разнообразия (Животовский, 1982) рассчитывали по частоте фенотипов как квадрат суммы подкоренных значений частот фенотипов: $M = (\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \dots + \sqrt{p_n})^2$, где M – показатель разнообразия, $p_1, p_2 \dots p_n$ – частоты фенотипов в долях единицы. Число особей в выборках достаточно велико (по 100 шт. и более), все результаты статистически высоко достоверны.

На территории Центрально-Лесного заповедника по типам леса практически все показатели близки (таблица). Только средняя длина шишек в ельнике сфагново-черничном несколько (но достоверно) меньше, чем в других фитоценозах. И в среднем по всем участкам она составляет 108 (101–111) мм, и заметно больше, чем по данным В. В. Татарина (1987). Средний показатель C_n равен 34–35, C_p на всех участках равен 64, C_n – C_p — – 29...–31 %. Коэффициент внутривидовой вариации показателей (C_n, C_p, C_n – C_p) формы чешуй находится в пределах 18–20, 13–15, 32–45 %

соответственно. Структура популяций представлена 6-ю фенотипами особей, 2/3 из них фенотипы ели европейской, 1/3 – особи промежуточных фенотипов. Фенотипов особей ели сибирской здесь нет. Показатель разнообразия в среднем равен 5.65 (5.44–6.03). По фенотипической структуре популяции на территории заповедника ближе к «эталонной» популяции ели европейской, чем к «эталонной» популяции ели сибирской (Попов, 2012).

Показатели длины шишек, формы семенных чешуй, фенотипической структура и разнообразия популяций ели в Центрально-Лесном заповеднике

№ участка	n	L_c		C_n		C_p		$C_n - C_p$	
		$X \pm S_x$	C_v	$X \pm S_x$	C_v	$X \pm S_x$	C_v	$X \pm S_x$	C_v
1	118	101±1.9	20	35±0.6	19	64±0.8	13	-29±1.2	44
2	114	110±1.7	17	34±0.7	21	64±0.8	13	-30±1.3	45
3	119	111±1.4	16	34±0.6	20	64±0.9	15	-30±1.4	42
4	141	111±1.5	16	34±0.5	18	64±0.7	13	-30±1.1	32
Среднее	–	108		34		64		-30	

продолжение таблицы

№ участка	Частота фенотипов, %									M
	<i>e</i>	<i>eem</i>	<i>em</i>	<i>emm</i>	<i>m</i>	<i>mms</i>	<i>ms</i>	<i>mss</i>	<i>s</i>	
1	12	19	31	26	8	4	–	–	–	5.44
2	16	23	29	21	8	3	–	–	–	5.44
3	24	16	28	17	9	5	1	–	–	6.03
4	14	20	36	18	9	2	1	–	–	5.70
Среднее	16	20	31	21	9	3	–	–	–	5.65

Примечание. Участки: 1 – ельник сфагново-черничный; 2 – ельник чернично-кисличный; 3 – ельник кисличный; 4 – ельник липняково-ясенниковый; n – число особей в выборке; L_c – длина шишек; C_n – коэффициент сужения, C_p – коэффициент вытянутости верхней части семенных чешуй; $X \pm S_x$ – среднее значение и его ошибка; C_v – коэффициент вариации; фенотипы особей: *e* – *europaea*, *eem* – *europaea-europaesa-medioxima*, *em* – *europaesa-medioxima*, *emm* – *europaesa-medioxima-medioxima*, *m* – *medioxima*, *mms* – *medioxima-medioxima-sibirica*, *ms* – *medioxima-sibirica*, *mss* – *medioxima-sibirica-sibirica*, *s* – *sibirica*; M – показатель разнообразия.

Результаты исследования можно сопоставить только с данными В. В. Татаринова (1987) по Центрально-Лесному заповеднику, хотя они практически несопоставимы, поскольку оценка формы семенных чешуй Татариновым выполнялась визуально-описательным путем. Еще большим различием является исходная единица анализа структуры популяций. В наших исследованиях это одна шишка с каждого дерева при сплошном сборе,

в работе В. В. Татаринова – все шишки на площадках в 1 квадратный метр, располагающихся по диагонали пробной площади. Достаточно четких данных по структуре популяций В. В. Татаринов не получил, считая полученные результаты предварительными. По мнению Н. А. Миняева и Г. Ю. Конечной (1976) на территории заповедника распространена ель европейская с примесью ели финской. С точки зрения фенотипической структуры, это, в общем-то, верно. Частота особей фенотипов ели европейской здесь составляют 67, а особей промежуточных фенотипов 33 %. Результаты исследования дают представление о фенотипической структуре еловых популяций на территории Центрально-Лесного заповедника и приемах ее изучения.

Список литературы

1. Бобров Е. Г. Об особенностях флоры эрратической области (один из путей формообразования) // Сов. ботаника. 1944. № 2. С. 3–20.
2. Бобров Е. Г. Интрогрессивная гибридизация в роде *Picea* A. Dietr. // Тр. Ин-та ЭриЖ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1974. Вып. 90. С. 60–66.
3. Данилов Д. Н. Изменчивость семенных чешуй *Picea excelsa* // Ботан. журн. 1943. Т. 28, № 5. С. 191–202.
4. Животовский Л. А. Показатели популяционной изменчивости по полиморфным признакам // Фенетика популяций. М.: Наука, 1982. С. 38–45.
5. Коропачинский И. Ю., Милютин Л. И. Естественная гибридизация древесных растений. Новосибирск: Гео, 2006. 223 с.
6. Миняев Н. А., Конечная Г. Ю. Флора Центрально-лесного государственного заповедника. Л.: Наука, 1976. 104 с.
7. Попов П. П. Форма семенных чешуй в полусибирском потомстве ели // Лесоведение. 1997. № 6. С. 54–57.
8. Попов П. П. Географическая изменчивость формы семенных чешуй в Восточной Европе и Западной Сибири // Лесоведение. 1999. № 1. С. 68–73.
9. Попов П. П. «Эталонные» популяций для дискриминантного анализа в сплошном ареале елей европейской и сибирской // Экология. 2012. № 1. С. 16–21.
10. Попов П. П. Фенотипическая структура популяций *Picea abies* и *P. Obovata* (Pinaceae) на востоке Европы // Ботан. журн. 2013. Т. 98. № 11. С. 1384–1402.
11. Попов П. П. Закономерности региональной дифференциации популяций елей европейской и сибирской. Новосибирск: Наука, 2014. 216 с.

- 12.Правдин Л.Ф. Ель европейская и ель сибирская в СССР. М.: Наука, 1975. 176 с.
13. Татаринов В. В. Сравнительный анализ фенотипической изменчивости популяций ели в сообществах еловых лесов центральной части Русской равнины // Ботан. журнал. 1987. Т. 72. № 2. С. 229–238.
14. Факторы регуляции экосистем еловых лесов. Л: Наука, 1983. 318с.
15. Khalil M.A.K. Genetics of cone morphology in white spruce (*Picea glauca*) /Canad. J. Bot. 1974. V. 52. № 1. P. 15–21.
16. Khalil M.A.K. Genetics of cone morphology of Black spruce (*Picea mariana* Mill. B.S.P.) in Newfoundland, Canada // Silvae genet. 1984. V. 33. № 4/5. P. 101–109.

СЕКЦИЯ №72.

БИОГЕОХИМИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.09)

СЕКЦИЯ №73.

ГИДРОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.10)

СЕКЦИЯ №74.

ПАРАЗИТОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.11)

СЕКЦИЯ №75.

МИКОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.12)

СЕКЦИЯ №76.

ПОЧВОВЕДЕНИЕ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.13)

СЕКЦИЯ №77.

БИОЛОГИЧЕСКИЕ РЕСУРСЫ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.02.14)

ФИЗИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.00)

СЕКЦИЯ №78.

ФИЗИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.01)

СЕКЦИЯ №79.

АНТРОПОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.02)

СЕКЦИЯ №80.

ИММУНОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.03)

СЕКЦИЯ №81.

КЛЕТОЧНАЯ БИОЛОГИЯ, ЦИТОЛОГИЯ,

ГИСТОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.04)

СЕКЦИЯ №82.

**БИОЛОГИЯ РАЗВИТИЯ, ЭМБРИОЛОГИЯ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.05).**

СЕКЦИЯ №83.

НЕЙРОБИОЛОГИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 03.03.06)

ГЕОГРАФИЯ

СЕКЦИЯ №84.

**ФИЗИЧЕСКАЯ ГЕОГРАФИЯ И БИОГЕОГРАФИЯ,
ГЕОГРАФИЯ ПОЧВ И ГЕОХИМИЯ ЛАНДШАФТОВ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 25.00.23)**

СЕКЦИЯ №85.

**ЭКОНОМИЧЕСКАЯ, СОЦИАЛЬНАЯ, ПОЛИТИЧЕСКАЯ И
РЕКРЕАЦИОННАЯ ГЕОГРАФИЯ (СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 25.00.24)**

СЕКЦИЯ №86.

**ГЕОМОРФОЛОГИЯ И ЭВОЛЮЦИОННАЯ ГЕОГРАФИЯ
(СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 25.00.25)**

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

СЕКЦИЯ №87.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ОБНАРУЖЕНИЯ И КОРРЕКЦИИ ОШИБОК СПЕЦ ПРОЦЕССОРА ПСКВ С ПОСТЕПЕННОЙ ДЕГРАДАЦИЕЙ

Макарова А.В., Калмыков И.А.

ФГАОУ ВО Северо-Кавказский федеральный университет, Россия,
г. Ставрополь

Одним из наиболее перспективных направлений повышения отказоустойчивости вычислительных устройств является широкое применение корректирующих кодов, способных обнаруживать и корректировать ошибки.

Применение полиномиальной системы классов вычетов позволяет не только повысить скорость обработки данных, но и обеспечить требуемый уровень надежности функционирования спец процессора ПСКВ с деградируемой структурой. Отсутствие взаимосвязи между вычислительными трактами спец процессора ПСКВ не позволяет ошибкам перемещаться по другим основаниям.

Непозиционные спецпроцессоры обладают свойством – способностью сохранить работоспособное состояние при возникновении отказов за счет снижения в допустимых пределах основных показателей качества функционирования.

Такая способность непозиционного спецпроцессора базируется на максимально независимых функциональных компонентах вычислительных средств и поразрядном характере распространении ошибок при выполнении последовательности арифметических операций информация избыточность ПСКВ и распараллеливание на уровне арифметических операций являются идеальной основой для осуществления реконфигурации структуры СП ПСКВ при отказе его элементов, что позволяет сохранять работоспособное состояние при некотором уменьшении точности вычислений или корректирующей способности кода.

Известные корректирующие способности кодов ПСКВ, способные обнаруживать и исправлять однократные ошибки в остатке, которые имеют недостаток. Применение избыточных корректирующих кодов ПСКВ позволяет исправлять однократные ошибки и обнаруживать двукратные ошибки.

Рассмотрим алгоритм реконфигурации структуры непозиционного спецпроцессора, позволяющий сохранить работоспособное состояние при выходе из строя одного из оснований, за счет перераспределения вычислительных ресурсов на оставшуюся работоспособную часть вычислительной системы.

Пусть задана упорядоченная система оснований $p_1(z), p_2(z), \dots, p_n(z), p_{n+1}(z)$ ПСКВ, которые удовлетворяют условию $\text{ord } p_i(z) \leq \text{ord } p_{n+1}(z)$, $i=1, 2, \dots, n$ и в данной системе определен правильный полином $A(z) = (\alpha_1(z), \dots, \alpha_i(z), \dots, \alpha_{n+1}(z)) \in P_{\text{раб}}(z)$. Тогда искажение любого остатка выводит исходный полином $A(z)$ из множества разрешенных комбинаций, т.е. $A^*(z) = (\alpha_1(z), \dots, \alpha_i^*(z), \dots, \alpha_{n+1}(z)) \notin P_{\text{раб}}(z)$, где $\alpha_i^*(z) \neq \alpha_i(z)$.

Возникновение ошибки в непозиционной кодовой конструкции переводит последнюю из подмножества разрешенных комбинаций в подмножество запрещенных. Согласно КТО значение ошибочного полинома в этом случае определяется выражением

$$A^*(x) = \sum_{i=1}^{k+r} \alpha_i(x) B_i(x) \bmod P_{\text{пол}}(x) = A(x) + \left| \Delta \alpha_j(x) B_j(x) \right|_{P_{\text{пол}}(x)}^+ \quad (1)$$

Из выражения (1) видно, что местоположение ошибочного полинома относительно рабочего диапазона определяется величиной второго слагаемого.

Важную роль имеет величина ортогонального базиса $B_j(x)$, отказавшего основания $p_j(x)$ на перемещение полинома $A^*(x)$ из нулевого интервала

Величина ортогонального основания определяется как

$$B_j(x) = m_j(x) \frac{P_{\text{пол}}(x)}{p_j(x)}$$

(2)

Значение $m_j(x)$ обеспечивает выполнение условия.

Поэтому величина веса ортогонального базиса определяется произведением величин обратных основаниям ПСКВ $p_i(x)$ по модулю $p_j(x)$.

Предположим, что в полиноме $A(x)$, представленном в непозиционном коде ПСКВ $(\alpha_1(z), \dots, \alpha_i(z), \dots, \alpha_{k+n}(z))$ произошла ошибка по j -ому основанию. Тогда интервал, в который попал полином определяется равенством.

$$l_{инт}^j(x) = \left[\frac{A^*(x)}{P_{раб}(x)} \right]$$

Используя китайскую теорему об остатках, получаем

$$l_{инт}^j(z) = \left[\frac{A^*(x)}{P_{раб}(x)} \right] = \left[\frac{A(x) + \Delta A_j(x)}{P_{раб}(x)} \right] = \left[\frac{A(x)}{P_{раб}(x)} + \frac{\Delta A_j(x)}{P_{раб}(x)} \right]$$

Следовательно, если $l_{инт}(z) = 0$, то исходный полином $A(z)$ лежит внутри рабочего диапазона и не является запрещенным. В противном случае $A(z)$ – ошибочная комбинация.

Рассмотрим пример: Покажем процесс вычисления интервала в который попадает ошибка при постепенной деградации структуры спецпроцессора ПСКВ.

Пусть задано расширенное поле $GF(2^4)$, в котором определены минимальные многочлены: $p_1(z) = z + 1$; $p_2(z) = z^2 + z + 1$; $p_3(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$; $p_4(z) = z^4 + z^3 + 1$; $p_5(z) = z^4 + z + 1$.

В качестве контрольных оснований используется $p_4(z) = z^4 + z^3 + 1$ и $p_5(z) = z^4 + z + 1$. При этом рабочий диапазон -

$$P_{раб}(z) = \prod_{i=1}^4 p_i(z) = z^7 + z^6 + z^5 + z^2 + z + 1.$$

При этом полный диапазон составляет $P_{полн}(z) = z^{15} + 1$, $P_{конт45}(z) = z^8 + z^7 + z^5 + z^4 + z^3 + z + 1$.

Допустим, при постепенной деградации в результате функционирования отказало одно из рабочих оснований, а затем одно из рабочих и одно контрольное основания. Проведенные расчеты приведены в таблице 1.

Таблица 1. – Распределение однократных ошибок по диапазону

Отказало P1	Отказало P2	Отказало P3	Отказали P1 и P2	Отказали P1 и P4
8B	273	8B	117	79
D1	2CD	D1	1BB	F2
116	339	116	1D1	8B
173	4E6	173	22E	1E4
19D	54B	19D	273	19D
1A2	59A	1A2	2CD	116
22C	672	22C	339	16F
237	695	237	376	3C0
2A7	757	2A7	3A2	3B9
2E6	9AF	2CD	421	33A
33A	9CC	2E6	45C	343
344	9F9	33A	4E6	22C
395	A96	344	537	255
3B1	B34	395	54B	2DE
421	BBF	3B1	59A	2A7
458	C63	421	672	F
46E	CE4	458	695	14
4BF	D2A	46E	6EC	1D
4D3	EAE	4BF	744	5D
51D	F59	4D3	757	BA
54E	FDD	51D	765	E7
5C5	1067	54E	81D	174
5CC	113F	59A	842	129
659	11EB	5C5	8B8	1CE
674	1249	5CC	9AF	193
688	135E	659	9CC	2E0
6FF	1398	674	9F9	2BD
72A	13F2	688	A6E	252
762	14A5	6FF	A8F	20F
7E9	150D	72A	A96	39C
7FB	152C	757	B34	3C1
A8F	1615	762	B81	326
1084	1668	7E9	BBF	
14A5	177E	7FB	C73	
151E	1827		CE4	
1F91	18C6		CFB	
2108	19C8		D2A	
2529	1A0B		DC8	
318C	1A54		DF3	
35AD	1AF1		E88	
4842	1C83		EAE	
4C63	1CC1		ECA	

58C6	1D5C		F15	
5CE7	1EB2		F59	
694A	1F91		FDD	
6D6B	1FBA			
79CE				
7DEF				

Анализ таблицы показывает, что ошибка переводит разрешенную модулярную комбинацию в соответствующий интервал полного диапазона. Очевидно, что использование двух контрольных оснований, позволяет по величине $l_{um}(z)$ определить местоположение и глубину $\Delta\alpha_i(z)$ ошибки. При этом такой избыточный модулярный код способен исправить более 90 процентов двукратных ошибок.

Проведенные исследования показали, что ПСКВ корректирует пачки ошибок, которые располагаются внутри одного остатка, может исправлять ошибки в системах передачи данных, вне остатка не исправляются ошибки.

Список литературы

1. Калмыков И.А. Математическая модель нейронной сети для исправления ошибок непозиционного кода поля Галуа в частотной области/ «Нейрокомпьютеры: разработка и применение» 2004, №5-6, с.71-78;
2. Калмыков И.А. Разработка метода контроля и коррекции ошибок для непозиционного спецпроцессора с деградируемой структурой/Збірник наукових праць 2004, Київ, Національна Академія Наук України, Випуск № 25, с. 65-78.
3. Макарова А.В. «Анализ методов обнаружения и коррекции ошибок в полиномиальной системе классов вычетов» // Материалы I Всероссийской научно-технической конференция «Фундаментальные и прикладные аспекты компьютерных технологий и информационной безопасности», 12-13 февраля 2015 года, Секция – Защита информации, Институт компьютерных технологий и информационной безопасности ЮФУ, Ростовская область, г.

Таганрог, ул. Чехова, 2.

ГЕОЛОГИЯ

СЕКЦИЯ №88.

РАЗВИТИЕ ГЕОЛОГИИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

ПЛАН КОНФЕРЕНЦИЙ НА 2016 ГОД

Январь 2016г.

III Международная научно-практическая конференция **«Актуальные вопросы естественных и математических наук в современных условиях развития страны»**, г. Санкт-Петербург

Прием статей для публикации: до 1 января 2016г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 февраля 2016г.

Февраль 2016г.

III Международная научно-практическая конференция **«Актуальные проблемы естественных и математических наук в России и за рубежом»**, г. Новосибирск

Прием статей для публикации: до 1 февраля 2016г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 марта 2016г.

Март 2016г.

III Международная научно-практическая конференция **«Актуальные вопросы современных математических и естественных наук»**, г. Екатеринбург

Прием статей для публикации: до 1 марта 2016г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 апреля 2016г.

Апрель 2016г.

III Международная научно-практическая конференция **«Актуальные проблемы и достижения в естественных и математических науках»**, г. Самара

Прием статей для публикации: до 1 апреля 2016г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 мая 2016г.

Май 2016г.

III Международная научно-практическая конференция **«Актуальные вопросы и перспективы развития математических и естественных наук»**, г. Омск

Прием статей для публикации: до 1 мая 2016г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 июня 2016г.

Июнь 2016г.

III Международная научно-практическая конференция **«Современные проблемы математических и естественных наук в мире»**, г. Казань

Прием статей для публикации: до 1 июня 2016г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 июля 2016г.

Июль 2016г.

III Международная научно-практическая конференция «О вопросах и проблемах современных математических и естественных наук», г. Челябинск

Прием статей для публикации: до 1 июля 2016г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 августа 2016г.

Август 2016г.

III Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии естественных и математических наук», г. Ростов-на-Дону

Прием статей для публикации: до 1 августа 2016г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 сентября 2016г.

Сентябрь 2016г.

III Международная научно-практическая конференция «Естественные и математические науки в современном мире», г. Уфа

Прием статей для публикации: до 1 сентября 2016г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 октября 2016г.

Октябрь 2016г.

III Международная научно-практическая конференция «Основные проблемы естественных и математических наук», г. Волгоград

Прием статей для публикации: до 1 октября 2016г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 ноября 2016г.

Ноябрь 2016г.

III Международная научно-практическая конференция «Естественные и математические науки: вопросы и тенденции развития», г. Красноярск

Прием статей для публикации: до 1 ноября 2016г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 декабря 2016г.

Декабрь 2016г.

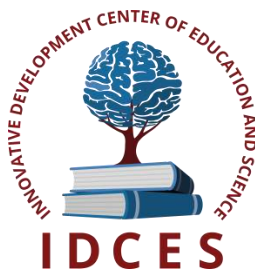
III Международная научно-практическая конференция «Перспективы развития современных математических и естественных наук», г. Воронеж

Прием статей для публикации: до 1 декабря 2016г.

Дата издания и рассылки сборника об итогах конференции: до 1 января 2017г.

С более подробной информацией о международных научно-практических конференциях можно ознакомиться на официальном сайте Инновационного центра развития образования и науки www.izron.ru (раздел «Естественные и математические науки»).

ИННОВАЦИОННЫЙ ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
INNOVATIVE DEVELOPMENT CENTER OF EDUCATION AND SCIENCE



**О вопросах и проблемах современных математических и
естественных наук**

Выпуск III

**Сборник научных трудов по итогам
международной научно-практической конференции
(11 июля 2016г.)**

**г. Челябинск
2016 г.**

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка авторская

Подписано в печать 10.07.2016.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 5,4.
Тираж 250 экз. Заказ № 77.

Отпечатано по заказу ИЦРОН в ООО «Ареал»
603000, г. Нижний Новгород, ул. Студеная, д. 58